

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AYRIK Z-SAYILARI

MATEMATİK BÖLÜMÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZEYNEP POLAT
AĞUSTOS 2017

AĞUSTOS 2017

Yüksek Lisans - Matematik Bölümü

ZEYNEP POLAT

Ayrık Z-Sayıları

Gaziantep Üniversitesi

Matematik Bölümü

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Doç. Dr. Necati OLGUN

Zeynep POLAT

Ağustos 2017

© 2017 [Zeynep POLAT]



©2017 [Zeynep POLAT]

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tezin Adı: Ayrık Z-Sayıları

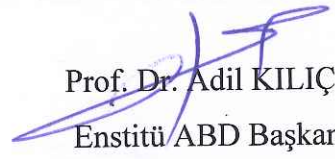
Öğrencinin, Adı Soyadı: Zeynep POLAT

Tez Savunma Tarihi: 03.08.2017

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı


Prof. Dr. A. Necmeddin YAZICI
FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.


Prof. Dr. Adil KILIÇ
Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımda okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.


Doç. Dr. Necati OLGUN
Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:

Prof. Dr. İsmet Yıldız

Doç. Dr. Memet ŞAHİN

Doç. Dr. Necati Olgun

İmzası


İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

Zeynep POLAT

ÖZET

Ayrık Z-Sayıları

POLAT, Zeynep

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi: Doç. Dr. Necati Olgun

Ağustos 2017

65 sayfa

Bu tezde, Z-sayılarının genişletme prensibi ile tanımlanan toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerini kullanılarak cebirsel özellikleri araştırılacaktır. Bir Z-sayısı kavramı bilginin güvenilirliği ile ilgilidir.

Öncelikle, Z sayılarının tanımını veriyoruz. Bir Z-sayısı, $Z = (A, B)$ iki bileşene sahiptir, ilk bileşeni A, gerçek değerli bir belirsiz değişkene (X) izin verilen değerler üzerinde kısıtlama (sınırlama) dır. Z-sayısının bileşeninin ikinci bileşeni, birinci bileşenin güvenilirliğini (kesinlik) ölçer. Z-sayısı kavramı, özellikle de gözetim analizi, risk değerlendirmesi ve ekonomi gibi birçok uygulama için potansiyel taşır. Bir kısıtlama kavramı, ancak bir kısıtlama değildir. Bir kısıtlama genel bir kısıt olarak görülebilir.

İkincisi, tesadüfi değişkenler üzerindeki belirsiz sayılar ve işlemlerin genelleme seviyesini veriyoruz.

Anahtar Kelimeler: Z-sayıları, fuzzy sayıları, belirsiz sayılar.

ABSTRACT

Discrete Z-Numbers

POLAT, Zeynep

M. Sc. Thesis, Math Department

Adsiver: Doç. Dr. Necati Olgun

August 2017

65 page

In this thesis, we discuss algebraic properties of Z-numbers under the four arithmetic operations, namely addition, subtraction, multiplication and division which are defined by the extension principle. The concept of a Z-number relates to the issue of reliability of information.

Firstly, we give definition of the Z-numbers. A Z-number, $Z = (A, B)$ has two components, the first component A is restriction (constraint) on the values which a real valued uncertain variable, X , is allowed to take. The second component of a Z-number measure of reliability (certainty) of the first component. The concept of a Z-number has a potential for many applications, especially decision analysis, risk assesment and economics. The concept of a restriction but is not a constraint. A restriction may be viewed as a generalized constraint.

Secondly, we give generalization level of uncertain numbers and operations on random variables.

Key Words: Z-numbers, fuzzy numbers, uncertain numbers.



Çok kıymetli anneme...

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan, danışman hocam, Sayın Doç. Dr. Necati OLGUN' a ve bu tezin oluşumunda ve yazılımında bana yardımcı olan bilgilerini benimle paylaşan, benden desteğini esirgemeyen annem Emine POLAT' a, kardeşim Mahmut POLAT' a, manevi kardeşim Ayşe KARAGENÇ' e ve bugünlere gelmemde en büyük destekçim olan maddi manevi her konuda arkamda olan ve beni destekleyen aileme sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	v
ABSTRACT	vi
TEŞEKKÜR.....	viii
İÇİNDEKİLER.....	ix
SEMBOLLER DİZİNİ.....	xi
1.BÖLÜM.....	1
GİRİŞ.....	1
2.BÖLÜM.....	3
2. Z-Sayıları Ve Kısıtlanışın Genel Kavramları.....	3
2.1. Z-Kısıtlaması	3
2.2. Kısıtlama Kavramı.....	5
2.2.1. Kısıtlamaların Hesaplanması	9
2.3. Doğruluk ve Anlam	11
2.3.1 X, R ve p ' nin Doğruluğu	13
2.4. Kesinlik.....	16
3.BÖLÜM	16
3. Z-SAYILARININ TEMEL ÖZELLİKLERİ VE TANIMLARI	18
3.1. Belirsiz Sayıların Genelleme Seviyeleri.....	18
3.2. Kesinlik Derecesi Küme Değerleri Sayıların ve Reel Aralıkların Durumları	19
3.4. Aritmetik Aralık	21
3.5. Rastgele Değişkenler Üzerine İşlemler	23
3.6. Rastgele Değişkenler ve Olasılık Dağılımları.....	24
3.7. Fuzzy Aritmetiği:.....	35
3.8. Tip-1 in Özellikleri.....	36
3.9. Tip-1 Bulanık Kümelerin Temsil ve Yapıları.....	39
3.10. Z Sayıları Aritmetiği Teori ve Uygulama	41
3.11. Devamlı Bulanık Sayılardaki İşlemler.....	42
3.12. Ayırık Fuzzy Sayıları Üzerinde Aritmetik İşlemler	47

3.13. Sürekli Z- sayıları, Özellikleri	55
3.14. Pozitif Z-Sayıları.....	57
3.15. Ayrık Z – Sayıları ve Özellikleri.....	60



SEMBOLLER DİZİNİ

$CF(p)$	F nin kanonikal formu
μ	Üyelik fonksiyonu
nt	Genel sayısal doğruluk değeri
lt	Genel dilbilimsel doğruluk değeri
TP	Doğruluk önermesi
$Poss$	Olabilirlik dağılımı
X^*	X in tahmini
RCT	Merkezi kısıtlama teorisi
$Tr(p \mid ED)$	p nin gerçek dağılımı
$\left[\underline{x}, \bar{x} \right]$	x değeri için kesin olmayan aralık
$supp(A)$	A nin dayanağı
MP	Anlam varsayımı
TP	Doğruluk varsayımı

1.BÖLÜM

GENEL BİLGİLER

GİRİŞ

Fiziksel sistemleri matematiksel olarak modellerken, transfer fonksiyonlarını çıkarırken, sistemlerin doğrusal ve zamanla değişmeyen sistemler olduğunu kabul ederiz. Oysa doğada doğrusal sistem pek yoktur. Bu kabullenmeyi belirli çalışma bölgeleri etrafında kabul edebiliriz. Bunların dışında matematiksel modelinin çıkarılması oldukça karışık hatta imkansız çok sayıda matematiksel işlemler kabullenmeler gerektirir. Bir insanın zihnindeki düşünce dünyasının bile tomografisi çekilecek olursa, bunun çok renkli değişik hatta karmaşık motiflere sahip olduğu çok belirgin olmayan desenler içerdiği görülür. İşte bu belirsizliği, bulanıklık (fuzzy) diye tanımlamak mümkündür. Bulanık Mantık diğer adıyla “Fuzzy Logic” kuramı ilk kez 1965 yılında L. Zadeh tarafından ortaya atılmıştır. Kümeler teorisinde bir eleman ya bir kümeye aittir yada değildir. Fakat bulanık kümelerde bir eleman birden fazla kümeye ait olabilmektedir. Bulanık kümelerde kesinlik kavramı yoktur. Bulanık mantık (Fuzzy) karar verme mekanizması olarak ta tanımlanabilecek sözel ifadelerin bir uzman kişi tarafından belirtilen kesin olmayan sınırlar içindeki davranışını matematiksel olarak modellemeye yarar. Modelleme kesin olmayan bulanık kümelerden oluştuğundan Bulanık ya da Fuzzy olarak ifade edilir. Bu ismi kişisel ya da uzman kişinin kesin çizgilerle ifade edemediği ancak bölgesel olarak yaklaşık sınırlarının belli olduğu durumlarda anlamlı sonuçlar vermektedir. Bulanık mantık, hesaplama tekniği bu tür sorunları büyük ölçüde çözebilmektedir. Bu nedenle bilinen geleneksel hesaplama yöntemlerine alternatif olarak ortaya çıkan bu yöntem, doğadaki işleyişi taklit ederek çözüme ulaşır. Bulanık mantık kavramı iki temel öğeden oluşur.

- Bulanık kümeler ve bu kümeleri kullanarak bir dizi kural oluşturma

- Karar verme süreci.

Bulanık mantık kuramının uygulamaları, günümüzün karmaşık problemlerinin çözümünde kullanışlı bir araç haline gelmiştir. İlk ortaya atıldığı tarihten bu yana matematikçiler, bilim adamları ve mühendisler tarafından birbirinden bağımsız pek çok çalışmaya konu olmuştur.

Bu tezin bu bölümünde [1-4,6,7], 2.bölümünde [5,6], [8], 3.bölümünde ise [1,2], [5], [8] referanslarından yararlanılmıştır.

2.BÖLÜM

2. Z-Sayıları Ve Kısıtlanışın Genel Kavramları

2.1.Z-Kısıtlaması

Doğruluk ve anlam kavramları mantık, bilgi analizi ve ilgili alanların en önemli kavramlarındandır. Merkezi kısıtlama teorisi RCT (restriction-centered theory) olarak adlandırılır.

Doğruluk ve anlamın geleneksel teorisi büyük ölçüde iki değerli mantığa dayalıdır. RCT Fuzzy mantık temellidir. Bulanık mantığın üzerinde duran RCT, günlük dille ifade edilebilir. Klasik gerçeklikte biçimselleştirme elverişli değildir. Bunun büyük nedeni doğruluk ve anlamının geleneksel teoriler tarafından kaçınılan bir bölge olmasıdır.

RCT de doğruluk değerleri doğal dille tanımlanabilir. Örneğin; oldukça doğru, çok doğru, nerdeyse doğru, muhtemelen doğru, doğru olabilir, genellikle doğru vb. Dilsel anlamda doğruluk değerleri geleneksel mantık sistemlerinde kabul edilmez.

RCT nin merkezi aralık kavramının geliştirilmişidir. Aralık kavramı kısıtlama kavramından daha geniş bir küme, Fuzzy tartışması olarak ortaya çıkar. $R \text{ } X$, X değişkeni üzerinde bir kısıtlama olsun.

Örneğin; Mahmut Gaziantep' de bir otelde kalıyor. Resepsyoniste 'Gaziantep Havaalanına gitmem ne kadar sürer?'. Olası cevaplar; 1 saat, 1 saat 15 dakika, 1 saate yakın, genellikle 1 saate yakın vs. Bu cevapların her birinin kısıtlanışı sürüş süresi değişkenine bağlıdır. Bir başka örnek;

P : Çoğu İzmirli uzun boyludur. P nin doğruluk değerleri nedir

Olası cevaplar; doğru, %80 doğru , %80' e yakın, büyük olasılıkla doğru, doğru olabilir vs.

RCT de kısıtlamalar ağırlıklı olarak doğal bir dile çekilen önermeler olarak tanımlanır. Normal dile çekilen bir Fuzzy önermesi, yani Fuzzy doğruluklarını içeren bir önerme tipik olarak uzun, şişman, ağır vs. Fuzzy nicelikleri; çoğu, çok, çok daha fazla vs. Fuzzy olasılıkları; olası, olası olmayan vs. şeklindedir. Sıfırıncı dereceden bir fuzzy önermesi fuzzy nicelik ve/veya fuzzy olasılıklarını içermez. Birinci dereceden bir fuzzy önermesi fuzzy nicelikleri fuzzy nicelikleri ve/veya fuzzy doğrulukları ve/veya fuzzy olasılıklarını içerir. İstisnai durumlar dışında doğal dilde buna dikkat etmek önemlidir. Doğruluk ve anlamın geleneksel dilde fuzzy önermeleriyle hesaplamalarının anlamı yoktur.

Temel olarak, $P(X)$ hangi X değerleri için bir kısıtlama olarak görülebilir buna bakacağız. Örneğin;

$X=5$; 3 ve 7 arasında; X küçüktür, X normal dağılıma sahiptir ortalaması m ve varyansı σ^2 dir, bu durumda X in küçük olması olasıdır.

Adana' da yazlar genellikle sıcaktır. (X kesindir.)

Mahmut çoğu arkadaşından uzundur. (X kesindir.)

Gösterim olarak RCT nin altında yatan iki fikre dikkat çekmek yararlı olacaktır. İlk fikir, MP(meaning postulate) olarak ifade edilen birinci anlam varsayımına sevk eder. Burada MP, doğal bir dile çekilebilen bir önermeyi temsil eder. Bir kısıtlama olarak ifade edilen p ,

$$p \rightarrow X \equiv_r R .$$

Burada X kısıtlanan değişken, R kısıtlama ilişkisi ve r , R nin X i kısıtlayan yolu tanımlayan indeks değişkenidir. R , X i kısıtlar biçiminde ifade edilir. X bir n -li değişken olabilir ve R de bir n -li ilişki olabilir. Genellikle, X ve R , p yi örter. Temel olarak X , p de kısıtlanan değerdir. X odak değişken olarak adlandırılır. X in seçimi büyük ölçüde öznedir. P nin sınırlandırıldığı değişken veya değişkenler kişinin algısını yansıtır ancak genellikle bir fikir birliği yoktur. P anlam bilimin ağ gösterimi n -li odak değişken ve n -li ilişkinin incelenmesi gerekebildiği unutulmamalıdır. Okun sağ tarafındaki ifade p nin kanonikal formu olan $CF(p)$ ifade eder. $CF(p)$,

genelleştirilmiş devir ifadesi olarak yorumlanabilir. Burada devir ifadesi olan devreden X genelleştirilmiş anlamda X in bir değeri değildir ama bir kısıtlamada X in alacağı değerler üzerinde bir kısıtlamadır. P nin bir kısıtlama olarak temsili için bir matematiksel iyi tanımlanmış p formuna ihtiyacımız vardır.

İkinci anahtar fikir ise TP (truth postulate) olarak ifade edilen doğruluk varsayımıdır. Tahminen X in derecesi R nin derecesine eşittir. Buradaki derece nümerik ya da dilsel olabilir. Sonuç olarak görüldüğü gibi RCT de p nin doğruluk değeri p nin anlamının tahminin bir yan sonucudur.

Aşağıdaki gösterimi basitleştirmek için, bazı durumlarda değişken adı ve örneği arasında hiçbir ayrım yapılmaz. Buna ek olarak, bazı durumlarda p nin bir anlamı ve bir önerme arasında bir ayrım yapılır.

2.2. Kısıtlama Kavramı

X değişkeni üzerindeki bir $R(X)$ kısıtlaması X hakkında bilgi verir. Daha somut olarak

$$CF R X : X \equiv_r R$$

$CF R X$, $R(X)$ de bir kanonikal form ifade edebilir.

Eğer R ve r matematiksel olarak iyi tanımlanmış ve X bir tahmin ise $R(X)$ bir kısıtlamadır. Tahminler RCT de çok önemli rol oynar. Kısıtlamaların tahmini kısıtlamaları hesaplamada bir ön koşuldur. Aşağıda, kısıtlamalarla hesaplamayı içeren basit bir probleme örnek verilmiştir.

Mahmut genellikle işi saat 5 de bırakıyor.

Mahmut' un işten eve gitmesi genellikle yaklaşık 1 saat sürüyor.

Mahmut ne zaman eve gider?

İnsanlar bu tür günlük problemleri çözebilmek için olağanüstü kabiliyetleri olan akli kullanırlar. RCT nin önemli katkılarından biri de doğal dille ifade edilen problemlerin çözümlerinin inşasına imkan sağlamasıdır.

Kısıtlamaların birçok türü vardır. Eğer bir kısıtlama tekil ise R de tekil bir değerdir. Örneğin; $X = 5$. Tekil olmayan bir kısıtlama ise R de tekil değildir. Tekil olmamak dolaylı olarak belirsizliği belirtir. Bir kısıtlamada X kısıtlanan değişken ise o

kısıtlama dolaysızdır. Bir kısıtlama kısıtlanan değer $f(X)$ formunda ise o kısıtlama dolaylıdır. Örneğin;

$$R(p) = \int_a^b \mu(u) p(u) du$$

Muhtemelen p de dolaylı bir kısıtlamadır.

Kısıtlamaların ana türleri; olası kısıtlamalar, olasılıklı kısıtlamalar ve Z-kısıtlamalarıdır.

Olası kısıtlamalar ($r =$ açıktır)

$$R X : X \equiv A.$$

Burada A, X uzayında bir fuzzy küme, μ_A üyelik fonksiyonudur. A, X in olasılık dağılımında rol oynar.

$$P(X = u) = \mu_A(u).$$

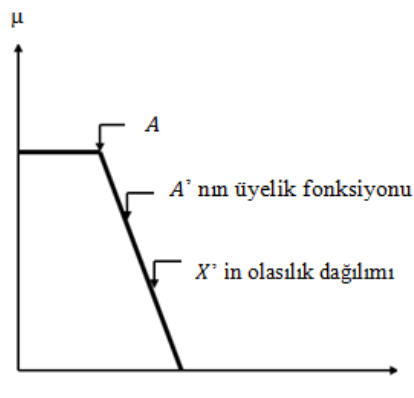
Örnek 2.1. X küçüktür.

↑

↑

kısıtlı değişken kısıtlayan ilişki (fuzzy kümesi).

X in olasılık dağılımında fuzzy kümesi küçük bir rol oynar. (Şekil 2.1.)



Şekil 2.1. X in olasılıklı kısıtlaması

Örnek 2.2. Mahmut, Ahmet' den uzundur.

(Boy (Mahmut) , Boy (Ahmet)) uzundur.

↑ ↑

kısıtlı değişken kısıtlayan ilişki (fuzzy ilişkisi)

(Boy (Mahmut) , Boy (Ahmet))' nin olasılık dağılımı fuzzy ilişkisinden daha büyüktür.

Olasılıklı kısıtlama ($r = p$)

$$R(X) : X \equiv_p p$$

burada p , X nin olasılık yoğunluk fonksiyonudur,

$$P(u \leq X \leq u + du) = p(u) du.$$

Örnek 2.3. $X \equiv_p \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(X-m)^2}{2\sigma^2}\right)$.

↑ ↑

kısıtlı değişken kısıtlama ilişkisi (olasılık yoğunluk fonksiyonu).

Z-kısıtlama ($r = z$)

Bir Z-kısıtlama olarak ifade edilen

$$R(X) : X \equiv Z.$$

Burada Z olası ve olasılıklı kısıtlanışların bir kombinasyonu olarak tanımlanır.

$$Z : P(X \equiv A) \equiv B.$$

Burada A ve B sayıları fuzzy sayılardır. Genellikle, A ve B doğal bir dile çekilebilen sayılardır. (A, B) ye Z -sayılarında sıralı ikili diyeceğiz. Birinci bileşen A , X in bir olasılıklı kısıtlanışdır. İkinci bileşen B ise $X \in A$ kesinliğinin olasılıklı kısıtlanışdır. X gerçek değerli rastgele değişkendir. Z -aralığının birinci bileşeni bir fuzzy aralığı olan Z -sayılardır.

Örnek 2.4. Termometre genellikle düşük derecedir. Termometre $\equiv$ (düşük derecelilik; genellikle)

$$X \equiv A$$

olduğunda genellikle, A bir Z-kısıtlaması olduğunda bir fuzzy sayıdır.

Bir Z-değerlemesinde A sıralı üçlü olarak (X, A, B) formundadır ve (A, B) bir Z-sayıdır. Bir Z-değerlemesi olan (X, A, B) , X üzerinde bir Z-kısıtlamasına eşdeğerdir.

$$X, A, B \rightarrow X \equiv (A, B).$$

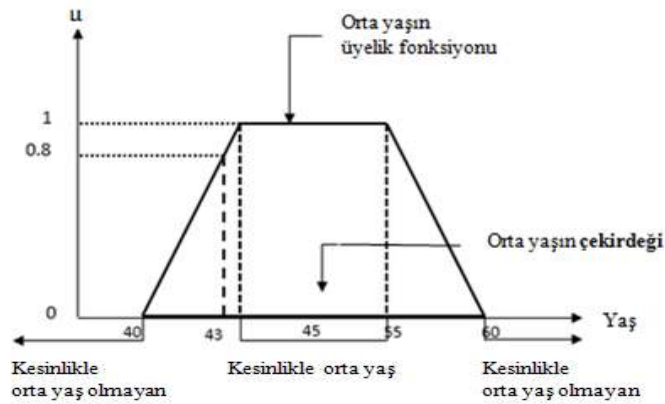
Örnek 2.5. (Yaş(Mahmut), genç, büyük ihtimalle)

(Trafik, yoğun, genellikle)

Doğal bir dil kısıtlanışların bir sistemi olarak görülebilir. Doğal dillerde kısıtlanışlar genel olarak olasılıklıdır.

Bu sebeplerden dolayı bu paragrafta dikkatimizi olasılıklı kısıtlamaların üzerinde yoğunlaştıracğız. Kolaylık olsun diye olasılıklı kısıtlamaların grafiklerinin yamuk olduğunu varsayacağız.

Örnek 2.6. Şekil (2.2) fuzzy sayılarıyla alakalı olasılıklı ikizkenar kısıtlamasında orta yaşın yerini ayarlar.



Not: Parametreler bağımlı ifadelerdir.

Şekil 2.2. Yaş üzerinde yamuksal olasılıklı kısıtlanış

2.2.1. Kısıtlamaların Hesaplanması

Kısıtlamaların hesaplanmasında RCT nin rolü büyüktür. Kısıtlamaların hesaplanması büyük ölçüde genişleme prensibini içerir. Genişletme prensibinin kısa bir gösterimi aşağıdaki gibidir. Genişletme prensibi çözüm için tek metot değildir. Uzatma metodu sayısal nesnelerin çeşitli sınırlama tiplerindeki sayısal kurallar topluluğudur. Daha da somut olarak $Y = f(X)$; Y , X nin bir fonksiyonu olsun, burada X , bir n -li değişkeni olabilir. Burada X hakkında çok fazla bilgiye sahip olmadığımızı varsayalım. $R(X)$ in X üzerinde bir kısıtlama olduğunu biliyoruz. $R(X)$, X üzerinde bir kısıtlama $R(Y)$ ise Y üzerinde bir kısıtlama olsun. $R(Y)$ den $R(X)$ e verilen bir ifadenin hesaplanması genişletme prensibi ile ilgilidir. Daha sonrasında genişletme prensibinin yalnızca iki temel halini düşüneceğiz. En basit hali dolaysız ve olasılıklı bir kısıtlamadır. Bu bir varyasyonel problemin çözümü yani $R(Y)$ nin genişleme prensibinde genişletildiği halidir.

$$Y = f(X)$$

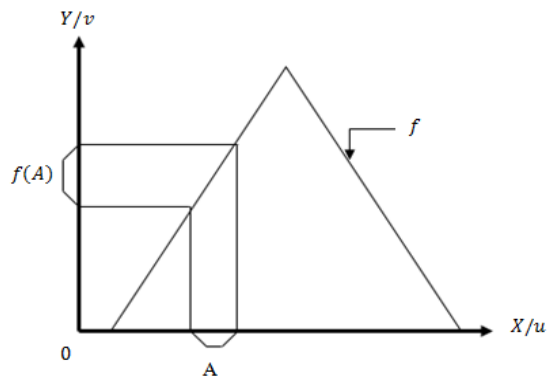
$$R(X) : X \equiv A$$

$$R(Y) : \mu_Y(v) = \sup(\mu_A(u))$$

Buradan

$$v = f(u).$$

Burada $\mu_A = \mu_Y$ ise A ile Y nin üyelik fonksiyonudur. Burada f , A nın f alanındaki görüntüsüdür. Şekil (3.3) de basit bir örneği verilmiştir.



Şekil (2.3) temel genişletme prensibinin olasılık halidir. $f(n)$, A 'nın A alanındaki görüntüsüdür. $f(A)$ nin görünümü bir yamuk şeklindedir.

$$\begin{aligned} Y &= f(X) \\ R(Y) : Y &\equiv B \\ R(X) : \mu_A(u) &= (\mu_B(f(u))) \end{aligned}$$

A, B nin f altındaki görüntüsüdür. Bu temel olasılıklı genişletme prensibinin ters halidir. Biraz daha genel olarak $R : X$ in olasılıklı ve dolaylı olmasıdır.

$$\begin{aligned} Y &= f(X) \\ R(X) : g(X) &\equiv A \\ R(Y) : \mu_Y(v) &= \sup_u (\mu_A(g(u))) \end{aligned}$$

için

$$v = f(g(u))$$

dur.

Örnek 2.7. Verilen; p : çoğu İzmirli uzundur.

Soru ; q : İzmirlilerin ortalama uzunluğu nedir?

İlk adım, p ve q nun tahminini içerir. Bu amaç için, yükseklik yoğunluk fonksiyonu olan h yi kullanacağız.

$h(u)du$ İzmirlilerin uzunluğu kesri $[u, u + du]$ aralığından bulunur

$h_{\min}$ ve $h_{\max}$ sırasıyla minimum ve maksimum uzunluklardır.

Yükseklik yoğunluk fonksiyonunun şartları p ve q nun tahminleri p^* ve q^*

$$\begin{aligned} q^* : h &= \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} u h(u), \\ p^* : \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} \mu_{tall}(u) h(u) du \end{aligned}$$

olarak ifade edilir.

Burada μ_{tall} uzunluğunun üyelik fonksiyonudur. Varyasyonel problemi indirgenmiş çözümünde temel olarak genişletme prensibinin genişletilmiş hali vardır,

$$\mu_h(v) = \sup_h \mu_{most} \left(\int_{h_{\min}}^{h_{\max}} \mu_{tall}(u) h(u) du \right)$$

ifadesinin hesaplanması dolaylı olarak uygulanır. Burada μ_{most} , en büyük uzunluğun üyelik fonksiyonudur.

Tabi,

$$v = \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} u h(u)$$

ve

$$\int_{h_{\min}}^{h_{\max}} h(u) du = 1$$

dir.

2.3. Doğruluk ve Anlam

Doğruluk kavramı ve anlam kavramı arasında bir ilişki vardır. Yani bir önermenin doğruluk değeri p yi değerlendirmek için p nin anlamını anlamak gereklidir. Ancak p nin anlamını anlamak yeterli değildir. p nin anlam tahmininin matematiksel olarak iyi tanımlanmış bir formda p temsilini içerir ve kendi hesaplamasını verir. RCT de doğruluk kavramının formülizasyonu anlam kavramının formülleşmesinin bir yan ürünüdür. Aksi belirtilmedikçe aşağıda p doğal dille çekilmiş bir önerme kabul edilir. Tipik olarak fuzzy önermeleri doğal dile çekilebilen önermelerdir.

RCT nin başlangıç noktası iki anahtar fikirden oluşur. Bunlar MP, anlam varsayımı ve TP doğruluk varsayımıdır. Daha fazlası bilgilerin taşıyıcısı olan bir önermedir. Bilgiler birer kısıtlanıştır. Bu tahmin anlamıdır ya da sadece p nin bu bir kısıtlanış temsil ediyor olabilir. Sembollerde p ,

$$p \rightarrow X \equiv_r R$$

olarak ifade edilebilir ifade edebilir. Burada X , R ve r , p de kapalıdır. $CF(p)$, $X \equiv R p$ nin kanonikal formunu ifade eder. Genel olarak, Xn -li değişkenli ve R de X in bir fonksiyonudur. Temelde, X bir değişken öyle ki p , X in bilgilerinin

bir taşıyıcısıdır. X , p nin bir odak değişkeninden bahseder. Büyük ölçüde X in öznel bir seçimidir.

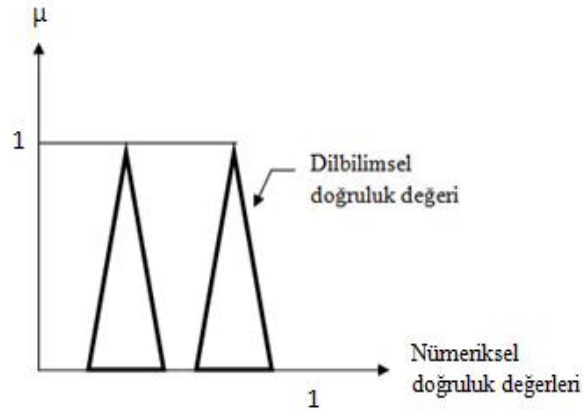
Örnek 2.8. p : Mahmut gençtir.

Yaşı (Mahmut)	genç
$\uparrow$	$\uparrow$
X	R

Doğruluk önermesi, TP, p nin doğruluk değerinin anlamıyla ilişkilidir. Daha somut olarak, kanonikal form olan

$CF(p): X \equiv R$, TP değerini karşılamaktadır. X in R nin bir derecesi olduğu varsaymaktadır.

RCT de doğruluk değerleri hiyerarşinin (alt ve üst arasındaki doğruluk değerleri) bir formudur: birinci dereceden (en alt seviye), ikinci dereceden, vs. Birinci dereceden gerçel değerler sayısal, basitçe, sayısal doğruluk değerleri aralığında olduğu varsayılır. (şekil 3.5)



Şekil 2.4. Gerçek değerlerin hiyerarşisi, sayısal gerçeklik değeri birinci dereceden n doğru değeridir. Dilbilimsel gerçeklik değeri ise ikinci dereceden doğru değeridir. Dilsel doğruluk değeri, sayısal doğruluk değeri üzerinde kısıtlayıcıdır. Tipik olarak, dilsel doğruluk değeri bulanık küme ya da eşdeğer bir olasılık dağılımıdır.

Genel sayısal doğruluk değerini nt olarak ifade edilir. İkinci dereceden doğruluk değeri dilbilimseldi.

Örneğin; pek doğru, muhtemelen doğru lt genel dilbilimsel doğruluk değeri olarak ifade edilmektedir. RCT de, dilsel doğruluk değerleri sayısal doğruluk değerlerine üzerindeki kısıtlamalar olarak görülmektedir. Sembol olarak, $lt = R(nt).t$ genel doğruluk değeri olarak gösterilir. t , nt ya da lt olabilir.

2.3.1 X, R ve p ' nin Doğruluğu

Tipik olarak, X ve R doğal dilde tanımlanmış. Hangi X değerinin R yi tanımladığını hesaplamak için X ve R nin doğruluğu gerekir. RCT de, ED bu amaç için kullanılan açıklayıcı bir veri tabanı kavramıdır. Gayri resmi olarak ED kesin x ve R bilgilerini temsil eden ilişki koleksiyonu ya da alternatif olarak p nin doğruluk değerini hesaplar.

Örnek olarak önermeleri düşünün,

p : Çoğu İzmirli uzun boyludur. Bu bağlamda üç ilişki oluşur. Uzun boylu [yükseklik; μ] ve Nüfus[İsim, yükseklik]. Uzun boylu, μ üyeler arasındaki boy uzunluğu derecesi. Çoğu, μ üyeler arasındaki önerme derecesi (aralıktan bir nokta). Nüfusta, yükseklik isimdeki yüksekliktir, aynı bölgede olan İzmirli. Eşdeğer ve çok kolay olarak, ED üyelerin uzunluk fonksiyonlarından oluşabilir, μ_{tall} , üyelerin önermesinden, μ_{most} , ve yükseklik yoğunluğu fonksiyonu, $h(u)du$, yükseklik aralığında olan İzmirli kısım olarak tanımlanmaktadır.

X ve R nin kesinliği ED fonksiyonu tarafından açıklanır. X, R nin ve p nin doğruluğu sırasıyla X^*, R^* ve p^* şeklinde açıklanır. Böylece

$$X^* = f(ED), \quad R^* = g(ED)$$

Kesin kanonikal form, $CF^*(p)$, λ^* is r^*R^* olarak açıklanır. Bu noktada, p nin sayısal doğruluk değeri, nt_p , x^* in hangi deresinin R^* yi sağladığını bulabiliriz. Sembolik olarak

$$nt_p = tr(ED),$$

tr değeri için doğruluk fonksiyonuna gider.

Bu denklemin anlamı, ED örnekleme nt , değerine etki eder. Değişen ED örnekleme p nin gerçek dağıtımıdır buda $Tr(p | ED)$ olarak açıklanır. p nin gerçek

dağılımı verilen ED olasılıkları dağılımı ile yorumlanır, bu da $\text{Poss}(\text{ED} \mid p)$ ile açıklanır. Böylece önemli bir denkleme ulaşırız.

$$\text{Tr}(p \mid \text{ED}) = \text{Poss}(\text{ED} \mid p)$$

RCT de, p nin kesinlik anlamı üç eşdeğer form ile açıklanır. Birincisi kesin kanonikal form CF^* ikincisi p nin gerçek dağılımı, $\text{Tr}(p \mid \text{ED})$. Üçüncüsü olabilirlik dağılımı $\text{Poss}(\text{ED} \mid p)$. Bu kavramlar p nin doğruluk anlamıda esas rolü oynar. p nin kesinlik anlamı, p nin hesaplı anlamı olarak görülebilir. Yukarıda belirtilen üç eş değer tanımlar, bu tanım ED nin olasılık dağılımlarını hesaplamak için en uygun yolu içerir.

Örnek2.9.Aşağıdaki önermeyi ele alalım.

p : Mahmut uzun boyludur. Bu bağlamda, ED yükseklikten (Mahmut' un boyu) ve uzunluktan [yükseklik: μ] oluşur ya da eşdeğer, üyeler fonksiyonundan oluşur μ_{tall} .

Şu veriler

X =yükseklik(Mahmut' un), R =uzunluk

Kanonikal formda okuyalım

Yükseklik(Mahmut) uzun boylu

X in kesinlik ve R 'nin açıklaması

$X^*=\text{yükseklik}=(\text{Mahmut}), R^*=\text{Uzun boylu}$

Uzun boylu bulanık kümesi üyelik fonksiyonu , $\mu_{tall}(\text{uzun})$

Kesinlik kurallı okuma;

Yükseklik(Mahmut), uzundur

Bu bağlamda not alalım, kesinliğin ve belirsizliğin kanonik formları aynıdır. Doğru dağılım açıklaması”

$$nt_p = \mu_{tall}(h),$$

olarak verilir.

Mahmut' un (uzunluğunun) genel h değeri;

Basit eşitlikten okuyalım.

$$\text{Tr}(p \mid h) = \text{Poss}(h \mid p).$$

Daha ayrıntılı olarak, eğer $h=(175)$ cm ve $\mu_{tall} = 0,9$ böylece $0,9$ p nin gerçek değeri $h = 175$ cm ve p nin olabilirliği $h = 175$ cm dir.

$0,9 =$ Mahmut uzundur önermesinin doğruluk değeri, Mahmut' un yüksekliğinin 175 cm olduğunu verir.

$0,9 =$ Mahmut' un yüksekliğinin 175 cm olma olasılığı, Mahmut' un uzun boylu olduğunu verir.

Örneğin; Mahmut yakışıklıdır. Bu durumda, örnek bir erkek popülasyonunun elimizde olduğunu varsayalım, $\text{İsim}_1, \dots, \text{İsim}_n$, μ_i yakışıklılık fuzzy kümesindeki İsim_i nin üyelik derecesi olsun. p nin anlamı, bulanık küme ile olasılık dağılımı yakışıklılık ile ayarlanır. p tarafından indüklenen olasılık dağılımıdır. İsim_i yakışıklı olabilirliği,

İsim_1 in üyelik derecesine eşittir.

Örneğin; Çoğu İzmirli uzundur, önermesini düşünelim. Bu durumda $X =$ önerme(uzun İzmirli/İzmirliler) ve $R = \text{Çoğu}$. p nin konikal formu

Önerme (uzun İzmirli/izmirliler) çoğudur.

X ve R nin tahminleri şu şekilde açıklanabilir.

$$X^* = \int_{h \min}^{h \max} h(u) \mu_{tall}(u) du$$
$$R^* = \text{çoğu}$$

Çoğu önermesi, μ_{most} , üyelik ilişkisi fonksiyonunda bulanık kümedir.

Tahmini kanonikal form

$$CF^*(p) = \int_{hm \min}^{h \max} h(u) \mu_{tall}(u) du$$

böyledir.

Doğruluk dağılımı, $Tr(p \mid ED)$, hesaplama derecesiyle açıklanır, nt_p , sırasıyla uygun X^*, R^* ye

$$n_{tp} = N_{most} \left(\int_{h_{min}}^{h_{max}} h(u) \mu_{tall} du \right)$$

şeklindedir.

ED nin sayısal doğruluk değerine olan örneklemelerini nt_p olarak ifade edelim.

Örneğin; p : Mahmut birçok arkadaşından daha uzundur, önermesini düşünelim. Bu durumda X =Mahmut' un arkadaşlarında daha uzun olduğunu varsayımı önermesi ve R = çoğu. Açıklayıcı olarak, ED Arkadaş[İsim; μ], yükseklik(İsim: yükseklik), Daha uzun [Yükseklik₁:Yükseklik₂: μ] ve yükseklik (Mahmut) $\mu_{MT}(h, h_i)$, $i = 1, \dots, n$ şeklinde olabilir.

Bu ED, h = yükseklik(Mahmut), h_i = yükseklik(isim) , μ_F (isim_i) = Mahmut' un arkadaşlarının isimi ile bulanık küme ilişki dereceleri ve $\mu_{MT}(h, h_i)$ ' nin üyelik derecesi ve daha uzundur bulanık kümesi. Kesin X ve R nin açıklaması

$$X^* = \left[\frac{1}{n} \sum_1 \mu_{MT}(h, h_i) \wedge N_F(\text{İsim}_i) \right], R = \text{çoğu},$$

p nin kesinlik anlamı şöyle açıklanır;

$$Poss(ED|p) = \mu_{most} \left[\frac{1}{n} \sum_1 \mu_{MT}(h, h_i) \wedge M_F(i) \right],$$

$\wedge$ birlikte gösterilir.

RCT içinde oluşturulmuş bir ED kavramı geleneksel teorileri olası bir dünyada metodolojisi ile ilgilenir. Aynı şekilde, olasılıkları dağıtım açıklayıcı veri tabanı kavramı ile ilgilidir.

Anlaman kesinliği RCT nin çekirdeğidir ve onun asıl katkılarındadır. Bu konuda biraz bilgi vermek yararlı olabilir.

2.4. Kesinlik

p nin çıkış noktası doğal dilden oluşmuş bir önermedir. p nin objektif kesinliğidir. Odak bir değişken seçim, X gibi, p yi yorumlayarak sorulara cevap bulun: X in

değerleri nedir? Kısıtlama ilişkisini tanımlayın, R, R, x in fonksiyonudur. Bu noktada, X ve R doğal dilden tanımlanır.

Kanonikal formu oluşturursak,

$$CF(p) = X \equiv R.$$

ED ile açıklayıcı bir veri tabanı oluşturulur. ED yi oluşturan bir soru soralım. ED fonksiyonundaki X ve R yi oluşturmak için hangi bilgiler gerekli Alternatif olarak, p nin doğruluk değerini hesaplamak için hangi bilgiler gereklidir.

ED fonksiyonu kesin X ve R tarafından açıklanır. Sırasıyla, X^* ve R^* tahmini X ve R den oluşur.

Tahmini kanonikal formu oluşturalım,

$$CF^*(p): X^* \equiv R^*$$

p nin kesinliğini $CF^*(p)$ eşitleyelim

$CF^*(p)$, p verilen ED olasılık dağılımını tanımlar $Poss(ED | p)$

$CF^*(p)$ doğruluk değerinin doğruluk dağılımını ya da ED nin p sini tanımlar $Tr(p | ED)$

$$Poss(ED | p) = Tr(p | ED)$$

$Poss(ED | p)$, p nin hesaplanmış anlamı ED nin olasılıklı dağılımıdır. Daha bilgilendirici olarak, $Poss(ED | p)$, p nin tahmini anlamlı olasılık dağılımıdır. $Poss(E | p)$ yi kuralla birlikte hesaplar.

3.BÖLÜM

3. Z-SAYILARININ TEMEL ÖZELLİKLERİ VE TANIMLARI

3.1. Belirsiz Sayıların Genelleme Seviyeleri

Birçok pratik durumlarda bazı belirsizliklerde karar verme ihtiyacı duyarız. Bilginin belirsizliğinin bir hiyerarşisi vardır. Bu hiyerarşi genellikle aşağıdaki gibi içerir. Bunlar belirsizlik aralıkları, belirsiz değerli kümeler, tip-1 fuzzy belirsizliği, tip-2 fuzzy belirsizliği ve belirsizlik değerli Z sayılarıdır. (Şekil 3.1)



Şekil 3.1 Belirsiz sayıların seviyeleri

Belirsizlik durumunda verilen kararın yeni bir teorisi uzatmanın merkezi kavramı aralık, fuzzy ve Z-sayısı belirsizliklerine fayda sağlar. Hiyerarşinin farklı

seviyelerindeki bilgilerin açıklanması için belirsiz sayıların karakterize edilmesini kullanırız.

3.1.1. Belirsiz Aralık:

Açıklama karar vermede basit bir durum ile başlayalım. Burada x in bir alternatifi olan bir değişken seçmek x i bilmemekten iyidir. Bunun üzerine yalnızca $\underline{x}$ alt sınırını ve $\bar{x}$ üst sınırını elde ediyoruz ve hiçbir bilgisi olmayan değerler olasılıkla ya da daha az olasılıkla $[\underline{x}, \bar{x}]$ aralığındadır. Bu durumda biz sadece $[\underline{x}, \bar{x}]$ aralığına ait olan x in hangi x olduğu elde ederiz. $[\underline{x}, \bar{x}]$ aralığını aralık numarasıyla tanımlarız ve buna kesin olmayan aralık deriz.

3.2. Kesinlik Derecesi Küme Değerleri Sayıların ve Reel Aralıkların Durumları

3.2.1. Durumların açıklanması:

Öncelikle belirsiz değeri ve aralığı düşündüğümüz zaman verilen aralığın (ya da kümenin) içerdiği değerin %100 kesin olduğunu varsayarız. Gerçekte hatalar mümkündür ve genellikle $0 < p < 1$ olasılığında yalnız u nun karşılık geldiği kümeye veya aralığa ait olduğundan emin olabiliriz. Bu tür durumlarda bildiğimizi tamamen tanımlayabilmemiz için hem p nin olasılığını hem de aralığını (veya küme) tanımlamaya ihtiyacımız vardır.

Bir reel sayı ve bir reel kesinlik içeren ikiliye bir kesinlikli reel sayısı diyeceğiz. Bir reel sayı ve bir olasılığı içeren bir ikiliye bir kesinlikli aralık sayısı diyeceğiz.

Bir küme ve bir olasılığı içeren çifte bir kesinlikli küme değerli bir sayı denir. Bağımsız sıralı ikiliye karar verdik ve %100 emin olduğumuz birinci karar x_1 kazancına ve ikinci karar x_2 kazanana götürür, toplam kazanç ise $x_1 + x_2$ toplamına eşittir. İlk karar için kazanç tahmini x_1 deki güven derecemizi bir olasılık p ile ikinci karar için ise x_2 tahminine olan güven derecemizi q olursa $x_1 + x_2$ bazı olasılıklarla açıklanır, yalnızca her iki kazanç tahminin doğru olması durumunda geçerlidir. Bu tahminler bağımsız olduğundan, bunların her ikisinin de doğru olduğu tahmini, karşılık gelen olasılıkların çarpımı $p.q$ ya eşittir. Böylece (x_1, p) ve (x_2, q) sayıları için toplama $(x_1 + x_2, p.q); ([\underline{x}_1, \bar{x}_1], p)$ ve $([\underline{x}_2, \bar{x}_2], q)$ aralıkları için toplama $([\underline{x}_1 + \underline{x}_2, \bar{x}_1 + \bar{x}_2], p.q); (s, p)$ ve (s', p) kümeleri için toplam $s + s', p.q$ ye eşittir.

Aşağıdaki tanımlara ulaşıyoruz.

3.2.2. Güvenirlikli Bir Reel Sayı

Güvenirliği bilinen bir reel sayı ile oluşturulan u, p ye iki reel sayının bir ikili denir öyle ki $0 < p < 1$.

3.2.3. Güvenirlikli Bir Analiz

Bir aralığa göre ortalama aralığı $[\underline{x}, \bar{x}]$ ve bir gerçek sayı p den oluşan ikili $([\underline{x}, \bar{x}], p)$ dir. Öyle ki $0 < p < 1$.

3.2.4. Kesinlikli Küme Değerli Bir Sayı

Bir kesinlik değerli küme yani sınırlandırılmış kapalı küme ve p reel sayısı ile oluşan ikili (s, p) dir. Öyle ki $0 < p < 1$ dir.

Şimdi bir değerler aralığı ya da küme değerleri belirsizlik ile bilinen kesin bir sayı, bir aralık numarayı ve bir küme değeri sayı düşünün. Biz tam olasılıklar p ve buna karşılık gelen tahminler olan q yu biliyoruz böyle olduğunda her iki tahminin de doğru olma olasılığı $p.q$ eşit olur.

Benzer şekilde biz sık sık kesin kazancı ve kesin olasılık p yi tam olarak bilmiyoruz. Bunun yerine sadece p nin olası değerlerinin $[\underline{p}, \bar{p}]$ aralığı ya da daha genel olarak p nin olası değerlerinin bir kümesi olan p yi biliriz. Eğer p ve q yu böyle belirsizlikle biliyorsak, $p.q$ çarpımı hakkında ne sonucuna varabiliriz?

p ve q pozitif değerleri için: $p.q$ fonksiyonu her iki değişkenin bir fonksiyonu olarak artmaktadır. Eğer p artan ve/veya q artansa çarpım atandır. Böylece, p olasılığıyla ilgili tek bilgi bu olasılığın $[\underline{p}, \bar{p}]$ aralığına ait olmasıdır, aynı şekilde q olasılığıyla ilgili tek bilgi ise bu olasılığın $[\underline{q}, \bar{q}]$ aralığına ait olmasıdır. Mümkün olan en küçük $p.q$, en küçük değerlerin $\underline{p}.\underline{q}$ çarpımına eşittir. Mümkün olan en büyük $p.q$ ise en büyük değerlerin $\bar{p}.\bar{q}$ çarpımına eşittir. Buradan , $p.q$ nun tüm olan değerlerinin kümesi $[\underline{p}.\underline{q}, \bar{p}.\bar{q}]$ aralığındadır.

P ve Q kümeleri için $p.q$ olası değerlerinin kümesi

$$P.Q \stackrel{def}{=} \{p, q : p \in P \text{ ve } q \in Q\}$$

kümesidir.

3.2.5. Aralık değeri p -belirsizliği altında bir reel sayı

Aralık değeri p -belirsizliği altında reel bir sayı ile, reel bir sayı olan x ve bir $[\underline{p}, \bar{p}] \subseteq (0,1]$ aralığında oluşan bir $(x, [\underline{p}, \bar{p}])$ ikilisini kastedilecek.

3.2.6. Küme değeri p -belirsizliği altında bir reel sayı

Küme değeri p -belirsizliği altında bir reel sayı ile, bir reel sayı x ve $p > 0$ için sınırlı kapalı bir $p \leq (0,1]$ kümesinden oluşan bir (x, p) ikilisini kastedilecek.

3.2.7. Küme değeri p -belirsizliği altında bir küme değeri sayı

Küme değeri p -belirsizliği altında bir küme değeri sayı ile, bir kapalı sınırlı S kümesi ise $p > 0$ için kapalı sınırlı bir $p \leq (0,1]$ kümesinden oluşan bir (s, p) ikilisini kastediyoruz.

3.4. Aritmetik Aralık

Aralıklar fuzzy sayılarının özel durumlarıdır. Kesin olmayan olasılıklar ile karar vermede, karar terimlerinde aralık analizi sıklıkla kullanılır. Biz reel doğru aralıktaki işlemleri düşüneceğiz, kapalı aralıkların işlem sonuçlarının bir kapalı aralık olduğunu görmek kolaydır. Bu nedenle sonuçta elde ettiğimiz kapalı aralığın sınırlarını verilen kapalı aralığın sınırlarını cinsinden ifade etmeliyiz.

Aşağıdaki kapalı aralıklarla ilgili temel işlemleri göreceğiz. Aşağıdaki aralıkların gerçekte doğru olan R den verildiğini varsayalım.

3.4.1. Toplama işlemi:

Eğer $x \in [a_1, a_2]$ ve $y \in [b_1, b_2]$ ise

$$x + y \in [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$$

dir.

Bunu sembolik olarak

$$A + B = [a_1, a_2] + [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Eğer $x \in [a_1, a_2]$ ise

$$-x \in [a_2, -a_1]$$

dir.

Bunu sembolik olarak

$$-A = [-a_2, -a_1]$$

ifade edebiliriz.

Şimdi $A + (-A)$ işlemini düşünelim. Yukarıda verilen işlemlere göre

$$A + (-A) = [a_1, a_2] + [-a_2, -a_1] = [a_1 - a_2, a_2 - a_1]$$

yazabiliriz.

Yani

$$A + (-A) = 0$$

sonucuna varırız.

3.4.2. Çıkarma İşlemi:

Eğer $x \in [a_1, a_2]$ ve $y \in [b_1, b_2]$ ise

$$x - y \in [a_1 - b_2, a_2 - b_1]$$

$$A - B = [a_1, a_2] - [b_1, b_2] = [a_1 - b_2, a_2 - b_1]$$

şeklindedir.

3.4.3. Çarpma İşlemi:

$A, B \subset R$ için aralıkların çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$A.B = [\min(a_1.b_1, a_1.b_2, a_2.b_1, a_2.b_2), \max(a_1.b_1, a_1.b_2, a_2.b_1, a_2.b_2)]$$

Sonuç olarak $A, B \subset R$ için

$$A.B = [a_1, a_2] . [b_1, b_2] = [a_1.b_1, a_2.b_2]$$

kolayca elde edilir.

Bir $k \in R$ için k skaleri ile A aralığının çarpımı ise aşağıdaki gibidir.

$$k > 0 \text{ ise } k.A = k.[a_1, a_2] = [k.a_1, k.a_2]$$

$$k < 0 \text{ ise } k.A = k.[a_1, a_2] = [k.a_2, k.a_1].$$

3.4.5.Bölme İşlemi:

$A, B \subset R$ için

$$A / B = [a_1, a_2] / [b_1, b_2] = [a_1 / b_1, a_2 / b_2] \quad (3.1)$$

olur.

Bölme aralığı sıfır içermez.

(3.1)'e dayanarak A nın tersini tanımlayabiliriz.

$x \in [a_1, a_2]$ için

$$\frac{1}{x} \in \left[\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2} \right]$$

$$A^{-1} = [a_1, a_2]^{-1} = [1/a_2, 1/a_1]$$

dir.

A ve B oranının genel durumu aşağıdaki gibi yapılabilir:

$$[a_1, a_2] : [b_1, b_2] = [a_1, a_2] . [1/b_2, 1/b_1] = [\min(a_1/b_1, a_1/b_2, a_2/b_1, a_2/b_2), \max(a_1/b_1, a_1/b_2, a_2/b_1, a_2/b_2)]$$

Buradan

$$A.A^{-1} = [a_1/a_2, a_2/a_1] \neq 1.$$

Bir $k > 0$ sayısına (skalerine) bölme işlemi $1/k$ ile çarpma işlemine eşdeğerdir.

3.5. Rastgele Değişkenler Üzerine İşlemler

Rastgele değişkenler üzerinde işlemler problemleri rastgele fonksiyonlarının hesaplanması gereken geniş bir uygulama alanı ortaya çıkarır. Bazı analitik yöntemler verilir ama diğer durumlarda sayısal yöntemler kullanılır. Bu bölümde

rastgele değişkenlerde aritmetik işlemler için sayısal ve analitik metotları bir arada düşüneceğiz.

Genellikle rassal (rastgele) değişkenlerin fonksiyon dağılımlarının belirlenmesi analitik çözüm arayışına dayanır. Bazı kısıtlama sınıf problemlerinde gerekli dağımlar için bir formül oluşturulabilir ancak genel olarak böyle bir sonuç vermek pratik değildir. Gerekli dağılımları hesaplamak için alternatif bir yaklaşım olarak sayısal yöntemler kullanılmaktadır.

3.6. Rastgele Değişkenler ve Olasılık Dağılımları

Rastgele bir değişken olan x , olası değerleri x in rastgele bir olayın nümerik sonuçları olduğu bir değişkendi, Rastgele değişkenlerin iki tipi vardır: sürekli ve ayrık.

Sürekli bir rastgele değişken X , x olası değerlerini sonsuz sayıda alabilen bir değişkendir. Ayrık rastgele değişken, yalnızca sayılabilir sayıda farklı değer alabilen değişkendir.

Sürekli rastgele değişken x in kapalı bir $[a, b]$ aralığında herhangi bir değeri almasının olasılığını belirlemek için olasılık dağılım kavramı kullanılır, $P(a \leq x \leq b)$ ile gösterilir. Bir olasılık dağılımı veya olasılık yoğunluk fonksiyonu, $a \leq b$ olan herhangi iki sayı a ve b için, $p(x)$ fonksiyonudur:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b p(x)dx,$$

Burada

$$p(x) \geq 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$$

dir.

Sonuçlar uzayı $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ile bir ayrık rastgele değişken x düşünün. Bir $x = x_i$ sonucunun olasılığı, $P(x = x_i)$ olarak ifade edilir, bir olasılık dağılımının şartları olarak tanımlanır p bir fonksiyon, eğer

$$P(x = x_i) = p(x_i)$$

ise ayrık olasılık dağılımı veya olasılık kütle fonksiyonu olarak adlandırılır, burada

$$p(x_i) \in [0,1] \text{ ve } \sum_{i=1}^n p(x_i) = 1$$

dir.

3.6.1. Rastgele(Rassal) Değişkenlerde Sabit Ekleme:

X bir rastgele değişken ve $C \in R$ için $Y = X + c$ olan Y 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu, P_Y

$$P_Y(y) = P_X(y - c)$$

şeklinde olur.

Açıktır ki olasılık yoğunluk fonksiyonunda ($C > 0$) ise sağa ya da ($C < 0$) ise sola kaydırılır.

3.6.2. Rastgele(Rassal) Değişkenlerin Skaler Çarpımı

X bir rastgele değişken ve $a \in R$ için $Y = aX$ olsun. $P_Y(y)$ yoğunluk fonksiyonu

$$\begin{aligned} a > 0 \quad \text{ise} \quad P_Y(y) &= \frac{1}{a} \cdot P_X(y/a), \\ a < 0 \quad \text{ise} \quad P_Y(y) &= -\frac{1}{a} \cdot P_X(y/a) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

3.6.3. Rastgele (Rassal) Değişkenlerin Lineer Dönüşümü:

Y sürekli bir rastgele değişken, bir sürekli rastgele X değişkeninin lineer fonksiyonu

$$Y = aX + b$$

İçin $P_Y(y)$ bir yoğunluk fonksiyonu

$$P_Y(y) = \frac{1}{a} P_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

şeklindedir.

Eğer x normal bir rastgele değişkense;

$$P_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2}$$

için

$$P_Y(y) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{y-b}{a}-\mu\right)^2/2}$$

şeklindedir.

Bir normal rastgele değişkenin lineer fonksiyonu;

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

dir.

3.6.4. Bir Rastgele(Rassal) Değişkenin Karesi:

X bir rastgele değişken ve $Y = X^2$ olsun. Yoğunluk fonksiyonu;

$$P_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} [P_X(\sqrt{y}) + P_X(-\sqrt{y})], \quad y \geq 0$$

şeklindedir.

Örnek3.1. Bir Gauss rastgele değişkenin karesi ki-kare rastgele değişkenidir.

$$X \sim \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow Y \sim X^2, p_Y(y) = \frac{e^{-y/2}}{2\pi y}, y \geq 0.$$

3.6.5. Bir Rastgele (Rassal) Değişkenin Karekökü:

X bir sürekli rastgele değişken ve yoğunluk fonksiyonunun P_X olduğunu varsayalım.

$$Y = \sqrt{X}$$

için P_Y olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulmak gereklidir.

Eğer $y \geq 0$ ise

$$p_Y(y) = 2yp_X(y^2)$$

dir.

Örnek3.2. Üstel dağılım ile rastgele(rassal) değişkenin karekökü.

X rastgele bir değişken olduğunu varsayalım ve yoğunluk fonksiyonu

$$p_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0)$$

ve

$$Y = \sqrt{X}$$

dağılımını düşünelim. Bu dönüşüm

$$y = g(x) = \sqrt{x}, \quad x \geq 0$$

için

$$P_Y(y) = P_X(y^2) \quad 2y = 2\lambda y e^{-\lambda y^2}, \quad y \geq 0$$

eşitliğini verir.

X ve Y bağımsız rastgele (rassal) değişkenler ve P_X ve P_Y sırasıyla olasılık dağılımları olarak düşünelim. $Z = X * Y$, $x \in \{+, -, \cdot, /\}$ olsun. X_{12} nin bir olasılık dağılımını belirlemek istiyoruz bunun p_{12} olduğunu varsayalım.

İki rastgele değişkenin X ve Y nin dönüşümleri f fonksiyonu dört aritmetik işlemden biriye

$$Z = X + Y : p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{XY}(z - x, x) dx, \quad (a)$$

$$Z = X - Y : p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{XY}(z + x, x) dx, \quad (b)$$

$$Z = X * Y : p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} P_{XY}(z / x, x) dx, \quad (c)$$

$$Z = X / Y : p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| P_{XY}(zx, x) dx, \quad (d)$$

Bu dört konvolüsyon denkleminde sahibiz.

Bu durumda X ve Y bağımsız değişkenlerini elde edebiliriz. Bunlar aşağıdaki gibidir.

$$Z = X + Y : p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} P_X(z - x, x) p_Y(x) dx, \quad (e)$$

$$Z = X - Y : p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{XY}(z + x, x) p_Y(x) dx, \quad (f)$$

$$Z = X * Y : p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} P_X(z / x, x) p_Y(x) dx, \quad (h)$$

$$Z = X / Y : p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| P_X(zx, x) p_Y(x) dx, \quad (i)$$

$a - i$ denklemleri iki bağımsız rastgele değişkenin toplama, çıkarma, çarpma ve bölmelerinin olasılık dağılımlarının hesaplanmasının temelleridir.

İki normal rastgele değişkenin toplamaları ve farklarının dağılımlarının hesaplanması için kesin formüller vardır.

Eğer

$$Z = f(X_1, X_2) = X_1 \pm X_2$$

ise

$$\mu_Z = \mu_{X_1} \pm \mu_{X_2}$$

$$\sigma_Z^2 = \sigma_{X_1}^2 \pm \sigma_{X_2}^2$$

dir.

Eğer $a_i, i = \overline{1, n}$ normal bağımsız rastgele değişkenleri ise öyle ki $X \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$

$$\mu = \sum_{i=1}^n \mu_i \text{ ve } \sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$$

$$Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

nin normal dağılımı:

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i$$

dir.

Eğer a_i , $i = \overline{1, n}$ reel sabitler ise buradan

$$\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu_i \text{ ve } \sigma^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2$$

nin normal dağılımı;

$$Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i$$

dir.

Ne yazık ki çarpım ve bölümüm kesin formülleri yoktur. Bu durumda yaklaşık değerler için olasılık teorisinin uygulanması işe yarar.

n –bağımsız rastgele değişkenin keyfi bir fonksiyonu $Z = f(X_1, \dots, X_n)$ için yaklaşık değer,

$$\mu_z \approx f(\mu_{x_1}, \dots, \mu_{x_n}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial X_i^2} \sigma_{x_i}^2,$$

$$\sigma_z^2 \approx \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i^2} \right)^2 \mu_{x_i}^3$$

dir.

X_1 ve X_2 iki bağımsız rastgele değişkeninin çarpımları ve katsayısını düşünelim.

Eğer

$$Z = h(X_1, X_2) = X_1 \cdot X_2$$

ise

$$\mu_z \approx \mu_{x_1} \cdot \mu_{x_2},$$

$$\sigma_z^2 \approx \mu_{x_1}^2 \cdot \sigma_{x_2}^2 + \mu_{x_2}^2 \cdot \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_1}^2 \cdot \sigma_{x_2}^2$$

dir.

Eğer

$$Z = f(X_1, X_2) = X_1 / X_2$$

ise

$$\mu_Z \approx \frac{\mu_{X_1}}{\mu_{X_2}} + \frac{\mu_{X_1} \cdot \sigma_{X_2}^2}{4\mu_{X_2}^3},$$

$$\sigma_Z^2 \approx \frac{\sigma_{X_1}^2}{\mu_{X_2}^2} + \frac{\mu_{X_1}^2 \cdot \sigma_{X_2}^2}{\mu_{X_2}^4} - \frac{\mu_{X_1}^2 \cdot \mu_{X_2}^3}{2\mu_{X_2}^5}$$

dir.

Rastgele değişkenlerin çarpımının dağılımının hesaplanmasına farklı bir yaklaşımdır.

a, b ve (c, d) aralıkları sırasıyla X ve Y rastgele değişkenlerine dayanır.

$Z = XY$ nin olasılık dağılım fonksiyonu $ad < bc$ için;

$$h(z) = \begin{cases} \int_a^{z/c} g\left(\frac{z}{x}\right) p(x) \frac{1}{x} dx & , ac < z < ad, \\ \int_{z/d}^{z/c} g\left(\frac{z}{x}\right) p(x) \frac{1}{x} dx & , ad < z < bc, \\ \int_{z/d}^b g\left(\frac{z}{x}\right) p(x) \frac{1}{x} dx & , bc < z < bd, \end{cases}$$

$ad = bc$ için;

$$h(z) = \begin{cases} \int_a^{z/c} g\left(\frac{z}{x}\right) p(x) \frac{1}{x} dx & , ac < z < ad, \\ \int_{z/d}^b g\left(\frac{z}{x}\right) p(x) \frac{1}{x} dx & , ad < z < bd, \end{cases}$$

$ad > bc$ için;

$$h(z) = \begin{cases} \int_a^{z/c} g\left(\frac{z}{x}\right) p(x) \frac{1}{x} dx & , ac < z < ad, \\ \int_a^b g\left(\frac{z}{x}\right) p(x) \frac{1}{x} dx & , bc < z < ad, \\ \int_{z/d}^b g\left(\frac{z}{x}\right) p(x) \frac{1}{x} dx & , ad < z < bd, \end{cases}$$

şeklindedir.

Bu yaklaşımı dağılım ailesinin farklı üyelerine Triangular, Gaussion ve diğerlerine de uygulayabilmek mümkündür.

Örnek 3.3. $X \sim U(1,2)$ rastgele değişkeni ve $Y \sim U(3,4)$ rastgele değişkeni için $Z = XY$ nin bir dağılımı

$$h(z) \begin{cases} \ln z - \ln 3, & 3 < z < 4, \\ \ln 4 - \ln 3, & 4 < z < 6, \\ 3 \ln 2 - \ln z, & 6 < z < 8, \end{cases}$$

elde edilir.

Örnek3.4. $(1,2,3)$ X -üçgenseli ve $(-2,1,2)$ Y -üçgenseli rastgele değişkenleri için $Z = XY$ olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$h(z) \begin{cases} -4z/3 + (2/3)\ln z + (2z/3)\ln z + 4/3, & 1 < z < 2, \\ -8 + (14/3)\ln 2 + (7z/3)\ln 2 + 10z/3 - 4\ln z \\ - (5z/3)\ln z, & 2 < z < 3, \\ -4 + (14/3)\ln 2 + (7z/3)\ln 2 + 2z - 2\ln z, \\ -z\ln -2\ln 3 - (-2/3)\ln 3, & 3 < z < 4, \\ 44/3 - 14\ln 2 - (7z/3)\ln 2 - 8z/3 - 2\ln 3, \\ + (22/3)\ln z - (2z/3)\ln 3 + (4z/3)\ln z, & 4 < z < 6, \\ 8/3 - 8\ln 2 - (4z/3)\ln 2 - 2z/3 + (4/3)\ln z, \\ + (z/3)\ln z + 4\ln 3 + (z/3)\ln 3, & 6 < z < 8, \\ -8 + 8\ln 2 + (2z/3)\ln 2 + 2z/3 + 4\ln 3, \\ -4\ln z + (z/3)\ln 3 - (z/3)\ln z, & 8 < z < 12, \end{cases}$$

içerir.

$X \sim N(0,1)$ rastgele değişkeni ve $Y \sim N(0,1)$ rastgele değişkeni için $Z = XY$ nin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$h(z) = \begin{cases} \frac{Bessel K(0, z \cdot \text{signum}(z))}{\pi}, & -\infty < z < 0, \\ \frac{Bessel K(0, z \cdot \text{signum}(z))}{\pi}, & 0 < z < \infty, \end{cases}$$

Maple's Bessel K ve Signum fonksiyonlarını sağlar.

Sonuç dağılımlarının hesaplanması problemi ve iki rastgele değişkenin çıkarma problemlerinin farklı sayısal çözüm yöntemleri olduğu düşünülmektedir. Uygulamada kullanılan ve dört aritmetik işlemle kapatılan bu çözüm yöntemleri hemen hemen tüm dağılımları içeren aileler olarak düşünülmektedir. Aileler sonsuz dayanak dağılımlar ve sonlu sayıda tekillikler içerir.

Konvolüsyon $p_{12} = p_1 \cdot p_2$ olasılık dağılımı p_1 ve p_2 aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$p_{12}(z) = \frac{b(z) \cdot c(z)}{a^3(z)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x \sigma_y} \cdot [2\phi\left(\frac{b(z)}{a(z)}\right) - 1] + \frac{1}{a^2(z) \pi \sigma_x \sigma_y} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_x^2}{\sigma_x^2} + \frac{\mu_y^2}{\sigma_y^2}\right)} \quad (*)$$

Burada

$$\begin{aligned} a(z) &= \sqrt{\frac{1}{\sigma_x^2} z^2 + \frac{1}{\sigma_y^2}} \\ b(z) &= \frac{\mu_x}{\sigma_x^2} z + \frac{\mu_y}{\sigma_y^2} \\ c(z) &= \exp\left(\frac{1}{2} \frac{b^2(z)}{a^2(z)} - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_x^2}{\sigma_x^2} z + \frac{\mu_y^2}{\sigma_y^2}\right)\right) \\ \phi(z) &= \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \end{aligned}$$

dir.

$$\mu_x = \mu_y = 0 \text{ ve } \sigma_x = \sigma_y = 1$$

durumunda (*) azalır.

$$p_{12}(z) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+z^2}$$

olur.

X_1 ve X_2 bağımsız iki ayrık rastgele değişken olsun , p_1 ve p_2 karşılık gelen ayrık olasılık dağılımları ve $X_1 = \{x_1, \dots, x_{1i}, \dots, x_{1ni}\}$ ve $X_2 = \{x_2, \dots, x_{2i}, \dots, x_{2ni}\}$ bunlara karşılık gelen sonuç uzaylarıdır. X bazı ikililerin olduğu işlem $X_1 * X_2$ in olasılık dağılımı, $p_{12} = p_1 op_2$; p_1 ve p_2 nin konvülasyonu olup aşağıdaki şekilde belirlenir.

$$p_{12}(x) = \sum_{x=x_{1i} * x_{2j}} p_1(x_{1i}) \cdot p_2(x_{2j}),$$

Herhangi $x_1 \in \{x_1 * x_2 \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$.

Aşağıdaki birkaç tipik ikili opsiyonlar için $X = X_1 * X_2$ nin olasılık dağılımı olarak konvülasyon $p_{12} = p_1 op_2$ için formüller verilmektedir.

$X = X_1 + X_2$ toplama işlemi :

$$p_{12}(x) = \sum_{x=x_{1i} + x_{2j}} p_1(x_{1i}) \cdot p_2(x_{2j}) .$$

$X = X_1 - X_2$ çıkarma işlemi:

$$p_{12}(x) = \sum_{x=x_{1i} - x_{2j}} p_1(x_{1i}) \cdot p_2(x_{2j}) .$$

$X = X_1 X_2$ çarpma işlemi :

$$p_{12}(x) = \sum_{x=x_{1i} \cdot x_{2j}} p_1(x_{1i}) \cdot p_2(x_{2j}) .$$

$X = X_1 / X_2$ bölme işlemi:

$$p_{12}(x) = \sum_{x=x_{1i} / x_{2j}} p_1(x_{1i}) \cdot p_2(x_{2j})$$

$$X = \min(X_1, X_2)$$

$$p_{12}(x) = \sum_{\min(x=x_{1i}, x_{2j})} p_1(x_{1i}) \cdot p_2(x_{2j})$$

$$X = \max(X_1, X_2)$$

$$p_{12}(x) = \sum_{\max(x=x_{1i}, x_{2j})} p_1(x_{1i}) \cdot p_2(x_{2j})$$

3.6.6. Bir Ayırık Rastgele Değişkenin Fonksiyonu:

Bir x ayırık rastgele değişkeninin olasılık dağılımının p_X olduğunu varsayalım. $f, f: R \rightarrow R$ bir fonksiyon olsun. $Y = f(x)$ ayırık rastgele değişkeni için olasılık dağılımı p_Y aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$p_Y(y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} p_X(x)$$

3.6.7. Bir Ayırık Rastgele Değişkenin Lineer Dönüşümü:

Bir ayırık rastgele değişken X in olasılık dağılımı p_X olsun. $Y = aX + b$ nin lineer dönüşümünün olasılık dağılımı p_Y dir. Burada $a, b \in R$ için

$$p_Y(y) = p_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

olarak tanımlanır.

3.6.8. Bir Ayırık Rastgele Değişkenin Karesi:

Bir X ayırık rastgele değişkeni için p_X olasılık değişkeni olsun,

$$Y = X^2$$

karesinin olasılık dağılımı p_Y aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$p_Y(y) = \sum_{x \in \{\sqrt{y}, -\sqrt{y}\}} p_X(x) = p_X(-\sqrt{y}) + p_X(\sqrt{y})$$

3.6.9. Bir Ayırık Rastgele Değişkenin Karekökü:

Bir X ayırık rastgele değişkeninin olasılık dağılımı p_X olsun,

$$Y_1 = \sqrt{X} \quad \text{ve} \quad Y_2 = -\sqrt{X}$$

Kareköklerinin olasılık dağılımları p_{Y_1} ve p_{Y_2} aşağıdaki gibi gösterilir:

$$p_{Y_1}(y_1) = p_X(y_1^2) \quad \text{ve} \quad p_{Y_2}(y_2) = p_X(y_2^2) .$$

3.6.10. Bir Ayrık Rastgele Değişkenin Mutlak Değeri:

Bir x ayrık rastgele değişkeninin olasılık dağılımı p_X olsun.

$$Y = |X|$$

mutlak değerinin p_Y olasılık dağılımı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$p_Y(y) = \sum_{x \in \{|y|, -y\}} p_X(x) = p_X(|-y|) + p_X(|y|)$$

3.6.11. Bir Ayrık Rastgele Değişkenin Üsteli:

p_X , bir X ayrık rastgele değişkeni için olasılık dağılımı,

$$Y = e^X$$

üstelinin p_Y olasılık dağılımı:

$$p_Y(y) = p_X(\ln(y))$$

şeklinde tanımlanır.

3.6.12. Bir Ayrık Rastgele Değişkenin Doğal Logaritması:

p_X bir X ayrık rastgele değişkeni için olasılık dağılımı,

$$Y = \ln(X)$$

doğal logaritmasının p_Y olasılık dağılımı;

$$p_Y(y) = p_X(e^y)$$

şeklindedir.

3.7. Fuzzy Aritmetiği:

Bu paragrafta fuzzy sayıları üzerindeki aritmetik işlemleri düşüneceğiz. L.Zadeh 1965 tarafından ortaya atılan fuzzy kümeler, bilginin belirsizliği ile

üstesinden gelmek için bize yeni bir matematiksel araç sağlar. Bir fuzzy sayısı, elde edilen değişkenlerin değerlerinin belirsizliğinin ve kesinliğini hesaplamak için kullanılan fuzzy kümesinin özel bir örneğidir. İki ana tür fuzzy sayıları üzerinde işlemler yapmayı düşüneceğiz sürekli ve ayrık sayıları fuzzy aritmetiği açıklamadan önce, fuzzy kümeleri hakkında bazı ön bilgiler vereceğiz.

3.7.1. Tip-1 Fuzzy Kümeleri:

X , evrensel kümesinin öğeleri x olarak adlandırılan evren adı verilen klasik bir nesne grubu olan x in klasik alt kümesindeki A üyeliği genellikle x den $\{0,1\}$ e kadar μ_A karakteristik bir fonksiyon olarak görülür öyle ki;

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in A \text{ ise} \\ 0 & , \quad x \notin A \text{ ise} \end{cases}$$

burada $\{0,1\}$ bir değer kümesi olarak adlandırılır; 1 üyeliği gösterir 0 ise üye olmamayı gösterir. Değer kümesinin gerçek aralıkta $[0,1]$ olmasına izin verilir, o zaman A bir tip-1 fuzzy kümesi olarak adlandırılır. $\mu_A(x)$, A nın x üyeliğinin sıfırdır;

$$\mu_A : x \rightarrow [0,1]$$

$\mu_A(x)$ in değeri 1 e yaklaştıkça , x in n ye ait olması artar. $\mu : x \rightarrow [0,1]$ e bir üyelik fonksiyonu (MF) olarak anılacaktır.

A ikililer kümesi ile tamamen karakterize edilir:

$$A = [(x, \mu_A(x)), x \in X].$$

3.8. Tip-1 'in Özellikleri

3.8.1. Fuzzy Kümelerinin Eşitliği:

A ve B iki fuzzy kümesi olsun. $A = B$ olduğunu söylememiz için yalnız ve yalnız

$$\forall_x \in X \quad \text{için} \quad \mu_A(x) = \mu_B(x)$$

olmalıdır.

3.8.2. Fuzzy Kümelerinin Dayanak ve Geçiş Noktası:

Tekillik: Bir bulanık kümenin A dayanağı, x in sıfırdan farklı bir üyeliği olan A :

$$\sup p(A) = A^{+0} = [x \in X, \mu_A(x) > 0]$$

kümesinin sıradan bir alt kümesidir.

X in $\mu_A(x) = 1/2$ gibi elemanı A nın çapraz noktalarıdır.

Bir fuzzy kümesi $\mu_A = 1$ ile x de sadece bir noktaya sahiptir. Çünkü onun dayanak noktası tekil.

3.8.3. Bir Fuzzy Kümesinin Uzunluğu Normal ve Normal Olmayan Kümeler:

A nın uzunluğu;

$$hgt(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x)$$

Yani $\mu_A(x)$ in en küçük üst sınırıdır.

$x \in X$, $\mu_A(x) = 1$ için A nın normalleştirilmediği söylenir. $hgt(A) = 1$ ile örtüşür.

Aksi takdirde A normalin altında fuzzy kümesi diye adlandırılır.

$$x \in X, \mu_\phi(x) = 0$$

boş küme ϕ olarak tanımlanır.

$$\forall x \in X, \mu_x(x) = 1$$

x ifadesinin evrenselliği olarak tanımlanır.

Fuzzy kümelerinin temsili için α - kesim metodu önemli bir yoldur.

3.8.3. Fuzzy Kümelerin α - seviyesi:

A fuzzy kümesine ait elemanların kümesi en azından α - derecesine kadar olanların kümesine

$$A^\alpha = (x \in X, \mu_A(x) \geq \alpha)$$

denir.

$$A^\alpha = (x \in X, \mu_A(x) \geq \alpha)$$

ifadesine ise ‘‘ α -kuvveti küme’’ ya da ‘‘ α - kesimi’’ denir.

Şimdi A_α fuzzy kümesi;

$$A_\alpha(x) = \alpha A^\alpha(x)$$

şeklinde tanımlanır.

Fuzzy küme, onun α – kesimi açısından $A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} A_\alpha$ olarak tanımlanır; burada $\cup$ klasik kümelerin bileşimini gösterir.

3.8.4.Fuzzy Kümelerinin Dışbükeyliği:

Bir fuzzy küme A , tüm $x_1, x_2 \in R, q \in (0,1)$ için

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq (\mu_A(x_1), \mu_A(x_2))$$

ise konveks; min, minimum operatöre işaret eder.

3.8.5. Bir Fuzzy Kümesinin Kardinalitesi:

X sonlu bir küme olduğunda, X üzerindeki bir fuzzy kümesinin A skaler kardinalitesi $|A|$,

$$|A| = \sum_{x \in A} \mu_A(x)$$

olarak tanımlanır.

Bazen $|A|$ nın kuvveti, A . $\|A\| = |A|/|X|$ nın kuvveti göreceli kararlılıktır. X sonsuz olduğunda

$$|A| = \int_X \mu_A(x) dx$$

şeklinde tanımlanır.

3.8.6. Fuzzy Kümelerinde Kapsama:

Verilen A, B fuzzy kümeleri, A, B ye ($A \subseteq B$) dahil edilir veya $\forall x \in X$ için A, B nin alt kümesidir

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x).$$

Eşitsizlik tam olduğundan, kapsamının tüm olduğu söylenir ve ($A \subset B$) olarak gösterilir.

3.9. Tip-1 Bulanık Kümelerin Temsil ve Yapıları:

Yukarıda her fuzzy kümesinin bir üyelik fonksiyonu tarafından benzersiz bir şekilde tanımlandığı belirtilmiştir. Literatürde üyelik fonksiyonlarının temsil edildiği farklı yollar bulunabilir.

3.9.1. Temsillerin Listesi:

$x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ evrensel sınırlı bir küme olduğunda $x, \mu_A(x)$ üzerindeki bir fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu bir tablo olarak temsil edilebilir. Böyle bir tablo x evrenselindeki tüm öğeleri ve buna karşılık gelen üyelik sınıflarını aşağıda gösterildiği gibi

$$A = \mu_A(x_1) / x_1 + \dots + \mu_A(x_n) / x_n = \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) / x_i$$

olarak bulunur.

Burada sembol (eğik çizgi) bölme anlamında değil, x evrenselindeki her bir eleman (eğik çizgi sonrası) ve fuzzy kümedeki A üyeliği (eğik çizgi öncesi) arasındaki sınıflar için kullanılır.

Buradaki “+” sembolü elemanları birbirine bağlar. (Toplama işlemindeki toplamı belirtmez.)

Eğer x sonsuz bir küme ise

$$A = \int_x \mu_A(x) / x$$

şeklindedir.

Buradaki $\int_x$ sembolü x kümesinin elemanlarının birleşimini belirtmek için kullanılır.

3.9.2. Grafiksel Temsil:

Bir kümenin grafiksel tanımı X, X' in bir ya da iki boyutlu Öklid uzayı durumunda, X evrenseli üzerindeki A dır. Üyelik işlevlerinin basit tipik biçimi genellikle fuzzy küme teorisi ve pratiğinde kullanılır.

3.9.3. Fuzzy'nin n –küp Gösterimi:

n –elemanlı X evrenseli üzerindeki tüm fuzzy kümeler, n -boyutlu birim küp n –küpteki noktalarla temsil edilebilir. X evrensel kümesinin elemanı, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ içerdiğini varsayalım. Her x_i elemanı, $i = \bar{1}, \bar{n}$ boyutlu Öklid uzayında bir koordinat olarak görülebilir. Her koordinatın değerleri $(0,1)$ ile sınırlandırılan bu alanın bir alt kümesinden n –küp denir. Küpün köşeleri, yani bit listesi $(0,1, \dots, 0)$ crisp kümeleri temsil eder. Küpteki noktalar fuzzy alt kümelerini tanımlar.

A' nın tipik üyelik fonksiyonları

Üyelik Fonksiyonlarının Tipleri	Grafiksel Temsili	Analitik Temsili
Üçgensel MF		$\mu_{\bar{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a_1}{a_2-a_1} r, & a_1 \leq x \leq a_2 \text{ ise,} \\ \frac{a_3-x}{a_3-a_2} r, & a_2 \leq x \leq a_3 \text{ ise,} \\ 0 & , \text{ diğerleri} \end{cases}$
Yamuksal MF		$\mu_{\bar{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a_1}{a_2-a_1} r, & a_1 \leq x \leq a_2 \text{ ise,} \\ r, & a_2 \leq x \leq a_3 \\ \frac{a_4-x}{a_4-a_3} r, & a_3 \leq x \leq a_4 \text{ ise,} \\ 0 & , \text{ diğerleri} \end{cases}$

S-şeklinde MF		$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq a_1 \text{ ise,} \\ 2 \left(\frac{x-a_1}{a_3-a_2} \right)^2 & , a_1 \leq x \leq a_2 \text{ ise,} \\ 1 - 2 \left(\frac{x-a_1}{a_3-a_2} \right) & , a_2 \leq x \leq a_3 \text{ ise,} \\ 1 & , a_3 \leq x \end{cases}$
Gauss MF		$\mu_A(x) = c \exp \left(-\frac{(x-a)^2}{b} \right)$

3.9.4. Analitik Temsil: X evreninin sonsuz olması durumunda, fuzzy kümelerin üyelik işlevlerini temsil etmek için yukarıda belirtilen yöntemleri kullanmak etkili değildir. Bu durumda fuzzy kümeleri üyelik işlevlerinin şeklini açıklayan analitik bir biçimde temsil etmek uygundur.

3.10. Z Sayıları Aritmetiği Teori ve Uygulama

Fuzzy küme teorisi ve alıştırmalarında sık sık kullanılan üye fonksiyonları tanımlayan birkaç tipik formül vardır.

Örneğin, çan şeklinde üye fonksiyonlar sık sık fuzzy kümeleri temsil etmek için kullanılır. Bu fonksiyonlar aşağıda belirtilen formül tarafından tanımlanır.

$$\mu_A(x) = c \exp \left(-\frac{(x-a)^2}{b} \right)$$

A, B , ve C olmak üzere 3 farklı değişken tarafından tanımlanır.

3.10.1. Tip-2 fuzzy kümesi: Tip-2 bulanık küme söylem evreninde, X aşağıdaki formül gibi tanımlanabilir:

$$A = \{ x, u \mid \mu_A(x, u) \mid \forall u \in J_x \subseteq [0, 1] \}$$

Tip-2 bulanık küme A ayrıca aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\begin{aligned}
A &= \int_{x \in X} \int_{u \in J_x} \mu_A(x, u) / (x, u) \\
&= \int_{x \in X} [\int_{u \in J_x} \mu_A(x, u) / (x, u)] / x
\end{aligned}$$

X in öncelikli değişken olduğu yerde, $J_x \subseteq [0,1]$, x , u nun ikinci değişken olduğu öncelikli üyesidir. Formül ikinci üye fonksiyonudur.

$\iint$ tüm x ve u nun üzerinde kabul edilebilir bir bileşim olduğunu gösterir.

Eğer X , $x_1, x_2, \dots, x_n$ tip-2 bulanık kümesi öğeleriyle ayrık bir kümeysen A aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

3.11.Devamlı Bulanık Sayılardaki İşlemler:

3.11.1. Tip-1 Devamlı Bulanık Sayılar

Bir bulanık sayı aşağıdaki özelliklere sahip ise R üzerinde bir A bulanık kümesi olur:

- a- A normal bir fuzzy kümedir.
- b- A dış bükey bir fuzzy kümedir.
- c- A nın α -kesimi, her $\alpha \in (0,1]$ için A^α kapalı bir aralıktır.
- d- A nın dayanağı $\text{supp}(A)$ sınırlandırılır.

Bir bulanık sayı A bir çift $(\underline{\mu}_A, \overline{\mu}_A)$ nın fonksiyonları $0 \leq \alpha \leq 1$ için $\underline{\mu}_A(\alpha), \overline{\mu}_A(\alpha)$ aşağıdaki gereklilikleri sağlar:

- 1) $\underline{\mu}_A(\alpha)$ bir sınırlandırılmış monoton artan sol devamlı fonksiyon,
- 2) $\overline{\mu}_A(\alpha)$ bir sınırlandırılmış monoton azalan sol devamlı fonksiyon,
- 3) $\underline{\mu}_A(\alpha) \leq \overline{\mu}_A(\alpha), 0 \leq \alpha \leq 1$.

Bulanık aritmetiği geliştirmek için değişik metotlar vardır. Bu bölümde 2 metodu sunuyoruz.

3.11.2. Genişleme Prensibine Dayalı Metot:

Bu metotla reel sayılar üzerindeki temel aritmetik işlemleri bulanık sayılar üzerindeki işlemlere uzatılmıştır. A ve B iki fuzzy sayısı olsun ve $*$, dört aritmetik işlem temsil etsin.

R üzerinde $A*B$ bir fuzzy kümesi

$$\forall z \in R, \mu_{(A*B)}(z) = \sup_{z=x*y} \min \mu_A(x), \mu_B(y) \quad (**)$$

denklem olarak tanımlanabilir.

Görmüş olduk ki $A*B$ bir bulanık sayıdır ve sıradaki teorem formüle edilmiş ve kısıtlanmıştır. Devamlı üye fonksiyonlu bir bulanık sayıya değinerek bir devamlı bulanık sayıyı kast ederiz.

Teorem 3.1. $*$ $\in \{+, -, \cdot, /\}$ ve A, B devamlı bulanık sayı olsun. Buradan $A*B, (**)$ da tanımlanan bulanık küme bir devamlı bulanık sayıdır.

Buradan bulanık sayıların üstündeki dört temel aritmetik işlem için yazabiliriz.

$$\mu_{(A+B)}(z) = \sup_{z=x+y} \min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$$

$$\mu_{(A-B)}(z) = \sup_{z=x-y} \min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$$

$$\mu_{(A \cdot B)}(z) = \sup_{z=x \cdot y} \min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$$

$$\mu_{(A/B)}(z) = \sup_{z=x/y} \min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$$

Aralık aritmetiği ve α - kesime dayalı yöntem bu yöntem rastgele fuzzy sayıların α - kesimlerine göre gösterilmesine ve α - kesimlerine aritmetik kullanımına dayanır $A, B \subset R$ fuzzy sayıları olsun ve $*$ dört işlemde herhangi birini belirtsin her $\alpha \in (0,1]$ için $A*B$ nin α - kesimi $(A*B)^\alpha = A^\alpha * B^\alpha$ olarak ifade edilir.

$*$ $= /$ için $0 \notin \text{supp}(B)$ olduğunu varsayalım.

Elde edilen fuzzy sayısı $A * B$,

$$A * B = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha (A * B)^\alpha.$$

olarak tanımlanır.

Bundan sonra fuzzy sayılarda dört aritmetik işlemi göstereceğiz.

3.11.3. Toplama İşlemi:

A ve B nin iki fuzzy sayı olsun ve A^α ve B^α ,

A ve B nin α – kesimleridir.

Buradan

$$A^\alpha + B^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] + [b_1^\alpha, b_2^\alpha] = [a_1^\alpha + b_1^\alpha, a_2^\alpha + b_2^\alpha]$$

yazabiliriz. Burada

$$A^\alpha = \{x / \mu A(x) \geq \alpha\}; B^\alpha = \{x / \mu B(x) \geq \alpha\}$$

şeklindedir.

3.11.4. Çıkarma İşlemi:

A ve B iki fuzzy sayının çıkarma işlemi;

$\forall \alpha \in [0,1]$ için

$$(A - B)^\alpha = A^\alpha - B^\alpha = [a_1^\alpha - b_2^\alpha, a_2^\alpha - b_1^\alpha] \quad (*)$$

şeklinde tanımlanabilir.

(*), B nin görüntüsünün A ya eklenmesiyle elde edilir. Burada α -kesilmiş $\forall \alpha \in [0,1]$ için

$$B^{\alpha-} = [-b_2^\alpha, -b_1^\alpha]$$

şeklindedir.

Bir üyelik fonksiyonunun terimleri;

$$\mu_{abs(A)} = \begin{cases} \max(\mu_A(x)), & R + için \\ 0, & R - için \end{cases}$$

3.11.5. Bir Sürekli Fuzzy Sayısının Karesi

μ_A^2 ile gösterilen ifade A fuzzy sayısının karesidir, bir fuzzy sayısının karesi;

$$\mu_A^2(y) = \max(\mu_A(\sqrt{y}), \mu_A(-\sqrt{y}))$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek3.5. A sürekli bir fuzzy sayısı ise

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{3} & , \quad -1 \leq x \leq 2 \\ 3-x & , \quad 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & , \quad \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

bu şekilde tanımlanır. Buradan A^2 ,

$$\mu_A^2(x) = \begin{cases} \frac{5-\sqrt{16-3x}}{3} & , \quad -3 \leq x \leq 0 \\ \frac{1+\sqrt{x}}{3} & , \quad 0 \leq x \leq 4 \\ 3-\sqrt{x} & , \quad 4 \leq x \leq 9 \\ 0 & , \quad \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

şeklinde bulunur. R üzerinde tanımlanan R_F fuzzy sayılar kümesi ve $U = [0, \infty)$ üzerinde tanımlanan R_{UF} fuzzy sayılarının kümesidir.

3.11.6.Sürekli Fuzzy Sayılarının Karekökü:

Bir X fuzzy sayısının karekökü $F(X) = \sqrt{X}$ ile α - kesimiyle gösterilen $F: R_F \rightarrow R_{UF}$ fonksiyonudur. $F(x) = \sqrt{x}$, $U = [0, \infty)$ üzerinde bir sürekli fonksiyon, $F(X) = \sqrt{X}$, R_{UF} üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. Çünkü f, U üzerinde artandır ve biz

$$[\sqrt{X}]^\alpha = [\sqrt{X_1}^\alpha, \sqrt{X_2}^\alpha]$$

ifadesine sahibiz.

A sürekli bir bulanık sayı ve $X^2 = A$ olduğu gibi bir fuzzy sayısı varsa, A'nın bir kareköküne sahip olduğu söylenir ve X , A'nın karekökü yani $\sqrt{A}$ olarak adlandırılır. Bir A fuzzy sayısını düşünelim.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{2} & , \quad -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{3-x}{3} & , \quad 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & , \quad \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Buradan

$$\sqrt{A}^1(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{3}x^2 & , \quad -\sqrt{3} \leq x \leq 0 \\ 1 - \frac{3}{4}x^2 & , \quad 0 \leq x \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & , \quad \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

$$\sqrt{A}^2(x) = \begin{cases} 1 - \frac{3}{4}x^2 & , \quad -\frac{2}{\sqrt{3}} \leq x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{4}x^2 & , \quad 0 \leq x \leq \sqrt{3} \\ 0 & , \quad \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir.

3.11.7. Bir Fuzzy Sayısının Üsteli:

$X \in R_F$ için bir fuzzy sayısının üsteli $F(X) = e^X$ ile gösterilen $X \in R_F$ ve α -kesim $(e^X)^\alpha = \{e^x \mid x \in X^\alpha\}$ ile bulunur.

$f(x) = e^x$, R üzerinde sürekli bir fonksiyon, $F(X) = e^X$, $F: R_F \rightarrow R_{UF}$ üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. Çünkü f, R üzerinde artarken $(e^X)^\alpha = [e^{X_1^\alpha}, e^{X_2^\alpha}]$ eşitliğini elde ederiz.

3.11.8. Bir Fuzzy Sayısının Logaritması

$X \in R_F$ için bir fuzzy sayısının doğal logaritması $F(X) = \ln X$ ile gösterilen $F : R_{UF} \rightarrow R_F$ ye bir fonksiyon , $\alpha - kesim$ $(\ln X)^\alpha = [\ln x | x \in X^\alpha]$ ile bulunur.

$f(x) = \ln x, \in > 0$ için $[\varepsilon, \infty)$ üzerinde sürekli bir fonksiyon, $F(X) = \ln X$, R_{UF} üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. Çünkü f , $[\varepsilon, \infty)$ üzerinde artarken $(\ln X)^\alpha = [\ln X_1^\alpha, \ln X_2^\alpha]$ yı elde ederiz.

$A, B \in R_{UF}$ pozitif fuzzy sayıları için

$$\ln 1 = 0; \ln AB = \ln A + \ln B ; \ln A / B = \ln A - \ln B; \ln A^\alpha = \partial \alpha \ln A [1]$$

ifadelerine sahibiz. $A \in R_F$ ve $B \in R_{UF}$ için $\ln(\exp A) = A$; $\ln(\exp B) = B$ olduğunu biliyoruz.

3.12. Ayrık Fuzzy Sayıları Üzerinde Aritmetik İşlemler

3.12.1. Bir Ayrık Fuzzy Sayısı:

Üyelik fonksiyonu $\mu_A : R \rightarrow [0,1]$ olan reel çizgide A bir fuzzy alt kümesi, dayanağının sonlu olması durumunda ayrı bir fuzzy sayıdır, yani, $x_1, \dots, x_n \in R$ için $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ öyle ki $\text{supp}(A) = \{x_1, \dots, x_n\}$ ve mevcut $1 \leq s \leq t \leq n$ olan s, t doğal sayıları aşağıdaki koşulları sağlar:

- 1- Herhangi bir i doğal sayısı için $s \leq i \leq t$ ise $\mu_A(x_i) = 1$,
- 2- Her i, j doğal sayıları için $1 \leq i \leq j \leq s$ ise $\mu_A(x_i) \leq \mu_A(x_j)$,
- 3- Her i, j doğal sayıları için $t \leq i \leq j \leq n$ ise $\mu_A(x_i) \geq \mu_A(x_j)$ dir.

Genel olarak, aritmetik ya da latis işlemlerinin uzantısı, $\mathcal{O}, A, B$ fuzzy sayılarının $\mu_A(x), \mu_B(x)$ üyelik fonksiyonlarına R nin alt kümeleri olarak Zadeh' in uzatma metodu ile doğrudan kullanımı:

$$\mu_{\mathcal{O}(A,B)}(z) = \sup \mu_A(x) \wedge \mu_B(y) | \mathcal{O}(x, y = z)$$

veya $\alpha - kesimleri$ gösteriminin eşdeğer kullanımı:

$$O(A, B)^\alpha = O(A^\alpha, B^\alpha) = \{O(x, y) \mid x \in A^\alpha, y \in B^\alpha\}$$

ve

$$\mu_{O(A, B)}(z) = \sup\{\alpha \in [0, 1] \mid z \in O(A, B)^\alpha\}$$

ile yaklaşılabilir.

Bununla birlikte, ayrık durumda, bu işlem ile ayrık bir fuzzy sayısı olmasını şart koşmayan bir bulanık alt küme oluşturulabilir.

Bu dezavantajı gidermek için birkaç yazar ayrık fuzzy sayılar kümesinde kapalı bir toplamını elde etmek için farklı yöntemler önerdi.

3.12.2. Ayrık Fuzzy Sayılarının Toplamı:

A_1, A_2 ayrık fuzzy sayıları için $A_{12} = A_1 + A_2$ toplama olarak tanımlanan α -kesim ayrık fuzzy sayıdır.

$$A_{12}^\alpha = \{x \in \{\sup p(A_1) + \sup p(A_2)\} \mid \min\{A_1^\alpha + A_2^\alpha\} \leq x \leq \max\{A_1^\alpha + A_2^\alpha\}\},$$

Burada

$$\begin{aligned} \sup p A_1 + \sup p A_2 &= \{x_1 + x_2 \mid x_j \in \sup p A_j, j=1, 2\}, \min\{A_1^\alpha + A_2^\alpha\} \\ &= \min\{x_1 + x_2 \mid x_j \in (A_j^\alpha), j=1, 2\}, \\ \max\{A_1^\alpha, A_2^\alpha\} &= \max\{x_1 + x_2 \mid x_j \in A_j^\alpha, j=1, 2\} \end{aligned}$$

ve üyelik fonksiyonu

$$\mu_{A_1 + A_2}^{(x)} = \sup\{\alpha \in [0, 1] \mid x \in \{A_1^\alpha + A_2^\alpha\}\}$$

şeklinde tanımlanır.

3.12.3. Ayrık Fuzzy Sayılarının Standart Çıkarma İşlemi

A_1, A_2 ayrık fuzzy sayıları için $A_{12} = A_1 - A_2$ standart çıkarması ayrık fuzzy sayısı ile tanımlanan α -kesimi

$$A_j^\alpha = \{x \in \{\sup p(A_1) + \sup p(A_2)\} \mid \min\{A_1^\alpha - A_2^\alpha\} \leq x \leq \max\{A_1^\alpha - A_2^\alpha\}\},$$

burada

$$\begin{aligned}\sup p(A_1) - \sup p(A_2) &= \{x_1 - x_2 \mid x_j \in \sup p(A_j), j=1,2\}, \\ \min\{A_1^\alpha - A_2^\alpha\} &= \min\{x_1 - x_2 \mid x_j \in A_j^\alpha, j=1,2\}, \\ \max\{A_1^\alpha - A_2^\alpha\} &= \max\{x_1 - x_2 \mid x_j \in A_j^\alpha, j=1,2\},\end{aligned}$$

ve üyelik fonksiyonu;

$$\mu_{A_1 - A_2}^{(x)} = \sup\{\alpha \in [0,1] \mid x \in \{A_1^\alpha - A_2^\alpha\}\}$$

şeklinde tanımlanır.

3.12.4. Standart Çıkarma işlemi İçin : $A_2 + (A_1 - A_2) \neq A_1$

dir.

3.12.4. Ayırık Fuzzy Sayılarının Hukuhara Farkı

Ayrık fuzzy sayıları A_1, A_2 için, $A_1 - h^{A_2}$ ile belirtilen Hukuhara farkı A_{12} ayırık fuzzy sayıdır. Öyle ki

$$A_1 = A_2 + A_{12}.$$

Hukuhara farkı yalnızca $n \geq m$ olduğunda bulunur.

3.12.5. Ayırık Fuzzy Sayılarının Çarpma İşlemi

Ayrık fuzzy sayıları A_1, A_2 için, $A_{12} = A_1 \cdot A_2$ çarpımı α -kesimi olarak tanımlanan ayırık fuzzy sayıdır.

$$A_j^\alpha = \{x \in \{\sup p(A_1) \cdot \sup p(A_2)\} \mid \min\{A_1^\alpha \cdot A_2^\alpha\} \leq x \leq \max\{A_1^\alpha \cdot A_2^\alpha\}\},$$

burada

$$\begin{aligned}\sup p(A_1) \cdot \sup p(A_2) &= \{x_1 \cdot x_2 \mid x_j \in \sup p(A_j), j=1,2\}, \\ \min\{A_1^\alpha \cdot A_2^\alpha\} &= \min\{x_1 \cdot x_2 \mid x_j \in A_j^\alpha, j=1,2\}, \\ \max\{A_1^\alpha \cdot A_2^\alpha\} &= \max\{x_1 \cdot x_2 \mid x_j \in A_j^\alpha, j=1,2\}\end{aligned}$$

ve üyelik fonksiyonu

$$\mu_{A_1 \cdot A_2}^{(x)} = \sup \{ \alpha \in [0,1] \mid x \in \{ A_1^\alpha \cdot A_2^\alpha \} \}$$

şeklinde tanımlanır.

3.12.6. Ayırık Fuzzy Sayılarının Bölme İşlemi

$A_{12} = A_1 / A_2$ ayırık fuzzy sayıları A_1, A_2 için $0 \notin \sup p(A_2)$ standart bölme işlemi

α -kesimi olarak tanımlanan ayırık fuzzy sayıdır,

$$A_{12}^\alpha = \{ x \in \{ \sup p(A_1) / \sup p(A_2) \mid \min \{ A_1^\alpha / A_2^\alpha \} \leq x \leq \max \{ A_1^\alpha / A_2^\alpha \} \},$$

burada

$$\sup p(A_1) / \sup p(A_2) = \{ x_1 / x_2 \mid x_j \in \sup p(A_j), j=1,2 \},$$

$$\min \{ A_1^\alpha / A_2^\alpha \} = \min \{ x_1 / x_2 \mid x_j \in A_j^\alpha, j=1,2 \},$$

$$\max \{ A_1^\alpha / A_2^\alpha \} = \max \{ x_1 / x_2 \mid x_j \in A_j^\alpha, j=1,2 \},$$

ve üyelik fonksiyonu

$$\mu_{A_1 / A_2}^{(x)} = \sup \{ \alpha \in [0,1] \mid x \in \{ A_1^\alpha / A_2^\alpha \} \}$$

şeklinde tanımlanır.

Standart bölme işlemi

$$A_2 \cdot (A_1 / A_2) \neq A_1$$

dir.

3.12.7. Bir Ayırık Fuzzy Sayısının Karesi

Bir A ayırık fuzzy sayısı için A^2 karesi α -kesimi olarak tanımlanan ayırık fuzzy sayıdır,

$$[A^2]^\alpha = \{ y \in \sup p(A^2) \mid \min((A^\alpha)^2) \leq y \leq \max((A^\alpha)^2) \}$$

Burada

$$\begin{aligned} \text{supp}(A^2) &= \{ y \mid y = x^2, x \in \text{supp } p(A) \}, \\ \min(A^\alpha)^2 &= \min \{ y \mid y = x^2, x \in A^\alpha \}, \\ \max(A^\alpha)^2 &= \max \{ y \mid y = x^2, x \in A^\alpha \} \end{aligned}$$

dir.

Burada $[A^2]^\alpha = [A^\alpha]^2$ dir.

A^2 nin üyelik fonksiyonu;

$$\mu_{A^2}^{(y)} = \sup \{ \alpha \in [0,1] \mid y \in [A^2]^\alpha \}$$

şeklinde tanımlanır.

3.12.8. Bir Ayırık Fuzzy Sayısının Karekökü

Bir ayırık A sayısı için $\text{supp } p(A) \subset [0, \infty)$ iken $\sqrt{A}$ karekökü α -kesimi olarak tanımlanan ayırık fuzzy sayısıdır.

$$[\sqrt{A}]^\alpha = \{ y \in \text{supp } p(\sqrt{A}) \mid \min \sqrt{A}^\alpha \leq y \leq \max \sqrt{A}^\alpha \}$$

burada

$$\begin{aligned} \text{supp } p(\sqrt{A}) &= \{ y \mid y = \sqrt{x}, x \in \text{supp } p(A) \}, \\ \min(\sqrt{A}^\alpha) &= \{ y \mid y = \sqrt{x}, x \in A^\alpha \}, \\ \max(\sqrt{A}^\alpha) &= \{ y \mid y = \sqrt{x}, x \in A^\alpha \} \end{aligned}$$

dır.

Burada $[\sqrt{A}]^\alpha = \sqrt{A^\alpha}$ dır.

$\sqrt{A}$ ' nin üyelik fonksiyonu

$$\mu_{\sqrt{A}}^{(y)} = \sup \{ \alpha \in [0,1] \mid y \in [\sqrt{A}]^\alpha \}$$

şeklinde tanımlanır.

3.12.9. Ayırık Fuzzy Sayılarının Minimum Ve Maksimumu

A_1, A_2 fuzzy sayıları için $A_1 = \{x_1^\alpha, \dots, x_p^\alpha\}$, $A_2 = \{y_1^\alpha, \dots, y_k^\alpha\}$, $A_{12} = \min\{A_1, A_2\}$

bunların minimumu α -kesimi olarak tanımlanan ayırık fuzzy sayısıdır.

$$A_{12}^{\alpha} = \{ x \in \{ \sup p(A_1) \wedge \sup p(A_2) \} \mid \min \{ x_1^{\alpha}, y_1^{\alpha} \} \leq z \leq \min \{ x_p^{\alpha}, y_k^{\alpha} \} \},$$

burada

$$\sup p(A_1) \wedge \sup p(A_2) = \{ z = \min(x, y) \mid x \in \sup p(A_1), y \in \sup p(A_2) \}$$

O halde;

$$MIN(A_1, A_2)(z) = \sup \{ \alpha \in [0, 1] \mid z \in A_{12}^{\alpha} \}$$

dır.

A_1, A_2 fuzzy sayıları için $A_1 = \{x_1^{\alpha}, \dots, x_p^{\alpha}\}$, $A_2 = \{y_1^{\alpha}, \dots, y_k^{\alpha}\}$, $A_{12} = MAX \{A_1, A_2\}$

bunların minimumu α -kesimi olarak tanımlanan ayrık fuzzy sayısıdır.

$$A_{12}^{\alpha} = \{ x \in \{ \sup p(A_1) \vee \sup p(A_2) \} \mid \max \{ x_1^{\alpha}, y_1^{\alpha} \} \leq z \leq \max \{ x_p^{\alpha}, y_k^{\alpha} \} \},$$

burada

$$\sup p(A_1) \vee \sup p(A_2) = \{ z = \max(x, y) \mid x \in \sup p(A_1), y \in \sup p(A_2) \}$$

O halde;

$$MAX(A_1, A_2)(z) = \sup \{ \alpha \in [0, 1] \mid z \in A_{12}^{\alpha} \}$$

dır.

R üzerinde D ile belirlenen kime ayrık fuzzy sayılarının kümesi olarak tanımlanır.

Daha önce gösterildiği gibi (D, MIN, MAX) üçlüsü bir dağıtıcı lastistir.

3.12.10. Ayrık Bir Fuzzy Sayısının Mutlak Değeri

Bir ayrık fuzzy sayısı A için, $abs(A)$ mutlak değer, α -kesimi olarak tanımlanan ayrık fuzzy sayısıdır.

$$[abs(A)]^{\alpha} = \{ y \in Supp(abs(A)) \mid \min(abs(A^{\alpha})) \leq y \leq \max(abs(A^{\alpha})) \},$$

burada

$$\begin{aligned} \text{supp}(abs(A^\alpha)) &= \{ y \mid y = abs(x), x \in \text{supp}(A) \}, \\ \min abs(A^\alpha) &= \min \{ y \mid y = abs(x), x \in A^\alpha \}, \\ \max abs(A^\alpha) &= \max \{ y \mid y = abs(s), x \in A^\alpha \} \end{aligned}$$

şeklindedir.

Böylece

$$[abs(A)]^\alpha = abs(A^\alpha)$$

dır.

$abs(A)$ ifadesinin üyelik fonksiyonu

$$\mu_{abs(A)}^{(y)} = \text{Sup} \{ \alpha \in [0,1] \mid y \in [abs(A)]^\alpha \}$$

şeklindedir.

3.12.11. Ayırık Bir Fuzzy Üstel Fonksiyonu

Bir $f : D \rightarrow D$ ile, belirlenen bir $f(A_x) = e^{A_x}$ fonksiyonunun α –kesimli ayırık fuzzy üstel fonksiyonu

$$[e^{A_x}]^\alpha = [y \in \text{Supp}(e^{A_x}) \mid \min(e^{A_x}) \leq y \leq \max(e^{A_x})]$$

şeklinde tanımlanır.

$$\text{Supp}(e^{A_x}) = \{ y \mid y = e^x, x \in \text{Supp}(e^{A_x}) \}$$

$$\min(e^{A_x^\alpha}) = \min \{ y \mid y = e^x, x \in A_x^\alpha \}$$

$$\max(e^{A_x^\alpha}) = \max \{ y \mid y = e^x, x \in A_x^\alpha \}$$

Böylece

$$[e^{A_x}]^\alpha = e^{A_x^\alpha}$$

olur.

e^{A_x} nin üyelik fonksiyonu

$$\mu_{e^{A_x}}(y) = \sup \{ \alpha \in [0,1] \mid y \in [e^{A_x}]^\alpha \}$$

şeklinde tanımlanır.

3.12.12. Bir Ayırık Fuzzy Doğal Logaritması

Bir $f : D \rightarrow D$ ile belirlenen bir $f(A_x) = \ln(A_x)$ fonksiyonu α -kesimli ayırık fuzzy doğal logaritması,

$$[\ln(A_x)]^\alpha = [y \in \sup p(\ln(A_x)) \mid \min(\ln(A_x^\alpha)) \leq y \leq \max(\ln(A_x^\alpha))]$$

şeklinde tanımlanır.

Burada

$$\sup p(\ln(A_x)) = [y \mid y = \ln(x), x \in \sup p(\ln(A_x))],$$

$$\min(\ln(A_x^\alpha)) = \min[y \mid y = e^x, x \in \ln(A_x^\alpha)],$$

$$\max(\ln(A_x^\alpha)) = \max[y \mid y = e^x, x \in \ln(A_x^\alpha)],$$

şeklinde tanımlanır.

Böylece

$$[\ln(A_x)]^\alpha = \ln(A_x^\alpha)$$

olur.

$\ln(A_x)$ in üyelik fonksiyonu

$$\mu_{\ln(A_x)}(y) = \sup[\alpha \in [0,1] \mid y \in [\ln(A_x)]^\alpha]$$

şeklinde tanımlanır.

3.13. Sürekli Z- sayıları, Özellikleri

3.13.1. Bir Sürekli Z-sayısı:

Sürekli bir Z -sayısı, $Z = (A, B)$ sıralı bir ikilidir. Burada A, bir x rastgele değişkeninin alabileceği değerler üzerinde bir fuzzy kısıtlama rolü oynayan sürekli bir fuzzy sayıdır.

$$X \equiv A$$

ve üye fonksiyonlu bir devamlı fuzzy sayıdır. $\mu_B : [0,1] \rightarrow [0,1]$. Anın olasılık ölçüsü üzerinde rol oynayan bir fuzzy kısıtlanışıdır.

$$P(A) \equiv B.$$

Bir devamlı Z^+ sayısının kavramı bir devamlı Z –sayısının kavramıyla yakından ilişkilidir. Verilen devamlı Z –sayısı $Z=(A,B)$, Z^+ sayısı Z^+ , A ve rastgele bir R sayısı, bir sürekli fuzzy sayı içeren bir ikilidir

$$Z=(A,R)$$

Bir sürekli Z –sayısında aynı rolü oynayan A sayısı, $Z=(A,B)$ ve R , p nin dağılım olasılığı rolünü oynar. Şöyle ki

$$P(A) = \int_R \mu_A(u) p_R(u) , P(A) \in \sup p(B)$$

Bu bölümde genişleme prensibinde tanımlandığı gibi Z –sayılarının 4 aritmetik işlem altında yani $+$, $-$, $.$ ve $/$ cebirsel özelliklerini göreceğiz. Sürekli fuzzy sayılarının özellikleri önceden verilmiştir. Bu özellikler Z –sayılarının ilk bölümünde kullanılabilir. Rastgele değişkenler şu özelliklere sahiptirler:

İki rastgele değişkenin toplamı bir rastgele değişkendir.

İki rastgele değişkenin çarpımı bir rastgele değişkendir, toplamı ve çarpımı iki değiştirici, rastgele değişkenlerin birleşimi. $(XY)^* = X^*Y^*$ sağlanması ve x, y nin tüm rastgele değişkenleri için $X^{**} = X$ ve eğer X bir sabitse kompleks birleşim ile denk gelir.

Sonuç olarak, rastgele değişkenler $*$ - cebirlerinde kompleks değişkenlerdir. Bu nedenle birleşim altında dört aritmetik işlemle birleştirilen aşağıdaki özelliklere sahibiz. Bu özellikler aşağıda verilmiştir.

$Z_X = (A_X, B_X)$ ve $Z_Y = (A_Y, B_Y)$ Z – sayılar ve $*$ R de tanımlanan bir ikili işlem olsun $*$ işlemi, Z sayıları olan A ve B ye uzatma ilkesi ile gerçekleşebilir.

$F(X, Y) = X * Y$ ikili işlemde $*$ işleminin $+$, $-$, $.$ ve $/$ dört temel aritmetik işlemle değiştirilmesini salarız o halde Z –sayılarında dört aritmetik işlemin tanımı aşağıdaki gibidir.

3.13.2. (A_X, B_X) ve (A_Y, B_Y) Z-Sayıları İçin Toplama İşlemi:

$$\begin{aligned}
 (A_Z, B_Z) &= (A_X, B_X) + (A_Y, B_Y) \\
 \mu_{A_Z=A_X+A_Y}(v) &= \sup_u (\mu_{A_X}(u) \wedge \mu_{A_Y}(v-u)), \\
 p_{R_X+R_Y}(v) &= \int_R p_{R_X}(u) p_{R_Y}(v-u) du, \\
 \mu_{p_Z}(p_Z) &= \sup_{p_X+p_Y} (\mu_{B_X}(\int_R \mu_{A_X}(u) p_X(u) du) \wedge \mu_{B_Y}(\int_R \mu_{A_Y}(u) p_Y(u) du)) \\
 \mu_{B_Z}(w) &= \sup_{p_Z} (\mu_{p_Z}(p_Z)), \\
 s.t. w &= \int_R \mu_{A_Z}(u) p_Z(u) du
 \end{aligned}$$

3.13.3. (A_X, B_X) ve (A_Y, B_Y) Z-Sayıları İçin Çıkarma İşlemi:

$$\begin{aligned}
 (A_Z, B_Z) &= (A_X, B_X) - (A_Y, B_Y) \\
 \mu_{A_Z=A_X-A_Y}(v) &= \sup_u (\mu_{A_X}(u) \wedge \mu_{A_Y}(v+u)), \\
 p_{R_X-R_Y}(v) &= \int_R p_{R_X}(u) p_{R_Y}(v+u) du, \\
 \mu_{p_Z}(p_Z) &= \sup_{p_X-p_Y} (\mu_{B_X}(\int_R \mu_{A_X}(u) p_X(u) du) \wedge \mu_{B_Y}(\int_R \mu_{A_Y}(u) p_Y(u) du)) \\
 \mu_{B_Z}(w) &= \sup_{p_Z} (\mu_{p_Z}(p_Z)), \\
 s.t. w &= \int_R \mu_{A_Z}(u) p_Z(u) du,
 \end{aligned}$$

3.13.4. (A_X, B_X) ve (A_Y, B_Y) Z-Sayıları İçin Çarpma İşlemi:

$$\begin{aligned}
 (A_Z, B_Z) &= (A_X, B_X) \cdot (A_Y, B_Y), \\
 \mu_{A_Z=A_X \cdot A_Y}(v) &= \sup_u (\mu_{A_X}(u) \wedge \mu_{A_Y}(v/u)), \\
 p_{R_X \cdot R_Y}(v) &= \int_R p_{R_X}(u) p_{R_Y}(v/u) du, \\
 \mu_{p_Z}(p_Z) &= \sup_{p_X, p_Y} \left(\mu_{B_X} \left(\int_R \mu_{A_X}(u) p_X(u) du \right) \wedge \mu_{B_Y} \left(\int_R \mu_{A_Y}(u) p_Y(u) du \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\mu_{B_Z}(w) = \sup_{p_Z}(\mu_{p_Z}(p_Z)),$$

$$s.t. w = \int_R \mu_{A_Z}(u) p_Z(u) du.$$

3.13.5. (A_X, B_X) ve (A_Y, B_Y) Z-sayıları için bölme işlemi:

$$(A_Z, B_Z) = (A_X, B_X) / (A_Y, B_Y)$$

$$\mu_{A_Z=A_X/A_Y}(v) = \sup_u(\mu_{A_X}(u) \wedge \mu_{A_Y}(v \cdot u)),$$

3.14. Pozitif Z-sayıları

A_X in a_1, a_2 desteklenmesi için $0 \leq a_1 \leq a_2$, A_X in pozitif reel çizgide olduğu durumunda, bir Z –sayısı olan (A_X, B_X) pozitif denilebilir. Benzer şekilde, A_X in a_1, a_2 dayanağı için bir Z –sayısı olan (A_X, B_X) nin $+$, $-$, $\cdot$ ve $/$ işlemleri altında Z –sayılarının cebirsel özelliklerini verelim. Herhangi $X, Y, Z \in Z$ –sayıları için;

$a_1 \leq a_2 < 0$ ise negatif ; $a_1 \leq 0 \leq a_2$ ise sıfır olduğu söylenir .

$$(A_X, B_X) + 0 = (A_X, B_X) \quad (\text{Toplamaya göre birim eleman})$$

$$(A_X, B_X) \times 1 = (A_X, B_X) \quad (\text{Çarpmaya göre birim eleman})$$

Burada 0 ve 1 sırasıyla reel çizginin sıfırı ve birliğidir.

Bu durumda herhangi Z –sayısı için

$$(A_X, B_X) -_h (A_X, B_X) = 0$$

Hukuhara farkı sağlanır.

Genel olarak, herhangi bir Z –sayısı için aşağıdaki

$$(A_X, B_X) + (A_X, B_X)' = 0,$$

$$(A_X, B_X) \times (A_X, B_X)'' = 0,$$

koşulları sağlanır burada

$(A_X, B_X)'$ ve $(A_X, B_X)''$ sırasıyla Z –sayılarında $+$ ve $-$ işlemindeki ters elemanlardır.

$(A_X, B_X), (A_Y, B_Y), (A_Z, B_Z)$ Z –sayıları için konveks fuzzy kısıtlamalarda aşağıdaki özellikler sağlanır.

$$\begin{aligned}
& (A_X, B_X) + ((A_Y, B_Y) \cup ((A_X, B_X) + (A_Z, B_Z))) \\
&= ((A_X, B_X) + (A_Y, B_Y)) \cup ((A_X, B_X) + (A_Z, B_Z)), \\
& (A_X, B_X) + ((A_Y, B_Y) \cap (A_Z, B_Z)), \\
&= ((A_X, B_X) + (A_Y, B_Y)) \cap ((A_X, B_X) + (A_Z, B_Z)), \\
& (A_X, B_X) - ((A_Y, B_Y) \cup (A_Z, B_Z)) \\
&= (A_X, B_X) - ((A_Y, B_Y) \cap ((A_X, B_X) - (A_Z, B_Z))), \\
& (A_X, B_X) - ((A_Y, B_Y) \cap (A_Z, B_Z)) \\
&= (A_X, B_X) - ((A_Y, B_Y) \cup ((A_X, B_X) - (A_Z, B_Z))), \\
& ((A_Y, B_Y) \cup ((A_Z, B_Z) - (A_X, B_X))) \\
&= ((A_X, B_X) - (A_Y, B_Y)) \cup ((A_X, B_X) - (A_Z, B_Z)),
\end{aligned}$$

Genel olarak, herhangi bir Z-sayısı için

$$(A_X, B_X) \times ((A_Y, B_Y) + (A_Z, B_Z)) \neq ((A_X, B_X) \times (A_Y, B_Y)) + ((A_X, B_X) \times (A_Z, B_Z))$$

dağılıma özelliği sağlanmaz.

Özel bir durum olarak Z-sayıları pozitif konveks olduğunda dağılıma özelliği sağlanır.

Şimdi, t-norm ve t-conorm altındaki Z –sayının ve Z –sayılarının cebirsel özelliklerinin $+$, $-$, $.$, $/$ aritmetik işlemleriyle kesişim ve birleşimlerini sağlayacağız.

(A_X, B_X) ve (A_Y, B_Y) ve (A_Z, B_Z) olarak gösterilen Z –sayılarının birleşimi, uzatma metodunu kullanarak

$$\begin{aligned}
(A_Z, B_Z) &= (A_X, B_X) \cup (A_Y, B_Y) \\
&= (A_Z = A_X \cup A_Y, B_Z = B_X \oplus B_Y)
\end{aligned}$$

olarak bulunur, burada $\oplus$ cebirsel toplamıdır.

(A_X, B_X) ve (A_Y, B_Y) sayılarının kesişimi

$$\begin{aligned}
 (A_Z, B_Z) &= (A_X, B_X) \cap (A_Y, B_Y) \\
 &= (A_Z = A_X \cap A_Y, B_Z = B_X \cdot B_Y) \\
 &= ((A_Y, B_Y) \cap (A_Z, B_Z)) - (A_X, B_X) \\
 &= ((A_Y, B_Y) - (A_X, B_X)) \cap ((A_Z, B_Z) - (A_X, B_X))
 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Buradaki ‘=’ sembolü Z –sayılarının eşitliği anlamında kullanılır.

Biz Z –sayısı ile pozitif konveks kısıtlamaları aşağıdaki özellikleri sağlar.

$$\begin{aligned}
 (A_X, B_X) \times ((A_Y, B_Y) \cup (A_Z, B_Z)) \\
 &= ((A_X, B_X) \times (A_Y, B_Y)) \cup ((A_X, B_X) \times (A_Z, B_Z)) \\
 (A_X, B_X) \times ((A_Y, B_Y) \cap (A_Z, B_Z)) \\
 &= ((A_X, B_X) \times (A_Y, B_Y)) \cap ((A_X, B_X) \times (A_Z, B_Z)) \\
 (A_X, B_X) \div ((A_Y, B_Y) \cup (A_Z, B_Z)) \\
 &= ((A_X, B_X) \div (A_Y, B_Y)) \cap ((A_X, B_X) \div (A_Z, B_Z)) \\
 (A_X, B_X) \cup ((A_Y, B_Y) \div (A_Z, B_Z)) \\
 &= ((A_X, B_X) \div (A_Y, B_Y)) \cup ((A_X, B_X) \div (A_Z, B_Z)) \\
 ((A_Y, B_Y) \cup (A_Z, B_Z)) \div (A_X, B_X) \\
 &= ((A_Y, B_Y) \div (A_X, B_X)) \cup ((A_Z, B_Z) \div (A_X, B_X)) \\
 ((A_Y, B_Y) \cap (A_Z, B_Z)) \div (A_X, B_X) \\
 &= ((A_Y, B_Y) \div (A_X, B_X)) \cap ((A_Z, B_Z) \div (A_X, B_X))
 \end{aligned}$$

3.15. Ayrık Z –Sayıları ve Özellikleri

3.15.1. Bir Ayrık Z –sayısı:

Ayrık bir Z –sayısı, $Z = (A, B)$ sıralı bir ikilidir. Burada A , bir X rastgele değişkeninin alabileceği değerler üzerinde bir fuzzy Z – kısıtlama rolü onayan ayrık bir fuzzy sayısıdır.

$$X \equiv A$$

dır ve B bir $\mu_B : \{b_1, \dots, b_n\} \rightarrow [0, 1]$, $\{b_1, \dots, b_n\} \subset [0, 1]$ üyelik fonksiyonlu bir ayrık fuzzy sayısıdır.

A'nın olasılığı üzerinde etki eder.

$$P(A) \equiv B$$

dır.

Ayrık bir Z^+ - sayısının kavramı, ayrık bir Z^+ -sayısı kavramı ile ilişkilidir. Verilen ayrık bir $Z = A, B$, Z^+ -sayısı Z^+, A , fuzzy sayısı ve R rastgele sayısından

$$Z^+ = (A, R)$$

oluşan bir ikilidir.

Burada ayrık Z -sayısında aynı rolü oynayan A sayısı, $Z = (A, B)$ ve R, P nin olasılık dağılımı rolünü oynar.

Öyle ki;

$$P(A) = \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) p(x_i), p(A) \in \text{supp}(B)$$

Daha öncede gösterildiği gibi $MIN(Z_1, Z_2)$ ve $MAX(Z_1, Z_2)$ ayrık Z - sayılarıdır.

(Z, MIN, MAX) üçlüsü bir dağıtıcı latistir, burada Z , ardışık doğal sayı dizisi olan

Herhangi $Z_1, Z_2, Z_3 \in Z$ için, burada ayrık Z - sayılarının kümesi Z de de aşağıdaki özellikler devam eder:

$$Z_1 + Z_2 = Z_2 + Z_1 \text{ (değişme)}$$

$$(Z_1 + Z_2) + Z_3 = Z_1 + (Z_2 + Z_3) \text{ (birleşme)}$$

$Z + 0^Z$ her $Z \in Z$ için. (birim eleman)

Burada 0^Z , Z - sayıları sıfırdır, $0^Z = (0,1)$ dır.

KAYNAKÇA

- [1] Ulucay, V., Oztekin, O., Sahin, M., Olgun, N., and Kargin, A.(2016). Soft representation of soft groups. *New Trends in Mathematical Sciences*, 2, 23-29
- [2] Ulucay, V., Sahin, M., Olgun, N., Oztekin, O., and Emniyet, A.(2016). Generalized Fuzzy σ -Algebra and Generalized Fuzzy Measure on Soft Sets. *Indian Journal of Science and Technology*, **9(4)**
- [3] Ulucay, V., Sahin, M., and Olgun, N.,(2016). Soft Normed rings. Soft Normed ring *SpringerPlus*, **5(1)**
- [4] Ulucay, V., Sahin, M., Olgun, N., and Kılıcman, A. On Soft Expert Metric Spaces.
- [5] Zadeh, L. A.(2011). A note Z-numbers. *Information Sciences*, **181(14)**, 2923-2932
- [6] Kang, B., Wei, D., Li, Y., and Deng, Y.(2012). A method of converting Z-Numbers to classical fuzzy number. *Journal of Information and Computatiol Science*, **9(3)**, 703-709.
- [7] Yager, R. R.(2012). On Z-valuations using Zadeh' s Z-numbers. *International Journal Intelligent Systems*, **27(3)**, 259-278.
- [8] Aliyev, R., Huseynov, O., Alizadeh, A. The Arithmetic of Z-Numbers: Word Scientific Pub. Singapore 2015