



**T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

AYRIK DÜZLEM EĞRİLERİ ÜZERİNE

Emsal ULUDAĞ YETGİN

BURDUR, 2022

**T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

AYRIK DÜZLEM EĞRİLERİ ÜZERİNE

Emsal ULUDAĞ YETGİN

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Zafer ŞANLI

BURDUR, 2022

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “**Ayrık Düzlem Eğrileri Üzerine**” başlıklı bu tezin;

- Kendi çalışmam olduğunu,
- Sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi,
- Bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi,
- Kullandığım verilerde değişiklik yapmadığımı,
- Tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı,
- Bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı

bildirir, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

29 /09 / 2022

Emsal ULUDAĞ YETGİN

TEŞEKKÜR

Tez çalışma süreci boyunca bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana her açıdan yol gösteren, karşılaştığım her zorlukta destek olan ve çalışmamı titizlikle takip eden çok değerli danışman hocam Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Geometri Anabilim Dalı öğretim üyesi Dr. Öğr. Üyesi Zafer ŞANLI'ya sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme de sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Eylül, 2022

Emsal Uludağ YETGİN

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ŞEKİL DİZİNİ.....	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	iv
ÖZET	v
SUMMARY	vi
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	4
2.1. Düzlem Eğrilerinin Diferansiyel Geometrisi için Temel Kavramlar	4
2.2. Eğrileri için Eğrilik Kavramı.....	7
3. AYRIK EĞRİLER.....	14
3.1. Çokgenler ve Dörtgenler	14
3.2. Ayrık Frenet Denklemleri	17
4. 2D AYRIKLAŞTIRMA	21
4.1. İçine Çizilmiş 2D Ayrıklaştırma	21
4.2. Dıştan Çizilmiş 2D Ayrıklaştırma.....	21
4.3. Ortalanmış 2D Ayrıklaştırma	22
5. SONUÇ.....	26
KAYNAKLAR.....	27

ŞEKİL DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 3.1. Bir çemberin ayrıklaştırılması ve karenin düzgünleştirilmesi	15
Şekil 3.2. Bir N-kenarlı çokgenin eğriliği	15
Şekil 3.3. θ ayrık eğriliği ve ϕ ayrık burulması	16
Şekil 3.4. Orijinal ve yeniden tanımlanmış ayrık eğri.....	17
Şekil 3.5. Ayrık Frenet çatısı.....	19
Şekil 4.1. İçine çizilmiş ayrıklaştırma	21
Şekil 4.2. Çevresine çizilmiş ayrıştırma.....	22
Şekil 4.3. Merkezil ayrıklaştırma	23
Şekil 4.4. Detaylı merkezil ayrıklaştırma.....	23
Şekil 4.5. Ortalanmış ayrıklaştırma.....	24
Şekil 4.6. Detaylı Ortalanmış ayrıklaştırma	24

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

χ	: Ayrık dönüşüm
$D(\chi_i)$	: Ayrık fark
$M(\chi_i)$	: Ayrık toplam
τ	: Burulma
κ	: Eğrilik
$\langle \rangle$	: Öklidyen iç çarpım
$\mathbb{R}^n$	: Öklidyen n-uzay
$\ \cdot \ $	: Öklidyen norm
d	: Öklid metriği
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar cismi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Ayrık Düzlem Eğrileri Üzerine

Emsal Uludağ Yetgin

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Zafer Şanlı

Eylül, 2022

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır:

Birinci bölümde, çalışılan konu, tezin amacı ile ilgili bilgi ve literatür araştırmalarına yer verilmiştir.

İkinci bölümde, düzlem ve uzay eğrileri ve bazı özellikleri tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde, ayrik eğriler ve ayrik eğrilikler tanıtılmış bazı özellikleri ile ayrik Frenet denklemleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde, 2 boyutlu ayriklaştırma durumu incelenmiştir.

Beşinci bölümde ise elde edilen veriler ışığında literatür kazanımları ve sonuçlarına yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: ayrik eğri, ayrik eğrilik, ayrik torsiyon

SUMMARY

M. Sc. Thesis

On Discrete Plane Curves

Emsal Uludağ Yetgin

**Burdur Mehmet Akif Ersoy University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assist. Dr. Zafer Şanlı

September, 2022

This thesis consists of five chapters.

In the first chapter, information and literature researches about the subject studied and the aim of the thesis are given.

In the second chapter, plane and spatial curves are introduced and some basic concepts and propositions used in classical differential geometry are given.

In the third chapter, discrete curves and discrete curvatures are introduced and discrete Frenet equations are given.

In the fourth chapter, 2 dimensional discretization is examined.

In the fifth chapter, the contributions to the literature and the results are given in the light of the obtainments.

Keywords: discrete curves, discrete curvatures, discrete torsions

1. GİRİŞ

Diferansiyel geometrinin tarihi, geometrinin tarihi ile bir tutularak Mısır ve Antik Yunandaki geometri tarihi ile başlatılsa da, modern anlamda diferansiyel geometrinin tarihi Christian Huygens' in sarkaç saatleri üzerine 1673 yılında yazdığı kitap ile başlatılabilir. Esas olarak diferansiyel geometrinin başlangıcı türev ve integral kavramlarının ortaya çıkması ile başlayacağından, başlangıçtaki en önemli isim Gottfried Leibniz' dir. Türev ve integral kavramlarını Isaac Newton' dan bağımsız olarak ortaya koyan Leibniz akademi ile ilgili olmayan ve ömrü boyunca büyükelçi ve devlet görevlisi olarak çalışan biridir. Türev ve integral kavramlarını ilk keşfeden kişinin Newton olduğu kabul edilse de, Newton' un çalışmalarını yayınlamaması, bu alandaki ilk çalışmaları Leibniz' e ait kılmaktadır. Leibniz'in önemli bir özelliği de kullanışlı matematik notasyonlarını literatüre kazandırmasıdır. Türev ve integral hesapta ve birçok derste kullanılan türev sembolü $\frac{d}{dx}$ ve integral sembolü $\int f dx$ Leibniz'e aittir. Leibniz 1684 yılında yayınladığı makalede $d^2y=0$ denklemini yorumlayarak büküm noktası kavramını vermiş, 1686 yılında yayınladığı makalede ise oskülatör çember kavramını tanımlamıştır. 1692 yılındaki makalesinde ise zarflar üzerine bir teorem vermiştir (Şahin, 2022).

Diferansiyel geometrinin başlangıcında türev ve integral tekniklerinin geometriye uygulanması konusunda ilk sonuçlar Johan Bernoulli'nin 1691-1692 yıllarındaki ders notlarında görülmektedir. Bu notlarda düzlem eğrilerinin teğet vektörlerinin bulunması, maksimum minimum noktaların elde edilmesi ve büküm noktası gibi kavramlar yer almaktadır. Diferansiyel geometrideki çalışmaların ivme kazanması Johan Bernoulli ve Jacob Bernoulli kardeşler arasındaki yarışın sonucu olmuştur. Bu yarış sayesinde birçok yeni eğri bulunmuş, çok sayıda diferansiyel denklemin çözümü yapılmış ve varyasyon hesabı ortaya konulmuştur. Düzlem eğrilerinin elemanter diferansiyel geometrisi Bernoulli kardeşlerin 1700 yılına kadar elde ettikleri sonuçlarla şekillenmiştir (Şahin, 2022).

Pierre Bezier, 1960' lı yıllarda Peugeot firmasında çalışan bir matematikçi ve mühendis olarak eğrinin uç noktalarına yakın noktalar (kontrol noktalar) ile belirlenebileceğini keşfetmesi ile bilgisayar destekli geometrik tasarımın temeli olan Bezier eğrilerini bulmuş oldu. Böylece eğrileri geçtikleri noktalar veya denklemleri ile değil bu kontrol noktaları ile belirlemek mümkün olmaktadır (Şahin, 2022).

Doktorasını yeni bitiren Paul de Faget Casteljau, 1959 yılında Citroen şirketinde çalışmaya başladı ve Bernstein polinomlarını kullanarak Bezier'in daha sonra bulacağı eğri sınıfına vardı. Ancak De Casteljau' nun çalışmaları uzun süre Citroen tarafından bir sır olarak saklandı. Casteljau' nun çalışması ile ilgili verilen ilk bilgi, Casteljau' nun adı verilmeden, geliştirdiği algoritma oldu. Casteljau' nun isminin bilgisayarlı geometrik tasarım literatüründe kendini yer bulması 1970' li yılların sonunu buldu (Şahin, 2022).

Eğrilerin ayrıklaştırılması problemi ise geçmişi çok eskilere dayanan bir konudur. Diferansiyel geometrik bakış açısı ile ele alındığında bile eğrilerin ayrıklaştırılması üzerine yapılan çalışmalar bir asırdan daha eskilere dayanmaktadır. Ancak matematik ve diğer birçok bilim dalında ayrık eğriler kullanılmasına rağmen, literatürde bu konuya ilişkin genel bir teori veya metodoloji yoktur. Dahası, literatürde ayrık eğrilik κ , ayrık torsiyon τ veya ayrık Frenet çatısı gibi temel kavramlarla bile çelişen tanımları vardır. Örneğin, kenar uzunluğu l olan bir düzgün çokgene çember ile yaklaşım problemi göz önüne alındığında, ayrık eğrilik κ , θ açısına bağlı olarak eşit derecede değeri olan üç tanımının olduğu gösterilecektir (Carroll vd., 2013):

$$\kappa = \frac{2}{l} \sin \frac{\theta}{2}, \quad \kappa = \frac{2}{l} \tan \frac{\theta}{2}, \quad \kappa = \frac{\theta}{l} \quad (1.1)$$

Literatürde, Doliwa ve Santini, Hoffman, Sogo, gibi araştırmacıların çalışmalarında bu tanımlar yer almaktadır (Doliwa ve Santini, 1995; Hoffman, 2000; Sogo, 2006). Burada ortaya çıkan bu çeşitliliğin kaynağı, her yazarın üzerinde çalıştığı probleme göre N kenarlı çokgenin, içine çizilmiş çemberi, çevresine çizilmiş çemberi veya ortalanmış çemberi ile ilişkilendirip ilişkilendirmemeyi seçmesi olmuştur. Bu teknikler üzerine uygulamalar olmasına rağmen, bu teoride genel bir yaklaşım eksikliği vardır.

Carroll vd. nin *A Survey of the Differential Geometry of Discrete curves* isimli çalışmalarında, ayrık eğrilerin bahsi geçen bu üç farklı durumu için Frenet denklemlerinin ayrı bir versiyonuyla sonuçlanan üç ayrı eğri teorisi oluşturmuştur:

$$\begin{aligned} DT^e &= \kappa N^v \\ DN^e &= -\kappa T^v + \tau B^v \\ DB^e &= -\tau N^v \end{aligned} \quad (1.2)$$

Literatürde bunların dışında birçok ayrık Frenet denklemi bulunmasına rağmen bu denklemler bazı hata terimleri içermektedir. Carroll vd. nin çalışmasında kullanılan yöntem yeni bir yaklaşım olup elde edilen ayrık Frenet denklemleri bahsi geçen hata terimlerini içermez. Ayrıca çalışmalarında, ayrık uzunluk l , ayrık eğrilik κ , ayrık torsiyon τ tanımlarının katı hareketler altında tek bir ayrık eğri ürettiğini de göstermişlerdir.

Bu çalışmada klasik diferansiyel geometrinin eğriler üzerine olan kavram ve sonuçları ile ayrık diferansiyel geometrinin kavram ve sonuçları karşılaştırılmış ve ayrık evolüt eğrisi incelenmiştir.



2. GENEL BİLGİLER

Bu kısımda, tezde kullanılacak olan klasik diferansiyel geometrinin bazı temel tanım ve teoremlerine yer verilmiştir.

2.1. Düzlem Eğrilerinin Diferansiyel Geometrisi için Temel Kavramlar

Tanım 2.1. $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi olmak üzere

$$\mathbb{R}^n = \{(p_1, p_2, \dots, p_n) : p_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\} \quad (2.1)$$

sıralı reel sayı n-lilerinin kümesi üzerinde toplama

$$(p_1, p_2, \dots, p_n) + (q_1, q_2, \dots, q_n) = (p_1 + q_1, p_2 + q_2, \dots, p_n + q_n) \quad (2.2)$$

ve skalarla çarpım işlemi

$$\lambda(p_1, p_2, \dots, p_n) = (\lambda p_1, \lambda p_2, \dots, \lambda p_n) \quad (2.3)$$

olarak tanımlanır. Bu işlemlere göre $\mathbb{R}^n$ kümesi $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir reel vektör uzayı olur (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.2. $\mathbb{R}^n$ vektör uzayında $p = (p_1, p_2, \dots, p_n), q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ olmak üzere

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^n p_i q_i \quad (2.4)$$

olarak tanımlı fonksiyona $\mathbb{R}^n$ vektör uzayında Öklid iç çarpımı denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.3. $p \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\|p\| = \sqrt{\langle p, p \rangle} \quad (2.5)$$

olarak tanımlı fonksiyona $\mathbb{R}^n$ üzerinde norm fonksiyonu; $\|p\| \in \mathbb{R}$ sayısına da $p \in \mathbb{R}^n$ vektörünün normu adı verilir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.4. $\mathbb{R}^n$ vektör uzayında

$$d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(p, q) = \|p - q\| \quad (2.6)$$

olarak tanımlı fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir metriktir. Bu metrikle birlikte $\mathbb{R}^n$ uzayına Öklid n-uzayı denir. Özel olarak, n=2 haline Öklid düzlemi; n=3 haline de Öklid uzayı denir (Sabuncuoğlu, 2014).

Tanım 2.5. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun her mertebeden kısmi türevleri var ve sürekli ise f fonksiyonuna düzgündür veya C^∞ sınıfındandır denir (O'Neill, 2006).

Tanım 2.6. $u, v \in \mathbb{R}^3$ ve $\{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ Öklid uzayının standart bazı olmak üzere bu vektörlerin vektörel çarpımı

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

olarak tanımlı vektördür (O'Neill, 2006) .

Tanım 2.7. $f: U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in U$ noktası için F fonksiyonunun 1:1 olacağı bir komşuluğu varsa f fonksiyonuna yerel olarak 1:1 dir denir (Şahin, 2022).

Tanım 2.8. $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ olmak üzere bir düzlem eğrisinin C^k sınıfından parametrik gösterimi, yerel olarak birebir ve C^k sınıfından olan

$$\alpha: (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (2.7)$$

dönüşümü olarak tanımlanır. Bu durumda

$$\{\alpha(t): t \in (a, b)\} \quad (2.8)$$

kümesine α ile gösterilen eğrinin destek kümesi denir (Şahin, 2022).

Tanım 2.9. $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto f(t)$ ve $g: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^2, s \mapsto g(s)$ C^k sınıfındaki iki parametrik gösterim olsun. Eğer C^k sınıfından $\varphi: (a, b) \rightarrow]c, d[$ ve $\varphi^{-1}:]c, d[\rightarrow]a, b[$ 1:1 dönüşümlerinin $g \circ \varphi = f$ ve $f \circ \varphi^{-1} = g$ olacak şekilde var olması durumunda f ve g parametrik gösterimleri denktir denir. Bu durumda φ^{-1} dönüşümünün 1:1 olması fazladan bir şart olmakla birlikte C^k sınıfından olması zorunludur.

Tanımı esas alarak, bir parametrik gösterimden diğer gösterime parametrik değişimi yapılarak geçebiliyorsa bu iki parametrik gösterim denktir denir. Yani

$$s = \varphi(t), \quad t = \varphi^{-1}(s)$$

olur (Şahin, 2022).

Önerme 2.10. Parametrik gösterimlerin C^k sınıfından denkliği, düzlem eğrilerinin C^k sınıfından parametrik gösterimleri üzerinde bir denklik bağıntısıdır (Şahin 2022).

Tanım 2.11. Düzlem eğrilerinin C^k sınıfından parametrik gösteriminin denklik sınıflarının her birine C^k sınıfından bir düzlem eğrisi denir (Şahin, 2022).

Önerme 2.12. Diferansiyellenebilirlik mertebesi ne olursa olsun iki denk parametrik gösterim daima aynı desteğe sahiptir (Şahin, 2022).

Tanım 2.13. $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2, C^1$ sınıfından parametrik eğrinin gösterimi olsun. Bu durumda $f'(t) \neq 0$ ise $t \in (a, b)$ parametrelili noktaya regüler denir. Eğer $\forall t \in (a, b)$ için $f'(t) \neq 0$ ise eğrinin gösterimine regülerdir denir. Eğer $f'(t) = 0$ ise $t \in (a, b)$ parametrelili noktaya singüler denir (Şahin, 2022).

Önerme 2.14. C^1 sınıfından denk iki parametrik gösterim f ve g olsun. Bu durumda

- 1- f , parametrik gösterimin $t \in (a, b)$ parametrelili noktada regüler olması için gerek ve yeter şart g , parametrik gösterimin $t \in (a, b)$ parametrelili noktada regüler olmasıdır.
- 2- f parametrik gösteriminin regüler olması için gerek ve yeter şart g parametrik gösteriminin regüler olmasıdır.

İspat: $f = g \circ \phi$ olduğundan $f'(t) = g'(\phi(t))\phi'(t)$ dır. Böylece

$$f'(t) \neq 0 \Leftrightarrow g'(\phi(t)) \neq 0.$$

t parametresi yok edilerek eğrinin kartezyen gösterimi elde edilir. Buna göre kartezyen eğri, $F(x, y) = 0$ denkleminin çözümleri olan x ve y noktalarının kümesidir.

C^1 sınıfından bir eğri için

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} \neq 0, a \leq t \leq b$$

olduğundan $x(a) \leq x \leq x(b)$, $\dot{x} > 0$ veya $x(b) \leq x \leq x(a)$ aralığı üzerinde $t = t(x)$ ters fonksiyonu vardır. Eğer $t = t(x)$ ifadesi $y = y(t)$ ifadesinde yerine yazılırsa $y = y(t(x)) = f(x)$ olur. Böylece $a \leq t \leq b$ aralığında $x = x(t), y = y(t), a \leq t \leq b$ eğrisi

$$y = f(x)$$

olarak ifade edilir. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir (Şahin, 2022).

Önerme 2.15. $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda aşağıdakiler denktir:.

- 1) f , bir düzlem eğrisinin regüler parametrik gösterimidir.
- 2) f, C^1 sınıfındandır ve $\forall t \in (a, b)$ için $f'(t) \neq 0$

(Şahin, 2022).

Bu durumda, eğer $x(t), y(t)$ tanım aralığı $a \leq t \leq b$ üzerinde sürekli ve $x(t)$ ve $y(t)$ fonksiyonlarının birinci türevleri var, sürekli ve sıfırdan farklı ise

$$a(t) = \{x(t), y(t)\}$$

ile verilen bir küme $a \leq t \leq b$ regüler eğri tanımlar. $x = x(t), y = y(t), a \leq t \leq b$ denklemleri eğriyi belirleyen yer vektörünü vermektedir.

Lemma 2.16. $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2, C^1$ sınıfından bir fonksiyon öyle ki $t \in (a, b)$ için $f'(t) \neq 0$ olsun. Bu durumda f yerel olarak 1:1 dir.

İspat: $t_0 \in (a, b)$ alalım. Bu durumda f' fonksiyonunun en az bir bileşeni sıfırdan farklı olmalıdır. Kabul edelim ki, $f'(t) > 0$ olsun. Süreklilikten $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ komşuluğunda $f_1'(t) > 0$ alabiliriz. f fonksiyonunun t_0 noktasının bir komşuluğunda 1:1 olmadığını kabul edelim. Bu durumda $t_1 < t_2$ için $f(t_1) = f(t_2)$ olur. Bu durumda ortalama değer teoreminden $t_1 < t_3 < t_2$ olacak şekilde $t_3 \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ vardır öyle ki $0 = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = f'(t_3)$ bu ise $f'(t_3) \neq 0$ ile çelişir. Böylece f fonksiyonunun t_0 noktasının bir komşuluğunda 1:1 dir.

Tanım 2.17. $a < t_0 < b$ alalım. $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ eğrisi için $[a, t]$ aralığındaki yay uzunluğu fonksiyonu

$$s(t) = \int_a^t \left(x'(u)^2 + y'(u)^2 \right)^{1/2} du, a \leq t \leq b$$

ile tanımlanır. Bu durumda

$$s'(t) = \|\alpha'(t)\| \quad \|\alpha'(t)\|^2 = \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle$$

İle tanımlı s parametresine yay parametresi denir (Şahin, 2022).

2.2. Eğrileri için Eğrilik Kavramı

Tanım 2.18. $\mathbb{R}^2$ de kompleks yapı

$$J: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \rightarrow J(x, y) = (-y, x)$$

ile tanımlı bir lineer dönüşümdür. Geometrik olarak J dönüşümü saat yönünün tersine $\frac{\pi}{2}$ radyanlık bir dönmedir (Şahin, 2022).

Lemma 2.19. Kompleks yapı aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$J^2 = -I$$

$$\langle Jx, Jy \rangle = \langle x, y \rangle$$

$$\langle Jx, x \rangle = 0$$

olur, burada I , birim dönüşümdür (Şahin, 2022).

İspat: İlk özellik açıktır. İkinci özelliği gösterelim. $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ olsun. Bu durumda $Jx = (-x_2, x_1)$ ve $Jy = (-y_2, y_1)$ dır. Böylece

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

ve

$$\langle Jx, Jy \rangle = x_2 y_2 + x_1 y_1$$

elde edilir.

Tanım 2.20. $\|\alpha'(t)\| = 1$ olması halinde t yay parametreleri çakışır. Bu durumda α yay parametresi ile parametrelendirilmiştir (veya birim hızlı) denir (Şahin, 2022).

Şimdi bir düzlem eğrisi kullanılarak Öklid düzlemi için ortonormal baz inşa edilecektir:

Kabul edelim ki, $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ yay parametresi ile verilsin. Bu durumda α eğrisinin teğet vektörü $\alpha'(s), T$ ile gösterilir. Böylece $T: I \rightarrow \mathbb{R}^2, \forall s \in I$ için $\|T(s)\| = 1$ olacak şekilde vektör değerli diferansiyellenebilir fonksiyonudur. $\mathbb{R}^2$ de $T(s)$ vektörüne dik olan sadece iki vektör vardır. Biz $N(s) = JT(s)$ birim vektörünü seçiyoruz. $N(s)$ vektörüne $\alpha(s)$ noktasında α eğrisinin normal vektörü denir. Bu seçimle birlikte N ,

$$\|N(s)\| = 1, \langle T(s), N(s) \rangle = 0, \text{ ve } \det(T(s), N(s)) = 1, \forall s \in I$$

olacak şekilde diferansiyellenebilir bir vektördür. Böylece $\mathbb{R}^2$ uzayının pozitif yönlendirilmiş bir ortonormal bazını inşa etmiş oluruz. $\{T(s), N(s)\}$ ikilisine s veya $\alpha(s)$ de α eğrisinin pozitif yönlendirilmiş Frenet ikilisi adı verilir.

Bu bazı kullanarak, eğrinin her noktasında eğriye iliştilmiş bu çatının değişimini inceleyerek eğrinin ne kadar eğrildiğini gözlemlenecektir:

$$\|T(s)\|^2 = \|N(s)\|^2 = 1 \text{ ve } \langle T(s), N(s) \rangle = 0$$

ifadelerinde türev alınırsa

$$\langle T'(s), T(s) \rangle = \langle N'(s), N(s) \rangle = 0$$

$$\langle T'(s), N(s) \rangle + \langle T(s), N'(s) \rangle = 0$$

olur. Böylece görülür ki, $T'(s)$ ve $N(s)$ aynı doğrultuya sahiptir. Buradan $\kappa(s) \in \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$T'(s) = \kappa(s) N(s)$$

yazılabilir. Buradan $\kappa(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle$ elde edilir. $\kappa: I \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir $\kappa(s)$ sayısına α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği denir. Bu durumda

$$N'(s) = -\kappa(s)T(s)$$

olur. Böylece

$$\|\kappa(s)\| = \|T'(s)\| = \|\alpha''(s)\|$$

dır, buradan $\kappa(s), \alpha$ eğrisinin ivme vektörünün uzunluğudur.

$\|\alpha'(s)\| = 1$ olduğundan, ivme sadece merkezidir ve teğet değildir. $\alpha(s), s$ parametresi ile verilsin. Eğer eğri bir doğru değil ise, eğrinin bir doğru olmasından sapmasını ölçmek önemlidir. Bu ölçüme eğrinin eğriliği adı verilir. Eğrinin eğriliği teğetin eğri boyunca hareketi esnasındaki doğrultusunun değişme miktarıdır. Sonuç olarak $|\kappa(s)|, \alpha$ eğrisinin doğrultusunun değişimini ölçer. Ayrıca

$$\kappa(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle = \langle \alpha''(s), J\alpha'(s) \rangle = \det(\alpha'(s), \alpha''(s))$$

dır. Böylece $\kappa(s)$ fonksiyonunun işareti, eğrinin teğet vektörü (hız vektörü) ile belirlenen bazının yönlendirmesi hakkında bilgi verir. Yani $\kappa(s) > 0$ ise eğrinin doğrultusu saat yönünün tersi yönünde değişir. Bu durum düzlem eğrileri ile uzay eğrileri arasındaki önemli bir farktır. Çünkü uzay eğrilerinde eğrilik her zaman pozitif olacaktır.

Önerme 2.21. $\alpha(s)$ birim hızlı düzlemsel eğri olsun. Sabit bir vektör $\vec{a}, \varphi(s)$ kadar saat yönünün tersinde döndürüldüğü durumda eğrinin birim teğet vektörü ile çakışmış olsun. Bu durumda

$$\kappa(s) = \frac{d\varphi}{ds}$$

dir (Şahin, 2022)

İspat: $\vec{a}$ sabit bir vektör ve $\vec{b}, \vec{a}$ vektörünün $\frac{\pi}{2}$ kadar döndürülmesi ile elde edilen vektör olsun. T birim vektör olduğundan

$$\vec{T} = \cos \varphi \vec{a} + \sin \varphi \vec{b}$$

yazılır. s parametresine göre türev alınırsa

$$\vec{\dot{T}} = (-a \sin \varphi + b \cos \varphi) \frac{d\varphi}{ds}$$

olur. İfadenin her iki tarafı $\vec{a}$ vektörü ile iç çarpıma tabi tutulursa

$$\langle \vec{T}, \vec{a} \rangle = -\sin \varphi \frac{d\varphi}{ds}$$

bulunur. Bu halde

$$\kappa_s \langle \vec{N}_s, \vec{a} \rangle = -\sin \varphi \frac{d\varphi}{ds}$$

dır. Diğer taraftan $\vec{N}_s$ ile $\vec{a}$ arasındaki açı $\varphi + \frac{\pi}{2}$ dir. Böylece

$$\kappa_s \|\vec{N}_s\| \|\vec{a}\| \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \varphi \frac{d\varphi}{ds}$$

$$-\kappa_s \sin \varphi = -\sin \varphi \frac{d\varphi}{ds}$$

$$\kappa_s = \frac{d\varphi}{ds}$$

elde edilir.

Aşağıdaki teorem, düzlemsel eğrinin her bir noktasındaki eğriliğinin bilinmesi durumunda eğrinin bilindiğini göstermektedir.

Teorem 2.22. $\kappa: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda işaretli eğriliği κ olacak şekilde bir birim hızlı α eğrisi vardır. Üstelik, eğriliği κ olan bir başka

$$\beta: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

birim hızlı eğri varsa bu durumda

$$\beta(s) = M(\alpha(s)), s \in (a, b)$$

olacak şekilde M katı hareketi vardır. Burada $M, T_a, a = (a_1, a_2)$ öteleme ve R_θ, θ kadar dönme olmak üzere $M = T_a \circ R_\theta$ ile belirlenir (Şahin, 2022).

İspat: Sabit $s_0 \in (a, b)$ için, herhangi bir $s \in (a, b)$ için, Önerme 2.21 kullanılarak

$$\varphi(s) = \int_{s_0}^s \kappa(u) du$$

tanımlanır. Bu durumda

$$\beta(s) = \left(\int_{s_0}^s \cos \varphi(t) dt, \int_{s_0}^s \sin \varphi(t) dt \right)$$

olarak tanımlanabilir. Böylece

$$\beta'(s) = (\cos \varphi(s), \sin \varphi(s))$$

olur ki, bu vektörün x-ekseni ile yaptığı açı $\varphi(s)$ dir. Böylece $\gamma(s)$ birim hızlıdır ve işaretli eğriliği

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d}{ds} \int_{s_0}^s \kappa(u) du = \kappa(s)$$

olur. Teoremin ikinci kısmı için, kabul edelim ki, $\theta(s)$ x-ekseni ile β eğrisinin β' teğeti arasındaki açı olsun. Böylece

$$\beta'(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$$

veya

$$\beta(s) = \left(\int_{s_0}^s \cos\theta(t) dt, \int_{s_0}^s \sin\theta(t) dt \right)$$

Olur. Önerme 2.21 den

$$\frac{d\theta}{ds} = \kappa(s)$$

Olduğundan

$$\theta(s) = \int_{s_0}^s \kappa(u) du + \theta(s_0)$$

dır. Bu denklem $\beta(s)$ de yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Şimdi $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ ile verilen regüler eğrinin eğriliği koordinatlara bağlı olarak elde edilecektir. α regüler bir eğri olsun. Bu durumda, s yay parametresi olmak üzere

$$\alpha(t) = \beta(s(t))$$

yazılabilir. Bu eğri aynı zamanda $\alpha(t) = (x(t), y(t), 0)$ yazılabilir. Şimdi s yay parametresine göre türev ($'$) ile ve t parametresine göre türev $\dot{\alpha}$ ile gösterilir ve zincir kuralı uygulanırsa

$$\dot{\alpha}(t) = \beta'(s(t)) \dot{s}(t)$$

$$\dot{\alpha}(t) = T \dot{s}$$

$$\ddot{\alpha}(t) = T'(\dot{s})^2 + T \ddot{s}$$

$$\dot{\alpha}(t) \wedge \ddot{\alpha}(t) = \kappa(T \wedge N)(\dot{s})^3$$

bulunur. T ve N , üç boyutlu uzayda XOY düzleminde ise $T \wedge N$, XOY düzlemine diktir.

T ve N birim vektörler ve

$$\|T \wedge N\| = \|T\| \|N\| \cdot 1 = 1$$

olduğundan $T \wedge N$ vektörünün de birim vektör olduğu görülür. Böylece

$$\|\dot{\alpha}(t) \wedge \ddot{\alpha}(t)\| = \kappa^2(\dot{s})^6$$

olacağından

$$\kappa = \frac{\|\dot{\alpha}(t) \wedge \ddot{\alpha}(t)\|}{(\dot{s})^3} = \frac{\|\dot{\alpha}(t) \wedge \ddot{\alpha}(t)\|}{\|\dot{\alpha}(t)\|^3}$$

dır. Koordinatlar türünden ise

$$\dot{\alpha}(t) = (x'(t), y'(t), 0)$$

$$\ddot{\alpha}(t) = (x''(t), y''(t), 0)$$

kullanılır ve

$$\dot{\alpha}(t) \wedge \ddot{\alpha}(t) = (0, 0, x'y'' - x''y')$$

$$\|\dot{\alpha}(t) \wedge \ddot{\alpha}(t)\| = x'y'' - x''y'$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\kappa = \frac{x'y'' - x''y'}{((x')^2 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

elde edilir.

Tanım 2.23. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ düzlemsel bir eğrinin parametrik gösterimi olsun. Bu durumda eğrinin normaller eğrisine eğrinin evolütü denir (Şahin, 2022).

Önerme 2.24. $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ parametrik gösterimi ile verilen düzlem eğrisinin evolütünün koordinatları X ve Y olmak üzere parametrik denklemi

$$X = x - \frac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}$$

$$Y = y + \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}$$

ile verilir (Şahin, 2022).

Tanım 2.25. (Eğrilik Merkezi): $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ bir düzlem eğrisinin parametrik gösterimi olsun. Eğer Ω merkezli γ çemberi var öyle ki $t_0 \in I$ da eğriye teğet ve t_0 da eğrinin eğriliği ve çemberin eğriliği aynı ise Ω noktasına eğrinin eğrilik merkezi denir. Böylece

$$\Omega(t) = \alpha(t) + \frac{1}{K_{\pm}(t)} \frac{J\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$$

olur. Eğrilik merkezi parametre değişiminden bağımsızdır (Şahin, 2022).

Önerme 2.26. Bir düzlemsel eğrinin evolütü, eğrinin eğrilik merkezlerinin geometrik yeridir(Şahin, 2022).

Tanım 2.27. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğri olsun.

$\alpha'(s) = T(s)$ eşitliği ile tanımlı $T(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü;

$\kappa(s) = \|T'(s)\|$ reel sayısına α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği adı verilir.

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\kappa(s)}$$

ile tanımlı $N(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim normal vektörü;

$$B(s) = T(s) \wedge N(s)$$

ile tanımlı $B(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim binormal vektörü denir.

$$\tau(s) = -\langle B'(s), N(s) \rangle$$

ile tanımlanan $\tau(s)$ reel sayısına da α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması denir. Buradaki $\{T(s), N(s), B(s)\}$ vektör üçlüsüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet üçlüsü adı verilir (O'Neill, 2006).

Teorem 2.28. $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı bir eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet üçlüsü $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ve $\kappa(s) > 0$ olmak üzere

$$T'(s) = \kappa(s)N(s)$$

$$N'(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)$$

$$B'(s) = -\tau(s)N(s)$$

dir. Bu eşitliklere Frenet Denklemleri adı verilir (O'Neill, 2006).

3. AYRIK EĞRİLER

Tanım 3.1. Tanım kümesi $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesinin bir ℓ altkümesi olan bir $\chi: \ell \rightarrow R$ ayrik eşlemesi fonksiyondur. Bu tip bir ayrik eşlemede R değer kümesi $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{R}^3$ ise bu eşlemeye sırasıyla bir ayrik fonksiyon ve ayrik eğri adı verilir (Carrol vd., 2013).

Notasyon 3.2. Eğer $\chi: \ell \subset \mathbb{Z} \rightarrow R$ bir ayrik eşleme ise

$$\chi(i) := \chi_i$$

gösterimini kullanacağız. Ayrıca ayrik farkı

$$(D\chi)_i := \chi_{i+1} - \chi_i$$

ve ayrik toplamı

$$(M\chi)_i := \chi_{i+1} + \chi_i$$

olarak tanımlayacağız (Carrol vd., 2013).

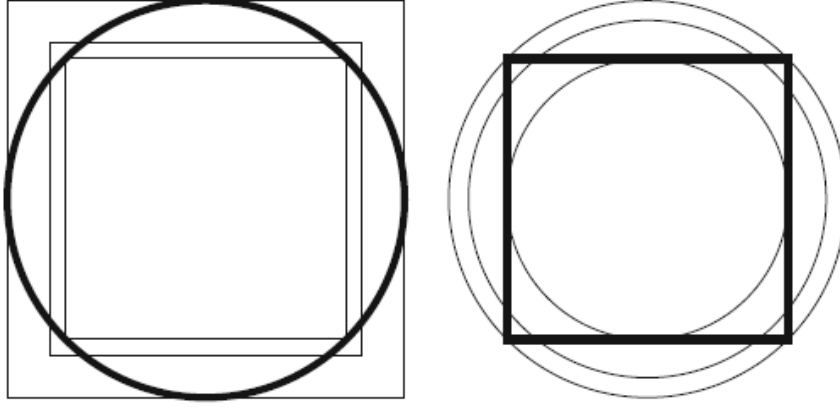
3.1. Çokgenler ve Dörtgenler

Her $N \geq 3$ için, bir çemberi ayriklaştıran üç tip N -kenarlı çokgen vardır:

- 1- Çembere içten çizilmiş
- 2- Çembere dıştan çizilmiş
- 3- Çember ile ortalananmış

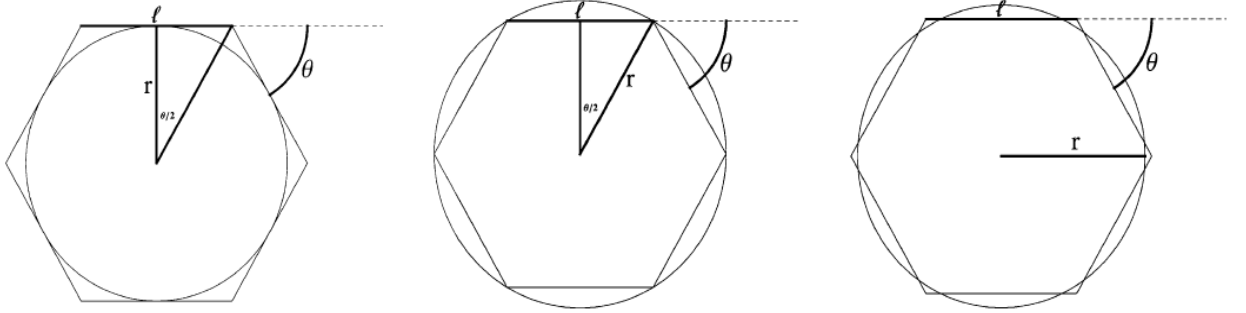
Çember ile ortalananmış N -kenarlı çokgen, çevre uzunluğu çemberin çevre uzunluğuna eşit çokgen anlamındadır. Tersine, bir N -kenarlı çokgenin de içten çizilmiş, dıştan çizilmiş ve ortalananmış bir çemberi vardır (Carrol vd., 2013).

Örneğin $N = 4$ için bu durumlar Şekil 3.1. de görselleştirilmiştir:



Şekil 3.1. Bir çemberin ayrıklaştırılması ve karenin düzgünleştirilmesi

Buradaki isimlendirme bir kavram karmaşasına sebep olabilir. Örneğin, “Bir N-kenarlı çokgen bir çember etrafında ortalanır” demek, önce çemberin verildiği anlamına gelirken, “Bir çember bir N-kenarlı çokgenin içine çizilmiştir” demek ilk önce N-kenarlı çokgenin verildiği anlamına gelir (Carrol vd., 2013).



Şekil 3.2. Bir N-kenarlı çokgenin eğriliği

Şekil 3.2. deki trigonometri yardımıyla, belirli bir N-kenarlı çokgen için üç eğrilik tanımını elde ediyoruz. Burada bir çemberin eğriliğinin $\kappa = \frac{1}{r}$ ve bir N-kenarlı düzgün çokgenin dış açısının $\theta = 2\pi/N$ olduğunu gerçeğini göz önünde bulunduruyoruz. Ayrıca çokgenin kenar uzunluğunun l olduğunu kabul ediyoruz. Bu durumda bir N-kenarlı çokgenin içine çizilmiş çemberin eğriliği

$$\kappa = \frac{2}{l} \tan \frac{\theta}{2} \quad (3.1)$$

olur. Benzer şekilde, bir N-kenarlı çokgenin dışına çizilmiş çemberin eğriliği

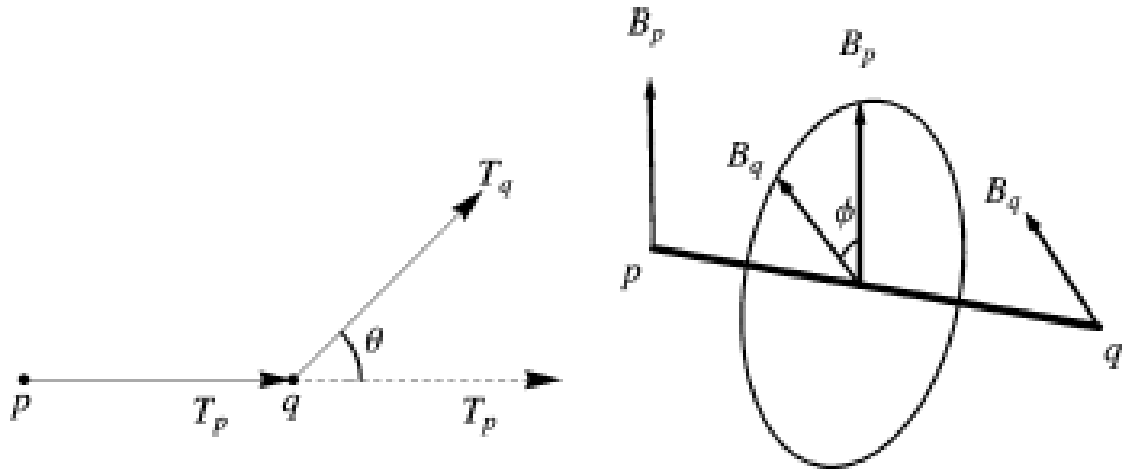
$$\kappa = \frac{2}{l} \sin \frac{\theta}{2} \quad (3.2)$$

ve ortalanmış durumda ise

$$\kappa = \frac{\theta}{l} \quad (3.3)$$

olarak bulunur (Carrol vd., 2013).

Bu temel formüller aşağıda verilecek tüm tanımlar için referans olarak alınacaktır. Bu durumda, θ yi komşu “teğet vektörler” arasındaki açının ölçüsü olarak alınırsa θ bir köşe noktasında bir N-kenarlı çokgenin dönüşünü ölçer. Üç boyutlu uzayda ayrık bir eğri için, benzer şekilde ϕ yi komşu iki “binormal vektörler” arasındaki açıyı ölçmek için tanımlarsak, o zaman ϕ , çokgenin bir kenarı boyunca ayrık bir eğrinin bükülmesini ölçer (Carrol vd., 2013).



Şekil 3.3. θ eğriliği ve ϕ burulması

Üç boyutlu uzayda ayrık bir eğrinin köşe noktasındaki eğriliği, 3.1, 3.2 ve 3.3denklemleri ile tanımlanır. Benzer şekilde ayrık bir eğrinin bir köşe noktasındaki burulma şu şekilde tanımlanır (Carrol vd., 2013):

$$\tau := \begin{cases} \frac{2}{l} \sin \frac{\phi}{2}, & \text{içine çizilmiş çember} \\ \frac{2}{l} \tan \frac{\phi}{2}, & \text{dış tan çizilmiş çember} \\ \frac{\phi}{l}, & \text{ortalanmış} \end{cases} \quad (3.4)$$

3.2. Ayırık Frenet Denklemleri

Bu bölümde, ayırık eğrilerin, l_i uzunluklarını, κ_i eğriliklerini ve τ_i burulmalarını tanımlayacağız ve l_i, κ_i ve τ_i değerleri verildiğinde, bu uzunluklar, eğrilikler ve burulmalarla sahip diğer bir ayırık bir eğriyi yeniden inşa etmenin mümkün olduğunu göstereceğiz. Ayrıca bu eğrinin Frenet denklemlerinin bir ayırık versiyonunu sağladığını da göstereceğiz. Yukarıda da gördüğümüz gibi, N-kenarlı bir çokgenin eğriliğinin en az üç makul tanımı vardır. Eğrilik ve burulma tanımlarını kullanarak bu üç durumu inceleyeceğiz.

$$\gamma^{orig}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

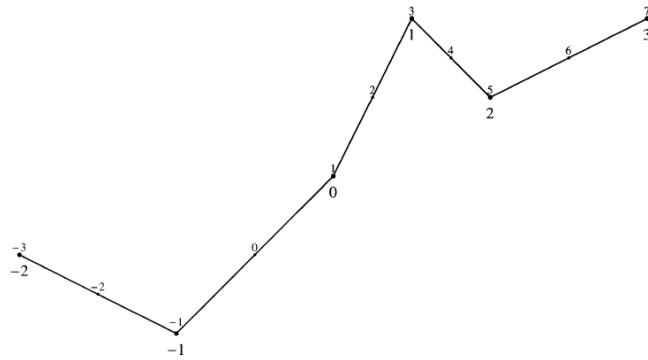
“başlangıç eğrisi” adını vereceğimiz bir ayırık eğri olsun. Γ^{orig} ayırık eğrisini kullanarak aşağıdaki şekilde bir

$$\gamma: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

ayırık eğrisi tanımlayalım (Carrol vd., 2013).:

$$\begin{aligned} \gamma(i) &:= \gamma^{orig}\left(\frac{i-1}{2}\right) \text{ eğer } i \text{ tek ise} \\ \gamma(i) &:= \frac{\gamma(i+1) + \gamma(i-1)}{2} \text{ eğer } i \text{ çift ise} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Aşağıda şekilde, büyük yazılan sayılar başlangıç eğrisinin indisleri iken daha küçük yazılan sayılar yeniden tanımlanan eğri için indislerdir.



Şekil 3.4. Orijinal ve yeniden tanımlanmış ayırık eğri.

γ eğrisinin tek indislerin başlangıç eğrisinin noktalarına, çift indislerinin ise başlangıç eğrisinin orta noktalarına eşlendiğine dikkat ediniz. Ayrıca γ eğrisinin ayırık uzunluğunu

$$l := \|(D\gamma)_i\| \quad (3.5)$$

olarak tanımlanır. Eğer $l = 1$ ise γ ayırık eğrisi yay uzunluğu ile parametrelendirilmiştir ve eğer l sabit ise yay uzunluğu ile orantılı olarak parametrelendirilir. Eğer $l_\gamma = l = \text{sabit}$ ise $l_{\gamma_{orig}} = 2l$ olduğuna dikkat ediniz. Bundan sonraki kısımlarda eğrinin yay uzunluğuyla orantılı parametrelendirildiğini, yani

$$\|D\gamma\| = l \equiv \text{sabit} \quad (3.6)$$

olduğunu kabul edeceğiz (Carrol vd., 2013).

Her bir versiyonda (İçine çizilmiş, çevresine çizilmiş ve ortalanmış) iki ayrı Frenet çatısı $(T^e; N^e; B^e)$ ve $(T^v; N^v; B^v)$ üretilecektir. İlk olarak, $(T^e; N^e; B^e)$ için:

$$T^e := \frac{D\gamma}{\|D\gamma\|} = \frac{D\gamma}{l} \quad (3.7)$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} T_i^e &= T_{i-1}^e \quad \text{eğer } i \text{ çift ise} \\ B_i^e &:= \frac{T_i^e \times T_{i+1}^e}{\|T_i^e \times T_{i+1}^e\|} \quad \text{eğer } i \text{ çift ise} \\ B_i^e &:= B_{i-1}^e \quad \text{eğer } i \text{ tek ise} \end{aligned} \quad (3.8)$$

ve son olarak bütün i değerleri için

$$N_i^e := B_i^e \times T_i^e \quad (3.9)$$

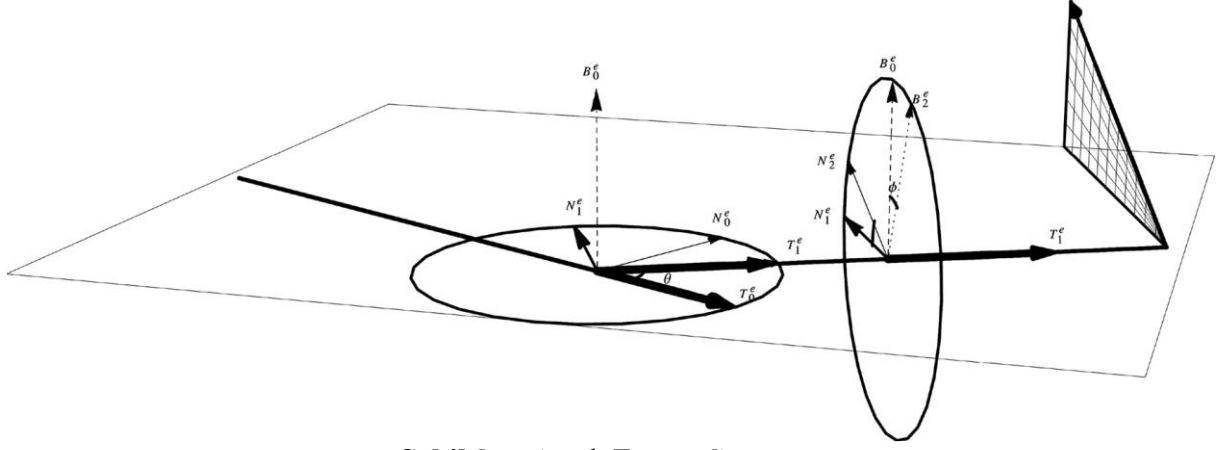
olarak tanımlanır. Tüm i değerleri için $(T^v; N^v; B^v)$ ise

$$\begin{aligned} T_i^v &:= \frac{(MT^e)_i}{\|(MT^e)_i\|} \\ B_i^v &:= \frac{(MB^e)_i}{\|(MB^e)_i\|} \\ N_i^v &:= \frac{(MN^e)_i}{\|(MN^e)_i\|} \end{aligned} \quad (3.10)$$

ve

$$N_i^v = B_i^v \times T_i^v \quad (3.11)$$

olur (Carrol vd., 2013).



Şekil 3.5. Ayrık Frenet Çatısı

Şekil 3.5'te gösterildiği gibi, çatı, binormal tarafından belirlenen eksen etrafında köşelerde dönmektedir. Çatı, kenarlarda teğet tarafından belirlenen eksen etrafında bükülüyor. Aşağıda verilen ve literatürde yer almayan, ayrık Frenet denklemlerinin yeni tanımını veren bir alternatif yaklaşımdır (Carrol vd., 2013).

Pozitif yönlendirilmiş çatılar $(T_i^e; N_i^e; B_i^e)$; $(T_i^e; N_i^e)$ ve $(T_i^e; B_i^e)$ yönlendirmelerini belirler. θ_i değerini T_i^e ve T_{i+1}^e arasındaki açı olarak tanımlayalım ve eğer i tek ise $\theta_i = 0$ olduğunu not edelim. ϕ_i 'yi B_i^e ve B_{i+1}^e arasındaki açı olarak tanımlarız, böylece eğer i çift ise $\phi_i = 0$ olur. Teknik ayrıntılardan kaçınmak için

$$\theta_i, \phi_i \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \quad (3.12)$$

olduğunu kabul ediyoruz. Bu taktirde κ eğriliği şu şekilde tanımlanır (Carrol vd., 2013):

$$\kappa := \begin{cases} \|DT^e\| = \frac{2}{l} \sin \frac{\theta}{2}, & \text{içine çizilmiş çember} \\ \frac{\|DT^e\|}{\|MT^e\|} = \frac{2}{l} \tan \frac{\theta}{2}, & \text{dış tan çizilmiş çember} \\ 2 \sin^{-1} \left(\frac{\|DT^e\|}{2} \right) = \frac{\theta}{l}, & \text{ortalanmış} \end{cases} \quad (3.13)$$

Eğer i tek ise $\kappa_i = 0$ olduğuna dikkat ediniz. Benzer şekilde τ burulması da şu şekilde tanımlanır:

$$\tau := \begin{cases} \phi \|DB^e\| = \frac{2}{l} \sin \frac{\phi}{2}, & \text{içine çizilmiş çember} \\ \frac{\|DB^e\|}{\|MB^e\|} = \frac{2}{l} \tan \frac{\phi}{2}, & \text{dıştan çizilmiş çember} \\ 2 \sin^{-1} \left(\frac{\|DB^e\|}{2} \right) = \frac{\phi}{l}, & \text{ortalanmış} \end{cases} \quad (3.14)$$

eğer i çift ise $\tau_i = 0$.

Her versiyonda (içine çizilmiş, dıştan çizilmiş ve ortalanmış) doğrudan bir hesaplama, ayırık Frenet denklemlerinin geçerli olduğunu gösterir (Carrol vd., 2013).

Teorem 3.1.

$$\begin{aligned} DT^e &= \kappa N^v \\ DN^e &= -\kappa T^v + \tau B^v \\ DB^e &= -\tau N^v \end{aligned} \quad (3.15)$$

Öte yandan, eğriyi şu ilişkilerle yeniden oluşturulabilir:

$$\begin{aligned} T_{i+1}^e &= \cos \theta_i T_i^e + \sin \theta_i N_i^e \\ N_{i+1}^e &= -\sin \theta_i T_i^e + \sin(\theta_i + \phi_i) N_i^e - \sin \phi_i B_i^e \\ B_{i+1}^e &= \cos \phi_i N_i^e + \sin \phi_i B_i^e \\ \gamma_{i+1} &= \gamma_i + T_{i+1}^e \end{aligned} \quad (3.16)$$

Bu durum şu teoremle özetlenebilir:

Teorem 3.2. Verilen θ_i ve ϕ_i için, $\theta_i=0$ eğer i tek ise ve $\phi_i=0$ eğer i çift ise, o zaman keyfi başlangıç koşulları $\gamma_0, T_0^e, N_0^e, B_0^e$, için, $\gamma_0, T_0^{\gamma e} = T_0^e = N_0^{\gamma e} = N_0^e, B_0^{\gamma e} = B_0^e$ yi sağlayan $\theta_i^{\gamma} = \theta_i, \phi_i^{\gamma} = \phi_i$ ile benzersiz bir γ ayırık eğrisi vardır. Üstelik $\gamma^{orig}(i) := \gamma(2i)$ sağlar $\|D\gamma^{orig}\| = 2l$ (Carrol vd., 2013).

4. 2D AYRIKLAŞTIRMA

Bu bölümde bir düzlem eğrisi verildiğinde, üç durumun her biri için kanonik bir geometrik ayrıklaştırma söz konusu olduğu ele alınacaktır.

4.1. İçine Çizilmiş 2D Ayrıklaştırma

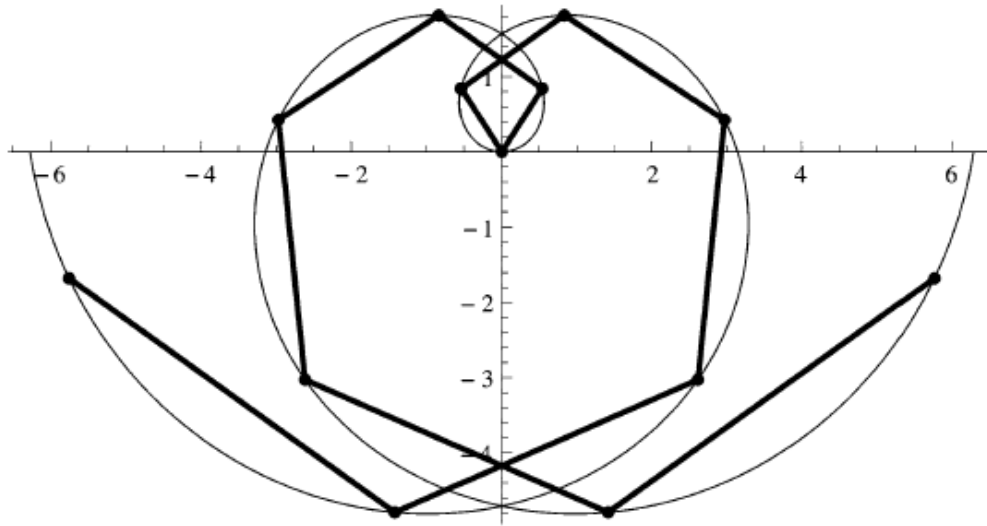
Bu durum için tek gerekli şart ayrık eğrinin her bir köşe noktasının başlangıç eğrinin kendisi üzerinde olmasıdır. Dolayısıyla, her artan

$$i: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$$

ayrık dönüşümü bir

$$\delta = \gamma \circ i: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

ayrık eğrisini üretecektir (Carrol vd., 2013).



Şekil 4.1. İçine çizilmiş ayrıklaştırma

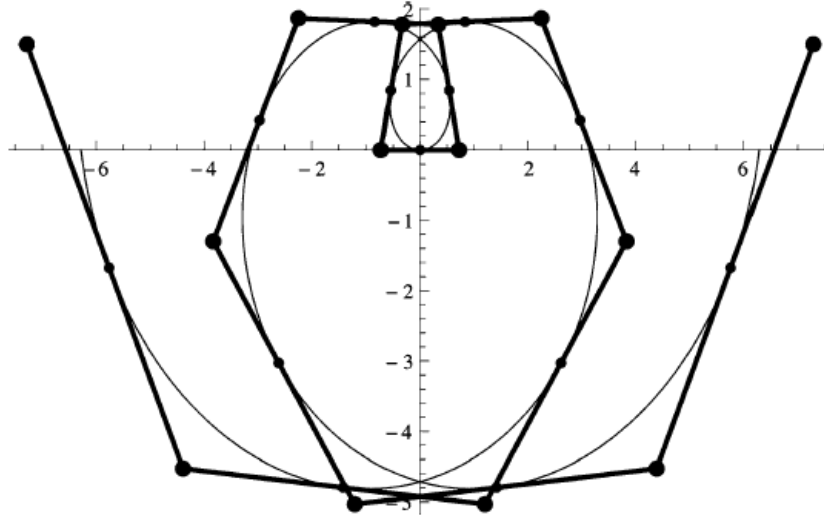
4.2. Dıştan Çizilmiş 2D Ayrıklaştırma

Eğer başlangıç eğrisinin bükülme noktaları yoksa, ardışık teğetler paralel olmayacak şekilde artan bir

$$i: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü alınır. Bu halde ayrık eğrinin δ 'nin kenarlarının, $(\gamma \circ i)_i$ noktalarında verilen eğri ile teğetsel olarak kesişmesini istenir. δ_i 'yi, Şekil 4.2' deki gibi $(\gamma \circ i)_i$ ve $(\gamma \circ i)_{i+1}$ 'deki teğet doğruların tek kesişim noktası olarak tanımlanır. İzole bükülme noktaları varsa, aralarındaki en az bir noktanın yanı sıra bunların teğet noktaları kümesine dahil edilmesi

gerekir. Bir eğri, sonlu bir aralıkta sonsuz sayıda bükülme noktasına sahipse, algoritma başarısız olur (Carrol vd., 2013).



Şekil 4.2. Çevresine çizilmiş ayrıştırma

4.3. Ortalanmış 2D Ayrıklaştırma

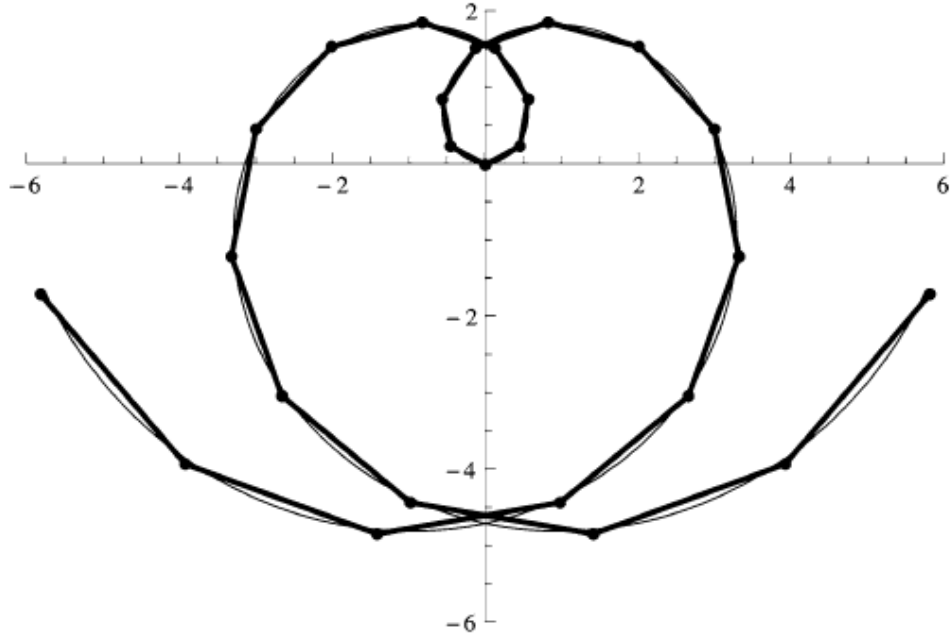
Bir eğrinin ortalanmış 2D ayrıklaştırılması biraz daha zordur. İlk olarak, γ başlangıç eğrisinin yay uzunluğu ile parametrelendirildiği kabul edilir ve ayrıklaştırma yay uzunluğu ile orantılı olarak parametrelendirilir. Daha sonraki aşamada, γ eğrisinin bükülme noktaları olmadığı varsayılır ve her yerde $\kappa > 0$ olarak kabul edilir. Ayrıklaştırma için $\kappa_i > 0$ olması gerekir. Son aşamada ise, M yeterince büyük seçilir ve $\iota(i)$ ile tanımlanan belirli $\iota = \square \rightarrow \square$ alınır. Bu durum aşağıda verilmiştir:

$$\iota(i) = \frac{i}{M} \text{ ve } \delta^{start} = \gamma \circ \iota$$

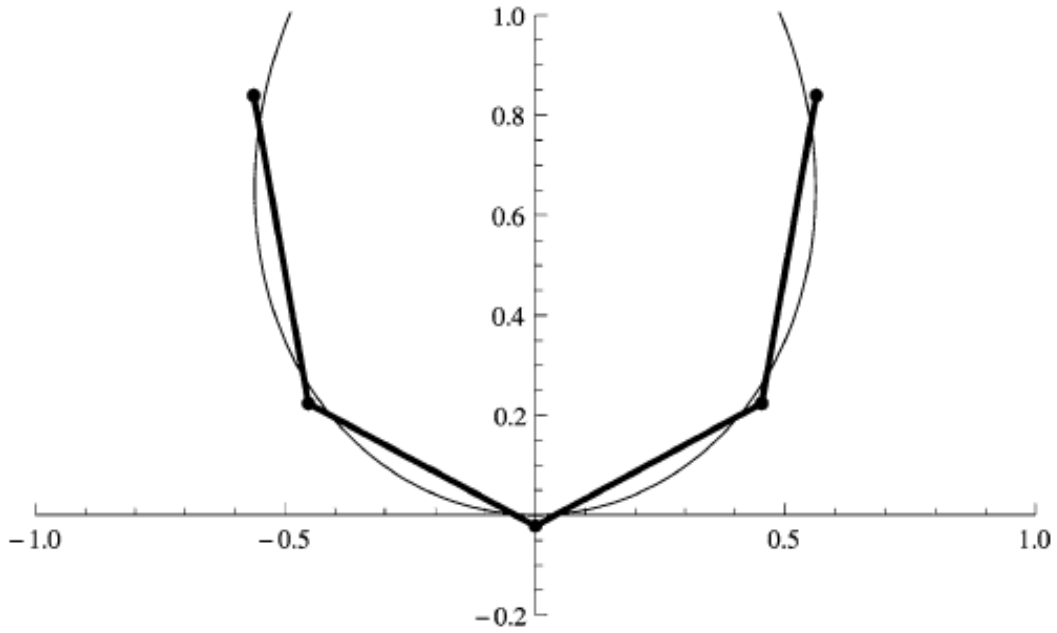
Her bir i için δ_i^{start} , ι (dışarıya doğru) normal boyunca δ_i^{start} , γ 'ye kadar dengeliyoruz.

$$offset_i := \frac{\frac{k_i}{M} - \sin \frac{k_i}{M}}{k_i \sin \frac{k_i}{M}}$$

k_i burada δ_i^{start} , γ 'nin eğriliğini ve $k_i > 0$ olduğu varsayılmaktadır. Bu formül, ortalanmış N kenarlı bir çemberi ayrıklaştırması için kullanılabilir (Carrol vd., 2013).



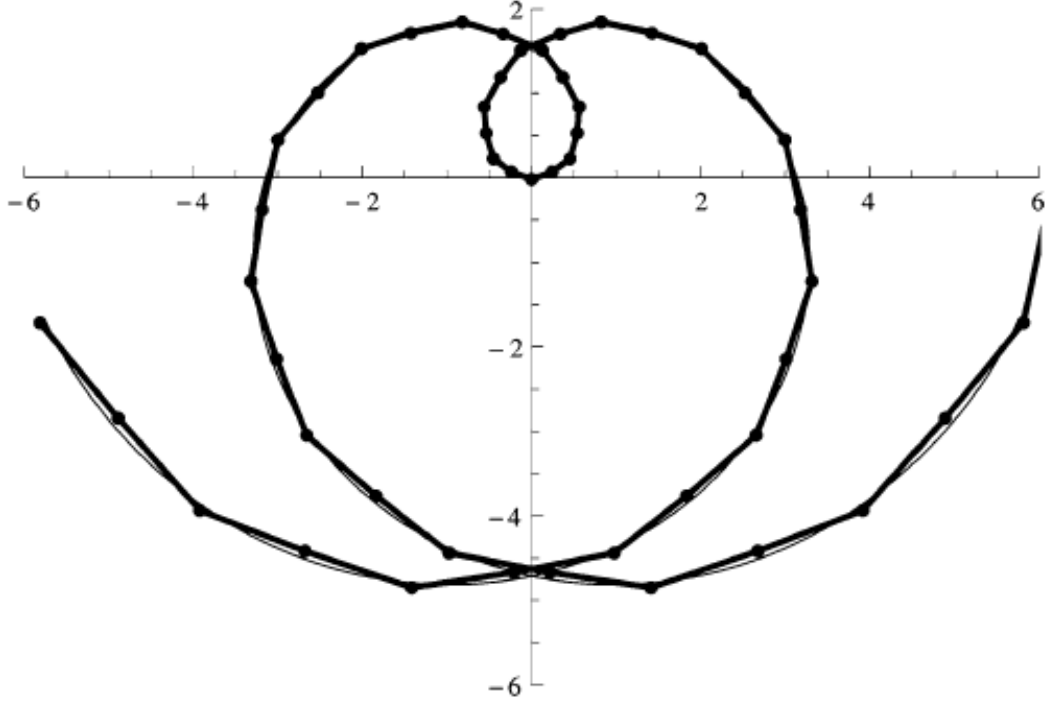
Şekil 4.3. Merkezil ayrıklaştırma



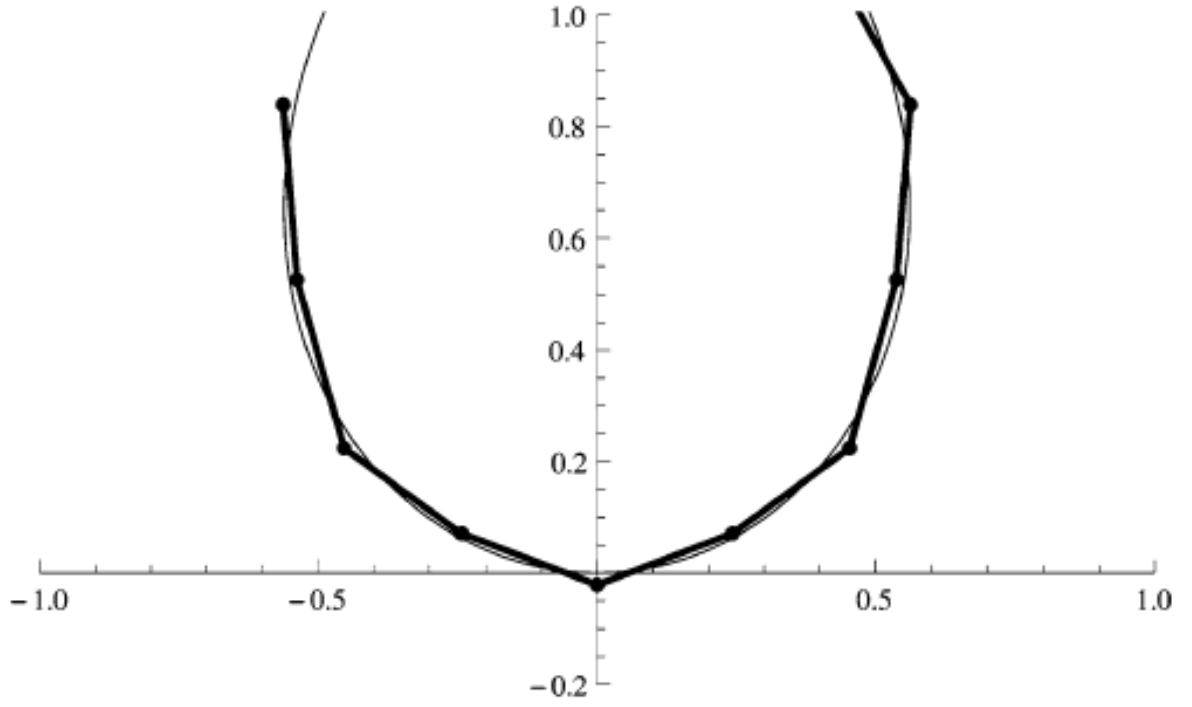
Şekil 4.4. Detaylı merkezil ayrıklaştırma

Bu ofset noktaları, son ayırık eğrimiz δ 'nin çift köşeleri, δ_{2j} olarak kullanılmıştır. Ayırık eğrinin δ 'nin orijinal eğri γ ile aynı uzunluğa sahip olması koşuluna dikkat edilmelidir. $\|\delta_{2j+1} - \delta_{2j}\| = \frac{i}{2M} = \|\delta_{2j+2} - \delta_{2j+1}\|$, ve $\kappa_{2j+1} > 0$; gibi ek koşullar kullanılarak bu durum çözümlenebilir ve Şekil 3.5. de gösterilmiştir. Şekil 3.6 da ise daha detaylı gösterim

verilmiştir. Bükülme noktalarını dahil etmek için daha genel parametrelendirme yapılması gerekmektedir (Carrol vd., 2013).



Şekil 4.5. Ortalanmış ayırıklaştırma



Şekil 4.6. Detaylı ortalı ayırıklaştırma

Tanım 4.1. $\gamma: I \subset \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir ayrık eğri olsun. Bu durumda $\forall i \in I$ için $\varphi_i = 0$ ise γ ayrık eğrisi düzlemseldir. Ayrıca 3.16 denklemleri

$$\begin{aligned} T_{i+1} &= \cos \theta_i T_i + \sin \theta_i N_i \\ N_{i+1} &= -\sin \theta_i T_i + \cos \theta_i N_i \end{aligned}$$

olur.

Tanım 4.2. $\gamma: I \subset \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2$ düzlemsel bir ayrık eğri olsun. Bu durumda ayrık eğrinin normaller eğrisine yani her i için

$$\sigma_i = \gamma_i + N_i$$

olarak tanımlı eğriye γ ayrık eğrisinin ayrık evolütü denir.

Lemma 4.3. $\gamma: I \subset \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2$ düzlemsel bir ayrık eğri ve γ_i noktasındaki ayrık ortonormal çatı $\{(T_\gamma)_i, (N_\gamma)_i, (B_\gamma)_i\}$ olsun. Bu durumda ayrık evolüt eğrisinin $(T_\sigma)_{i+1}$ ayrık teğet vektörü

$$(T_\sigma)_{i+1} = (\cos(\theta_i) - \sin(\theta_i))(T_\gamma)_i + (2\sin(\theta_i) - 1)(N_\gamma)_i$$

olur.

İspat: Teorem 3.2. gereğince

$$(T_\sigma)_{i+1} = \sigma_{i+1} - \sigma_i$$

olduğundan ve Tanım 4.2. den

$$(T_\sigma)_{i+1} = \gamma_{i+1} + (N_\gamma)_{i+1} - \gamma_i - (N_\gamma)_i = \gamma_{i+1} - \gamma_i + (N_\gamma)_{i+1} - (N_\gamma)_i$$

olup

$$(T_\sigma)_{i+1} = (T_\gamma)_{i+1} + (N_\gamma)_{i+1} - (N_\gamma)_i$$

elde edilir. Son olarak, Tanım 4.1 den T_{i+1} ve N_{i+1} yerine yazılır ve düzenlenirse

$$(T_\sigma)_{i+1} = \cos \theta_i (T_\gamma)_i + \sin \theta_i (N_\gamma)_i - \sin \theta_i (T_\gamma)_i + \cos \theta_i (N_\gamma)_i - (N_\gamma)_i$$

$$(T_\sigma)_{i+1} = (\cos \theta_i - \sin \theta_i)(T_\gamma)_i + (2 \sin \theta_i - 1)(N_\gamma)_i$$

olarak elde edilir.

5. SONUÇ

Yapılan bu tez çalışmasında, klasik diferansiyel geometride kullanılan düzgün eğri kavramındaki temel tanım teoremlere paralel olarak ayık eğriler kavramına ait araçlar incelenmiştir.

Ayık eğriler ve yüzey teorisi üzerine 100 yıldan daha uzun bir geçmişe dayanan çok sayıda literatür de vardır. Şaşırtıcı olmayan bir şekilde, ayık Gauss eğriliği, ayık ortalama eğriliği, ayık göbek gibi standart kavramlar için daha geniş bir tanım çeşitliliği vardır. Yine, mutlak bir "doğru" tanımın olmadığı açıktır. Pürüzsüz bir yüzeyin ayıklaştırılmasını nasıl tanımlayacağınız, yine hangi özelliklerin korumak istediğine bağlı olacaktır. Özellikle entegre edilebilir ayıklaştırmalar teorisi, sabun köpüklerine, minimal yüzeylere, Hasimoto yüzeylerine (yani, duman halkaları tarafından süpürülen yüzeylere) ve sabit Gauss eğrili yüzeylerine uygulanmıştır (Bobenko, 1996). Benzer yorumlar, ayık yüzeylerin parçalanması teorisi için de geçerlidir.

Ayık eğriler ve yüzeyler özellikle mühendislikte ve doğa bilimlerinde birçok alanda önemli uygulamalara sahiptir. Klasik eğrilerin incelenmesinde önemli bir yeri olan Frenet çatısı tek olarak belirlenmesine karşın, ayık eğriler için bu çatı tek değildir. Bu bağlamda da literatürde bu çatının elde edilmesi için birçok farklı yöntem mevcuttur. Bu çalışmada, klasik ve ayık eğrilerin ilişkisi incelenmiş ve ayık evolüt eğrisinin tanımı ele alınmıştır.

KAYNAKLAR

- Bobenko, A., Pinkall, U., 1996. Discrete surfaces with constant negative Gaussian curvature and the Hirota equation, *Journal of Differential Geometry*, 43, 3, 527-611.
- Carroll, D., Kose, E., Sterling, I., 2013. Improving frenet's frame using bishop's frame, *Journal of Mathematics Research*, 5, 4, 97-106.
- Carroll, D., Hankins, E., Köse, E., Sterling, I., 2013. *A Survey of the Differential Geometry of Discrete Curves*, arXiv:1311.5862 v1, 1-19.
- Doliwa, A., Santini, P.M., 1995. Integrable dynamics of a discrete curve and the ablowitz-ladik hierarchy, *Journal of Mathematical Physics*, 36, 1259-1273.
- Hoffman, T., 2000. Discrete Curves and Surfaces, PhD Thesis, Technische Universitat, Berlin, Almanya.
- O'Neill, B., 2000. *Elementary Differential Geometry*, Academic Press, USA, 503p.
- Sabuncuoğlu, A., 2014. *Diferansiyel Geometri*. Nobel Yayınevi, Ankara, 514 s.
- Sogo, K., 2006. Variational discretization of eulers elastica problem, *Journal of the Physical Society of Japan*, 75, 6, 1-8.
- Şahin, B., 2022. *Diferansiyel Geometri*. Palme Yayınevi, Ankara, 325 s.