



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**B-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN GAUSS-JACOBI
EŞİTSİZLİĞİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Şahin Salih ÖZDEMİR

**DANIŞMAN
Doç. Dr. İlknur YEŞİLCE IŞIK**

AKSARAY, 2024

Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 212342404 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi Şahin Salih ÖZDEMİR tarafından hazırlanan “**B-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN GAUSS-JACOBI EŞİTSİZLİĞİ**” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OYBİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. İlknur YEŞİLCE IŞIK

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Doç. Dr. Sevdâ SEZER

Akdeniz Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 04/06/2024

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Mehmet Ali HINIS

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinalliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Şahin Salih ÖZDEMİR



TEŞEKKÜR

Bu çalışma sürecinde her an moral ve motivasyon kaynağım olan eşim Serap Özdemir'e; onlardan alıp çalışmama aktarmak zorunda kaldığım zamanı, yaşlarının çok ötesinde büyük bir olgunlukla karşılayan kızlarım Zeynep Özdemir ve Elif Özdemir'e; fedakarlıklarının sonucu olarak, sahip olduğum maddi ve manevi her şeyi borçlu olduğum annem Ayşe Özdemir'e ve babam Davut Özdemir'e; hayatımın kritik anlarında bir şekilde desteği ve fikirleri ile yanımda olan kadim dostum Doç. Dr. Erdal Bayram'a; tezin hazırlanma sürecinde fikir ve teşvikleri ile katkı sunan arkadaşlarım Neslihan Meneviş Sümer'e ve Şeyma Memiş'e ve emeklerine minnet duyduğum tüm hocalarıma teşekkür ederim.

Ayrıca danışman hocam olması benim için büyük bir lütuf olan, hayatımda iz bırakan bir kişilik olarak her zaman saygı ve şükranla anacağım değerli hocam Doç. Dr. İlknur Yeşilce Işık'a teşekkür ederim.

Şahin Salih ÖZDEMİR
AKSARAY, 2024

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. BAZI ÖZEL FONKSİYONLAR.....	3
3. KONVEKSLİK.....	5
3.1 Konveks Kümeler	5
3.2 Konveks Fonksiyonlar	6
4. SOYUT KONVEKSLİK.....	8
4.1 Soyutlama Yöntemleri.....	8
4.2 Soyut Konvekslik Çeşitleri	9
5. B-KONVEKSLİK.....	11
5.1 B-konveks Kümeler	11
5.2 B-konveks Fonksiyonlar	13
6. EŞİTSİZLİKLER.....	14
6.1 Klasik Konvekslikle İlgili Eşitsizlikler	14
6.2 Soyut Konvekslikle İlgili Eşitsizlikler.....	19
7. B-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN GAUSS-JACOBI EŞİTSİZLİĞİ ...	21
8. SONUÇ VE ÖNERİLER	57
KAYNAKLAR.....	59
ÖZGEÇMİŞ.....	63

YÜKSEK LİSANS TEZİ
B-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN GAUSS-JACOBI EŞİTSİZLİĞİ

Şahin Salih ÖZDEMİR

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. İlknur YEŞİLCE IŞIK

ÖZET

Gauss-Jacobi eşitsizliğini B-konveks fonksiyonlara uyguladığımız bu çalışmada, öncelikle çalışmamıza temel teşkil edecek bazı özel fonksiyonlara değinilmiştir. Daha sonra konvekslik, soyut konvekslik ve B-konvekslikle ilgili temel yapılar ve örnekler verilmiştir. Klasik ve soyut konvekslik üzerine kurulmuş bazı eşitsizlik örnekleri ifade edilmiştir. Gauss-Jacobi eşitsizliği B-konveks fonksiyonlar üzerine inşa edilerek bu çalışmanın omurgası oluşturulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Konvekslik, Soyut Konvekslik, B-konvekslik, Gauss-Jacobi Eşitsizliği

Mayıs, 2024; 63 sayfa

M.Sc. THESIS

FRACTIONAL INTEGRAL INEQUALITIES FOR B-CONVEX FUNCTIONS

Şahin Salih ÖZDEMİR

**Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. İlknur YEŞİLCE IŞIK

ABSTRACT

In this study, where we apply the Gauss-Jacobi inequality to B-convex functions, some special functions that will constitute the basis of our study are first mentioned. Then, basic structures and examples related to convexity, abstract convexity and B-convexity are given. Some examples of inequality based on classical and abstract convexity are presented. The backbone of this study is created by building the Gauss-Jacobi inequality on B-convex functions.

Keywords: Convexity, Abstract Convexity, B-convexity, Gauss-Jacobi Inequality

June, 2024; 63 pages

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. Konveks küme	4
Şekil 3.2. Konkav küme.....	4
Şekil 3.3. Tek değişkenli herhangi bir f fonksiyonu için epigraf.....	5
Şekil 5.1.1. B-konveks küme örneği.....	11
Şekil 5.1.2. B-konveks olmayan küme örneği	11



SİMGELER VE KISALTMALAR

max	Maksimum
sup	Supremum
$\vee$	Koordinatlara göre maksimum
$\wedge$	Koordinatlara göre minimum
${}_2F_1(\zeta, \eta; c; x)$	Gauss hipergeometrik fonksiyonu
$\beta_x(\zeta, \eta)$	Tamamlanmamış beta fonksiyonu
$\beta(\zeta, \eta)$	Beta Fonksiyonu
$I_x(p, q)$	Düzenlenmiş tamamlanmamış beta fonksiyonu
$J_x(p, q)$	Düzenlenmiş tamamlanmamış beta fonksiyonu tümleyeni
$epif$	Fonksiyonun epigraf kümesi
$L([\zeta, \eta])$	$[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı
$\mathbb{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
$\mathbb{Z}_0^-$	Pozitif olmayan tam sayılar kümesi.
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	n boyutlu Öklid uzayı
$\overline{\mathbb{R}}$	Reel sayılar kümesinin kapanışı
$\mathbb{R}_+$	Negatif olmayan reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_{++}$	Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_+^n$	$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\}$
$\forall$	Her
$\emptyset$	Boş küme
■	İspatın bittiğini gösterir

1. GİRİŞ

Konveks analiz Optimizasyon Teorisi [1], Eşitsizlikler Teorisi [2], Matematiksel Ekonomi [3,4] gibi güncel konularda kullanımı gittikçe artan, matematiğin önemli bir dalıdır. Bu yönden bakıldığında hem teorik hem de pratik olarak kullanım alanı oldukça yaygınlaşmaktadır. Bu bağlamda konveksliğin bir alt dalı olan soyut konvekslik de son zamanlarda çok gündemdedir [5, 6]. Konveksliğin soyutlaştırılması “topolojik soyut konvekslik”, “fonksiyonel soyut konvekslik” ve bunlara ek farklı birkaç yöntemle gerçekleştirilmektedir [5]. Bu yöntemlerle elde edilen birçok soyut konvekslik türü olup burada bunlardan birkaçına yer verilmiştir [6-13].

B-konvekslik bir soyut konvekslik biçimidir [8]. İlk çalışmalar ekonomik uygulamaları ile birlikte sürdürülürken, daha sonra hem uygulamaları hem teorik olarak incelenmesi üzerine araştırmalar yapılmıştır. B-konveksliğin genelleştirilmesi üzerine bazı çalışmalar gerçekleştirilmiş ve Ky-Fan eşitsizliği, Nash dengesi gibi ekonomik uygulamaları [14-18] makalelerinde incelenmiştir.

Fonksiyonun özellikleri ve eşitsizlikler ile ilgili uygulamaları da [19-24] makalelerinde çalışılmıştır. Ayrıca bu konu ile ilgili hala pek çok çalışılacak açık problem mevcuttur.

Eşitsizlikler konveks fonksiyonların matematiksel uygulamalarının en başında gelen çalışmalardandır [2,4]. Hem matematik hem de diğer alanlarda kullanılan en önemli eşitsizliklerin bir ucunun konveksliğe dayandığı gözlemlenebilir. Ayrıca, kendi içerisinde de daha farklı sonuçlar veren pek çok genel durum söz konusudur. Örneğin; konveks fonksiyonlar için geçerli en bilinen ve en temel Jensen eşitsizliğinden; Hölder, Minkowski ve Cauchy-Shwartz eşitsizlikleri, kendi uzun ve zorlu ispatlarına gerek duyulmadan, kolaylıkla bir konveks fonksiyon yardımıyla elde edilebilirler. [25-28]. Dolayısıyla, bu konudaki çalışmalar üzerinde durulması zaruri hale gelmiştir.

Eşitsizliklerin soyut konvekslik türleri üzerine uygulanması çalışmaları literatürde yaygın olarak yer almıştır [29-34]. Örneğin, Gauss-Jacobi Eşitsizliğinin m-konveks fonksiyonlar için formu aşağıdaki gibidir [7]:

$0 \leq \zeta < \eta < \infty$ olmak üzere, $f: [\zeta, \eta] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[\zeta, \eta]$ aralığında sürekli ve $f \in L([\zeta, \eta])$ olsun. Eğer f , $[\zeta, \eta]$ aralığında m -konveks (Tanım 4.2.6) ise $\forall m \in (0,1]$ ve $p, q > 0$ için;

$$\begin{aligned} & \int_{\zeta}^{\eta} (x - \zeta)^p (\eta - x)^q f(x) dx \\ & \leq (\eta - \zeta)^{p+q+1} \min \left\{ \beta(q+2, p+1) f(\zeta) + m\beta(q+1, p+2) f\left(\frac{\eta}{m}\right), \right. \\ & \quad \left. \beta(q+1, p+2) f(\zeta) + m\beta(q+2, p+1) f\left(\frac{\eta}{m}\right) \right\} \end{aligned} \quad (1.1)$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada β , beta fonksiyonudur.

Bu çalışmada bize altyapı oluşturacak temel bazı kavramlar ele aldıktan sonra, eşitsizlikler kuramında oldukça önemli bir yere sahip olan Gauss-Jacobi nümerik metodu üzerine yine önemli bir soyut konveks fonksiyon türü olan B-konveks fonksiyonlar uygulanmıştır. İkinci bölümde, çalışmalarda kullanılan bazı özel fonksiyonlara ve özelliklerine yer verilmiştir. Ardından, konveks küme ve fonksiyonlar ile ilgili geniş bir kısım oluşturulmuştur. Dördüncü bölüm, soyut konvekslik yapısı ve bazı soyut konveks fonksiyon çeşitlerini içermektedir. B-konvekslik ile ilgili kullanılacak bilgiler ve konveksliğin tanıtımı sonraki bölümde gerçekleştirilmiştir. Altıncı bölümde, konveksliğin uygulaması olan eşitsizliklerden bahsedilmiş ve en önemlileri gösterilmiştir. Yedinci bölüm ise tezde elde edilen sonuçları barındırmaktadır. Bu bölümde, B-konveks fonksiyonlar için geçerli Gauss-Jacobi eşitsizlikleri ve bunun farklı versiyonları ifade ve ispat edilmiştir. Sonuç ve öneriler bölümünde ise tez ile ilgili sonuçlar ve buna bağlı bazı açık problemlere yer verilmiştir.

2. BAZI ÖZEL FONKSİYONLAR

Tanım 2.1 (Gauss Hipergeometrik Fonksiyonu) [35-37] $\zeta, \eta \in \mathbb{C}$, $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$ olmak üzere,

$${}_2F_1(\zeta, \eta; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta)_n (\eta)_n}{(\omega)_n n!} z^n \quad (2.1)$$

fonksiyonuna Gauss hipergeometrik fonksiyonu denir.

Tanım 2.2 (Tamamlanmamış Beta Fonksiyonu) [38] $p > 0$, $q > 0$ ve $0 \leq z < 1$ olmak üzere,

$$\beta(z, p, q) = \beta_z(p, q) = \int_0^z t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \quad (2.2)$$

fonksiyonuna tamamlanmamış beta fonksiyonu denir.

Tanım 2.3 (Beta Fonksiyonu) [38] $p > 0$, $q > 0$ olmak üzere,

$$\beta(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \quad (2.3)$$

fonksiyonuna beta fonksiyonu denir.

Tamamlanmamış beta fonksiyonunda $z = 1$ alınırsa beta fonksiyonu elde edilir.

Hipergeometrik fonksiyon ve tamamlanmamış beta fonksiyonu arasında aşağıdaki ilişki söz konusudur [38]:

$$\beta(z, p, q) = \frac{z^p}{p} {}_2F_1(p, 1-q; p+1; z) \quad (2.4)$$

Tanım 2.4 (Düzenlenmiş Tamamlanmamış Beta Fonksiyonu) [39] $p > 0$, $q > 0$, $0 \leq x \leq 1$ ve $\beta(p, q)$ beta fonksiyonu olmak üzere,

$$I_x(p, q) = \frac{1}{\beta(p, q)} \int_0^x t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \quad (2.5)$$

fonksiyonuna düzenlenmiş tamamlanmamış beta fonksiyonu denir.

Tanım 2.5 (Düzenlenmiş Tamamlanmamış Beta Fonksiyonunun Tümleyeni)

[39] $p > 0, q > 0, 0 \leq x \leq 1$ ve $\beta(p, q)$ beta fonksiyonu olmak üzere,

$$J_x(p, q) = \frac{1}{\beta(p, q)} \int_x^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \quad (2.6)$$

fonksiyonuna düzenlenmemiş tamamlanmamış beta fonksiyonunun tümleyeni denir.

3. KONVEKSLİK

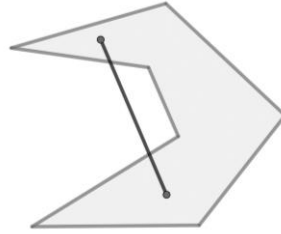
3.1 Konveks Kümeler

Tanım 3.1.1 [40] $C \subset \mathbb{R}^n$ ve $C \neq \emptyset$ olsun. $\forall x, y \in C$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$ oluyor ise C kümesine konveks küme denir.

Başka bir şekilde ifade edecek olursak, C kümesinden alınan herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçası üzerindeki noktalar yine C kümesinin elemanı oluyorsa C kümesi konvektir (Şekil 3.1.). Konveks olmayan kümeye **konkav küme** denir (Şekil 3.2.).



Şekil 3.1. Konveks küme



Şekil 3.2. Konkav küme

Örnek 3.1.1 $\mathbb{R}^n$, $\emptyset$ ve $\{x_1\}$ tek nokta kümeleri konvektir.

Tanım 3.1.1 [40] $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ noktaları verilsin ve negatif olmayan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ sayıları $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ koşulunu sağlasın. Bu durumda,

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m \quad (3.1)$$

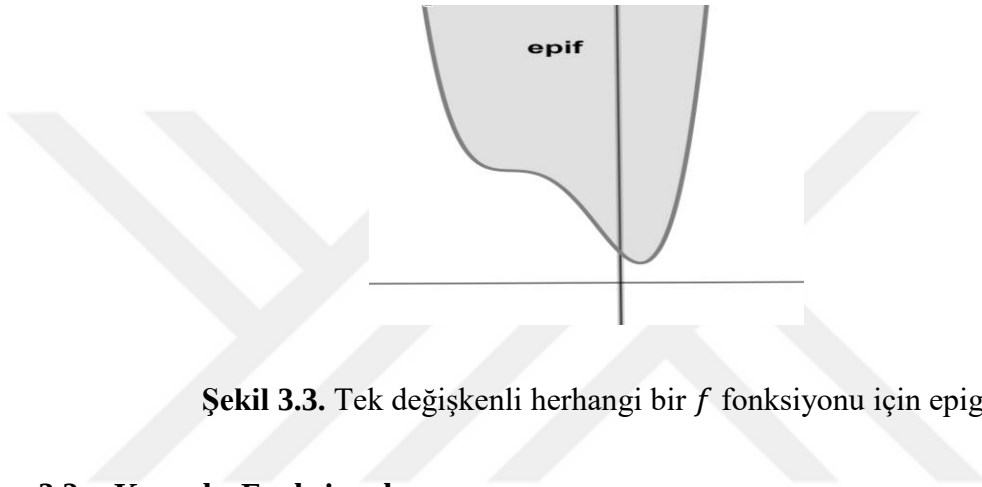
toplamına $x_1, x_2, \dots, x_m$ noktalarının **konveks kombinasyonu** denir.

Teorem 3.2.1 [40] Bir $C \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin konveks olması için gerek ve yeter koşul elemanlarının tüm konveks kombinasyonlarını içermesidir.

Teorem 3.2.2 [40] $C \subset \mathbb{R}^n, f: C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ olmak üzere;

$$\{(x, \mu) | x \in C, \mu \in \mathbb{R}, f(x) \leq \mu\} \quad (3.2)$$

biçiminde ifade edilen kümeye f fonksiyonunun epigrafi denir ve $epif$ ile gösterilir. Özel olarak $C \subset \mathbb{R}$ için f 'nin epigrafi f fonksiyonunun grafiğinin üstünde kalan kümeyi belirtir (Şekil 3.3.).



Şekil 3.3. Tek değişkenli herhangi bir f fonksiyonu için epigraf

3.2 Konveks Fonksiyonlar

Tanım 3.2.1 [40] $C \subset \mathbb{R}^n, f: C \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. $epif \subset \mathbb{R}^{n+1}$ olmak üzere,

$$epif = \{(x, \mu) | f(x) \leq \mu, \forall x \in C\} \quad (3.3)$$

kümesi konveks ise, f fonksiyonuna C kümesi üzerinde konveks fonksiyon denir.

Örnek 3.2.1

- i) $-\infty < \zeta < +\infty$ olmak üzere, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $f(x) = e^{\zeta x}$ fonksiyonu konveks fonksiyondur.
- ii) $-\infty < p \leq 0$ olmak üzere, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $f(x) = \begin{cases} x^p, & x > 0 \\ +\infty, & x \leq 0 \end{cases}$ fonksiyonu konveks fonksiyondur.
- iii) $1 \leq p < +\infty$ olmak üzere, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $f(x) = \begin{cases} x^p, & x \geq 0 \\ +\infty, & x < 0 \end{cases}$ fonksiyonu konveks fonksiyondur.

Konveks fonksiyonlar için geçerli gerekli ve yeterli koşul veren aşağıdaki teorem pek çok durumda kullanışlıdır.

Teorem 3.2.1 [40] $C \subset \mathbb{R}^n$ konveks bir küme ve $f: C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ olsun. f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter koşul $\forall x, y \in C$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad (3.4)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.



4. SOYUT KONVEKSLİK

Tanım 4.1 [5] H, X kümesi üzerinde tanımlı sonlu fonksiyonların bir kümesi ve $f: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ olsun. Eğer, H fonksiyonlar kümesinin

$$f(x) = \sup\{h(x) | h \in H\}, \forall x \in X \quad (4.1)$$

koşulunu sağlayacak biçimde bir U alt kümesi var ise, f fonksiyonuna H fonksiyonlar kümesine göre soyut konvektir (veya H -konvektir) denir. Burada, H fonksiyonlar sınıfına elemanter fonksiyonlar ailesi denir.

$H = \emptyset$ olması durumunda $f(x) = -\infty$ olarak kabul edilecektir.

4.1 Soyutlama Yöntemleri

Tanım 4.1.1 (Topolojik Soyut Konvekslik) [5] X bir vektör uzay, $C \subset X$ olsun. $\forall m \geq 2$ tamsayısı için, $V_m \subset \mathbb{R}^m$ kümesi ele alınsın. Bir $\phi_m: C^m \times V_m \rightarrow C$ fonksiyonlar ailesi verilsin. Eğer, $U \subset C$ olmak üzere,

$$x_1, x_2, \dots, x_m \in U, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in V_m$$

elemanları için,

$$\phi_m(x_1, x_2, \dots, x_m, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in U, \quad m = 2, 3, \dots \quad (4.2)$$

ise U kümesine ϕ_m fonksiyonlar ailesine göre soyut konvektir denir.

Tanım 4.1.2 (Fonksiyonel Soyut Konvekslik) [5] X bir vektör uzay, $C \subset X$ ve L kümesi de $\ell: C \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının bir ailesi olsun. Eğer $U \subset C$ olmak üzere, $\forall x \notin U$ noktası L fonksiyonlar ailesinden bir fonksiyon ile U kümesinden ayrılabilir ise, yani $\ell(x) > \sup_{u \in U} \ell(u)$ koşulunu sağlayacak bir $\ell \in L$ fonksiyonu var ise, U kümesine L fonksiyonlar ailesine göre soyut konveks küme denir.

4.2 Soyut Konvekslik Çeşitleri

Tanım 4.2.1 (B^{-1} -konveks Küme) [9] Bir $A \subset \mathbb{R}_{++}^n$ kümesinden alınan $\forall x_1, x_2 \in A$ ve $\forall t \in [1, \infty)$ için $tx_1 \wedge x_2 \in A$ olursa A kümesine B^{-1} -konveks küme denir.

Burada $\wedge$ işareti koordinatlara göre minimumu göstermektedir.

Tanım 4.2.2 (B^{-1} -konveks Fonksiyon) [10] $A \subset \mathbb{R}_{++}^n$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ ve A kümesi B^{-1} -konveks olsun. $\forall x_1, x_2 \in A$ ve $\forall t \in [1, \infty)$ için

$$f(\lambda x \wedge y) \leq \lambda f(x) \wedge f(y) \quad (4.3)$$

eşitsizliği geçerli ise f fonksiyonuna B^{-1} -konveks fonksiyon denir.

Tanım 4.2.3 (Log-konveks Fonksiyonlar) [4] I , reel sayıların bir alt aralığı olsun. Eğer bir $f: I \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ fonksiyonu için $\log f$ fonksiyonu konveks ise, ya da denk olarak $\forall x, y \in I$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq [f(x)]^\lambda [f(y)]^{1-\lambda} \quad (4.4)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna log-konveks fonksiyon denir.

Tanım 4.2.4 (P-fonksiyonlar) [6] $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $p: I \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu $\forall x, y \in I$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

$$p(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq p(x) + p(y) \quad (4.5)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, bu fonksiyona P-tipi bir fonksiyon ya da P-fonksiyon denir.

Tanım 4.2.5 (Kuazikonveks Fonksiyon) [6] $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall x, y \in I$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\} \quad (4.6)$$

ise, f fonksiyonuna kuazikonveks fonksiyon denir.

Tanım 4.2.6 (m-konveks fonksiyon) [11-13] $m \in [0,1]$ ve $\eta > 0$ olmak üzere, $f: [0, \eta] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x, y \in [0, \eta]$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx + m(1-t)y) \leq tf(x) + m(1-t)f(y) \quad (4.7)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, bu fonksiyona m-konveks fonksiyon denir.



5. B-KONVEKSLİK

Bu bölümde, soyut konvekslik türlerinden biri olan B-konvekslik incelenecektir. Özellikle matematiksel ekonomi, optimizasyon teorisi ve teorik matematik uygulamalarında yeri olan ve bu tezde Gauss-Jacobi Eşitsizliği'ne bağlı uygulamaların gerçekleştirileceği B-konvekslik; B-konveks kümeler ve B-konveks fonksiyonlar olarak iki ayrı başlık altında açıklanacaktır.

5.1 B-konveks Kümeler

Tanım 5.1.1 [8] $A \neq \emptyset$ olmak üzere, sonlu bir $A \subset \mathbb{R}_+^n$ kümesinin B-konveks kombinasyonu;

$$\left\{ \bigvee_{i=1}^m t_i x^{(i)} \mid t_i \in [0,1], \max_{1 \leq i \leq m} \{t_i\} = 1 \right\} \quad (5.1)$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki,

$$\bigvee_{i=1}^m x^{(i)} = \left(\max\{x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(m)}\}, \max\{x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, \dots, x_2^{(m)}\}, \dots, \max\{x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(m)}\} \right) \quad (5.2)$$

anlamındadır. Yani koordinatlara göre maksimumu ifade eder.

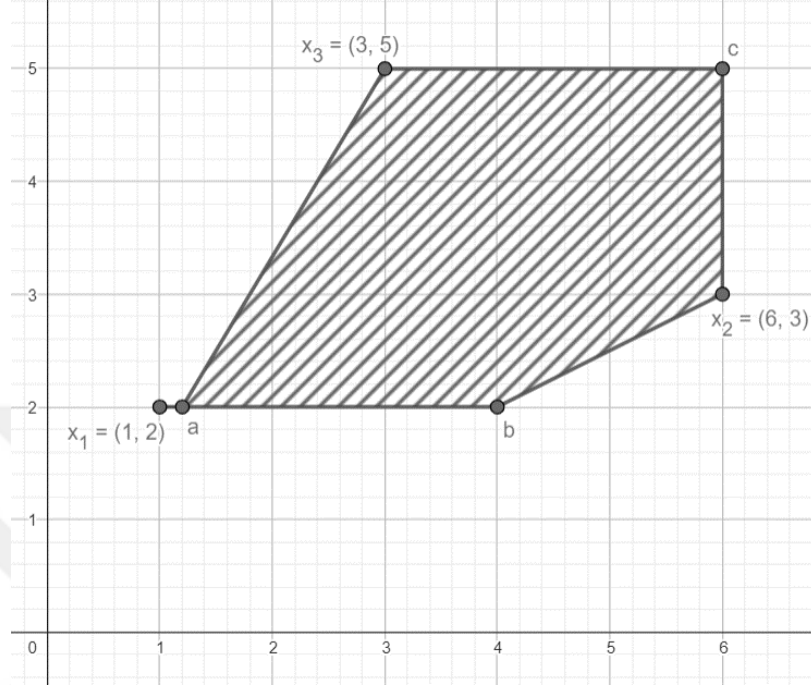
Tanım 5.1.2 [8] $A \subset \mathbb{R}_+^n$ ve $m \geq 2$ olmak üzere, $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)} \in A$ ve $t_1, t_2, \dots, t_m \in [0,1]$ için $\max(t_1, t_2, \dots, t_m) = 1$ olmak üzere

$$\bigvee_{i=1}^m t_i x^{(i)} \in A \quad (5.1)$$

sağlanıyorsa A kümesine B-konveks küme denir.

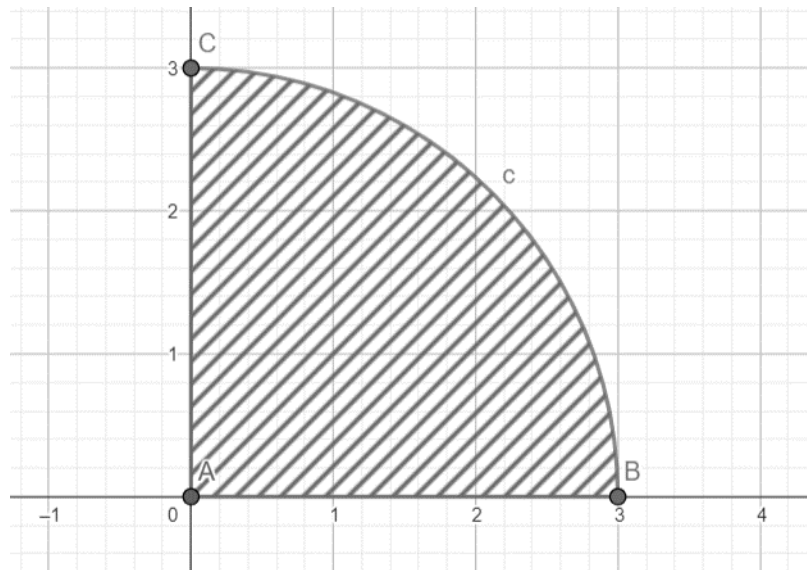
Teorem 5.1.1 [8] $A \subset \mathbb{R}_+^n$ olmak üzere, A kümesinden alınan $\forall x_1, x_2 \in A$ ve her $t \in [0,1]$ için $tx_1 \vee x_2 \in A$ ise A kümesi B-konveks kümedir.

Örnek 5.1.1 $\mathbb{R}_+^2$ de alınan $x_1 = (1,2), x_2 = (6,3), x_3 = (3,5)$ noktalarının B-konveks kombinasyonlarının oluşturduğu küme klasik anlamda konveks küme olmadığı halde B-konveks kümedir (Şekil 5.1.1).



Şekil 5.1. B-konveks küme örneği

Örnek 5.1.2 Klasik anlamda konveks olan $W = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 9\} \subset \mathbb{R}_+^2$ kümesi ise B-konveks küme değildir (Şekil 5.1.2).



Şekil 5.2. B-konveks olmayan küme örneği

5.2 B-konveks Fonksiyonlar

Tanım 5.2.1 [41] $U \subset \mathbb{R}_+^n$ ve $f: U \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ olsun. Eğer, $epif$ kümesi B-konveks küme ise f fonksiyonuna B-konveks fonksiyon denir.

Teorem 5.2.1 [41] $U \subset \mathbb{R}_+^n$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ olsun. f fonksiyonunun B-konveks olması için gerekli ve yeterli koşul U kümesinin B-konveks olması ve $\forall x_1, x_2 \in U$, $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x \vee y) \leq \lambda f(x) \vee f(y) \quad (5.1)$$

eşitsizliğin sağlanmasıdır.

Örnek 5.2.1 $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu B-konveks fonksiyondur.

6. EŞİTSİZLİKLER

Klasik ve soyut konvekslik tanımları temelde eşitsizliklere dayandığından, eşitsizlikler teorisi klasik ve soyut konvekslikte önemli bir yere sahiptir. Bu bölümde her iki konvekslik türü için sıkça kullanılan bazı eşitsizliklere yer verilmiştir.

6.1 Klasik Konvekslikle İlgili Eşitsizlikler

Teorem 6.1.1 (Jensen Eşitsizliği) [42] $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun konveks fonksiyon olması için gerekli ve yeterli koşul

$$f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x_i) \quad (6.2)$$

eşitsizliğin sağlanmasıdır, burada, $x_i \in \mathbb{R}^n, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$ için; $\lambda_i \geq 0$, ve $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = 1$ dir.

İspat. $x_i \in \mathbb{R}^n, 1 \leq i \leq m$ ve $(x_i, \mu_i) \in \text{epi} f$ olsun. Teorem 3.2.1 gereği

$$f \text{ konvektir} \Leftrightarrow \lambda_1(x_1, \mu_1) + \lambda_2(x_2, \mu_2) + \dots + \lambda_m(x_m, \mu_m) \in \text{epi} f$$

dir. Buradan,

$$f \text{ konvektir} \Leftrightarrow (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m, \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \dots + \lambda_m \mu_m) \in \text{epi} f$$

$$\Leftrightarrow f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m) \leq \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \dots + \lambda_m \mu_m$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m) \\ \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_m f(x_m) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x_i)$$

elde edilir. ■

Teorem 6.1.2 (Hermite-Hadamard Eşitsizliği) [43] $I, \mathbb{R}'$ de bir aralık $\zeta, \eta \in I$ ve $\zeta < \eta$ olmak üzere $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli, sınırlı ve konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f\left(\frac{\zeta + \eta}{2}\right) \leq \frac{1}{\zeta - \eta} \int_{\zeta}^{\eta} f(x) dx \leq \frac{f(\zeta) + f(\eta)}{2} \quad (6.3)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. f sürekli ve sınırlı olduğundan $[\zeta, \eta]$ aralığında integrallenebilir. Konvekslik tanımından;

$$f(t\zeta + (1-t)\eta) \leq tf(\zeta) + (1-t)f(\eta)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $[0,1]$ aralığında t ye göre integrali alınır;

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t\zeta + (1-t)\eta) dt &\leq \int_0^1 tf(\zeta) dt + \int_0^1 (1-t)f(\eta) dt \\ &= \frac{t^2}{2} f(\zeta) \Big|_0^1 + \left(t - \frac{t^2}{2}\right) f(\eta) \Big|_0^1 \\ &= \frac{f(\zeta) + f(\eta)}{2} \end{aligned}$$

$x = t\zeta + (1-t)\eta$, $t \in [0,1]$ değişken dönüşümü yapılırsa;

$$\frac{1}{\eta - \zeta} \int_{\zeta}^{\eta} f(x) dx \leq \frac{f(\zeta) + f(\eta)}{2}$$

bulunur. Böylece eşitsizliğin sağ tarafı elde edilir. Sol taraf için,

$$\frac{1}{\zeta - \eta} \int_{\zeta}^{\eta} f(x) dx = \frac{1}{\eta - \zeta} \left[\int_{\zeta}^{\frac{\zeta+\eta}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{\zeta+\eta}{2}}^{\eta} f(x) dx \right]$$

eşitliğinde sırasıyla $x = \zeta + t\left(\frac{\eta-\zeta}{2}\right)$ ve $x = \eta - t\left(\frac{\eta-\zeta}{2}\right)$ değişken dönüşümleri uygulanırsa;

$$\frac{1}{\eta - \zeta} \int_{\zeta}^{\eta} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[f\left(\zeta + \frac{t(\eta - \zeta)}{2}\right) + f\left(\eta - \frac{t(\eta - \zeta)}{2}\right) \right] dt$$

buradan,

$$\frac{1}{\eta - \zeta} \int_{\zeta}^{\eta} f(x) dx \geq f\left(\frac{\zeta + \eta}{2}\right)$$

eşitsizliği elde edilir, ki böylece eşitsizliğin sol tarafı da ispatlanmış olur. ■

Teorem 6.1.3 (Hermite-Hadamard-Fejer Eşitsizliği) [43] $\zeta, \eta \in \mathbb{R}$ ve $\zeta < \eta$ olmak üzere $f: [\zeta, \eta] \rightarrow \mathbb{R}$ bir konveks fonksiyon ve $g: [\zeta, \eta] \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan, integrallenebilir ve $\frac{\zeta + \eta}{2}$ noktasına göre simetrik olan bir fonksiyon olmak üzere;

$$f\left(\frac{\zeta + \eta}{2}\right) \int_{\zeta}^{\eta} g(x) dx \leq \int_{\zeta}^{\eta} f(x) g(x) dx \leq \frac{f(\zeta) + f(\eta)}{2} \int_{\zeta}^{\eta} g(x) dx \quad (6.4)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Her $t \in [0, 1]$ için f , $[\zeta, \eta]$ aralığında konveks olduğundan;

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\zeta + \eta}{2}\right) &= f\left(\frac{t\zeta + (1-t)\eta + t\eta + (1-t)\zeta}{2}\right) \\ &\leq \frac{f(t\zeta + (1-t)\eta) + f(t\eta + (1-t)\zeta)}{2} \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $g(t\eta + (1-t)\zeta)$ ile çarpılıp $[0, 1]$ aralığında t ye göre integrallenir ise;

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\zeta + \eta}{2}\right) \int_0^1 g(t\eta + (1-t)\zeta) dt \\ \leq \frac{1}{2} \int_0^1 g(t\eta + (1-t)\zeta) [f(t\zeta + (1-t)\eta) + f(t\eta + (1-t)\zeta)] dt \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $x = t\eta + (1-t)\zeta$ değişken dönüşümü yapıldığında

$$f\left(\frac{\zeta+\eta}{2}\right) \int_{\zeta}^{\eta} \frac{1}{\eta-\zeta} g(x) dx \leq \frac{1}{2} \left[\int_{\zeta}^{\eta} g(x) \cdot f(\zeta+\eta-x) dx + \int_{\zeta}^{\eta} g(x) f(x) dx \right] \frac{1}{\eta-\zeta}$$

elde edilir. $\zeta + \eta - x = t$ alınırsa,

$$f\left(\frac{\zeta+\eta}{2}\right) \int_{\zeta}^{\eta} g(x) dx \leq \frac{1}{2} \left[\int_{\zeta}^{\eta} g(\zeta+\eta-t) \cdot f(t) (-dt) + \int_{\zeta}^{\eta} g(x) f(x) dx \right]$$

g fonksiyonu $\frac{\zeta+\eta}{2}$ noktasına göre simetrik olduğundan $g(\zeta+\eta-t) = g(t)$ dir.

Buradan,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\zeta+\eta}{2}\right) \int_{\zeta}^{\eta} g(x) dx &\leq \frac{1}{2} \left[\int_{\zeta}^{\eta} g(t) f(t) dt + \int_{\zeta}^{\eta} g(x) f(x) dx \right] \\ &\leq \frac{1}{2} \left[\int_{\zeta}^{\eta} g(x) f(x) dx + \int_{\zeta}^{\eta} g(x) f(x) dx \right] \\ &\leq \int_a^b f(x) g(x) dx \end{aligned}$$

elde edilir, buradan,

$$f\left(\frac{\zeta+\eta}{2}\right) \int_{\zeta}^{\eta} g(x) dx \leq \int_{\zeta}^{\eta} f(x) g(x) dx$$

olur. Böylece eşitsizliğin sol tarafı ispatlanmış olur.

Sağ tarafın ispatı için; f konveks olduğundan $\forall t \in [0,1]$ için;

$$\begin{aligned} &f(t\zeta + (1-t)\eta) + f(t\eta + (1-t)\zeta) \\ &\leq tf(\zeta) + (1-t)f(\eta) + tf(\eta) + (1-t)f(\zeta) = f(\zeta) + f(\eta) \end{aligned}$$

olur, dolayısıyla,

$$f(t\zeta + (1-t)\eta) + f(t\zeta + (1-t)\eta) \leq f(\zeta) + f(\eta)$$

eşitsizliği elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafı da $g(t\eta + (1-t)\zeta)$ ile çarpılıp $[0,1]$ aralığında t değişkenine göre integrali alınır;

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(t\eta + (1-t)\zeta) f(t\zeta + (1-t)\eta) dt + \int_0^1 g(t\eta + (1-t)\zeta) f(t\eta + (1-t)\zeta) dt \\ \leq \int_0^1 (f(\zeta) + f(\eta)) g(t\eta + (1-t)\zeta) dt \end{aligned}$$

olur. Bu kısımda $x = t\eta + (1-t)\zeta$ değişken dönüşümü uygulanır ise,

$$\int_{\zeta}^{\eta} \frac{g(x) f(\zeta + \eta - x)}{\eta - \zeta} dx + \int_{\zeta}^{\eta} \frac{f(x) g(x)}{\eta - \zeta} dx \leq [f(\zeta) + f(\eta)] \int_{\zeta}^{\eta} \frac{g(x)}{\zeta - \eta} dx$$

elde edilir. Tekrar $\zeta + \eta - x = k$ değişken dönüşümü yapıldığında,

$$\int_{\zeta}^{\eta} g(\zeta + \eta - k) f(k) (-dk) + \int_{\zeta}^{\eta} g(x) f(x) dx \leq [f(\zeta) + f(\eta)] \int_{\zeta}^{\eta} g(x) dx$$

elde edilir. g fonksiyonu $\frac{\zeta+\eta}{2}$ ye göre simetrik olduğundan $g(\zeta + \eta - k) = g(k)$ olur.

$$\int_{\eta}^{\zeta} g(k) f(k) (-dk) + \int_{\zeta}^{\eta} g(x) f(x) dx \leq [f(\zeta) + f(\eta)] \int_{\zeta}^{\eta} g(x) dx$$

elde edilir. Buradan,

$$\int_{\zeta}^{\eta} g(x) f(x) dx + \int_{\zeta}^{\eta} g(x) f(x) dx \leq [f(\zeta) + f(\eta)] \int_{\zeta}^{\eta} g(x) dx$$

$$\int_{\zeta}^{\eta} g(x) f(x) dx \leq \frac{f(\zeta) + f(\eta)}{2} \int_{\zeta}^{\eta} g(x) dx$$

eşitsizliği elde edilir ki, böylece eşitsizliğin sağ tarafı da ispatlanmış olur. ■

Tanım 6.1.1 (Gauss-Jacobi Nümerik Yöntemi) [44] $0 \leq \zeta < \eta < +\infty$, $p > 0$, $q > 0$ ve f fonksiyonu $[\zeta, \eta]$ aralığında tanımlı reel fonksiyon olmak üzere,

$$\int_{\zeta}^{\eta} (x - \zeta)^p (\eta - x)^q f(x) dx = \sum_{k=0}^m \beta(m, k) f(\gamma_k) + R_m[f] \quad (6.1)$$

şeklindeki integral değere yaklaşan seriyi veren bu denkleme Gauss-Jacobi nümerik yöntemi denir ve burada R_m kalan terimi, $\beta(m, k)$ beta fonksiyonunu, γ_k ise m . dereceden Jacobi polinomunun köklerini göstermektedir.

Teorem 6.1.4 (Kuvvet Ortalama Eşitsizliği) [45] $p \geq 1$ olmak üzere, f ve g fonksiyonları $[\zeta, \eta]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar ve $|f|$ ve $|g|^p$ fonksiyonları da aynı aralıkta integrallenebilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda,

$$\int_{\zeta}^{\eta} |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_{\zeta}^{\eta} |f(x)| dx \right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_{\zeta}^{\eta} |f(x)| |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (6.5)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğe kuvvet ortalama eşitsizliği denir.

Teorem 6.1.5 (Hölder İntegral Eşitsizliği) [46] $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, f ve g fonksiyonları $[\zeta, \eta]$ aralığında reel fonksiyonlar ve $|f|^p$, $|g|^q$ fonksiyonları da aynı aralıkta integrallenebilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda,

$$\int_{\zeta}^{\eta} |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_{\zeta}^{\eta} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\zeta}^{\eta} |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \quad (6.6)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğe Hölder integral eşitsizliği denir.

6.2 Soyut Konvekslikle İlgili Eşitsizlikler

Teorem 6.2.1 (m-konveks Fonksiyonlar İçin Gauss-Jacobi Eşitsizliği) [7] $0 \leq \zeta < \eta < \infty$ olmak üzere $f: [\zeta, \eta] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon ve $f \in L([\zeta, \eta])$ olsun. Eğer f , $[\zeta, \eta]$ aralığında m-konveks bir fonksiyon ise $\forall m \in (0, 1]$ ve $\forall p > 0, q > 0$ için;

$$\begin{aligned} & \int_{\zeta}^{\eta} (x - \zeta)^p (\eta - x)^q f(x) dx \\ & \leq (\eta - \zeta)^{p+q+1} \min \left\{ \beta(q+2, p+1) f(\zeta) + m\beta(q+1, p+2) f\left(\frac{\eta}{m}\right), \right. \\ & \quad \left. \beta(q+1, p+2) f(\zeta) + m\beta(q+2, p+1) f\left(\frac{\eta}{m}\right) \right\} \end{aligned} \quad (6.8)$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada β , beta fonksiyonudur.

Teorem 6.2.2 (B-konveks Fonksiyonlar İçin Jensen Eşitsizliği) [47] $A \subset R_+^n$ ve $f: A \rightarrow R_+ \cup \{+\infty\}$ olmak üzere f fonksiyonu B-konveks fonksiyondur ancak ve ancak A kümesi B-konveksdir ve $i = 1, 2, \dots, m$ için $\forall x_i \in A$ ve $\lambda_i \in [0, 1]$ öyle ki $\max_{i=1,2,\dots,m} \{\lambda_i\} = 1$ için

$$f\left(\bigvee_{i=1}^m \lambda_i x_i\right) \leq \bigvee_{i=1}^m \lambda_i f(x_i) \quad (6.9)$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 6.2.3 (B^{-1} -konveks Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Eşitsizliği) [48] $f: [\zeta, \eta] \subset R_{++} \rightarrow R_{++}$ ve B^{-1} -konveks fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\frac{1}{\eta - \zeta} \int_{\zeta}^{\eta} f(x) dx \leq \begin{cases} \frac{(\zeta + \eta)f(\zeta)}{2\zeta}, & \frac{\eta}{\zeta} \leq \frac{f(\eta)}{f(\zeta)} \\ \frac{2\eta f(\zeta)f(\eta) - \zeta[f^2(\zeta) + f^2(\eta)]}{2(\eta - \zeta)f(\zeta)}, & 1 \leq \frac{f(\eta)}{f(\zeta)} < \frac{\eta}{\zeta} \end{cases} \quad (6.10)$$

eşitsizliği sağlanır.

7. B-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN GAUSS-JACOBI EŞİTSİZLİĞİ

Bu bölümde, ilk olarak yardımcı lemmalar ve daha sonra ise Gauss-Jacobi eşitsizliği içeren teoremler ispat edilecektir. B-konveks fonksiyonlar için geçerli bu yeni eşitsizliklerin farklı sonuçları ise bu bölümde ifade edilecek diğer çalışmalardandır.

Bundan sonraki tüm ifadelerde $0 \leq \zeta < \eta < +\infty$ varsayımı dikkate alınacaktır.

Lemma 7.1 $f: [\zeta, \eta] \rightarrow \mathbb{R}_+$, $(\zeta, \eta]$ aralığında integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $p > 0$, $q > 0$ için;

$$\begin{aligned} & \int_{\zeta}^{\eta} (\eta - x)^q x^p f(x) dx \\ &= \eta^{p+q+1} \left[\int_0^1 (1-t)^q t^p f(\max\{\zeta, t\eta\}) dt - f(\zeta) \beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1) \right] \end{aligned} \quad (7.1)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. İlk olarak f fonksiyonu için aşağıdaki integrali göz önüne alalım.

$$\int_0^1 (1-t)^q t^p f(\max\{\zeta, t\eta\}) dt = \int_0^{\frac{\zeta}{\eta}} (1-t)^q t^p f(\zeta) dt + \int_{\frac{\zeta}{\eta}}^1 (1-t)^q t^p f(t\eta) dt$$

Ele alınan bu integralde parçalanmanın ikinci kısmı için $t\eta = x$ değişken dönüşümü yapılırsa;

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-t)^q t^p f(\max\{\zeta, t\eta\}) dt &= f(\zeta) \int_0^{\frac{\zeta}{\eta}} (1-t)^q t^p dt + \int_{\frac{\zeta}{\eta}}^1 \left(1 - \frac{x}{\eta}\right)^q \left(\frac{x}{\eta}\right)^p \frac{f(x)}{\eta} dx \\ &= f(\zeta) \int_0^{\frac{\zeta}{\eta}} (1-t)^q t^p dt + \frac{1}{\eta^{p+q+1}} \int_{\zeta}^{\eta} (\eta - x)^q x^p f(x) dx \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan;

$$\begin{aligned}
& \int_{\zeta}^{\eta} (\eta - x)^q x^p f(x) dx \\
&= \eta^{p+q+1} \left[\int_0^1 (1-t)^q t^p f(\max\{\zeta, t\eta\}) dt - f(\zeta) \int_0^{\frac{\zeta}{\eta}} (1-t)^q t^p dt \right] \\
&= \eta^{p+q+1} \left[\int_0^1 (1-t)^q t^p f(\max\{\zeta, t\eta\}) dt - f(\zeta) \beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1) \right]
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. ■

(7.1) eşitliğini beta fonksiyonu yerine hipergeometrik fonksiyon ile ifade etmek mümkündür. Dolayısıyla bu ifade aşağıdaki lemma ile ispat edilecektir.

Lemma 7.2 $f: [\zeta, \eta] \rightarrow \mathbb{R}_+$, $(\zeta, \eta]$ aralığında integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $p > 0$, $q > 0$ için;

$$\begin{aligned}
& \int_{\zeta}^{\eta} (\eta - x)^q x^p f(x) dx = \eta^{p+q+1} \int_0^1 (1-t)^q t^p f(\max\{\zeta, t\eta\}) dt \\
& \quad - \frac{f(\zeta) \eta^q \zeta^{p+1} {}_2F_1\left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta}\right)}{p+1}
\end{aligned} \tag{7.2}$$

ifadesi geçerlidir.

İspat. İspat için ilk olarak, aşağıdaki integral ele alınarak, maksimum değerlere göre parçalanacaktır:

$$\int_0^1 (1-t)^q t^p f(\max\{\zeta, t\eta\}) dt = \int_0^{\frac{\zeta}{\eta}} (1-t)^q t^p f(\zeta) dt + \int_{\frac{\zeta}{\eta}}^1 (1-t)^q t^p f(t\eta) dt$$

Eşitlikte ikinci integral için $t\eta = x$ değişken dönüşümü yapılır ise;

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-t)^q t^p f(\max\{\zeta, t\eta\}) dt &= f(\zeta) \int_0^{\frac{\zeta}{\eta}} (1-t)^q t^p dt + \int_{\frac{\zeta}{\eta}}^1 \left(1 - \frac{x}{\eta}\right)^q \left(\frac{x}{\eta}\right)^p \frac{f(x)}{\eta} dx \\ &= f(\zeta) \int_0^{\frac{\zeta}{\eta}} (1-t)^q t^p dt + \frac{1}{\eta^{p+q+1}} \int_{\zeta}^{\eta} (\eta-x)^q x^p f(x) dx \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan;

$$\begin{aligned} \int_{\zeta}^{\eta} (\eta-x)^q x^p f(x) dx &= \eta^{p+q+1} \left[\int_0^1 (1-t)^q t^p f(\max\{\zeta, t\eta\}) dt \right. \\ &\quad \left. - f(\zeta) \int_0^{\frac{\zeta}{\eta}} (1-t)^q t^p dt \right] \\ &= \eta^{p+q+1} \int_0^1 (1-t)^q t^p f(\max\{\zeta, t\eta\}) dt \\ &\quad - \eta^{p+q+1} f(\zeta) \frac{t^{p+1} {}_2F_1(p+1, -q; p+2; t)}{p+1} \Big|_0^{\frac{\zeta}{\eta}} \\ &= \eta^{p+q+1} \int_0^1 (1-t)^q t^p f(\max\{\zeta, t\eta\}) dt \\ &\quad - \eta^{p+q+1} f(\zeta) \frac{\left(\frac{\zeta}{\eta}\right)^{p+1} {}_2F_1\left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta}\right)}{p+1} \\ &= \eta^{p+q+1} \int_0^1 (1-t)^q t^p f(\max\{\zeta, t\eta\}) dt \end{aligned}$$

$$- \frac{f(\zeta)\eta^q \zeta^{p+1} {}_2F_1\left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta}\right)}{p+1}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

B-konveks fonksiyonlar için geçerli Gauss-Jacobi eşitsizliklerinden ilki aşağıdaki teorem ile ifade edilecektir.

Teorem 7.1 $f: [\zeta, \eta] \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu ele alınsın. f fonksiyonu B-konveks bir fonksiyon ve $f \in L([\zeta, \eta])$ olsun. Bu koşullar altında her $p > 0, q > 0$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\int_{\zeta}^{\eta} (x - \zeta)^p \cdot (\eta - x)^q f(x) dx$$

$$\leq \begin{cases} \left\{ \begin{aligned} &f(\zeta)(\eta - \zeta)^{p+q+1} \left[\frac{\beta_{\eta f(\zeta) - \zeta f(\eta)}{(\eta - \zeta)f(\eta)} (p+1, q+1) \right] \\ &+ \frac{f(\eta)}{\eta} (\eta - \zeta)^{p+q+1} [\zeta \beta(p+1, q+1) \\ &J_{\eta f(\zeta) - \zeta f(\eta)} (p+1, q+1) \\ &+ (\eta - \zeta) \beta(p+2, q+1) \\ &J_{\eta f(\zeta) - \zeta f(\eta)} (p+2, q+1) \end{aligned} \right\}, & 0 < \frac{\zeta}{\eta} \leq \frac{f(\zeta)}{f(\eta)} < 1 \\ \frac{f(\eta)}{\eta} (\eta - \zeta)^{p+q+1} [\zeta \beta(p+1, q+1) \\ + (\eta - \zeta) \beta(p+2, q+1)], & 0 \leq \frac{f(\zeta)}{f(\eta)} < \frac{\zeta}{\eta} \leq 1 \\ f(\eta)(\eta - \zeta)^{p+q+1} \beta(p+1, q+1), & 0 < \frac{\zeta}{\eta} < 1 \leq \frac{f(\zeta)}{f(\eta)} \end{cases} \quad (7.3)$$

İspat. f , B-konveks bir olsun. Bu durumda,

$$f(\max\{\zeta, \lambda\eta\}) \leq \max\{f(\zeta), \lambda f(\eta)\}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitsizliğin her iki tarafı $(\max\{\zeta, \lambda\eta\} - \zeta)^p (\eta - \max\{\zeta, \lambda\eta\})^q$ ile çarpılıp $\lambda \in [0,1]$ üzerinden integrali alınır; sol kısım için

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (\max\{\zeta, \lambda\eta\} - \zeta)^p (\eta - \max\{\zeta, \lambda\eta\})^q f(\max\{\zeta, \lambda\eta\}) d\lambda \\ &= \int_0^{\frac{\zeta}{\eta}} (\zeta - \zeta)^p (\eta - \zeta)^q f(\zeta) d\lambda + \int_{\frac{\zeta}{\eta}}^1 (\lambda\eta - \zeta)^p (\eta - \lambda\eta)^q f(\lambda\eta) d\lambda \\ &= \int_{\frac{\zeta}{\eta}}^1 (\lambda\eta - \zeta)^p (\eta - \lambda\eta)^q f(\lambda\eta) d\lambda \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\lambda\eta = x$ değişken dönüşümü yapılır ise, eşitsizliğin sol tarafı için,

$$\int_{\frac{\zeta}{\eta}}^1 (\lambda\eta - \zeta)^p (\eta - \lambda\eta)^q f(\lambda\eta) d\lambda = \frac{1}{\eta} \int_{\zeta}^{\eta} (x - \zeta)^p (\eta - x)^q f(x) dx \quad (7.4)$$

elde edilir.

Eşitsizliğin sağ tarafı için ise,

$$\int_0^1 (\max\{\zeta, \lambda\eta\} - \zeta)^p (\eta - \max\{\zeta, \lambda\eta\})^q \max\{f(\zeta), \lambda f(\eta)\} d\lambda$$

integrali ele alınacaktır. Bu integralde aşağıdaki üç durum söz konusudur:

- i) $0 < \frac{\zeta}{\eta} \leq \frac{f(\zeta)}{f(\eta)} < 1$
- ii) $0 \leq \frac{f(\zeta)}{f(\eta)} < \frac{\zeta}{\eta} \leq 1$
- iii) $0 < \frac{\zeta}{\eta} < 1 \leq \frac{f(\zeta)}{f(\eta)}$.

i) $0 < \frac{\zeta}{\eta} \leq \frac{f(\zeta)}{f(\eta)} < 1$ durumu için;

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 (\max\{\zeta, \lambda\eta\} - \zeta)^p (\eta - \max\{\zeta, \lambda\eta\})^q \max\{f(\zeta), \lambda f(\eta)\} d\lambda \\
&= \int_0^{\frac{\zeta}{\eta}} (\max\{\zeta, \lambda\eta\} - \zeta)^p (\eta - \max\{\zeta, \lambda\eta\})^q \max\{f(\zeta), \lambda f(\eta)\} d\lambda \\
&\quad + \int_{\frac{\zeta}{\eta}}^{\frac{f(\zeta)}{f(\eta)}} (\max\{\zeta, \lambda\eta\} - \zeta)^p (\eta - \max\{\zeta, \lambda\eta\})^q \max\{f(\zeta), \lambda f(\eta)\} d\lambda \\
&\quad + \int_{\frac{f(\zeta)}{f(\eta)}}^1 (\max\{\zeta, \lambda\eta\} - \zeta)^p (\eta - \max\{\zeta, \lambda\eta\})^q \max\{f(\zeta), \lambda f(\eta)\} d\lambda \\
&= \int_0^{\frac{\zeta}{\eta}} 0 \cdot d\lambda + \int_{\frac{\zeta}{\eta}}^{\frac{f(\zeta)}{f(\eta)}} (\lambda\eta - \zeta)^p (\eta - \lambda\eta)^q f(\zeta) d\lambda \\
&\quad + \int_{\frac{f(\zeta)}{f(\eta)}}^1 (\lambda\eta - \zeta)^p (\eta - \lambda\eta)^q \lambda f(\eta) d\lambda \\
&= \int_{\frac{\zeta}{\eta}}^{\frac{f(\zeta)}{f(\eta)}} (\lambda\eta - \zeta)^p (\eta - \lambda\eta)^q f(\zeta) d\lambda + \int_{\frac{f(\zeta)}{f(\eta)}}^1 (\lambda\eta - \zeta)^p (\eta - \lambda\eta)^q \lambda f(\eta) d\lambda
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradaki integrallere $\lambda\eta = t$ değişken dönüşümü yapılırsa;

$$\begin{aligned}
& \frac{f(\zeta)}{f(\eta)} \int_{\frac{\zeta}{\eta}}^1 (\lambda\eta - \zeta)^p (\eta - \lambda\eta)^q f(\zeta) d\lambda + \int_{\frac{f(\zeta)}{f(\eta)}}^1 (\lambda\eta - \zeta)^p (\eta - \lambda\eta)^q \lambda f(\eta) d\lambda \\
&= \int_{\frac{\zeta}{\eta}}^1 (t - \zeta)^p (\eta - t)^q \frac{f(\zeta)}{\eta} dt + \int_{\frac{f(\zeta)}{f(\eta)}}^1 (t - \zeta)^p (\eta - t)^q t \frac{f(\eta)}{\eta^2} dt \\
&= \frac{f(\zeta)}{\eta} \int_{\frac{\zeta}{\eta}}^1 (t - \zeta)^p (\eta - t)^q dt + \frac{f(\eta)}{\eta^2} \int_{\frac{f(\zeta)}{f(\eta)}}^1 (t - \zeta)^p (\eta - t)^q t dt
\end{aligned}$$

olur. Burada, $t - \zeta = (\eta - \zeta)x$ değişken dönüşümü uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
& \frac{f(\zeta)}{\eta} \int_{\frac{\zeta}{\eta}}^1 (t - \zeta)^p (\eta - t)^q dt + \frac{f(\eta)}{\eta^2} \int_{\frac{f(\zeta)}{f(\eta)}}^1 (t - \zeta)^p (\eta - t)^q t dt \\
&= \frac{f(\zeta)}{\eta} \int_0^1 [(\eta - \zeta)x]^p [(\eta - \zeta) - (\eta - \zeta)x]^q (\eta - \zeta) dx \\
&\quad + \frac{f(\eta)}{\eta^2} \int_{\frac{f(\zeta)}{f(\eta)}}^1 [(\eta - \zeta)x]^p [(\eta - \zeta) - (\eta - \zeta)x]^q \\
&\quad [\zeta + (\eta - \zeta)x](\eta - \zeta) dx \\
&= \frac{f(\zeta)}{\eta} (\eta - \zeta)^{p+q+1} \int_0^1 x^p (1 - x)^q dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{f(\eta)}{\eta^2} (\eta - \zeta)^{p+q+1} \int_{\frac{\eta f(\zeta) - \zeta f(\eta)}{(\eta - \zeta)f(\eta)}}^1 x^p (1 - x)^q [\zeta + (\eta - \zeta)x] dx \\
& = \frac{f(\zeta)}{\eta} (\eta - \zeta)^{p+q+1} \int_0^{\frac{\eta f(\zeta) - \zeta f(\eta)}{(\eta - \zeta)f(\eta)}} x^p (1 - x)^q dx \\
& \quad + \frac{f(\eta)}{\eta^2} (\eta - \zeta)^{p+q+1} \left[\zeta \int_{\frac{\eta f(\zeta) - \zeta f(\eta)}{(\eta - \zeta)f(\eta)}}^1 x^p (1 - x)^q dx \right. \\
& \quad \left. + (\eta - \zeta) \int_{\frac{\eta f(\zeta) - \zeta f(\eta)}{(\eta - \zeta)f(\eta)}}^1 x^{p+1} (1 - x)^q dx \right] \\
& = \frac{f(\zeta)}{\eta} (\eta - \zeta)^{p+q+1} \left[\beta_{\frac{\eta f(\zeta) - \zeta f(\eta)}{(\eta - \zeta)f(\eta)}}(p + 1, q + 1) \right] \\
& \quad + \frac{f(\eta)}{\eta^2} (\eta - \zeta)^{p+q+1} \left[\zeta \beta(p + 1, q + 1) J_{\frac{\eta f(\zeta) - \zeta f(\eta)}{(\eta - \zeta)f(\eta)}}(p + 1, q + 1) \right. \\
& \quad \left. + (\eta - \zeta) \beta(p + 2, q + 1) J_{\frac{\eta f(\zeta) - \zeta f(\eta)}{(\eta - \zeta)f(\eta)}}(p + 2, q + 1) \right] \tag{7.5}
\end{aligned}$$

olur. (7.4) ve (7.5) den $0 < \frac{\zeta}{\eta} \leq \frac{f(\zeta)}{f(\eta)} < 1$ durumu için,

$$\begin{aligned}
& \int_{\zeta}^{\eta} (x - \zeta)^p (\eta - x)^q f(x) dx \leq f(\zeta) (\eta - \zeta)^{p+q+1} \left[\beta_{\frac{\eta f(\zeta) - \zeta f(\eta)}{(\eta - \zeta)f(\eta)}}(p + 1, q + 1) \right] \\
& \quad + \frac{f(\eta)}{\eta} (\eta - \zeta)^{p+q+1} \left[\zeta \beta(p + 1, q + 1) J_{\frac{\eta f(\zeta) - \zeta f(\eta)}{(\eta - \zeta)f(\eta)}}(p + 1, q + 1) \right. \\
& \quad \left. + (\eta - \zeta) \beta(p + 2, q + 1) J_{\frac{\eta f(\zeta) - \zeta f(\eta)}{(\eta - \zeta)f(\eta)}}(p + 2, q + 1) \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

ii) $0 \leq \frac{f(\zeta)}{f(\eta)} < \frac{\zeta}{\eta} \leq 1$ durumu için;

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 (\max\{\zeta, \lambda\eta\} - \zeta)^p (\eta - \max\{\zeta, \lambda\eta\})^q \max\{f(\zeta), \lambda f(\eta)\} d\lambda \\
&= \int_0^{\frac{f(\zeta)}{f(\eta)}} (\max\{\zeta, \lambda\eta\} - \zeta)^p (\eta - \max\{\zeta, \lambda\eta\})^q \max\{f(\zeta), \lambda f(\eta)\} d\lambda \\
&\quad + \int_{\frac{f(\zeta)}{f(\eta)}}^{\frac{\zeta}{\eta}} (\max\{\zeta, \lambda\eta\} - \zeta)^p (\eta - \max\{\zeta, \lambda\eta\})^q \max\{f(\zeta), \lambda f(\eta)\} d\lambda \\
&\quad + \int_{\frac{\zeta}{\eta}}^1 (\max\{\zeta, \lambda\eta\} - \zeta)^p (\eta - \max\{\zeta, \lambda\eta\})^q \max\{f(\zeta), \lambda f(\eta)\} d\lambda \\
&= \int_0^{\frac{f(\zeta)}{f(\eta)}} 0 d\lambda + \int_{\frac{f(\zeta)}{f(\eta)}}^{\frac{\zeta}{\eta}} 0 d\lambda + \int_{\frac{\zeta}{\eta}}^1 (\lambda\eta - \zeta)^p (\eta - \lambda\eta)^q \lambda f(\eta) d\lambda \\
&= \int_{\frac{\zeta}{\eta}}^1 (\lambda\eta - \zeta)^p (\eta - \lambda\eta)^q \lambda f(\eta) d\lambda
\end{aligned}$$

elde edilir. İntegrale $\lambda\eta = t$ değişken dönüşümü uygulandığında;

$$\int_{\frac{\zeta}{\eta}}^1 (\lambda\eta - \zeta)^p (\eta - \lambda\eta)^q \lambda f(\eta) d\lambda = \int_{\zeta}^{\eta} (t - \zeta)^p (\eta - t)^q \frac{t f(\eta)}{\eta^2} dt$$

$$= \frac{f(\eta)}{\eta^2} \int_{\zeta}^{\eta} (t - \zeta)^p (\eta - t)^q t dt$$

elde edilir. Bu integralde de tekrar $t - \zeta = (\eta - \zeta)x$ değişken dönüşümü uygulanırsa;

$$\begin{aligned} & \frac{f(\eta)}{\eta^2} \int_{\zeta}^{\eta} (t - \zeta)^p (\eta - t)^q t dt \\ &= \frac{f(\eta)}{\eta^2} \int_0^1 ((\eta - \zeta)x)^p (\eta - \zeta - (\eta - \zeta)x)^q (\zeta + (\eta - \zeta)x)(\eta - \zeta) dx \\ &= \frac{f(\eta)}{\eta^2} (\eta - \zeta)^{p+q+1} \int_0^1 x^p (1 - x)^q (\zeta + (\eta - \zeta)x) dx \\ &= \frac{f(\eta)}{\eta^2} (\eta - \zeta)^{p+q+1} \left[\zeta \int_0^1 x^p (1 - x)^q dx + (\eta - \zeta) \int_0^1 x^{p+1} (1 - x)^q dx \right] \\ &= \frac{f(\eta)}{\eta^2} (\eta - \zeta)^{p+q+1} [\zeta \beta(p + 1, q + 1) + (\eta - \zeta) \beta(p + 2, q + 1)] \quad (7.6) \end{aligned}$$

elde edilir. (7.4) ve (7.6) den $0 \leq \frac{f(\zeta)}{f(\eta)} < \frac{\zeta}{\eta} \leq 1$ durumu için,

$$\int_{\zeta}^{\eta} (x - \zeta)^p (\eta - x)^q f(x) dx \leq \frac{f(\eta)}{\eta} (\eta - \zeta)^{p+q+1}$$

$$[\zeta \beta(p + 1, q + 1) + (\eta - \zeta) \beta(p + 2, q + 1)]$$

eşitsizliği elde edilir.

- iii) $0 < \frac{\zeta}{\eta} < 1 \leq \frac{f(\zeta)}{f(\eta)}$ durumu söz konusu ise; integral $[0,1]$ aralığında olduğundan $0 < \frac{\zeta}{\eta} < 1$ için inceleme yapılır. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 (\max\{\zeta, \lambda\eta\} - \zeta)^p (\eta - \max\{\zeta, \lambda\eta\})^q \max\{f(\zeta), \lambda f(\eta)\} d\lambda \\
&= \int_0^{\frac{\zeta}{\eta}} (\max\{\zeta, \lambda\eta\} - \zeta)^p (\eta - \max\{\zeta, \lambda\eta\})^q \max\{f(\zeta), \lambda f(\eta)\} d\lambda \\
&\quad + \int_{\frac{\zeta}{\eta}}^1 (\max\{\zeta, \lambda\eta\} - \zeta)^p (\eta - \max\{\zeta, \lambda\eta\})^q \max\{f(\zeta), \lambda f(\eta)\} d\lambda \\
&= \int_0^{\frac{\zeta}{\eta}} 0 d\lambda + \int_{\frac{\zeta}{\eta}}^1 (\lambda\eta - \zeta)^p (\eta - \lambda\eta)^q f(\zeta) d\lambda
\end{aligned}$$

elde edilir. İntegralde $\lambda\eta = t$ değişken dönüşümü yapıldığında ise aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\zeta}{\eta}}^1 (\lambda\eta - \zeta)^p (\eta - \lambda\eta)^q f(\zeta) d\lambda &= \frac{f(\zeta)}{\eta} \int_{\zeta}^{\eta} (t - \zeta)^p (\eta - t)^q dt \\
&= \frac{f(\zeta)}{\eta} (\eta - \zeta)^{p+q+1} \beta(p+1, q+1)
\end{aligned} \tag{7.7}$$

olur. O halde (7.4) ve (7.7) denklemlerinden $0 < \frac{\zeta}{\eta} < 1$ durumu için,

$$\int_{\zeta}^{\eta} (x - \zeta)^p (\eta - x)^q f(x) dx \leq f(\zeta) (\eta - \zeta)^{p+q+1} \beta(p+1, q+1)$$

eşitsizliği elde edilir.

Üç durum birlikte göz önüne alındığında ispat tamamlanmış olur. ■

Bu kısımda, daha önce ispat edilen yardımcı lemmalar kullanılarak B-konveks fonksiyonlar için geçerli Gauss-Jacobi eşitsizlikleri ile ilgili aşağıdaki teoremler ispat edilecektir.

Teorem 7.2 $f: [\zeta, \eta] \rightarrow \mathbb{R}_+$, $(\zeta, \eta]$ aralığında integrallenebilir, B- konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $p > 0$, $q > 0$ için;

$$\int_{\zeta}^{\eta} (\eta - x)^q x^p f(x) dx \leq \begin{cases} \eta^{p+q+1} \left[\beta_{\frac{f(\zeta)}{f(\eta)}}(p+1, q+1) + \frac{f(\eta)J_{\frac{f(\zeta)}{f(\eta)}}(p+2, q+1)\beta(p+2, q+1)}{f(\eta)} - f(\zeta)\beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1) \right], & 0 \leq \frac{f(\zeta)}{f(\eta)} < 1 \\ \eta^{p+q+1} f(\zeta) \left[\beta_1(p+1, q+1) - \beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1) \right], & 1 \leq \frac{f(\zeta)}{f(\eta)} \end{cases} \quad (7.8)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 7.1'den; $f: [\zeta, \eta] \rightarrow \mathbb{R}_+$, $(\zeta, \eta]$ aralığında integrallenebilir bir fonksiyon ve her $p > 0$, $q > 0$ için;

$$\begin{aligned} & \int_{\zeta}^{\eta} (\eta - x)^q x^p f(x) dx \\ &= \eta^{p+q+1} \left[\int_0^1 (1-t)^q t^p f(\max\{\zeta, t\eta\}) dt - f(\zeta)\beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1) \right] \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. f , B-konveks olduğundan,

$$\eta^{p+q+1} \left[\int_0^1 (1-t)^q t^p f(\max\{\zeta, t\eta\}) dt - f(\zeta)\beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1) \right]$$

$$\leq \eta^{p+q+1} \left[\int_0^1 (1-t)^q t^p \max\{f(\zeta), tf(\eta)\} dt - f(\zeta) \beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1) \right]$$

olur. Bu durumda,

$$\int_{\zeta}^{\eta} (\eta-x)^q x^p f(x) dx \leq \eta^{p+q+1} \left[\int_0^1 (1-t)^q t^p \max\{f(\zeta), tf(\eta)\} dt - f(\zeta) \beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1) \right]$$

eşitsizliği sağlanır. Burada iki durum söz konusudur:

i) $0 \leq \frac{f(\zeta)}{f(\eta)} < 1$

ii) $1 \leq \frac{f(\zeta)}{f(\eta)}$.

i) $0 \leq \frac{f(\zeta)}{f(\eta)} < 1$ durumu ele alınırsa;

$$\begin{aligned} \int_{\zeta}^{\eta} (\eta-x)^q x^p f(x) dx &\leq \eta^{p+q+1} \left[\int_0^{\frac{f(\zeta)}{f(\eta)}} (1-t)^q t^p f(\zeta) dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{f(\zeta)}{f(\eta)}}^1 (1-t)^q t^p tf(\eta) dt - f(\zeta) \beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1) \right] \\ &= \eta^{p+q+1} \left[f(\zeta) \int_0^{\frac{f(\zeta)}{f(\eta)}} (1-t)^q t^p dt \right. \\ &\quad \left. + f(\eta) \int_{\frac{f(\zeta)}{f(\eta)}}^1 (1-t)^q t^{p+1} dt - f(\zeta) \beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \eta^{p+q+1} \left[f(\zeta) \beta_{\frac{f(\zeta)}{f(\eta)}}(p+1, q+1) \right. \\
&\quad \left. + f(\eta) J_{\frac{f(\zeta)}{f(\eta)}}(p+2, q+1) \beta(p+2, q+1) \right. \\
&\quad \left. - f(\zeta) \beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1) \right]
\end{aligned}$$

olur. O halde $0 \leq \frac{f(\zeta)}{f(\eta)} < 1$ koşulu altında,

$$\begin{aligned}
&\int_{\zeta}^{\eta} (\eta - x)^q x^p f(x) dx \leq \eta^{p+q+1} \left[f(\zeta) \beta_{\frac{f(\zeta)}{f(\eta)}}(p+1, q+1) \right. \\
&\quad \left. + f(\eta) J_{\frac{f(\zeta)}{f(\eta)}}(p+2, q+1) \beta(p+2, q+1) \right. \\
&\quad \left. - f(\zeta) \beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1) \right] \tag{7,9}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

ii) $1 \leq \frac{f(\zeta)}{f(\eta)}$ durumu söz konusu olduğunda ise;

$$\begin{aligned}
&\int_{\zeta}^{\eta} (\eta - x)^q x^p f(x) dx \\
&= \eta^{p+q+1} \left[\int_0^1 (1-t)^q t^p f(\max\{\zeta, t\eta\}) dt - f(\zeta) \beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1) \right] \\
&\leq \eta^{p+q+1} \left[\int_0^1 (1-t)^q t^p \max\{f(\zeta), tf(\eta)\} dt - f(\zeta) \beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1) \right]
\end{aligned}$$

o halde,

$$\begin{aligned}
\int_{\zeta}^{\eta} (\eta - x)^q x^p f(x) dx &\leq \left[\eta^{p+q+1} \int_0^1 (1-t)^q t^p f(\zeta) dt - f(\zeta) \beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1) \right] \\
&= \eta^{p+q+1} f(\zeta) \left[\int_0^1 (1-t)^q t^p dt - \beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1) \right] \\
&= \eta^{p+q+1} f(\zeta) \left[\beta(p+1, q+1) - \beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1) \right]
\end{aligned}$$

olur. Buradan $1 \leq \frac{f(\zeta)}{f(\eta)}$ durumu için,

$$\int_{\zeta}^{\eta} (\eta - x)^q x^p f(x) dx \leq \eta^{p+q+1} f(\zeta) \left[\beta(p+1, q+1) - \beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1) \right] \quad (7.10)$$

eşitsizliği elde edilir.

(7.9) ve (7.10) eşitsizlikleri ile ispat tamamlanır. ■

Teorem 7.3 $f: [\zeta, \eta] \rightarrow \mathbb{R}_+$, $(\zeta, \eta]$ aralığında integrallenebilir, B- konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda, her $p > 0$, $q > 0$ için;

$$\int_{\zeta}^{\eta} (\eta - x)^q x^p f(x) dx$$

$$\leq \begin{cases} \eta^{p+q+1} \left[\frac{f^{p+2}(\zeta) {}_2F_1\left(p+1, -q; p+2; \frac{f(\zeta)}{f(\eta)}\right)}{f^{p+2}(\eta)(p+1)} + \frac{f(\eta) {}_2F_1(p+2, -q; p+3; 1)}{p+2} - \frac{f^{p+2}(\zeta) {}_2F_1\left(p+2, -q; p+3; \frac{f(\zeta)}{f(\eta)}\right)}{f^{p+1}(\eta)(p+1)} \right] \\ - \frac{f(\zeta)\eta^q \zeta^{p+1} {}_2F_1\left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta}\right)}{p+1}, & 0 \leq \frac{f(\zeta)}{f(\eta)} < 1 \\ \frac{\eta^{p+q+1} f(\zeta) {}_2F_1(p+1, -q; p+2; 1)}{p+1} \\ - \frac{f(\zeta)\eta^q \zeta^{p+1} {}_2F_1\left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta}\right)}{p+1}, & 1 \leq \frac{f(\zeta)}{f(\eta)} \end{cases} \quad (7.11)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. İspat için ilk olarak Lemma 7.2'den; $f: [\zeta, \eta] \rightarrow \mathbb{R}_+$, $(\zeta, \eta]$ aralığında integrallenebilir bir fonksiyon ve her $p > 0$, $q > 0$ için;

$$\int_{\zeta}^{\eta} (\eta - x)^q x^p f(x) dx = \eta^{p+q+1} \int_0^1 (1-t)^q t^p f(\max\{\zeta, t\eta\}) dt$$

$$- \frac{f(\zeta)\eta^q \zeta^{p+1} {}_2F_1\left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta}\right)}{p+1}$$

eşitliğinin sağlandığı göz önüne alınırsa, f fonksiyonunun B-konveksliğinden,

$$\eta^{p+q+1} \int_0^1 (1-t)^q t^p f(\max\{\zeta, t\eta\}) dt - \frac{f(\zeta)\eta^q \zeta^{p+1}}{p+1} {}_2F_1\left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta}\right)$$

$$\leq \eta^{p+q+1} \int_0^1 (1-t)^q t^p \max\{f(\zeta), tf(\eta)\} dt$$

$$- \frac{f(\zeta)\eta^q\zeta^{p+1} {}_2F_1\left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta}\right)}{p+1}$$

elde edilir. Buradan,

$$\int_{\zeta}^{\eta} (\eta-x)^q x^p f(x) dx \leq \eta^{p+q+1} \int_0^1 (1-t)^q t^p \max\{f(\zeta), tf(\eta)\} dt$$

$$- \frac{f(\zeta)\eta^q\zeta^{p+1} {}_2F_1\left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta}\right)}{p+1}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada iki durum söz konusudur:

- i) $0 \leq \frac{f(\zeta)}{f(\eta)} < 1$
 - ii) $1 \leq \frac{f(\zeta)}{f(\eta)}$.
- i) $0 \leq \frac{f(\zeta)}{f(\eta)} < 1$ durumu incelenirse;

$$\int_{\zeta}^{\eta} (\eta-x)^q x^p f(x) dx$$

$$\leq \eta^{p+q+1} \left[\int_0^1 (1-t)^q t^p \max\{f(\zeta), tf(\eta)\} dt \right]$$

$$- \frac{f(\zeta)\eta^q\zeta^{p+1} {}_2F_1\left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta}\right)}{p+1}$$

$$= \eta^{p+q+1} \left[\int_0^{\frac{f(\zeta)}{f(\eta)}} (1-t)^q t^p f(\zeta) dt + \int_{\frac{f(\zeta)}{f(\eta)}}^1 (1-t)^q t^p tf(\eta) dt \right]$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{f(\zeta)\eta^q\zeta^{p+1} {}_2F_1\left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta}\right)}{p+1} \\
& = \eta^{p+q+1} \left[\int_0^{\frac{f(\zeta)}{f(\eta)}} (1-t)^q t^p f(\zeta) dt + \int_{\frac{f(\zeta)}{f(\eta)}}^1 (1-t)^q t^{p+1} f(\eta) dt \right] \\
& - \frac{f(\zeta)\eta^q\zeta^{p+1} {}_2F_1\left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta}\right)}{p+1} \\
& = \eta^{p+q+1} \left[\frac{f(\zeta)}{p+1} t^{p+1} {}_2F_1[p+1, -q; p+2; t] \Big|_0^{\frac{f(\zeta)}{f(\eta)}} \right. \\
& \quad \left. + \frac{f(\eta)}{p+2} t^{p+2} {}_2F_1(p+2, -q; p+3; t) \Big|_{\frac{f(\zeta)}{f(\eta)}}^1 \right] \\
& - \frac{f(\zeta)\eta^q\zeta^{p+1} {}_2F_1\left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta}\right)}{p+1} \\
& = \eta^{p+q+1} \left[\frac{f^{p+2}(\zeta) {}_2F_1\left(p+1, -q; p+2; \frac{f(\zeta)}{f(\eta)}\right)}{f^{p+1}(\eta)(p+1)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{f(\eta) {}_2F_1(p+2, -q; p+3; 1)}{p+2} \right. \\
& \quad \left. - \frac{f^{p+2}(\zeta) {}_2F_1\left(p+2, -q; p+3; \frac{f(\zeta)}{f(\eta)}\right)}{f^{p+1}(\eta)(p+1)} \right] \\
& - \frac{f(\zeta)\eta^q\zeta^{p+1} {}_2F_1\left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta}\right)}{p+1}
\end{aligned}$$

elde edilir.

ii) $1 \leq \frac{f(\zeta)}{f(\eta)}$ durumu için ise;

$$\begin{aligned}
& \int_{\zeta}^{\eta} (\eta - x)^q x^p f(x) dx \\
& \leq \eta^{p+q+1} \left[\int_0^1 (1-t)^q t^p \max\{f(\zeta), tf(\eta)\} dt \right] \\
& \quad - \frac{f(\zeta) \eta^q \zeta^{p+1} {}_2F_1\left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta}\right)}{p+1} \\
& = \eta^{p+q+1} \left[\int_0^1 (1-t)^q t^p f(\zeta) dt \right] - \frac{f(\zeta) \eta^q \zeta^{p+1} {}_2F_1\left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta}\right)}{p+1} \\
& = \eta^{p+q+1} f(\zeta) \left[\frac{{}_2F_1(p+1, -q; p+2; t)}{p+1} \Big|_0^1 \right] \\
& \quad - \frac{f(\zeta) \eta^q \zeta^{p+1} {}_2F_1\left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta}\right)}{p+1} \\
& = \frac{\eta^{p+q+1} f(\zeta) {}_2F_1(p+1, -q; p+2; 1)}{p+1} \\
& \quad - \frac{f(\zeta) \eta^q \zeta^{p+1} {}_2F_1\left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta}\right)}{p+1}
\end{aligned}$$

elde edilerek ispat tamamlanır. ■

Şimdi $\lambda > 1$ ve f^λ bir B-konveks fonksiyon olmak üzere, bu tür fonksiyonlar için geçerli Gauss-Jacobi eşitsizlikleri aşağıdaki teoremler ile ispat edilecektir.

Teorem 7.4 $f: [\zeta, \eta] \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu için $\lambda > 1$ olmak üzere, f^λ fonksiyonu $(\zeta, \eta]$ aralığında integrallenebilir ve B-konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $p > 0$, $q > 0$ için;

$$\int_{\zeta}^{\eta} (\eta - x)^q x^p f(x) dx$$

$$\begin{cases} \eta^{p+q+1} \left[\left(f^{\lambda}(\zeta) \beta_{\frac{f^{\lambda}(\zeta)}{f^{\lambda}(\eta)}}(p+1, q+1) \right. \right. \\ \left. \left. + f^{\lambda}(\eta) J_{\frac{f^{\lambda}(\zeta)}{f^{\lambda}(\eta)}}(p+2, q+1) \beta(p+2, q+1) \right)^{\frac{1}{\lambda}} \right. \\ \left. \left(\beta(p+1, q+1) \right)^{1-\frac{1}{\lambda}} - f(\zeta) \beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1) \right], & 0 \leq \frac{f^{\lambda}(\zeta)}{f^{\lambda}(\eta)} < 1 \\ \eta^{p+q+1} f(\zeta) \beta(p+1, q+1) \\ - \eta^{p+q+1} f(\zeta) \beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1), & 1 \leq \frac{f^{\lambda}(\zeta)}{f^{\lambda}(\eta)} \end{cases} \quad (7.12)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Lemma 7.1'den;

$$\int_{\zeta}^{\eta} (\eta - x)^q x^p f(x) dx$$

$$= \eta^{p+q+1} \left[\int_0^1 (1-t)^q t^p f(\max\{\zeta, t\eta\}) dt - f(\zeta) \beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1) \right]$$

eşitliği sağlanır. Kuvvet ortalama eşitsizliğinden;

$$\begin{aligned} & \eta^{p+q+1} \left[\int_0^1 (1-t)^q t^p f(\max\{\zeta, t\eta\}) dt - f(\zeta) \beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1) \right] \\ & \leq \eta^{p+q+1} \left[\left(\int_0^1 (1-t)^q t^p dt \right)^{1-\frac{1}{\lambda}} \left(\int_0^1 (1-t)^q t^p f^{\lambda}(\max\{\zeta, t\eta\}) dt \right)^{\frac{1}{\lambda}} \right] \end{aligned}$$

$$\left. -f(\zeta)\beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1) \right]$$

elde edilir. f^λ , B-konveks olduğundan;

$$\begin{aligned} & \eta^{p+q+1} \left[\left(\int_0^1 (1-t)^q t^p dt \right)^{1-\frac{1}{\lambda}} \left(\int_0^1 (1-t)^q t^p f^\lambda(\max\{\zeta, t\eta\}) dt \right)^{\frac{1}{\lambda}} \right. \\ & \quad \left. -f(\zeta)\beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1) \right] \\ & \leq \eta^{p+q+1} \left[(\beta(p+1, q+1))^{1-\frac{1}{\lambda}} \left(\int_0^1 (1-t)^q t^p \max\{f^\lambda(\zeta), t f^\lambda(\eta)\} dt \right)^{\frac{1}{\lambda}} \right. \\ & \quad \left. -f(\zeta)\beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1) \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada iki durum söz konusudur:

$$\text{i) } 0 \leq \frac{f^\lambda(\zeta)}{f^\lambda(\eta)} < 1$$

$$\text{ii) } 1 \leq \frac{f^\lambda(\zeta)}{f^\lambda(\eta)}.$$

$$\text{i) } 0 \leq \frac{f^\lambda(\zeta)}{f^\lambda(\eta)} < 1 \text{ durumu ele alınır ise;}$$

$$\int_{\zeta}^{\eta} (\eta-x)^q x^p f(x) dx$$

$$\leq \eta^{p+q+1} \left[(\beta(p+1, q+1))^{1-\frac{1}{\lambda}} \left(\int_0^1 (1-t)^q t^p \max\{f^\lambda(\zeta), t f^\lambda(\eta)\} dt \right)^{\frac{1}{\lambda}} \right. \\ \left. - f(\zeta) \beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1) \right]$$

$$= \eta^{p+q+1} \left[\left(\int_0^{\frac{f^\lambda(\zeta)}{f^\lambda(\eta)}} (1-t)^q t^p f^\lambda(\zeta) dt + \int_{\frac{f^\lambda(\zeta)}{f^\lambda(\eta)}}^1 (1-t)^q t^p t f^\lambda(\eta) dt \right)^{\frac{1}{\lambda}} \right. \\ \left. (\beta(p+1, q+1))^{1-\frac{1}{\lambda}} - f(\zeta) \beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1) \right]$$

$$= \eta^{p+q+1} \left[\left(f^\lambda(\zeta) \int_0^{\frac{f^\lambda(\zeta)}{f^\lambda(\eta)}} (1-t)^q t^p dt + f^\lambda(\eta) \int_{\frac{f^\lambda(\zeta)}{f^\lambda(\eta)}}^1 (1-t)^q t^{p+1} dt \right)^{\frac{1}{\lambda}} \right. \\ \left. (\beta(p+1, q+1))^{1-\frac{1}{\lambda}} - f(\zeta) \beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1) \right]$$

$$= \eta^{p+q+1} \left[\left(f^\lambda(\zeta) \beta_{\frac{f^\lambda(\zeta)}{f^\lambda(\eta)}}(p+1, q+1) \right. \right. \\ \left. \left. + f^\lambda(\eta) J_{\frac{f^\lambda(\zeta)}{f^\lambda(\eta)}}(p+2, q+1) \beta(p+2, q+1) \right)^{\frac{1}{\lambda}} \right]$$

$$\left(\beta(p+1, q+1) \right)^{1-\frac{1}{\lambda}} - f(\zeta) \beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1) \Bigg]$$

olur. Buradan,

$$\int_{\zeta}^{\eta} (\eta - x)^q x^p f(x) dx$$

$$\leq \eta^{p+q+1} \left[\left(f^{\lambda}(\zeta) \beta_{\frac{f^{\lambda}(\zeta)}{f^{\lambda}(\eta)}}(p+1, q+1) \right. \right.$$

$$\left. + f^{\lambda}(\eta) J_{\frac{f^{\lambda}(\zeta)}{f^{\lambda}(\eta)}}(p+2, q+1) \beta(p+2, q+1) \right)^{\frac{1}{\lambda}}$$

$$\left(\beta(p+1, q+1) \right)^{1-\frac{1}{\lambda}} - f(\zeta) \beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1) \Bigg]$$

eşitsizliği elde edilerek $0 \leq \frac{f^{\lambda}(\zeta)}{f^{\lambda}(\eta)} < 1$ durumu ispatlanmış olur.

ii) $1 \leq \frac{f^{\lambda}(\zeta)}{f^{\lambda}(\eta)}$ durumu ele alınır ise;

$$\int_{\zeta}^{\eta} (\eta - x)^q x^p f(x) dx$$

$$\leq \eta^{p+q+1} \left[\left(\beta(p+1, q+1) \right)^{1-\frac{1}{\lambda}} \left(\int_0^1 (1-t)^q t^p \max\{f^{\lambda}(\zeta), t f^{\lambda}(\eta)\} dt \right)^{\frac{1}{\lambda}} \right.$$

$$\left. - f(\zeta) \beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1) \right]$$

$$= \eta^{p+q+1} \left[(\beta(p+1, q+1))^{1-\frac{1}{\lambda}} \left(\int_0^1 (1-t)^q t^p f^\lambda(\zeta) dt \right)^{\frac{1}{\lambda}} \right. \\ \left. - f(\zeta) \beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1) \right]$$

$$= \eta^{p+q+1} \left[(\beta(p+1, q+1))^{1-\frac{1}{\lambda}} (f^\lambda(\zeta) \beta(p+1, q+1))^{\frac{1}{\lambda}} \right. \\ \left. - f(\zeta) \beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1) \right]$$

$$= \eta^{p+q+1} \left[\beta(p+1, q+1) f(\zeta) - f(\zeta) \beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1) \right]$$

elde edilir. Böylece,

$$\int_{\zeta}^{\eta} (\eta-x)^q x^p f(x) dx$$

$$\leq \eta^{p+q+1} \left[\beta(p+1, q+1) f(\zeta) - f(\zeta) \beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1) \right]$$

eşitsizliği elde edilerek, $1 \leq \frac{f^\lambda(\zeta)}{f^\lambda(\eta)}$ şartı için de eşitsizlik elde edilir ve ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 7.5 $f: [\zeta, \eta] \rightarrow \mathbb{R}_+$, fonksiyonu için $\lambda > 1$ olmak üzere, f^λ fonksiyonu $(\zeta, \eta]$ aralığında integrallenebilir ve B-konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $p > 0$, $q > 0$ için;

$$\int_{\zeta}^{\eta} (\eta-x)^q x^p f(x) dx$$

$$\leq \begin{cases} \eta^{p+q+1} \left(\frac{{}_2F_1(p+1, -q; p+2; 1)}{p+1} \right)^{1-\frac{1}{\lambda}} \\ \left[\frac{(f^\lambda(\zeta))^{p+2} {}_2F_1\left(p+1, -q; p+2; \frac{f^\lambda(\zeta)}{f^\lambda(\eta)}\right)}{(f^\lambda(\eta))^{p+1} (p+1)} \right. \\ \left. + f^\lambda(\eta) \frac{{}_2F_1(p+2, -q; p+3; 1)}{p+2} \right. \\ \left. - \frac{(f^\lambda(\zeta))^{p+2} {}_2F_1\left(p+2, -q; p+3; \frac{f^\lambda(\zeta)}{f^\lambda(\eta)}\right)}{(f^\lambda(\eta))^{p+1} (p+2)} \right]^{\frac{1}{\lambda}}, \quad 0 \leq \frac{f^\lambda(\zeta)}{f^\lambda(\eta)} < 1 \\ \eta^{p+q+1} f(\zeta) \frac{{}_2F_1(p+1, -q; p+2; 1)}{p+1} \\ - \frac{f(\zeta) \eta^q \zeta^{p+1} {}_2F_1\left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta}\right)}{p+1}, \quad 1 \leq \frac{f^\lambda(\zeta)}{f^\lambda(\eta)} \end{cases} \quad (7.13)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. Lemma 7.2'den; $f: [\zeta, \eta] \rightarrow \mathbb{R}_+$, $(\zeta, \eta]$ aralığında integrallenebilir bir fonksiyon ve her $p > 0$, $q > 0$ için;

$$\int_{\zeta}^{\eta} (\eta - x)^q x^p f(x) dx = \eta^{p+q+1} \int_0^1 (1-t)^q t^p f(\max\{\zeta, t\eta\}) dt$$

$$- \frac{f(\zeta) \eta^q \zeta^{p+1} {}_2F_1\left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta}\right)}{p+1}$$

eşitliği sağlanır. Kuvvet ortalama eşitsizliğinden;

$$\eta^{p+q+1} \int_0^1 (1-t)^q t^p f(\max\{\zeta, t\eta\}) dt - \frac{f(\zeta) \eta^q \zeta^{p+1} {}_2F_1\left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta}\right)}{p+1}$$

$$\leq \eta^{p+q+1} \left(\int_0^1 (1-t)^q t^p dt \right)^{1-\frac{1}{\lambda}} \left(\int_0^1 (1-t)^q t^p f^\lambda(\max\{\zeta, t\eta\}) dt \right)^{\frac{1}{\lambda}}$$

$$-\frac{f(\zeta)\eta^q\zeta^{p+1}{}_2F_1\left(p+1,-q;p+2;\frac{\zeta}{\eta}\right)}{p+1}$$

elde edilir. f^λ fonksiyonu B-konveks olduğundan;

$$\eta^{p+q+1}\left(\int_0^1(1-t)^qt^pdt\right)^{1-\frac{1}{\lambda}}\left(\int_0^1(1-t)^qt^p f^\lambda(\max\{\zeta,t\eta\})dt\right)^{\frac{1}{\lambda}}$$

$$-\frac{f(\zeta)\eta^q\zeta^{p+1}{}_2F_1\left(p+1,-q;p+2;\frac{\zeta}{\eta}\right)}{p+1}$$

$$\leq \eta^{p+q+1}\left(\frac{t^{p+1}{}_2F_1(p+1,-q;p+2;t)}{p+1}\Big|_0^1\right)^{1-\frac{1}{\lambda}}$$

$$\left(\int_0^1(1-t)^qt^p \max\{f^\lambda(\zeta),tf^\lambda(\eta)\}dt\right)^{\frac{1}{\lambda}}$$

$$-\frac{f(\zeta)\eta^q\zeta^{p+1}{}_2F_1\left(p+1,-q;p+2;\frac{\zeta}{\eta}\right)}{p+1}$$

$$= \eta^{p+q+1}\left(\frac{{}_2F_1(p+1,-q;p+2;1)}{p+1}\right)^{1-\frac{1}{\lambda}}$$

$$\left(\int_0^1(1-t)^qt^p \max\{f^\lambda(\zeta),tf^\lambda(\eta)\}dt\right)^{\frac{1}{\lambda}}$$

$$-\frac{f(\zeta)\eta^q\zeta^{p+1}{}_2F_1\left(p+1,-q;p+2;\frac{\zeta}{\eta}\right)}{p+1}$$

elde edilir. Burada iki durum söz konusudur:

$$\text{i) } 0 \leq \frac{f^\lambda(\zeta)}{f^\lambda(\eta)} < 1$$

$$\text{ii)} \quad 1 \leq \frac{f^\lambda(\zeta)}{f^\lambda(\eta)}.$$

$$\text{i)} \quad 0 \leq \frac{f^\lambda(\zeta)}{f^\lambda(\eta)} < 1 \text{ durumu ele alınırsa;}$$

$$\eta^{p+q+1} \left(\frac{{}_2F_1(p+1, -q; p+2; 1)}{p+1} \right)^{1-\frac{1}{\lambda}} \left(\int_0^1 (1-t)^q t^p \max\{f^\lambda(\zeta), t f^\lambda(\eta)\} dt \right)^{\frac{1}{\lambda}}$$

$$- \frac{f(\zeta) \eta^q \zeta^{p+1} {}_2F_1\left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta}\right)}{p+1}$$

$$= \eta^{p+q+1} \left(\frac{{}_2F_1(p+1, -q; p+2; 1)}{p+1} \right)^{1-\frac{1}{\lambda}}$$

$$\left(\int_0^{\frac{f^\lambda(\zeta)}{f^\lambda(\eta)}} (1-t)^q t^p f^\lambda(\zeta) dt + \int_{\frac{f^\lambda(\zeta)}{f^\lambda(\eta)}}^1 (1-t)^q t^p t f^\lambda(\eta) dt \right)^{\frac{1}{\lambda}}$$

$$- \frac{f(\zeta) \eta^q \zeta^{p+1} {}_2F_1\left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta}\right)}{p+1}$$

$$= \eta^{p+q+1} \left(\frac{{}_2F_1(p+1, -q; p+2; 1)}{p+1} \right)^{1-\frac{1}{\lambda}}$$

$$\left(f^\lambda(\zeta) \int_0^{\frac{f^\lambda(\zeta)}{f^\lambda(\eta)}} (1-t)^q t^p dt + f^\lambda(\eta) \int_{\frac{f^\lambda(\zeta)}{f^\lambda(\eta)}}^1 (1-t)^q t^{p+1} dt \right)^{\frac{1}{\lambda}}$$

$$- \frac{f(\zeta) \eta^q \zeta^{p+1} {}_2F_1\left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta}\right)}{p+1}$$

$$\begin{aligned}
&= \eta^{p+q+1} \left(\frac{{}_2F_1(p+1, -q; p+2; 1)}{p+1} \right)^{1-\frac{1}{\lambda}} \\
&\quad \left(f^\lambda(\zeta) \frac{t^{p+1} {}_2F_1(p+1, -q; p+2; t)}{p+1} \right) \Big|_{\frac{f^\lambda(\eta)}{f^\lambda(\zeta)}}^{\frac{f^\lambda(\zeta)}{f^\lambda(\eta)}} \\
&\quad + f^\lambda(\eta) \frac{t^{p+2} {}_2F_1(p+2, -q; p+3; t)}{p+2} \Big|_{\frac{f^\lambda(\eta)}{f^\lambda(\zeta)}}^1 \Big)^{\frac{1}{\lambda}} \\
&\quad - \frac{f(\zeta) \eta^q \zeta^{p+1} {}_2F_1(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta})}{p+1} \\
&= \eta^{p+q+1} \left(\frac{{}_2F_1(p+1, -q; p+2; 1)}{p+1} \right)^{1-\frac{1}{\lambda}} \\
&\quad \left[\frac{(f^\lambda(\zeta))^{p+2} {}_2F_1(p+1, -q; p+2; \frac{f^\lambda(\zeta)}{f^\lambda(\eta)})}{(f^\lambda(\eta))^{p+1} \frac{p+1}{p+1}} \right. \\
&\quad + f^\lambda(\eta) \frac{{}_2F_1(p+2, -q; p+3; 1)}{p+2} \\
&\quad \left. - \frac{(f^\lambda(\zeta))^{p+2} {}_2F_1(p+2, -q; p+3; \frac{f^\lambda(\zeta)}{f^\lambda(\eta)})}{(f^\lambda(\eta))^{p+1} \frac{p+2}{p+2}} \right]^{\frac{1}{\lambda}} \\
&\quad - \frac{f(\zeta) \eta^q \zeta^{p+1} {}_2F_1(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta})}{p+1}
\end{aligned}$$

elde edilerek $0 \leq \frac{f^\lambda(\zeta)}{f^\lambda(\eta)} < 1$ durumu için eşitsizlik elde edilir.

ii) $1 \leq \frac{f^\lambda(\zeta)}{f^\lambda(\eta)}$ durumu için ise;

$$\begin{aligned}
& \eta^{p+q+1} \left(\frac{{}_2F_1(p+1, -q; p+2; 1)}{p+1} \right)^{1-\frac{1}{\lambda}} \left(\int_0^1 (1-t)^q t^p \max\{f^\lambda(\zeta), t f^\lambda(\eta)\} dt \right)^{\frac{1}{\lambda}} \\
& - \frac{f(\zeta) \eta^q \zeta^{p+1} {}_2F_1\left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta}\right)}{p+1} \\
& = \eta^{p+q+1} \left(\int_0^1 (1-t)^q t^p dt \right)^{1-\frac{1}{\lambda}} \left(\int_0^1 (1-t)^q t^p f^\lambda(\eta) dt \right)^{\frac{1}{\lambda}} \\
& - \frac{f(\zeta) \eta^q \zeta^{p+1} {}_2F_1\left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta}\right)}{p+1} \\
& = \eta^{p+q+1} f(\zeta) \int_0^1 (1-t)^q t^p dt - \frac{f(\zeta) \eta^q \zeta^{p+1} {}_2F_1\left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta}\right)}{p+1} \\
& = \eta^{p+q+1} f(\zeta) \frac{t^{p+1} {}_2F_1(p+1, -q; p+2; t)}{p+1} \Big|_0^1 \\
& - \frac{f(\zeta) \eta^q \zeta^{p+1} {}_2F_1\left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta}\right)}{p+1} \\
& = \eta^{p+q+1} f(\zeta) \frac{{}_2F_1(p+1, -q; p+2; 1)}{p+1} \\
& - \frac{f(\zeta) \eta^q \zeta^{p+1} {}_2F_1\left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta}\right)}{p+1}
\end{aligned}$$

elde edilerek ispat tamamlanır. ■

Teorem 7.6 $f: [\zeta, \eta] \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu için $\lambda > 1$ olmak üzere, f^λ fonksiyonu $(\zeta, \eta]$ aralığında integrallenebilir ve B-konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $p > 0$, $q > 0$ için;

$$\begin{aligned}
& \int_{\zeta}^{\eta} (\eta - x)^q x^p f(x) dx \\
& \leq \begin{cases} \eta^{p+q+1} \left[\left(\beta \left(\frac{p\lambda}{\lambda-1} + 1, \frac{q\lambda}{\lambda-1} + 1 \right) \right)^{1-\frac{1}{\lambda}} \right. \\ \left. \left(\frac{f^{2\lambda}(\zeta)}{2f^{\lambda}(\eta)} + \frac{f^{\lambda}(\eta)}{2} \right)^{\frac{1}{\lambda}} - f(\zeta) \beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1) \right], & 0 \leq \frac{f^{\lambda}(\zeta)}{f^{\lambda}(\eta)} < 1 \\ \eta^{p+q+1} f(\zeta) \left[\beta^{1-\frac{1}{\lambda}} \left(\frac{p\lambda}{\lambda-1} + 1, \frac{q\lambda}{\lambda-1} + 1 \right) \right. \\ \left. - \beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1) \right], & 1 \leq \frac{f^{\lambda}(\zeta)}{f^{\lambda}(\eta)} \end{cases} \quad (7.14)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. İspat için Lemma 7.1 ele alındığında,

$$\begin{aligned}
& \int_{\zeta}^{\eta} (\eta - x)^q x^p f(x) dx \\
& = \eta^{p+q+1} \left[\int_0^1 (1-t)^q t^p f(\max\{\zeta, t\eta\}) dt - f(\zeta) \beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1) \right]
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir. Hölder eşitsizliği kullanılır ise;

$$\begin{aligned}
& \eta^{p+q+1} \left[\int_0^1 (1-t)^q t^p f(\max\{\zeta, t\eta\}) dt - f(\zeta) \beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1) \right] \\
& \leq \eta^{p+q+1} \left[\int_0^1 [(1-t)^q t^p]^{\frac{\lambda}{\lambda-1}} dt \right]^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} \left[\int_0^1 f^{\lambda}(\max\{\zeta, t\eta\}) dt \right]^{\frac{1}{\lambda}} \\
& \quad - \eta^{p+q+1} f(\zeta) \beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1)
\end{aligned}$$

elde edilir. f^λ B-konveks bir fonksiyon olduğundan,

$$\eta^{p+q+1} \left[\int_0^1 [(1-t)^q t^p]^{\frac{\lambda}{\lambda-1}} dt \right]^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} \left[\int_0^1 f^\lambda(\max\{\zeta, t\eta\}) dt \right]^{\frac{1}{\lambda}}$$

$$- \eta^{p+q+1} f(\zeta) \beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1)$$

$$\leq \eta^{p+q+1} \left[\beta \left(\frac{p\lambda}{\lambda-1} + 1, \frac{q\lambda}{\lambda-1} + 1 \right) \right]^{1-\frac{1}{\lambda}} \left[\int_0^1 \max\{f^\lambda(\zeta), t f^\lambda(\eta)\} dt \right]^{\frac{1}{\lambda}}$$

$$- \eta^{p+q+1} f(\zeta) \beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1)$$

olur. Burada iki durum vardır:

- i) $0 \leq \frac{f^\lambda(\zeta)}{f^\lambda(\eta)} < 1$ olabilir ya da,
 - ii) $1 \leq \frac{f^\lambda(\zeta)}{f^\lambda(\eta)}$ durumu söz konusu olabilir.
- i) $0 \leq \frac{f^\lambda(\zeta)}{f^\lambda(\eta)} < 1$ durumu ele alınır ise,

$$\eta^{p+q+1} \left[\beta \left(\frac{p\lambda}{\lambda-1} + 1, \frac{q\lambda}{\lambda-1} + 1 \right) \right]^{1-\frac{1}{\lambda}} \left[\int_0^1 \max\{f^\lambda(\zeta), t f^\lambda(\eta)\} dt \right]^{\frac{1}{\lambda}}$$

$$- \eta^{p+q+1} f(\zeta) \beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1)$$

$$= \eta^{p+q+1} \left[\beta \left(\frac{p\lambda}{\lambda-1} + 1, \frac{q\lambda}{\lambda-1} + 1 \right) \right]^{1-\frac{1}{\lambda}} \left[\int_0^{\frac{f^\lambda(\zeta)}{f^\lambda(\eta)}} f^\lambda(\zeta) dt + \int_{\frac{f^\lambda(\zeta)}{f^\lambda(\eta)}}^1 t f^\lambda(\eta) dt \right]^{\frac{1}{\lambda}}$$

$$- \eta^{p+q+1} f(\zeta) \beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1)$$

$$= \eta^{p+q+1} \left[\beta \left(\frac{p\lambda}{\lambda-1} + 1, \frac{q\lambda}{\lambda-1} + 1 \right) \right]^{1-\frac{1}{\lambda}} \left[\frac{f^{2\lambda}(\zeta)}{2f^\lambda(\eta)} + \frac{f^\lambda(\eta)}{2} \right]^{\frac{1}{\lambda}}$$

$$-\eta^{p+q+1} f(\zeta) \beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1)$$

elde edililerek i. durum gösterilmiş olur.

ii) $1 \leq \frac{f^\lambda(\zeta)}{f^\lambda(\eta)}$ durumu için ise,

$$\eta^{p+q+1} \left[\beta \left(\frac{p\lambda}{\lambda-1} + 1, \frac{q\lambda}{\lambda-1} + 1 \right) \right]^{1-\frac{1}{\lambda}} \left[\int_0^1 \max\{f^\lambda(\zeta), t f^\lambda(\eta)\} dt \right]^{\frac{1}{\lambda}}$$

$$-\eta^{p+q+1} f(\zeta) \beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1)$$

$$= \eta^{p+q+1} \left[\beta \left(\frac{p\lambda}{\lambda-1} + 1, \frac{q\lambda}{\lambda-1} + 1 \right) \right]^{1-\frac{1}{\lambda}} \left[\int_0^1 f^\lambda(\zeta) dt \right]^{\frac{1}{\lambda}}$$

$$-\eta^{p+q+1} f(\zeta) \beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1)$$

$$= \eta^{p+q+1} \left[\beta \left(\frac{p\lambda}{\lambda-1} + 1, \frac{q\lambda}{\lambda-1} + 1 \right) \right]^{1-\frac{1}{\lambda}} [f^\lambda(\zeta)]^{\frac{1}{\lambda}}$$

$$-\eta^{p+q+1} f(\zeta) \beta_{\frac{\zeta}{\eta}}(p+1, q+1)$$

elde edilerek her iki durum için de eşitsizlikler gösterilmiş olur. ■

Teorem 7.7 $f: [\zeta, \eta] \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu için $\lambda > 1$ olmak üzere, f^λ fonksiyonu $(\zeta, \eta]$ aralığında integrallenebilir ve B-konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $p > 0$, $q > 0$ için;

$$\int_{\zeta}^{\eta} (\eta - x)^q x^p f(x) dx$$

$$\leq \begin{cases} \eta^{p+q+1} \left[\beta \left(\frac{p\lambda}{\lambda-1} + 1, \frac{q\lambda}{\lambda-1} + 1 \right) \right]^{1-\frac{1}{\lambda}} \\ \left[\frac{f^{2\lambda}(\zeta)}{2f^\lambda(\eta)} + \frac{f^\lambda(\eta)}{2} \right]^{\frac{1}{\lambda}} \\ - \frac{f(\zeta)\eta^q \zeta^{p+1} {}_2F_1 \left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta} \right)}{p+1}, & 0 \leq \frac{f^\lambda(\zeta)}{f^\lambda(\eta)} < 1 \\ \\ \eta^{p+q+1} f(\zeta) \left[\beta \left(\frac{p\lambda}{\lambda-1} + 1, \frac{q\lambda}{\lambda-1} + 1 \right) \right]^{1-\frac{1}{\lambda}} \\ - \frac{f(\zeta)\eta^q \zeta^{p+1} {}_2F_1 \left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta} \right)}{p+1}, & 1 \leq \frac{f^\lambda(\zeta)}{f^\lambda(\eta)} \end{cases} \quad (7.15)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Lemma 7.2'den; $f: [\zeta, \eta] \rightarrow \mathbb{R}_+$, $(\zeta, \eta]$ aralığında integrallenebilir bir fonksiyon ve her $p > 0$, $q > 0$ için;

$$\int_{\zeta}^{\eta} (\eta - x)^q x^p f(x) dx = \eta^{p+q+1} \int_0^1 (1-t)^q t^p f(\max\{\zeta, t\eta\}) dt$$

$$- \frac{f(\zeta)\eta^q \zeta^{p+1} {}_2F_1 \left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta} \right)}{p+1}$$

sağlanır. Hölder eşitsizliğinden;

$$\eta^{p+q+1} \int_0^1 (1-t)^q t^p f(\max\{\zeta, t\eta\}) dt - \frac{f(\zeta)\eta^q \zeta^{p+1} {}_2F_1 \left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta} \right)}{p+1}$$

$$\leq \eta^{p+q+1} \left[\int_0^1 [(1-t)^q t^p]^{\frac{\lambda}{\lambda-1}} dt \right]^{1-\frac{1}{\lambda}} \left[\int_0^1 f^\lambda(\max\{\zeta, t\eta\}) dt \right]^{\frac{1}{\lambda}}$$

$$- \frac{f(\zeta)\eta^q \zeta^{p+1} {}_2F_1 \left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta} \right)}{p+1}$$

$$\leq \eta^{p+q+1} \left[\beta \left(\frac{p\lambda}{\lambda-1} + 1, \frac{q\lambda}{\lambda-1} + 1 \right) \right]^{1-\frac{1}{\lambda}} \left[\int_0^1 f^\lambda(\max\{\zeta, t\eta\}) dt \right]^{\frac{1}{\lambda}}$$

$$- \frac{f(\zeta)\eta^q \zeta^{p+1} {}_2F_1\left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta}\right)}{p+1}$$

olur. f^λ , B-konveks olduğundan,

$$\eta^{p+q+1} \left[\beta \left(\frac{p\lambda}{\lambda-1} + 1, \frac{q\lambda}{\lambda-1} + 1 \right) \right]^{1-\frac{1}{\lambda}} \left[\int_0^1 f^\lambda(\max\{\zeta, t\eta\}) dt \right]^{\frac{1}{\lambda}}$$

$$- \frac{f(\zeta)\eta^q \zeta^{p+1} {}_2F_1\left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta}\right)}{p+1}$$

$$\leq \eta^{p+q+1} \left[\beta \left(\frac{p\lambda}{\lambda-1} + 1, \frac{q\lambda}{\lambda-1} + 1 \right) \right]^{1-\frac{1}{\lambda}} \left[\int_0^1 \max\{f^\lambda(\zeta), t f^\lambda(\eta)\} dt \right]^{\frac{1}{\lambda}}$$

$$- \frac{f(\zeta)\eta^q \zeta^{p+1} {}_2F_1\left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta}\right)}{p+1}$$

elde edilir. Bu denklemde aşağıdaki iki koşul gerçekleştirilebilir:

- i) $0 \leq \frac{f^\lambda(\zeta)}{f^\lambda(\eta)} < 1$ durumu,
 - ii) $1 \leq \frac{f^\lambda(\zeta)}{f^\lambda(\eta)}$ durumu.
- i) $0 \leq \frac{f^\lambda(\zeta)}{f^\lambda(\eta)} < 1$ ise,

$$\eta^{p+q+1} \left[\beta \left(\frac{p\lambda}{\lambda-1} + 1, \frac{q\lambda}{\lambda-1} + 1 \right) \right]^{1-\frac{1}{\lambda}} \left[\int_0^1 \max\{f^\lambda(\zeta), t f^\lambda(\eta)\} dt \right]^{\frac{1}{\lambda}}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{f(\zeta)\eta^q\zeta^{p+1} {}_2F_1\left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta}\right)}{p+1} \\
& = \eta^{p+q+1} \left[\beta \left(\frac{p\lambda}{\lambda-1} + 1, \frac{q\lambda}{\lambda-1} + 1 \right) \right]^{1-\frac{1}{\lambda}} \left[\int_0^{\frac{f^\lambda(\zeta)}{f^\lambda(\eta)}} f^\lambda(\zeta) dt + \int_{\frac{f^\lambda(\zeta)}{f^\lambda(\eta)}}^1 t f^\lambda(\eta) dt \right]^{\frac{1}{\lambda}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{f(\zeta)\eta^q\zeta^{p+1} {}_2F_1\left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta}\right)}{p+1} \\
& = \eta^{p+q+1} \left[\beta \left(\frac{p\lambda}{\lambda-1} + 1, \frac{q\lambda}{\lambda-1} + 1 \right) \right]^{1-\frac{1}{\lambda}} \left[\int_0^{\frac{f^\lambda(\zeta)}{f^\lambda(\eta)}} f^\lambda(\zeta) dt + \int_{\frac{f^\lambda(\zeta)}{f^\lambda(\eta)}}^1 t f^\lambda(\eta) dt \right]^{\frac{1}{\lambda}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{f(\zeta)\eta^q\zeta^{p+1} {}_2F_1\left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta}\right)}{p+1} \\
& = \eta^{p+q+1} \left[\beta \left(\frac{p\lambda}{\lambda-1} + 1, \frac{q\lambda}{\lambda-1} + 1 \right) \right]^{1-\frac{1}{\lambda}} \left[\frac{f^{2\lambda}(\zeta)}{2f^\lambda(\eta)} + \frac{f^\lambda(\eta)}{2} \right]^{\frac{1}{\lambda}}
\end{aligned}$$

$$- \frac{f(\zeta)\eta^q\zeta^{p+1} {}_2F_1\left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta}\right)}{p+1}$$

elde edilir. O halde,

$$\int_{\zeta}^{\eta} (\eta - x)^q x^p f(x) dx \leq \eta^{p+q+1} \left[\beta \left(\frac{p\lambda}{\lambda-1} + 1, \frac{q\lambda}{\lambda-1} + 1 \right) \right]^{1-\frac{1}{\lambda}} \left[\frac{f^{2\lambda}(\zeta)}{2f^\lambda(\eta)} + \frac{f^\lambda(\eta)}{2} \right]^{\frac{1}{\lambda}}$$

$$- \frac{f(\zeta)\eta^q\zeta^{p+1} {}_2F_1\left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta}\right)}{p+1}$$

elde edilir.

ii) $1 \leq \frac{f^\lambda(\zeta)}{f^\lambda(\eta)}$ ise,

$$\int_{\zeta}^{\eta} (\eta - x)^q x^p f(x) dx \leq \eta^{p+q+1} \left[\beta \left(\frac{p\lambda}{\lambda-1} + 1, \frac{q\lambda}{\lambda-1} + 1 \right) \right]^{1-\frac{1}{\lambda}}$$

$$\left[\int_0^1 \max\{f^\lambda(\zeta), t f^\lambda(\eta)\} dt \right]^{\frac{1}{\lambda}} - \frac{f(\zeta) \eta^q \zeta^{p+1} {}_2F_1 \left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta} \right)}{p+1}$$

$$= \eta^{p+q+1} \left[\beta \left(\frac{p\lambda}{\lambda-1} + 1, \frac{q\lambda}{\lambda-1} + 1 \right) \right]^{1-\frac{1}{\lambda}} \left[\int_0^1 f^\lambda(\zeta) dt \right]^{\frac{1}{\lambda}}$$

$$- \frac{f(\zeta) \eta^q \zeta^{p+1} {}_2F_1 \left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta} \right)}{p+1}$$

$$= \eta^{p+q+1} f(\zeta) \left[\beta \left(\frac{p\lambda}{\lambda-1} + 1, \frac{q\lambda}{\lambda-1} + 1 \right) \right]^{1-\frac{1}{\lambda}}$$

$$- \frac{f(\zeta) \eta^q \zeta^{p+1} {}_2F_1 \left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta} \right)}{p+1}$$

olur. Böylece,

$$\int_{\zeta}^{\eta} (\eta - x)^q x^p f(x) dx \leq \eta^{p+q+1} f^\lambda(\zeta) \left[\beta \left(\frac{p\lambda}{\lambda-1} + 1, \frac{q\lambda}{\lambda-1} + 1 \right) \right]^{1-\frac{1}{\lambda}}$$

$$- \frac{f(\zeta) \eta^q \zeta^{p+1} {}_2F_1 \left(p+1, -q; p+2; \frac{\zeta}{\eta} \right)}{p+1}$$

elde edilir. Bu durumda ispat tamamlanır. ■

8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez, ekonomi üzerine uygulamaları olan bir soyut konvekslik biçimi; B-konvekslik ile ilgili yine bu konuda önemli yeri olan nümerik yöntemlerden biri Gauss-Jacobi nümerik metodu ile ilgi kuran bir çalışma olarak düzenlemiştir.

Tezde, B-konvekslik üzerine Gauss-Jacobi için eşitsizlik çeşitleri elde edilmiştir. Zira, konvekslik ve soyut konvekslik üzerine uygulamalar en çok eşitsizlikler teorisinde karşılaşılmaktadır.

Tezde ilk olarak, çalışma ile ilgili bir giriş bölümü verilmiştir. İkinci bölümde ise, sonuçlarda da kullanılacak olan özel beta, tamamlanmamış beta gibi özel fonksiyon çeşitleri ifade edilmiştir. Konveks küme ve fonksiyonlar üçüncü başlık altında incelenmiştir. Soyutlama yöntemleri ve bazı genelleştirilmiş konveks fonksiyon çeşitleri dördüncü bölümde gösterilmiştir. B-konvekslik ile ilgili bilgiler B-konveks kümeler ve B-konveks fonksiyonlar olarak iki alt başlık şeklinde beşinci bölümde ifade edilmiştir. Konveksliğin uygulandığı bazı önemli eşitsizlikler de altıncı bölümde verilmiştir.

Tezin sonuçları olan, B-konveks fonksiyonlarda Gauss-Jacobi eşitsizliği yedinci bölümde sunulmuştur. Bu bölümde, ilk olarak eşitsizliğe uygun bir çekirdeğe sahip integralin açılımı ile ilgili bir lemma (Lemma 7.1) ifade edilmiştir. Bu lemmanın farklı özel fonksiyonlar ile ifadesi de Lemma 7.2 ile ispat edilmiştir. Fonksiyonun B-konveksliğinden yararlanılarak ispat edilen Gauss-Jacobi türü eşitsizlik Teorem 7.1 ile verilmiştir. Daha sonra, Lemma 7.1 yardımı ile elde edilen eşitsizlik Teorem 7.2 ve bu eşitsizliğin farklı versiyonu ise Teorem 7.3 ile ifade edilmiştir. f^λ fonksiyonunun B-konveks olması durumunda, lemma ve kuvvet ortalaması eşitsizliği yardımı ile ispat edilen eşitsizlik ve farklı özel fonksiyonlarla ifadesi sırasıyla Teorem 7.4 ve Teorem 7.5 ile verilmiştir. Hölder eşitsizliğinden yararlanılarak gösterilen B-konveks fonksiyonlar için geçerli Gauss-Jacobi eşitsizliği ise, daha sonraki kısımda inşa edilmiştir (Teorem 7.6, Teorem 7.7).

İleriki çalışmalar için de bazı açık problemler aşağıdaki gibi sıralanabilir:

-Tezde elde edilen bu eşitsizlikler üzerine farklı örnekler inşa edilerek hem doğruluğu kanıtlanır hem de özel fonksiyonlar için farklı ve kullanışlı yeni eşitsizlikler gösterilebilir.

-Bu tezde elde edilen sonuçların farklı soyut konvekslik sınıfları için çalışılması da ileride geniş kapsamlı bir çalışma olarak düşünülebilir.

-İspatlarda kullanılan eşitsizlikler farklılaştırılarak ve fonksiyonlar üzerine başka koşullar konularak, yeni eşitsizliklerin ispatı üzerine çalışmalar yapılabilir.



KAYNAKLAR

1. Boyd, S. ve Vandenberghe, L., 2004. Convex optimization, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
2. Beckenbach, E. F. ve Bellman, R., 1961. Inequalities, Springer, Berlin.
3. Niculescu, C. P. ve Persson, L.- E., 2006. Convex functions and their applications, Springer, New York.
4. Peajcariac, J. E. ve Tong, Y. L., 1992. Convex functions, Partial Orderings and Statistical Applications, Academic Press, San Diego.
5. Rubinov, A., 2000. Abstract Convexity and global optimization, Kluwer Academic Publishers, Boston Dordrecht, London.
6. Singer, I., 1997. Abstract Convex Analysis, Wiley-Interscience Publication, New York.
7. Ozdemir, M. E., Set, E. ve Alomari, M., 2011. Integral inequalities via several kinds of convexity, Creative Mathematics and Infirematics, 20, 1, 62 – 73.
8. Briec, W., Horvath, C. D., 2004. **B-convexity. Optimization**, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 53, 103-127.
9. Adilov, G. ve Yesilce, I., 2012. B^{-1} -convex sets and B^{-1} -measurable maps, Numerical Functional Analysis and Optimization, 33, 2, 131-141.
10. Adilov, G. ve Yesilce, I., 2017. B^{-1} -convex functions, Journal of Convex Analysis, 24, 2, 505-517.
11. Toader, G. H., 1984. Some generalisations of the convexity, Proceedings of the Colloquium on Approximation and Optimization, Cluj-Napoca, Romania, 329, 338.
12. Toader, G. H., 1988. On a generalisation of the convexity, Mathematica, 30, 53, 83-87.
13. Dragomir, S. S. ve Toader, G. H., 1993. Some Inequalities for m -convex Functions. Studia Universitatis Babes-Bolyai Mathematica, 38, 1, 21-28.
14. Briec, W. ve Horvath, C., 2008. Nash points, Ky Fan inequality and equilibria of abstract economies in Max-Plus and B-convexity, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 341, 1, 188-199.
15. Briec, W. ve Horvath, C., 2009. A B-convex production model for evaluating performance of firms, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 355, 1, 131-144.

16. Briec, W., 2013. On Some Idempotent and Non-Associative Convex Structure, arXiv preprint arXiv, 1311.0690.
17. Briec, W. ve Yesilce, I., 2022. Ky-Fan inequality, Nash equilibria in some idempotent and harmonic convex structure, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 508, 1, 125862.
18. Briec, W. ve Liang, Q. B., 2011. On some semilattice structures for production Technologies, *European Journal of Operational Research*, 215, 3, 740-749.
19. Kemali, S., Yesilce, I. ve Adilov, G., 2015. B-Convexity, B^{-1} -Convexity, and Their Comparison, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 36, 2, 133-146.
20. Yesilce, I., 2019. Inequalities for B-convex functions via generalized fractional integral, *Journal of Inequalities and Applications*, 2019, 1, 194.
21. Adilov, G. ve Yesilce, I., 2012. On generalizations of the concept of convexity, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 41, 5, 723-730.
22. Yesilce, I. ve Adilov, G., 2017. Hermite-Hadamard inequalities for B-convex and B^{-1} -convex functions, *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, 8, 1, 225-233.
23. Yesilce, I. ve Adilov, G., 2017. Fractional integral inequalities for B-convex functions, *Creative Mathematics and Informatics*, 26, 3, 345-351.
24. Adilov, G. ve Yesilce, I., 2016. November. The Operations on B-convex Sets and B-convex Functions, In of the 15th Panhellenic Conference on Mathematical Analysis.
25. Abramovich, S., Jameson, G. ve Sinnamon, G., 2004. Refining Jensen's inequality, *Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie*, 3-14.
26. Kim, J. H., 2016. Further improvement of Jensen inequality and application to stability of time-delayed systems. *Automatica*, 64, 121-125.
27. Avcı, B., 2022. B-konvekslik için jensen eşitsizliği ve uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Aksaray.
28. Sarıkaya, M. Z. ve Kozan, G., 2023. Ağırlıklı Jensen eşitsizliği yardımıyla ortalama eşitsizlikler, *Düzce Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi*, 11, , 3, 1463-1471.
29. Yesilce, I. ve Adilov, G., 2015. Hermite-Hadamard Inequalities for $L(j)$ -convex Functions and $S(j)$ -convex Functions. *Malaya Journal of Matematik*, 3, 03, 346-359.

30. Tinaztepe, G., Yeşilce, İ. ve Adilov, G., 2021. A refinement of the Bergström inequality, *Turkish Journal of Mathematics*, 45, 4, 1619-1625.
31. Tinaztepe, G., Evcan, S. S., Kemali, S., ve Yesilce, I., 2024. Hermite-Hadamard type inequalities involving S-convex function in the first sense, *Authorea Preprints*.
32. Sezer, S., Eken, Z., Tinaztepe, G. ve Adilov, G., 2021. p-Convex functions and some of their properties. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 42, 4, 443-459.
33. Kemali, S., Sezer, S., Tinaztepe, G. ve Adilov, G., 2021. s-Convex functions in the third sense, *Korean Journal of Mathematics*, 3.
34. Adilov, G. R. ve Kemali, S., 2009. Abstract convexity and Hermite-Hadamard type inequalities, *Journal of Inequalities and Applications*, 1-13.
35. Rainville, E. D., 1960. *Special Functions*, The Macmillan Company, New York, ABD, 8-301.
36. Askey, R., Andrews, G. E. ve Roy, R., 1999. *Special Functions* (17th Press), Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2-391.
37. Srivastava, H. M. ve Manocha, H. L., 1984. *A treatise on generating function*, Ellis Horwood, New York, 19-489.
38. Parmar, R. K. ve Chopra, P., 2012. Further Results on Generalized Incomplete Extended Beta Function, *International Journal of Scientific and Research Publications*, 2, 7, 1-6.
39. Egorova, V., Gil A., Segura, J. ve Temme, N. M., 2023. Dolomites research notes on approximation computation of the regularized incomplete beta function, 16, 10–16.
40. Rockafellar, R. T., 1970. *Convex analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
41. Adilov, G. ve Yesilce, I., 2018. Some important properties of B-convex functions, *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 19, 4, 669-680.
42. Mitrinovich, D. S., 1970. *Analytic Inequalities*, Springer–Verlag, Heidelberg.
43. Breckner, W. W., 1978. Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer Funktionen in topologischen linearen Räumen, *Publications de l'Institut Mathématique*, 23, 13-20.
44. Stancu, D. D., Coman, G. ve Blaga, P., 2002. *Analiza numerica și teoria aproximării*, Cluj-Napoca: Presa Universitara Clujeana, 2.

45. Kadakal, M., Iscan, I., Kadakal, H. ve Bekar, K., 2021. On improvements of some integral inequalities, Honam Mathematical J., 43, 3, 441–452.
46. Mitrinovic, D. S., Pecaric, J. E. ve Fink A.M., 1993. Classical and new inequalities in analysis, Kluwer Akademik Publishers, Dordrecht, Boston, London.
47. Adilov, G. ve Yesilce, I., 2018. Some important properties of B-convex functions, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 19, 4, 669-680.
48. Yesilce, I. ve Adilov, G., 2018. Hermite-Hadamard Type Inequalities for B^{-1} -Convex Functions Involving Generalized Fractional Integral Operators, Filomat 32, 18, 6457–6464.



ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Şahin Salih ÖZDEMİR

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Erciyes Üniversitesi, Matematik Bölümü, 1995-1999

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, 2021-2024

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLERİ

1. Milli Eğitim Bakanlığı – Matematik öğretmeni 13/10/2000 – ...
2. Necmettin Erbakan Üniversitesi, Ereğli Ziraat Fakültesi – Görevli öğretmen
Güz/2022-2023 – ...
3. Milli Eğitim Bakanlığı – Üstün Başarı Belgesi 10/10/2022
4. Milli Eğitim Bakanlığı – Başarı Belgesi 01/06/2022
5. Milli Eğitim Bakanlığı – Başarı Belgesi 17/01/2022
6. Milli Eğitim Bakanlığı – Başarı Belgesi 13/07/2020

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Kongrelerde Sunulan Makaleler

1. Yeşilce Işık, I. ve Özdemir, Ş. S., 2024. Gauss-Jacobi Inequality for B-convex Functions, AHI EVRAN International Congress on Scientific Research - IV, Kirsehir Ahi Evran University, Kırşehir, Bildiriler Kitabı (Cilt-3), s.1339.