



**AYRIK VICSEK FRAKTALI
ÜZERİNDE BAZI DİNAMİK
SİSTEMLERİN ANALİZİ
Yüksek Lisans Tezi**

Nurcan ARI

Eskişehir 2025

**AYRIK VICSEK FRAKTALI ÜZERİNDE BAZI DİNAMİK SİSTEMLERİN
ANALİZİ**

Nurcan ARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Topoloji Bilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Fatma Diğdem KOPARAL

Eskişehir

Eskişehir Teknik Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Nisan 2025

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Nurcan ARI'nın ‘‘AYRIK VICSEK FRAKTALI ÜZERİNDE BAZI DİNAMİK SİSTEMLERİN ANALİZİ’’ başlıklı tezi 14/04/2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek ‘‘Eskişehir Teknik Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği’’nin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

<u>Jüri Üyeleri</u>	<u>Unvanı Adı Soyadı</u>	<u>İmza</u>
Üye (Tez Danışmanı) :	Dr. Öğr. Üyesi Fatma Diğdem KOPARAL	
Üye :	Prof. Dr. Mustafa SALTAN	
Üye :	Dr. Öğr. Üyesi Buket AY	

Prof. Dr. Harun BÖCÜK
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

DANIşMAN ONAYI

Danişmanlığını yürüttüğüm yüksek lisans đrencisi Nurcan ARI ‘‘AYRIK VICSEK FRAKTALI ÜZERİNDE BAZI DİNAMİK SİSTEMLERİN ANALİZİ’’ başlıklı tez çalışmasını tamamlamıştır. Hazırlamış olduğu tez tarafımca incelenmiş ve öğrencinin tez savunması sınavına alınması bilimsel ve etik açıdan uygun görülmüştür.

Tez Daniřmanı

Dr. Öğr. Üyesi Fatma Diğdem KOPARAL

ÖZET

AYRIK VICSEK FRAKTALI ÜZERİNDE BAZI DİNAMİK SİSTEMLERİN ANALİZİ

Nurcan ARI

Matematik Anabilim Dalı
Topoloji Bilim Dalı

Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Nisan 2025

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Fatma Diğdem KOPARAL

Bu tezde, tamamen bağlantısız bir fraktal olan Ayırık Vicsek Fraktalı ($\mathcal{B}^d$), bir yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü olarak elde edilerek bu fraktalın noktaları için kod temsilleri belirlenmektedir. $\mathcal{B}^d$ üzerinde katlama ve genişleme dönüşümleri yardımıyla dinamik sistemler inşa edilerek bu sistemlerin periyodik noktaları incelenmektedir. Bu dinamik sistemlerden biri için periyodik noktalara ilişkin bir formül elde edilip sistemin Devaney anlamında kaotik olduğu gösterilmektedir. Tezin son bölümlerinde ise, $\mathcal{B}^d$ üzerinde karenin simetri grubuna ait dönüşümler ile kaydırma (shift) dönüşümü kullanılarak yeni bir dinamik sistem ailesi tanımlanmaktadır. Ayrıca bu sistemlerin periyodik noktaları analiz edilerek Devaney anlamında kaotik oldukları ortaya konmaktadır. Söz konusu dönüşümlerin topolojik denklilikleri de detaylı biçimde ele alınmaktadır. Bu çalışmada elde edilen sonuçlar, fraktal geometri ile dinamik sistemler arasındaki ilişkiye dair teorik bir çerçeve sunmakta ve fraktallar üzerindeki kaotik dinamiklerin daha iyi anlaşılmasına katkıda bulunmaktadır. Özellikle tamamen bağlantısız fraktallar üzerinde gerçekleştirilen bu analiz, hem matematiksel kuram hem de mühendislik uygulamaları açısından yenilikçi bir yaklaşım ortaya koymaktadır.

Anahtar Sözcükler: Fraktallar, Dinamik sistemler, Ayırık Vicsek fraktalı, Kaos.

ABSTRACT

ANALYSIS OF SOME DYNAMICAL SYSTEMS ON THE DISCRETE VICSEK FRACTAL

Nurcan ARI

Department of Mathematics
Programme in Topology

Eskişehir Technical University, Graduate School of Sciences, April 2025

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Fatma Diğdem KOPARAL

In this thesis, the Discrete Vicsek Fractal ($\mathcal{B}^d$), which is a totally disconnected fractal, is obtained as the attractor of an iterated function system, and code representations for its points are given. Using folding and expanding transformations on $\mathcal{B}^d$, several dynamical systems are constructed, and their periodic points are studied. For one of these systems, a formula for the periodic points is found, and it is shown that the system is chaotic in the sense of Devaney. In the final parts of the thesis, a new family of dynamical systems is defined on $\mathcal{B}^d$ using maps from the symmetry group of the square together with the shift map. The periodic points of these systems are analyzed, and their chaotic behavior in the sense of Devaney is demonstrated. In addition, the topological equivalences between these transformations are also examined. The findings of this study provide a theoretical framework for understanding the relationship between fractal geometry and dynamic systems and contribute to a deeper comprehension of chaotic dynamics on fractals. Moreover, the analysis conducted on entirely disconnected fractals represents an innovative approach with potential applications in both mathematics and engineering.

Keywords: Fractals, Dynamical systems, Discrete Vicsek fractal, Chaos.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezim boyunca bilgisini ve desteklerini esirgemeyen, rehberliği ve cesaretlendirmeleri sayesinde bu tez çalışmasını başarıyla tamamlamamı sağlayan, bu süreçte sabır ve ilgi gösteren değerli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Fatma Diğdem KOPARAL'a teşekkür ederim. Ayrıca her zaman yanımda olan sevgili eşime teşekkür ederim.

Yüksek lisans öğrenimim boyunca beni 2210 - Yurt içi Yüksek Lisans Burs Programına layık gören TÜBİTAK yetkililerine teşekkür ederim.

Nurcan ARI
2025

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarda bilimsel etik ilke ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Eskişehir Teknik Üniversitesi tarafından kullanılan ‘‘bilimsel intihal tespit programı’’yla tarandığını ve hiçbir şekilde ‘‘intihal içermediğini’’ beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Nurcan ARI

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
BAŞLIK SAYFASI	I
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI	II
DANIŞMAN ONAYI.....	III
ÖZET	IV
ABSTRACT.....	V
TEŞEKKÜR	VI
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ	VII
İÇİNDEKİLER.....	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	X
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	XI
1. GİRİŞ	1
1.1 Temel Tanım ve Teoremler	3
2. AYRIK VICSEK FRAKTALININ ($\mathcal{B}^d$) İNŞASI VE NOKTALARININ KOD TEMSİLLERİ.....	9
2.1 Ayrık Vicsek Fraktalının Noktalarının Kod Temsilleri	9
2.2 Kod Temsili Verilen Bir Noktanın $\mathbb{R}^2$ 'de Koordinatlarının Bulunması .	12
3. $\mathcal{B}^d$ ÜZERİNDE KATLAMA VE GENİŞLEME DÖNÜŞÜMLERİ KUL- LANILARAK DİNAMİK SİSTEM İNŞASI	13
3.1 Zaman Kaçış Algoritması Kullanılarak Ayrık Vicsek Fraktalının Elde Edilmesi.....	13
4. $\mathcal{B}^d$ ÜZERİNDE KARENİN SİMETRİ GRUBU KULLANILARAK KAOTİK DİNAMİK SİSTEM AİLESİ İNŞASI	23
5. $\{\mathcal{B}^d, F\}$ AİLESİNDEKİ BAZI TOPOLOJİK EŞLENİK DİNAMİK SİS- TEMLER	33
6. SONUÇ.....	38

KAYNAKÇA.....	39
----------------------	-----------

ÖZGEÇMİŞ



ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 2.1.	Ayrık Vicsek fraktalının inşasının ilk 3 adımı	9
Şekil 2.2.	Ayrık Vicsek fraktalı (sol) ve 5 küçük kopyasının birleşimi olarak ayrık Vicsek fraktalı (sağ).....	10
Şekil 2.3.	1. ve 2. seviyeden bazı alt ayrık Vicsek kümeleri	11
Şekil 2.4.	Ayrık Vicsek fraktalı üzerinde bazı noktaların kod temsilleri	11
Şekil 3.1.	$\{\mathcal{B}^d, \Phi\}$ dinamik sisteminin inşası	14
Şekil 3.2.	Zaman kaçış algoritmasıyla ayrık Vicsek fraktalının elde edilmesi	15
Şekil 3.3.	$\{\mathcal{B}^d, G\}$ dinamik sisteminin inşası	18
Şekil 4.1.	Karenin simetri grubu.....	24
Şekil 4.2.	$F(\mathcal{B}_3^d)$ ve $F(314\bar{2})$ görüntüleri	29

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathcal{B}^d$	: Ayrık Vicsek fraktalı
$\mathcal{B}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}^d$	: k. seviyeden alt ayrık Vicsek fraktalı
YFS	: Yinelemeli fonksiyon sistemi
$\mathcal{H}(X)$	: X 'in boş kümeden farklı kompakt alt kümelerinin uzayı
(X, d)	: Metrik uzay
$B(x, \varepsilon)$	: x merkezli ε yarıçaplı yuvar
$f \approx_h g$	: Topolojik eşlenik dönüşümler

1. GİRİŞ

Dinamik sistemler günümüzde mühendislik, ekonomi ve finans, çevre ve bilgisayar bilimi gibi çok çeşitli bilim dallarında kullanım alanları olan önemli bir araştırma konusudur.

Kaotik dinamik sistemler, karmaşık, öngörülemeyen ve hassas bir şekilde başlangıç koşullarına bağlı olan sistemlerdir. Bu sistemler, belirli bir matematiksel yapıya sahip olan dinamik sistemlerdir ve rastgele etkilerden etkilenmezler. Bu sistemlerin analizi ve anlaşılması bazen zor olabilir, çünkü karmaşık davranışları nedeniyle sık sık belirsizlik ve tahmin edilemezlikle ilişkilendirilirler. Ancak, kaotik sistemlerin temel özellikleri, bilim, mühendislik ve diğer disiplinlerde birçok faydalı uygulamaya olanak sağlar.

Devaney anlamında kaotik sistemler bir dinamik sistemde kaotik davranışın varlığını belirlemek için kullanılan bir ölçüdür. Bu sistemler, başlangıç şartlarına hassas bağımlılık, topolojik geçişkenlik ve periyodik noktaların yoğunluğu özelliklerini sağlayan sistemlerdir. Bu kavram, sistemlerin karmaşıklığını ve kaotik davranışlarını anlamak için önemlidir ve sistemlerin matematiksel analizini kolaylaştırır. Tent (çadır) ve shift (kaydırma) dönüşümleri bu sistemlere verilebilecek en klasik örneklerdir.

Fraktal, matematiksel bir nesnenin kendine benzerliği olan bir yapı sergilemesi durumudur. Kendine benzerlik, bir nesnenin belirli bir ölçekteki her parçasının, bütününe küçük bir kopyası gibi görünmesidir. Fraktallar, genellikle karmaşık ve düzensiz şekillere sahiptirler ve bu nedenle düzgün geometrik şekillerden farklıdırlar. Genellikle basit matematiksel kurallar kullanılarak oluşturulur. Bu kurallar, bir nesnenin belirli bir yapıya sahip olmasını sağlamak için tekrar eden veya yinelenen işlemler olarak ifade edilebilir. Cantor kümesi, Sierpinski Üçgeni, Koch Kar Tanesi, Vicsek (ayrık) fraktal gibi bir yinelemeli fonksiyon sisteminin atraktörü olan birçok fraktal örneği verilebilir.

Kaotik davranış, yalnızca klasik dinamik sistemlerde değil, aynı zamanda fraktal yapılar üzerinde tanımlanan sistemlerde de gözlemlenebilmektedir. Bu anlamda kaotik dinamik sistemler üzerine yapılan çalışmalar, fraktal geometriye teorik ve uygulamalı katkılar sağlamaktadır. Örneğin, [9]'de Sierpinski üçgeni üzerinde tanımlanan bir dinamik sistemin Devaney anlamında kaotik olduğu gösterilmiştir. Öte yandan, [10]'da karenin simetri grubundaki dönüşümler kullanılarak $C \times C$ üzerinde bir kaotik dinamik sistem ailesi inşa edilmiştir. Benzer şekilde, [11] çalışmasında farklı bir kaydırma dönüşümüne dayalı olarak yine $C \times C$ üzerinde alternatif bir kaotik sistem ailesi tanımlanmıştır. Bir başka kendine

benzer küme olan Vicsek fraktalı üzerinde genişleme ve katlama dönüşümlerine dayalı olarak bir kaotik dinamik sistemin varlığı [12]'de gösterilmiştir.

Öte yandan, son yıllarda tamamen bağlantısız (ayrık) fraktallar üzerinde tanımlanan dinamik sistemlerle ilgili araştırmalar da yapılmaktadır. Örneğin, [14] çalışmasında ayrık Sierpiński üçgeni üzerinde tanımlanan dinamik sistemler incelenirken, [13] çalışmasında ayrık Pentagon fraktalı üzerinde dinamik sistemlerin analizleri gerçekleştirilmiştir.

Bu tezde, tamamen bağlantısız bir fraktal olan ayrık Vicsek fraktalı üzerinde tanımlanan bazı dinamik sistemlerin kaotik olup olmadıkları incelenmektedir. Bunun için önce gerekli olan temel tanım ve teoremler verilecek daha sonra ayrık Vicsek fraktalı üzerindeki bir noktanın kod temsili ve bu gösterimin $\mathbb{R}^2$ 'deki karşılığı verilmektedir. Bölüm 3'te ayrık Vicsek fraktalı üzerinde katlama ve genişleme dönüşümlerinden yararlanılarak dinamik sistemler inşa edilmiş ve bu sistemlerden birinin periyodik noktaları için bir formül elde edilerek kaos koşullarını sağladığı ispatlanmaktadır. Bölüm 4 ve Bölüm 5'te ise karenin simetri grubu ve kaydırma dönüşümü kullanılarak ayrık Vicsek fraktalı üzerinde bir dinamik sistem ailesi inşa edilmiş ve aynı şekilde kaos şartlarını sağladığı kanıtlanarak, bu aile içinde topolojik olarak eşlenik olan dönüşümler için bir koşul verilmektedir.

1.1. Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde, tez çalışmasında kullanılacak bazı temel tanım ve teoremlerden bahsedilmektedir.

Tanım 1.1. (X, d) bir metrik uzay ve

$$\varphi : \mathbb{N} \times X \rightarrow X$$

olsun. Eğer φ fonksiyonu,

- i. $\forall x \in X$ için $\varphi(0, x) = x$
- ii. $\forall s, t \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in X$ için $\varphi(s, \varphi(t, x)) = \varphi(s + t, x)$

özelliklerini sağlıyorsa φ fonksiyonuna kesikli dinamik sistem denir ([4]).

Kesikli herhangi bir dinamik sistem için 1 birim zaman sonra x noktasının durumunu bilinsin. Yani $f(x) = \varphi(1, x)$ olsun. Bu durumda,

$$\varphi(2, x) = \varphi(1 + 1, x) = \varphi(1, \varphi(1, x)) = \varphi(1, f(x)) = f(f(x)) = f^2(x)$$

$$\varphi(3, x) = \varphi(1 + 2, x) = \varphi(1, \varphi(2, x)) = \varphi(1, f^2(x)) = f(f^2(x)) = f^3(x)$$

$\vdots$

$$\varphi(n, x) = \varphi(1 + (n - 1), x) = \varphi(1, \varphi(n - 1, x)) = \varphi(1, f^{n-1}(x)) = f(f^{n-1}(x)) = f^n(x)$$

olur. Yani, $f : X \rightarrow X$ dinamik sisteminin iterasyonları noktanın zaman içindeki durumunu ifade eder. Yani bir dinamik sistemin zamana göre değişimini gösteren $\{X, f\}$ sistemidir.

Tanım 1.2. $\{X, f\}$ kesikli dinamik sistemi için herhangi bir $x \in X$ elemanının **yörüngesi (orbiti)**,

$$Orb_f(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots\}$$

şeklinde verilir ([4]).

Tanım 1.3. X boştan farklı bir küme ve $f : X \rightarrow X$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere $x_0 \in X$ için $f(x_0) = x_0$ oluyorsa x_0 noktasına f fonksiyonunun sabit noktası denir. Yani sabit nokta f altında hareket etmeyen noktadır ([4]).

Tanım 1.4. $f^n(x) = x$ koşulunu sağlayan yani, f altındaki n defa bileşkesi kendisine eşit olan noktaya f fonksiyonunun **periyodik noktası**, bunu sağlayan en küçük n doğal

sayısına da x noktasının periyodu denir ([4]).

Tanım 1.5. (X, d) bir metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ bir fonksiyon olsun. Eğer, $\exists \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\forall x \in X$ noktasının $\forall N$ komşuluğu için,

$$d(f^k(x), f^k(y)) > \varepsilon$$

olacak şekilde bir $y \in N$ ve $k > 0$ doğal sayısı varsa, f fonksiyonuna **başlangıç koşullarına hassas bağımlı fonksiyon** denir ([3]).

Tanım 1.6. X uzayının boş kümeden farklı $\forall U, V$ açıkları için, $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde $\exists n \in \mathbb{N}$ varsa f fonksiyonu **topolojik geçişkendir** denir ([3]).

Tanım 1.7. (X, d) bir metrik uzay, $f : X \rightarrow X$ bir fonksiyon ve f fonksiyonunun periyodik noktalarının kümesi $Per(f)$ olsun. Eğer $Per(f)$ kümesinin kapanışı X 'e eşit ise, yani $\forall x \in X$ noktasının keyfi bir komşuluğunda $Per(f)$ kümesinin en az bir elemanı varsa, f fonksiyonunun periyodik noktaları X 'te yoğundur denir ([2],[3]).

Tanım 1.8. (X, d) bir metrik uzay $f : X \rightarrow X$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlarsa f 'ye X üzerinde **Devaney anlamında kaotik bir fonksiyon** denir.

- i. f başlangıç şartlarına hassas bağımlıdır.
- ii. f topolojik geçişkendir.
- iii. f 'nin periyodik noktaları X 'te yoğundur.([3])

Teorem 1.1. X sonlu olmayan bir küme olmak üzere (X, d) bir metrik uzay, $f : X \rightarrow X$ sürekli bir fonksiyon olsun. f topolojik geçişken ve f 'nin periyodik noktaları X 'te yoğun ise f fonksiyonu X üzerinde başlangıç şartlarına hassas bağımlıdır ([1]).

Tanım 1.9. (X, d_x) ve (Y, d_y) metrik uzaylar olmak üzere, $f : X \rightarrow X$ ve $g : Y \rightarrow Y$ birer fonksiyon olsun. Eğer

$$f \circ h = h \circ g$$

koşulunu sağlayan bir $h : X \rightarrow Y$ homeomorfizması varsa, f ile g fonksiyonlarına topolojik eşleniktir denir ve $f \approx_h g$ şeklinde gösterilir. Bu durumda f ve g fonksiyonlarının belirlendiği $\{X, f\}$ ve $\{Y, g\}$ dinamik sistemlerine de topolojik denk dinamik sistemler denir ([3]).

Teorem 1.2. X ve Y sonlu olmayan kümeler olmak üzere, $\{X, f\}$ ve $\{Y, g\}$ iki dinamik sistem ve $f \approx_h g$ olsun. Bu durumda,

1. Eğer x^* f 'nin n -periyotlu noktası ise $h(x^*)$ da g 'nin n -periyotlu noktasıdır.

2. f 'nin kaotik olması için gerek ve yeter koşul g 'nin kaotik olmasıdır ([3, 4]).

Tanım 1.10. $\Sigma_n = \{x = x_0x_1x_2 \dots \mid x_i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}, i = 0, 1, 2, \dots\}$ kümesine $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ sembolleri üzerinde bir **dizi uzayı (sembol uzayı)** denir.

Tanım 1.11. Σ_2 elemanları $\{0, 1\}$ sembollerinden oluşan sonsuz dizilerin uzayı olmak üzere, $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2, x = x_0x_1x_2 \dots \in \Sigma_2$ için

$$\sigma(x) = \sigma(x_0x_1x_2 \dots) = x_1x_2 \dots$$

şeklinde tanımlı dönüşüme **shift (kaydırma) dönüşümü** denir ([3]).

Teorem 1.3. $d : \Sigma_2 \times \Sigma_2 \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon ve $x = x_0x_1x_2 \dots, y = y_0y_1y_2 \dots \in \Sigma_2$ olmak üzere,

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$$

fonksiyonu Σ_2 uzayı üzerinde bir metriktir ([3]).

Not 1. σ dönüşümünün n periyotlu noktalarının kümesini $Per_n(\sigma)$ ile gösterecek olursak;

$$Per_n(\sigma) = \{\overline{x_0x_1x_2 \dots x_{n-1}} \mid x_i \in \{0, 1\}, i = 0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

olur.

Teorem 1.4. (Σ_2, d) metrik uzayında, $x = x_0x_1 \dots$ ve $y = y_0y_1 \dots$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

1. Eğer $i = 0, 1, 2, \dots, n$ için $x_i = y_i$ ise $d(x, y) \leq \frac{1}{2^n}$ olur.
2. Eğer $d(x, y) < \frac{1}{2^n}$ ise $i = 0, 1, 2, \dots, n$ için $x_i = y_i$ olur.

Teorem 1.5. σ dönüşümü Devaney anlamında kaotiktir ([3]).

Kanıt. σ dönüşümünün periyodik noktalarının kümesinin Σ_2 uzayında yoğun olduğu, yani $\forall x \in \Sigma_2$ için $\varepsilon > 0$ olmak üzere keyfi $B(x, \varepsilon)$ komşuluğunda σ dönüşümünün en az bir periyodik noktasının bulunduğu gösterilmelidir.

$x = x_0x_1x_2 \dots \in \Sigma_2$ ve $B(x, \varepsilon)$ komşuluğu alınsın. Aynı zamanda $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ seçilsin ve x ile ilk $n+2$ terimi aynı olan $y = x_0x_1x_2 \dots x_{n+1}x_0x_1x_2 \dots$ periyodik noktasını alınsın. x ve y 'nin ilk $n+2$ terimi aynı olduğundan (Teorem 1.4) gereği

$$d(x, y) \leq \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

olup $y \in B(x, \varepsilon)$ olur. Böylece x 'in keyfi ε komşuluğunda bir y periyodik noktası bulunmuş olur. O halde σ dönüşümünün periyodik noktalarının kümesi Σ_2 'de yoğundur.

İkinci olarak σ dönüşümünün topolojik geçişkenliğini inceleyelim.

(Σ_2, d) metrik uzayının boştan farklı keyfi U, V açıkları verilsin. $\sigma^n(U) \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ bulunmalıdır.

$x = x_0x_1x_2 \dots \in U$ ve $y = y_0y_1y_2 \dots \in V$ alınsın. U açık olduğundan $B(x, \varepsilon_1) \subseteq U$ olacak şekilde $\exists \varepsilon_1 > 0$ vardır.

$\frac{1}{2^n} < \varepsilon_1$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ seçilsin ve x ile ilk n terimi aynı olan $z = x_0x_1 \dots x_{n-1}y_0y_1y_2 \dots \in \Sigma_2$ elemanı alınsın. (Teorem 1.4) gereği $d(x, z) \leq \frac{1}{2^n}$ olacağından ve $\frac{1}{2^n} < \varepsilon_1$ olduğundan $d(x, z) < \varepsilon_1$ olur. Bu da $z \in B(x, \varepsilon_1)$ demektir ve $B(x, \varepsilon_1) \subseteq U$ olduğundan $z \in U$ olur. O halde $\sigma^n(z) \in \sigma^n(U)$ olur.

$$\begin{aligned}\sigma(z) &= x_1x_2x_3 \dots \\ \sigma^2(z) &= x_2x_3x_4 \dots \\ &\vdots \\ \sigma^n(z) &= y_0y_1y_2 \dots = y \in V\end{aligned}$$

olduğundan $\sigma^n(z) \in V$ 'dir. O halde $\sigma^n(U) \cap V \neq \emptyset$ olup σ dönüşümü topolojik geçişkendir.

Son olarak σ dönüşümünün başlangıç şartlarına hassas bağımlılığını inceleyelim.

$x_0x_1x_2 \dots \in \Sigma_2$ ve $B(x, \delta)$ x 'in keyfi bir komşuluğu olsun. $\frac{1}{2^n} < \delta$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ seçilsin. Bu durumda, $B(x, \frac{1}{2^n}) \subset B(x, \delta)$ olup,

$$\begin{aligned}B(x, \frac{1}{2^n}) &= \{y \in \Sigma_2 \mid d(x, y) < \frac{1}{2^n}\} \\ &= \{x_0x_1 \dots x_ny_{n+1}y_{n+2} \dots \in \Sigma_2\}\end{aligned}$$

olur. x ile ilk n terimi aynı $(n+1)$. terimi farklı olan $y = x_0x_1 \dots x_ny_{n+1}y_{n+2} \dots \in B(x, \frac{1}{2^n})$ için

$$\begin{aligned}\sigma^{n+1}(x) &= x_{n+1}x_{n+2} \dots \\ \sigma^{n+1}(y) &= y_{n+1}y_{n+2} \dots\end{aligned}$$

olur. Bu durumda,

$$\begin{aligned}d(\sigma^{n+1}(x), \sigma^{n+1}(y)) &= \frac{|x_{n+1} - y_{n+1}|}{2^0} + \frac{|x_{n+2} - y_{n+2}|}{2^1} + \dots \\ &= 1 + \dots > 1\end{aligned}$$

olacağından σ dönüşümü başlangıç şartlarına hassas bağımlıdır. $\square$

Tanım 1.12. (X, d) metrik uzayı ve $f : X \rightarrow X$ dönüşümü verilsin. $\forall x, y \in X$ için,

$$d(f(x), f(y)) \leq s.d(x, y)$$

olacak şekilde $0 \leq s < 1$ reel sayısı mevcut ise f bir büzülme dönüşümüdür denir.

Tanım 1.13. (X, d) bir metrik uzay ve $f_1, f_2, \dots, f_n : X \rightarrow X$ büzülme dönüşümleri olsunlar. $\{X; f_1, f_2, \dots, f_n\}$ sistemine yinelemeli fonksiyon sistemi (YFS) denir ([2]).

Teorem 1.6. (Banach Sabit Nokta Teoremi) (X, d) bir tam metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda f fonksiyonunun bir ve yalnızca bir sabit noktası vardır. Aynı zamanda, $\forall x_1 \in X$ ve x_0 sabit nokta olmak üzere $x_1, f(x_1), f^2(x_1) \dots f^n(x_1), \dots$ dizisi bu sabit noktaya yakınsar. Yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

olur ([2]).

Teorem 1.7. (X, d) bir tam metrik uzay ve $\{X; f_1, f_2 \dots f_n\}$ bir yinelemeli fonksiyon sistemi ve $\mathcal{H}(X) = \{A \subseteq X | A \neq \emptyset \text{ ve } A \text{ kompakt}\}$ olsun.

$$\begin{aligned} F & : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X) \\ A & \rightarrow F(A) = \bigcup_{i=1}^n f_i(A) \end{aligned}$$

olacak şekilde tanımlanan dönüşüm de bir büzülme dönüşümü olup, $\mathcal{H}(X)$ uzayı Hausdorff metriği ile bir tam metrik uzay olduğundan Banach sabit nokta teoremi gereği, bu dönüşümün de bir tek A^* sabit noktası vardır ve bu sabit noktaya ilgili YFS'nin atraktörü (çekicisi) denir. Ayrıca $\forall B \in \mathcal{H}(X)$ için

$$B, F(B), F^2(B) \dots F^n(B), \dots$$

dizisi A^* sabit noktasına yakınsar ([2]).

Tanım 1.14. $\{X; f_1, f_2, \dots, f_n\}$ bir YFS ve atraktörü A olmak üzere $f_1, f_2, \dots, f_n$ dönüşümleri A üzerinde birebir olsun. $i \neq j$ ve $\forall i, j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ için $f_i(A) \cap f_j(A) = \emptyset$ oluyorsa A atraktörü tamamen bağlantısız bir kümedir denir ([4]).

Teorem 1.8. (Cantor Arakesit Teoremi)

(X, d) bir tam metrik uzay olmak üzere D_n kapalı yuvarlarından oluşan ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$D_1 \supseteq D_2 \supseteq \dots \supseteq D_n \supseteq \dots$$

özelliğine sahip kümelerinin bir dizisi ve $n \in \mathbb{N}$ için r_n sayısı D_n kapalı yuvarının yarıçapı olsun. Bu durumda $r_n \rightarrow 0$ ise

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n = \{x\}$$

olacak şekilde bir tek $x \in X$ noktası vardır ([15]).

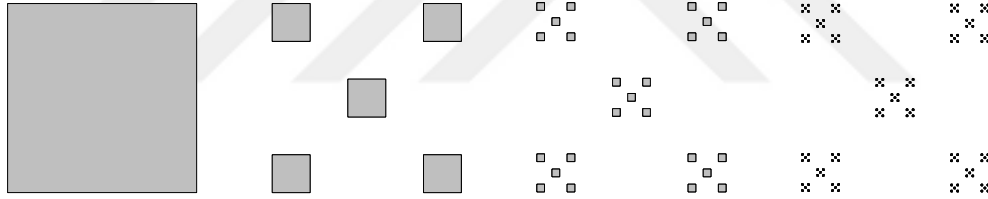


2. AYRIK VICSEK FRAKTALININ ($\mathcal{B}^d$) İNŞASI VE NOKTALARININ KOD TEMSİLLERİ

Bu tezin amacı ayırık Vicsek fraktalı üzerinde dinamik sistemler inşa ederek kaotikliğini incelemektir. Bunun için de bu bölümde önce ayırık Vicsek fraktalı bir YFS'nin atraktörü olarak ifade edilecek daha sonra ayırık Vicsek fraktalı üzerindeki noktaların kod temsilleri belirlenecektir. Ayrıca ayırık Vicsek fraktalı üzerinde $\mathbb{R}^2$ 'deki standart metrik kullanılacağından $\mathcal{B}^d$ kümesinde kod temsili verilen bir noktanın $\mathbb{R}^2$ üzerinde koordinatının bulunması için bir formül verilecektir.

2.1. Ayırık Vicsek Fraktalının Noktalarının Kod Temsilleri

Bir kenarı bir birim olan bir kare alınsın. İlk olarak bu kare $\frac{1}{5}$ oranında büzülsün ve başlangıçtaki karenin köşelerine ve orta noktasına ötelensin. Bu durumda 5 tane yeni küçük kare oluşur. Daha sonra her bir ayırık kare için aynı adımlar tekrarlınsın. Bu adımda da 25 adet kare oluşur. Bu adımların sonsuz kere tekrarlanması ile de ayırık Vicsek fraktalı oluşur. Ayırık Vicsek fraktalı $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, i = 0, 1, 2, 3, 4$ olmak üzere,

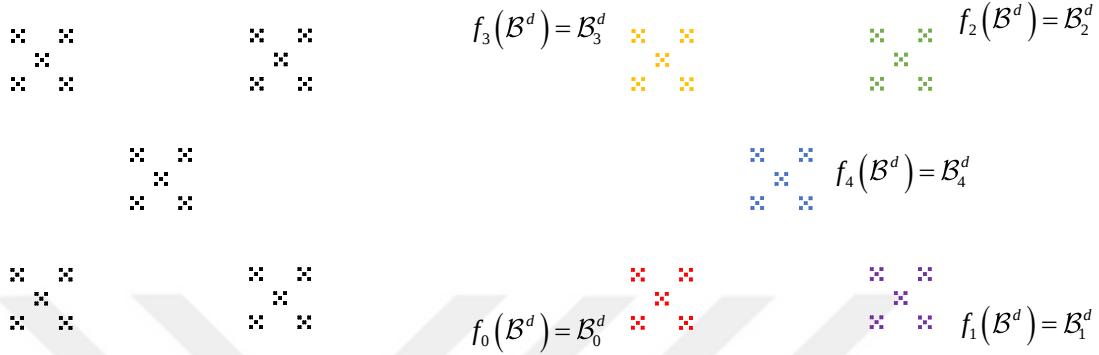


Şekil 2.1. Ayırık Vicsek fraktalının inşasının ilk 3 adımı

$$\begin{aligned} f_0(x, y) &= \left(\frac{x}{5}, \frac{y}{5} \right) \\ f_1(x, y) &= \left(\frac{x}{5} + \frac{4}{5}, \frac{y}{5} \right) \\ f_2(x, y) &= \left(\frac{x}{5} + \frac{4}{5}, \frac{y}{5} + \frac{4}{5} \right) \\ f_3(x, y) &= \left(\frac{x}{5}, \frac{y}{5} + \frac{4}{5} \right) \\ f_4(x, y) &= \left(\frac{x}{5} + \frac{2}{5}, \frac{y}{5} + \frac{2}{5} \right) \end{aligned}$$

$$F(\mathcal{B}^d) = f_0(\mathcal{B}^d) \cup f_1(\mathcal{B}^d) \cup f_2(\mathcal{B}^d) \cup f_3(\mathcal{B}^d) \cup f_4(\mathcal{B}^d) = \mathcal{B}^d$$

olur.



Şekil 2.2. *Ayrık Vicsek fraktalı (sol) ve 5 küçük kopyasının birleşimi olarak ayrık Vicsek fraktalı (sağ)*

Şekil 2.2'deki gibi

$$\begin{aligned} f_0(\mathcal{B}^d) &= \mathcal{B}_0^d \\ f_1(\mathcal{B}^d) &= \mathcal{B}_1^d \\ f_2(\mathcal{B}^d) &= \mathcal{B}_2^d \\ f_3(\mathcal{B}^d) &= \mathcal{B}_3^d \\ f_4(\mathcal{B}^d) &= \mathcal{B}_4^d \end{aligned}$$

olsun. Bu durumda $\mathcal{B}_0^d \cup \mathcal{B}_1^d \cup \mathcal{B}_2^d \cup \mathcal{B}_3^d \cup \mathcal{B}_4^d = \mathcal{B}^d$ ve $i \neq j$ ve $i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ olmak üzere $\mathcal{B}_i^d \cap \mathcal{B}_j^d = \emptyset$ ve her bir f_i fonksiyonu birebir olduğundan tanımı gereği $\mathcal{B}^d$ tamamen bağlantısız bir kümedir.

$k \in \mathbb{N}$ ve $\{0, 1, 2, 3, 4\}^k$ kümesini ele alalım. $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}^k$ için $\mathcal{B}_\alpha^d = f_\alpha(\mathcal{B}^d)$ olsun. Burada $f_\alpha = f_{\alpha_1} \circ f_{\alpha_2} \circ f_{\alpha_3} \circ \dots \circ f_{\alpha_k}$ olmak üzere

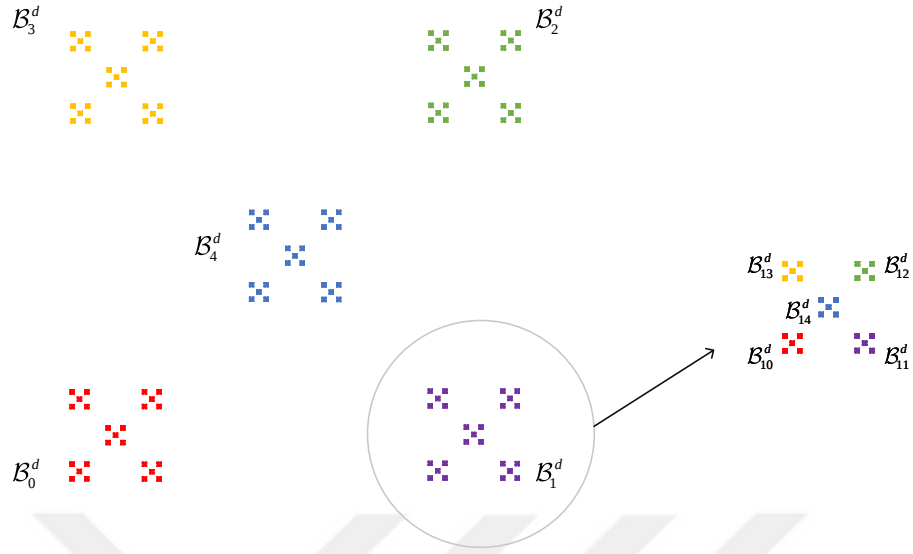
$$\mathcal{B}_{\alpha_1}^d \supset \mathcal{B}_{\alpha_1 \alpha_2}^d \supset \mathcal{B}_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}^d \supset \dots \supset \mathcal{B}_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_k}^d \supset \dots$$

elde edilir. Cantor Arakesit Teoreminden dolayı

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{B}_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_k}^d = \{a\}$$

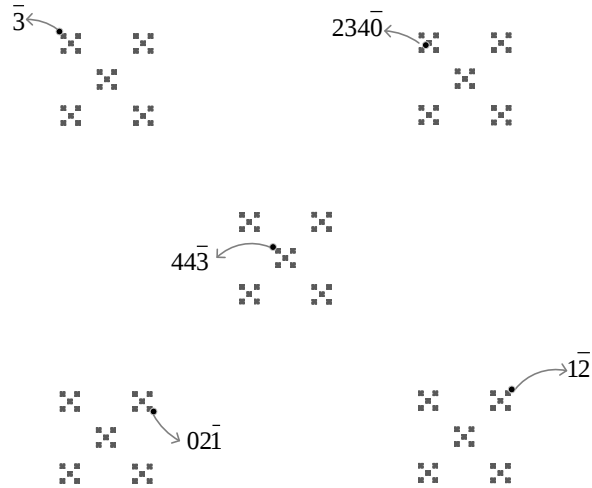
olacak şekilde tek bir $a \in \mathcal{B}^d$ noktası vardır. $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_k \dots$ ifadesine de a noktasının

kod temsili denir ([5]).



Şekil 2.3. 1. ve 2. seviyeden bazı alt ayırık Vicsek kümeleri

Not 2. $\mathcal{B}^d$ tamamen bağlantısız bir küme olduğundan her bir noktanın yalnızca bir kod temsili vardır. Ayrıca tez boyunca $\bar{x}$ ifadesi tekrar eden $xxx \dots$ anlamında kullanılacaktır.



Şekil 2.4. Ayırık Vicsek fraktalı üzerinde bazı noktaların kod temsilleri

2.2. Kod Temsili Verilen Bir Noktanın $\mathbb{R}^2$ 'de Koordinatlarının Bulunması

$a \in \mathcal{B}^d$ ve $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ olmak üzere a noktasının kod gösterimi $a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ olsun. a noktasının $\mathbb{R}^2$ 'deki koordinatları (x, y) ile gösterilecek olursa,

$$x_i = \begin{cases} 0 & , a_i = 0 \\ 4 & , a_i = 1 \\ 4 & , a_i = 2 \\ 0 & , a_i = 3 \\ 2 & , a_i = 4 \end{cases} \quad y_i = \begin{cases} 0 & , a_i = 0 \\ 0 & , a_i = 1 \\ 4 & , a_i = 2 \\ 4 & , a_i = 3 \\ 2 & , a_i = 4 \end{cases}$$

olmak üzere

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{5^i}, \quad y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{5^i}$$

şeklindedir.

Not 3. $\mathcal{B}^d$ üzerinde standart metrik kullanılacak ve standart metrik d ile gösterilecektir.

Örnek 2.1. $\mathcal{B}^d$ kümesinde kod temsilleri verilen $a = 4\bar{0}$ ve $b = 4\bar{2}$ noktaları arasındaki uzaklık aşağıdaki şekilde hesaplanır.

a noktasının $\mathbb{R}^2$ 'deki koordinatları (x, y) olmak üzere,

$$x = \frac{2}{5} + \frac{0}{5^2} + \frac{0}{5^3} + \dots = \frac{2}{5}, \quad y = \frac{2}{5} + \frac{0}{5^2} + \frac{0}{5^3} + \dots = \frac{2}{5}$$

$(x, y) = (\frac{2}{5}, \frac{2}{5})$ noktasıdır.

b noktasının $\mathbb{R}^2$ 'deki koordinatları (x', y') olmak üzere,

$$x' = \frac{2}{5} + \frac{4}{5^2} + \frac{4}{5^3} + \dots = \frac{3}{5}, \quad y' = \frac{2}{5} + \frac{4}{5^2} + \frac{4}{5^3} + \dots = \frac{3}{5}$$

$(x', y') = (1, 0)$ noktasıdır. O halde a ve b noktaları arasındaki uzaklık

$$d\left(\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right), \left(\frac{3}{5}, \frac{3}{5}\right)\right) = \sqrt{\left(\frac{2}{5} - \frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5} - \frac{3}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{5}$$

olur.

3. $\mathcal{B}^d$ ÜZERİNDE KATLAMA VE GENİŞLEME DÖNÜŞÜMLERİ KULLANILARAK DİNAMİK SİSTEM İNŞASI

Genişleme dönüşümleri noktaların birbirinden uzaklaşmasına neden olur ve kaos koşullarından başlangıç koşullarına hassas bağımlılığın gerçekleşmesi için gereklidir. Katlama dönüşümleri ise genişleyen sistemin sınırlı bir bölgede kalmasına olanak sağlar, bu sayede bu iki dönüşüm uygun bir şekilde aynı anda kullanıldığında hassas bağımlılığa sahip kaotik bir dinamik sistem oluşturulabilir. Lojistik dönüşüm ve Tent (Çadır) dönüşümü bu yolla oluşturulan kaotik dinamik sistemlerin klasik örneklerindendir. Bu bölümde genişleme ve katlama dönüşümleri kullanılarak oluşturulan iki dinamik sistem örneği verilecektir. Ayrıca Örnek 3.1’te verilen dinamik sistemin zaman kaçış algoritması yoluyla Ayırık Vicsek fraktalı elde edilecektir.

3.1. Zaman Kaçış Algoritması Kullanılarak Ayırık Vicsek Fraktalının Elde Edilmesi

Kendine benzer kümelerin büyük bir kısmı yinelemeli fonksiyon sistemleri atraktörleri olarak elde edilirler. Sierpinski üçgeni, Koch eğrisi, Cantor kümesi, Vicsek fraktalı gibi klasik fraktallar, bu tür yinelemeli fonksiyon sistemlerinin yardımıyla üretilebilirler.

Ancak, yinelemeli fonksiyon sistemleri fraktal üretmenin tek yolu değildir. Alternatif yöntemlerden biri de zaman kaçış algoritmasıdır. Bu yöntem, belirli bir noktanın bir dinamik sistem içinde nasıl bir yörüngeye sahip olduğunu analiz ederek fraktal yapı oluşturur. Mandelbrot ve Julia kümeleri gibi fraktalların yanı sıra, yukarıda bahsedilen klasik fraktalların da zaman kaçış algoritması kullanılarak üretilebileceği bilinmektedir ([8]).

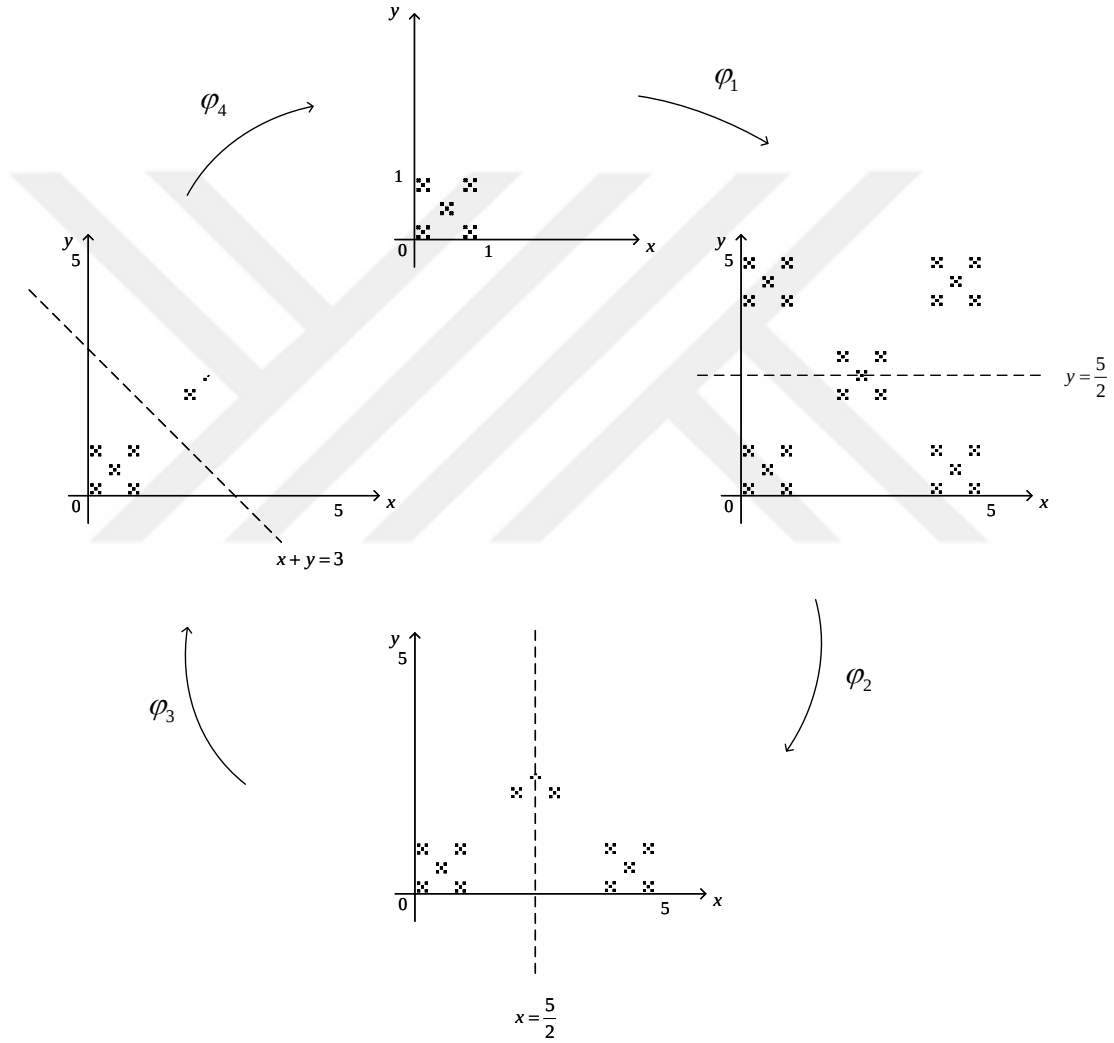
Bu farklı yöntemler, fraktalların geometrik ve dinamik özelliklerini daha iyi anlayabilmek için farklı yaklaşımlar sunar ve doğada gözlemlenen karmaşık yapıları matematiksel olarak modellememizi sağlar.

Örnek 3.1. $[0, 1] \times [0, 1]$ kümesi üzerinde verilen ayırık Vicsek fraktalı ele alınsın. $\varphi_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ve $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\varphi_1(x, y) &= (5x, 5y) \\ \varphi_2(x, y) &= (x, -|y - \frac{5}{2}| + \frac{5}{2}) \\ \varphi_3(x, y) &= (-|x - \frac{5}{2}| + \frac{5}{2}, y) \\ \varphi_4(x, y) &= (-\frac{1}{2}|x + y - 3| - \frac{1}{2}(y - x - 3), -\frac{1}{2}|y - 3 + x| + \frac{1}{2}(y - x + 3))\end{aligned}$$

olmak üzere $\Phi = \varphi_4 \circ \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$ bileşke fonksiyonu tanımlansın.

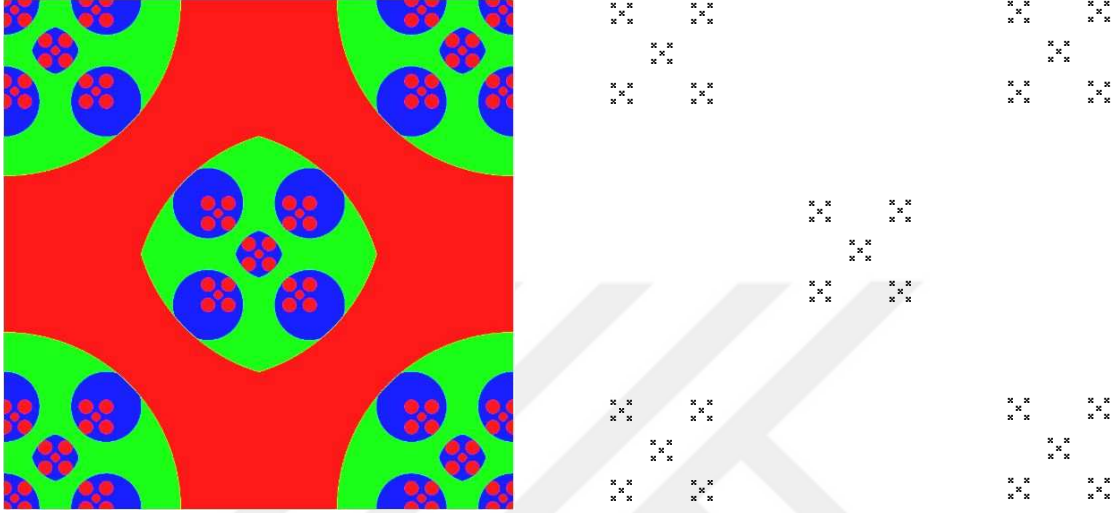
Φ dönüşümünü oluşturan dönüşümler incelendiğinde, φ_1 dönüşümü noktalara arasındaki uzaklığı 5 katına çıkaran bir genişleme dönüşümü, φ_2 dönüşümü $y = \frac{5}{2}$ doğrusunun üst kısmında kalan noktaları doğrunun altına gönderen bir katlama dönüşümü, φ_3 dönüşümü $x = \frac{5}{2}$ doğrusunun sağ tarafında kalan noktaları doğrunun sol tarafına gönderen bir katlama dönüşümü ve son olarak φ_4 dönüşümü de $x + y = 3$ doğrusunun sağ tarafında kalan noktaları doğrunun sol tarafına gönderen bir katlama dönüşümüdür (Bkz. Şekil 3.1). Ayrıca Φ dönüşümünün $\mathcal{B}^d$ 'ye kısıtlanmış bir dinamik sistem oluşturur.



Şekil 3.1. $\{\mathcal{B}^d, \Phi\}$ dinamik sisteminin inşası

$\{\mathcal{B}^d, \Phi\}$ dinamik sistemi içindeki noktaların Φ dönüşümü altındaki iterasyonlarının (yörüngelerinin) nasıl davrandığını incelemek için zaman kaçış algoritması kullanılır. Bu algoritmaya göre her bir noktanın yörüngesi takip edilerek belirli bir iterasyon sayısı (n) boyunca belirli bir sınır içinde kalıp kalmadığını kontrol eder. Eğer bir nokta n iterasyon

içinde bir yerde sınırın dışına çıkarsa, kaçtığı iterasyon sayısına göre bir renkle boyanır. Eğer nokta n iterasyon boyunca sınırın içinde kalırsa özel bir renk ile boyanır. Yörüngesi sınırlı kalan noktaların kümesi de ilgili fraktalı verir. Yani $\mathcal{B}^d = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | F^n(x, y), n \rightarrow \infty\}$ olur. Sonuç olarak Φ dönüşümünün zaman kaçış algoritmasıyla ayrık Vicsek fraktalı elde edilmektedir (Bkz. Şekil 3.2).



Şekil 3.2. Zaman kaçış algoritmasıyla ayrık Vicsek fraktalının elde edilmesi

Önerme 3.1’de Φ dönüşümü ile daha kolay işlem yapabilmek ve periyodik noktaları daha kolay hesaplayabilmek amacıyla, dönüşüm noktalarının kod temsilleri kullanılarak ifade edilmektedir.

Önerme 3.1. $x, y \in \mathcal{B}^d$ noktalarının kod temsilleri $x_i, y_i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ olmak üzere sırasıyla $x_1x_2x_3 \dots$ ve $y_1y_2y_3 \dots$ olsun. Bu durumda $\Phi : \mathcal{B}^d \rightarrow \mathcal{B}^d$ fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\Phi(0x_2x_3x_4 \dots) = x_2x_3x_4 \dots$$

$$\Phi(1x_2x_3x_4 \dots) = y_1y_2y_3 \dots, \quad y_i = \begin{cases} 0 & , \quad x_{i+1} = 1 \\ 1 & , \quad x_{i+1} = 0 \\ 2 & , \quad x_{i+1} = 3 \\ 3 & , \quad x_{i+1} = 2 \\ 4 & , \quad x_{i+1} = 4 \end{cases}$$

$$\Phi(2x_2x_3x_4 \dots) = y_1y_2y_3 \dots, \quad y_i = \begin{cases} 0 & , \quad x_{i+1} = 2 \\ 1 & , \quad x_{i+1} = 3 \\ 2 & , \quad x_{i+1} = 0 \\ 3 & , \quad x_{i+1} = 1 \\ 4 & , \quad x_{i+1} = 4 \end{cases}$$

$$\Phi(3x_2x_3x_4 \dots) = y_1y_2y_3 \dots, \quad y_i = \begin{cases} 0 & , \quad x_{i+1} = 3 \\ 1 & , \quad x_{i+1} = 2 \\ 2 & , \quad x_{i+1} = 1 \\ 3 & , \quad x_{i+1} = 0 \\ 4 & , \quad x_{i+1} = 4 \end{cases}$$

$$\Phi(4x_2x_3x_4 \dots) = y_1y_2y_3 \dots, \text{ için 4 durum söz konusudur :}$$

1.Durum:

$$\Phi(444 \dots 40x_{k+1}x_{k+2}x_{k+3} \dots) = y_1y_2y_3 \dots, \quad y_i = \begin{cases} 0 & , \quad x_{i+1} = 2 \\ 1 & , \quad x_{i+1} = 1 \\ 2 & , \quad x_{i+1} = 0 \\ 3 & , \quad x_{i+1} = 3 \\ 4 & , \quad x_{i+1} = 4 \end{cases}$$

2.Durum:

$$\Phi(444 \dots 41x_{k+1}x_{k+2}x_{k+3} \dots) = y_1y_2y_3 \dots, \quad y_i = \begin{cases} 0 & , \quad x_{i+1} = 3 \\ 1 & , \quad x_{i+1} = 0 \\ 2 & , \quad x_{i+1} = 1 \\ 3 & , \quad x_{i+1} = 2 \\ 4 & , \quad x_{i+1} = 4 \end{cases}$$

3.Durum:

$$\Phi(444 \dots 42x_{k+1}x_{k+2}x_{k+3} \dots) = y_1y_2y_3 \dots, \quad y_i = \begin{cases} 0 & , \quad x_{i+1} = 0 \\ 1 & , \quad x_{i+1} = 3 \\ 2 & , \quad x_{i+1} = 2 \\ 3 & , \quad x_{i+1} = 1 \\ 4 & , \quad x_{i+1} = 4 \end{cases}$$

4.Durum:

$$\Phi(444 \dots 43x_{k+1}x_{k+2}x_{k+3} \dots) = y_1y_2y_3 \dots, \quad y_i = \begin{cases} 0 & , \quad x_{i+1} = 1 \\ 1 & , \quad x_{i+1} = 2 \\ 2 & , \quad x_{i+1} = 3 \\ 3 & , \quad x_{i+1} = 0 \\ 4 & , \quad x_{i+1} = 4 \end{cases}$$

Örneğin $\mathcal{B}^d$ kümesinden kod temsili $x = \overline{234213}$ elemanı alınsın. Bu durumda $x \in \mathcal{B}^{d'}$ nin Φ altındaki görüntüsü $\Phi(x) = \overline{140310}$ olur.

Φ fonksiyonunun periyodik noktaları için herhangi bir formül bulunamamakla birlikte bazı periyodik noktaları aşağıdaki gibidir.

Sabit noktalar;

$$\overline{0}, \overline{10}, \overline{20}, \overline{30}, \overline{4}$$

Periyodu 2 olan bazı noktalar;

$$\overline{0110}, \overline{0220}, \overline{0330}$$

$$\overline{1100}, \overline{1230}, \overline{1320}$$

$$\overline{2130}, \overline{2200}, \overline{2310}$$

$$\overline{3120}, \overline{3210}, \overline{3300}$$

$$\overline{24}, \overline{24140434}, \overline{24340414}$$

$$\overline{41424340}, \overline{43424140}$$

$$\overline{40}, \overline{4240}, \overline{2404}$$

Periyodu 3 olan bazı noktalar;

$$\overline{012230}, \overline{103230}, \overline{213120}$$

şeklinde hesaplanır.

Örnek 3.2. $[0, 1] \times [0, 1]$ kümesi üzerinde ayırık Vicsek fraktalı ele alınsın. $g_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ve $i = 1, 2, 3, 4, 5$ olmak üzere,

$$g_1(x, y) = (5x, 5y)$$

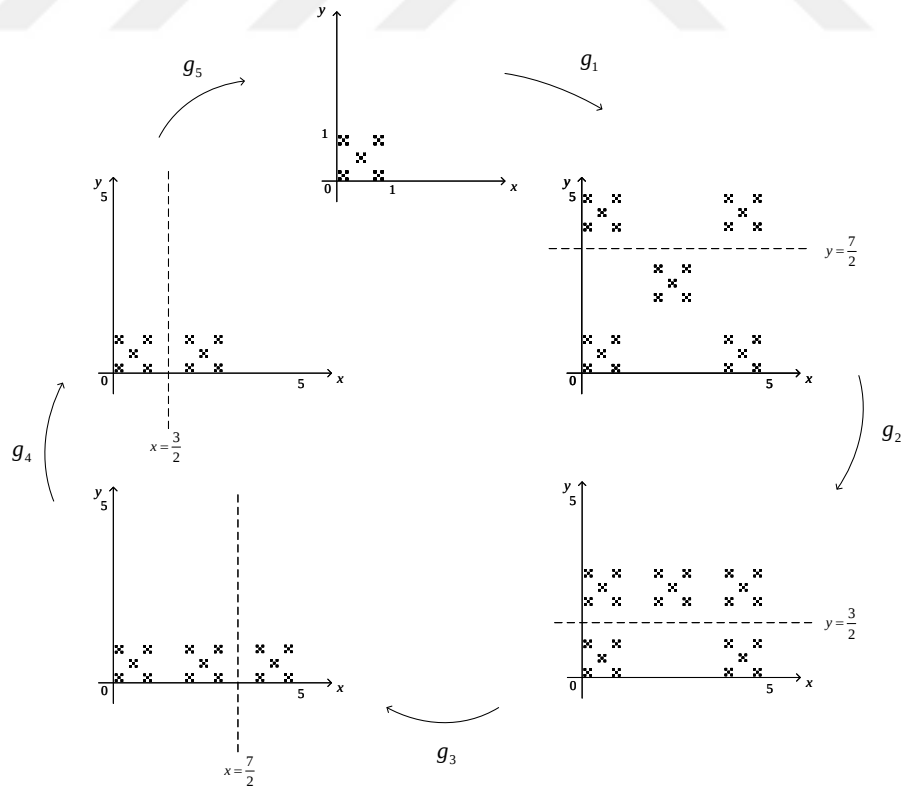
$$g_2(x, y) = \left(x, \frac{7}{2} - |y - \frac{7}{2}|\right)$$

$$g_3(x, y) = \left(x, \frac{3}{2} - |y - \frac{3}{2}|\right)$$

$$g_4(x, y) = \left(\frac{7}{2} - |x - \frac{7}{2}|, y\right)$$

$$g_5(x, y) = \left(\frac{3}{2} - |x - \frac{3}{2}|, y\right)$$

olmak üzere $G = g_5 \circ g_4 \circ g_3 \circ g_2 \circ g_1$ bileşke fonksiyonu $\mathcal{B}^d$ üzerinde bir dinamik sistemdir.



Şekil 3.3. $\{\mathcal{B}^d, G\}$ dinamik sisteminin inşası

Örnek 3.3. $x_1x_2x_3 \dots \in \mathcal{B}^d$ kod temsilinde her bir $i \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ için x_i 'nin eşleniği x_i^* olmak üzere,

$$x_i^* = \begin{cases} 0 & , \quad x_i = 2 \\ 1 & , \quad x_i = 3 \\ 2 & , \quad x_i = 0 \\ 3 & , \quad x_i = 1 \\ 4 & , \quad x_i = 4 \end{cases}$$

olur.

Önerme 3.2'de G dönüşümü, $\mathcal{B}^d$ 'nin noktalarının kod temsilleriyle yeniden ifade edilmiştir.

Önerme 3.2. $x \in \mathcal{B}^d$ noktasının kod temsili $x_1x_2x_3 \dots$ olsun. Bu durumda $G : \mathcal{B}^d \rightarrow \mathcal{B}^d$ fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$G(x) = \begin{cases} x_2x_3 \dots & , \quad x_1 \neq 4 \\ x_2^*x_3^* \dots & , \quad x_1 = 4 \end{cases}$$

Önerme 3.3. G fonksiyonunun periyodik noktaları $i = 1, 2, 3, 4, \dots, n$ olmak üzere,

1.Durum: $x = x_1x_2 \dots x_n \dots \in \mathcal{B}^d$ noktasının ilk n teriminin içerisinde tek sayıda 4 varsa,

$$\overline{x_1x_2x_3 \dots x_ix_{i+1} \dots x_nx_1^*x_2^*x_3^* \dots x_i^*x_{i+1}^* \dots x_n^*}$$

noktası n periyotlu nokta olur.

2.Durum: $x = x_1x_2 \dots x_n \dots \in \mathcal{B}^d$ noktasının ilk n teriminin içerisinde çift sayıda 4 varsa,

$$\overline{x_1x_2x_3 \dots x_n}$$

noktası n periyotlu nokta olur.

Kanıt. 1.Durum: $x = x_1x_2 \dots x_nx_{n+1} \dots \in \mathcal{B}^d$ noktasının ilk n teriminde tek sayıda 4 olsun. Bu durumda

$$G^n(x_1x_2 \dots x_nx_{n+1} \dots) = x_{n+1}^*x_{n+2}^* \dots$$

olacağından

$$\begin{aligned}x_{n+1}^* &= x_1 \\x_{n+2}^* &= x_2 \\&\vdots\end{aligned}$$

olup

$$x = \overline{x_1 x_2 x_3 \dots x_{i+1} \dots x_n x_1^* x_2^* x_3^* \dots x_i^* x_{i+1}^* \dots x_n^*}$$

G fonksiyonunun n periyotlu noktası olur.

2.Durum: $x = x_1 x_2 \dots x_n x_{n+1} \dots \in \mathcal{B}^d$ noktasının ilk n teriminde çift sayıda 4 olsun. Bu durumda

$$G^n(x_1 x_2 \dots x_n x_{n+1} \dots) = x_{n+1} x_{n+2} \dots$$

olacağından

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_1 \\x_{n+2} &= x_2 \\&\vdots\end{aligned}$$

olup

$$\overline{x_1 x_2 x_3 \dots x_n}$$

G fonksiyonunun n periyotlu noktası olur. □

Örnek 3.4. $x = \overline{214034} \in \mathcal{B}^d$ noktası G fonksiyonunun 3-periyotlu bir noktasıdır:

$$\begin{aligned}G^3(x) &= G^3(214034214034 \dots) \\&= G(G(G(214034214034 \dots))) \\&= G(G(14034214034 \dots)) \\&= G(4034214034 \dots) \\&= 214034214 \dots = x\end{aligned}$$

Örnek 3.5. $x = \overline{213} \in \mathcal{B}^d$ noktası G fonksiyonunun 3-periyotlu bir noktasıdır:

$$\begin{aligned}
 G^3(x) &= G^3(213213213213213 \dots) \\
 &= G(G(G(213213213213213 \dots))) \\
 &= G(G(13213213213213 \dots)) \\
 &= G(3213213213213 \dots) \\
 &= 213213213213 \dots = x
 \end{aligned}$$

Önerme 3.4. $(\mathcal{B}^d, d)$ metrik uzayında, $a = a_1x_2 \dots a_n \dots \in \mathcal{B}^d$ ve $b = b_1b_2 \dots b_n \dots \in \mathcal{B}^d$ elemanlarının $\mathbb{R}^2$ 'deki karşılıkları sırasıyla (x, y) , (x', y') olmak üzere, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ için $a_i = b_i$ ise $d((x, y), (x', y')) < \frac{1}{5^{n-1}}$ olur.

Kanıt. $a = a_1a_2 \dots a_na_{n+1} \dots$ ve $b = a_1a_2 \dots a_nb_{n+1} \dots$ olsun. a ve b 'nin $\mathbb{R}^2$ 'deki karşılıkları sırasıyla (x, y) , (x', y') olmak üzere,

$$\begin{aligned}
 (x, y) &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{5^i}, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{5^i} \right) \\
 (x', y') &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x'_i}{5^i}, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y'_i}{5^i} \right)
 \end{aligned}$$

olsun. Burada x_i, x'_i, y_i, y'_i Alt bölüm 2.2'deki gibi tanımlanmaktadır. İlk n terimlerin aynı olduğu göz önüne alındığında,

$$\begin{aligned}
 d(a, b) &= \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} \\
 &= \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i - x'_i}{5^i} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i - y'_i}{5^i} \right)^2} \\
 &= \sqrt{\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{x_i - x'_i}{5^i} \right)^2 + \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{y_i - y'_i}{5^i} \right)^2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{x_{n+1} - x'_{n+1}}{5^{n+1}} + \dots \right)^2 + \left(\frac{y_{n+1} - y'_{n+1}}{5^{n+1}} + \dots \right)^2} \\
 &\leq \sqrt{\left(\frac{4}{5^{n+1}} + \frac{4}{5^{n+2}} + \dots \right)^2 + \left(\frac{4}{5^{n+1}} + \frac{4}{5^{n+2}} + \dots \right)^2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{1}{5^n} \right)^2 + \left(\frac{1}{5^n} \right)^2} = \frac{2}{5^n} < \frac{1}{5^{n-1}}
 \end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 3.1. $\{G, \mathcal{B}^d\}$ Devaney anlamında kaotik bir dinamik sistemdir.

Kanıt. Periyodik noktaların yoğunluğu:

Keyfi $x = x_1x_2 \dots x_nx_{n+1} \dots \in \mathcal{B}^d$ verilsin. Bu noktanın keyfi $B(x, \epsilon)$ komşuluğunda bir periyodik noktanın var olduğu gösterilmelidir. Önerme 3.3'den dolayı böyle bir periyodik nokta her zaman bulunabilir.

Başlangıç şartlarına hassas bağımlılık:

Keyfi $x = x_1x_2x_3 \dots x_nx_{n+1} \dots \in \mathcal{B}^d$ ve x ile ilk n terimi aynı $(n+1)$. terimi farklı olan $y = x_1x_2 \dots x_ny_{n+1}y_{n+2} \dots \in \mathcal{B}^d$ verilsin. Bu iki noktanın birbirine yeteri kadar yakın olduğu ancak görüntülerinin bir süre sonra birbirlerinden uzaklaştığı gösterilmelidir.

$\delta > \frac{1}{5^{n-1}}$ olmak üzere $y \in B(x, \delta)$ olduğunu gösterelim. (Burada n 'yi $\delta > \frac{1}{5^{n-1}}$ olacak şekilde seçiyoruz.) x ve y 'nin $\mathbb{R}^2$ 'deki karşılıkları sırasıyla α, β olmak üzere, Önerme 3.4'den dolayı $d(\alpha, \beta) < \delta$ olup $y \in B(x, \delta)$ olur. Sonuç olarak

$$d(G^n(x), G^n(y)) > \frac{\sqrt{2}}{5}$$

olduğundan istenen gösterilmiş olur.

Topolojik geçişkenlik:

$(\mathcal{B}^d, d)$ metrik uzayının boştan farklı keyfi U, V açıklarını alalım. $G^k(U) \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ bulunmalıdır.

$x = x_1x_2x_3 \dots \in U$ alalım. U açık olduğundan $B(x, \epsilon) \subset U$ olacak şekilde $\exists \epsilon > 0$ vardır. k 'yi $\epsilon > \frac{1}{5^{k-1}}$ olacak şekilde seçelim.

$$U' = \{x_1x_2 \dots x_kz_{k+1}z_{k+2} \dots \mid x \text{ ile ilk } k \text{ terimi aynı}\}$$

kümesi verilsin ve $y \in U'$ alalım. Bu durumda Önerme 3.4'den dolayı $d(x, y) < \frac{1}{5^{k-1}}$ olup $y \in B(x, \epsilon)$ olur. O halde $B(x, \epsilon) \subset U$ olduğundan $y \in U$ olur, o halde $U' \subset U$ olur. Ayrıca $G^k(U') = \mathcal{B}^d$ olacağından $G^k(U) = \mathcal{B}^d$ olup $G^k(U) \cap V \neq \emptyset$ olur. $\square$

4. $\mathcal{B}^d$ ÜZERİNDE KARENİN SİMETRİ GRUBU KULLANILARAK KAOTİK DİNAMİK SİSTEM AİLESİ İNŞASI

Bu bölümde karenin simetri grubu olan Dihedral grup D_4 'ün elemanları $\mathcal{B}^d$ 'nin kod temsilleri kullanılarak ifade edilmiş ve bu dönüşümler ile kaydırma dönüşümü yardımıyla ayrık Vicsek fraktalı üzerinde kaotik bir dinamik sistem ailesi inşa edilmiştir.

Ayrık Vicsek fraktalı üzerinde bir kaotik dinamik sistem ailesi oluşturabilmek için karenin simetri grubunun elemanları kullanılacaktır. Bu grubun elemanları; 0° , 90° , 180° , 270° dönmeler (saat yönünün tersi), y, x eksenlerine göre yansımalar ve köşegenlere göre yansımalar olmakla birlikte sırasıyla $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \mu_1, \mu_2, \delta_1, \delta_2$ ile gösterilmektedir. Önerme 4.1'de bu dönüşümler kod temsilleri yardımıyla ifade edilmektedir.

Önerme 4.1. $\mathcal{B}^d$ 'nin farklı x, y noktalarının kod temsilleri sırasıyla $x_1x_2x_3 \dots$ ve $y_1y_2y_3 \dots$ ($x_i, y_i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$) olsun. Bu durumda, $\forall x_i = 4$ için $y_i = 4$ ve

$$\rho_0(x) = y \iff y_i \equiv x_i(\text{mod}4)$$

$$\rho_1(x) = y \iff y_i \equiv x_i + 1(\text{mod}4)$$

$$\rho_2(x) = y \iff y_i \equiv x_i + 2(\text{mod}4)$$

$$\rho_3(x) = y \iff y_i \equiv x_i + 3(\text{mod}4)$$

$$\mu_1(x) = y \iff y_i \equiv 3x_i + 1(\text{mod}4)$$

$$\mu_2(x) = y \iff y_i \equiv 3x_i + 3(\text{mod}4)$$

$$\delta_1(x) = y \iff y_i \equiv 3x_i + 2(\text{mod}4)$$

$$\delta_2(x) = y \iff y_i \equiv 3x_i(\text{mod}4)$$

olarak formüle edilir.

Not 4. Bu bölümde ayrık Vicsek fraktalının merkezi orijinde olacak şekilde konumlandırılmıştır.

Kanıt. Şekilde görüldüğü gibi ayrık Vicsek fraktalı üzerinde 0° dönme dönüşümü altında,

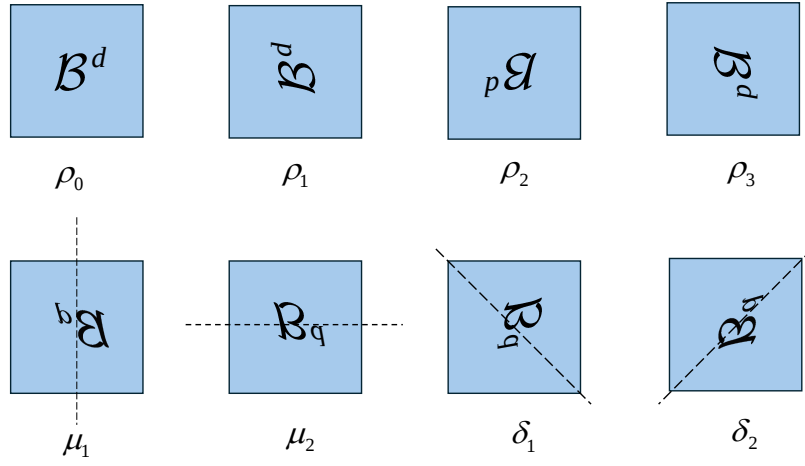
$$0 \rightarrow 0$$

$$1 \rightarrow 1$$

$$2 \rightarrow 2$$

$$3 \rightarrow 3$$

$$4 \rightarrow 4$$



Şekil 4.1. Karenin simetri grubu

olduğundan $\rho_0(x) = y \iff y_i \equiv x_i \pmod{4}$ elde edilir.

Ayrık Vicsek fraktalı üzerinde 90° dönme dönüşümü altında,

$$0 \rightarrow 1$$

$$1 \rightarrow 2$$

$$2 \rightarrow 3$$

$$3 \rightarrow 0$$

$$4 \rightarrow 4$$

olduğundan $\rho_1(x) = y \iff y_i \equiv x_i + 1 \pmod{4}$ elde edilir.

Ayrık Vicsek fraktalı üzerinde 180° dönme dönüşümü altında,

$$0 \rightarrow 2$$

$$1 \rightarrow 3$$

$$2 \rightarrow 0$$

$$3 \rightarrow 1$$

$$4 \rightarrow 4$$

olduğundan $\rho_2(x) = y \iff y_i \equiv x_i + 2 \pmod{4}$ elde edilir.

Ayrık Vicsek fraktalı üzerinde 270° dönme dönüşümü altında,

$$0 \rightarrow 3$$

$$1 \rightarrow 0$$

$$2 \rightarrow 1$$

$$3 \rightarrow 2$$

$$4 \rightarrow 4$$

olduğundan $\rho_3(x) = y \iff y_i \equiv x_i + 3(mod 4)$ elde edilir.

Ayrık Vicsek fraktalı üzerinde y eksenine göre yansıma dönüşümü altında,

$$0 \rightarrow 1$$

$$1 \rightarrow 0$$

$$2 \rightarrow 3$$

$$3 \rightarrow 2$$

$$4 \rightarrow 4$$

olduğundan $\mu_1(x) = y \iff y_i \equiv 3x_i + 1(mod 4)$ elde edilir.

Ayrık Vicsek fraktalı üzerinde x eksenine göre yansıma dönüşümü altında,

$$0 \rightarrow 3$$

$$1 \rightarrow 2$$

$$2 \rightarrow 1$$

$$3 \rightarrow 0$$

$$4 \rightarrow 4$$

olduğundan $\mu_2(x) = y \iff y_i \equiv 3x_i + 3(mod 4)$ elde edilir.

Ayrık Vicsek fraktalı üzerinde 1. köşegene göre yansıma dönüşümü altında,

$$0 \rightarrow 2$$

$$1 \rightarrow 1$$

$$2 \rightarrow 0$$

$$3 \rightarrow 3$$

$$4 \rightarrow 4$$

olduğundan $\delta_1(x) = y \iff y_i \equiv 3x_i + 2(mod 4)$ elde edilir.

Ayrık Vicsek fraktalı üzerinde 2. köşegene göre yansıma dönüşümü altında,

$$0 \rightarrow 0$$

$$1 \rightarrow 3$$

$$2 \rightarrow 2$$

$$3 \rightarrow 1$$

$$4 \rightarrow 4$$

olduğundan $\delta_2(x) = y \iff y_i \equiv 3x_i(mod 4)$ elde edilir. $\square$

Tanım 4.1. $f_i \in \{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \mu_1, \mu_2, \delta_1, \delta_2\}$ $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ve σ kaydırma dönüşümü olmak üzere $F : \mathcal{B}^d \rightarrow \mathcal{B}^d$ fonksiyonu,

$$F(x) = \begin{cases} \sigma \circ f_1(x) & , x \in \mathcal{B}_0^d \\ \sigma \circ f_2(x) & , x \in \mathcal{B}_1^d \\ \sigma \circ f_3(x) & , x \in \mathcal{B}_2^d \\ \sigma \circ f_4(x) & , x \in \mathcal{B}_3^d \\ \sigma \circ f_5(x) & , x \in \mathcal{B}_4^d \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

$\{\mathcal{B}^d, F\}$ bir dinamik sistemdir ve bu yolla 8^5 adet dinamik sistem elde edilir.

Önerme 4.2. F fonksiyonunun periyodik noktaları aşağıdaki şekilde formüle edilir.

Not 5. Eğer $x_i = 4$ ise periyodik noktaya tamamlanırken yine sabit kalır yani $x_{n+i} = 4, x_{2n+i} = 4, x_{3n+i} = 4, \dots$ olarak alınır. Ayrıca $x_i \neq 4$ iken $x_{n+i}, x_{2n+i}, \dots$ değerleri $(mod 4)$ 'e göre hesaplanır.

1.Durum: $F^n(x) = (\sigma^n \circ \rho_0)(x)$ ise n -periyotlu bazı noktalar

$$\overline{x_1 x_2 x_3 \dots x_n}$$

formundadır.

2.Durum: $F^n(x) = (\sigma^n \circ \rho_1)(x)$ ise n -periyotlu bazı noktalar

$$\overline{x_1 x_2 \dots x_n (x_1 + 3)(x_2 + 3) \dots (x_n + 3)(x_1 + 2)(x_2 + 2) \dots (x_n + 2)(x_1 + 1)(x_2 + 1) \dots (x_n + 1)}$$

formundadır.

3.Durum: $F^n(x) = (\sigma^n \circ \rho_2)(x)$ ise n -periyotlu bazı noktalar

$$\overline{x_1 x_2 \dots x_n (x_1 + 2)(x_2 + 2) \dots (x_n + 2)}$$

formundadır.

4.Durum: $F^n(x) = (\sigma^n \circ \rho_3)(x)$ ise n -periyotlu bazı noktalar

$$\overline{x_1 x_2 \dots x_n (x_1 + 1)(x_2 + 1) \dots (x_n + 1)(x_1 + 2)(x_2 + 2) \dots (x_n + 2)(x_1 + 3)(x_2 + 3) \dots (x_n + 3)}$$

formundadır.

5.Durum: $F^n(x) = (\sigma^n \circ \mu_1)(x)$ ise n -periyotlu bazı noktalar

$$\overline{x_1 x_2 \dots x_n (3x_1 + 1)(3x_2 + 1) \dots (3x_n + 1)}$$

formundadır.

6.Durum: $F^n(x) = (\sigma^n \circ \mu_2)(x)$ ise n -periyotlu bazı noktalar

$$\overline{x_1 x_2 \dots x_n (3x_1 + 3)(3x_2 + 3) \dots (3x_n + 3)}$$

formundadır.

7.Durum: $F^n(x) = (\sigma^n \circ \delta_1)(x)$ ise n -periyotlu bazı noktalar

$$\overline{x_1 x_2 \dots x_n (3x_1 + 2)(3x_2 + 2) \dots (3x_n + 2)}$$

formundadır.

8.Durum: $F^n(x) = (\sigma^n \circ \delta_2)(x)$ ise n -periyotlu bazı noktalar

$$\overline{x_1 x_2 \dots x_n (3x_1)(3x_2) \dots (3x_n)}$$

formundadır.

Kanıt. Tüm durumların ispatları birbirine benzer olduğundan yalnızca 2 ve 6. durumların ispatları verilecektir.

2.Durumun Kanıtı: $x = x_1 x_2 x_3 \dots \in \mathcal{B}^d$ olmak üzere

$$\begin{aligned} F^n(x) &= (\sigma^n \circ \rho_1)(x) \\ &= \sigma^n((x_1 + 1)(x_2 + 1) \dots (x_n + 1) \dots) \\ &= (x_{n+1} + 1)(x_{n+2} + 1) \dots \end{aligned}$$

olup $F^n(x) = x$ olması gerektiğinden $i = 1, 2, 3, \dots, n$ için $x_{n+i} = x_i + 3 \pmod{4}$ olur.

Ayrıca $\rho_1^2(x) = \rho_2(x)$ olduğundan

$$\begin{aligned} F^{2n}(x) &= (\sigma^{2n} \circ \rho_1^2)(x) \\ &= \sigma^{2n}((x_1 + 2)(x_2 + 2) \dots) \\ &= (x_{2n+1} + 2)(x_{2n+2} + 2) \dots \end{aligned}$$

olup $F^{2n}(x) = x$ olacağından $i = 1, 2, 3, \dots, n$ için $x_{2n+i} = x_i + 2 \pmod{4}$ olur.

Benzer olarak $\rho_1^3(x) = \rho_3(x)$ olduğundan

$$\begin{aligned} F^{3n}(x) &= (\sigma^{3n} \circ \rho_1^3)(x) \\ &= \sigma^{3n}((x_1 + 3)(x_2 + 3) \dots) \\ &= (x_{3n+1} + 3)(x_{3n+2} + 3) \dots \end{aligned}$$

olup $F^{3n}(x) = x$ olacağından $i = 1, 2, 3, \dots, n$ için $x_{3n+i} = x_i + 1 \pmod{4}$ olur.

Son olarak

$$\rho_1^4(x) = \rho_0(x)$$

olduğundan $F^{4n}(x)$ başa dönmektedir. O halde $4n$ terimden sonra ilk $4n$ 'li blok tekrar edecektir. Sonuç olarak periyodik nokta;

$$x_1 x_2 \dots x_n (x_1 + 3)(x_2 + 3) \dots (x_n + 3)(x_1 + 2)(x_2 + 2) \dots (x_n + 2)(x_1 + 1)(x_2 + 1) \dots (x_n + 1)$$

olur.

6.Durumun Kanıtı:

$x = x_1 x_2 x_3 \dots \in \mathcal{B}^d$ olmak üzere

$$\begin{aligned} F^n(x) &= (\sigma^n \circ \mu_2)(x) \\ &= \sigma^n((3x_1 + 3)(3x_2 + 3) \dots) \\ &= (3x_{n+1} + 3)(3x_{n+2} + 3) \dots \end{aligned}$$

ve $F^n(x) = x$ olduğundan $i = 1, 2, 3, \dots, n$ için $x_{n+i} = 3x_i + 3$ elde edilir.

$$\begin{aligned} F^{2n}(x) &= (\sigma^{2n} \circ \mu_2)(x) \\ &= \sigma^{2n}((3x_1 + 3)(3x_2 + 3) \dots) \\ &= (3x_{2n+1} + 3)(3x_{2n+2} + 3) \dots \end{aligned}$$

ve $F^n(x) = x$ olacağından $i = 1, 2, 3, \dots, n$ için x_{2n+i} olup başa döner.

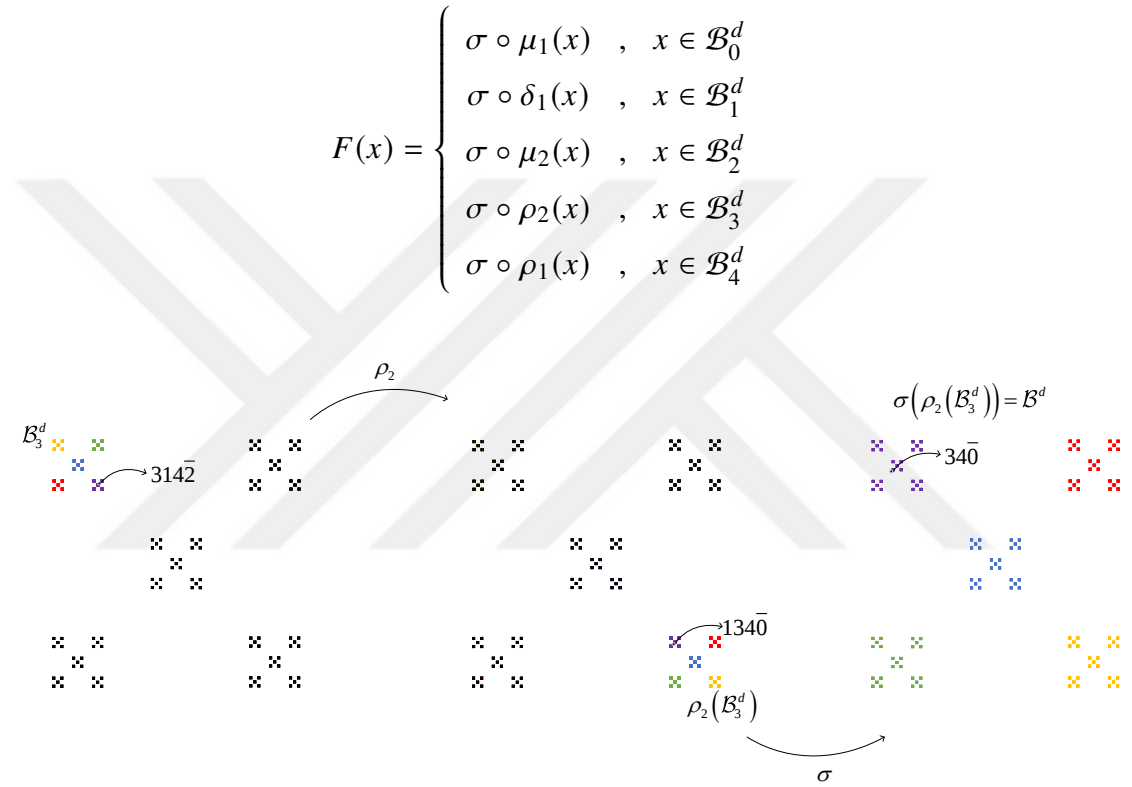
Sonuç olarak bu durum için periyodik nokta

$$\overline{x_1 x_2 \dots x_n (3x_1 + 3)(3x_2 + 3) \dots (3x_n + 3)}$$

olur.

□

Örnek 4.1.



Şekil 4.2. $F(\mathcal{B}_3^d)$ ve $F(3142\bar{2})$ görüntüleri

F fonksiyonunun sabit noktalarını bulalım. $x = x_1 x_2 \dots$ verilsin.

1.Durum: $x_1 = 0$ ise,

$$F(x) = (\sigma \circ \mu_1)(x)$$

olduğundan Önerme 4.2'den dolayı $x = \overline{01}$ için

$$F(x) = \overline{01}$$

olup $x = \overline{01}$ sabit noktadır.

2.Durum: $x_1 = 1$ ise,

$$F(x) = (\sigma \circ \delta_1)(x)$$

olduğundan Önerme 4.2'den dolayı $x = \overline{1}$ için

$$F(x) = \overline{1}$$

olup $x = \overline{1}$ sabit noktadır.

3.Durum: $x_1 = 2$ ise,

$$F(x) = (\sigma \circ \mu_2)(x)$$

olduğundan Önerme 4.2'den dolayı $x = \overline{21}$ için

$$F(x) = \overline{21}$$

olup $x = \overline{21}$ sabit noktadır.

4.Durum: $x_1 = 3$ ise,

$$F(x) = (\sigma \circ \rho_2)(x)$$

olduğundan Önerme 4.2'den dolayı $x = \overline{31}$ için

$$F(x) = \overline{31}$$

olup $x = \overline{31}$ sabit noktadır.

5.Durum: $x_1 = 4$ ise,

$$F(x) = (\sigma \circ \rho_1)(x)$$

olduğundan Önerme 4.2'den dolayı $x = \overline{4}$ için

$$F(x) = \overline{4}$$

olup $x = \overline{4}$ sabit noktadır.

Aynı yöntemle F fonksiyonunun 2 periyotlu bir noktasını bulalım.

$x = 23x_3 \dots$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} F(x) &= (\sigma \circ \mu_2)(x) \\ &= \sigma(10(3x_3 + 3)(3x_4 + 3) \dots) \\ &= 0(3x_3 + 3)(3x_4 + 3) \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F^2(x) &= (\sigma \circ \mu_1)(0(3x_3 + 3)(3x_4 + 3) \dots) \\
&= \sigma((x_3 + 2)(x_4 + 2) \dots)
\end{aligned}$$

Kısaca x 'e önce μ_2 sonra μ_1 uygulanacağından ve $\mu_1 \circ \mu_2 = \rho_2$ olduğundan

$$F^2(x) = (\sigma \circ \rho_2)(x)$$

olup Önerme 4.2'den dolayı

$$x = \overline{2301}$$

noktası 2 periyotlu nokta olur.

Teorem 4.1. Tanım 4'de verilen F fonksiyonu Devaney anlamında kaotiktir.

Kanıt. Periyodik noktaların yoğunluğu:

$\forall x \in \mathcal{B}^d$ noktasının her komşuluğunda bir periyodik nokta bulunduğunu göstermeliyiz.

Önerme 4.2'de formüle edilen periyodik noktalardan her birinin ilk n terimi x ile aynı olduğundan Önerme 3.4'den dolayı x 'in keyfi komşuluğunda bu periyodik noktaların biri bulunabilir. Bu durumda F fonksiyonunun periyodik noktaları yoğundur.

Başlangıç Şartlarına Hassas Bağımlılık:

Keyfi $x = x_1x_2x_3 \dots x_nx_{n+1}x_{n+2} \dots \in \mathcal{B}^d$ ve $B(x, \delta)$ komşuluğunu alalım. $\delta > \frac{1}{5^{n-1}}$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ seçelim.

$y = x_1x_2x_3 \dots x_{n-1}y_ny_{n+1}y_{n+2} \dots \in \mathcal{B}^d$ alalım (y 'nin ilk $n - 1$ terimi x ile aynı n . terimi farklı olsun). x 'in $\mathbb{R}^2$ 'deki karşılığı,

$$\alpha = (\alpha', \alpha'') = \left(\frac{\alpha'_1}{5} + \frac{\alpha'_2}{5^2} + \dots + \frac{\alpha'_n}{5^n} + \dots, \frac{\alpha''_1}{5} + \frac{\alpha''_2}{5^2} + \dots + \frac{\alpha''_n}{5^n} + \dots \right)$$

y 'nin $\mathbb{R}^2$ 'deki karşılığı,

$$\beta = (\beta', \beta'') = \left(\frac{\beta'_1}{5} + \frac{\beta'_2}{5^2} + \dots + \frac{\beta'_n}{5^n} + \dots, \frac{\beta''_1}{5} + \frac{\beta''_2}{5^2} + \dots + \frac{\beta''_n}{5^n} + \dots \right)$$

olsun. Böylece,

$$\begin{aligned}
d(\alpha, \beta) &= \sqrt{\left(\frac{0}{5} + \frac{0}{5^2} + \dots + \frac{\alpha'_n - \beta'_n}{5^n} + \dots\right)^2 + \left(\frac{0}{5} + \frac{0}{5^2} + \dots + \frac{\alpha''_n - \beta''_n}{5^n} + \dots\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{\alpha'_n - \beta'_n}{5^n} + \frac{\alpha'_{n+1} - \beta'_{n+1}}{5^{n+1}} \dots\right)^2 + \left(\frac{\alpha''_n - \beta''_n}{5^n} + \frac{\alpha''_{n+1} - \beta''_{n+1}}{5^{n+1}} \dots\right)^2} \\
&\leq \sqrt{\left(\frac{4}{5^n} + \frac{4}{5^{n+1}} + \dots\right)^2 + \left(\frac{4}{5^n} + \frac{4}{5^{n+1}} + \dots\right)^2} \leq \frac{1}{5^{n-1}}
\end{aligned}$$

olup $y \in B(x, \delta)$ olur.

Şimdi de $d(F^k(x), F^k(y)) > \varepsilon$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ bulalım. $k = n - 1$ seçilirse,

$$F^{n-1}(x) = x'_n x'_{n+1} x'_{n+2} \dots$$

$$F^{n-1}(y) = y'_n y'_{n+1} y'_{n+2} \dots$$

olsun. $x_n \neq y_n$ olduğundan $x'_n \neq y'_n$ olur. Buradan,

$$d(F^{n-1}(x), F^{n-1}(y)) \geq \frac{\sqrt{2}}{5}$$

olup istenilen elde edilir.

Topolojik geçişkenlik:

$\mathcal{B}^d$ 'nin keyfi boş kümeden farklı U, V açıklarını alalım. $F^n(U) \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ bulmalıyız.

$\mathcal{B}^d$ kendine benzer olduğundan U açık kümesi,

$$\mathcal{B}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^d = \{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \alpha_{n+1} \dots \mid \text{keyfi } \alpha_i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, i = 1, 2, \dots\}$$

olacak şekilde bir alt ayırık Vicsek fraktalı içerir. Buradan

$$F^n(\mathcal{B}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^d) = \{\alpha'_{n+1} \alpha'_{n+2} \dots \mid \text{keyfi } \alpha'_i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, i = n+1, n+2, \dots\}$$

olur. $\mathcal{B}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^d \subseteq U$ olup

$$\mathcal{B}^d = F^n(\mathcal{B}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^d) \subseteq F^n(U) \implies F^n(U) = \mathcal{B}^d$$

olur. Böylece $F^n(U) = \mathcal{B}^d$ olduğundan $F^n(U) \cap V \neq \emptyset$ elde edilir. $\square$

5. $\{\mathcal{B}^d, F\}$ AİLESİNDEKİ BAZI TOPOLOJİK EŞLENİK DİNAMİK SİSTEMLER

Bu bölümde ayırık Vicsek fraktalı üzerinde Bölüm 4'te tanımlanan dinamik sistem ailesindeki dönüşümlerin topolojik eşleniklikleri incelenmiştir. Bunun için önce D_4 elemanlarının birbiriyle eşlenik durumları incelenmiş daha sonra bu dönüşümler kullanılarak $\mathcal{B}^d$ üzerindeki dinamik sistemlerin topolojik denklikleri gösterilmiştir.

Yardımcı Teorem 5.1. Aşağıda belirtilen D_4 'ün elemanları h eşlenik dönüşümleri ile topolojik eşlenik dönüşümlerdir.

1. $h \in \{\delta_1, \delta_2, \rho_1\}$ olmak üzere $\mu_1 \approx_h \mu_2$
2. $h \in \{\mu_1, \mu_2\}$ olmak üzere $\rho_1 \approx_h \rho_3$
3. $h \in \{\rho_1, \mu_1, \mu_2\}$ olmak üzere $\delta_1 \approx_h \delta_2$

Kanıt. Hepsinin ispatı benzer olduğundan yalnızca 1'in ispatı verilecektir. $x = x_1 x_2 \dots$ alınsın.

$$\begin{aligned}\mu_1 \circ \delta_1(x) &= \mu_1((3x_1 + 2)(3x_2 + 2) \dots) \\ &= (x_1 + 3)(x_2 + 3) \dots\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\delta_1 \circ \mu_2(x) &= \delta_1((3x_1 + 3)(3x_2 + 3) \dots) \\ &= (x_1 + 3)(x_2 + 3) \dots\end{aligned}$$

olup $\mu_1 \approx_{\delta_1} \mu_2$ olur. İkinci olarak,

$$\begin{aligned}\mu_1 \circ \delta_2(x) &= \mu_1((3x_1)(3x_2) \dots) \\ &= (x_1 + 1)(x_2 + 1) \dots\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\delta_2 \circ \mu_2(x) &= \delta_2((3x_1 + 3)(3x_2 + 3) \dots) \\ &= (x_1 + 1)(x_2 + 1) \dots\end{aligned}$$

olup $\mu_1 \approx_{\delta_2} \mu_2$ olur. Son olarak,

$$\begin{aligned}\mu_1 \circ \rho_1(x) &= \mu_1((x_1 + 1)(x_2 + 1) \dots) \\ &= (3x_1)(3x_2) \dots\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\rho_1 \circ \mu_2(x) &= \rho_1((3x_1 + 3)(3x_2 + 3) \dots) \\ &= (3x_1)(3x_2) \dots\end{aligned}$$

olup $\mu_1 \approx_{\rho_1} \mu_2$ olur.

Not 6. $\exists x_i = 4$ olsaydı $y_i = 4$ olacağından eşitlikler bozulmayacaktı.

□

Teorem 5.1. $f_i, g_i \in \{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \mu_1, \mu_2, \delta_1, \delta_2\}$ olmak üzere,

$$f(x) = \begin{cases} f_0(x) & , x \in \mathcal{B}_0^d \\ f_1(x) & , x \in \mathcal{B}_1^d \\ f_2(x) & , x \in \mathcal{B}_2^d \\ f_3(x) & , x \in \mathcal{B}_3^d \\ f_4(x) & , x \in \mathcal{B}_4^d \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} g_0(x) & , x \in \mathcal{B}_{h(0)}^d \\ g_1(x) & , x \in \mathcal{B}_{h(1)}^d \\ g_2(x) & , x \in \mathcal{B}_{h(2)}^d \\ g_3(x) & , x \in \mathcal{B}_{h(3)}^d \\ g_4(x) & , x \in \mathcal{B}_{h(4)}^d \end{cases}$$

$\mathcal{B}^d$ üzerinde farklı fonksiyonlar olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa f ve g fonksiyonları topolojik eşleniktir.

1. $f_i \in \{\rho_0, \rho_2\}$ ise $g_i = f_i$
2. Diğer durumlarda $g_i = f_i$ veya $g_i = f_{i\sim}$

Kanıt. 1. $x \in \mathcal{B}^d$ ve $f_i = \rho_0$ olsun. Herhangi bir h için $(\rho_0 \circ h)(x) = (h \circ \rho_0)(x)$ olduğundan $(h \circ \rho_0)(x) = (h \circ g_i)(x)$ olması için $g_i = \rho_0$ olmalıdır. $f_i = \rho_2$ için de aynı durum geçerlidir.

2. $x \in \mathcal{B}^d$ ve $f_i = \rho_1$ olsun. $h = \rho_3$ alınırsa $(\rho_1 \circ \rho_3)(x) = (\rho_3 \circ \rho_1)(x)$ olduğundan $g_i = \rho_1$ olmalıdır. Aynı zamanda Yardımcı Teorem 5.1'den dolayı $h = \mu_1, \mu_2$ için $(\rho_1 \circ h) = (h \circ \rho_3)$ olacağından $g_i = \rho_3$ olmalıdır. Yani $g_i = f_{i\sim}$ olur. $f_i = \rho_3$ için de aynı şekilde gösterilebilir. Benzer şekilde,

$$\delta_1 \circ \delta_2 = \delta_2 \circ \delta_1$$

ve

$$\mu_1 \circ \mu_2 = \mu_2 \circ \mu_1$$

olduğundan $f_i \in \{\delta_1, \delta_2, \mu_1, \mu_2\}$ için aynı durum geçerli olup istenen gösterilmiş olur.

□

Sonuç. f ve g topolojik eşlenik dönüşümlerse, $F = \sigma \circ f$ ve $G = \sigma \circ g$ de aynı eşlenik dönüşüm yoluyla topolojik denk dinamik sistemlerdir.

Örnek 5.1.

$$f : \mathcal{B}^d \rightarrow \mathcal{B}^d, f(x) = \begin{cases} \mu_1(x) & , x \in \mathcal{B}_0^d \\ \rho_0(x) & , x \in \mathcal{B}_1^d \\ \delta_1(x) & , x \in \mathcal{B}_2^d \\ \mu_2(x) & , x \in \mathcal{B}_3^d \\ \delta_2(x) & , x \in \mathcal{B}_4^d \end{cases}$$

ve

$$g : \mathcal{B}^d \rightarrow \mathcal{B}^d, g(x) = \begin{cases} \mu_1(x) & , x \in \mathcal{B}_1^d \\ \rho_0(x) & , x \in \mathcal{B}_0^d \\ \delta_2(x) & , x \in \mathcal{B}_3^d \\ \mu_2(x) & , x \in \mathcal{B}_2^d \\ \delta_1(x) & , x \in \mathcal{B}_4^d \end{cases}$$

verilsin. Bu durumda $F = \sigma \circ f$ ve $G = \sigma \circ g$ dinamik sistemleri Teorem 5.1 ve önceki sonuçtan dolayı $h = \mu_1$ dönüşümü aracılığı ile topolojik denktir.

F 'nin sabit noktaları

$$\overline{01}, \overline{1}, \overline{20}, \overline{30}, \overline{4}$$

olup

$$\mu_1(\overline{01}) = \overline{10}$$

$$\mu_1(\overline{1}) = \overline{0}$$

$$\mu_1(\overline{20}) = \overline{31}$$

$$\mu_1(\overline{30}) = \overline{21}$$

$$\mu_1(\overline{4}) = \overline{4}$$

olduğundan G fonksiyonunun sabit noktaları,

$$\overline{10}, \overline{0}, \overline{31}, \overline{21}, \overline{4}$$

şeklindedir.

Örnek 5.2.

$$f : \mathcal{B}^d \rightarrow \mathcal{B}^d, f(x) = \begin{cases} \mu_1(x) & , x \in \mathcal{B}_0^d \\ \rho_0(x) & , x \in \mathcal{B}_1^d \\ \rho_1(x) & , x \in \mathcal{B}_2^d \\ \delta_1(x) & , x \in \mathcal{B}_3^d \\ \mu_2(x) & , x \in \mathcal{B}_4^d \end{cases}$$

ve

$$g : \mathcal{B}^d \rightarrow \mathcal{B}^d, g(x) = \begin{cases} \mu_2(x) & , x \in \mathcal{B}_1^d \\ \rho_0(x) & , x \in \mathcal{B}_0^d \\ \rho_3(x) & , x \in \mathcal{B}_3^d \\ \delta_2(x) & , x \in \mathcal{B}_2^d \\ \mu_1(x) & , x \in \mathcal{B}_4^d \end{cases}$$

fonksiyonları verilsin.

$$h(x) = \begin{cases} \rho_1(x) & , x \in \mathcal{B}_0^d \\ \mu_1(x) & , x \in \mathcal{B}_1^d \\ \mu_1(x) & , x \in \mathcal{B}_2^d \\ \mu_1(x) & , x \in \mathcal{B}_3^d \\ \rho_1(x) & , x \in \mathcal{B}_4^d \end{cases}$$

ve $F = \sigma \circ f, G = \sigma \circ g$ olmak üzere F ve G fonksiyonları h dönüşümü aracılığı ile topolojik denktir.

F 'nin sabit noktaları

$$\overline{01}, \overline{1}, \overline{2103}, \overline{3}, \overline{4}$$

olup

$$\rho_1(\overline{01}) = \overline{12}$$

$$\mu_1(\overline{1}) = \overline{0}$$

$$\mu_1(\overline{2103}) = \overline{3012}$$

$$\mu_1(\overline{3}) = \overline{2}$$

$$\rho_1(\overline{4}) = \overline{4}$$

olduğundan G fonksiyonunun sabit noktaları,

$$\overline{12}, \overline{0}, \overline{3012}, \overline{2}, \overline{4}$$

şeklindedir.

6. SONUÇ

Fraktal ve kaos, doğadaki karmaşıklık ve düzenin matematiksel anlamda incelenmesi için temel araçlar sunar. Bu çalışma kapsamında, ayrık Vicsek fraktalı üzerinde gerçekleştirilen dinamik sistem analizleri, fraktal geometrinin karmaşıklığı nasıl bir düzene dönüştürebileceğini göstermektedir. Fraktalların kendine benzerlik ve ölçülebilirlik özellikleri, kaotik davranışların temel dinamiklerini görsel olarak anlamamıza olanak tanımıştır.

Bu anlamda, katlama ve genişleme dönüşümleri kullanılarak oluşturulan dinamik sistemler, karmaşık yapılar üzerinde öngörülemezlik ve düzen arasındaki ilişkinin daha iyi anlaşılmasını sağlamıştır. Çalışmada, ayrık Vicsek fraktalı üzerinde tanımlanan dinamik sistemlerin Devaney anlamında kaos şartlarını sağladığı matematiksel olarak ispatlanmış ve bu sistemlerin bazıları için periyodik noktalarının formüllerine ulaşılmıştır.

Sonuç olarak, bu çalışma, fraktal geometri ve kaotik dinamikler arasındaki ilişkiyi teorik ve uygulamalı düzeyde ele alarak, ilgili alanlara bir katkı sağlamaktadır.

KAYNAKÇA

- [1] Banks, J., Brooks, J., Cairns, G., Davis, G., Stacey, P. (1992). On Devaney's Definition of Chaos. *The American Mathematical Monthly*, 99(4), 332-334.
- [2] Barnsley, M. (1988). *Fractals Everywhere*. San Diego: Academic Press.
- [3] Devaney, R.L. (1989). *An introduction to chaotic dynamical systems*. Addison Wesley Publishing Company.
- [4] Gulick, D. (1988). *Encounters with Chaos and Fractals*. Boston: Academic Press.
- [5] Kigami, J. (2001). *Analysis on Fractals*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [6] Peitgen, H.O., Jargens, H. and Saupe, D. (2004). *Chaos and fractals: new frontiers of science*. Springer.
- [7] Alligood, K.T., Sauer, T.D., Yorke, J.A. (1996). *CHAOS: An Introduction to Dynamical Systems*. Springer.
- [8] Aslan, N., Saltan, M., Demir, B. (2018). A different construction of the classical fractals via the escape time algorithm. *Journal of Abstract and Computational Mathematics*, 3(4), 1-15.
- [9] Saltan, M., Aslan, N., Demir, B. (2019). A discrete chaotic dynamical system on the Sierpinski gasket. *Turkish Journal of Mathematics*, 43(1), 361-372.
- [10] Aslan, N., Koparal, F. D., Saltan, M., Özdemir, Y. and Demir, B. (2023). A family of chaotic dynamical systems on the Cantor dust CxC . *Filomat*, 37(6), 1915-1925
- [11] Yilmaz, K., Özdemir, Y., Koparal, F.D. (2023). Construction of new chaotic dynamical systems on a 2D Cantor set. *Mathematical Communications*, 28 (2), 171-180.
- [12] Aslan, N. and Saltan, M. (2021). On the Construction of Chaotic Dynamical Systems on the Box Fractal. *Researches in Mathematics*, 29, 3-14.
- [13] Aslan, N. (2024). Dynamical analysis on the discrete pentagon fractal. *Mathematical Communications*, 29(2), 307-319.
- [14] Seyhan, Ö., Aslan, N., Saltan, M. (2024). Dynamical analysis of some special shift maps on discrete Sierpinski triangle. *Chaos, Solitons & Fractals*, 178, 114382.
- [15] Munkres, J.R.(1975). *Topology*. ABD: Prentice Hall.

ÖZGEÇMİŞ

ORCID ID : 0009-0007-2310-1604

Adı-Soyadı : Nurcan ARI

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Geçmişi

-
- 2015–2021: Anadolu Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Lisans
 - 2022–2025: Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Topoloji Bilim Dalı, Yüksek Lisans