



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**B^{-1} -KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN
HERMİTE-HADAMARD-FEJER EŞİTSİZLİĞİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Lale ALTINTAŞ

DANIŞMAN

Doç. Dr. İlknur YEŞİLCE IŞIK

AKSARAY, 2025

Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 212342429 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi Lale ALTINTAŞ tarafından hazırlanan “**B⁻¹-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMİTE-HADAMARD-FEJER EŞİTSİZLİĞİ**” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. İlknur YEŞİLCE IŞIK

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Doç. Dr. Serap KEMALİ

Akdeniz Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Doç. Dr. Samet MALDAR

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Tez Savunma Tarihi: 24/04/2025

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Prof. Dr. Fazliye KARABÖRK

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinallliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

İmza

Lale ALTINTAŞ

TEŞEKKÜR

Lisansüstü eğitimim ve tez çalışmam süresince bana katkılarıyla yol gösteren, beni destekleyen, bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşan saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. İlknur YEŞİLCE IŞIK'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Hayatımın her noktasında izleri olan, her zaman beni destekleyen aileme sonsuz teşekkür ederim. Lisansüstü eğitimimde bana maddi destek olan Sayın Av. Muhammet Veysel GÖK'e teşekkürlerimi sunarım.

Lale ALTINTAŞ
AKSARAY, 2025

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	i
İÇİNDEKİLER.....	ii
ÖZET.....	iv
ABSTRACT	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR	vii
1. GİRİŞ	1
2. KONVEKSLİK VE SOYUT KONVEKSLİK İLE İLGİLİ TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1 Klasik Konvekslik	4
2.2 Soyut Konvekslik	4
2.3 Soyut Konvekslik çeşitleri	5
2.3.1 m-konveks fonksiyonlar	6
2.3.2 (α, m) -konveks fonksiyonlar	6
2.3.3 h-konveks fonksiyonlar	6
2.3.4 (h, m) -konveks fonksiyonlar	6
2.3.5 Kesin J-konveks fonksiyonlar.....	6
2.3.6 φ -konveks fonksiyonlar.....	7
2.3.7 $s - \eta$ -konveks fonksiyon.....	7
2.3.8 Quasi-konveks fonksiyon	7
2.3.9 B-konveks kümeler ve fonksiyonlar	7
2.3.9.1 B-konveks kümeler	7
2.3.9.2 B-konveks fonksiyonlar	7
2.4 B^{-1} -konveks Kümeler ve Fonksiyonlar	7
2.4.1 B^{-1} -konveks kümeler.....	8
2.4.1 B^{-1} -konveks fonksiyonlar	9
3. KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN BAZI EŞİTSİZLİKLER	14
3.1 Jensen Eşitsizliği	14
3.1.1 B-konveks fonksiyonlar için Jensen eşitsizliği	14
3.1.2. B^{-1} -konveks fonksiyonlar için Jensen eşitsizliği	14
3.2 Ostrowski Eşitsizliği.....	14
3.2.1 $(\alpha - m)$ -konveks fonksiyonlar için Ostrowski eşitsizliği	15
3.2.2 $(s - \eta)$ -konveks fonksiyonlar için Ostrowski eşitsizliği.....	15
3.3 Trapezoidal Eşitsizliği	16
3.3.1 B-konveks fonksiyonlar için Trapezoidal eşitsizlik.....	16
3.3.2 Quasi-konveks fonksiyonlar için Trapezoidal eşitsizlik	16
3.4 Hermite-Hadamard Eşitsizliği.....	16
3.4.1 φ -konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği	17
3.4.2 m-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği.....	17
3.4.3 B^{-1} -konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği.....	17
3.5 Hermite-Hadamard-Fejer Eşitsizliği.....	18
3.5.1 B-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliği ..	18
3.5.2 h-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliği...	18
4. B^{-1} KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMİTE-HADAMARD-FEJER TİPİ EŞİTSİZLİKLER	19
4.1 B^{-1} -konveks Fonksiyon için Hermite-Hadamard-Fejer Eşitsizliği	19

4.2 B^{-1} -konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejer Eşitsizliklerinin Uygulamaları	37
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	42
5.1 Tezde Elde Edilen Sonuçlar	42
5.2 Tez Konusu İle İlgili Çalışma Önerileri ve Açık Problemler	42
KAYNAKLAR.....	44
ÖZGEÇMİŞ	49



YÜKSEK LİSANS TEZİ

B^{-1} -KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMİTE-HADAMARD-FEJER EŞİTSİZLİĞİ

Lale ALTINTAŞ

**Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

Danışman: Doç. Dr. İlknur YEŞİLCE IŞIK

ÖZET

Eşitsizlikler Teorisi, konveks fonksiyonların en önemli ve kullanışlı uygulama alanlarından birisidir. Tezde ele alınacak olan eşitsizlik, Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliği olup bu eşitsizlik çeşitli matematiksel problemlerin çözümünde kritik bir rol oynamaktadır. Bu tezde ise Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliğinin bir soyut konvekslik çeşidi olan B^{-1} -konveks fonksiyonlar için elde edilmesi üzerine çalışmalar yapılmıştır.

Tezde ilk olarak, B^{-1} -konveks küme ve fonksiyonlar için tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Bu bölümde ayrıca, literatüre bazı B^{-1} -konveks küme ve fonksiyon örnekleri eklenmiştir. Sonraki bölümde, Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliğinin B^{-1} -konveks fonksiyonlar için genel formu ispat edilmiştir. Daha sonra, bu genel form üzerine fonksiyonlar için özel şartlar getirilerek farklı eşitsizlikler ispat edilmiş ve uygulamaları yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: B^{-1} -konvekslik, Hermite-Hadamard-Fejer Eşitsizliği, Soyut Konvekslik

Nisan, 2025; 49 sayfa

M.Sc. THESIS

**HERMITE-HADAMARD-FEJER INEQUALITY FOR B^{-1} -CONVEX
FUNCTIONS**

Lale ALTINTAŞ

**Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. İlknur YEŞİLCE IŞIK

ABSTRACT

Theory of Inequalities is one of the most important and useful application areas of convex functions. The inequality to be discussed in the thesis is the Hermite-Hadamard-Fejer inequality, which plays a critical role in solving various mathematical problems. In this thesis, studies have been carried out on obtaining the Hermite-Hadamard-Fejer inequality for B^{-1} -convex functions, which is a type of abstract convexity.

Firstly, the thesis includes definitions and theorems for B^{-1} -convex sets and functions. In this section, some examples of B^{-1} -convex sets and functions are also added to the literature. In the next section, the general form of the Hermite-Hadamard-Fejer inequality for B^{-1} -convex functions is proven. Then, different inequalities are proved by introducing special conditions for functions on this general form and their applications are given.

Keywords: B^{-1} -convexity, Hermite-Hadamard-Fejer Inequality, Abstract Convexity.

April, 2025; 49 pages

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun <i>epif</i> grafiği.....	3
Şekil 2.2. Farklı durumlarda verilen ikişer nokta için B^{-1} -konveks kabuklarının grafikleri.....	8



SİMGELER VE KISALTMALAR

$epif$	f Fonksiyonunun Epigrafi
I^0	I Aralığının İçi
I	$\mathbb{R}$ Kümesin Bir Alt Aralığı
J	$J = [0, \tau] \subset [0, +\infty)$
$\vee$	Koordinatlara Göre Maksimum
$\wedge$	Koordinatlara Göre Minimum
$\min$	Minimum
$\mathbb{R}^n$	n Boyutlu Öklid Uzayı
$\mathbb{R}_+$	Negatif Olmayan Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}_{++}$	Pozitif Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}_+^n$	$\{i = 1, 2, \dots, n, (x_1, \dots, x_n): x_i \geq 0\}$
$\mathbb{R}_{++}^n$	$\{i = 1, 2, \dots, n, (x_1, \dots, x_n): x_i > 0\}$

1.GİRİŞ

Konvekslik, hem teorik hem de uygulamalı matematik alanlarında büyük öneme sahip kavramlardan biridir. Bu kavram ilk olarak geometri alanında karşılaştığımız bir kavram olup, zamanla analiz, optimizasyon, ekonomi, olasılık gibi farklı matematiksel ilişkilendirmelerde kullanılmaya başlanmıştır. Konvekslik bir kümenin veya fonksiyonun, belirli aralıklar altında doğrusal davranışlarını tanımlayarak matematik ve matematiksel disiplinlerin birçok problemine çözüm sağlar. Günümüzde konveks fonksiyonlar, Optimizasyon Teorisi [1-5], Eşitsizlikler Teorisi [6-11], Matematiksel Ekonomi [12,13], Yöneylem Araştırması [14-18] gibi alanlarda derinlemesine araştırılmaktadır.

Klasik konvekslik kavramının genelleştirilmesiyle, karşımıza soyut konvekslik kavramı çıkmaktadır [19-22]. Klasik konvekslik, fonksiyonel ve topolojik yaklaşımlar gibi çeşitli yöntemler ile soyutlaştırılabilir [20]. Soyut konvekslik hem teorik matematik hem de uygulamalı matematik problemlerinde yeni yaklaşımlar sunarak; ekonomi, optimizasyon ve fonksiyonel analiz gibi alanlarda kullanılabilir. Soyut konveksliğin çok sayıda çeşidi mevcuttur. Örneğin; bir soyut konvekslik çeşidi olan h -konvekslik tanımı aşağıdaki gibidir.

$h: [0,1] \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu, her $t \in (0,1)$ için $h(1-t) + h(t) \geq 1$ eşitsizliğini sağlasın. $I \subset \mathbb{R}$ herhangi bir aralık olsun. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, her $x, y \in I$ ve her $t \in (0,1)$ için

$$f((1-t)x + ty) \leq h(1-t)f(x) + h(t)f(y) \quad (1.1)$$

eşitsizliğini sağlarsa f fonksiyonuna h -konveks fonksiyon denir [23].

Örneğin, m -konvekslik [24], $(\alpha - m)$ -konvekslik [24], B -konvekslik [25], B^{-1} -konvekslik [26] bazı soyut konvekslik çeşitleridir. Soyut konvekslik, klasik konvekslik kavramından türetilmiş olup, çalışılan eşitsizliklerin daha kapsamlı uygulanmasına olanak tanır.

Eşitsizlikler, matematiğin en temel yapı taşlarından biri olup, matematiksel analitik ve hesaplama yöntemlerinde büyük bir öneme sahiptir [19]. Jensen [27], Ostrowski [28], Trapezoidal [29] ve Hermite-Hadamard [30] eşitsizlikleri gibi birçok eşitsizlik, konveks fonksiyonlar altında ele alınmış ve teorik matematikte olduğu kadar mühendislik ve farklı matematiksel disiplinler içinde de uygulama alanı bulmuştur.

Eşitsizliklerin, fonksiyonların özel şartları için incelenmesi, bu alandaki araştırmaların birincil hedefi haline gelmiştir.

Eşitsizlik Teorisi'ndeki en popüler eşitsizliklerden biri Hermite-Hadamard eşitsizliğidir. İlk olarak, Hermite'in Mathesis dergisine gönderdiği ve 1883 yılında yayınlanan mektubu ile ortaya çıkmıştır. Daha sonra 1893 yılında J.Hadamard da bu eşitsizliği ispatladığı için eşitsizlik artık iki bilim insanının ismi ile kullanılmaya başlanmıştır. Bu önemli eşitsizlik fonksiyonların integral ortalamaları kavramına ilişkin bir eşitsizlik olup, fonksiyonun konveks ve konkavlık durumlarına göre değişmektedir [26].

Hermite-Hadamard-Fejer Eşitsizliği ise 1906 yılında Fejer'in, Hermite ve Hadamard'ın temel çalışmaları üzerine genelleştirmeler ve iyileştirmeler yapması sonucunda ortaya çıkmıştır [31]. Son yıllarda bu eşitsizlik, soyut konveks fonksiyonlar üzerinde araştırılarak daha genel sonuçlar elde edilmesini sağlamıştır [32-35]. Konveks Analiz'deki bu eşitsizlik hem teorik hem de pratik uygulamaları ile dikkat çekmektedir.

Fejer, yaptığı iyileştirmeler ve genelleştirmeler sonucunda, $f: I = [\sigma, \tau] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı f fonksiyonu konveks fonksiyon ve $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı g fonksiyonu ise negatif olmayan, integrallenebilir ve $\frac{\sigma+\tau}{2}$ noktasına göre simetrik bir fonksiyon olmak üzere,

$$f\left(\frac{\sigma+\tau}{2}\right) \int_{\sigma}^{\tau} g(x)dx \leq \int_{\sigma}^{\tau} f(x)g(x)dx \leq \frac{f(\sigma)+f(\tau)}{2} \int_{\sigma}^{\tau} g(x)dx \quad (1.2)$$

eşitsizliğini elde etmiştir [36]. Bu eşitsizlikten $g(x) = 1$, $x \in (\sigma, \tau)$ için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin elde edilebildiği görülür. Özellikle son yıllarda Fejer'in bu sonucu ile ilgili çalışmalar çok sayıda yapılmıştır [37-43].

B^{-1} -konvekslik, soyut konvekslik türlerinden biri olarak klasik konvekslik kavramından daha farklı bir alan sunmaktadır. Özellikle matematiksel ekonomi üzerindeki uygulamaları, büyük bir öneme sahiptir [44]. Sonraki yıllarda, B^{-1} -konveks kümelerin, B^{-1} -ölçülebilir dönüşümler ile ayrılması ile ilgili çalışmalar incelenmiştir [45]. Yakın zamanda yapılan çalışmalarda B^{-1} -konvekslikle ilgili daha kapsamlı incelemeler yapılmış ve tanımlar verilmiştir [46,47].

Tezde ilk olarak, klasik konvekslik ve soyut konvekslik ile ilgili temel tanım ve teoremler ifade edilecektir. Bu tanım ve teoremlerin ışığında bazı soyut konvekslik

eřitlerinin tanımları verilecektir. Özel bazı fonksiyonların, B^{-1} -konveks fonksiyon olup olmadığı üzerinde araştırmalar yapılacaktır. Tezin devamında, konveks fonksiyonlar için bazı eşitsizlik tanımları ve bu eşitsizliklerin bazı soyut konvekslik eřitleri için yeni durumları sunulacaktır. Daha sonra, tezde verilen tanım ve teoremler doğrultusunda B^{-1} -konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejer Eşitsizliği'nin ispatı yapılacaktır. Fonksiyonlara getirilen yeni şartlar doğrultusunda, eşitsizlikler yeniden ele alınacaktır. Son olarak, tezdten elde edilen tüm sonuçlar özet şeklinde ifade edilecek ve tez konusu üzerine ileride çalışılabilecek yeni öneriler ve açık problemler sunulacaktır.



2. KLASİK KONVEKS LİK VE SOYUT KONVEKS LİK İLE İLGİLİ TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Klasik Konvekslik ile İlgili Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1 X bir vektör uzayı ve $x_1, x_2, \dots, x_m \in X$ ve $t_i \geq 0$ için $t_1 + t_2 + \dots + t_m = 1$ olmak üzere

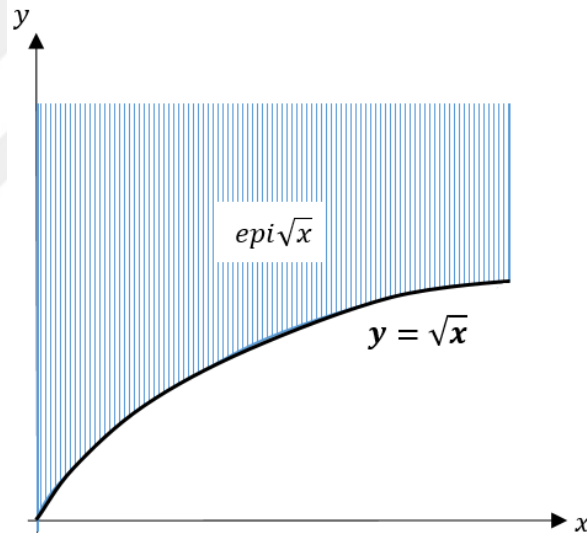
$$t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_m x_m \quad (2.1)$$

ifadesi $x_1, x_2, \dots, x_m$ noktalarının konveks kombinasyonu olarak adlandırılır [46].

Tanım 2.2 $S \subset X$ ve f, S üzerinde reel veya $\pm\infty$ değerlerini alan bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun epigrafi

$$\text{epi} f = \{(x, \mu) : x \in S, \mu \in \mathbb{R}, \mu \geq f(x)\} \quad (2.2)$$

olarak ifade edilir [46].



Şekil 2.1. $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun $\text{epi} f$ grafiği.

Teorem 2.1 $S \subset X$ kümesi konveks küme ve $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere f fonksiyonunun konveks fonksiyon olması için gerek ve yeter koşul her $x, y \in S$ ve $0 \leq t \leq 1$ için

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y) \quad (2.3)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır [19]

2.2 Soyut Konvekslik ile İlgili Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde ilk olarak, klasik konveksliğin soyutlaştırılması için kullanılan yöntemler verilecektir.

Tanım 2.2.1 H ailesi, X kümesinde tanımlı ve sonlu fonksiyonlardan oluşan bir aile, $f: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ bir fonksiyon olsun. Eğer, H fonksiyonlar ailesinin

$$f(x) = \sup_{h \in H} \{h(x)\} \quad (2.4)$$

sağlayacak biçimde bir U alt ailesi var ise, f fonksiyonuna H ailesine göre soyut konvektir (veya H – konvektir) denir ve H fonksiyonlar ailesine elemanter fonksiyonların ailesi denir [20].

Tanım 2.2.2 Y kümesi, $f: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonlarının sınıfı ve $H \subset Y$ olsun. Eğer her $f \in Y$ fonksiyonu H -konveks ise, H kümesine Y 'nin süpremal üreteç sınıfı denir [20].

Teorem 2.2.1 $f: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonunun H -konveks olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun

$$f(x) = \sup\{h(x): h \in H, h \leq f\}, \quad \forall x \in X \quad (2.5)$$

şeklinde gösterilebilmesidir [20].

Topolojik Soyut Konvekslik:

X bir vektör uzayı ve $C \subset X$ olacak şekilde bir C kümesi olsun. Her $m \geq 2$ tamsayısı için, $V_m \subset \mathbb{R}^m$ kümesi ele alınsın ve $\phi_m: C^m \times V_m \rightarrow C$ fonksiyonlar ailesi verilsin. Eğer, $U \subset C$ için

$$(x_1, x_2, \dots, x_m) \in U, (t_1, t_2, \dots, t_m) \in \phi_m \Rightarrow \phi(x_1, x_2, \dots, x_m, t_1, t_2, \dots, t_m) \in U, \quad m = 2, 3, \dots \quad (2.6)$$

ise, U kümesine ϕ_m fonksiyonlar ailesine göre soyut konvektir denir [20].

Fonksiyonel Soyut Konvekslik:

X bir vektör uzayı, $C \subset X$ ve F kümesi ise $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının bir ailesi olsun. Bu durumda, $U \subset C$ olmak üzere, her $x \notin U$ olan nokta F ailesinden bir fonksiyon ile U kümesinden ayrılabilir ise, başka bir deyişle öyle bir $f \in F$ varsa ki

$$f(x) > \sup_{u \in U} f(u) \quad (2.7)$$

sağlanır ise bu durumda U kümesine F fonksiyonlar ailesine göre soyut konvektir denir [20].

2.3 Soyut Konvekslik Çeşitleri

Bu bölümde, daha sonra da kullanılacak bazı soyut konveks fonksiyon çeşitlerinin tanımları verilecektir.

2.3.1 m-konveks fonksiyonlar

$m \in (0,1]$ olmak üzere $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in J$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx + m(1-t)y) \leq tf(x) + m(1-t)f(y) \quad (2.8)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, bu fonksiyona m-konveks fonksiyon denir [24].

2.3.2 (α, m) -konveks fonksiyonlar

$f: J \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve her $x, y \in J, t \in [0,1]$ ve $(\alpha, m) \in (0,1]^2$ için

$$f(tx + m(1-t)y) \leq t^\alpha f(x) + m(1-t^\alpha)f(y) \quad (2.9)$$

eşitsizliği sağlanıyor ise f fonksiyonuna J aralığı üzerinde (α, m) -konveks fonksiyon denir [24].

2.3.3 h-konveks fonksiyonlar

$h: [0,1] \rightarrow [0, +\infty)$ fonksiyonu, her $t \in (0,1)$ için $h(1-t) + h(t) \geq 1$ eşitsizliğini sağlasın.

$I \subset \mathbb{R}$ herhangi bir aralık olsun. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, her $x, y \in I$ ve her $t \in (0,1)$ için

$$f((1-t)x + ty) \leq h(1-t)f(x) + h(t)f(y) \quad (2.10)$$

eşitsizliğini sağlarsa f fonksiyonuna h-konveks fonksiyon denir [23].

2.3.4 (h, m) -konveks fonksiyonlar

$h: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun, $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan f fonksiyonu her $x, y \in J, m \in [0,1]$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx + m(1-t)y) \leq h(t)f(x) + mh(1-t)f(y) \quad (2.11)$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna (h, m) -konveks fonksiyon denir [13].

2.3.5 Kesin J-konveks fonksiyonlar

$f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir f fonksiyonu ve her $x, y \in I$ ve $x \neq y$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x) + f(y)}{2} \quad (2.12)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonuna I üzerinde kesin J-konveks fonksiyon denir [48].

2.3.6 φ -konveks fonksiyonlar

$\varphi: I \rightarrow I$ şeklinde tanımlı olsun. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in I$ için ,

$$f(t\varphi(x) + (1 - y)\varphi(y)) \leq tf(\varphi(x)) + (1 - t)f(\varphi(y)) \quad (2.13)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, f fonksiyonuna φ -konveks fonksiyon denir [49].

2.3.7 $s - \eta$ -konveks fonksiyon

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir f fonksiyonu ve her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx + (1 - t)y) \leq f(y) + t^s \eta(f(x), f(y)) \quad (2.14)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonu $s - \eta$ -konveks fonksiyondur denir. Burada $s \in (0,1)$ ve $\eta: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bifonksiyondur [50].

Burada, iki bağımsız değişkeni olan fonksiyonlara “çift değişkenli fonksiyonlar” ya da “bifonksiyon” denir.

2.3.8 Quasi-konveks fonksiyonlar

$I \subset \mathbb{R}$ herhangi bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx + (1 - t)y) \leq \max\{f(x), f(y)\} \quad (2.15)$$

sağlanır ise f fonksiyonuna quasi-konveks fonksiyon denir [22].

2.3.9 B-konveks kümeler ve fonksiyonlar

Tanım 2.3.7.1 Bir $A \subset \mathbb{R}_+^n$ kümesinden alınan her $x, y \in A$ ve her $t \in [0,1]$ için

$$tx \vee y \in A \quad (2.16)$$

ise A kümesine B-konveks küme denir [51].

Tanım 2.3.7.2 $A \subset \mathbb{R}_+^n$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ ve A kümesi bir B-konveks küme olmak üzere

$$f(tx \vee y) \leq tf(x) \vee f(y) \quad (2.17)$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna B-konveks fonksiyon denir [25].

2.4 B^{-1} -konveks Kümeler ve Fonksiyonlar

B^{-1} -konvekslik kavramı da, farklı bir soyut konvekslik çeşidi olup, tezde çalışılan temel unsur olması nedeniyle, bu başlık altında detaylı bir biçimde verilecektir.

2.4.1 B^{-1} -konveks kümeler

Tanım 2.4.1.1 $S \subset \mathbb{R}_{++}^n$ ve S boştan farklı bir küme olmak üzere, her $x, y \in S$ ve $t \in [1, +\infty)$ için

$$tx \wedge y \in S \quad (2.18)$$

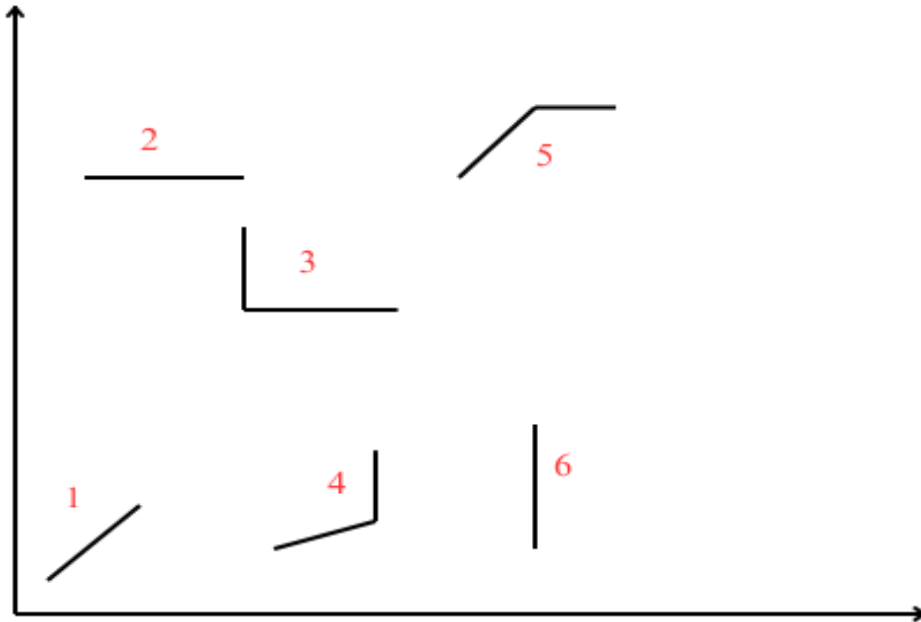
ise S kümesine B^{-1} -konveks küme denir [26].

Teorem 2.4.1.1 $\mathbb{R}_{++}^n$ üzerinden alınan bir S kümesi için,

$x_1, x_2, \dots, x_m \in S$ ve $t_1, t_2, \dots, t_m \in [1, +\infty)$ öyleki $\min\{t_1, t_2, \dots, t_m\} = 1$ için

$$\bigwedge_{i=1}^m t_i x_i \in S \quad (2.19)$$

ise S kümesi B^{-1} -konveks küme olur [26].



Şekil 2.2. Farklı durumlarda verilen ikişer nokta için B^{-1} -konveks kabuklarının grafikleri.

1. $x_1 = (1,1), y_1 = (3,3)$
2. $x_2 = (2,14), y_2 = (6,14)$
3. $x_3 = (6,12), y_3 = (10,10)$
4. $x_4 = (7,2), y_4 = (10,5)$
5. $x_5 = (12,14), y_5 = (16,16)$
6. $x_6 = (14,2), y_6 = (14,6)$

Teorem 2.4.1.2

- a) $\emptyset, \mathbb{R}_{++}^n$ ve tek elemanlı kümeler B^{-1} -konveks kümelerdir.
- b) $\{S_t : t \in \Lambda\}$ kümeler ailesi bir B^{-1} -konveks kümeler ailesi ise,

$$\bigcap_t S_t$$

kümesi de B^{-1} -konvektir.

- c) $\{S_t : t \in \Lambda\}$ kümeler ailesi bir B^{-1} -konveks kümeler ailesi olmak üzere, her $t_1, t_2 \in \Lambda$ için $S_{t_1} \cup S_{t_2} \subset S_{t_3}$ koşulunu sağlayan en az bir $t_3 \in \Lambda$ var ise,

$$\bigcup_t S_t$$

kümesi B^{-1} -konvektir [26].

2.4.2 B^{-1} -konveks fonksiyonlar

Tanım 2.4.2.1 $S \subset \mathbb{R}_{++}^n$ kümesi B^{-1} -konveks küme ve $f: S \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ fonksiyonu her $x, y \in S$ ve $t \in [1, +\infty)$ için

$$f(tx \wedge y) \leq tf(x) \wedge f(y) \quad (2.20)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, bu fonksiyona B^{-1} -konveks fonksiyon denir [26].

Önerme 2.4.2.1 f fonksiyonu B^{-1} -konveks fonksiyon olsun. Her $t \in [1, +\infty)$ ve $\sigma \leq \tau$ için $\min\{\sigma, t\tau\} = \sigma$ olduğundan,

$$f(\sigma) = f(\min\{\sigma, t\tau\}) \leq \min\{f(\sigma), tf(\tau)\} \quad (2.21)$$

itsizliği sağlanır. Buradan her $t \in [1, +\infty)$ için $f(\sigma) \leq tf(\tau)$ olur. Bu eşitsizlikten, $t = 1$ için de $f(\sigma) \leq f(\tau)$ elde edilir. Böylece, f fonksiyonun monoton artan bir fonksiyon olduğu gösterilmiş olur [52].

Örnek 2.4.2.1 $f: \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$, $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu B^{-1} -konveks fonksiyondur.

Çözüm: f fonksiyonunun B^{-1} -konveks fonksiyon olabilmesi için (2.20) eşitsizliğini sağlaması gerekmektedir. Gerçekten, $1 < t$ ise $\sqrt{t} < t$ olduğu göz önünde bulundurularak;

1. $tx \wedge y = tx$ ise

$$\sqrt{tx \wedge y} = \sqrt{tx} \leq t\sqrt{x} \quad (2.22)$$

dir. Ayrıca kök fonksiyonun artanlığından $\sqrt{tx} \leq \sqrt{y}$ olduğundan

$$f(tx \wedge y) = \sqrt{tx \wedge y} = \sqrt{tx} \leq t\sqrt{x} \wedge \sqrt{y} = tf(x) \wedge f(y) \quad (2.23)$$

elde edilir.

2. $tx \wedge y = y$ ise

$$\sqrt{tx \wedge y} = \sqrt{y} \leq \sqrt{tx} \leq t\sqrt{x} \quad (2.24)$$

olur. Dolayısıyla

$$f(tx \wedge y) = \sqrt{tx \wedge y} = \sqrt{y} \leq t\sqrt{x} \wedge \sqrt{y} = tf(x) \wedge f(y) \quad (2.25)$$

olur.

(2.20) koşulu sağlandığından, f fonksiyonu B^{-1} -konveks fonksiyon olur.

Örnek 2.4.2.2 $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_{++}$, $f(x) = e^x$ fonksiyonu B^{-1} -konkav fonksiyondur.

Çözüm: f fonksiyonunun B^{-1} -konkav fonksiyon olabilmesi için (2.20) eşitsizliğinin tersini sağlaması gerekmektedir.

$1 \leq t$ olmak üzere;

1. $tx \wedge y = tx$ ise

$$\begin{aligned} f(tx \wedge y) &= e^{tx \wedge y} \\ &= e^{tx} \\ te^x &\leq e^{tx} \end{aligned} \quad (2.26)$$

$f(x) = e^x$ fonksiyonu artan olduğundan $e^{tx} \leq e^y$ olup

$$\begin{aligned}
tf(x) \wedge tf(y) &= te^x \wedge e^y \\
&\leq e^{tx} \\
&= f(tx \wedge y)
\end{aligned} \tag{2.27}$$

sağlanır.

2. $tx \wedge y = y$ ise 11

$$\begin{aligned}
y &\leq x \\
y &\leq e^x \\
e^y &\leq te^x
\end{aligned} \tag{2.28}$$

olup $tf(x) \wedge tf(y) = te^x \wedge e^y \leq e^y = f(tx \wedge y)$ eşitsizliği sağlanır.

Bu durumda f fonksiyonu B^{-1} -konkav fonksiyondur.

Örnek 2.4.2.3 $f: (0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [0,1]$, $f(x) = \sin x$ fonksiyonu B^{-1} -konveks fonksiyondur.

Çözüm: f fonksiyonunun B^{-1} -konveks fonksiyon olabilmesi için (2.20) eşitsizliğini sağlaması gerekmektedir. $(0, \frac{\pi}{2}]$ aralığında $\sin x$ fonksiyonunun artanlığı da göz önünde bulundurularak;

1. $tx \wedge y = tx$ ise $x \leq tx \leq y$ olup,

$$\sin(tx) \leq \sin y$$

ve

$$\frac{\sin(tx)}{tx} \leq \frac{\sin x}{x} \tag{2.30}$$

$$\sin(tx) \leq t \sin x \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned}
f(tx \wedge y) = \sin(tx \wedge y) = \sin(tx) &\leq t \sin x \\
&= t \sin x \wedge \sin y \\
&= tf(x) \wedge f(y).
\end{aligned} \tag{2.32}$$

2. $tx \wedge y = y$ ise

$$y \leq tx \tag{2.33}$$

olduğunda

$$\sin y \leq \sin(tx) \leq t \sin x \tag{2.34}$$

dir. Buradan,

$$f(tx \wedge y) = \sin(tx \wedge y) = \sin y = t \sin x \wedge \sin y = tf(x) \wedge f(y). \quad (2.35)$$

Örnek 2.4.2.4 $f: (0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [0,1]$, $f(x) = \cos x$ fonksiyonu B^{-1} -konkav fonksiyondur.

Çözüm: f fonksiyonunun B^{-1} -konveks fonksiyon olabilmesi için (2.20) eşitsizliğini sağlaması gerekmektedir. $(0, \frac{\pi}{2}]$ aralığında $\cos x$ fonksiyonu azalan olduğundan,

1. $tx \wedge y = tx$ ise

$$\begin{aligned} tx &\leq y \\ \cos y &\leq \cos(tx) \end{aligned} \quad (2.36)$$

olur, buradan,

$$tf(x) \wedge f(y) = t \cos x \wedge \cos y = \cos y \leq \cos(tx) \quad (2.37)$$

2. $tx \wedge y = y$ ise

$$\begin{aligned} tf(x) \wedge f(y) &= t \cos x \wedge \cos y \leq \cos y. \\ &= \cos(tx \wedge y) = f(tx \wedge y) \end{aligned} \quad (2.38)$$

eşitsizlikleri sağlanır. f , B^{-1} -konkav fonksiyondur.

Örnek 2.4.2.5 $f: (3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_{++}$, $f(x) = \ln x$ fonksiyonu B^{-1} -konveks fonksiyondur.

Çözüm: f fonksiyonunun B^{-1} -konveks fonksiyon olabilmesi için (2.20) eşitsizliğini sağlaması gerekmektedir. $1 \leq t$ olmak üzere

1. $tx \wedge y = tx$ ise, $x \leq tx \leq y$ olup, $\ln$ fonksiyonunun artanlığından,

$$f(tx \wedge y) = f(tx) = \ln(tx) \quad (2.39)$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} tx &\leq x^t \\ \ln(tx) &\leq \ln(x^t) \\ \ln(tx) &\leq t \ln x \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$f(tx \wedge y) = \ln(tx) \leq t \ln x \wedge \ln y = tf(x) \wedge f(y). \quad (2.41)$$

dolayısıyla eşitsizlik sağlanır.

2. $tx \wedge y = y$ iken, $y \leq tx$ olup,

$$f(tx \wedge y) = f(y) = \ln y \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} y &\leq tx \\ \ln y &\leq \ln(x^t) \\ \ln y &\leq t \ln x \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$f(tx \wedge y) = \ln y = t \ln x \wedge \ln y = tf(x) \wedge f(y) \quad (2.44)$$

eşitsizlik sağlanır. f , B^{-1} -konveks fonksiyon olur.



3.KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN BAZI EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde konveks fonksiyonlar için bazı özel ve popüler eşitsizlikler verilecek ve bu eşitsizliklerin bazı soyut konveks fonksiyon tipleri için formları ifade edilecektir.

Bölümde, $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık, I^0 aralığın içi ve $\sigma, \tau \in I, \sigma < \tau$ olarak dikkate alınacaktır.

3.1 Jensen Eşitsizliği

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tanımlı fonksiyonun konveks fonksiyon olması için gerek ve yeter şart

$$f(t_1x_1 + t_2x_2 + \dots + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + \dots + t_nf(x_n) \quad (3.1)$$

eşitsizliğin sağlanmasıdır.

Burada $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ ve $t_1, t_2, \dots, t_n \geq 0$, $t_1 + t_2 + \dots + t_n = 1$ dir ve bu eşitsizlik Jensen Eşitsizliği olarak adlandırılmaktadır [27].

3.1.1 B-konveks fonksiyonlar için Jensen eşitsizliği

$f: C \subset \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ olmak üzere, f fonksiyonun B-konveks fonksiyon olması için gerek ve yeter koşul C kümesinin B-konveks küme olması ve her $x_i \in C$ ve $t_i \in [0,1]$, $i = 1, 2, \dots, m$

öyle ki $\max_{i=1,2,\dots,m} \{t_i\} = 1$ için

$$f\left(\bigvee_{i=1}^m t_i x_i\right) \leq \bigvee_{i=1}^m t_i f(x_i) \quad (3.2)$$

eşitsizliğin sağlanmasıdır [25].

3.1.2 B^{-1} -konveks fonksiyonlar için Jensen eşitsizliği

$f: C \subset \mathbb{R}_{++}^n \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ olmak üzere f fonksiyonunun B^{-1} -konveks fonksiyon olabilmesi için gerek ve yeter şart C kümesinin B^{-1} -konveks küme olması ve her $x_i \in C$ ve $t_i \in [1, +\infty)$,

$i = 1, 2, \dots, m$ öyle ki $\min_{i=1,2,\dots,m} \{t_i\} = 1$ için

$$f\left(\bigwedge_{i=1}^m t_i x_i\right) \leq \bigwedge_{i=1}^m t_i f(x_i) \quad (3.3)$$

eşitsizliğin sağlanmasıdır [53].

3.2 Ostrowski Eşitsizliği

$f: I = [\sigma, \tau] \subset [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f' \in L[\sigma, \tau]$ olacak şekilde f fonksiyonu I^0 de diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $|f'(x)| \leq M$ ise her $x \in I$ için,

$$\begin{aligned}
\left| f(x) - \frac{1}{\tau - \sigma} \int_{\sigma}^{\tau} f(t) dt \right| &\leq \frac{M}{\tau - \sigma} \left[\frac{(x - \sigma)^2 + (\tau - x)^2}{2} \right] \\
&= M(\tau - \sigma) \left[\frac{1}{4} + \frac{\left(x - \left(\frac{\sigma + \tau}{2} \right)^2 \right)}{(\tau - \sigma)^2} \right] \quad (3.4)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada ki $\frac{1}{4}$ kat sayısı bu şartlar altındaki en iyi kat sayıdır. Daha küçük olan bir katsayı ile yer değiştiremez [28]. Bu eşitsizlik Ostrowski eşitsizliği olarak isimlendirilir.

3.2.1 $(\alpha - m)$ -konveks fonksiyonlar için Ostrowski eşitsizliği

$f: I = [\sigma, \tau] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $[0, +\infty) \subset I$ diferansiyellenebilir f fonksiyonu ve $(\alpha, m) \in [0, 1] \times (0, 1]$ için, $m\sigma, m\tau \in I$ ve $f' \in L([m\sigma, m\tau])$ olmak üzere; Eğer $q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $|f'(x)| \leq M$ için $|f'|^q, [m\sigma, m\tau]$ üzerinde bir (α, m) -konveks fonksiyon ise her $x \in [m\sigma, m\tau]$ için

$$\begin{aligned}
&\left| mf(x) - \frac{1}{\tau - \sigma} \int_{m\sigma}^{m\tau} f(t) dt \right| \\
&\leq M \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\alpha m + 1}{\alpha + 1} \right)^{\frac{1}{q}} \frac{(x - m\sigma)^2 + (m\tau - x)^2}{\tau - \sigma} \quad (3.5)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır [58] .

3.2.2 $s - \eta$ -konveks fonksiyonlar için Ostrowski eşitsizliği

$f: I = [\sigma, \tau] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun diferansiyellenebilir olduğunu varsayalım. $g: I \rightarrow \mathbb{R}^+$ sürekli ve $\frac{\sigma + \tau}{2}$ ye göre simetrik fonksiyon olsun. $|f'|, s - \eta$ -konveks fonksiyon ve $\eta, [\sigma, \tau]$ üzerinde üst sınır ise,

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{f(\sigma) + f(\tau)}{2} \int_{\sigma}^{\tau} g(t) dt - \int_{\sigma}^{\tau} f(t) g(t) dt \right| \\
&\leq \frac{\tau - \sigma}{4} [2|f'(b)| + N|\eta(f'(\sigma), f'(\tau))|] \int_0^1 \int_{\frac{1+t}{2}\sigma + \frac{1-t}{2}\tau}^{\frac{1-t}{2}\sigma + \frac{1+t}{2}\tau} g(u) du dt \quad (3.6)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $N = \max_{t \in [0, 1]} \left| \left(\frac{1+t}{2} \right)^s + \left(\frac{1-t}{2} \right)^s \right|$ dir [54].

3.3 Trapezoidal Eşitsizliği

$f: I = [\sigma, \tau] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli, türevlenebilir bir fonksiyon ve $\sigma < \tau$ olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu I aralığında quasi-konveks ise

$$\left| \frac{f(\sigma) + f(\tau)}{2} - \frac{1}{\tau - \sigma} \int_{\sigma}^{\tau} f(t) dt \right| \leq \frac{\tau - \sigma}{4} \sup\{|f'(\sigma)|, |f'(\tau)|\} \quad (3.7)$$

eşitsizliği sağlanır [60].

3.3.1 B-konveks fonksiyonlar için Trapezoidal eşitsizlik

$f: I = [\sigma, \tau] \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu $[\sigma, \tau]$ kapalı aralığında B-konveks bir fonksiyon ise,

$$\left| f(\sigma) - \frac{1}{\tau - \sigma} \int_{\sigma}^{\tau} f(t) dt \right| \leq \begin{cases} \frac{3\sigma + \tau}{2} |f'(\sigma)|, & 1 \leq \frac{|f'(\sigma)|}{|f'(\tau)|} \\ \frac{(|f'(\tau)|)^2 (6\sigma\tau - 9\sigma^2) [|f'(\sigma)| + \tau^2 |f'(\tau)|]}{6(\tau - \sigma) (|f'(\tau)|)^2} + \\ \frac{\tau^2 (|f'(\sigma)|)^2 [3|f'(\tau)| - |f'(\sigma)|]}{6(\tau - \sigma) (|f'(\tau)|)^2}, & \frac{\sigma}{\tau} \leq \frac{|f'(\sigma)|}{|f'(\tau)|} < 1 \\ \frac{6\sigma\tau |f'(\sigma)| |f'(\tau)| + 3\tau^2 (|f'(\sigma)|)^2}{6\tau |f'(\tau)|} + \\ \frac{(\sigma^2 + \sigma\tau + \tau^2) (|f'(\tau)|)^2}{6\tau |f'(\tau)|}, & 0 \leq \frac{|f'(\sigma)|}{|f'(\tau)|} < \frac{\sigma}{\tau} \end{cases} \quad (3.8)$$

eşitsizliği sağlanır [55].

3.3.2 Quasi-konveks fonksiyonlar için Trapezoidal eşitsizlik

$f: I = [\sigma, \tau] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli, türevlenebilir bir fonksiyon ve $\sigma < \tau$ olsun. Eğer $|f'|^p$ fonksiyonu I aralığında quasi-konveks fonksiyon ise $1 < p$ için,

$$\left| \frac{f(\sigma) + f(\tau)}{2} - \frac{1}{\tau - \sigma} \int_{\sigma}^{\tau} f(t) dt \right| \leq \frac{\tau - \sigma}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}} (\sup\{|f'(\sigma)|^p, |f'(\tau)|^p\})^{\frac{1}{p}} \quad (3.9)$$

eşitsizliği sağlanır [60].

3.4 Hermite-Hadamard Eşitsizliği

$f: I = [\sigma, \tau] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere, f konveks fonksiyon ise,

$$f\left(\frac{\sigma + \tau}{2}\right) \leq \frac{1}{\tau - \sigma} \int_{\sigma}^{\tau} f(t) dt \leq \frac{f(\sigma) + f(\tau)}{2} \quad (3.10)$$

eşitsizliği sağlanır [30]. Bu eşitsizlik, Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak adlandırılır.

3.4.1 φ -konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği

J reel sayılarda bir aralık; $\sigma, \tau \in J$, $\sigma < \tau$ ve $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli, artan bir fonksiyon olsun.

$f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I üzerinde φ -konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\varphi(\sigma) + \varphi(\tau)}{2}\right) &\leq \frac{1}{\varphi(\tau) - \varphi(\sigma)} \int_{\varphi(\sigma)}^{\varphi(\tau)} f(\varphi(t)) d\varphi(t) \\ &\leq \frac{f(\varphi(\sigma)) + f(\varphi(\tau))}{2} \end{aligned} \quad (3.11)$$

eşitsizliği sağlanır [56].

3.4.2 m -konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği

$m \in (0,1]$ olmak üzere, $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu bir m -konveks fonksiyon olsun. Bu takdirde, eğer $0 \leq \sigma < \tau < \infty$ için $f \in L([\sigma, \tau])$ ise

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau - \sigma} \int_{\sigma}^{\tau} f(t) dt &\leq \min \left\{ \frac{f(\sigma) + mf\left(\frac{\tau}{m}\right)}{2}, \frac{mf\left(\frac{\sigma}{m}\right) + f(\tau)}{2} \right\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

eşitsizliği sağlanır [24].

3.4.3 B^{-1} -konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği

$f: I = [\sigma, \tau] \subset \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ tanımlı f fonksiyonu B^{-1} -konveks fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau - \sigma} \int_{\sigma}^{\tau} f(t) dt &\leq \begin{cases} \frac{f(\sigma)(\sigma + \tau)}{2\sigma}, & \frac{\tau}{\sigma} \leq \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} \\ \frac{2\tau f(\sigma)f(\tau) - \sigma([f(\sigma)]^2 + [f(\tau)]^2)}{2(\tau - \sigma)f(\sigma)}, & 1 \leq \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} \leq \frac{\tau}{\sigma} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.13)$$

eşitsizliği sağlanır [52].

3.5 Hermite-Hadamard-Fejer Eşitsizliği

$f: I = [\sigma, \tau] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı f fonksiyonu konveks fonksiyon ve $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı g fonksiyonu ise negatif olmayan, integrallenebilir ve $\frac{\sigma+\tau}{2}$ noktasına göre simetrik bir fonksiyon olmak üzere,

$$f\left(\frac{\sigma+\tau}{2}\right) \int_{\sigma}^{\tau} g(t) dt \leq \int_{\sigma}^{\tau} f(t)g(t) dx \leq \frac{f(\sigma) + f(\tau)}{2} \int_{\sigma}^{\tau} g(t) dt \quad (3.14)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik Hermite-Hadamard-Fejer Eşitsizliği olarak adlandırılır [30].

3.5.1 B-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliği

$f: I = [\sigma, \tau] \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu B-konveks bir fonksiyon ve $g: I \rightarrow \mathbb{R}_+$ tanımlı negatif olmayan, integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$\int_{\sigma}^{\tau} f(t)g(t) dt \leq \begin{cases} f(\sigma) \int_{\sigma}^{\tau} g(t) dt, & 1 \leq \frac{f(\sigma)}{f(\tau)} \\ f(\sigma) \int_{\sigma}^{\frac{\tau f(\sigma)}{f(\tau)}} g(t) dt + \frac{f(\tau)}{\tau} \int_{\frac{\tau f(\sigma)}{f(\tau)}}^{\tau} t g(t) dt, & 0 \leq \frac{\sigma}{\tau} \leq \frac{f(\sigma)}{f(\tau)} < 1 \\ \frac{g(\sigma)[\tau f(\sigma) - \sigma f(\tau)]^2}{2\tau f(\tau)} + \frac{f(\tau)}{\tau} \int_{\sigma}^{\tau} t g(t) dt, & 0 \leq \frac{f(\sigma)}{f(\tau)} < \frac{\sigma}{\tau} < 1 \end{cases} \quad (3.15)$$

eşitsizliği sağlanır [57].

3.5.2 h-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliği

$f: I = [\sigma, \tau] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $h(1/2) > 0$ koşulunu sağlayan h-konveks ve integrallenebilir bir fonksiyon ve $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı negatif olmayan, integrallenebilir ve $\frac{\sigma+\tau}{2}$ noktasına göre simetrik bir fonksiyon olsun. $t \in (0,1)$ için,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\frac{\sigma+\tau}{2}\right) \int_{\sigma}^{\tau} g(x) dx &\leq \int_{\sigma}^{\tau} f(x)g(x) dx \\ &\leq \frac{f(\sigma) + f(\tau)}{2} [h(t) + h(1-t)] \int_{\sigma}^{\tau} g(x) dx \end{aligned} \quad (3.16)$$

eşitsizliği sağlanır [59].

4. B⁻¹-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMİTE-HADAMARD-FEJER TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde, Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliğinin B⁻¹-konveks fonksiyonlar için formu ve bu temel eşitsizliğin farklı durumlardaki versiyonlarını içeren teoremler ispat edilecektir. Ayrıca daha sonra bu eşitsizliklere uygun özel durumlar incelenecektir.

4.1 B⁻¹-konveks Fonksiyon için Hermite-Hadamard-Fejer Eşitsizliği

Teorem 4.1 $f: I = [\sigma, \tau] \subset \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ fonksiyonu B⁻¹-konveks bir fonksiyon ve $g: I \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ tanımlı negatif olmayan, integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$\int_{\sigma}^{\tau} f(t)g(t)dt \leq \begin{cases} \frac{f(\sigma)}{\sigma} \int_{\sigma}^{\tau} tg(t)dt, & 1 \leq \frac{\tau}{\sigma} \leq \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} \\ \frac{f(\sigma)}{\sigma} \int_{\sigma}^{\frac{f(\tau)}{f(\sigma)}\sigma} tg(t)dt + f(\tau) \int_{\frac{f(\tau)}{f(\sigma)}\sigma}^{\tau} g(t)dt, & 1 \leq \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} < \frac{\tau}{\sigma} \end{cases} \quad (4.1)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $\forall \lambda \in [1, +\infty)$ ve $\sigma \leq \tau$ için $\min\{\sigma, \lambda\tau\} = \sigma$ olur. B⁻¹-konvekslik tanımından ve Önerme 2.4.2.1 den,

$$f(\sigma \wedge \lambda\tau) = f(\sigma) \leq f(\sigma) \wedge \lambda f(\tau) \quad (4.2)$$

olup, aşıkâr durumu elde edilir. Bu nedenle $\min\{\lambda\sigma, \tau\}$ durumu incelenecektir. f fonksiyonu B⁻¹-konveks olduğundan (2.20) eşitsizliği sağlanır. Eşitsizliğin her iki tarafı $g(\lambda\sigma \wedge \tau)$ ile çarpılıp $\lambda \in \left[1, \frac{\tau}{\sigma}\right]$ göre integrallendiğinde

$$\int_1^{\frac{\tau}{\sigma}} f(\lambda\sigma \wedge \tau)g(\lambda\sigma \wedge \tau)d\lambda = \int_1^{\frac{\tau}{\sigma}} f(\lambda\sigma)g(\lambda\sigma)d\lambda \quad (4.3)$$

ifadesi elde edilir. Burada $\lambda\sigma = t$ dönüşümü yapılır ise

$$\frac{1}{\sigma} \int_{\sigma}^{\tau} f(t)g(t)dt \quad (4.4)$$

olur. Ayrıca eşitsizliğin sağ tarafı için

$$\int_1^{\frac{\tau}{\sigma}} f(\lambda\sigma \wedge \tau)g(\lambda\sigma \wedge \tau)d\lambda \leq \int_1^{\frac{\tau}{\sigma}} (\lambda f(\sigma) \wedge f(\tau))g(\lambda\sigma \wedge \tau)d\lambda \quad (4.5)$$

ifadesinin sağ kısmı incelenecektir. Bu halde, aşağıdaki durumlar ortaya çıkar:

1. $1 \leq \frac{\tau}{\sigma} \leq \frac{f(\tau)}{f(\sigma)}$ durumunda;

$$\begin{aligned}
 \int_1^{\frac{\tau}{\sigma}} (\lambda f(\sigma) \wedge f(\tau)) g(\lambda \sigma \wedge \tau) d\lambda &= \int_1^{\frac{\tau}{\sigma}} \lambda f(\sigma) g(\lambda \sigma) d\lambda \\
 &= f(\sigma) \int_1^{\frac{\tau}{\sigma}} \lambda g(\lambda \sigma) d\lambda \\
 &= \frac{f(\sigma)}{\sigma^2} \int_{\sigma}^{\tau} t g(t) dt
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

olur. Buradan eşitsizlik

$$\frac{1}{\sigma} \int_{\sigma}^{\tau} f(t) g(t) dt \leq \frac{f(\sigma)}{\sigma^2} \int_{\sigma}^{\tau} t g(t) dt \tag{4.7}$$

$$\int_{\sigma}^{\tau} f(t) g(t) dt \leq \frac{f(\sigma)}{\sigma} \int_{\sigma}^{\tau} t g(t) dt \tag{4.8}$$

şekline dönüşür.

2. Eğer $1 \leq \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} < \frac{\tau}{\sigma}$ ise

$$\begin{aligned}
 \int_1^{\frac{\tau}{\sigma}} (\lambda f(\sigma) \wedge f(\tau)) g(\lambda \sigma \wedge \tau) d\lambda &= \int_1^{\frac{f(\tau)}{f(\sigma)}} (\lambda f(\sigma) \wedge f(\tau)) g(\lambda \sigma \wedge \tau) d\lambda \\
 &\quad + \int_{\frac{f(\tau)}{f(\sigma)}}^{\frac{\tau}{\sigma}} (\lambda f(\sigma) \wedge f(\tau)) g(\lambda \sigma \wedge \tau) d\lambda \\
 &= \int_1^{\frac{f(\tau)}{f(\sigma)}} \lambda f(\sigma) g(\lambda \sigma) d\lambda \\
 &\quad + \int_{\frac{f(\tau)}{f(\sigma)}}^{\frac{\tau}{\sigma}} f(\tau) g(\lambda \sigma) d\lambda
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

olur. Burada tekrar $\lambda \sigma = t$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}
& \int_1^{\frac{f(\tau)}{f(\sigma)}} \lambda f(\sigma) g(\lambda \sigma) d\lambda + \int_{\frac{f(\tau)}{f(\sigma)}}^{\frac{\tau}{\sigma}} f(\tau) g(\lambda \sigma) d\lambda \\
&= \frac{f(\sigma)}{\sigma^2} \int_{\sigma}^{\sigma \frac{f(\tau)}{f(\sigma)}} t g(t) dt + \frac{f(\tau)}{\sigma} \int_{\sigma \frac{f(\tau)}{f(\sigma)}}^{\tau} g(t) dt
\end{aligned} \tag{4.10}$$

olup, buradan eşitsizlik

$$\frac{1}{\sigma} \int_{\sigma}^{\tau} f(t) g(t) dt \leq \frac{f(\sigma)}{\sigma^2} \int_{\sigma}^{\sigma \frac{f(\tau)}{f(\sigma)}} t g(t) dt + \frac{f(\tau)}{\sigma} \int_{\sigma \frac{f(\tau)}{f(\sigma)}}^{\tau} g(t) dt \tag{4.11}$$

$$\int_{\sigma}^{\tau} f(t) g(t) dt \leq \frac{f(\sigma)}{\sigma} \int_{\sigma}^{\sigma \frac{f(\tau)}{f(\sigma)}} t g(t) dt + f(\tau) \int_{\sigma \frac{f(\tau)}{f(\sigma)}}^{\tau} g(t) dt \tag{4.12}$$

ifadesi elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 4.2 $f: I = [\sigma, \tau] \subset \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ fonksiyonu B^{-1} -konveks bir fonksiyon ve $g: I \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ tanımlı, integrallenebilir fonksiyonu da B^{-1} -konveks olmak üzere

$$\int_{\sigma}^{\tau} f(t) g(t) dt \leq$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{f(\sigma)g(\sigma)(\tau^3 - \sigma^3)}{3\sigma^2}, \\ \frac{g(\sigma)[f(\sigma)]^2(3\tau^2 f(\tau) - 2\sigma^2 f(\sigma))}{6\sigma[f(\sigma)]^2} - \\ \frac{g(\sigma)\sigma^2[f(\tau)]^3}{6\sigma[f(\sigma)]^2}, \\ \frac{3g(\tau)[f(\sigma)]^2 f(\tau)(2\tau g(\sigma) - \sigma g(\tau))}{6g(\sigma)[f(\sigma)]^2} - \\ \frac{\sigma[g(\sigma)]^2(2[f(\sigma)]^3 + [f(\tau)]^3)}{6g(\sigma)[f(\sigma)]^2}, \\ \frac{3[g(\sigma)]^2 g(\tau) f(\tau)(2\tau g(\sigma) - \sigma f(\tau))}{6[g(\sigma)]^2 f(\sigma)} - \\ \frac{\sigma[f(\sigma)]^2(2[g(\sigma)]^3 + [g(\tau)]^3)}{6[g(\sigma)]^2 f(\sigma)}, \\ \frac{3\tau^2 f(\sigma)[g(\sigma)]^2 g(\tau)}{6\sigma[g(\sigma)]^2} - \\ \frac{\sigma^2 f(\sigma)([g(\tau)]^3 - 2[g(\sigma)]^3)}{6\sigma[g(\sigma)]^2}, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \frac{\tau}{\sigma} \leq \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} \leq \frac{g(\tau)}{g(\sigma)} \\ 1 \leq \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} \leq \frac{\tau}{\sigma} \leq \frac{g(\tau)}{g(\sigma)} \\ 1 < \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} \leq \frac{g(\tau)}{g(\sigma)} < \frac{\tau}{\sigma} \\ 1 \leq \frac{g(\tau)}{g(\sigma)} < \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} < \frac{\tau}{\sigma} \\ 1 < \frac{g(\tau)}{g(\sigma)} < \frac{\tau}{\sigma} < \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} \end{array} \quad (4.13)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: f ve g fonksiyonu B^{-1} -konveks olduğundan (2.20) eşitsizliğini sağlarlar. f fonksiyonu için geçerli (2.3) eşitsizliğin her iki tarafı $g(\lambda\sigma \wedge \tau)$ ile çarpılıp $\lambda \in \left[1, \frac{\tau}{\sigma}\right]$ göre integrallendiğinde sol kısım için

$$\int_1^{\frac{\tau}{\sigma}} f(\lambda\sigma \wedge \tau) g(\lambda\sigma \wedge \tau) d\lambda = \int_1^{\frac{\tau}{\sigma}} f(\lambda\sigma) g(\lambda\sigma) d\lambda \quad (4.14)$$

ifadesi elde edilir. Burada $\lambda\sigma = t$ dönüşümü yapılır ise

$$\frac{1}{\sigma} \int_{\sigma}^{\tau} f(t) g(t) dt \quad (4.15)$$

olur. Ayrıca eşitsizliğin sağ tarafı, f ve g fonksiyonunun B^{-1} -konveksliğinden

$$\int_1^{\frac{\tau}{\sigma}} f(\lambda\sigma \wedge \tau) g(\lambda\sigma \wedge \tau) d\lambda \leq \int_1^{\frac{\tau}{\sigma}} (\lambda f(\sigma) \wedge f(\tau)) (\lambda g(\sigma) \wedge g(\tau)) d\lambda \quad (4.16)$$

olur. İfadenin sağ kısmı ele alındığında; aşağıdaki durumlar karşımıza çıkmaktadır.

1. $\frac{\tau}{\sigma} \leq \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} \leq \frac{g(\tau)}{g(\sigma)}$ ise,

$$\begin{aligned}
\int_1^{\frac{\tau}{\sigma}} (\lambda f(\sigma) \wedge f(\tau)) (\lambda g(\sigma) \wedge g(\tau)) d\lambda &= \int_1^{\frac{\tau}{\sigma}} \lambda f(\sigma) \lambda g(\sigma) d\lambda = f(\sigma) g(\sigma) \int_1^{\frac{\tau}{\sigma}} \lambda^2 d\lambda \\
&= f(\sigma) g(\sigma) \frac{1}{3} \left(\frac{\tau^3}{\sigma^3} - 1 \right) \\
&= \frac{f(\sigma) g(\sigma) (\tau^3 - \sigma^3)}{3\sigma^3}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

olur. Buradan

$$\frac{1}{\sigma} \int_{\sigma}^{\tau} f(t) g(t) dt \leq \frac{f(\sigma) g(\sigma) (\tau^3 - \sigma^3)}{3\sigma^3} \tag{4.18}$$

$$\int_{\sigma}^{\tau} f(t) g(t) dt \leq \frac{f(\sigma) g(\sigma) (\tau^3 - \sigma^3)}{3\sigma^2} \tag{4.19}$$

eşitsizliği elde edilir.

2. $\frac{f(\tau)}{f(\sigma)} \leq \frac{g(\tau)}{g(\sigma)}$ olması durumunda iki durum incelenecektir;

i. $1 \leq \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} \leq \frac{\tau}{\sigma} \leq \frac{g(\tau)}{g(\sigma)}$ ise,

$$\begin{aligned}
&\int_1^{\frac{\tau}{\sigma}} (\lambda f(\sigma) \wedge f(\tau)) (\lambda g(\sigma) \wedge g(\tau)) d\lambda \\
&= \int_1^{\frac{f(\tau)}{f(\sigma)}} (\lambda f(\sigma) \wedge f(\tau)) (\lambda g(\sigma) \wedge g(\tau)) d\lambda \\
&\quad + \int_{\frac{f(\tau)}{f(\sigma)}}^{\frac{\tau}{\sigma}} (\lambda f(\sigma) \wedge f(\tau)) (\lambda g(\sigma) \wedge g(\tau)) d\lambda \\
&= \int_1^{\frac{f(\tau)}{f(\sigma)}} \lambda f(\sigma) \lambda g(\sigma) d\lambda + \int_{\frac{f(\tau)}{f(\sigma)}}^{\frac{\tau}{\sigma}} f(\tau) \lambda g(\sigma) d\lambda \\
&= f(\sigma) g(\sigma) \int_1^{\frac{f(\tau)}{f(\sigma)}} \lambda^2 d\lambda + f(\tau) g(\sigma) \int_{\frac{f(\tau)}{f(\sigma)}}^{\frac{\tau}{\sigma}} \lambda d\lambda
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{f(\sigma)g(\sigma)}{3} \left(\frac{[f(\tau)]^3 - [f(\sigma)]^3}{[f(\sigma)]^3} \right) + \frac{f(\tau)g(\sigma)}{2} \left(\frac{\tau^2}{\sigma^2} - \frac{[f(\tau)]^2}{[f(\sigma)]^2} \right) \\
&= \frac{g(\sigma)}{3} \left(\frac{[f(\tau)]^3 - [f(\sigma)]^3}{[f(\sigma)]^2} \right) + \frac{f(\tau)g(\sigma)}{2} \left(\frac{[\tau f(\sigma)]^2 - [\sigma f(\tau)]^2}{\sigma^2 [f(\sigma)]^2} \right) \\
&= g(\sigma) \left(\frac{[f(\sigma)]^2 (3\tau^2 f(\tau) - 2\sigma^2 f(\sigma)) - \sigma^2 [f(\tau)]^3}{6\sigma^2 [f(\sigma)]^2} \right) \quad (4.20)
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Buradan eşitsizlik

$$\frac{1}{\sigma} \int_{\sigma}^{\tau} f(t)g(t)dt \leq g(\sigma) \left(\frac{[f(\sigma)]^2 (3\tau^2 f(\tau) - 2\sigma^2 f(\sigma)) - \sigma^2 [f(\tau)]^3}{6\sigma^2 [f(\sigma)]^2} \right) \quad (4.21)$$

$$\int_{\sigma}^{\tau} f(t)g(t)dt \leq g(\sigma) \left(\frac{[f(\sigma)]^2 (3\tau^2 f(\tau) - 2\sigma^2 f(\sigma)) - \sigma^2 [f(\tau)]^3}{6\sigma [f(\sigma)]^2} \right) \quad (4.22)$$

olur.

ii. $1 < \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} \leq \frac{g(\tau)}{g(\sigma)} < \frac{\tau}{\sigma}$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\int_{\sigma}^{\tau} (\lambda f(\sigma) \wedge f(\tau)) (\lambda g(\sigma) \wedge g(\tau)) d\lambda &= \int_1^{\frac{f(\tau)}{f(\sigma)}} (\lambda f(\sigma) \wedge f(\tau)) (\lambda g(\sigma) \wedge g(\tau)) d\lambda \\
&= \int_{\frac{g(\tau)}{g(\sigma)}}^{\frac{f(\tau)}{f(\sigma)}} (\lambda f(\sigma) \wedge f(\tau)) (\lambda g(\sigma) \wedge g(\tau)) d\lambda \\
&= \int_1^{\frac{f(\tau)}{f(\sigma)}} \lambda f(\sigma) \lambda g(\sigma) d\lambda + \int_{\frac{f(\tau)}{f(\sigma)}}^{\frac{g(\tau)}{g(\sigma)}} f(\tau) \lambda g(\sigma) d\lambda + \int_{\frac{g(\tau)}{g(\sigma)}}^{\frac{\tau}{\sigma}} f(\tau) g(\tau) d\lambda \\
&= \frac{f(\sigma)g(\sigma)}{3} \left(\frac{[f(\tau)]^3 - [f(\sigma)]^3}{[f(\sigma)]^3} \right) + \frac{f(\tau)g(\sigma)}{2} \left(\frac{[g(\tau)]^2}{[g(\sigma)]^2} - \frac{[f(\tau)]^2}{[f(\sigma)]^2} \right) \\
&\quad + f(\tau)g(\tau) \left(\frac{\tau}{\sigma} - \frac{g(\tau)}{g(\sigma)} \right) \\
&= \frac{3g(\tau)[f(\sigma)]^2 f(\tau) (2\tau g(\sigma) - \sigma g(\tau))}{6\sigma g(\sigma) [f(\sigma)]^2} \\
&\quad - \frac{\sigma [g(\sigma)]^2 (2[f(\sigma)]^3 + [f(\tau)]^3)}{6\sigma g(\sigma) [f(\sigma)]^2} \quad (4.23)
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir, buradan

$$\frac{1}{\sigma} \int_{\sigma}^{\tau} f(t)g(t)dt \leq \frac{3g(\tau)[f(\sigma)]^2 f(\tau)(2\tau g(\sigma) - \sigma g(\tau))}{6\sigma g(\sigma)[f(\sigma)]^2} - \frac{\sigma[g(\sigma)]^2(2[f(\sigma)]^3 + [f(\tau)]^3)}{6\sigma g(\sigma)[f(\sigma)]^2} \quad (4.24)$$

$$\int_{\sigma}^{\tau} f(t)g(t)dt \leq \frac{3g(\tau)[f(\sigma)]^2 f(\tau)(2\tau g(\sigma) - \sigma g(\tau))}{6g(\sigma)[f(\sigma)]^2} - \frac{\sigma[g(\sigma)]^2(2[f(\sigma)]^3 + [f(\tau)]^3)}{6g(\sigma)[f(\sigma)]^2} \quad (4.25)$$

eşitsizliği elde edilir.

3. $\frac{g(\tau)}{g(\sigma)} < \frac{f(\tau)}{f(\sigma)}$ olması durumunda ise,

i.1 $\leq \frac{g(\tau)}{g(\sigma)} < \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} < \frac{\tau}{\sigma}$ olabilir. Böylece,

$$\int_1^{\frac{\tau}{\sigma}} (\lambda f(\sigma) \wedge f(\tau))(\lambda g(\sigma) \wedge g(\tau)) d\lambda$$

$$\begin{aligned} &= \int_1^{\frac{g(\tau)}{g(\sigma)}} (\lambda f(\sigma) \wedge f(\tau))(\lambda g(\sigma) \wedge g(\tau)) d\lambda \\ &+ \int_{\frac{g(\tau)}{g(\sigma)}}^{\frac{f(\tau)}{f(\sigma)}} (\lambda f(\sigma) \wedge f(\tau))(\lambda g(\sigma) \wedge g(\tau)) d\lambda \\ &+ \int_{\frac{f(\tau)}{f(\sigma)}}^{\frac{\tau}{\sigma}} (\lambda f(\sigma) \wedge f(\tau))(\lambda g(\sigma) \wedge g(\tau)) d\lambda \\ &= \int_1^{\frac{g(\tau)}{g(\sigma)}} \lambda f(\sigma) \lambda g(\sigma) d\lambda \\ &+ \int_{\frac{g(\tau)}{g(\sigma)}}^{\frac{f(\tau)}{f(\sigma)}} \lambda f(\sigma) g(\tau) d\lambda + \int_{\frac{f(\tau)}{f(\sigma)}}^{\frac{\tau}{\sigma}} f(\tau) g(\tau) d\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{f(\sigma)g(\sigma)}{3} \left(\frac{[g(\tau)]^3 - [g(\sigma)]^3}{[g(\sigma)]^3} \right) + \frac{f(\sigma)g(\tau)}{2} \left(\frac{[f(\tau)]^2}{[f(\sigma)]^2} - \frac{[g(\tau)]^2}{[g(\sigma)]^2} \right) \\
&\quad + f(\tau)g(\tau) \left(\frac{\tau}{\sigma} - \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} \right)
\end{aligned} \tag{4.21}$$

ifadesi elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma} \int_{\sigma}^{\tau} f(t)g(t)dt &\leq \frac{3[g(\sigma)]^2 g(\tau) f(\tau) (2\tau g(\sigma) - \sigma f(\tau))}{6\sigma [g(\sigma)]^2 f(\sigma)} \\
&\quad - \frac{\sigma [f(\sigma)]^2 (2[g(\sigma)]^3 + [g(\tau)]^3)}{6\sigma [g(\sigma)]^2 f(\sigma)}
\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\sigma}^{\tau} f(t)g(t)dt &\leq \frac{3[g(\sigma)]^2 g(\tau) f(\tau) (2\tau g(\sigma) - \sigma f(\tau))}{6[g(\sigma)]^2 f(\sigma)} \\
&\quad - \frac{\sigma [f(\sigma)]^2 (2[g(\sigma)]^3 + [g(\tau)]^3)}{6[g(\sigma)]^2 f(\sigma)}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

eşitsizliği elde edilir.

$$\text{ii. } 1 < \frac{g(\tau)}{g(\sigma)} < \frac{\tau}{\sigma} < \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} \text{ için}$$

$$\int_1^{\frac{\tau}{\sigma}} (\lambda f(\sigma) \wedge f(\tau)) (\lambda g(\sigma) \wedge g(\tau)) d\lambda$$

$$\begin{aligned}
&\frac{g(\tau)}{g(\sigma)} \\
&= \int_1^{\frac{g(\tau)}{g(\sigma)}} (\lambda f(\sigma) \wedge f(\tau)) (\lambda g(\sigma) \wedge g(\tau)) d\lambda \\
&\quad - \int_{\frac{g(\tau)}{g(\sigma)}}^{\frac{\tau}{\sigma}} (\lambda f(\sigma) \wedge f(\tau)) (\lambda g(\sigma) \wedge g(\tau)) d\lambda \\
&= \int_1^{\frac{g(\tau)}{g(\sigma)}} \lambda f(\sigma) \lambda g(\sigma) d\lambda + \int_{\frac{g(\tau)}{g(\sigma)}}^{\frac{\tau}{\sigma}} \lambda f(\sigma) g(\tau) d\lambda \\
&= \frac{f(\sigma)g(\sigma)}{3} \left(\frac{[g(\tau)]^3 - [g(\sigma)]^3}{[g(\sigma)]^3} \right) \\
&\quad + \frac{f(\sigma)g(\tau)}{2} \left(\frac{\tau^2}{\sigma^2} - \frac{[g(\tau)]^2}{[g(\sigma)]^2} \right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{3\tau^2 f(\sigma)[g(\sigma)]^2 g(\tau) - \sigma^2 f(\sigma)([g(\tau)]^3 - 2[g(\sigma)]^3)}{6\sigma^2[g(\sigma)]^2} \quad (4.24)$$

ifadesi elde edilip eşitsizlik

$$\frac{1}{\sigma} \int_{\sigma}^{\tau} f(t)g(t)dt \leq \frac{3\tau^2 f(\sigma)[g(\sigma)]^2 g(\tau) - \sigma^2 f(\sigma)([g(\tau)]^3 - 2[g(\sigma)]^3)}{6\sigma^2[g(\sigma)]^2} \quad (4.25)$$

$$\int_{\sigma}^{\tau} f(t)g(t)dt \leq \frac{3\tau^2 f(\sigma)[g(\sigma)]^2 g(\tau) - \sigma^2 f(\sigma)([g(\tau)]^3 - 2[g(\sigma)]^3)}{6\sigma[g(\sigma)]^2} \quad (4.26)$$

şeklinde yazılır. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 4.3 $f: I = [\sigma, \tau] \subset \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ fonksiyonu B^{-1} konveks bir fonksiyon ve $g: I \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ fonksiyonu türevlenebilir ve $g' \in L[\sigma, \tau]$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \int_{\sigma}^{\tau} f(t)g'(t)dt \\ & \leq \begin{cases} \frac{f(\sigma)}{\sigma} \left(\tau g(\tau) - \sigma g(\sigma) - \int_{\sigma}^{\tau} g(t)dt \right), & 1 \leq \frac{\tau}{\sigma} \leq \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} \\ f(\tau)g(\tau) - f(\sigma)g(\sigma) - \frac{f(\sigma)}{\sigma} \int_{\sigma}^{\tau} g(t)dt, & 1 \leq \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} < \frac{\tau}{\sigma} \end{cases} \quad (4.27) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: f fonksiyonu B^{-1} -konveks olduğundan (2.20) eşitsizliğini sağlar. f fonksiyonu için geçerli (2.20) eşitsizliğinin her iki tarafı $g'(\lambda\sigma \wedge \tau)$ ile çarpılıp $\lambda \in \left[1, \frac{\tau}{\sigma}\right]$ göre integrallendiğinde, sol kısım için

$$\int_1^{\frac{\tau}{\sigma}} f(\lambda\sigma \wedge \tau)g'(\lambda\sigma \wedge \tau)d\lambda = \int_1^{\frac{\tau}{\sigma}} f(\lambda\sigma)g'(\lambda\sigma)d\lambda \quad (4.28)$$

elde edilir ve $\lambda\sigma = t$ dönüşümü uygulanırsa

$$\int_1^{\frac{\tau}{\sigma}} f(\lambda\sigma)g'(\lambda\sigma)d\lambda = \frac{1}{\sigma} \int_{\sigma}^{\tau} f(t)g'(t)dt \quad (4.29)$$

olur. Ayrıca eşitsizliğin sağ tarafı için

$$\int_1^{\frac{\tau}{\sigma}} f(\lambda\sigma \wedge \tau) g'(\lambda\sigma \wedge \tau) d\lambda \leq \int_1^{\frac{\tau}{\sigma}} (\lambda f(\sigma) \wedge f(\tau)) g'(\lambda\sigma \wedge \tau) d\lambda \quad (4.30)$$

ifadesinin sağ tarafı incelenecektir.

$$1. \quad 1 \leq \frac{\tau}{\sigma} \leq \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} \text{ ise,}$$

$$\int_1^{\frac{\tau}{\sigma}} (\lambda f(\sigma) \wedge f(\tau)) g'(\lambda\sigma \wedge \tau) d\lambda = \int_1^{\frac{\tau}{\sigma}} \lambda f(\sigma) g'(\lambda\sigma) d\lambda \quad (4.31)$$

burada $\lambda\sigma = t$ değişken değiştirmesi yapılırsa integral

$$\int_1^{\frac{\tau}{\sigma}} \lambda f(\sigma) g'(\lambda\sigma) d\lambda = \frac{f(\sigma)}{\sigma^2} \int_{\sigma}^{\tau} t g'(t) dt \quad (4.32)$$

olur. Burada kısmi integrasyon uygulanırsa integral sonucu

$$\frac{f(\sigma)}{\sigma^2} \int_{\sigma}^{\tau} t g'(t) dt = \frac{f(\sigma)}{\sigma^2} \left(\tau g(\tau) - \sigma g(\sigma) - \int_{\sigma}^{\tau} g(t) dt \right) \quad (4.33)$$

olur. Buradan

$$\frac{1}{\sigma} \int_{\sigma}^{\tau} f(t) g'(t) dt \leq \frac{f(\sigma)}{\sigma^2} \left(\tau g(\tau) - \sigma g(\sigma) - \int_{\sigma}^{\tau} g(t) dt \right) \quad (4.34)$$

$$\int_{\sigma}^{\tau} f(t) g'(t) dt \leq \frac{f(\sigma)}{\sigma} \left(\tau g(\tau) - \sigma g(\sigma) - \int_{\sigma}^{\tau} g(t) dt \right) \quad (4.35)$$

eşitsizliği elde edilir.

$$2. \quad 1 \leq \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} < \frac{\tau}{\sigma} \text{ ise,}$$

$$\begin{aligned}
& \int_1^{\frac{\tau}{\sigma}} (\lambda f(\sigma) \wedge f(\tau)) g'(\lambda \sigma \wedge \tau) d\lambda \\
&= \int_1^{\frac{f(\tau)}{f(\sigma)}} (\lambda f(\sigma) \wedge f(\tau)) g'(\lambda \sigma \wedge \tau) d\lambda \\
&+ \int_{\frac{f(\tau)}{f(\sigma)}}^{\frac{\tau}{\sigma}} (\lambda f(\sigma) \wedge f(\tau)) g'(\lambda \sigma \wedge \tau) d\lambda \\
&= \int_1^{\frac{f(\tau)}{f(\sigma)}} \lambda f(\sigma) g'(\lambda \sigma) d\lambda + \int_{\frac{f(\tau)}{f(\sigma)}}^{\frac{\tau}{\sigma}} f(\tau) g'(\lambda \sigma) d\lambda \quad (4.36)
\end{aligned}$$

$\lambda \sigma = t$ dönüşümü yapılırsa integral

$$\begin{aligned}
& \int_1^{\frac{f(\tau)}{f(\sigma)}} \lambda f(\sigma) g'(\lambda \sigma) d\lambda + \int_{\frac{f(\tau)}{f(\sigma)}}^{\frac{\tau}{\sigma}} f(\tau) g'(\lambda \sigma) d\lambda \\
&= \frac{f(\sigma)}{\sigma^2} \int_{\sigma}^{\sigma \frac{f(\tau)}{f(\sigma)}} t g'(t) dt + \frac{f(\tau)}{\sigma} \int_{\sigma \frac{f(\tau)}{f(\sigma)}}^{\tau} g'(t) dt \quad (4.37)
\end{aligned}$$

olur ve eşitlikteki ilk integrale kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{f(\sigma)}{\sigma^2} \int_{\sigma}^{\sigma \frac{f(\tau)}{f(\sigma)}} t g'(t) dt + \frac{f(\tau)}{\sigma} \int_{\sigma \frac{f(\tau)}{f(\sigma)}}^{\tau} g'(t) dt \\
&= \frac{f(\sigma)}{\sigma^2} \left(\frac{f(\tau)}{f(\sigma)} \sigma g \left(\sigma \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} \right) - \sigma g(\sigma) - \int_{\sigma}^{\sigma \frac{f(\tau)}{f(\sigma)}} g(t) dt \right) \\
&+ \frac{f(\tau)}{\sigma} \left(g(\tau) - g \left(\sigma \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} \right) \right) \\
&= \frac{f(\tau)}{\sigma} g(\tau) - \frac{f(\sigma)}{\sigma} g(\sigma) - \frac{f(\sigma)}{\sigma^2} \int_{\sigma}^{\tau} g(t) dt
\end{aligned} \tag{4.38}$$

sonucu elde edilir. Buradan

$$\frac{1}{\sigma} \int_{\sigma}^{\tau} f(t) g'(t) dt \leq \frac{f(\tau)}{\sigma} g(\tau) - \frac{f(\sigma)}{\sigma} g(\sigma) - \frac{f(\sigma)}{\sigma^2} \int_{\sigma}^{\tau} g(t) dt \tag{4.39}$$

$$\int_{\sigma}^{\tau} f(t) g'(t) dt \leq f(\tau) g(\tau) - f(\sigma) g(\sigma) - \frac{f(\sigma)}{\sigma} \int_{\sigma}^{\tau} g(t) dt \tag{4.40}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 4.4 $f: I = [\sigma, \tau] \subset \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ fonksiyonu B^{-1} -konveks bir fonksiyon ve $g: I \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ fonksiyonu türevlenebilir, türevi B^{-1} -konveks ve $g' \in L[\sigma, \tau]$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
& \int_{\sigma}^{\tau} f(t)g'(t)dt \leq \\
& \left\{ \begin{array}{ll}
\frac{f(\sigma)g'(\sigma)(\tau^3 - \sigma^3)}{3\sigma^2}, & \frac{\tau}{\sigma} \leq \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} \leq \frac{g'(\tau)}{g'(\sigma)} \\
\frac{3\tau^2 g'(\sigma)f(\tau)[f(\sigma)]^2}{6\sigma[f(\sigma)]^2} - \frac{\sigma^2 g'(\sigma)(2[f(\sigma)]^3 + [f(\tau)]^3)}{6\sigma[f(\sigma)]^2}, & 1 \leq \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} < \frac{\tau}{\sigma} \leq \frac{g'(\tau)}{g'(\sigma)} \\
\frac{3g'(\tau)[f(\sigma)]^2(2\tau g'(\sigma) - \sigma g'(\tau))}{6g'(\sigma)[f(\sigma)]^2} - \frac{\sigma[g'(\sigma)]^2([f(\tau)]^3 - 2[f(\sigma)]^3)}{6g'(\sigma)[f(\sigma)]^2}, & 1 < \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} \leq \frac{g'(\tau)}{g'(\sigma)} < \frac{\tau}{\sigma} \\
\frac{f(\sigma)[g'(\sigma)]^2(3\tau^2 g'(\tau) - 2\sigma^2 g'(\sigma))}{6\sigma[g'(\sigma)]^2} - \frac{\sigma^2 f(\sigma)[g'(\tau)]^3}{6\sigma[g'(\sigma)]^2}, & 1 \leq \frac{g'(\tau)}{g'(\sigma)} < \frac{\tau}{\sigma} < \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} \\
\frac{3[g'(\sigma)]^2 g'(\tau)f(\tau)(2\tau f(\sigma) - \sigma f(\tau))}{6f(\sigma)[g'(\sigma)]^2} - \frac{\sigma[f(\sigma)]^2(2[g'(\sigma)]^3 + [g'(\tau)]^3)}{6f(\sigma)[g'(\sigma)]^2}, & 1 < \frac{g'(\tau)}{g'(\sigma)} < \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} < \frac{\tau}{\sigma}
\end{array} \right. \quad (4.41)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: f ve g' fonksiyonları B^{-1} -konveks olduğundan (2.20) eşitsizliğini sağlar. f fonksiyonu için geçerli (2.20) eşitsizliğinin her iki tarafı $g'(\lambda\sigma \wedge \tau)$ ile çarpılıp $\lambda \in \left[1, \frac{\tau}{\sigma}\right]$ göre integrallendiğinde sol kısım için

$$\int_1^{\frac{\tau}{\sigma}} f(\lambda\sigma \wedge \tau)g'(\lambda\sigma \wedge \tau)d\lambda = \int_1^{\frac{\tau}{\sigma}} f(\lambda\sigma)g'(\lambda\sigma)d\lambda. \quad (4.42)$$

elde edilir, $\lambda\sigma = t$ dönüşümü uygulanırsa

$$\int_1^{\frac{\tau}{\sigma}} f(\lambda\sigma)g'(\lambda\sigma)d\lambda = \frac{1}{\sigma} \int_{\sigma}^{\tau} f(t)g'(t)dt \quad (4.43)$$

olur. Ayrıca eşitsizliğin sağ tarafı için, f ve g' fonksiyonlarının B^{-1} -konveksliğinden

$$\int_1^{\frac{\tau}{\sigma}} f(\lambda\sigma \wedge \tau) g'(\lambda\sigma \wedge \tau) d\lambda \leq \int_1^{\frac{\tau}{\sigma}} (\lambda f(\sigma) \wedge f(\tau)) (\lambda g'(\sigma) \wedge g'(\tau)) d\lambda \quad (4.44)$$

eşitsizliği ortaya çıkar ve sağ taraftaki integral aşağıdaki koşullar altında incelenir.

$$1. \quad \frac{\tau}{\sigma} \leq \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} \leq \frac{g'(\tau)}{g'(\sigma)} \text{ ise,}$$

$$\begin{aligned} \int_1^{\frac{\tau}{\sigma}} (\lambda f(\sigma) \wedge f(\tau)) (\lambda g'(\sigma) \wedge g'(\tau)) d\lambda &= \int_1^{\frac{\tau}{\sigma}} \lambda f(\sigma) \lambda g'(\sigma) d\lambda \\ &= f(\sigma) g'(\sigma) \int_1^{\frac{\tau}{\sigma}} \lambda^2 d\lambda = f(\sigma) g'(\sigma) \frac{1}{3} \left(\frac{\tau^3}{\sigma^3} - 1 \right) \\ &= \frac{f(\sigma) g'(\sigma) (\tau^3 - \sigma^3)}{3\sigma^3} \end{aligned} \quad (4.45)$$

olur. Buradan

$$\frac{1}{\sigma} \int_{\sigma}^{\tau} f(t) g'(t) dt \leq \frac{f(\sigma) g'(\sigma) (\tau^3 - \sigma^3)}{3\sigma^3} \quad (4.46)$$

$$\int_{\sigma}^{\tau} f(t) g'(t) dt \leq \frac{f(\sigma) g'(\sigma) (\tau^3 - \sigma^3)}{3\sigma^2} \quad (4.47)$$

eşitsizliği elde edilir.

$$2. \quad \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} \leq \frac{g'(\tau)}{g'(\sigma)} \text{ ise, aşağıdaki iki durum ortaya çıkmaktadır}$$

$$i. \quad 1 \leq \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} < \frac{\tau}{\sigma} \leq \frac{g'(\tau)}{g'(\sigma)}$$

$$\begin{aligned}
& \int_1^{\frac{\tau}{\sigma}} (\lambda f(\sigma) \wedge f(\tau)) (\lambda g'(\sigma) \wedge g'(\tau)) d\lambda \\
&= \int_1^{\frac{f(\tau)}{f(\sigma)}} (\lambda f(\sigma) \wedge f(\tau)) (\lambda g'(\sigma) \wedge g'(\tau)) d\lambda \\
&+ \int_{\frac{f(\tau)}{f(\sigma)}}^{\frac{\tau}{\sigma}} (\lambda f(\sigma) \wedge f(\tau)) (\lambda g'(\sigma) \wedge g'(\tau)) d\lambda \\
&= \int_1^{\frac{f(\tau)}{f(\sigma)}} \lambda f(\sigma) \lambda g'(\sigma) d\lambda + \int_{\frac{f(\tau)}{f(\sigma)}}^{\frac{\tau}{\sigma}} f(\tau) \lambda g'(\sigma) d\lambda \\
&= f(\sigma) g'(\sigma) \int_1^{\frac{f(\tau)}{f(\sigma)}} \lambda^2 d\lambda \\
&+ f(\tau) g'(\sigma) \int_{\frac{f(\tau)}{f(\sigma)}}^{\frac{\tau}{\sigma}} \lambda d\lambda \\
&= f(\sigma) g'(\sigma) \left(\frac{[f(\tau)]^3}{3[f(\sigma)]^3} - \frac{1}{3} \right) + f(\tau) g'(\sigma) \left(\frac{\tau^2}{2\sigma^2} - \frac{[f(\tau)]^2}{2[f(\sigma)]^2} \right) \\
&= \frac{f(\sigma) g'(\sigma)}{3} \left(\frac{[f(\tau)]^3 - [f(\sigma)]^3}{[f(\sigma)]^3} \right) \\
&+ \frac{f(\tau) g'(\sigma)}{2} \left(\frac{\tau^2 [f(\sigma)]^2 - \sigma^2 [f(\tau)]^2}{\sigma^2 [f(\sigma)]^2} \right) \\
&= g'(\sigma) \left(\frac{3\tau^2 f(\tau) [f(\sigma)]^2 - 2\sigma^2 [f(\sigma)]^3 - \sigma^2 [f(\tau)]^3}{6\sigma^2 [f(\sigma)]^2} \right) \quad (4.48)
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir, buradan

$$\frac{1}{\sigma} \int_{\sigma}^{\tau} f(t) g'(t) dt \leq g'(\sigma) \left(\frac{3\tau^2 f(\tau) [f(\sigma)]^2 - 2\sigma^2 [f(\sigma)]^3 - \sigma^2 [f(\tau)]^3}{6\sigma^2 [f(\sigma)]^2} \right) \quad (4.49)$$

$$\int_{\sigma}^{\tau} f(t) g'(t) dt \leq g'(\sigma) \left(\frac{3\tau^2 f(\tau) [f(\sigma)]^2 - 2\sigma^2 [f(\sigma)]^3 - \sigma^2 [f(\tau)]^3}{6\sigma [f(\sigma)]^2} \right) \quad (4.50)$$

eşitsizliği elde edilir.

$$\text{ii. } 1 < \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} \leq \frac{g'(\tau)}{g'(\sigma)} < \frac{\tau}{\sigma}$$

$$\begin{aligned}
& \int_1^{\frac{\tau}{\sigma}} (\lambda f(\sigma) \wedge f(\tau)) (\lambda g'(\sigma) \wedge g'(\tau)) d\lambda \\
&= \int_1^{\frac{f(\tau)}{f(\sigma)}} (\lambda f(\sigma) \wedge f(\tau)) (\lambda g'(\sigma) \wedge g'(\tau)) d\lambda \\
&+ \int_{\frac{g'(\tau)}{g'(\sigma)}}^{\frac{f(\tau)}{f(\sigma)}} (\lambda f(\sigma) \wedge f(\tau)) (\lambda g'(\sigma) \wedge g'(\tau)) d\lambda \\
&+ \int_{\frac{g'(\tau)}{g'(\sigma)}}^{\frac{\tau}{\sigma}} (\lambda f(\sigma) \wedge f(\tau)) (\lambda g'(\sigma) \wedge g'(\tau)) d\lambda \\
&= \int_1^{\frac{f(\tau)}{f(\sigma)}} \lambda f(\sigma) \lambda g'(\sigma) d\lambda + \int_{\frac{f(\tau)}{f(\sigma)}}^{\frac{g'(\tau)}{g'(\sigma)}} f(\tau) (\lambda g'(\sigma)) d\lambda + \int_{\frac{g'(\tau)}{g'(\sigma)}}^{\frac{\tau}{\sigma}} f(\tau) g'(\tau) d\lambda \\
&= f(\sigma) g'(\sigma) \int_1^{\frac{f(\tau)}{f(\sigma)}} \lambda^2 d\lambda + f(\tau) g'(\sigma) \int_{\frac{f(\tau)}{f(\sigma)}}^{\frac{g'(\tau)}{g'(\sigma)}} \lambda d\lambda \\
&+ f(\tau) g'(\tau) \int_{\frac{g'(\tau)}{g'(\sigma)}}^{\frac{\tau}{\sigma}} d\lambda \\
&= \frac{f(\sigma) g'(\sigma)}{3} \left(\frac{[f(\tau)]^3 - [f(\sigma)]^3}{[f(\sigma)]^3} \right) \\
&+ \frac{f(\tau) g'(\sigma)}{2} \left(\frac{[g'(\tau)]^2 [f(\sigma)]^2 - [g'(\sigma)]^2 [f(\tau)]^2}{[g'(\sigma)]^2 [f(\sigma)]^2} \right) \\
&+ f(\tau) g'(\tau) \left(\frac{\tau g'(\sigma) - \sigma g'(\tau)}{\sigma g'(\sigma)} \right) \\
&= \frac{3g'(\tau)[f(\sigma)]^2(2\tau g'(\sigma) - \sigma g'(\tau)) - \sigma[g'(\sigma)]^2([f(\tau)]^3 - 2[f(\sigma)]^3)}{6\sigma g'(\sigma)[f(\sigma)]^2} \quad (4.51)
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir, buradan

$$\frac{1}{\sigma} \int_{\sigma}^{\tau} f(t)g'(t)dt \leq \frac{3g'(\tau)[f(\sigma)]^2(2\tau g'(\sigma) - \sigma g'(\tau)) - \sigma[g'(\sigma)]^2([f(\tau)]^3 - 2[f(\sigma)]^3)}{6\sigma g'(\sigma)[f(\sigma)]^2} \quad (4.52)$$

$$\int_{\sigma}^{\tau} f(t)g'(t)dt \leq \frac{3g'(\tau)[f(\sigma)]^2(2\tau g'(\sigma) - \sigma g'(\tau)) - \sigma[g'(\sigma)]^2([f(\tau)]^3 - 2[f(\sigma)]^3)}{6g'(\sigma)[f(\sigma)]^2} \quad (4.53)$$

eşitsizliği elde edilir.

3. $\frac{g'(\tau)}{g'(\sigma)} \leq \frac{f(\tau)}{f(\sigma)}$ olması halinde ise aşağıdaki iki durum ortaya çıkmaktadır.

i. $1 \leq \frac{g'(\tau)}{g'(\sigma)} < \frac{\tau}{\sigma} < \frac{f(\tau)}{f(\sigma)}$ ise,

$$\begin{aligned} & \int_1^{\frac{\tau}{\sigma}} (\lambda f(\sigma) \wedge f(\tau)) (\lambda g'(\sigma) \wedge g'(\tau)) d\lambda \\ &= \int_1^{\frac{g'(\tau)}{g'(\sigma)}} (\lambda f(\sigma) \wedge f(\tau)) (\lambda g'(\sigma) \wedge g'(\tau)) d\lambda \\ &+ \int_{\frac{g'(\tau)}{g'(\sigma)}}^{\frac{\tau}{\sigma}} (\lambda f(\sigma) \wedge f(\tau)) (\lambda g'(\sigma) \wedge g'(\tau)) d\lambda \\ &= \int_1^{\frac{g'(\tau)}{g'(\sigma)}} \lambda f(\sigma) \lambda g'(\sigma) d\lambda + \int_{\frac{g'(\tau)}{g'(\sigma)}}^{\frac{\tau}{\sigma}} \lambda f(\sigma) g'(\tau) d\lambda \\ &= f(\sigma)g'(\sigma) \int_1^{\frac{g'(\tau)}{g'(\sigma)}} \lambda^2 d\lambda + f(\sigma)g'(\tau) \int_{\frac{g'(\tau)}{g'(\sigma)}}^{\frac{\tau}{\sigma}} \lambda d\lambda \\ &= \frac{f(\sigma)g'(\sigma)}{3} \left(\frac{[g'(\tau)]^3 - [g'(\sigma)]^3}{[g'(\sigma)]^3} \right) + \frac{f(\sigma)g'(\tau)}{2} \left(\frac{\tau^2[g'(\sigma)]^2 - \sigma^2[g'(\tau)]^2}{\sigma^2[g'(\sigma)]^2} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{f(\sigma)[g'(\sigma)]^2(3\tau^2 g'(\tau) - 2\sigma^2 g'(\sigma)) - \sigma^2 f(\sigma)[g'(\tau)]^3}{6\sigma^2[g'(\sigma)]^2} \quad (4.54)$$

sonucu elde edilir. Buradan

$$\frac{1}{\sigma} \int_{\sigma}^{\tau} f(t)g'(t)dt \leq \frac{f(\sigma)[g'(\sigma)]^2(3\tau^2 g'(\tau) - 2\sigma^2 g'(\sigma)) - \sigma^2 f(\sigma)[g'(\tau)]^3}{6\sigma^2[g'(\sigma)]^2} \quad (4.55)$$

$$\int_{\sigma}^{\tau} f(t)g'(t)dt \leq \frac{f(\sigma)[g'(\sigma)]^2(3\tau^2 g'(\tau) - 2\sigma^2 g'(\sigma)) - \sigma^2 f(\sigma)[g'(\tau)]^3}{6\sigma[g'(\sigma)]^2} \quad (4.56)$$

eşitsizliği elde edilir.

ii. $1 < \frac{g'(\tau)}{g'(\sigma)} < \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} < \frac{\tau}{\sigma}$ olur ise, bu durumda

$$\begin{aligned} & \int_1^{\frac{\tau}{\sigma}} (\lambda f(\sigma) \wedge f(\tau)) (\lambda g'(\sigma) \wedge g'(\tau)) d\lambda \\ &= \int_1^{\frac{g'(\tau)}{g'(\sigma)}} (\lambda f(\sigma) \wedge f(\tau)) (\lambda g'(\sigma) \wedge g'(\tau)) d\lambda \\ &+ \int_{\frac{g'(\tau)}{g'(\sigma)}}^{\frac{f(\tau)}{f(\sigma)}} (\lambda f(\sigma) \wedge f(\tau)) (\lambda g'(\sigma) \wedge g'(\tau)) d\lambda \\ &+ \int_{\frac{f(\tau)}{f(\sigma)}}^{\frac{\tau}{\sigma}} (\lambda f(\sigma) \wedge f(\tau)) (\lambda g'(\sigma) \wedge g'(\tau)) d\lambda \\ &= \int_1^{\frac{g'(\tau)}{g'(\sigma)}} \lambda f(\sigma) \lambda g'(\sigma) d\lambda + \int_{\frac{g'(\tau)}{g'(\sigma)}}^{\frac{f(\tau)}{f(\sigma)}} \lambda f(\sigma) g'(\tau) d\lambda \\ &+ \int_{\frac{f(\tau)}{f(\sigma)}}^{\frac{\tau}{\sigma}} f(\tau) g'(\tau) d\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{f(\sigma)g'(\sigma)}{3} \left(\frac{[g'(\tau)]^3 - [g'(\sigma)]^3}{[g'(\sigma)]^3} \right) \\
&+ \frac{f(\sigma)g'(\tau)}{2} \left(\frac{[f(\tau)]^2[g'(\sigma)]^2 - [f(\sigma)]^2[g'(\tau)]^2}{[f(\sigma)]^2[g'(\sigma)]^2} \right) \\
&+ f(\tau)g'(\tau) \left(\frac{\tau f(\sigma) - \sigma f(\tau)}{\sigma f(\sigma)} \right) \\
&= \frac{3[g'(\sigma)]^2 g'(\tau) f(\tau) (2\tau f(\sigma) - \sigma f(\tau)) - \sigma [f(\sigma)]^2 (2[g'(\sigma)]^3 + [g'(\tau)]^3)}{6\sigma f(\sigma) [g'(\sigma)]^2} \quad (4.57)
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sigma} \int_{\sigma}^{\tau} f(t)g'(t)dt \leq \\
&\frac{3[g'(\sigma)]^2 g'(\tau) f(\tau) (2\tau f(\sigma) - \sigma f(\tau)) - \sigma [f(\sigma)]^2 (2[g'(\sigma)]^3 + [g'(\tau)]^3)}{6\sigma f(\sigma) [g'(\sigma)]^2} \quad (4.58)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\sigma}^{\tau} f(t)g'(t)dt \leq \\
&\frac{3[g'(\sigma)]^2 g'(\tau) f(\tau) (2\tau f(\sigma) - \sigma f(\tau)) - \sigma [f(\sigma)]^2 (2[g'(\sigma)]^3 + [g'(\tau)]^3)}{6f(\sigma) [g'(\sigma)]^2} \quad (4.59)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur. ■

4.2 B⁻¹-konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejer Tipi Eşitsizliklerin Uygulamaları

Bu bölümde, bir önceki kısımda ispat edilmiş olan teoremlerde ifade edilen B⁻¹-konveks fonksiyonlar için geçerli Hermite-Hadamard-Fejer tipi eşitsizliklerin bazı uygulamaları verilecektir.

Sonuç 4.1 $f: I = [\sigma, \tau] \subset (0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ fonksiyonu B⁻¹-konveks fonksiyon ve $g: I \rightarrow [0,1], g(t) = \sin t$ negatif olmayan, integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$\int_{\sigma}^{\tau} f(t) \sin t dt$$

$$\leq \begin{cases} \frac{f(\sigma)(\sigma \cos \sigma - \tau \cos \tau + \sin \tau - \sin \sigma)}{\sigma}, & 1 \leq \frac{\tau}{\sigma} \leq \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} \\ f(\sigma) \cos \sigma - 2f(\tau) \cos \left(\sigma \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} \right) \\ + f(\tau) \cos \tau + \frac{f(\sigma)}{\sigma} \left(\sin \left(\sigma \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} \right) - \sin \sigma \right), & 1 \leq \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} < \frac{\tau}{\sigma} \end{cases} \quad (4.60)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: f fonksiyonu B^{-1} -konveks olduğundan, Teorem 4.1 sağlanır. Eşitsizlik için işlemler uygulandığında,

1. $1 \leq \frac{\tau}{\sigma} \leq \frac{f(\tau)}{f(\sigma)}$ için

$$\begin{aligned} \int_{\sigma}^{\tau} f(t) \sqrt{t} dt &\leq \frac{f(\sigma)}{\sigma} \int_{\sigma}^{\tau} t \sin t dt \\ &\leq \frac{f(\sigma)(\sigma \cos \sigma - \tau \cos \tau + \sin \tau - \sin \sigma)}{\sigma} \end{aligned} \quad (4.61)$$

2. $1 \leq \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} < \frac{\tau}{\sigma}$ için

$$\begin{aligned} \int_{\sigma}^{\tau} f(t) \sqrt{t} dt &\leq \frac{f(\sigma)}{\sigma} \int_{\sigma}^{\sigma \frac{f(\tau)}{f(\sigma)}} t \sin t dt + f(\tau) \int_{\sigma \frac{f(\tau)}{f(\sigma)}}^{\tau} \sin t dt \\ &\leq f(\sigma) \cos \sigma - 2f(\tau) \cos \left(\sigma \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} \right) + f(\tau) \cos \tau \\ &\quad + \frac{f(\sigma)}{\sigma} \left(\sin \left(\sigma \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} \right) - \sin \sigma \right) \end{aligned} \quad (4.62)$$

eşitsizliğinin sağlandığını görülür.

Sonuç 4.2 $f: I = [\sigma, \tau] \subset \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ fonksiyonu B^{-1} -konveks bir fonksiyon ve $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_{++}$, $g(x) = \ln x$ fonksiyonu negatif olmayan, integrallenebilir B^{-1} -konveks fonksiyon olmak üzere

$$\int_{\sigma}^{\tau} f(t) \ln t dt \leq \ln \sigma \left[\frac{[f(\sigma)]^2 (3\tau^2 f(\tau) - 2\sigma^2 f(\sigma)) - \sigma^2 [f(\tau)]^3}{6\sigma [f(\sigma)]^3} \right] \quad (4.63)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: f fonksiyonu B^{-1} -konveks olduğundan Teorem 4.2 sağlanır. Teoremdeki eşitsizliğe göre, $1 \leq \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} \leq \frac{\tau}{\sigma} \leq \frac{\ln \tau}{\ln \sigma}$ olduğundan,

$$\int_{\sigma}^{\tau} f(t) \ln t dt \leq \ln \sigma \left[\frac{[f(\sigma)]^2 (3\tau^2 f(\tau) - 2\sigma^2 f(\sigma)) - \sigma^2 [f(\tau)]^3}{6\sigma [f(\sigma)]^3} \right] \quad (4.64)$$

eşitsizliğin sağlandığını görülür.

Sonuç 4.3 $f: I = [\sigma, \tau] \subset \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ fonksiyonu B^{-1} konveks fonksiyon ve $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_{++}$, $g(x) = x^2$ fonksiyonu türevlenebilir ve $g' \in L[\sigma, \tau]$ olmak üzere,

$$\int_{\sigma}^{\tau} f(t) t dt \leq \begin{cases} \frac{f(\sigma)}{3\sigma} (\tau^3 - \sigma^3), & 1 \leq \frac{\tau}{\sigma} \leq \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} \\ \frac{f(\tau)\tau^2 - f(\sigma)\sigma^2 - \frac{f(\sigma)}{3\sigma} (\tau^3 - \sigma^3)}{2}, & 1 \leq \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} < \frac{\tau}{\sigma} \end{cases} \quad (4.65)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: f fonksiyonu B^{-1} -konveks olduğundan, Teorem 4.3 sağlanır ve teoremdaki işlemler uygulandığında,

$$1. \quad 1 \leq \frac{\tau}{\sigma} \leq \frac{f(\tau)}{f(\sigma)}$$

$$\int_{\sigma}^{\tau} f(t) (2t) dt \leq \frac{f(\sigma)}{\sigma} \left(\tau^3 - \sigma^3 - \int_{\sigma}^{\tau} t^2 dt \right) \quad (4.66)$$

$$\int_{\sigma}^{\tau} f(t) t dt \leq \frac{f(\sigma)}{3\sigma} (\tau^3 - \sigma^3) \quad (4.67)$$

eşitsizliği elde edilir.

$$2. \quad 1 \leq \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} < \frac{\tau}{\sigma}$$

$$\int_{\sigma}^{\tau} f(t) (2t) dt \leq f(\tau)\tau^2 - f(\sigma)\sigma^2 - \frac{f(\sigma)}{\sigma} \int_{\sigma}^{\tau} t^2 dt \quad (4.68)$$

$$\int_{\sigma}^{\tau} f(t) t dt \leq \frac{f(\tau)\tau^2 - f(\sigma)\sigma^2 - \frac{f(\sigma)}{3\sigma} (\tau^3 - \sigma^3)}{2} \quad (4.69)$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.4 $f: I = [\sigma, \tau] \subset \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ fonksiyonu B^{-1} -konveks bir fonksiyon ve $g: \mathbb{R}_{++} \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ $g(x) = x^{\frac{3}{2}}$ fonksiyonu türevlenebilir, türevi B^{-1} -konveks ve $g' \in L[\sigma, \tau]$ olmak üzere,

$$\int_{\sigma}^{\tau} f(t)\sqrt{t}dt \leq \begin{cases} \frac{[f(\sigma)]^2(6\sqrt{\sigma}\tau^3 - 3\sigma\tau - 2\sigma^2) - \sigma^2[f(\tau)]^3}{6\sqrt{\sigma}[f(\sigma)]^2}, & 1 \leq \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} \leq \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{\sigma}} \leq \frac{\tau}{\sigma} \\ \frac{f(\sigma)(3\sqrt{\tau^5} - 2\sqrt{\sigma^5} - \sigma\sqrt{\tau})}{2\sigma}, & 1 \leq \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{\sigma}} < \frac{\tau}{\sigma} < \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} \\ \frac{f(\tau)(2\sqrt{\tau^3}f(\sigma) - \sigma\sqrt{\tau}f(\tau))}{2f(\sigma)} - \frac{2[f(\sigma)]^2(\sqrt{\tau^3} + \sqrt{\sigma^3})}{2f(\sigma)}, & 1 < \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{\sigma}} < \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} < \frac{\tau}{\sigma} \end{cases} \quad (4.70)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: f ve g' fonksiyonları B^{-1} -konveks olduğundan, Teorem 4.4'deki eşitsizlik sağlanır, bu durumda işlemler uygulandığında,

$$1. \quad 1 \leq \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} \leq \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{\sigma}} \leq \frac{\tau}{\sigma}$$

$$\frac{3}{2} \int_{\sigma}^{\tau} f(t)\sqrt{t}dt \leq \frac{[f(\sigma)]^2(6\sqrt{\sigma}\tau^3 - 3\sigma\tau - 2\sigma^2) - \sigma^2[f(\tau)]^3}{4\sqrt{\sigma}[f(\sigma)]^2} \quad (4.71)$$

$$\int_{\sigma}^{\tau} f(t)\sqrt{t}dt \leq \frac{[f(\sigma)]^2(6\sqrt{\sigma}\tau^3 - 3\sigma\tau - 2\sigma^2) - \sigma^2[f(\tau)]^3}{6\sqrt{\sigma}[f(\sigma)]^2} \quad (4.72)$$

eşitsizliği elde edilir.

$$2. \quad 1 \leq \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{\sigma}} < \frac{\tau}{\sigma} < \frac{f(\tau)}{f(\sigma)}$$

$$\frac{3}{2} \int_{\sigma}^{\tau} f(t)\sqrt{t}dt \leq \frac{3f(\sigma)(3\sqrt{\tau^5} - 2\sqrt{\sigma^5} - \sigma\sqrt{\tau})}{4\sigma} \quad (4.73)$$

$$\int_{\sigma}^{\tau} f(t)\sqrt{t}dt \leq \frac{f(\sigma)(3\sqrt{\tau^5} - 2\sqrt{\sigma^5} - \sigma\sqrt{\tau})}{2\sigma} \quad (4.74)$$

eşitsizliği elde edilir.

$$3. \quad 1 < \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{\sigma}} < \frac{f(\tau)}{f(\sigma)} < \frac{\tau}{\sigma}$$

$$\frac{3}{2} \int_{\sigma}^{\tau} f(t) \sqrt{t} dt \leq \frac{3f(\tau) \left(2\sqrt{\tau^3} f(\sigma) - \sigma \sqrt{\tau} f(\tau) \right) - 2[f(\sigma)]^2 (\sqrt{\tau^3} + \sqrt{\sigma^3})}{4f(\sigma)} \quad (4.75)$$

$$\int_{\sigma}^{\tau} f(t) \sqrt{t} dt \leq \frac{f(\tau) \left(2\sqrt{\tau^3} f(\sigma) - \sigma \sqrt{\tau} f(\tau) \right) - 2[f(\sigma)]^2 (\sqrt{\tau^3} + \sqrt{\sigma^3})}{2f(\sigma)} \quad (4.76)$$

eşitsizliği elde edilir.



5. SONUÇ VE ÖNERİLER

5.1 Tezde Elde Edilen Sonuçlar

Bu tezde matematiksel analizde büyük bir öneme sahip olan Hermite-Hadamard-Fejer Eşitsizliği'nin, soyut konvekslik çeşidi olan B^{-1} -konvekslik için daha detaylı incelenmesi amaçlanmıştır. Son zamanlarda ekonomi, optimizasyon ve mühendislik gibi alanlarda büyük katkıları olan Hermite-Hadamard-Fejer Eşitsizliği'nin farklı soyut konvekslik çeşitleri üzerinde çalışılması bu disiplinler üzerinde gelişmeyi ve ilerlemeyi sağlamaktadır. Bu alanlarda popüler olan B^{-1} -konveksliğin, Hermite-Hadamard-Fejer Eşitsizliği için incelenmesinin literatüre büyük bir katkı sağlayacağı öngörülmüştür. Bu çalışma, ilgili literatürdeki boşlukları doldurarak, gelecek araştırmalar için yeni bir perspektif sunmaktadır.

Bu doğrultuda, tezde klasik konveksliğin soyutlaştırılma yöntemleri verilerek bu yöntemler ile daha öncesinde elde edilmiş olan B^{-1} -konveks küme ve fonksiyonların tanımlarına değinilmiş, bu kavramlar için yeni birkaç örnek elde edilmiştir ve böylece bu konuda daha genel sonuçlar için yol açılmıştır. Daha önce B^{-1} -konveks fonksiyonlar için çalışılmış olan Jensen Eşitsizliği, Ostrowski Eşitsizliği, Hermite-Hadamard Eşitsizliği ve bu eşitsizliklerin uygulamaları, tezde ifade edilmiş ve araştırma konusu daha detaylı incelenmiştir.

Detaylı bir çalışma ile ispatlanmış olan B^{-1} -konveks fonksiyonlar için genelleştirilmiş Hermite-Hadamard-Fejer Eşitsizliği'ni, farklı koşullar altında inceleyerek eşitsizliğin değişimi gözlemlenmiştir. B^{-1} -konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejer Eşitsizliği, Teorem 4.1'de ispatlanmıştır. Bununla beraber Hermite-Hadamard-Fejer Eşitsizliği'ndeki çekirdek fonksiyonun üzerine bazı kriterler eklenerek elde edilen eşitsizliğin farklı uyarlamaları da Teorem 4.2, Teorem 4.3 ve Teorem 4.4'te ispat edilmiştir. Böylelikle tezde, B^{-1} -konvekslik üzerine matematiksel uygulama yönünden daha genel sonuçlar ifade edilmiştir. Aynı zamanda, Sonuç 4.1, 4.2, 4.3 ve 4.4 ile tezde elde edilen B^{-1} -konveks fonksiyon örnekleri yardımı ile yeni eşitsizlikler ifade edilmiş, bu eşitsizliklerin geçerlilikleri ve ilk uygulamaları böylece verilmiş olmuştur.

5.2 Tez Konusu İle İlgili Çalışma Önerileri ve Açık Problemler

Bu tezde elde edilen Hermite-Hadamard-Fejer Eşitsizliği için, ele alınan fonksiyonun B^{-1} -konveks fonksiyon olma koşulu konulmuştur. Bu koşullar altında ortaya çıkan eşitsizlikler, daha farklı durumlar ve fonksiyonların kendine özel diğer gerek ve yeter şartları altında da incelenerek, bu konu ile ilgili çalışmalar ilerletilebilir. Hermite-Hadamard-Fejer Eşitsizliği'nin çekirdek fonksiyonu üzerine farklı koşullar eklenerek

eşitsizlik daha detaylı incelenebilir ve bu inceleme sonucu ile literatürdeki eksiklikler doldurulabilir.

Ayrıca tezde incelenmiş olan Hermite-Hadamard-Fejer Eşitsizliği, farklı soyut konvekslik çeşitleri ve değişken koşullar altında incelenerek literatüre katkı sağlanabilir.

Hermite-Hadamard-Fejer Eşitsizliği'nin, çekirdek fonksiyonu aracılığıyla matematiksel fizik üzerinde kullanılan bazı seriler için de uygulamaları bulunmaktadır. Bu sebeple, uygulamalar üzerine daha ayrıntılı çalışmalar ve genişlemeler elde edilebilir. Farklı soyut konvekslik çeşitleri için de benzeri uygulamaların gerçekleştirilmesi mümkündür.

Tezde elde edilen eşitsizliklerin kesirli integral formları açık problemlerden biridir. Bir diğeri ise Hölder, gibi eşitsizlikler ve yardımcı lemmalar ile farklı koşullar altındaki eşitsizliklerin elde edilmesidir. Ayrıca, bunun benzeri daha birçok açık problem vermek mümkündür.

KAYNAKÇA

1. Berkovitz, L. D., 2002. Convexity and optimization in n . Wiley, New York.
2. Bertsekas, D.ve P., Nedic, A., 2003. Convex analysis and optimization, athena scientific.
3. Borwein, J. M. ve Lewis, A. S., 2000. Convex analysis and nonlinear optimization, theory and examples, Canadian mathematical society books in mathematics springer, New York.
4. Boyd, S. ve Vandenberghe, L., 2004. Convex optimization, Cambridge University Press, Cambridge, MA.
5. Rubinov, A., 2000. Abstract convexity and global optimization, Kluwer academic publishers, Boston Dordrecht-London.
6. Tuy, H., 1998. Convex analysis and global optimization, Kluwer academic publishers Dordrecht.
7. Adilov, G. ve Tinaztepe, G., 2009. The sharpening some inequalities via abstract convexity. Mathematical inequalities and applications, 12, 33-51.
8. Adilov, G. ve Yesilce, I., 2010. Some inequalities for $L(j)$ -convex functions. Mathematical analysis, differential equations and their applications proceeding book, 19-24.
9. Beckenbach, E. F. ve Bellman, R., 1961. Inequalities, Springer, Berlin.
10. Dragomir, S. S. ve Pearce, C. E. M., 2000. Selected topics on Hermite-Hadamard inequalities and applications. RGMIA Monographs, Victoria University.
11. Dragomir, S. S., Pecaric, J. E. ve Presson, L. E., 1995. Some inequalities of Hadamard type. Soochow J. of math, 21, 335-341.
12. Niculescu, C. P. ve Persson, L. E., 2006. Convex functions and their applications. A contemporary approach. CMS books in mathematics vol. 23, Springer-Verlag, New York.
13. Pečarić, J., Proschan, F. ve Tong, Y. L., 1992. Convex functions, partial orderings and statistical applications. Academic press inc.

14. Rubinov, A. M., 2000. Abstract convexity: Examples and applications. Optimization , 47, 1-13.
15. Dutta, J., Martinez-Legaz, J. E. ve Rubinov, A.M., 2004., Monotonic analysis over cones: I. Optimization 129-146.
16. Dutta, J., Martinez-Legaz, J. E. ve Rubinov, A. M., 2004. Monotonic analysis over cones, II. Optimization, 529-547.
17. Minoux, M., 1986. Mathematical programming, theory and algorithms. Wiley, Chichester, 489.
18. Rado, T., 1935. On convex functions. Trans. Amer. Math. Soc. 37, 266-285.
19. Rockafellar, R., 1970. Tyrrell, Convex analysis. Princeton University press, Princeton, New Jersey.
20. Rubinov, A., 2000. Abstract convexity and global optimization, Kluwer academic publishers, Boston Dordrecht-London. 66.
21. Rubinov, A. M., 2000. Abstract convexity: Examples and applications. Optimization, 47,12,1-33.
22. Singer, I., 1997. Abstract convex analysis. Wiley-Interscience Publication, New York.
23. Varošanec, S., 2007. On h-convexity. Journal of mathematical analysis and applications, 326, 303–311.
24. Bai, R.F., Qi, F. ve Xi, B.Y., 2013. Hermite-Hadamard type inequalities for the m- and (α, m) -logarithmically convex functions, Filomat ,27,1, 1-7.
25. Adilov, G. ve Yesilce, I., 2018. Some important properties of B-convex functions. Journal of nonlinear and convex analysis, 19,4,669-680.
26. Yeşilce Işık, İ., 2024. Genelleştirilmiş Riemann-Liouville kesirli integrali içeren eşitsizlikler. 15. Ankara Matematik Günleri AMG 2024, Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi, 23-24 Mayıs 2024, Ankara.
27. Mitrinovich, D.S., 1970. Analytic inequalities, Springer-Verlag, Heidelberg.

28. Alomari, M. ve Darus, M., 2010. Some Ostrowski type inequalities for quasi convex functions with applications to special means. *RGMIA Res. Rep. Coll*, 13,2, 6.
29. S. S. Dragomir, 2012. *Operator inequalities of Ostrowski and Trapezoidal-type*, Springer Science + Business Media, 135.
30. Mitrinovic, D.S. ve Lackovic I., 1985. Hermite and Convexity. *Aequationes mathematicae*, 28, 229-232.
31. Dragomir, S. S. ve Pearce, C., 2003. Selected topics on Hermite-Hadamard inequalities and applications. *Science direct working paper*, S1574,0358, 04.
32. Sarikaya, M. Z., Set, E., Yaldiz, H. ve Başak, N., 2013. Hermite–Hadamard’s inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities. *Mathematical and computer modelling*, 57,9-10, 2403-2407.
33. Yesilce, I., 2019. Inequalities for B -convex functions via generalized fractional integral. *Journal of inequalities and applications*, 2019,1, 1-15.
34. Yesilce, I. ve Adilov, G., 2017. Fractional integral inequalities for B-convex functions. *Creative mathematics and informatics*, 26,3, 345-351.
35. Yesilce, I. ve Adilov, G., 2018. Hermite-Hadamard type inequalities for B^{-1} -convex functions involving generalized fractional integral operators. *Filomat*, 32,18, 6457-6464.
36. Fejer L., 1906. Über die fourierreihen, II. *Math. naturwiss. anz ungar. Akad. Wiss.*, 24, 369–390.
37. Chen, H. ve Katugampola, U. N., 2017. Hermite–Hadamard and Hermite–Hadamard–Fejer type inequalities for generalized fractional integrals. *Journal of mathematical analysis and applications*, 446,2 1274-1291.
38. İşcan, I., 2014. Hermite-Hadamard-Fejer type inequalities for convex functions via fractional integrals. *Arxiv preprint arxiv*, 1404,7722.
39. Kunt, M. ve İşcan, İ., 2017. Hermite–Hadamard–Fejer type inequalities for p-convex functions. *Arab journal of mathematical sciences*, 23,2,215-230.
40. Khan, M. B., Treanța, S., Soliman, M. S., Nonlaopon, K. ve Zaini, H. G., 2022. Some Hadamard–Fejer type inequalities for LR-Convex Interval-Valued functions. *Fractal and fractional*, 6,1 6.
41. Sarikaya, M. Z., 2012. On new Hermite Hadamard Fejer type integral inequalities. *Studia universitatis Babes-Bolyai mathematica*, 57,3, 377-386.
42. Set, E., İşcan, İ., Sarikaya, M. Z. ve Özdemir, M. E., 2015. On new inequalities of Hermite–Hadamard–Fejer type for convex functions via fractional integrals. *Applied mathematics and computation*, 259, 875-881.

43. Vivas-Cortez, M., Korus, P. ve Valdes, J. E. N., 2021. Some generalized Hermite–Hadamard–Fejer inequality for convex functions. *Advances in difference equations*, 1, 1-11.
44. Briec W. ve Liang Q. B., 2011. On some semilattice structures for productin technologies. *European journal of operational research*, 215,745-749.
45. Tinaztepe G., Yesilce I. ve Adilov G., 2014. Separation of B^{-1} -convex sets by B^{-1} -measurable Maps. *Journal of convex analysis*, 21,2,571-580.
46. Adilov G. ve Yesilce I., 2012. On generalization of the concept of convexity. *Hacettepe journal of mathematics and statistics*, 41,5,723-730.
47. Kemali, S., Yesilce I. ve Adilov G., 2015. B-convexity, B^{-1} -convexity and their comparison. *Numerical functional analysis and optimization*, 36,2,133-146.
48. Mitrinović, D. S., 1970. *Analytic inequalities*, Springer-Verlag, Berlin, 404, New York.
49. Youness, E. A., 1999. E - convex sets, e - convex functions and e-convex programming, *journal of optimization theory and applications*, 102, 2, 439-450.
50. Rangel-Oliveros, Y. ve Vivas-Cortez, M., 2018. Ostrowski type inequalities for functions whose second derivative are convex generalized, *applied mathematics and information sciences*, 12,6, 1055–1064.
51. Briec, W. ve Horvath, C. D., 2004. B-convexity. *Optimization*, 53, 103-127.
52. Yesilce, I. ve Adilov, G., 2017. Hermite-Hadamard inequalities for B-convex and B^{-1} -convex functions. *International journal of nonlinear analysis and applications*, 8,1, 225-233.
53. Adilov, G. ve Yesilce, I., 2017. B^{-1} -convex functions. *Journal of convex analysis*, 24,2, 505-517.
54. Vivas-Cortez, M. ve Rangel-Oliveros, Y., 2020. An inequality related to $s - \varphi$ -convex functions, *applied mathematics and information sciences*, 14,1, 151–154.
55. Karabudak, S., 2023. B-konveks fonksiyonlar için kesirli integral eşitsizlikleri ,Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri enstitüsü, Aksaray.
56. Sarıkaya, M. Z., Büyükeken, M. ve Kiriş, M. E., 2015. On some generalized integral inequalities for φ - convex functions. *Studdia universitatis Babeş-Bolyai mathematica*, 60,3, 367-377.
57. Özdemir, S., 2022. B-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejer tipi eşitsizlikler ,Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri enstitüsü, Aksaray.
58. Özdemir M. E., Kavurmacı H. ve Set, E., 2010. Ostrowski’s type inequalities for $(\alpha - m)$ -convex functions. *Kyungpook mathematical journal*, 50,4,371-378.

59. Sarıkaya M. Z., Set, E. ve Özdemir, M. E., 2010. On new inequalities of Hadamard type involving h -convex functions, *Acta mathematica universitatis comenianae*, 79,2,265-272.
60. Ion, D. A., 2007. Some estimates on the Hermite-Hadamard inequality through quasi-conveks functions, *Annals of university of craiova, mathematics and computer science series*, 34,82-87.



ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Lale Altıntaş

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2015-2020

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, 2022-2025

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Kongrelerde Sunulan Bildiriler

1. Yeşilce Işık, İ., & Altıntaş, L. (2024). Hermite-Hadamard-Fejer Inequality For B^{-1} -convex Functions. International Scientific Research And Innovation Congress -II, Adana.