

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$AX = B$ ELİPTİK KUATERNİYON MATRİS
DENKLEMİNİN EN KÜÇÜK KARELER ÇÖZÜMÜ VE
GÖRÜNTÜ İYİLEŞTİRMEDEKİ UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Müge PEKYAMAN

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK
Enstitü Bilim Dalı : GEOMETRİ
Tez Danışmanı : Dr. Öğr. Üyesi Hidayet Hüda
KÖSAL

Haziran 2021

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**$AX = B$ ELİPTİK KUATERNİYON MATRİS
DENKLEMİNİN EN KÜÇÜK KARELER ÇÖZÜMÜ VE
GÖRÜNTÜ İYİLEŞTİRMEDEKİ UYGULAMALARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Müge PEKYAMAN

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Enstitü Bilim Dalı : GEOMETRİ

Bu tez 09.06.2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Jüri Başkanı

Üye

Üye

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Müge PEKYAMAN

TEŞEKKÜR

Lisans ve yüksek lisans eğitimim süresince değerli bilgi ve deneyimlerini benim ile her daim paylaşan, her konuda bilgi ve desteğini almaktan çekinmediğim, yüksek lisans tezimin planlanması, hazırlanması ve yazılmasına kadar tüm aşamalarında yardımlarını esirgemeyen, destek veren, bana yol gösteren değerli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Hidayet Hüda KÖSAL'a teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Maddi manevi her koşulda yanımda olan, benden hiçbir desteği esirgemeyen, hayatımın her alanında olduğu gibi yüksek lisans tezimin hazırlanması aşamasında da her türlü yardımı eden, tüm zorlu koşullarda yüreklendiren sevgili aileme teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	i
İÇİNDEKİLER	ii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	iv
ŞEKİLLER LİSTESİ	v
ÖZET.....	vi
SUMMARY	vii
BÖLÜM 1.	
GİRİŞ	1
BÖLÜM 2.	
TEMEL KAVRAMLAR.....	4
2.1. Eliptik Sayılar.....	4
2.1.1. Eliptik sayıların cebirsel özellikleri.....	4
2.1.2 Eliptik matrisler.....	11
BÖLÜM 3.	
$AX = B$ ELİPTİK MATRİS DENKLEMİNİN EN KÜÇÜK KARELER	
ÇÖZÜMÜ	15
3.1. Eliptik Matrislerin Frobenius Normu	15
3.2. $AX = B$ Eliptik Matris Denkleminin En Küçük Kareler Çözümü	18
3.2.1. Eliptik en küçük kareler problemine dair algoritmalar	22
3.2.2. Sayısal örnekler	24
BÖLÜM 4.	
ELİPTİK KUATERNİYONLAR.....	28
4.1. Eliptik Kuaterniyonların Cebirsel Özellikleri	28
4.1.1. Eliptik kuaterniyonların eliptik matris temsilleri	31

4.2. Eliptik Kuaterniyon Değerli Matrisler	34
4.2.1. Eliptik kuaterniyon matrislerin eliptik matris gösterimleri	36
4.2.2. Eliptik kuaterniyon matrislerin frobenius normu	41
4.3. $AX = B$ Eliptik Kuaterniyon Matris Denkleminin En Küçük Kareler	
Çözümü	43
4.3.1. Eliptik kuaterniyonik en küçük kareler problemine dair	
algoritmalar	47
4.3.2. Sayısal örnekler	48
BÖLÜM 5.	
ELİPTİK KUATERNİYONİK EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİ İLE RENKLİ	
GÖRÜNTÜ İYİLEŞTİRME	52
5.1. Renkli Görüntüler	53
5.2. Renkli Görüntü İyileştirme	55
5.3. Renkli Görüntülerin Eliptik Kuaterniyon Matrisleri İle İfade Edilmesi .	57
5.4. Eliptik Kuaterniyonik En Küçük Kareler İyileştirme Filtresi Tasarımı ..	58
BÖLÜM 6.	
SONUÇ	61
KAYNAKLAR	63
ÖZGEÇMİŞ	66

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\bar{A}$	: A matrisinin eşleniği
A^T	: A matrisinin transpozu
A^*	: A matrisinin eşlenik transpozu
A^-	: A matrisinin genelleştirilmiş tersi
A^{-1}	: A matrisinin tersi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayıların cümlesi
$\mathbb{C}^{m \times n}$	: $m \times n$ tipinde kompleks matrislerin cümlesi
$\mathbb{C}_p$	: Eliptik sayıların cümlesi
$\mathbb{C}_p^{m \times n}$	: $m \times n$ tipinde eliptik matrislerin cümlesi
CMYK	: Camgöbeği, galibarda, sarı, siyah renk uzayı
ELSI	: Bozulma modeli (Elliptic Linear Shift Invariant)
EQLSM	: Eliptik kuaterniyonik en küçük kareler iyileştirme filtresi
$\mathbb{H}_p$	: Eliptik kuaterniyonların cümlesi
$\mathbb{H}_p^{m \times n}$	: $m \times n$ tipinde eliptik kuaterniyon matrislerinin cümlesi
HSI	: Renk tonu, doygunluk, yeğinlik renk uzayı
$\mathbb{K}$	: Reel kuaterniyonların cümlesi
LSI	: Bozulma modeli (Linear Shift Invariant)
PSF	: Nokta yayılma fonksiyonu (Point Spread Function)
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar cümlesi
$\mathbb{R}^{m \times n}$	: $m \times n$ tipinde reel matrislerin cümlesi
RGB	: Kırmızı, yeşil, mavi renk uzayı

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1. Eliptik düzlem.....	6
Şekil 2.2. Bir eliptik sayının eliptik düzlemde gösterilmesi	7
Şekil 2.3. Eliptik düzlemde trigonometrik fonksiyonların tanımlanması	7
Şekil 3.1. p değerine göre $AX=B$ eliptik matris denkleminin eliptik, pür imajiner ve pür reel en küçük kareler çözümlerin en küçük normları	24
Şekil 4.1. p değerlerine göre $AX=B$ eliptik kuaterniyon matris denkleminin eliptik, pür imajiner ve pür reel en küçük kareler çözümlerin en küçük normları	49
Şekil 5.1. RGB renk uzayı	53
Şekil 5.2. RGB renk uzayında görüntünün $m \times n$ boyutlarındaki matris gösterimi...	54
Şekil 5.3. Yapay renklendirilmiş görüntüler	54
Şekil 5.4. RGB uzayında elde edilmiş yapay renkli görüntüler	55
Şekil 5.5. Görüntü iyileştirme süreci.....	57
Şekil 5.6. ELSI görüntü iyileştirme modeli	58
Şekil 5.7. Orjinal giriş görüntüleri	59
Şekil 5.8. Bozulmuş görüntüler.....	59
Şekil 5.9. $p \in [-100, -1]$ için optimal değerleri	60
Şekil 5.10. İyileştirilmiş çıkış görüntüleri.....	60

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Eliptik sayılar, eliptik kuaterniyonlar, eliptik kuaterniyon matrisleri, en küçük kareler yöntemi, renkli görüntü iyileştirme.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde konu ile ilgili literatürde yer alan çalışmalar hakkında bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde çalışmamız boyunca kullanacağımız eliptik sayılar ve onların matrislerinin temel kavram ve teoremleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde eliptik matrislerin Frobenius normu tanımlanmış ve bununla ilgili özellikler verilmiştir. Sonrasında ise $AX = B$ eliptik matris denkleminin en küçük kareler çözümü eliptik matrisler, pür imajiner eliptik matrisler ve pür reel eliptik matrisler kümesinde incelenmiştir. Dahası elde ettiğimiz sonuçlarımızın doğruluğunu kanıtlamak ve mevcut sonuçlardan ayırt etmek için bazı açıklayıcı örnekler de çözülmüştür.

Dördüncü bölümde eliptik sayıların genelleştirilmiş formu olan eliptik kuaterniyonların ve onların matrislerinin bazı cebirsel özellikleri verildikten sonra eliptik kuaterniyon matrislerinin Frobenius normu tanımlanmış ve bununla ilgili özellikler verilmiştir. $AX = B$ eliptik kuaterniyon matris denkleminin en küçük kareler çözümü eliptik kuaterniyon matrislerine karşılık gelen eliptik matris temsilleri yardımıyla eliptik kuaterniyon matrisler, pür imajiner eliptik kuaterniyon matrisler ve pür reel eliptik kuaterniyon matrisler kümesinde incelenmiştir. Elde ettiğimiz sonuçlarımızın doğruluğunu kanıtlamak ve mevcut sonuçlardan ayırt etmek için bazı açıklayıcı örnekler de çözülmüştür.

Son bölümde ise ELSI (Elliptic Linear Shift Invariant) bozulma modeli olarak adlandırdığımız eliptik kuaterniyonlar cebri kullanan yeni bir görüntü iyileştirme modeli elde edilmiştir. Bu bağlamda eliptik kuaterniyon cebri kullanılarak örneklenmiş ve eliptik değerli PSF (Nokta Yayılım Fonksiyonu) filtresinden geçirilmiş renkli bir görüntüye c/d/c model tabanlı EQLSM (Elliptic Quaternionic Least Squares Method) eliptik kuaterniyonik en küçük kareler iyileştirme filtresi adını verdiğimiz bir iyileştirme filtresi uygulanmış. Daha sonra giriş görüntüsü ile iyileştirilen çıkış görüntüsü arasındaki uçtan uca MSD (Ortalama Kare Sapma Hatası)'yi minimize yapan en uygun uzay seçilerek iyileştirilmiş görüntü dijital ortamdan analog ortama aktarılmıştır.

LEAST-SQUARES SOLUTIONS OF THE ELLIPTIC QUATERNION MATRIX EQUATION $AX = B$ AND THEIR APPLICATIONS IN COLOUR IMAGE RESTORATION

SUMMARY

Keywords: Elliptic numbers, elliptic quaternions, elliptic quaternion matrices, least squares solution method, color image restoration.

This study consists of five parts. The first part is an introduction devoted to the literature knowledge.

In the second part of this study the fundamental definitions and theorems related to the elliptic numbers and their matrices are given.

In the third part, the Frobenius norm of elliptic matrices is defined and its related properties are given. Later, the least-squares solution of the elliptic matrix equation $AX = B$ is investigated in the set of elliptic matrices, pure imaginary elliptic matrices and pure real elliptic matrices. Moreover, some illustrative examples have been resolved to prove the accuracy of our results and to distinguish them from the current results.

In the fourth part, after some algebraic properties of elliptic quaternions and their matrices, which are the generalized form of elliptic numbers, are given, the Frobenius norm of elliptic quaternion matrices is defined and related properties are given. The least-squares solution of the elliptic quaternion matrix equation $AX = B$ is studied in the set of elliptic quaternion matrices, pure imaginary elliptic quaternion matrices and pure real elliptic quaternion matrices with the help of elliptic matrix representations corresponding to elliptic quaternion matrices. Moreover, some illustrative examples have been resolved to prove the accuracy of our results and to distinguish them from the current results.

In the last part, a new image restoration model using the algebra of elliptic quaternions, which we call ELSI distortion model, is obtained. In this context, a c/d/c model based EQLSM quaternionic least-squares restoration filter is applied to a color image sampled using elliptic quaternion algebra and passed through an elliptic valued PSF filter. Then, the improved image was transferred from digital to analog environment by selecting the most suitable space that minimizes the end-to-end MSD between the input image and the improved output image.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Reel kuaterniyonlar 1843 yılında W. R. Hamilton tarafından tanımlanmıştır. W. R. Hamilton'un amacı kompleks sayıları daha yüksek boyutlara genişletmektir. Reel kuaterniyonlar cümlesi

$$\mathbb{K} = \{a = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \quad (1.1)$$

biçiminde ifade edilir. Burada i, j, k birimlerinin çarpımı

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j \quad (1.2)$$

biçiminde tanımlanmıştır. Bu çarpım kuralından reel kuaterniyonlarda çarpma işleminin değişme özelliği olmadığı görülmektedir. Reel kuaterniyonlar cümlesi, tanımlanan toplama ve skalarla çarpma işlemleri ile birlikte kompleks sayılar cümlesi üzerinde 2-boyutlu, reel sayılar cümlesi üzerinde ise 4-boyutlu vektör uzayıdır [1].

Bir çok matematiksel ve fiziksel problemlerin teori ve sayısal hesaplamasını inceleme sürecinde, reel, kompleks ve kuaterniyonik en küçük kareler problemi ile karşılaşılır [2-4]. Kuaterniyon matris denklemleri ve bunların en küçük kareler çözümleri, bilgisayar bilimi, kuantum fiziği, istatistik, sinyal ve renkli görüntü işleme, katı mekanik, kuantum mekaniği, kontrol teorisi, alan teorisi ve benzeri gibi birçok alanda yaygın olarak uygulanmaktadır [4-13]. Bu nedenle birçok araştırmacı bu alanda faaliyet göstermektedir. Örneğin; Song ve ark. [8] $A_1XB_1 = C_1, A_2XB_2 = C_2$ ve $AXB + CYD = E$ kuaterniyon matris denklemlerinin genel çözümünü Cramer kuralı ile araştırdı. Zhang ve ark. [9-10], sırasıyla $AX = B$ ve $AXB + CXD = E$ kuaterniyon

matris denklemlerinin özel en küçük kareler çözümlerini inceledi. Yuan ve ark. kuaterniyon matrislerinin kompleks temsilleri ve genelleştirilmiş tersler yardımı ile $AX = B$ kuaterniyon matris denkleminin en küçük kareler çözümünü kuaterniyon matrisleri, pür kuaterniyon matrisleri ve pür reel matrisler kümesinde elde etmiştir. Dahası bu teori yardımı ile renkli görüntü iyileştirme çalışmıştır [12]. Zhang ve ark. $AX = B$ kuaterniyon matris denkleminin özel en küçük kareler çözümünü elde ederek bu çözümü renkli görüntülerin iyileştirme sürecinde kullanmıştır [13].

Hamilton'un keşfinden sonra C. Segre tarafından 1892 yılında komütatif kuaterniyonlar cümlesi tanımlanmıştır [14]. Komütatif kuaterniyonlar tıpkı reel kuaterniyonlar gibi kompleks sayılar cümlesi üzerinde 2-boyutlu ve reel sayılar cümlesi üzerinde 4-boyutlu vektör uzayıdır. Komütatif kuaterniyonlar, reel kuaterniyonlardan farklı olarak çarpma işlemine göre değişme özelliğine sahiptir. Bunun yanısıra komütatif kuaterniyonlar cümlesi sıfır bölen elemana sahiptir. Komütatif kuaterniyonların genelleştirilmiş hali eliptik kuaterniyonlardır [15]. Eliptik kuaterniyonlar, eliptik sayılar cümlesi üzerinde 2-boyutlu ve reel sayılar cümlesi üzerinde 4-boyutlu vektör uzayıdır [16]. Bunun yanı sıra eliptik kuaterniyonlar kümesinde tanımlı çarpma, bölme, kuvvet alma, kök hesaplama vb. birçok cebirsel işlemin algoritmik karmaşıklığı diğer değişmeli olmayan dört boyutlu hiperkompleks sayılara göre büyük ölçüde düşüktür. Bu durumda bu sistemi diğer değişmeli olmayan dört boyutlu hiperkompleks sayılara göre daha avantajlı bir hale getirmektedir [17].

Komütatif kuaterniyonlar ve eliptik kuaterniyonlar da hareket geometrisi, diferensiyel geometri, sayısal görüntü işleme, sinyal işleme, bilgisayar programlama gibi birçok alanda uygulamalara sahiptirler.

Pei ve ark. komütatif kuaterniyonları ve onların Fourier dönüşümlerini kullanarak görüntü ve sinyal işleme süreçlerinin birçok uygulamalarını gerçekleştirmişlerdir [17]. Catoni ve ark. bu iki sayı sistemlerini N boyuta taşıyarak geometrik açıdan incelemişlerdir [18]. Catoni ve ark. komütatif kuaterniyonların ve eliptik kuaterniyonların holomorfik fonksiyonları, kutupsal gösterimleri ve konformal dönüşümleri konularını çalışıp bu konularla ilgili sonuçlar elde etmişlerdir [15].

Isokawa ve ark. komütatif kuaterniyonları baz alarak çoklu hopfield sinir ağlarını çalışmışlardır [19]. Kosal ve Tosun komütatif kuaterniyon matrislerinin temel cebirsel özelliklerini komütatif kuaterniyonlara karşılık gelen temel matrisler yardımıyla incelemişlerdir [20]. Kosal ve ark. komütatif kuaterniyon değerli matrisler üzerinde eşlenik benzerlik bağıntısını tanımlayarak komütatif kuaterniyon değerli matrislerin eşlenik özdeğer ve eşlenik özvektör kavramlarını tanımlamışlardır [21]. Kosal ve Tosun, komütatif kuaterniyonlar ve onların matrisleri üzerinde eşlenik benzerlik, yarı benzerlik ve eşlenik yarı benzerlik gibi denklik bağıntıları elde etmişlerdir. Ayrıca Sylvester-s-Eşlenik komütatif kuaterniyon matris denkleminin çözümünü bu denklik bağıntıları yardımıyla vermişlerdir [22]. Kosal ve Tosun bir başka çalışmalarında komütatif kuaterniyonlar ve onların matrisleri üzerinde evrensel benzerlik eşitliğini elde ederek her iki uzayda da temel denklemlerin çözümlerini elde etmişlerdir [23]. Son olarak, Kosal komütatif kuaterniyon matris uzayında $AX = B$ denklemin en küçük kareler çözümünü elde ederek bu teoremin renkli görüntü iyileştirmedeki uygulamalarını çalışmışlardır [24].

BÖLÜM 2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Eliptik Sayılar

Kompleks sayılar ilk kez İtalyan matematikçiler G. Cardan ve R. Bombelli tarafından cebirsel işlemlerde kullanılmıştır [24]. Tarihte çeşitli matematikçiler i kompleks birimi modifiye etmişlerdir. İngiliz geometrici W. Clifford $i^2 = 1$ ($i \neq \pm 1$) olarak hiperbolik sayıları tanımlamıştır [25]. W. Clifford'un geliştirdiği bu sayı sistemi mekanik problemlerinde birçok kolaylık sağlamıştır. Alman geometrici E. Study $i^2 = 0$ ($i \neq 0$) olarak dual sayıları tanımlamıştır. Dual sayılar da kinematik, robotik kontrol, uzaysal mekanik gibi birçok alanda uygulamalara sahiptir [26].

Daha sonraki yıllarda bu üç sayı sistemi $i^2 = p$ ve $p \in \mathbb{R}$ olacak biçimde genelleştirilmiştir [24]. $i^2 = p$ birimi ile tanımlanan sayı sistemine genelleştirilmiş kompleks sayı sistemi adı verilmiştir. Burada p değeri $(-\infty, \infty)$ aralığındadır. $p < 0$ için elde edilen sayı sistemine eliptik sayılar sistemi (özel olarak $p = -1$ alındığında kompleks sayılar elde edilir.), $p = 0$ alındığında parabolik veya dual sayılar sistemi ve son olarak $p > 0$ alındığında hiperbolik sayılar sistemi elde edilir [24].

Bu bölümde eliptik sayıların ve onların matrislerinin bazı cebirsel özellikleri incelenecektir.

2.1.1. Eliptik sayıların cebirsel özellikleri

Eliptik sayıların cümlesi

$$\mathbb{C}_p = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}, i^2 = p < 0\} \quad (2.1)$$

biçiminde ifade edilir. $z = x + iy \in \mathbb{C}_p$ için $\text{Re}(z) = x$ ifadesine z eliptik sayısının reel kısmı, $\text{Im}(z) = y$ ifadesine ise z eliptik sayısının sanal kısmı denir [24]. Bir $z = x + iy$ eliptik sayısının eşleniği ve normu sırasıyla

$$\bar{z} = x - iy \quad \text{ve} \quad \|z\| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 - py^2} \quad (2.2)$$

eşitlikleri ile tanımlanır [24].

$z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}_p$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\mathbb{C}_p$ cümlesi üzerinde toplama, çarpma ve skalarla çarpma işlemleri sırasıyla

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2),$$

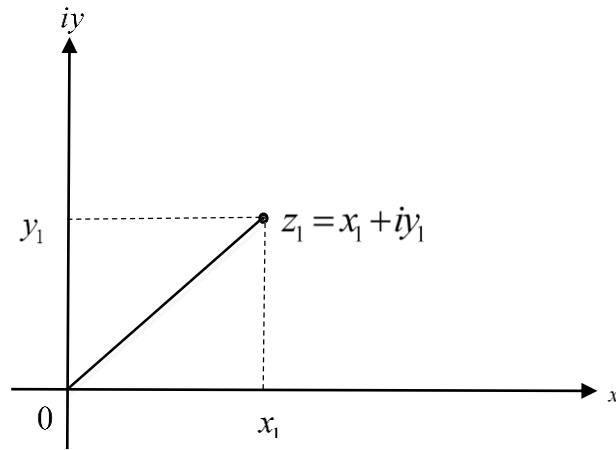
$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 + p y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

$$\lambda z_1 = \lambda(x_1 + iy_1) = \lambda x_1 + i\lambda y_1$$

eşitlikleri ile hesaplanır [24].

Teorem 2.1.1.1. $\mathbb{C}_p$ cümlesi toplama ve skalarla çarpma işlemleri ile birlikte $\mathbb{R}$ cismi üstünde 2-boyutlu bir vektör uzayıdır [24].

Eliptik sayılar cümlesinden $\mathbb{R}^2$ ye de birebir bir eşleme yapılabileceğinden her bir $z_1 = x_1 + iy_1$ eliptik sayısı da düzlemde tek bir biçimde ifade edilebilir.



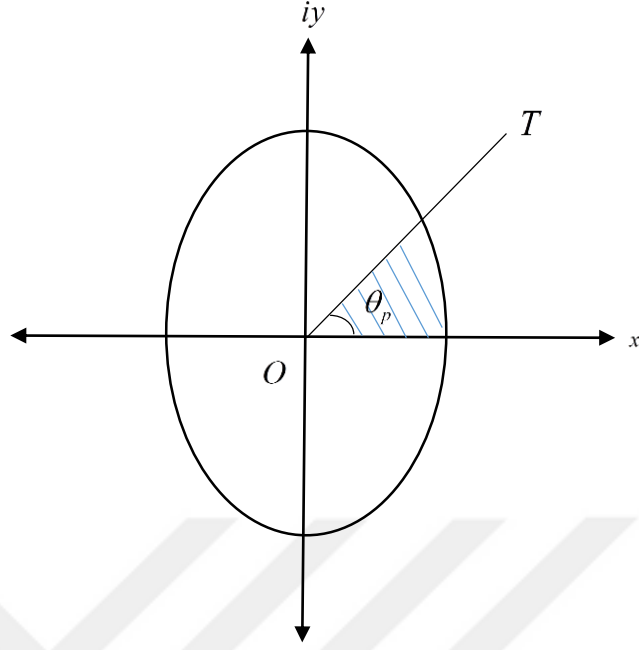
Şekil 2.1. Eliptik düzlem

Şekil 2.1. ile verilen düzleme eliptik düzlem denir. Eliptik düzlemde $z_1 = (x_1, y_1)$ ve $z_2 = (x_2, y_2)$ eliptik sayıları arasındaki uzaklık

$$\|z_1 - z_2\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 - p(y_1 - y_2)^2} \quad (2.3)$$

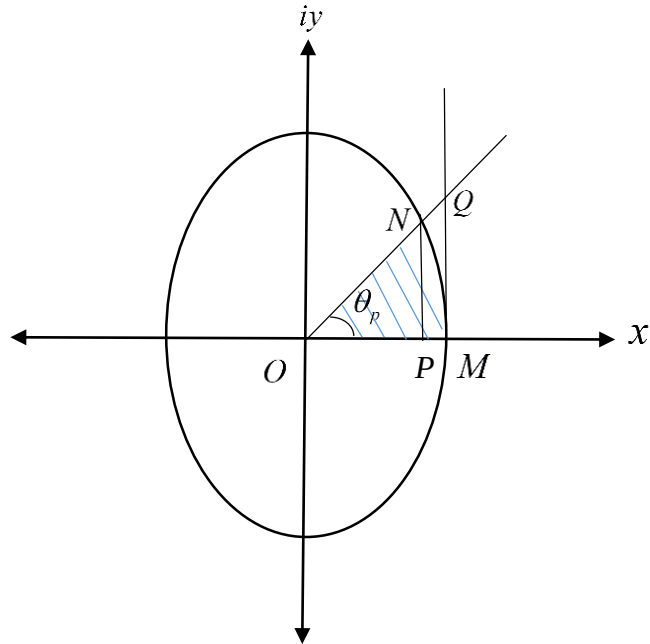
biçiminde tanımlanır. Bu düzlemde başlangıç noktasına 1 birim uzaklıkta olan eliptik sayıların cümlesi bir elipstir ve $x^2 - py^2 = 1$ denklemi ile verilir [24].

Eliptik düzlemde $z_1 = (x_1, y_1)$ eliptik sayısı bir $\overrightarrow{OT}$ yönlü doğru parçası ile gösterilebilir.



Şekil 2.2. Bir eliptik sayının eliptik düzlemde gösterilmesi

Bu durumda $\overrightarrow{OT}$ vektörü ile reel eksen arasında kalan elipsin yay uzunluğuna $z_1 = (x_1, y_1)$ eliptik sayısının argümenti denir. Ayrıca, eliptik düzlemde trigonometrik fonksiyonlar da tanımlanabilir.



Şekil 2.3. Eliptik düzlemde trigonometrik fonksiyonların tanımlanması

$\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{NP}$ ve $\overrightarrow{QM}$ vektörleri sırasıyla $\cos_p \theta_p$, $\sin_p \theta_p$ ve $\tan_p \theta_p$ trigonometrik fonksiyonlarını tanımlar.

$\cos_p \theta_p$ ve $\sin_p \theta_p$ fonksiyonları Maclaurin serisine açılırsa

$$\cos_p \theta_p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n}{(2n)!} \theta_p^{2n}$$

ve

$$\sin_p \theta_p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n}{(2n+1)!} \theta_p^{2n+1}$$

olur. Bu durumda $e^{i\theta_p}$ nin kuvvet serisi yardımıyla

$$e^{i\theta_p} = \cos_p \theta_p + i \sin_p \theta_p$$

eşitliği elde edilir. Sonuç olarak $z_1 = (x_1, y_1)$ eliptik sayısının argümenti θ_p olmak üzere bir eliptik sayı

$$z_1 = \|z_1\| (\cos_p \theta_p + i \sin_p \theta_p)$$

biçiminde de ifade edilebilir. Bu gösterime eliptik sayının kutupsal koordinatlarda gösterimi denir.

$$z_1 = \|z_1\| (\cos_p (\theta_p) + i \sin_p (\theta_p)), z_2 = \|z_2\| (\cos_p (\gamma_p) + i \sin_p (\gamma_p))$$

kutupsal gösterimlerine sahip iki eliptik sayının çarpımı

$$z_1 z_2 = \|z_1\| \|z_2\| \left(\cos_p(\theta_p + \gamma_p) + i \sin_p(\theta_p + \gamma_p) \right)$$

eşitliği ile verilir. Ayrıca $z_1 = (x_1, y_1)$ eliptik sayısının n . tam sayı kuvveti

$$z_1^n = \|z_1\|^n e^{i(n\theta_p)} = \|z_1\|^n \left(\cos_p(n\theta_p) + i \sin_p(n\theta_p) \right)$$

biçimindedir [24].

Teorem 2.1.1.2. Her $z = x + iy$ eliptik sayısı

$$\varphi_p(z) = \begin{pmatrix} x & py \\ y & x \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

şeklinde 2×2 tipinde bir reel matris ile ifade edilebilir [27].

Tanım 2.1.1.3. $\varphi_p(z)$ matrisine z eliptik sayısının temel matrisi denir [27].

Teorem 2.1.1.4. $z_1 = x_1 + iy_1$ ve $z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}_p$ olmak üzere $\varphi_p(z)$ temel matrisi aşağıdaki özellikleri sağlar [27]:

1. $\varphi_p(z_1 z_2) = \varphi_p(z_1) \varphi_p(z_2),$
2. $\varphi_p(\varphi_p(z_1) z_2) = \varphi_p(z_1) \varphi_p(z_2),$
3. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \varphi_p(z_1) = \varphi_p(z_2),$
4. $\varphi_p(z_1 + z_2) = \varphi_p(z_1) + \varphi_p(z_2),$
5. $\varphi_p(\lambda z_1) = \lambda \varphi_p(z_1),$

$$6. \quad iz(\varphi_p(z_1)) = z_1 + \overline{z_1},$$

$$7. \quad \|z_1\|^2 = \det(\varphi_p(z_1)).$$

Teorem 2.1.1.5. $z = x + iy \in \mathbb{C}_p$ olmak üzere

$$P^{-1} \begin{pmatrix} x+iy & 0 \\ 0 & x-iy \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} x & py \\ y & x \end{pmatrix} = \varphi_p(z)$$

eşitliği mevcuttur. Burada

$$P = P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ \frac{i}{p} & -1 \end{pmatrix}$$

dir.

Teoremin doğruluğu eşitliğin her iki tarafının hesaplanmasıyla kolayca gösterilir.

$$P^{-1} \begin{pmatrix} x+iy & 0 \\ 0 & x-iy \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} x & py \\ y & x \end{pmatrix} = \varphi_p(z)$$

eşitliğine evrensel benzerlik eşitliği denir. Bu eşitlik yardımı ile aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

1. $\mathbb{C}_p$ cümlesi

$$\mathbb{C}'_p = \left\{ \begin{pmatrix} x & py \\ y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

cümlesine izomoftur. Bu iki cümle arasındaki izomorfizma

$$\alpha_p : \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{C}'_p$$

$$z = x + iy \rightarrow \varphi_p(z) = \begin{pmatrix} x & py \\ y & x \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

2. Her $z = x + iy \in \mathbb{C}_p$ eliptik sayısı

$$\varphi_p(z) = \begin{pmatrix} x & py \\ y & x \end{pmatrix}$$

matrisi ile ifade edilebilir.

3. $\mathbb{C}'_p$ cümlesinin her bir elemanı $\mathbb{C}_p$ cümlesi üstünde tek bir biçimde köşegenleştirilebilir.

2.1.2 Eliptik matrisler

Elemanları eliptik sayılar olan $m \times n$ tipindeki matrislerin cümlesi $\mathbb{C}_p^{m \times n}$ ile gösterilir.

$A \in \mathbb{C}_p^{m \times n}$ ise $A = A_1 + iA_2$ biçiminde yazılabilir. Burada $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dir. Bu cümlede

$A = A_1 + iA_2, B = B_1 + iB_2 \in \mathbb{C}_p^{m \times n}, C = C_1 + iC_2 \in \mathbb{C}_p^{n \times l}$ için toplama, skalarla çarpma ve çarpma işlemleri sırasıyla

$$A + B = (A_1 + iA_2) + (B_1 + iB_2) = (A_1 + B_1) + i(A_2 + B_2) \in \mathbb{C}_p^{m \times n},$$

$$\lambda A = \lambda(A_1 + iA_2) = \lambda A_1 + i\lambda A_2 \in \mathbb{C}_p^{m \times n}$$

ve

$$AC = (A_1 + iA_2)(C_1 + iC_2) = (A_1C_1 + pA_2C_2) + i(A_1C_2 + A_2C_1) \in \mathbb{C}_p^{m \times l}$$

eşitlikleri ile tanımlanır.

$A = A_1 + iA_2 \in \mathbb{C}_p^{m \times n}$ matrisinin eşleniği $\bar{A} = A_1 - iA_2 \in \mathbb{C}_p^{m \times n}$ biçiminde tanımlanır. A matrisinin transpozu $A^T \in \mathbb{C}_p^{n \times m}$ biçiminde gösterilir. $A^* = (\bar{A})^T \in \mathbb{C}_p^{n \times m}$ matrisine ise A matrisinin eşlenik transpozu denir. $A \in \mathbb{C}_p^{m \times n}$ olmak üzere $AXA = A$ eşitliğini sağlayan $X \in \mathbb{C}_p^{n \times m}$ matrisine A matrisinin genelleştirilmiş tersi denir ve A^- ile gösterilir [28]

Teorem 2.1.2.1. A ve B uygun boyutlara sahip iki eliptik matris olmak üzere aşağıdaki eşitlikler doğrudur [28]:

1. $(A^{-1})^{-1} = A,$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},$
3. $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k, k \in \mathbb{Z}^+,$
4. $(A^T)^T = A,$
5. $(A+B)^T = A^T + B^T,$
6. $(\lambda A)^T = \lambda A^T,$
7. $(AB)^T = B^T A^T,$

$$8. \quad (A^k)^T = (A^T)^k, \quad k \in \mathbb{Z}^+,$$

$$9. \quad \overline{(\overline{A})} = A, \quad (A^*)^* = A,$$

$$10. \quad \overline{(A+B)} = \overline{A} + \overline{B}, \quad (A+B)^* = A^* + B^*,$$

$$11. \quad \overline{(\lambda A)} = \overline{\lambda} \overline{A}, \quad (\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*,$$

$$12. \quad \overline{(AB)} = \overline{A} \overline{B}, \quad (AB)^* = B^* A^*,$$

$$13. \quad (\overline{A})^T = \overline{(A^T)}.$$

$A = A_1 + iA_2 \in \mathbb{C}_p^{m \times n}$ olsun. Burada $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dir. $\phi_A(X) = AX$ biçiminde bir lineer izomorfizma tanımlansın. Bu lineer izomorfizmanın $\{I_n, iI_n\}$ tabanına karşılık gelen matrisi

$$\phi_A(I_n) = A_1 + iA_2$$

$$\phi_A(iI_n) = pA_2 + iA_1$$

olmak üzere aşağıdaki gibidir:

$$\phi_p(A) = \begin{pmatrix} A_1 & pA_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2m \times 2n}.$$

Tanım 2.1.2.2. $A = A_1 + iA_2 \in \mathbb{C}_p^{n \times n}$ ve $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ olsun.

$$\begin{pmatrix} A_1 & pA_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

matrisine A matrisinin temel matrisi denir ve $\phi_p(A)$ ile gösterilir [28].

Teorem 2.1.2.3. $A, B \in \mathbb{C}_p^{m \times n}$, $C \in \mathbb{C}_p^{n \times l}$ ve $\lambda \in \mathbb{C}_p$ olmak üzere aşağıdaki özellikler doğrudur [28]:

1. $\phi_p(I_n) = I_{2n}$,
2. $A = B \Leftrightarrow \phi_p(A) = \phi_p(B)$,
3. $\phi_p(A + B) = \phi_p(A) + \phi_p(B)$,
4. $\phi_p(AC) = \phi_p(A)\phi_p(C)$,
5. $\phi_p(\lambda A) = \lambda\phi_p(A)$,
6. $m = n$ ve A regüler ise $\phi_p(A)$ da regülerdir ve $(\phi_p(A))^{-1} = \phi_p(A^{-1})$ dir.

BÖLÜM 3. $AX = B$ ELİPTİK MATRİS DENKLEMİNİN EN KÜÇÜK KARELER ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde eliptik matrislerin Frobenius normu tanımlanmış ve bununla ilgili özellikler verilmiştir. Sonrasında ise $AX = B$ eliptik matris denkleminin en küçük kareler çözümü eliptik matrisler, pür imajiner eliptik matrisler ve pür reel eliptik matrisler kümesinde incelenmiştir.

3.1. Eliptik Matrislerin Frobenius Normu

Tanım 3.1.1. $A = A_1 + iA_2 \in \mathbb{C}_p^{m \times n}$ için A eliptik matrisinin Frobenius normu

$$\|A\| = \sqrt{\|A_1\|^2 - p\|A_2\|^2}$$

biçiminde tanımlanır.

Lemma 3.1.2. Eliptik matrisler üzerinde tanımlanan norm fonksiyonu $\forall \alpha \in \mathbb{C}_p$ için

$\forall A, B \in \mathbb{C}_p^{m \times n}$ aşağıdaki özellikleri sağlar;

1. $\|\alpha A\| = \|\alpha\| \|A\|$,
2. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$,
3. $\|A\| \geq 0$,
4. $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = (0)_{m \times n}$.

Teorem 3.1.3. $A, B \in \mathbb{C}_p^{m \times n}$, $C \in \mathbb{C}_p^{n \times l}$ ve $\lambda \in \mathbb{C}_p$ olmak üzere aşağıdaki özellikler doğrudur:

1. A nın genelleştirilmiş tersi A^- olsun. Bu durumda $(\phi_p(A))^- = \phi_p(A^-)$ dir.
2. $A = A_1 + iA_2 \in \mathbb{C}_p^{m \times n}$ için $A = \frac{1}{2}(I_m \quad iI_m)\phi_p(A)\begin{pmatrix} I_n \\ \frac{i}{p}I_n \end{pmatrix}$ dir.
3. $A = A_1 + iA_2 \in \mathbb{C}_p^{m \times n}$ için $\|A\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\|\phi_p(A)\|$ dir.

İspat.

1. $A^- \in \mathbb{C}_p^{n \times m}$ matrisi $A \in \mathbb{C}_p^{m \times n}$ matrisinin genelleştirilmiş tersi olsun. Bu durumda $AA^-A = A$ dir. Buradan

$$\begin{aligned}\phi_p(AA^-A) &= \phi_p(A) \\ \phi_p(A)\phi_p(A^-)\phi_p(A) &= \phi_p(A)\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Sonuç olarak $(\phi_p(A))^- = \phi_p(A^-)$ dir.

2. $A = A_1 + iA_2 \in \mathbb{C}_p^{m \times n}$ için

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(I_m \quad iI_m)\phi_p(A)\begin{pmatrix} I_n \\ \frac{i}{p}I_n \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}(I_m \quad iI_m)\begin{pmatrix} A_1 & pA_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n \\ \frac{i}{p}I_n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(A_1 + iA_2 \quad pA_2 + iA_1)\begin{pmatrix} I_n \\ \frac{i}{p}I_n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(A_1 + iA_2 + iA_2 + A_1) = A_1 + iA_2 = A\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_m & iI_m \end{pmatrix} \phi_p(A) \begin{pmatrix} I_n \\ \frac{i}{p} I_n \end{pmatrix}$$

dır.

3. $A = A_1 + iA_2 \in \mathbb{C}_p^{m \times n}$ eliptik matrisinin normu

$$\|A\| = \sqrt{\|A_1\|^2 - p\|A_2\|^2}$$

dir. A eliptik matrisinin reel temsili $\phi_p(A)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \|\phi_p(A)\| &= \sqrt{\|A_1\|^2 + \|pA_2\|^2 + \|A_2\|^2 + \|A_1\|^2} \\ &= \sqrt{2\|A_1\|^2 + (p^2 + 1)\|A_2\|^2} \end{aligned}$$

dir. Buradan ise

$$\begin{aligned} \|\phi_p(A)\|^2 &= 2\|A_1\|^2 + (p^2 + 1)\|A_2\|^2 \\ &= 2\|A_1\|^2 + (p^2 + 2p + 1 - 2p)\|A_2\|^2 \\ &= 2\|A_1\|^2 + (p + 1)^2\|A_2\|^2 - 2p\|A_2\|^2 \end{aligned}$$

ve

$$\frac{\|\phi_p(A)\|^2}{2} = \|A_1\|^2 - p\|A_2\|^2 + \frac{(p+1)^2}{2}\|A_2\|^2$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\|A\|^2 = \|A_1\|^2 - p\|A_2\|^2 \leq \|A_1\|^2 - p\|A_2\|^2 + (p+1)^2 \|A_2\|^2$$

olduğundan

$$\|A\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|\phi_p(A)\|$$

elde edilir.

3.2. $AX = B$ Eliptik Matris Denkleminin En Küçük Kareler Çözümü

Lemma 3.2.1. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ve $B \in \mathbb{R}^{m \times q}$ için $AX = B$ matris denkleminin çözümü mevcuttur ancak ve ancak $AA^-B = B$ dir. Eğer çözüm mevcutsa bu durumda genel çözümü

$$X = A^-B + (I_n - A^-A)Z \quad (3.1)$$

dir. Burada $Z \in \mathbb{R}^{n \times q}$ keyfi bir reel matristir [29].

Lemma 3.2.2. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ve $B \in \mathbb{R}^{m \times q}$ için $AX = B$ matris denkleminin en küçük kareler çözümü

$$X = A^-B + (I_n - A^-A)Z \quad (3.2)$$

dir. Burada $Z \in \mathbb{R}^{n \times q}$ keyfi bir reel matristir. $AX = B$ matris denkleminin en küçük normlu kareler çözümü ise $X = A^-B$ dir [29].

Şimdi ise

$$AX = B \quad (3.3)$$

eliptik matris denkleminin

$$\|AX - B\| = \min \quad (3.4)$$

olacak biçimde eliptik en küçük kareler çözümünü eliptik matrislerin reel temsili yardımıyla elde edelim. Burada $A \in \mathbb{C}_p^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}_p^{m \times q}$ ve $X \in \mathbb{C}_p^{n \times q}$ dir.

Teorem 3.2.3. $AX = B$ eliptik matris denkleminin en küçük kareler çözümü X dir ancak ve ancak

$$\phi_p(A)Y = \phi_p(B) \quad (3.5)$$

reel matris denkleminin reel en küçük kareler çözümü $Y = \phi_p(X)$ dir.

İspat. $AX = B$ eliptik matris denkleminin en küçük kareler çözümü X ise bu durumda $\|AX - B\| = \min$. dır. Teorem 3.1.3. den

$$\begin{aligned} \|AX - B\| &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|\phi_p(AX) - \phi_p(B)\| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \|\phi_p(A)\phi_p(X) - \phi_p(B)\| \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan açıktır ki (3.6) denkleminin en küçük kareler çözümü X ise (3.5) in en küçük kareler çözümü $\phi_p(X)$ dir. Benzer biçimde ispatın diğer yönüde gösterilebilir.

Teorem 3.2.4. $A \in \mathbb{C}_p^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}_p^{m \times q}$ için $AX = B$ eliptik matrisinin en küçük kareler çözümü

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_n & iI_n \end{pmatrix} (\phi_p(A))^- \phi_p(B) \begin{pmatrix} I_q \\ \frac{i}{p} I_q \end{pmatrix}$$

dır.

İspat. $AX = B$ eliptik matrisinin en küçük kareler çözümü X ise bu durumda

$$\|AX - B\| = \min. \text{ dır.}$$

$$\begin{aligned} \|AX - B\| &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|\phi_p(AX) - \phi_p(B)\| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \|\phi_p(A)\phi_p(X) - \phi_p(B)\| \end{aligned}$$

Bu eşitsizlikte $\|\phi_p(A)\phi_p(X) - \phi_p(B)\|$ normunu en küçük yapan $\phi_p(X)$ ise X de

$\|AX - B\|$ normunu en küçük yapar. Bu durumda $\phi_p(X) = (\phi_p(A))^- \phi_p(B)$ dır.

Teorem 3.1.3 den

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_n & iI_n \end{pmatrix} (\phi_p(A))^- \phi_p(B) \begin{pmatrix} I_q \\ \frac{i}{p} I_q \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.5. $A \in \mathbb{C}_p^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}_p^{m \times q}$ için $AX = B$ eliptik matris denkleminin pür imajiner en küçük kareler çözümü

$$X = i \left(\overline{A} \right)^- \left(\overline{B} \right)$$

dır. Burada $\bar{A} = \begin{pmatrix} pA_2 \\ pA_1 \\ A_1 \\ pA_2 \end{pmatrix}$, $\bar{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ pB_2 \\ B_2 \\ B_1 \end{pmatrix}$ dır.

İspat. $X \in \mathbb{C}_p^{n \times q}$ biçiminde pür imajiner eliptik matris ise $\phi_p(X) = \begin{pmatrix} 0 & pX_2 \\ X_2 & 0 \end{pmatrix}$ dır.

Bu durumda

$$\begin{aligned} \|AX - B\| &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|\phi_p(A)\phi_p(X) - \phi_p(B)\| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \begin{pmatrix} A_1 & pA_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & pX_2 \\ X_2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_1 & pB_2 \\ B_2 & B_1 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \begin{pmatrix} pA_2X_2 & pA_1X_2 \\ A_1X_2 & pA_1X_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_1 & pB_2 \\ B_2 & B_1 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \begin{pmatrix} pA_2 \\ pA_1 \\ A_1 \\ pA_2 \end{pmatrix} X_2 - \begin{pmatrix} B_1 \\ pB_2 \\ B_2 \\ B_1 \end{pmatrix} \right\| \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan ise $X = i \begin{pmatrix} pA_2 \\ pA_1 \\ A_1 \\ pA_2 \end{pmatrix}^- \begin{pmatrix} B_1 \\ pB_2 \\ B_2 \\ B_1 \end{pmatrix}$ dır

Teorem 3.2.6. $A \in \mathbb{C}_p^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}_p^{m \times q}$ için $AX = B$ eliptik matris denkleminin pür reel en küçük kareler çözümü

$$X = (\bar{A})^- (\bar{B})$$

dır. Burada $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ pA_2 \\ A_2 \\ A_1 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ pB_2 \\ B_2 \\ B_1 \end{pmatrix}$ dır.

İspat. $X \in \mathbb{C}_p^{n \times q}$ biçiminde pür reel eliptik matris ise $\phi_p(X) = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}$ dır. Bu durumda

$$\begin{aligned} \|AX - B\| &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|\phi_p(A)\phi_p(X) - \phi_p(B)\| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \begin{pmatrix} A_1 & pA_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_1 & pB_2 \\ B_2 & B_1 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \begin{pmatrix} A_1 X & pA_2 X \\ A_2 X & A_1 X \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_1 & pB_2 \\ B_2 & B_1 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \begin{pmatrix} A_1 \\ pA_2 \\ A_2 \\ A_1 \end{pmatrix} X - \begin{pmatrix} B_1 \\ pB_2 \\ B_2 \\ B_1 \end{pmatrix} \right\| \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan ise $X = \begin{pmatrix} A_1 \\ pA_2 \\ A_2 \\ A_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B_1 \\ pB_2 \\ B_2 \\ B_1 \end{pmatrix}$ dir.

3.2.1. Eliptik en küçük kareler problemine dair algoritmalar

Bu bölümde Teorem 3.2.4, 3.2.5, 3.2.6.' lere dayanarak $AX = B$ eliptik matris denkleminin en küçük kareler çözümünü bulmak için sayısal algoritmalar verilecektir.

Algoritma 1.

(1) Başla

- (2) Giriş A, B ve p .
- (3) Hesapla $\phi_p(A), \phi_p(B)$.
- (4) Hesapla $X = \frac{1}{2}(I_n + iI_n)(\phi_p(A))^{-1}\phi_p(B)\begin{pmatrix} I_q \\ \frac{i}{p}I_q \end{pmatrix}$.
- (5) Yaz X .
- (6) Dur

Algortitma 2.

- (1) Başla
- (2) Giriş A, B ve p .
- (3) Hesapla $\vec{A}, \vec{B}$.
- (4) Hesapla $X = i(\vec{A})^{-1}\vec{B}$.
- (5) Yaz X .
- (6) Dur

Algortitma 3.

- (1) Başla
- (2) Giriş A, B ve p .
- (3) Hesapla $\vec{A}, \vec{B}$.
- (4) Hesapla $X = (\vec{A})^{-1}\vec{B}$.
- (5) Yaz X .
- (6) Dur

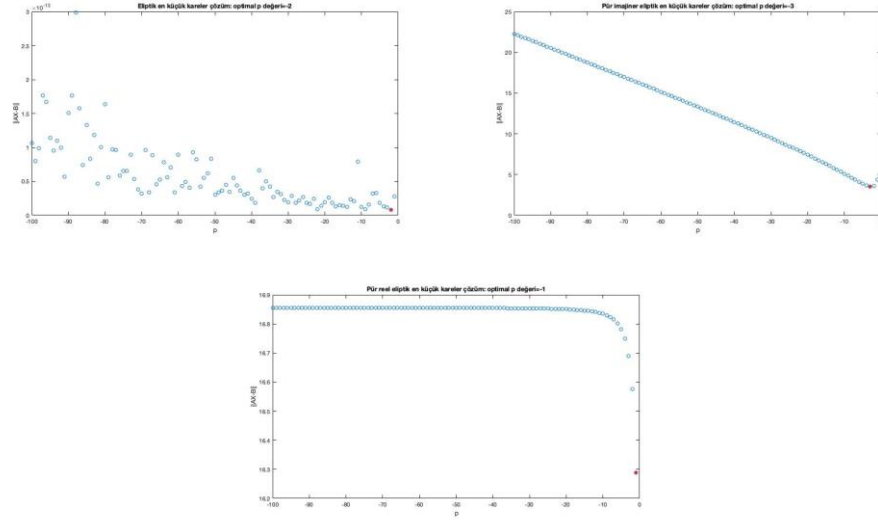
3.2.2. Sayısal örnekler

Bu bölümdeki tüm hesaplamalar iMac16 Dual-Core Intel Core i5 1.6 GHz/ 8GB özelliklerine sahip bilgisayarda MATLAB 2020a yazılımı kullanılarak gerçekleştirilmiştir.

Örnek 3.2.2.1. $A = \begin{pmatrix} 2+8i & 1+i & 1+6i \\ 1+3i & 2+5i & 1+7i \\ 1+4i & 1+9i & 2+2i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8+0.5i & 1-0.5i & 6-0.5i \\ 3-0.5i & 5+0.5i & 7-0.5i \\ 4-0.5i & 9-0.5i & 2+0.5i \end{pmatrix}$ olmak

üzere $AX = B$ eliptik matris denkleminin en küçük kareler çözümünü eliptik matrisler kümesinde, pür imajiner eliptik matrisler kümesinde ve pür reel eliptik matrisler kümesinde bulalım.

Çözüm. p nin -100 ile -1 arasındaki değerleri için eliptik, pür imajiner ve pür reel en küçük kareler çözümlerin en küçük normlarını gösteren grafik aşağıdaki gibidir.



Şekil 3.1. p değerine göre $AX = B$ eliptik matris denkleminin eliptik, pür imajiner ve pür reel en küçük kareler çözümlerin en küçük normları

1. Algoritma 1 e göre

$$\phi_{-2}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -16 & -2 & -12 \\ 1 & 2 & 1 & -6 & -10 & -14 \\ 1 & 1 & 2 & -8 & -18 & -4 \\ 8 & 1 & 6 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \phi_{-2}(B) = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 9 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 8 & 1 & 6 \\ -0.5 & 0.5 & -0.5 & 3 & 5 & 7 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

dır.

dır. $\phi_{-2}(X) = (\phi_{-2}(A))^{-} \phi_{-2}(B)$ formülünden

$$\phi_{-2}(X) = \begin{pmatrix} 0.2159 & -0.2127 & 0.0934 & 0.9506 & 0.0118 & 0.0118 \\ -0.0903 & 0.0322 & 0.1546 & 0.0118 & 0.9506 & 0.0118 \\ -0.0290 & 0.2771 & -0.1515 & 0.0118 & 0.0118 & 0.9506 \\ -0.4753 & -0.0059 & -0.0059 & 0.2159 & -0.2127 & 0.0934 \\ -0.0059 & -0.4753 & -0.0059 & -0.0903 & 0.0322 & 0.1546 \\ -0.0059 & -0.0059 & -0.4753 & -0.0290 & 0.2771 & -0.1515 \end{pmatrix}$$

dır. Bu durumda $AX = B$ eliptik matris denkleminin en küçük kareler çözümü

$$X = \begin{pmatrix} 0.2159 - 0.4753i & -0.2127 - 0.0059i & 0.0934 - 0.0059i \\ -0.0903 - 0.0059i & 0.0322 - 0.4753i & 0.1546 - 0.0059i \\ -0.0290 - 0.0059i & 0.2771 - 0.0059i & -0.1515 - 0.4753i \end{pmatrix}$$

dir.

2. Algoritma 2 e göre:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -24 & -3 & -18 \\ -9 & -15 & -21 \\ -12 & -27 & -6 \\ -6 & -3 & -3 \\ -3 & -6 & -3 \\ -3 & -3 & -6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -24 & -3 & -18 \\ -9 & -15 & -21 \\ -12 & -27 & -6 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \\ -1.5 & 1.5 & 1.5 \\ 1.5 & -1.5 & 1.5 \\ 1.5 & 1.5 & -1.5 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

dır. $X = i(\vec{A})^{-} \vec{B}$ formülünden

$$X = \begin{pmatrix} -0.1560i & -0.0004i & -0.0256i \\ -0.0004i & -0.1812i & -0.0004i \\ -0.0256i & -0.0004i & -0.1560i \end{pmatrix}$$

dır.

3. Algoritma 3 e göre:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -8 & -1 & -6 \\ -3 & -5 & -7 \\ -4 & -9 & -2 \\ 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 \\ 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

dır. $X = (\vec{A})^{-1} \vec{B}$ formülünden

$$X = \begin{pmatrix} 0.3646 & -0.3889 & 0.2422 \\ -0.0498 & 0.0726 & 0.1951 \\ -0.0969 & 0.5342 & -0.2194 \end{pmatrix}$$

dır.



BÖLÜM 4. ELİPTİK KUATERNİYONLAR

Eliptik sayıların ve komütatif kuaterniyonların genelleştirilmiş formu eliptik kuaterniyonlardır [15]. Eliptik kuaterniyonlar eliptik sayılar cümlesi üzerinde 2-boyutlu, reel sayılar cümlesi üzerinde 4-boyutlu vektör uzayıdır [15].

4.1. Eliptik Kuaterniyonların Cebirsel Özellikleri

Eliptik kuaterniyonların cümlesi

$$\mathbb{H}_p = \left\{ a_{(E)} = a_{(E),r} + a_{(E),i}i + a_{(E),j}j + a_{(E),k}k : a_{(E),r}, a_{(E),i}, a_{(E),j}, a_{(E),k} \in \mathbb{R} \right\} \quad (4.1)$$

biçiminde ifade edilir. Burada i, j, k kuaterniyonik birimleri arasında aşağıdaki eşitlikler mevcuttur:

$$i^2 = k^2 = p, \quad j^2 = 1, \quad ij = ji = k, \quad jk = kj = i, \quad ki = ik = pj, \quad p < 0 \text{ ve } p \in \mathbb{R} \quad (4.2)$$

Çarpım kurallarından $\mathbb{H}_p$ cümlesinin çarpma işlemine göre değişmeli olduğu görülmektedir [15].

Bir eliptik kuaterniyonu aşağıdaki gibi üç farklı biçimde ifade edebiliriz:

$$\begin{aligned} a_{(E)} &= a_{(E),r} + a_{(E),i}i + a_{(E),j}j + a_{(E),k}k = (a_{(E),r} + a_{(E),i}i) + j(a_{(E),j} + a_{(E),k}i) \\ &= a_{(e),1}e_1 + a_{(e),2}e_2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Burada

$$a_{(e),1} = \left(a_{(E),r} + a_{(E),j}\right) + \left(a_{(E),i} + a_{(E),k}\right)i, \quad a_{(e),2} = \left(a_{(E),r} - a_{(E),j}\right) + \left(a_{(E),i} - a_{(E),k}\right)i \in \mathbb{C}_p$$

ve

$$e_1 = \frac{1+j}{2}, \quad e_2 = \frac{1-j}{2}$$

dır. Buradan e_1 ve e_2 birimleri idempotenttir. Yani

$$e_1^n = e_1^{n-1} = \dots = e_1^2 = e_1, \quad e_2^n = e_2^{n-1} = \dots = e_2^2 = e_2 \text{ ve } e_1 e_2 = 0$$

eşitlikleri doğrudur. Eliptik kuaterniyonların e_1 ve e_2 ifadesi kullanılarak bu uzayda yapılan birçok cebirsel işlemin (çarpma, bölme, kök alma, kuvvet alma vb) algoritmik karmaşıklığı ciddi oranda azaltılabilir.

$\lambda \in \mathbb{R}, a_{(E)}, b_{(E)} \in \mathbb{H}_p$ ve

$$\begin{aligned} a_{(E)} &= a_{(E),r} + a_{(E),i}i + a_{(E),j}j + a_{(E),k}k = a_{(e),1}e_1 + a_{(e),2}e_2, \\ b_{(E)} &= b_{(E),r} + b_{(E),i}i + b_{(E),j}j + b_{(E),k}k = b_{(e),1}e_1 + b_{(e),2}e_2 \end{aligned}$$

olmak üzere $\mathbb{H}_p$ cümlesi üzerinde toplama, çarpma ve skalarla çarpma işlemleri sırasıyla

$$\begin{aligned} a_{(E)} + b_{(E)} &= \left(a_{(E),r} + b_{(E),r}\right) + \left(a_{(E),i} + b_{(E),i}\right)i + \left(a_{(E),j} + b_{(E),j}\right)j + \left(a_{(E),k} + b_{(E),k}\right)k \\ &= \left(a_{(e),1} + b_{(e),1}\right)e_1 + \left(a_{(e),2} + b_{(e),2}\right)e_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{(E)}b_{(E)} &= \left(a_{(E),r}b_{(E),r} + pa_{(E),i}b_{(E),i} + a_{(E),j}b_{(E),j} + pa_{(E),k}b_{(E),k} \right) \\
&\quad + \left(a_{(E),r}b_{(E),i} + a_{(E),i}b_{(E),r} + a_{(E),j}b_{(E),k} + a_{(E),k}b_{(E),j} \right) i \\
&\quad + \left(a_{(E),r}b_{(E),j} + pa_{(E),i}b_{(E),k} + a_{(E),j}b_{(E),r} + pa_{(E),k}b_{(E),i} \right) j \\
&\quad + \left(a_{(E),r}b_{(E),k} + a_{(E),i}b_{(E),j} + a_{(E),j}b_{(E),i} + a_{(E),k}b_{(E),r} \right) k \\
&= \left(a_{(e),1}b_{(e),1} \right) e_1 + \left(a_{(e),2}b_{(e),2} \right) e_2
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\lambda a_{(E)} &= \lambda \left(a_{(E),r} + a_{(E),i}i + a_{(E),j}j + a_{(E),k}k \right) = \lambda a_{(E),r} + \lambda a_{(E),i}i + \lambda a_{(E),j}j + \lambda a_{(E),k}k \\
&= \lambda \left(a_{(e),1}e_1 + a_{(e),2}e_2 \right) = \lambda a_{(e),1}e_1 + \lambda a_{(e),2}e_2.
\end{aligned}$$

eşitlikleri ile tanımlanır [15-16].

$a_{(E)} = a_{(E),r} + a_{(E),i}i + a_{(E),j}j + a_{(E),k}k \in \mathbb{H}_p$ eliptik kuaterniyonu için üç adet eşleniği

$$\begin{aligned}
\overline{a_{(E)}^1} &= a_{(E),r} - a_{(E),i}i + a_{(E),j}j - a_{(E),k}k, \\
\overline{a_{(E)}^2} &= a_{(E),r} + a_{(E),i}i - a_{(E),j}j - a_{(E),k}k, \\
\overline{a_{(E)}^3} &= a_{(E),r} - a_{(E),i}i - a_{(E),j}j + a_{(E),k}k
\end{aligned} \tag{4.4}$$

biçiminde tanımlanır [15].

$a_{(E)} = a_{(E),r} + a_{(E),i}i + a_{(E),j}j + a_{(E),k}k \in \mathbb{H}_p$ eliptik kuaterniyonun normu

$$\|a_{(E)}\| = \sqrt{a_{(E),r}^2 - pa_{(E),i}^2 + a_{(E),j}^2 - pa_{(E),k}^2}$$

eşitliği ile tanımlanır.

Teorem 4.1.1. $a_{(E)} = a_{(E),r} + a_{(E),i}i + a_{(E),j}j + a_{(E),k}k \in \mathbb{H}_p$ için

$$\|a_{(E)}\| = \sqrt{\frac{1}{2}(\|a_{(e),1}\|^2 + \|a_{(e),2}\|^2)}$$

dır.

İspat. $a_{(E)} = a_{(E),r} + a_{(E),i}i + a_{(E),j}j + a_{(E),k}k = a_{(e),1}e_1 + a_{(e),2}e_2 \in \mathbb{H}_p$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \|a_{(e),1}\|^2 + \|a_{(e),2}\|^2 &= a_{(E),r}^2 + a_{(E),j}^2 + 2a_{(E),r}a_{(E),j} - p(a_{(E),i}^2 + a_{(E),k}^2 + 2a_{(E),i}a_{(E),k}) \\ &\quad + a_{(E),r}^2 + a_{(E),j}^2 - 2a_{(E),r}a_{(E),j} - p(a_{(E),i}^2 + a_{(E),k}^2 - 2a_{(E),i}a_{(E),k}) \\ &= 2a_{(E),r}^2 + 2a_{(E),j}^2 - 2pa_{(E),i}^2 - 2pa_{(E),k}^2 \end{aligned}$$

dır. Buradan

$$\|a\| = \sqrt{\frac{1}{2}(\|a_{(e),1}\|^2 + \|a_{(e),2}\|^2)}$$

eşitliği elde edilir.

4.1.1. Eliptik kuaterniyonların eliptik matris temsilleri

$a_{(E)} = a_{(e),1}e_1 + a_{(e),2}e_2 \in \mathbb{H}_p$ için $\varphi_a(x) = ax$ biçiminde $\varphi_a : \mathbb{H}_p \rightarrow \mathbb{H}_p$ bir dönüşüm tanımlansın. Bu dönüşüm lineer izomorfizmadır. φ lineer izomorfizmasının $\{e_1, e_2\}$ tabanına karşılık gelen matrisi

$$\varphi_a(e_1) = (a_{(e),1}e_1 + a_{(e),2}e_2)e_1 = a_{(e),1}e_1 \quad (4.5)$$

$$\varphi_a(e_2) = (a_{(e),1}e_1 + a_{(e),2}e_2)e_2 = a_{(e),2}e_2$$

olmak üzere aşağıdaki gibidir:

$$\varphi_p(a) = \begin{pmatrix} a_{(e),1} & 0 \\ 0 & a_{(e),2} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_p^{2 \times 2}. \quad (4.6)$$

Bu eliptik matrise $a \in \mathbb{H}_p$ eliptik kuaterniyonun temel matrisi denir.

$\mathbb{H}_p$ eliptik kuaterniyonlar cümlesi ile $\mathbb{C}_p^{2 \times 1}$ matris cümlesi arasında bir cebir izomorfizmi kurulabilir. Bu izomorfizma

$$\begin{aligned} \tau : \mathbb{H}_p &\rightarrow \mathbb{C}_p^{2 \times 1} \\ a_{(e),1}e_1 + a_{(e),2}e_2 \in \mathbb{H}_p &\rightarrow \tau(a_{(e),1}e_1 + a_{(e),2}e_2) = \begin{pmatrix} a_{(e),1} \\ a_{(e),2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.7)$$

kuralıyla tanımlanabilir Sonuç olarak

$$a = a_{(e),1}e_1 + a_{(e),2}e_2 \cong \begin{pmatrix} a_{(e),1} \\ a_{(e),2} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

yazılabilir.

Bu tanımlanan izomorfizma yardımı ile iki eliptik kuaterniyon $a = a_{(e),1}e_1 + a_{(e),2}e_2$ ve

$b = b_{(e),1}e_1 + b_{(e),2}e_2 \in \mathbb{H}_p$ nun çarpımı aşağıdaki gibi de ifade edilebilir:

$$ab = \begin{pmatrix} a_{(e),1} & 0 \\ 0 & a_{(e),2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{(e),1} \\ b_{(e),2} \end{pmatrix} = \varphi_p(a)b. \quad (4.9)$$

Tanımlanan φ fonksiyonunu için

$$\varphi_p(ab) = \varphi_p(a)\varphi_p(b)$$

$$\varphi_p(a+b) = \varphi_p(a) + \varphi_p(b)$$

eşitlikleri doğrudur. Dolayısıyla φ_p bir cebir izomorfizmdir. Ayrıca,

$$\varphi_p(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_1; \quad \varphi_p(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2;$$

olduğundan

$$E_1^n = E_1^{n-1} = \dots = E_1^2 = E_1, \quad E_2^n = E_2^{n-1} = \dots = E_2^2 = E_2, \quad E_1 E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (4.10)$$

eşitlikleri mevcuttur. Dolayısıyla E_1, E_2 matrisleri ile e_1, e_2 birimleri birbirlerine izomorftur.

Teorem 4.1.1.1. $a, b \in \mathbb{H}_p$ olmak üzere φ_p lineer izomorfizminin aşağıdaki özellikleri mevcuttur:

1. $\varphi_p(ab) = \varphi_p(a)\varphi_p(b),$
2. $\varphi_p(\varphi_p(a)b) = \varphi_p(a)\varphi_p(b),$
3. $a = b \Leftrightarrow \varphi_p(a) = \varphi_p(b),$
4. $\varphi_p(a+b) = \varphi_p(a) + \varphi_p(b),$
5. $\varphi_p(\lambda a) = \lambda \varphi_p(a), \quad \lambda \in \mathbb{R},$

$$6. \quad \text{iz}(\varphi_p(a)) = a_{(e),1} + a_{(e),2},$$

$$7. \quad \|a\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \|\varphi_p(a)\|.$$

İspat. Elementer işlemler ile eşitliklerin doğrulukları kolay bir şekilde görülebilir.

4.2. Eliptik Kuaterniyon Değerli Matrisler

Elemanları eliptik kuaterniyon olan $m \times n$ tipindeki matrislerin cümlesi $\mathbb{H}_p^{m \times n}$ ile gösterilir. Bir $m \times n$ tipindeki eliptik kuaterniyon matrisini aşağıdaki gibi üç farklı biçimde ifade edebiliriz:

$$\begin{aligned} A_{(E)} &= A_{(E),r} + A_{(E),i}i + A_{(E),j}j + A_{(E),k}k = (A_{(E),r} + A_{(E),i}i) + j(A_{(E),j} + A_{(E),k}i) \\ &= A_{(e),1}e_1 + A_{(e),2}e_2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Burada

$$A_{(e),1} = (A_{(E),r} + A_{(E),j}) + (A_{(E),i} + A_{(E),k})i, \quad A_{(e),2} = (A_{(E),r} - A_{(E),j}) + (A_{(E),i} - A_{(E),k})i \in \mathbb{C}_p^{m \times n}$$

dır [28].

Bu cümlede

$$A_{(E)} = A_{(e),1}e_1 + A_{(e),2}e_2, B_{(E)} = B_{(e),1}e_1 + B_{(e),2}e_2 \in \mathbb{H}_p^{m \times n}, C_{(E)} = C_{(e),1}e_1 + C_{(e),2}e_2 \in \mathbb{H}_p^{n \times l}$$

ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için toplama, skalarla çarpma ve çarpma işlemleri sırasıyla

$$A_{(E)} + B_{(E)} = (A_{(e),1} + B_{(e),1})e_1 + (A_{(e),2} + B_{(e),2})e_2 \in \mathbb{H}_p^{m \times n},$$

$$\lambda A_{(E)} = \lambda A_{(e),1} e_1 + \lambda A_{(e),2} e_2 \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$$

ve

$$\begin{aligned} A_{(E)} C_{(E)} &= (A_{(e),1} e_1 + A_{(e),2} e_2) (C_{(e),1} e_1 + C_{(e),2} e_2) \\ &= (A_{(e),1} C_{(e),1}) e_1 + (A_{(e),2} C_{(e),2}) e_2 \in \mathbb{H}_p^{m \times l} \end{aligned}$$

eşitlikleri ile tanımlanır [28].

$A_{(E)} = (a_{ij}) \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$ için üç tane eşlenik mevcuttur. Bunlar

$${}^1 \bar{A}_{(E)} = \overline{A_{(e),1}} e_1 + \overline{A_{(e),2}} e_2 \in \mathbb{H}_p^{m \times n}, {}^2 \bar{A}_{(E)} = A_{(e),2} e_1 + A_{(e),1} e_2 \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$$

ve

$${}^3 \bar{A}_{(E)} = \overline{A_{(e),2}} e_1 + \overline{A_{(e),1}} e_2 \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$$

eşitlikleriyle tanımlanır [28].

$A_{(E)}$ matrisinin transpozu $A_{(E)}^T = A_{(e),1}^T e_1 + A_{(e),2}^T e_2 \in \mathbb{H}_p^{n \times m}$ biçiminde tanımlanır.

$A_{(E)}^* = \left({}^s \overline{A_{(E)}} \right)^T \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$, $s=1,2,3$, matrisine ise $A_{(E)}$ matrisinin s . inci eşleniğe göre eşlenik transpozu denir. $A_{(E)} \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$ olmak üzere $A_{(E)} X_{(E)} A_{(E)} = A_{(E)}$ eşitliğini sağlayan $X_{(E)} \in \mathbb{H}_p^{n \times m}$ matrisine $A_{(E)}$ matrisinin genelleştirilmiş tersi denir ve $A_{(E)}^-$ ile gösterilir [28].

Teorem 4.2.1. $A_{(E)}$ ve $B_{(E)}$ matrisleri boyutları uygun eliptik kuaterniyon matrisler olmak üzere aşağıdaki eşitlikler doğrudur [28]:

1. $\left({}^s \overline{A_{(E)}} \right)^T = \overline{{}^s A_{(E)}^T},$
2. $\left(A_{(E)} B_{(E)} \right)^*_s = B_{(E)}^* {}^s A_{(E)}^*,$
3. $\left(A_{(E)} B_{(E)} \right)^T = B_{(E)}^T A_{(E)}^T,$
4. $\overline{\left(A_{(E)} B_{(E)} \right)} = \left(\overline{{}^s A_{(E)}} \right) \left(\overline{{}^s B_{(E)}} \right),$
5. $A_{(E)}^{-1}$ ve $B_{(E)}^{-1}$ mevcut ise $\left(A_{(E)} B_{(E)} \right)^{-1} = B_{(E)}^{-1} A_{(E)}^{-1},$
6. $A_{(E)}^{-1}$ mevcut ise $\left(A_{(E)}^{\dagger_s} \right)^{-1} = \left(A_{(E)}^{-1} \right)^{\dagger_s},$
7. $\left({}^s \overline{A_{(E)}} \right)^{-1} = \overline{{}^s A_{(E)}^{-1}}.$

4.2.1. Eliptik kuaterniyon matrislerin eliptik matris gösterimleri

Tanım 4.2.1.1. $A_{(E)} = A_{(e),1} e_1 + A_{(e),2} e_2 \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} A_{(e),1} & 0 \\ 0 & A_{(e),2} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_p^{2m \times 2n} \quad (4.12)$$

matrisine A matrisinin temel matrisi denir ve $\phi_p(A_{(E)})$ ile gösterilir.

Teorem 4.2.1.2. $A_{(E)}, B_{(E)} \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$ ve $C_{(E)} \in \mathbb{H}_p^{n \times l}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler doğrudur:

$$1. \quad \phi_p(I_n) = I_{2n},$$

$$2. \quad \phi_p(A_{(E)} + B_{(E)}) = \phi_p(A_{(E)}) + \phi_p(B_{(E)}),$$

$$3. \quad \phi_p(A_{(E)} C_{(E)}) = \phi_p(A_{(E)}) \phi_p(C_{(E)}),$$

$$4. \quad m = n \text{ için } A_{(E)}^{-1} \text{ mevcut ise } \phi_p(A_{(E)}^{-1}) = \left(\phi_p(A_{(E)}) \right)^{-1},$$

$$5. \quad \phi_p(A_{(E)}^{*1}) = \left(\phi_p(A_{(E)}) \right)^*, \text{ fakat genelde}$$

$$\phi_p(A_{(E)}^{*2}) \neq \left(\phi_p(A_{(E)}) \right)^*, \phi_p(A_{(E)}^{*3}) \neq \left(\phi_p(A_{(E)}) \right)^*$$

dir. Burada $\left(\phi_p(A_{(E)}) \right)^*, \phi_p(A_{(E)})$ eliptik kuaterniyon matrisinin eşlenik transpozudur.

$$6. \quad m = l = n \text{ için}$$

$$\det(\phi_p(A_{(E)} B_{(E)})) = \det(\phi_p(A_{(E)})) \det(\phi_p(B_{(E)})) \text{ ve } \det(\phi_p(A_{(E)}^{-1})) = \left(\det \phi_p(A_{(E)}) \right)^{-1}$$

dir.

$$7. \quad \left(\phi_p(A_{(E)}) \right)^- = \phi_p(A_{(E)}^-) \text{ dir. Burada } \left(\phi_p(A_{(E)}) \right)^- \text{ matrisi } \phi_p(A_{(E)}) \text{ matrisinin genelleştirilmiş tersidir.}$$

$$8. \quad A_{(E)} = \begin{pmatrix} e_1 I_m & e_2 I_m \end{pmatrix} \phi_p(A_{(E)}) \begin{pmatrix} e_1 I_n \\ e_2 I_n \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

İspat. 1. $I_n = I_n e_1 + I_n e_2$ olduğundan

$$\phi_p(I_n) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$$

eşitliği elde edilir.

2. $A_{(E)} = A_{(e),1}e_1 + A_{(e),2}e_2$ ve $B_{(E)} = B_{(e),1}e_1 + B_{(e),2}e_2 \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$ olmak üzere

$$A_{(E)} + B_{(E)} = (A_{(e),1} + B_{(e),1})e_1 + (A_{(e),2} + B_{(e),2})e_2$$

dir. Bu durumda

$$\phi_p(A_{(E)}) + \phi_p(B_{(E)}) = \begin{pmatrix} A_{(e),1} + B_{(e),1} & 0 \\ 0 & A_{(e),2} + B_{(e),2} \end{pmatrix}$$

ve

$$\phi_p(A_{(E)} + B_{(E)}) = \begin{pmatrix} A_{(e),1} + B_{(e),1} & 0 \\ 0 & A_{(e),2} + B_{(e),2} \end{pmatrix}$$

olduğundan $\phi_p(A_{(E)} + B_{(E)}) = \phi_p(A_{(E)}) + \phi_p(B_{(E)})$ eşitliği sağlanır.

3. $A_{(E)} = A_{(e),1}e_1 + A_{(e),2}e_2 \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$ ve $C_{(E)} = C_{(e),1}e_1 + C_{(e),2}e_2 \in \mathbb{H}_p^{n \times l}$ olmak üzere

$$A_{(E)}C_{(E)} = A_{(e),1}C_{(e),1}e_1 + A_{(e),2}C_{(e),2}e_2$$

dir. Bu durumda

$$\phi_p(A_{(E)})\phi_p(C_{(E)}) = \begin{pmatrix} A_{(e),1}C_{(e),1} & 0 \\ 0 & A_{(e),2}C_{(e),2} \end{pmatrix}$$

ve

$$\phi_p(A_{(E)}C_{(E)}) = \begin{pmatrix} A_{(e),1}C_{(e),1} & 0 \\ 0 & A_{(e),2}C_{(e),2} \end{pmatrix}$$

olduğundan $\phi_p(A_{(E)}C_{(E)}) = \phi_p(A_{(E)})\phi_p(C_{(E)})$ eşitliği elde edilir.

4. Kabul edelim ki $A_{(E)} \in \mathbb{H}_p^{n \times n}$ regüler olsun. Bu durumda

$$A_{(E)}A_{(E)}^{-1} = A_{(E)}^{-1}A_{(E)} = I_n$$

olacak biçimde $A_{(E)}^{-1} \in \mathbb{H}_p^{n \times n}$ mevcuttur. Bu eşitlikten

$$\phi_p(A_{(E)})\phi_p(A_{(E)}^{-1}) = \phi_p(A_{(E)}^{-1})\phi_p(A_{(E)}) = I_{2n}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\left(\phi_p(A_{(E)})\right)^{-1} = \phi_p(A_{(E)}^{-1})$$

dir.

6. $m = l = n$ için $A_{(E)} = A_{(e),1}e_1 + A_{(e),2}e_2$, $B_{(E)} = B_{(e),1}e_1 + B_{(e),2}e_2$ olsun. Bu durumda

$$\det(\phi_p(A_{(E)}B_{(E)})) = \det(\phi_p(A_{(E)})\phi_p(B_{(E)})) = \det(\phi_p(A_{(E)}))\det(\phi_p(B_{(E)}))$$

elde edilir. Ayrıca

$$\det\left(\phi_p\left(A_{(E)}^{-1}\right)\right)=\det\left(\left(\phi_p\left(A_{(E)}\right)\right)^{-1}\right)=\left(\det\phi_p\left(A_{(E)}\right)\right)^{-1}$$

dır.

7. $A_{(E)} \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$ olsun. $A_{(E)} A_{(E)}^{-} A_{(E)} = A_{(E)}$ olacak biçimde $A_{(E)}^{-} \in \mathbb{H}_p^{n \times m}$ mevcuttur.

Bu eşitlikten

$$\phi_p\left(A_{(E)}\right)\phi_p\left(A_{(E)}^{-}\right)\phi_p\left(A_{(E)}\right)=\phi_p\left(A_{(E)}\right)$$

elde edilir. Sonuç olarak $\left(\phi_p\left(A_{(E)}\right)\right)^{-}=\phi_p\left(A_{(E)}^{-}\right)$ dir.

8. $A_{(E)} = A_{(e),1}e_1 + A_{(e),2}e_2 \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$ için

$$\phi_p\left(A_{(E)}\right)=\begin{pmatrix} A_{(e),1} & 0 \\ 0 & A_{(e),2} \end{pmatrix}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} e_1 I_m & e_2 I_m \end{pmatrix} \phi_p\left(A_{(E)}\right) \begin{pmatrix} e_1 I_n \\ e_2 I_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e_1 I_m & e_2 I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{(e),1} & 0 \\ 0 & A_{(e),2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 I_m \\ e_2 I_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{(e),1} e_1 & A_{(e),2} e_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 I_m \\ e_2 I_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{(e),1} e_1 + A_{(e),2} e_2 \end{pmatrix} = A_{(E)} \end{aligned}$$

elde edilir.

4.2.2. Eliptik kuaterniyon matrislerin frobenius normu

Tanım 4.2.2.1. $A_{(E)} = A_{(E),r} + A_{(E),i}i + A_{(E),j}j + A_{(E),k}k = A_{(e),1}e_1 + A_{(e),2}e_2 \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$ için

$A_{(E)}$ eliptik kuaterniyon matrisinin Frobenius normu

$$\begin{aligned} \|A_{(E)}\| &= \sqrt{\|A_{(E),r}\|^2 - p\|A_{(E),i}\|^2 + \|A_{(E),j}\|^2 - p\|A_{(E),k}\|^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\|A_{(e),1}\|^2 + \|A_{(e),2}\|^2} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır.

Teorem 4.2.2.2. Eliptik kuaterniyon matrisler üzerinde tanımlanan norm fonksiyonu

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, için $\forall A_{(E)}, B_{(E)} \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$ aşağıdaki özellikleri sağlar;

1. $\|\alpha A_{(E)}\| = |\alpha| \|A_{(E)}\|$,
2. $\|A_{(E)} + B_{(E)}\| \leq \|A_{(E)}\| + \|B_{(E)}\|$,
3. $\|A_{(E)}\| \geq 0$,
4. $\|A_{(E)}\| = 0 \Leftrightarrow A_{(E)} = (0)_{m \times n}$.

Teorem 4.2.2.3. $A_{(E)} = A_{(e),1}e_1 + A_{(e),2}e_2 \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$ eliptik kuaterniyon matrisi için

$$\|A_{(E)}\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \|\phi_p(A_{(E)})\| \quad (4.13)$$

dır.

İspat. $A_{(E)}$ eliptik kuaterniyon matrisinin normu

$$\|A_{(E)}\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\|A_{(e),1}\|^2 + \|A_{(e),2}\|^2}$$

dir. $A_{(E)}$ eliptik kuaterniyon matrisinin eliptik temsili $\phi_p(A_{(E)})$ ise

$$\phi_p(A_{(E)}) = \begin{pmatrix} A_{(e),1} & 0 \\ 0 & A_{(e),1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_p^{2m \times 2n}$$

biçimindedir. Bu durumda

$$\|\phi_p(A_{(E)})\| = \sqrt{\|A_{(e),1}\|^2 + \|A_{(e),2}\|^2}$$

dir. Sonuç olarak

$$\|A_{(E)}\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \|\phi_p(A_{(E)})\|$$

elde edilir.

Şimdi ise

$$A_{(E)} X_{(E)} = B_{(E)} \quad (4.14)$$

eliptik kuaterniyon matris denkleminin

$$\|A_{(E)} X_{(E)} - B_{(E)}\| = \min. \quad (4.15)$$

olacak biçimde eliptik kuaterniyonik en küçük kareler çözümünü eliptik kuaterniyon matrislerin eliptik temsili yardımıyla elde edelim. Burada $A_{(E)} \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$, $B_{(E)} \in \mathbb{H}_p^{m \times q}$

ve $X_{(E)} \in \mathbb{H}_p^{n \times q}$ dir.

4.3. $AX = B$ Eliptik Kuaterniyon Matris Denklemine En Küçük Kareler Çözümü

Teorem 4.3.1. $A_{(E)}X_{(E)} = B_{(E)}$ eliptik kuaterniyon matris denkleminin en küçük kareler çözümü $X_{(E)}$ dir ancak ve ancak

$$\phi_p(A_{(E)})Y = \phi_p(B_{(E)}) \quad (4.16)$$

eliptik denkleminin eliptik en küçük kareler çözümü de $Y = \phi_p(X_{(E)})$ dir.

İspat. $A_{(E)}X_{(E)} = B_{(E)}$ eliptik kuaterniyon matris denkleminin en küçük kareler çözümü $X_{(E)}$ ise bu durumda $\|A_{(E)}X_{(E)} - B_{(E)}\| = \min$. dir. (4.13) denkleminde

$$\begin{aligned} \|A_{(E)}X_{(E)} - B_{(E)}\| &= \frac{1}{\sqrt{2}} \|\phi_p(A_{(E)}X_{(E)}) - \phi_p(B_{(E)})\| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \|\phi_p(A_{(E)})\phi_p(X_{(E)}) - \phi_p(B_{(E)})\| \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan açıktır ki $A_{(E)}X_{(E)} = B_{(E)}$ denkleminin en küçük kareler çözümü

$X_{(E)}$ ise (4.16) denkleminin en küçük kareler çözümü $\phi_p(X_{(E)})$ dir. Benzer biçimde

ispatın diğer yönünde gösterilebilir.

Teorem 4.3.2. $A_{(E)} \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$, $B_{(E)} \in \mathbb{H}_p^{m \times q}$ için $A_{(E)}X_{(E)} = B_{(E)}$ eliptik kuaterniyon matrisinin en küçük kareler çözümü

$$X_{(E)} = A_{(e),1}^- B_{(e),1} e_1 + A_{(e),2}^- B_{(e),2} e_2$$

dir.

İspat. Teorem 4.3.1 e göre (4.16) denkleminin en küçük kareler çözümü $\phi_p(X_{(E)})$ ise (4.14) denkleminin çözümü $X_{(E)}$ idi. Buradan

$$\begin{pmatrix} A_{(e),1} & 0 \\ 0 & A_{(e),2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{(e),1} & 0 \\ 0 & X_{(e),2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{(e),1} & 0 \\ 0 & B_{(e),2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_{(e),1} & 0 \\ 0 & X_{(e),2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{(e),1} & 0 \\ 0 & A_{(e),2} \end{pmatrix}^{-} \begin{pmatrix} B_{(e),1} & 0 \\ 0 & B_{(e),2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_{(e),1} & 0 \\ 0 & X_{(e),2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{(e),1}^{-} & 0 \\ 0 & A_{(e),2}^{-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{(e),1} & 0 \\ 0 & B_{(e),2} \end{pmatrix}$$

$$X_{(e),1} = A_{(e),1}^{-} B_{(e),1}$$

$$X_{(e),2} = A_{(e),2}^{-} B_{(e),2}$$

$$X_{(E)} = X_{(e),1} e_1 + X_{(e),2} e_2$$

$$X_{(E)} = A_{(e),1}^{-} B_{(e),1} e_1 + A_{(e),2}^{-} B_{(e),2} e_2$$

elde edilir.

Teorem 4.3.3. $A_{(E)} \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$, $B_{(E)} \in \mathbb{H}_p^{m \times q}$ ve $X_{(E)}$ pür imajiner eliptik kuaterniyon matrisi için $A_{(E)} X_{(E)} = B_{(E)}$ nin pür imajiner en küçük kareler çözümü $X_{(E)} = X_{(e),1} e_1 + X_{(e),2} e_2$ olmak üzere

$$X = \begin{pmatrix} \text{Re}(X_{(e),1}) \\ \text{Im}(X_{(e),1}) \\ \text{Im}(X_{(e),2}) \end{pmatrix} = (\bar{A})^{-} \vec{B}$$

dır. Burada

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(A_{(e),1}) & p \operatorname{Im}(A_{(e),1}) & 0 \\ -\operatorname{Re}(A_{(e),2}) & 0 & p \operatorname{Im}(A_{(e),2}) \\ \sqrt{-p} \operatorname{Im}(A_{(e),1}) & \sqrt{-p} \operatorname{Re}(A_{(e),1}) & 0 \\ -\sqrt{-p} \operatorname{Im}(A_{(e),2}) & 0 & \operatorname{Re}(A_{(e),2}) \end{pmatrix}, \bar{B} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(B_{(e),1}) \\ \operatorname{Re}(B_{(e),2}) \\ \sqrt{-p} \operatorname{Im}(B_{(e),1}) \\ \sqrt{-p} \operatorname{Im}(B_{(e),2}) \end{pmatrix}.$$

İspat. $X_{(E)} = X_{(e),1}e_1 + X_{(e),2}e_2 \in \mathbb{H}_p^{n \times q}$ olsun. $X_{(E)} = X_{(e),1}e_1 + X_{(e),2}e_2 \in \mathbb{H}_p^{n \times q}$ pür imajiner ise $\operatorname{Re}(X_{(e),1}) = -\operatorname{Re}(X_{(e),2})$ dır.

$A_{(E)} = A_{(e),1}e_1 + A_{(e),2}e_2 \in \mathbb{H}_p^{m \times n}, B_{(E)} = B_{(e),1}e_1 + B_{(e),2}e_2 \in \mathbb{H}_p^{m \times q}$ için

$$\begin{aligned} \|A_{(E)}X_{(E)} - B_{(E)}\| &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \begin{pmatrix} A_{(e),1} & 0 \\ 0 & A_{(e),2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{(e),1} & 0 \\ 0 & X_{(e),2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_{(e),1} & 0 \\ 0 & B_{(e),2} \end{pmatrix} \right\| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \begin{pmatrix} A_{(e),1}X_{(e),1} & 0 \\ 0 & A_{(e),2}X_{(e),2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_{(e),1} & 0 \\ 0 & B_{(e),2} \end{pmatrix} \right\| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \begin{pmatrix} A_{(e),1}X_{(e),1} - B_{(e),1} & 0 \\ 0 & A_{(e),2}X_{(e),2} - B_{(e),2} \end{pmatrix} \right\| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \operatorname{Re} \begin{pmatrix} A_{(e),1}X_{(e),1} - B_{(e),1} & 0 \\ 0 & A_{(e),2}X_{(e),2} - B_{(e),2} \end{pmatrix} + i \operatorname{Im} \begin{pmatrix} A_{(e),1}X_{(e),1} - B_{(e),1} & 0 \\ 0 & A_{(e),2}X_{(e),2} - B_{(e),2} \end{pmatrix} \right\| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(A_{(e),1}X_{(e),1} - B_{(e),1}) & 0 \\ 0 & \operatorname{Re}(A_{(e),2}X_{(e),2} - B_{(e),2}) \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{-p} \operatorname{Im} \begin{pmatrix} A_{(e),1}X_{(e),1} - B_{(e),1} & 0 \\ 0 & A_{(e),2}X_{(e),2} - B_{(e),2} \end{pmatrix} \right\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \begin{pmatrix} A_{(e),1} X_{(e),1} & 0 \\ 0 & A_{(e),2} X_{(e),2} \end{pmatrix} - \operatorname{Re} \begin{pmatrix} B_{(e),1} \\ B_{(e),2} \end{pmatrix} \\ \sqrt{-p} \left(\operatorname{Im} \begin{pmatrix} A_{(e),1} X_{(e),1} & 0 \\ 0 & A_{(e),2} X_{(e),2} \end{pmatrix} - \operatorname{Im} \begin{pmatrix} B_{(e),1} \\ B_{(e),2} \end{pmatrix} \right) \end{pmatrix} \right\| \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(A_{(e),1}) & p \operatorname{Im}(A_{(e),1}) & 0 \\ -\operatorname{Re}(A_{(e),2}) & 0 & p \operatorname{Im}(A_{(e),2}) \\ \sqrt{-p} \operatorname{Im}(A_{(e),1}) & \sqrt{-p} \operatorname{Re}(A_{(e),1}) & 0 \\ -\sqrt{-p} \operatorname{Im}(A_{(e),2}) & 0 & \operatorname{Re}(A_{(e),2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(X_{(e),1}) \\ \operatorname{Im}(X_{(e),1}) \\ \operatorname{Im}(X_{(e),2}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(B_{(e),1}) \\ \operatorname{Re}(B_{(e),2}) \\ \sqrt{-p} \operatorname{Im}(B_{(e),1}) \\ \sqrt{-p} \operatorname{Im}(B_{(e),2}) \end{pmatrix} \right\|
\end{aligned}$$

dır. Buradan $X = (\vec{A})^- \vec{B}$ dır.

Teorem 4.3.4. $A_{(E)} \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$, $B_{(E)} \in \mathbb{H}_p^{m \times q}$ ve $X_{(E)}$ pür reel eliptik kuaterniyon matrisi için $A_{(E)} X_{(E)} = B_{(E)}$ nin pür reel en küçük kareler çözümü

$$X_{(E)} = X = (\vec{A})^- \vec{B}$$

$$\text{dır. Burada } \vec{A} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(A_{(e),1}) \\ \operatorname{Re}(A_{(e),2}) \\ \sqrt{-p} \operatorname{Im}(A_{(e),1}) \\ \sqrt{-p} \operatorname{Im}(A_{(e),2}) \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(B_{(e),1}) \\ \operatorname{Re}(B_{(e),2}) \\ \sqrt{-p} \operatorname{Im}(B_{(e),1}) \\ \sqrt{-p} \operatorname{Im}(B_{(e),2}) \end{pmatrix} \text{ dır.}$$

İspat. $X_{(E)} = X_{(e),1} e_1 + X_{(e),2} e_2 \in \mathbb{H}_p^{n \times q}$ olsun. $X_{(E)} = X_{(e),1} e_1 + X_{(e),2} e_2 \in \mathbb{H}_p^{n \times q}$ pür reel

ise

$$\operatorname{Re}(X_{(e),1}) = \operatorname{Re}(X_{(e),2}) = X \text{ ve } \operatorname{Im}(X_{(e),1}) = \operatorname{Im}(X_{(e),2}) = 0$$

dır. $A_{(E)} = A_{(e),1}e_1 + A_{(e),2}e_2 \in \mathbb{H}_p^{m \times n}$, $B_{(E)} = B_{(e),1}e_1 + B_{(e),2}e_2 \in \mathbb{H}_p^{m \times q}$ için

$$\begin{aligned}
 \|A_{(E)}X_{(E)} - B_{(E)}\| &= \frac{1}{\sqrt{2}} \|\eta_p(A_{(E)}X_{(E)}) - \eta_p(B_{(E)})\| \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \operatorname{Re}(\eta_p(A_{(E)}X_{(E)}) - \eta_p(B_{(E)})) + i \operatorname{Im}(\eta_p(A_{(E)}X_{(E)}) - \eta_p(B_{(E)})) \right\| \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\eta_p(A_{(E)}X_{(E)}) - \eta_p(B_{(E)})) \\ \sqrt{-p} \operatorname{Im}(\eta_p(A_{(E)}X_{(E)}) - \eta_p(B_{(E)})) \end{pmatrix} \right\| \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(A_{(e),1}) \\ \operatorname{Re}(A_{(e),2}) \\ \sqrt{-p} \operatorname{Im}(A_{(e),1}) \\ \sqrt{-p} \operatorname{Im}(A_{(e),2}) \end{pmatrix} X - \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(B_{(e),1}) \\ \operatorname{Re}(B_{(e),2}) \\ \sqrt{-p} \operatorname{Im}(B_{(e),1}) \\ \sqrt{-p} \operatorname{Im}(B_{(e),2}) \end{pmatrix} \right\|
 \end{aligned}$$

Buradan $X = (\bar{A})^- \vec{B}$ olur.

4.3.1. Eliptik kuaterniyonik en küçük kareler problemine dair algoritmalar

Bu bölümde Teorem 4.3.2, 4.3.3, 4.3.4' lere dayanarak eliptik kuaterniyon matris denkleminin en küçük kareler çözümünü bulmak için sayısal algoritmalar verilecektir.

Algortitma 1.

- (1) Başla
- (2) Giriş A_E, B_E ve p .
- (3) Hesapla $A_{(e),1}, A_{(e),2}, B_{(e),1}$ ve $B_{(e),2}$.
- (4) Hesapla $X_{(E)} = A_{(e),1}^- B_{(e),1} e_1 + A_{(e),2}^- B_{(e),2} e_2$.
- (5) Yaz $X_{(E)}$
- (6) Dur

Algortitma 2.

(1) Başla

(2) Giriş A_E, B_E ve p .

$$(3) \text{ Hesapla } X = \begin{pmatrix} \text{Re}(X_{(e),1}) \\ \text{Im}(X_{(e),1}) \\ \text{Im}(X_{(e),2}) \end{pmatrix} = (\vec{A})^- \vec{B}.$$

$$(4) \text{ Hesapla } X_{(E)} = \left(\text{Re}(X_{(e),1}) + i \text{Im}(X_{(e),1}) \right) e_1 + \left(-\text{Re}(X_{(e),1}) + i \text{Im}(X_{(e),2}) \right) e_2.$$

(5) Yaz $X_{(E)}$.

(6) Dur.

Algortitma 3.

(1) Başla

(2) Giriş A_E, B_E ve p .

$$(3) \text{ Hesapla } X_{(E)} = X = (\vec{A})^- \vec{B}$$

(4) Yaz $X_{(E)}$.

(5) Dur.

4.3.2. Sayısal örnekler

Bu bölümdeki tüm hesaplamalar iMac16 Dual-Core Intel Core i5 1.6 GHz/ 8GB özelliklerine sahip bilgisayarda MATLAB 2020a yazılımı kullanılarak gerçekleştirilmiştir.

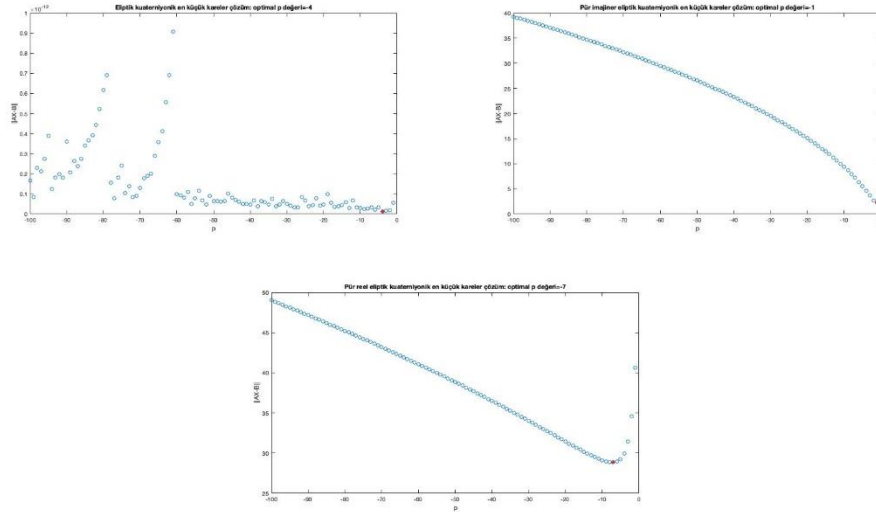
$$\text{Örnek 4.3.2.1. } A_{(E)} = \begin{pmatrix} 8+2i & 1+i & 6+i \\ 3+i & 5+2i & 7+i \\ 4+i & 9+i & 2+2i \end{pmatrix} e_1 + \begin{pmatrix} 8+i & 1-i & 6-i \\ 3-i & 5+i & 7-i \\ 4-i & 9-i & 2+i \end{pmatrix} e_2$$

ve

$$B_{(E)} = \begin{pmatrix} 9+i & 1+i & 6+i \\ 3+i & 6+i & 7+i \\ 4+i & 9+i & 3+i \end{pmatrix} e_1 + \begin{pmatrix} -7+i & -1+i & -6+i \\ -3+i & -4+i & -7+i \\ -4+i & -9+i & -1+i \end{pmatrix} e_2$$

olmak üzere $AX = B$ eliptik kuaterniyon matris denkleminin en küçük kareler çözümünü eliptik kuaterniyon matrisler kümesinde, pür imajiner eliptik kuaterniyon matrisler kümesinde ve pür reel eliptik kuaterniyon matrisler kümesinde bulalım.

Çözüm. p nin -100 ile -1 arasındaki değerleri için eliptik, pür imajiner ve pür reel en küçük kareler çözümlerin en küçük normlarını gösteren grafik aşağıdaki gibidir.



Şekil 4.1. p değerlerine göre $AX=B$ eliptik kuaterniyon matris denkleminin eliptik, pür imajiner ve pür reel en küçük kareler çözümlerin en küçük normları

$p = -4$ için Algoritma 1 e göre

$$X_{(e),1} = A_{(e),1}^- B_{(e),1}$$

$$X_{(e),2} = A_{(e),2}^- B_{(e),2}$$

olduğundan

$$X_{(e),1} = \begin{pmatrix} 1.1085 - 0.1729i & -0.1315 - +0.1471i & 0.0685 - 0.0529i \\ -0.0515 + 0.0671i & 0.9885 - 0.0529i & 0.1085 - 0.0929i \\ -0.0115 + 0.0271i & 0.1885 - 0.1729i & 0.8685 + 0.0671i \end{pmatrix}$$

$$X_{(e),2} = \begin{pmatrix} -0.8344 + 0.1181i & -0.1544 - 0.1219i & 0.0456 + 0.0781i \\ -0.0744 - 0.0419i & -0.9544 - 0.0019i & 0.0856 + 0.1181i \\ -0.0344 - 0.0019i & 0.1656 + 0.1981i & -1.00744 - 0.1219i \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu durumda $AX = B$ eliptik kuaterniyon matris denkleminin en küçük kareler çözümü

$$X_{(E)} = \begin{pmatrix} 1.1085 - 0.1729i & -0.1315 - +0.1471i & 0.0685 - 0.0529i \\ -0.0515 + 0.0671i & 0.9885 - 0.0529i & 0.1085 - 0.0929i \\ -0.0115 + 0.0271i & 0.1885 - 0.1729i & 0.8685 + 0.0671i \end{pmatrix} e_1$$

$$+ \begin{pmatrix} -0.8344 + 0.1181i & -0.1544 - 0.1219i & 0.0456 + 0.0781i \\ -0.0744 - 0.0419i & -0.9544 - 0.0019i & 0.0856 + 0.1181i \\ -0.0344 - 0.0019i & 0.1656 + 0.1981i & -1.00744 - 0.1219i \end{pmatrix} e_2$$

dır.

$p = -1$ için Algoritma 2 e göre çözüm yapıldığında $AX = B$ eliptik kuaterniyon matris denkleminin pür imajiner en küçük kareler çözümü

$$X_{(E)} = \left(\operatorname{Re}(X_{(e),1}) + \operatorname{Im}(X_{(e),1})i \right) e_1 + \left(-\operatorname{Re}(X_{(e),1}) + \operatorname{Im}(X_{(e),2})i \right) e_2$$

$$= \begin{pmatrix} 0.8771 - 0.1895i & 0.0199 + 0.1014i & 0.0199 - 0.0555i \\ 0.0199 + 0.0300i & 0.8771 - 0.0607i & 0.0199 - 0.1129i \\ 0.0199 + 0.0159i & 0.0199 - 0.1843i & 0.8771 + 0.0248i \end{pmatrix} e_1$$

$$+ \begin{pmatrix} -0.8771 + 0.0651i & -0.0199 - 0.1441i & -0.0199 + 0.0562i \\ -0.0199 - 0.0726i & -0.8771 - 0.0204i & -0.0199 + 0.0702i \\ -0.0199 - 0.0153i & -0.0199 + 0.1417i & -0.8771 - 0.1492i \end{pmatrix} e_2$$

biçiminde elde edilir.

$p = -7$ için Algoritma 3 göz önüne alındığında $AX = B$ eliptik kuaterniyon matris denkleminin pür reel en küçük kareler çözümü

$$X_{(E)} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(A_{(e),1}) \\ \operatorname{Re}(A_{(e),2}) \\ \sqrt{-p} \operatorname{Im}(A_{(e),1}) \\ \sqrt{-p} \operatorname{Im}(A_{(e),2}) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(B_{(e),1}) \\ \operatorname{Re}(B_{(e),2}) \\ \operatorname{Im}(B_{(e),1}) \\ \operatorname{Im}(B_{(e),2}) \end{pmatrix}$$

eşitliğinden

$$X_{(E)} = \begin{pmatrix} 0.1405 & 0.0170 & -0.0060 \\ 0.0074 & 0.1566 & -0.0125 \\ 0.0036 & -0.0221 & 0.1699 \end{pmatrix} \quad \text{elde edilir.}$$

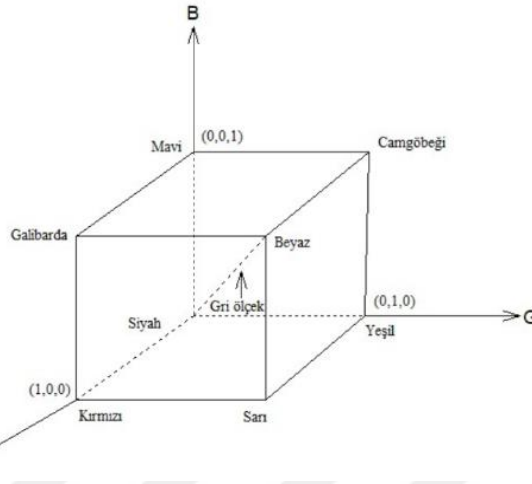
BÖLÜM 5. ELİPTİK KUATERNİYONİK EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİ İLE RENKLİ GÖRÜNTÜ İYİLEŞTİRME

Doğada renk çeşitliliğinin fazla olması nedeniyle bu renkleri gruptama ihtiyacı doğmuştur. Renkleri gruptamak ve standartlaştırmak için ise renk uzayı kavramı ortaya çıkmıştır. Bir renk uzayının amacı, genellikle kabul gördüğü biçimde bir takım standartlar ile renk tanımlamalarını kolaylaştırmaktır. Bugün kullanılan pek çok renk uzayı donanım (renkli monitörler veya yazıcılar gibi) ya da renk manipülasyonlarının hedeflendiği uygulamalara (animasyon için renkli grafiklerin üretilmesi gibi) yöneliktir. Sayısal görüntü işleme açısından, pratikte yaygın olarak kullanılan renk uzayları donanım yönelik modeller renkli monitörler ve renkli video kameraların geniş bir sınıfı için RGB (kırmızı, yeşil, mavi), renkli baskı için CMY (camgöbeği, galibarda, sarı) veya CMYK (camgöbeği, galibarda, sarı, siyah), ve insanların rengi tarif ve yorum şekline yakından uyan HSI (renk tonu, doygunluk, yeğlilik) renk uzaylarıdır [30-31].

İnternet, renkli monitörler ve video kayıt cihazları gibi önemli ve sık kullanılan ortamlarda RGB renk uzayının kullanılması sebebi ile bu çalışma da renk uzayı olarak RGB renk uzayı kullanılacaktır.

RGB renk uzayında her renk, onun kırmızı, yeşil ve mavi ana spektral bileşenleri şeklinde görülür. Bu renk uzayı kartezyen koordinat sistemini baz alır. RGB renk uzayı Şekil 5.1.'de gösterilen küptür. Burada RGB ana renk değerleri küpün üç köşesinde; ara renkler camgöbeği, galibarda ve sarı diğer üç köşesinde; siyah orijinde; beyaz da orijinden en uzaktaki köşesinde yer alır. Bu uzayda gri ölçek, siyahtan beyaza doğru bu iki nokta arasını birleştiren doğru boyunca yer alır. Bu uzayda farklı renkler küp üzerinde veya içerisindeki noktalardır ve bu noktalar orijinden uzanan vektörler ile tanımlanırlar. Kolaylık için tüm renk değerlerinin normalize edildiği varsayılır, bu

nedenle Şekil 5.1.'deki küp birim küptür. Yani tüm R , G ve B değerlerinin $[0,1]$ aralığında olduğu kabul edilir [30-31].



Şekil 5.1. RGB renk uzayı

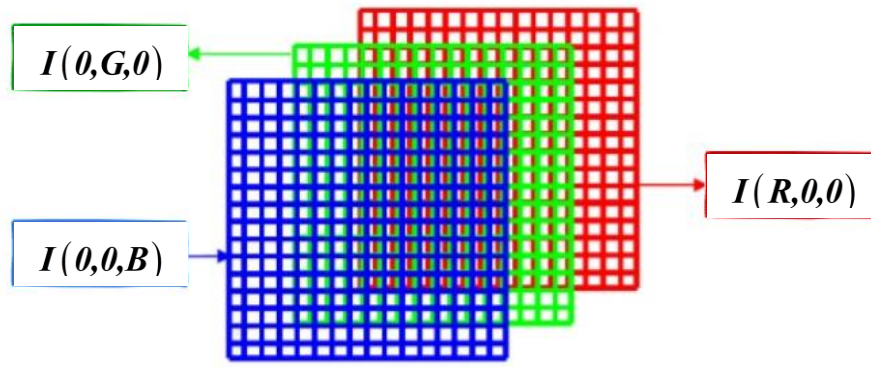
5.1. Renkli Görüntüler

Renkli görüntüler RGB renk uzayında R(Kırmızı), G(Yeşil), B(Mavi) ile ifade edilmiş aynı cisme ait üç adet gri düzeyli görüntünün üst üste ekranda gösterilmesi ile oluşur. Üç renk tonunun kombinasyonları ile renkli görüntüler elde etmek mümkündür. Renkli görüntüyü oluşturan bu üç renk bant olarak da isimlendirilir [30].

Renkli bir görüntünün kırmızı, yeşil ve mavi tonları matris olarak da ifade edilebilir. Matris anlamında düşünüldüğünde doğal renkli 2 boyutlu bir RGB görüntü, her biri $m \times n$ boyutunda üç matrisin bileşiminden oluşur ve

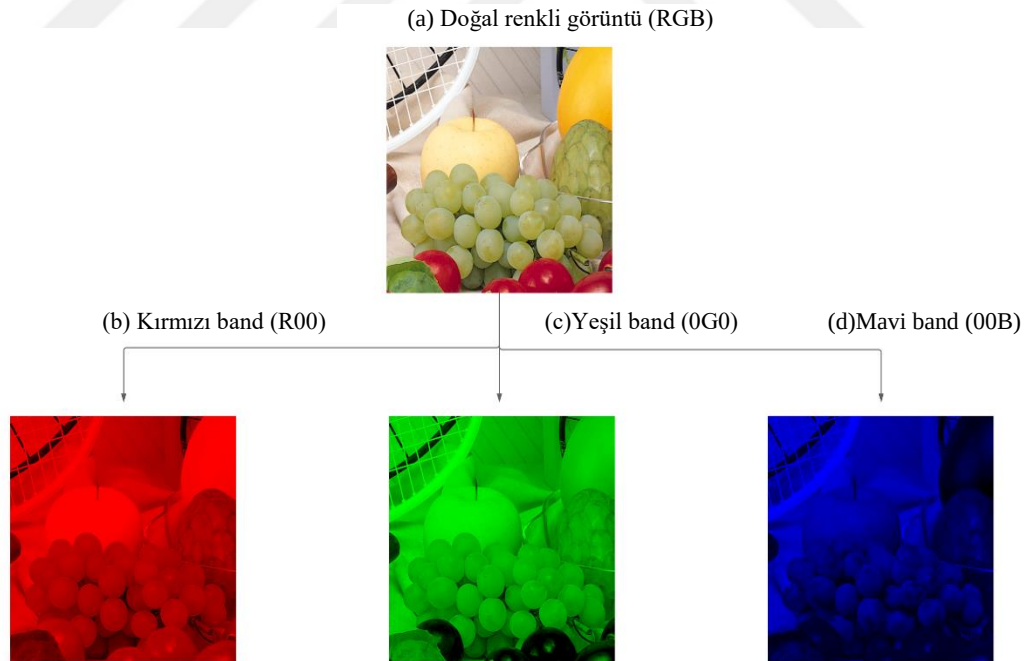
$$\{I(R, G, B) \mid R, G, B \in \mathbb{R}^{m \times n}\}$$

biçiminde ifade edilir. Burada R, G ve B matrislerinin her birinin elemanları 0 ile 1 arasında değerler alır.



Şekil 5.2. RGB renk uzayında görüntünün $m \times n$ boyutlarındaki matris gösterimi

Renkli görüntünün yeşil ve mavi bantlarına ilişkin görüntülerin sıfır alınmasıyla sadece kırmızı bandın görüntüsü elde edilir. Böylece, RGB gösterimi kırmızı yapay renklendirilmiş görüntüsüne ulaşır. Bu durumda kodlama $RGB = R00$ şeklinde olacaktır. Benzer şekilde, yeşil ve mavi yapay renklendirilmiş görüntüler de sırasıyla $RGB = 0G0$ ve $RGB = 00B$ olacaktır. Bu şekilde oluşan yapay renklendirme görüntüleri aşağıdaki gibi olacaktır [31].



Şekil 5.3. Yapay renklendirilmiş görüntüler

RGB formatında doğal renklerden oluşmuş renkli bir görüntü için bantların doğru birleşimi 1-2-3 (Red, Green, Blue) sırasıyla olmalıdır. Eğer RGB gösterimde bant

birleşimlerinin yerleri değiştirilecek olursa renkler de değişecektir. Bu şekilde oluşan görüntülere yapay renkli görüntüler adı verilir [31]. Aşağıdaki resimler bununla ilgili örnekleri göstermektedir.

Doğal renkli görüntü;
Bant birleşimi (R,G,B)



Yapay renkli görüntü;
Bant birleşimi (G,R,B)



Yapay renkli görüntü;
Bant birleşimi (G,B,R)



Yapay renkli görüntü;
Bant birleşimi (R,B,G)



Şekil 5.4. RGB uzayında elde edilmiş yapay renkli görüntüler

5.2. Renkli Görüntü İyileştirme

Birçok görüntüleme uygulamasında gözlenen görüntü, orijinal görüntünün bozulmuş bir tasviridir. Bu bozulmaların sebebi gürültü, piksel değeri hataları, sensör bulanıklığı, kamera sarsıntıları veya sahnedeki nesnelerin hareketlerinden kaynaklanan görüntü bulanıklığı olabilir. Dijital görüntü iyileştirme modelleri, görüntülerin elde edilmesi sırasında meydana gelen bozulmaların ortadan kaldırılmasını veya azaltılmasını amaçlar. Görüntü iyileştirme teknikleri, çoğu zaman gerçek görüntü hakkında önceden bilgi sahibi olarak bozulmuş görüntüden istenen özelliklere sahip bir çözüm elde etmek için kullanılır [32].

Görüntü iyileştirme, görsellik içeren hemen hemen tüm teknik alanlarda yaygın olarak kullanılır öyle ki astronomi, uzaktan algılama, güvenlik uygulamaları, endüstriyel uygulamalar, tıbbi görüntüleme, fotoğrafçılık ve Yüksek Çözünürlüklü Televizyon (HDTV) sistemleri bu alanlardan sadece birkaçıdır. Örneğin, trafikteki araç plakaları hareket bulanıklığından dolayı okunaksız görünebilir; düşük ışık koşullarında çekilen fotoğraflar gürültüye maruz kalabilir; odak dışı fotoğraflar bulanık görünebilir; standart TV sinyalleri yüksek çözünürlüklü TV setleri için yeterince keskin olmayabilir; arşivlenmiş filmler yapay ve gürültülü olabilir veya atmosferik çarpıtmalar uzaktan algılamadaki görüntülerin kalitesini düşürebilir. Bu örnekler gibi daha birçok senaryoda da görüntü iyileştirmenin önemi açıktır [32-33].

Genel olarak bir görüntünün bozulma süreci doğrusal değildir ve uzayda değişkendir. Fakat uygulamalı bilimlerde görüntünün bozulma süreci doğrusal ve uzayda değişmez kabul edilerek LSI (Linear Shift Invariant) bozulma modeliyle incelenir. Bir LSI sistem için $f(x, y)$ orijinal görüntü, $g(x, y)$ gözlemlenen görüntü, $h(x, y)$ görüntüleme sisteminin PSF (Point Spread Function) nokta yayılma fonksiyonu ve $n(x, y)$ ilave gürültü olmak üzere görüntünün bozulma süreci aşağıdaki formül ile ifade edilir:

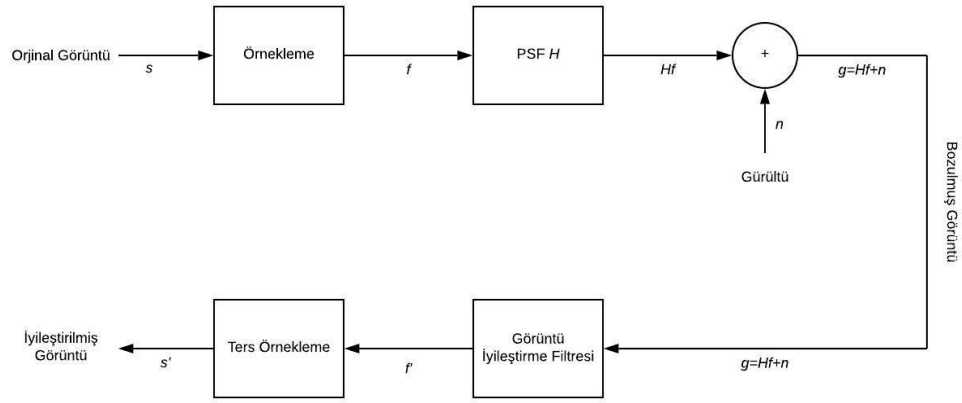
$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + n(x, y) \quad (5.1)$$

Burada "*" işlemi konvolüsyon işlemini ifade etmektedir. Ayrıca, görüntü iyileştirme formülasyonu matris-vektör formu veya Fourier serileri ile de ifade edilebilir. g , f ve n sırasıyla $g(x, y)$, $f(x, y)$ ve $n(x, y)$ fonksiyonlarının matris (veya vektör) gösterimleri olmak üzere (5.1) denkleminin matris-vektör formülasyonu $g = Hf + n$ biçimindedir. Burada H , elemanları $h(x, y)$ 'den alınan iki boyutlu seyrek matristir. Öte yandan, görüntüleme modelinin Fourier-dönüşümü versiyonu

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v)$$

biçimindedir. Burada $G(u,v)$, $H(u,v)$, $F(u,v)$ ve $N(u,v)$ dönüşümleri sırasıyla $g(x,y)$, $h(x,y)$, $f(x,y)$ ve $n(x,y)$ fonksiyonlarının Fourier dönüşümleridir [33].

Bir görüntü iyileştirme sürecinde görüntüye etki eden bozulma modellenir ve bu modellemenin tersi görüntüye uygulanarak iyileştirilmiş görüntü elde edilir (Şekil 5.5.) [33].



Şekil 5.5. Görüntü iyileştirme süreci

5.3. Renkli Görüntülerin Eliptik Kuaterniyon Matrisleri İle İfade Edilmesi

Eliptik kuaterniyonların bir reel ve üç imajiner kısmı mevcuttur. RGB uzayında ifade edilmiş renkli bir görüntünün ise her bir pikselinin kırmızı, yeşil ve mavi olmak üzere üç temel renk bileşeni içerdiği daha önce söylenmişti. Bu bilgilerden yola çıkılarak renkli bir görüntünün her bir pikseli bir pür imajiner eliptik kuaterniyon ile ifade edilebilir. Bu gösterime göre renkli görüntülerin her bir pikselinin kırmızı, yeşil ve mavi bileşenleri pür imajiner eliptik kuaterniyonların i , j ve k bileşenlerine karşılık getirilir. Dolayısıyla $m \times n$ piksel çözünürlüğe sahip renkli bir görüntü

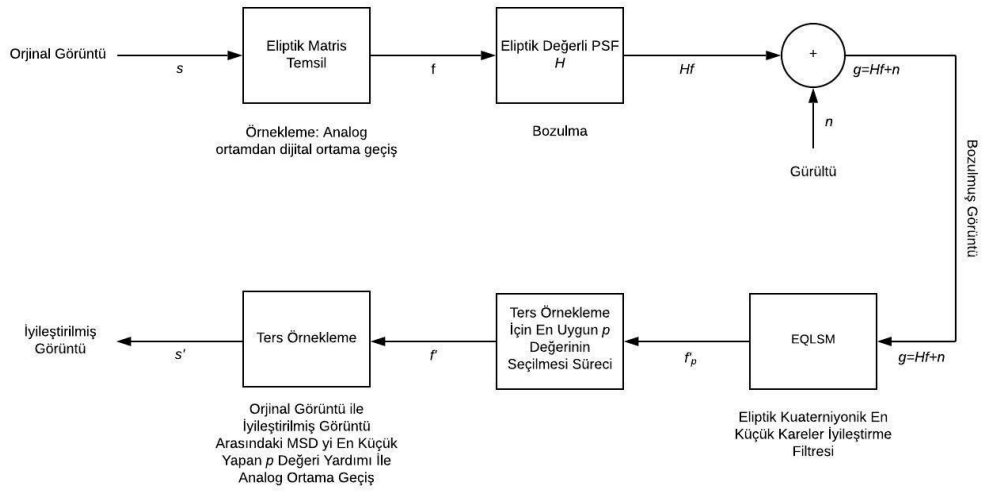
$$Q = Ri + Gj + Bk$$

biçiminde eliptik kuaterniyon matrisi olarak ifade edilebilir. Burada $R, G, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrisleri renkli görüntünün sırasıyla kırmızı, yeşil ve mavi bileşen matrisleridir.

5.4. Eliptik Kuaterniyonik En Küçük Kareler İyileştirme Filtresi Tasarımı

Bu bölümde adını ELSI (Elliptic Linear Shift Invariant) bozulma modeli olarak adlandıracağımız eliptik kuaterniyonlar cebirini kullanan yeni bir görüntü iyileştirme modeli elde edilecektir. Bu bağlamda eliptik kuaterniyon cebri kullanılarak örneklenmiş ve eliptik değerli PSF filtresinden geçirilmiş renkli bir görüntüye c/d/c model tabanlı EQLSM (Elliptic Quaternionic Least Squares Method) eliptik kuaterniyonik en küçük kareler iyileştirme filtresi adını vereceğimiz bir iyileştirme filtresi uygulayacağız. Daha sonra giriş görüntüsü ile iyileştirilen çıkış görüntüsü arasındaki uçtan uca MSD'yi minimize yapan en uygun uzay seçilerek iyileştirilmiş görüntü dijital ortamdan analog ortama aktarılacaktır.

ELSI modelinin diyagramı aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil 5.6. ELSI görüntü iyileştirme modeli

ELSI iyileştirme modelinde kullanacağımız giriş görüntüleri Şekil 5.7 te verilmiştir. Bu giriş görüntülerinin matris temsilleri f olsun. Bu durumda f nin eliptik kuaterniyon temsili $I_E = Ri + Gj + Bk$ dir. Burada R, G, B reel matrisleri görüntünün sırasıyla kırmızı, yeşil ve mavi bileşenlerini ifade etmektedir. $len = 15, theta = 30^\circ$ için 2-boyutlu $f_{special}('motion', len, theta)$ filtresi ile R matrisinin bozulmuş hali R'

olsun. $K = R'R^-$ olmak üzere sırasıyla G ve B matrislerinin K ile bozulmuş halleri G' ve B' olsun. Bu durumda $G' = KG$ ve $B' = KB$ dır. Buraya kadar I görüntüsünden bozulmuş $I' = R'i + G'j + B'k$ görüntüsünü elde etmiş oluruz. Bu görüntüyü f' ile gösterelim (Şekil 5.8).



Şekil 5.7. Orjinal giriş görüntüleri

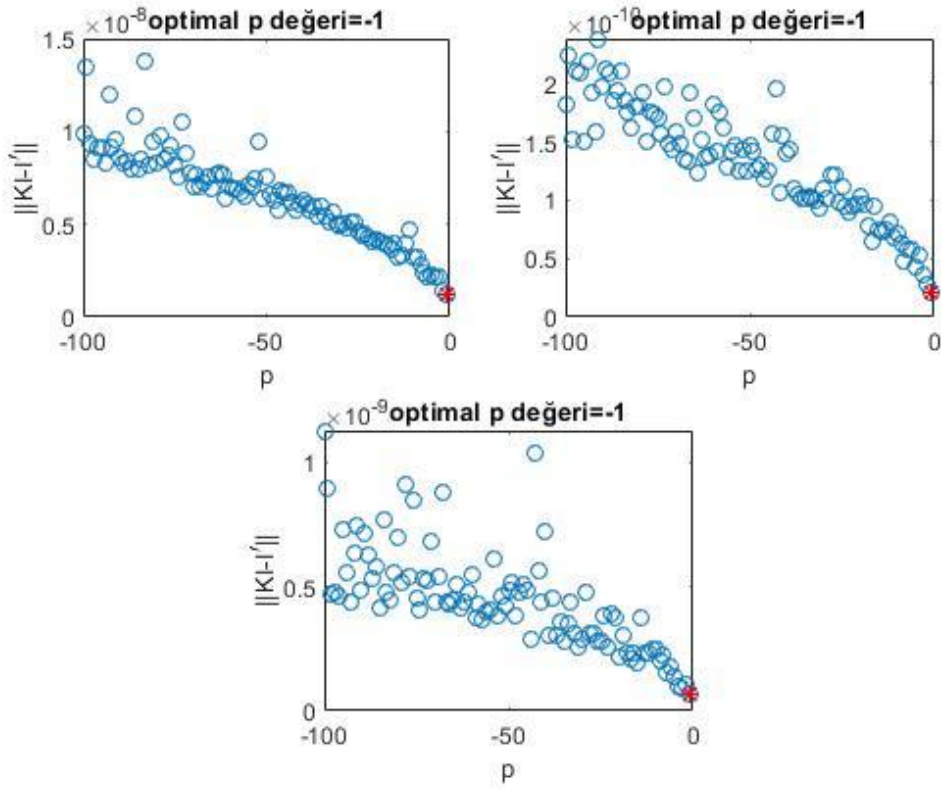


Şekil 5.8. Bozulmuş görüntüler

Sonuç olarak $KI = I'$ eliptik kuaterniyonik en küçük kareler metodunu elde etmiş oluruz. Elde ettiğimiz Algoritma 2 ye göre $KI = I'$ eliptik kuaterniyon matris denkleminde

$$K = \begin{pmatrix} K & 0 & 0 & 0 \\ -K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{-p}K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K \end{pmatrix}, I' = \begin{pmatrix} G' \\ -G' \\ \sqrt{-p}(R' + B') \\ \sqrt{-p}(R' - B') \end{pmatrix}$$

dir. Bu durumda $I = \begin{pmatrix} (ie_1 + ie_2)I_n & (e_1 - e_2)I_n & (ie_1 - ie_2)I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \end{pmatrix}^{-1} I'$ matrisi $KI = I'$ modelinin en küçük kareler çözümüdür. p nin -100 ile -1 arasındaki değerleri için en küçük normları gösteren grafik aşağıdaki gibidir.



Şekil 5.9. $p \in [-100, -1]$ için optimal değerleri

Bu grafiğe göre $p = -1$ her üç görüntü içinde ideal değerdir. Buna göre $p = -1$ için iyileştirilmiş çıkış görüntüleri şekil 5.10 da verilmiştir.



Şekil 5.10. İyileştirilmiş çıkış görüntüleri

BÖLÜM 6. SONUÇ

Bu tez teori ve uygulama olmak üzere iki kısımdan oluşmaktadır. Teorik kısımda eliptik kuaterniyon matrisleri kümesinde görüntü iyileştirme için gerekli olan genelleştirilmiş ters, frobenius norm, en küçük kareler metodu ve izomorfizmalar gibi matematiksel yapılar elde edilmiştir. Uygulama kısmında ise adına Elliptic Linear Shift-Invariant (ELSI) Degradation modeli olarak adlandıracağımız eliptik kuaterniyonlar cebri kullanılarak görüntü iyileştirme modeli elde edilmiştir. Bu bağlamda eliptik kuaterniyon cebri kullanılarak örneklenmiş ve eliptik değerli PSF filtresinden geçirilmiş renkli bir görüntüye eliptik kuaterniyonik en küçük kareler (EKEKK) iyileştirme filtresi adını verdiğimiz bir iyileştirme filtresi uygulanmıştır. Daha sonra giriş görüntüsü ile iyileştirilen çıkış görüntüsü arasındaki uçtan uca MSD'yi minimize yapan en uygun uzay seçilerek iyileştirilmiş görüntü dijital ortamdan analog ortama aktarılmıştır.

Eliptik kuaterniyonlar, reel sayılar ($a_{(E),i} = 0, a_{(E),j} = 0$ ve $a_{(E),k} = 0$ için), kompleks sayılar ($a_{(E),j} = 0, a_{(E),k} = 0$ ve $p = -1$ için), eliptik sayılar ($a_{(E),j} = 0, a_{(E),k} = 0$ ve $p < 0, p \in \mathbb{R}$ için) ve indirgenmiş bi-kuaterniyonlar ($p = -1$ için) cebri de dahil olmak üzere değişmeli bir, iki ve dört boyutlu birçok hiperkompleks sayı sistemlerinin genelleştirilmiş formudur. Diğer bir deyişle bu sayı sistemleri eliptik kuaterniyonların özel hallerine karşılık gelir. Ayrıca eliptik kuaterniyonlar cebri çarpma göre değişme özelliği ve eliptik sayılar ile reel sayılar cümlesine giden birçok yapı koruyan dönüşümleri mevcut olması aynı zamanda $e_1^n = e_1^{n-1} = \dots = e_1^2 = e_1, e_2^n = e_2^{n-1} = \dots = e_2^2 = e_2, e_1 e_2 = 0$ ($n \in \mathbb{N}$) şartlarını sağlayan her ikisi de idempotent e_1 ve e_2 sayılarının lineer bileşimi şeklinde yazılabilmelerinden dolayı eliptik kuaterniyonlar cebri çarpma, bölme, kuvvet alma, kök hesaplama, vb. gibi birçok cebirsel özelliğinin algoritmik karmaşıklığı diğer değişmeli olmayan dört

boyutlu hiperkompleks sayılara göre büyük ölçüde düşüktür. Ayrıca yapısında bulundurduğu uzaylar arasında ideal uzayın seçilip (problemin çözümüne uygun P değerinin seçilmesi) o uzayda işlem yapılması ve birçok fiziksel sistemin eliptik davranış göstermesi, bu sayı sistemini uygulamalı bilimlerde daha avantajlı bir hale getirmektedir.

Sonuç olarak eliptik kuaterniyon matris ile örneklenmiş renkli görüntülerin iyileştirme süreçlerinde uygulayacağımız eliptik kuaterniyonik en küçük kareler algoritmasının zaman ve bellek karmaşasının çok düşük olması, bozulmuş görüntü üzerindeki veri kayıplarını ve bozulmaları azaltma veya tamamen yok etme sürecinde yüksek başarı göstermesi, gerçek zamanlı gömülü sistemlerde dijital görüntü işlemeyi kullanabilecek (örneğin bir hava savunma sisteminin hedefleri tespit ve takip etme yazılımı gibi) günümüzdeki ve gelecekteki yüksek performanslı dijital görüntüleme sistemlerinin performans problemine çözüm üretecektir.

KAYNAKLAR

- [1] Hamilton, W. R. Lectures on quaternions. Hodges and Smith, Dublin, 1853.
- [2] Schütte, H. D.; Wenzel, J. Hypercomplex numbers in digital signal processing, in Proc. IEEE Int. Symp. Circuits Syst., 1990, 2, 1557-1560.
- [3] Pei, S.C.; Chang, J.H.; Ding, J.J.; Chen, M.Y. Eigenvalues and singular value decompositions of reduced biquaternion matrices, IEEE Trans. Circ. Syst. I. 2008, 55, 2673--2685.
- [4] Adler SL. Scattering and decay theory for quaternionic quantum mechanics, and structure of induced T nonconservation. Phys Rev D. 1988;37:3654–3662.
- [5] Bihan NL, Sangwine SJ. Color image decomposition using quaternion singular value decomposition. Proceedings of the International Conference on Visual Information Engineering IET; Guildford, UK. 2004.
- [6] Caccavale F, Natale C, Siciliano B, et al. Six-Dof impedance control based on angle/axis representations. IEEE Trans Robot Autom. 1999;15:289–300.
- [7] Farenick DR, Pidkowich BAF. The spectral theorem in quaternions. Linear Algebra Appl. 2003;371:75–102.
- [8] Ji P, Wu HT. A closed-form forward kinematics solution for the 6-6P Stewart platform. IEEE Trans Robot Autom. 2001;17:522–526.
- [9] Moxey CE, Sangwine SJ, Ell TA. Hypercomplex correlation techniques for vector images. IEEE Trans Signal Process. 2003;51:1941–1953.
- [10] Song GJ, Wang QW, Yu SW. Cramer's rule for a system of quaternion matrix equations with applications. Appl Math Comput. 2018;336:490–499.
- [11] Zhang FX, MuWS, Li Y, et al. Special least squares solutions of the quaternion matrix equation $AXB + CXD = E$. Comput Math Appl. 2016;72:1426–1435.
- [12] S.Yuan, Q.Wang, X.Duan, On solutions of the quaternion matrix equation $AX=B$ and the applications in color image restoration, Appl. Math. Comput. 2013, 221, 10–20.

- [13] Zhang FX, Wei MS, Li Y, et al. Special least squares solutions of the quaternion matrix equation $AX = B$ with applications. *Appl Math Comput.* 2015, 270, 425–433.
- [14] Segre, C. The real representations of complex elements and extension to bicomplex. *Systems. Math. Ann.*, 40, 413, 1892.
- [15] Catoni, F., Cannata, R., Zampetti, P. An introduction to commutative quaternions. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 16, 1–28, 2006
- [16] Pei, S. C., Chang, J. H., Ding, J. J. Commutative reduced biquaternions and their fourier transform for signal and image processing applications. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 52(7), 2012–2031, 2004.
- [17] Catoni, F., Cannata, R., Catoni, V., Zampetti, P. N -dimensional geometries generated by hypercomplex numbers. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 15 (1), 1–26, 2005.
- [18] Isokawa, T., Nishimura, H., Matsui, N. Commutative quaternion and multistate hopfield neural networks, In *Proc. Int. Joint Conf. Neural Netw.*, 1281–1286, 2010.
- [19] Kosal, H. H., Tosun, M. Commutative quaternion matrices. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 24(3), 769–779, 2014.
- [20] Kosal H. H., Akyigit M., Tosun M., Consimilarity of commutative quaternion matrices. *Miskolc Math. Notes*, 16(2), 965–977, 2015.
- [21] Kosal H. H., Tosun M., Some equivalence relations and results over the commutative quaternions and their matrices. *An. S.t. Univ. Ovidius Constanta*, 25(3), 125–142, 2017.
- [22] Kosal H. H., Tosun M., Universal similarity factorization equalities for commutative quaternions and their matrices. *Linear Multilinear Algebra*, 67(5), 926–938, 2019.
- [23] Kosal H. H., Least-squares solutions of the reduced biquaternion matrix equation $AX = B$ and their applications in colour image restoration. *J. Modern Opt.*, 66(18), 1802–1810, 2019.
- [24] Harkin, A., Harkin, J. Geometry of generalized complex numbers. *Mathematics Magazine*, 77(2), 118–129, 2004.
- [25] Clifford, W. K. *Mathematical Papers* (ed. R. Tucker), Chelsea Pub. Co., Bronx, NY, 1968.
- [26] Study, E. *Geometrie der dynamen*, Leipzig, 1903.

- [27] Tian YG. Universal Similarity Factorization Equalities over Generalized Clifford Algebras. *Acta Mathematica Sinica, English Series*. 2006;22(1):289–300.
- [28] Kösal, H. H., On commutative quaternion matrices. Sakarya University, Graduate School of Natural and Applied Sciences, Sakarya, Ph.D. Thesis, 2016.
- [29] Ben-Israel A, Greville TNE. Generalized inverses: theory and applications. New York: John Wiley and Sons; 1974.
- [30] Gonzales, R. C., Woods, R. E., Digital Image Processing. İçinde: Color Image Processing. 3. Baskı, Pearson Education Inc. Publishing Prentice Hall, USA, 402-406, 2008.
- [31] http://www.ibrahimcayiroglu.com/Dokumanlar/GoruntuIsleme/Goruntu_Isleme_Ders_Notlari-1.Hafta.pdf, Erişim Tarihi: 11.03.2020.
- [32] Li, X., Image Restoration Fundamentals And Advances. İçinde: Image Denoising: Past, Present, and Future. 1. Baskı, CRC Press, Taylor & Francis Group, New York, 1-24, 2013.
- [33] Gunturk, B.G., Image Restoration Fundamentals And Advances. İçinde: Fundamentals of Image Restoration. 1. Baskı, CRC Press, Taylor & Francis Group, New York, 25-61, 2013.