



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**B-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN
HERMİTE-HADAMARD-FEJER TİPİ EŞİTSİZLİKLER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Soner ÖZDEMİR

DANIŞMAN

Doç. Dr. İlknur YEŞİLCE IŞIK

AKSARAY, 2022

Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 192342402 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi Soner ÖZDEMİR tarafından hazırlanan “**B-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMİTE-HADAMARD-FEJER TİPİ EŞİTSİZLİKLER**” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. İlknur YEŞİLCE IŞIK

AKSARAY ÜNİVERSİTESİ

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Üye: Prof. Dr. Gabil ADILOV

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Samet MALDAR

AKSARAY ÜNİVERSİTESİ

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Tez Savunma Tarihi: 31/03/2022

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Mehmet Ali HINIS

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinalliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Soner ÖZDEMİR

TEŞEKKÜR

Öncelikle lisansüstü öğrenim süresince değerli zamanını, bilgi ve tecrübelerini hiçbir zaman esirgemeyen, sabır ve anlayışla beni her konuda yönlendiren, danışman hocam olmaktan ziyade bana ablalık yapan, akademik hayata atılmam konusunda beni yönlendiren saygıdeğer hocam Doç. Dr. İlknur YEŞİLCE IŞIK'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Aynı zamanda lisans ve lisansüstü öğrenimim boyunca benden tecrübelerini hiçbir zaman esirgemeyen Sayın Dr. Öğr. Üyesi Samet MALDAR ve Sayın Doç. Dr. Yunus ATALAN hocalarıma teşekkür ederim.

Ayrıca hayatım boyunca bana her konuda destek olan aileme sonsuz teşekkür ederim.

Soner ÖZDEMİR
AKSARAY, 2022

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
SİMGELER VE KISALTMALAR	vi
1. GİRİŞ	1
2. KONVEKS LİK VE SOYUT KONVEKS LİK İLE İLGİLİ TEMEL KAVRAMLAR.....	4
2.1 Konvekslikle İlgili Temel Kavramlar	4
2.1.1 Afın kümeler ve dönüşümler	4
2.1.2 Konveks kümeler ve fonksiyonlar	5
2.2 Soyut Konvekslikle İlgili Temel Kavramlar	8
2.3 Bazı Genelleştirilmiş Konvekslik Çeşitleri	9
2.3.1 Logaritmik konveks fonksiyonlar	9
2.3.2 p-konveks fonksiyonlar	10
2.3.3 Kuazikonveks fonksiyonlar	10
2.3.4 Birinci anlamda s-konveks fonksiyonlar	10
2.3.5 İkinci anlamda s-konveks fonksiyonlar	10
2.3.6 Üçüncü anlamda s-konveks fonksiyonlar	11
2.3.7 Dördüncü anlamda s-konveks fonksiyonlar	11
2.3.8 B^{-1} -konveks fonksiyonlar	11
2.4 B-konveks Kümeler ve Fonksiyonlar	11
2.4.1 B-konveks kümeler	11
2.4.2 B-konveks fonksiyonlar	15
3. KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN BAZI EŞİTSİZLİKLER	20
3.1 Jensen Eşitsizliği	20
3.1.1 B-konveks fonksiyonlar için Jensen eşitsizliği	20
3.1.2 B^{-1} -konveks fonksiyonlar için Jensen eşitsizliği	20
3.2 Hermite-Hadamard Eşitsizliği	21
3.2.1 B-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği	22
3.2.2 p-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği	22
3.2.3 Üçüncü anlamda s-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği	23
3.3 Hermite-Hadamard-Fejer Eşitsizliği	23
3.3.1 p-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliği	23
3.3.2 Dördüncü anlamda s-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliği	24
4. B-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMİTE-HADAMARD-FEJER TİPİ EŞİTSİZLİKLER	25
4.1 B-konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejer Eşitsizlikleri	25
4.2 B-konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejer Eşitsizlikleri Uygulamaları	45
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	62
5.1 Tezde Elde Edilen Sonuçlar	62
5.2 Öneriler	63
KAYNAKLAR	65
ÖZGEÇMİŞ	69

YÜKSEK LİSANS TEZİ

B-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMİTE-HADAMARD-FEJER TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Soner ÖZDEMİR

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. İlknur YEŞİLCE IŞIK

ÖZET

Konveks analiz, son yıllarda oldukça popüler olan alanlardan biridir. Bu tezde, konveks analizin bir alt dalı olan soyut konvekslik üzerine bir eşitsizlik uygulaması yapılmıştır. Tezde incelenen genelleştirilmiş konvekslik çeşidi, B-konvekslik ve eşitsizlik ise Hermite-Hadamard-Fejer tipi eşitsizliktir. Böylece, tezde, şimdiye kadar optimizasyon, ekonomi ve farklı eşitsizlikler üzerine olan uygulamaları ile çalışılmış B-konveks fonksiyonlar için, elde edilmiş eşitsizliklerden daha genel bir eşitsizliğin ifade ve uygulamaları verilmiştir.

Bu tezde, ilk olarak, B-konveks küme ve fonksiyonlar ilgili bazı yeni örnekler verilmiştir. Ayrıca Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliğinin B-konvekslik için yeni formu ifade edilmiştir. Daha sonra, eşitsizlikte ele alınan fonksiyonlar üzerine özel şartlar getirilerek farklı teoremler geliştirilmiştir. Verilen şartlara özel örnekler incelenmiş ve teoremlerin B-konveks olan ya da olmayan bu fonksiyonlar için durumları ispat edilmiştir. Sonuçta da istenilen ve daha özel yaklaşımlar veren eşitsizlikler elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Konvekslik, Soyut Konvekslik, Soyut Konveks Fonksiyonlar, B-konvekslik, B-konveks Fonksiyonlar, Hermite-Hadamard-Fejer Eşitsizliği.

Mart, 2022; 69 sayfa

M.Sc. THESIS

**HERMITE-HADAMARD-FEJER TYPE INEQUALITY FOR B-CONVEX
FUNCTION**

Soner ÖZDEMİR

**Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assoc. Prof. İlknur YEŞİLCE IŞIK

ABSTRACT

Convex analysis is one of the popular field in recents. In this thesis, an application of inequality on the abstract convexity that is a subfield of convex analysis is made. B-convexity is the generalized convexity type and Hermite-Hadamard-Fejer type inequality is the inequality examined in the thesis. Thus, in the thesis, expression and applications of a more general inequality for B-convex functions, studied on applications to the optimization, economy and different inequalities until now, is given.

In this thesis, first, some new examples about B-convex sets and functions are given. Also, a new form of the Hermite-Hadamard-Fejer inequality for B-convexity is expressed. Then, different theorems are improved by putting special conditions on the handling functions for the inequality. Examples specialized on given conditions are examined and theorems for the functions, which are B-convex or are not B-convex, are proven. Finally, desired inequalities given more proper approaches are obtained.

Keywords: Convexity, Abstract Convexity, Abstract Convex Functions, B-convexity, B-convex Functions, Hermite-Hadamard-Fejer Inequality.

March, 2022; 69 pages

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. $\mathbb{R}^2$ 'de a,b noktalarından geçen bir doğru afindir.	4
Şekil 2.2. (a) $\mathbb{R}^2$ 'de konveks küme, (b) $\mathbb{R}^2$ 'de konveks olmayan küme.	5
Şekil 2.3. $\mathbb{R}^2$ 'de konveks bir koni ve $\mathbb{R}^2$ 'de konveks olmayan bir koni	6
Şekil 2.4. $\mathbb{R}^2$ 'de konveks olmayan bir küme ve $\mathbb{R}^2$ deki kümenin konveks örtüsü. ..	7
Şekil 2.5. $\mathbb{R}^2$ 'de <i>epif</i> grafiği.....	7
Şekil 2.6. $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 1, x + y \geq 1\}$ kümesi.	12
Şekil 2.7. $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ kümesi.	13
Şekil 2.8. $Y = \{(1, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, 1) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}$ kümesi.....	14

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\text{conv}C$	C kümesinin konveks örtüsü
$\text{epi}f$	f fonksiyonunun epigrafi
$\max$	Maksimum
$\sup$	supremum
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	n Boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{R}_+$	Negatif olmayan reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_{++}$	Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_+^n$	$\{(x_1, \dots, x_n) : x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\}$
$\mathbb{R}_{++}^n$	$\{(x_1, \dots, x_n) : x_i > 0, i = 1, 2, \dots, n\}$
$\emptyset$	Boş küme
$\forall$	Her
$\vee$	Koordinatlara göre maksimum
$\wedge$	Koordinatlara göre minimum
Λ	İndis kümesi

1.GİRİŞ

Matematiğin her zaman günlük hayatta somut olarak karşımıza çıkmadığı taraflar olsa dahi, soyut olarak hayatımızın her yerinde kullanıldığını kanıtlayabildiğimiz bir bilim dalı olduğu ortadır. MÖ 3000'den itibaren, Mezopotamya eyaletlerinde doğayı anlama, ticaret, takvim, zaman kaydetme ve astronomi gibi birçok alanda kullanılmaya başlanılan matematik anabilim dalı, zaman geçtikçe kullanıldığı yerler artarak günümüze kadar gelmiştir. Günümüzde en belirgin olarak mühendislik, sanat, tıp, ekonomi gibi alanlarda kullanılan bu dal kendi içinde de birçok alt bilim dalına ayrılmıştır.

Konveks Analiz ise matematiğin önemli alt dallarından biridir. Konvekslik ilk olarak geometride kullanılmasına rağmen matematiğin diğer alanları olan analiz, grafik teorisi ve olasılık gibi birçok farklı alanda uygulamaya sahiptir. Konvekslik kavramının ilk olarak Yunanlılar tarafından ortaya atıldığı söylene de, tarihi Mısırlara kadar dayanır. O günlerden zamanımıza kadar Mühendislik, Tıp, Sanat, Matematiksel Analiz, Optimizasyon ve Eşitsizlikler Teorisi gibi birçok uygulama alanında ele alınan konvekslik kavramı uygulamalarda önemli bir yere sahiptir [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]. Klasik konvekslikle ilgili çok sayıda matematiksel uygulama mevcuttur. Bunlar arasında en ilgi çekeniyse Eşitsizlikler Teorisidir. Eşitsizlik, iki değerin büyüklük ve küçüklük anlamında arasındaki farkı ifade eden ilişkidir [11,12,13,14]. Eşitsizlikler, ilk olarak 18. Ve 19. Yy'lara dayansa da modern anlamda eşitsizlikler 1934 yılında Hardy, Littlewood ve Polya tarafından yazılan "Inequalities" adlı kitapla kullanılmaya başlanmıştır [8].

Konveks Analiz'in alt dallarından biri olan soyut konvekslik, klasik konveksliğin genelleştirilmiş halidir [15,16,17,18]. Bu genelleştirme yöntemlerinden ikisi fonksiyonel soyutlama ve topolojik soyutlama olarak ifade edilebilir [16]. Soyut konvekslik kavramı, Optimizasyon, Matematiksel Analiz ve Eşitsizlikler Teorisi gibi birçok alanlarda çok sayıda uygulamaya sahiptir. Soyut konvekslik kavramını 2000 yılında A. Rubinov'un kitabında ve ek başka pek çok kitapta ayrıntılı biçimde çalışılmıştır [16]. Soyut konveksliğin çok sayıda çeşidi mevcuttur [19,20,21,22,23,24,25]. Uygulamaların ve çalışma alanlarının getirdiği şartlara göre farklılaşan bu soyut konvekslik çeşitleri her geçen gün popülerliğini artırmaktadır. Örneğin, sabit nokta ile ilgili uygulamalara sahip p-konvekslik [24]'de, birinci

anlamda s-konvekslik [23]'de, ikinci anlamda s-konvekslik [21]'de, üçüncü anlamda s-konvekslik [22]'da, dördüncü anlamda s-konvekslik [20]'de, B-konvekslik [19]'de, B^{-1} -konvekslik [26,27]'de çalışılmıştır. Bu konvekslikler üzerine hem uygulama hem teorik olarak çalışılmaya devam edilmektedir. Özellikle konvekslikte önemli yeri olan eşitsizliklerin bu fonksiyonlar için durumu incelenmiştir.

Konveks fonksiyonların en önemli ve kullanışlı uygulamalarından biri de eşitsizliklerdir. Eşitsizlikler Teorisi'ndeki en ünlü eşitsizliklerden biri ise Hermite-Hadamard eşitsizliğidir [14]. Hermite-Hadamard eşitsizliği, Hermite'in 1881 yılında Mathesis dergisine göndermiş olduğu ve 1883 yılında yayınlanan mektubu ile ortaya çıkmıştır. Ancak, eşitsizlik Hermite'in 1901 yılında ölümünden sonra yayınlanan bir makale ile ortaya çıksa da, bu eşitsizliği 1893 yılında J. Hadamard da ispatlamıştır. Bu sebeple, artık eşitsizlik her iki bilim adamının adıyla isimlendirilmektedir. Bu önemli eşitsizlik, integral ortalama değerinin, fonksiyon ve görüntülerin ortalama değerlerine ilişkin bir eşitsizlik olup, fonksiyonun konvekslik veya konkavlık durumuna göre değişmektedir.

Hermite-Hadamard eşitsizliği iyileştirmeler ve farklı soyut konveks fonksiyonlar için çalışılmaktadır. İyileştirmeler [6] makalelerindeki gibi daha yakın sınırlar bulmak için ve yeni daha genel kesirli integrallerle eşitsizliği ifade etmek için [28,29,30,31] çalışılmak üzere, iki şekilde genelleştirme yapılarak sunulmaktadır. Ayrıca farklı soyut konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği ise örneğin; B-konveks fonksiyonlar için [25] makalesinde, p-konveks fonksiyonlar için [32] makalesinde, üçüncü anlamda s-konveks fonksiyonlar için [33] makalesinde çalışılmış ve çalışılmaya devam edilmektedir.

1906 yılında Fejer (1880-1959) trigonometrik polinomları çalışırken Hermite'in sonuçlarının genelleştirilmesi olan

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)dx \quad (1.1)$$

eşitsizliğini elde etmiştir [12]. Bu eşitsizlikten $g(x)=1$, $x \in (a,b)$ için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin elde edileceği açıkça görülmektedir. Fejer'in bu sonucu ile ilgili özellikle son yıllarda birçok çalışma yapılmıştır [5,34,35,36,37,38,39,40].

Konveks Analiz'in alt dallarından biri olan soyut konvekslik biçimi son zamanlarda çokça ilgi gören bir konudur [16,18]. Bu alanda çokça genelleştirme biçimi vardır. Bu genelleştirme çeşitlerinden biri de B-konveksliktir [19]. B-konvekslik küme teorisi ve ekonomi yönündeki çalışmalarıyla zamanın ilgi çeken konularındandır [19,41,42,43,44,45,46]. 2006 yılında G. Adilov ve A. M. Rubinov ortak çalışması ile B-konvekslik kavramını daha da geliştirilerek çalışılmıştır [1]. Hala günümüzde çalışma alanı olarak popülerliğini devam ettirmekte ve literatürde bu konu ile ilgili çok sayıda çalışma yer almaktadır [19,25,29,30,41,47]. B-konvekslik kavramı C. D. Horvath ve W. Briec tarafından 2004 yılında çalışılmaya başlanmıştır [19]. 2005 yılında, W. Briec, C. D. Horvath ve A. M. Rubinov tarafından yapılan çalışmada B-konveksliğin ayırma özellikleri incelenmiştir [42]. Daha sonra, bu ayırma özellikleri 2008 yılında çalışılan bir makale ile genelleştirilerek Hahn-Banach Teoremi'nin B-konvekslik için durumları ortaya konulmuştur [41,43]. Bu çalışma matematiksel analiz ve ekonomi gibi alanlarda çok büyük öneme sahip olmuştur. 2008 yılında W. Briec ve C. D. Horvath soyut ekonomilerin dengesi ile ilgili B-konvekslik ile ilgili çalışmasını yayımlamıştır [41]. I. Yesilce ve G. Adilov 2017 ve 2018 yılında B-konveks fonksiyonlar, özellikleri ve bu fonksiyonlarla ilgili eşitsizlikleri çalışmışlardır [25,48].

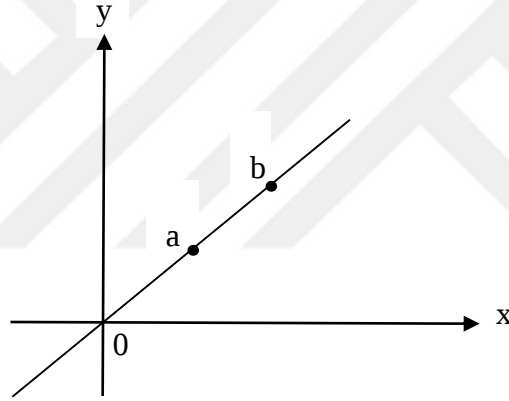
2. KONVEKSLİK VE SOYUT KONVEKSLİK İLE İLGİLİ TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Konvekslik ile İlgili Temel Kavramlar

2.1.1 Afın kümeler ve dönüşümler

Afın kümeler ve dönüşümlerle ilgili kavramlar bu bölümde verilecektir [15].

Tanım 2.1.1.1 $A \subset \mathbb{R}^n$ boştan farklı bir küme olsun. Eğer $\forall x, y \in A$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ sayısı için $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$ ise A kümesine **afın küme** denir. Diğer bir ifade ile, kümeden alınmış herhangi iki elemanından geçmekte olan doğruyu da içeren kümelere afın küme denir (Şekil 2.1).



Şekil 2.1. $\mathbb{R}^2$ 'de a, b noktalarından geçen bir doğru afındır.

Örnek 2.1.1.1 $\mathbb{R}^3$ 'de $\mathbb{R}^3$, $\emptyset$, $\{x = (a_1, a_2, a_3) : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ tek nokta kümeleri, doğrular ve düzlemler afın kümelerdir.

Tanım 2.1.1.2 $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ noktaları verilsin ve $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ reel sayıları için

$\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ koşulu sağlansın. Böylece,

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m \quad (2.1)$$

toplamına $x_1, x_2, \dots, x_m$ elemanlarının **bir afın kombinasyonu** denir.

Tanım 2.1.1.3 $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, her $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için $T : x \rightarrow Tx$ dönüşümü eğer

$$T((1-\lambda)x + \lambda y) = (1-\lambda)Tx + \lambda Ty \quad (2.2)$$

oluyorsa **afin dönüşüm** olarak adlandırılır.

2.1.2 Konveks kümeler ve fonksiyonlar

Konveks kümeler ve fonksiyonlarla ilgili tezde kullanacağımız temel tanım ve teoremler aşağıdaki gibidir [15].

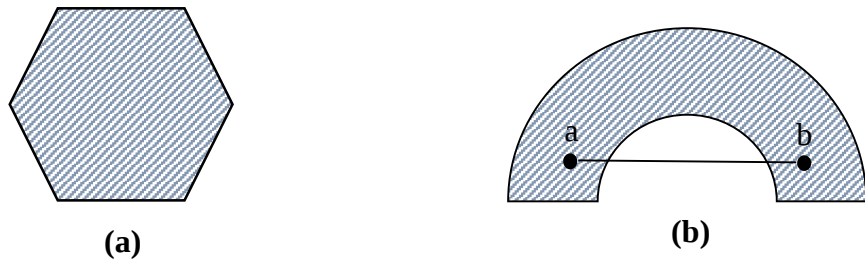
Tanın 2.1.2.1 $C \subset \mathbb{R}^n$ ve C boştan farklı bir küme olsun. Her $x, y \in C$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in C \quad (2.3)$$

ise C kümesine **konveks küme** denir.

NOT: Afın kümeler konveks kümelerin özel halidir denilebilir.

Başka bir şekilde ifade edilecek olursa, C kümesinden alınmış herhangi iki elemanını birleştiren doğru parçası, hala C kümesinin elemanı oluyor ise C kümesi konveks olur (Şekil 2.2).



Şekil 2.2. (a) $\mathbb{R}^2$ 'de konveks küme, **(b)** $\mathbb{R}^2$ 'de konveks olmayan küme

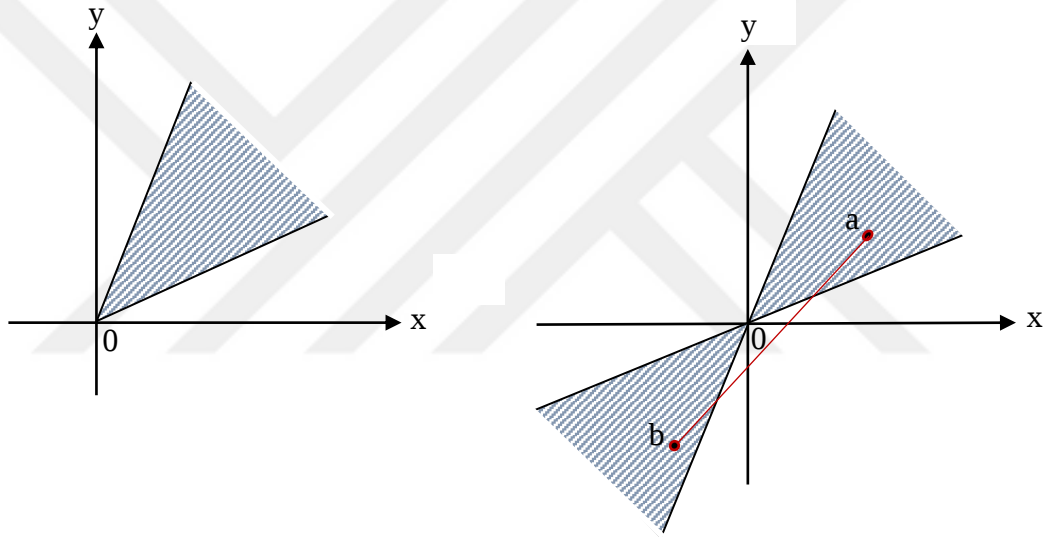
Örnek 2.1.2.1 $\mathbb{R}^n$, $\emptyset$ ve $\{a : a \in \mathbb{R}^n\}$ tek nokta kümeleri konvektir.

Tanım 2.1.2.2 $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ noktaları ele alınsın ve negatif olmayan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \geq 0$ sayıları için $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ koşulu sağlasın. Bu durumda,

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m \quad (2.4)$$

elemanına $x_1, x_2, \dots, x_m$ noktalarının bir **konveks kombinasyonu** denir.

Tanım 2.1.2.3 $K \subset \mathbb{R}^n$ ele alınsın. Eğer $\forall x \in K$ ve $\forall \lambda \geq 0$ için $\lambda x \in K$ elemanı olur ise K kümesine **koni** denir. Ayrıca, bu K konisi, konveks bir küme ise K 'ya **konveks koni** denir (Şekil 2.3).

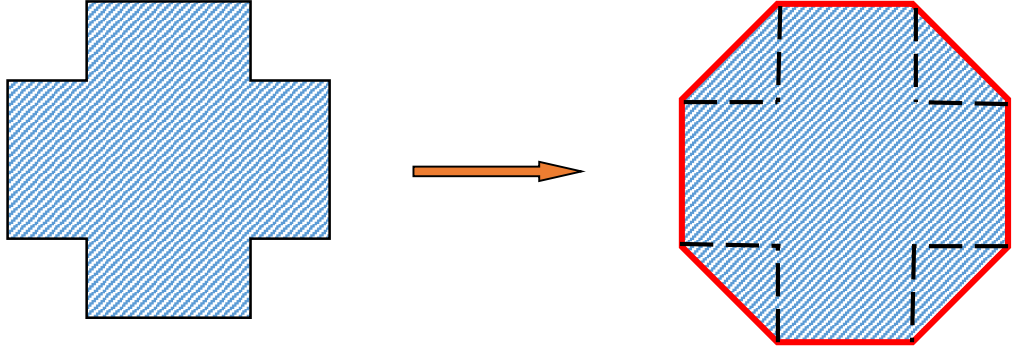


Şekil 2.3. $\mathbb{R}^n$ de konveks bir koni ve $\mathbb{R}^n$ 'de konveks olmayan bir koni

Tanım 2.1.2.4 $C \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin elemanlarının tüm konveks kombinasyonları kümesine C kümesinin **konveks örtüsü** denir ve $convC$ ile gösterilir.

$$convC = \left\{ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m \mid x_i \in C, \lambda_i \geq 0 \text{ ve } \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\} \quad (2.5)$$

Başka bir deyiş ile C kümesini kapsamakta olan tüm konveks kümelerin kesişimi kümesine, kümenin konveks örtüsü denir (Şekil 2.4).



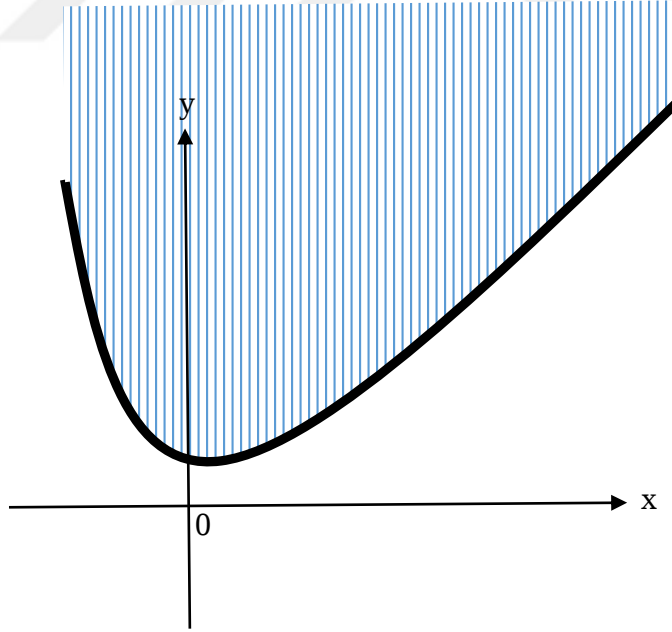
Şekil 2.4. $\mathbb{R}^2$ 'de konveks olmayan bir küme ve $\mathbb{R}^2$ 'deki kümenin konveks örtüsü

Tanım 2.1.2.5 $C \subset \mathbb{R}^n$, $f : C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ olmak üzere;

$$\{(x, \mu) \mid x \in C, \mu \in \mathbb{R}, f(x) \leq \mu\} \quad (2.6)$$

biçiminde ifade edilen kümeye f fonksiyonunun **epigrafı** denir ve $epif$ ile gösterilir.

Özel durumda ise, $C \subset \mathbb{R}$ için tek değişkenli f fonksiyonunun epigraf kümesi f fonksiyonunun grafiğinin üstünde kalan taralı kümeyi belirtmektedir (Şekil 2.5).



Şekil 2.5. $\mathbb{R}^2$ 'de $epif$ grafiği

Teorem 2.1.2.1 $C \subset \mathbb{R}^n$ kümesi konveks olsun ve $f : C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonu ele alınsın. f fonksiyonunun konveks bir fonksiyon olması için gerek ve yeter koşul her $x, y \in C$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \quad (2.7)$$

eşitsizliğinin sağlamasıdır.

Tanım 2.1.2.6 Bir sonlu fonksiyon, hem konveks hem de konkav ise bu fonksiyona **afin fonksiyon** denir.

Teorem 2.1.2.2 $C \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin konveks bir küme ve $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun kapalı ve konveks bir fonksiyon olması için gerek ve yeter koşul $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu afin bir fonksiyon olmak üzere

$$f(x) = \sup \{h(x) \mid h \leq f\}, \quad \forall x \in C \quad (2.8)$$

sağlanmasıdır. Burada, $h \leq f \Leftrightarrow \forall x \in C$ için $h(x) \leq f(x)$.

2.2 Soyut Konvekslik ile İlgili Temel Kavramlar

H , X kümesinde tanımlı ve sonlu fonksiyonların bir ailesi ve $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ bir fonksiyon olsun. Eğer, H ailesinin

$$f(x) = \sup \{h(x) \mid h \in H\}, \quad \forall x \in X \quad (2.9)$$

sağlayacak biçimde bir U alt ailesi var ise, ele alınan f fonksiyonuna H ailesine göre soyut konvektir (ya da H - konvektir) denir. Burada ise, H fonksiyonlar ailesine elemanter fonksiyonların ailesi denir [16].

$H = \emptyset$ olması durumunda $f(x) = -\infty$ olarak kabul edilecektir.

Teorem 2.1.2.2'den de görüldüğü gibi, klasik konvekslik için elementer fonksiyonlar afin fonksiyonlar olur.

Diğer soyutlaştırma yöntemleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Topolojik soyut konvekslik

X bir vektör uzay ve bir $C \subset X$ kümesi olsun. $\forall k \geq 2$ tamsayısı için, $V_k \subset \mathbb{R}^k$ kümesi ele alınsın. Bir $\phi_k : C^k \times V_k \rightarrow C$ fonksiyonlar ailesi verilsin. Eğer, $U \subset C$ için,

$$(x_1, x_2, \dots, x_k) \in U, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in V_k \Rightarrow \phi(x_1, x_2, \dots, x_k, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \in U, k = 2, 3, \dots$$

U kümesine ϕ_k fonksiyonlarının ailesine göre soyut konvektir denir [16].

Fonksiyonel soyut konvekslik

X bir vektör uzay olmak üzere $C \subset X$ ve F kümesi ise $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının bir ailesi olsun. Bu durumda, $U \subset C$ olmak üzere, $\forall x \notin U$ olan nokta F ailesinden bir fonksiyon ile U kümesinden ayrılabilir ise, başka bir deyişle öyle bir $f \in F$ varsa ki $f(x) > \sup_{u \in U} f(u)$ sağlanır bu durumda U kümesine F fonksiyonlar ailesine göre soyut konveks kümedir denir [16].

2.3 Bazı genelleştirilmiş konvekslik çeşitleri

2.3.1 Logaritmik konveks fonksiyonlar

$I \subset \mathbb{R}$, olsun. Bu durumda, bir $f : I \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ fonksiyonu için $\log f$ konveks bir fonksiyon oluyor ise, veya bununla eş değer olarak her $x, y \in I$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq [f(x)]^\lambda [f(y)]^{1-\lambda} \quad (2.10)$$

eşitsizliği sağlanır ise f fonksiyonuna **log-konveks fonksiyon** denir [49].

2.3.2 p-konveks fonksiyonlar

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $p \in (0,1]$ ve U p-konveks küme olmak üzere her $x, y \in U$ ve $\lambda, \mu \geq 0$, $\lambda^p + \mu^p = 1$ için

$$f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda f(x) + \mu f(y) \quad (2.11)$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna **p-konveks fonksiyon** denir [24].

2.3.3 Kuazi-konveks Fonksiyonlar

$I \subset \mathbb{R}$ her hangi bir alt aralık ve $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\} \quad (2.12)$$

sağlanır ise bu f fonksiyonuna **kuazi-konveks fonksiyon** denir [18].

2.3.4 Birinci Anlamda s-konveks Fonksiyonlar

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $s \in (0,1]$ ve U s-konveks küme olmak üzere her $x, y \in U$ ve $\lambda, \mu \geq 0$, $\lambda^s + \mu^s = 1$ için

$$f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda^s f(x) + \mu^s f(y) \quad (2.13)$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna **birinci anlamda s-konveks fonksiyon** denir [23].

2.3.5 İkinci Anlamda s-konveks Fonksiyon

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ bir küme ve $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $s \in (0,1]$ ve U konveks küme olmak üzere her $x, y \in U$ ve $\lambda, \mu \geq 0$, $\lambda + \mu = 1$ için

$$f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda^s f(x) + \mu^s f(y) \quad (2.14)$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna **ikinci anlamda s-konveks fonksiyon** denir [21].

2.3.6 Üçüncü Anlamda s-konveks Fonksiyon

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $f:U \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $s \in (0,1]$ ve U konveks küme olmak üzere her $x, y \in U$ ve $\lambda, \mu \geq 0$, $\lambda^s + \mu^s = 1$ için

$$f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda^{\frac{1}{s}} f(x) + \mu^{\frac{1}{s}} f(y) \quad (2.15)$$

eşitsizliği sağlanır ise, bu f fonksiyonu **üçüncü anlamda s-konveks fonksiyondur** denir [22].

2.3.7 Dördüncü Anlamda s-konveks Fonksiyon

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $f:U \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $s \in (0,1]$ ve U konveks küme olmak üzere her $x, y \in U$ ve $\lambda, \mu \geq 0$, $\lambda + \mu = 1$ için

$$f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda^{\frac{1}{s}} f(x) + \mu^{\frac{1}{s}} f(y) \quad (2.16)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonuna **dördüncü anlamda s-konveks fonksiyon** denir [20].

2.3.8 B^{-1} -konveks Fonksiyonlar

$U \subset \mathbb{R}_{++}^n$ B^{-1} -konveks küme, $f:U \rightarrow \mathbb{R}_{++} \cup \{+\infty\}$ olsun. Her $x, y \in U$, $\lambda \in [1, +\infty)$ için

$$f(\lambda x \wedge y) \leq \lambda f(x) \wedge f(y) \quad (2.17)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna **B^{-1} -konveks fonksiyon** denir [26].

2.4 B-konveks kümeler ve fonksiyonlar

Bu bölümde verilecek olan B-konvekslik kavramı da farklı soyut konvekslik çeşitlerinden biridir. Tezde çalışılan ana kavram olması sebebiyle, B-konvekslik biçimi bu başlık altında ayrıntılı bir biçimde verilecektir.

2.4.1 B-konveks kümeler

Tanım 2.4.1.1 Bir $A \subset \mathbb{R}_+^n$ kümesinden alınan her $x, y \in A$ ve her $\lambda \in [0,1]$ için

$$\lambda x \vee y \in A \quad (2.18)$$

ise A kümesine **B-konveks küme** denir [19].

Teorem 2.4.1.1 $A \subset \mathbb{R}_+^n$ ve $m \geq 2$ olsun. $x_{(1)}, \dots, x_{(m)} \in A$ ve $\max\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\} = 1$ için

$$\bigvee_{i=1}^m \lambda_i x_{(i)} \in A \quad (2.19)$$

sağlanıyorsa A kümesi B-konveks küme olur [19].

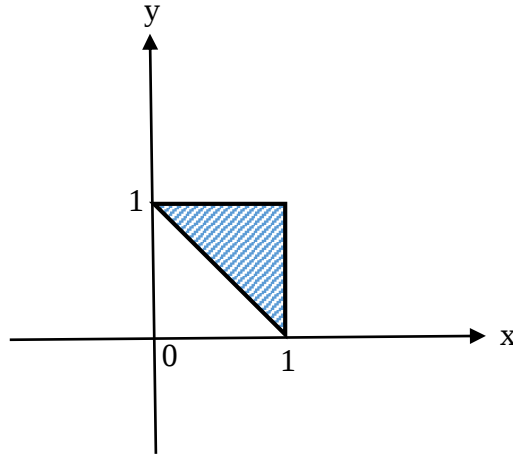
Teorem 2.4.1.2 a) $\emptyset$, $\mathbb{R}^n$ ve $\{a : a \in \mathbb{R}^n\}$ kümeleri B-konveks kümedir.

b) $\{L_t | t \in \Lambda\}$ ailesi B-konveks kümelerin keyfi bir ailesi olsun. Bu durumda $\bigcap_t L_t$ kümesi de B-konvekstir.

c) $\{L_t | t \in \Lambda\}$ ailesi B-konveks kümelerin bir ailesi olsun. Her $t_1, t_2 \in \Lambda$ için $L_{t_1} \cup L_{t_2} \subset L_{t_3}$ sağlayan bir $t_3 \in \Lambda$ elemanı var ise $\bigcup_t L_t$ kümesi de B-konvekstir [19].

Aşağıdaki örnekler ile B-konveks küme ve klasik konveks kümenin karşılaştırılması yapılacaktır.

Örnek 2.4.1.1 Şekil 2.6’da ifade edilen $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 1, x + y \geq 1\}$ kümesi klasik anlamda konveks olduğu gibi aynı zamanda B-konveks kümedir.



Şekil 2.6. $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 1, x + y \geq 1\}$ kümesi

Gerçekten, her $a, b \in U$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$a = (x_1, y_1) \in U \text{ olduğundan } 0 \leq x_1, y_1 \leq 1 \text{ ve } x_1 + y_1 \geq 1$$

$$b = (x_2, y_2) \in U \text{ olduğundan } 0 \leq x_2, y_2 \leq 1 \text{ ve } x_2 + y_2 \geq 1$$

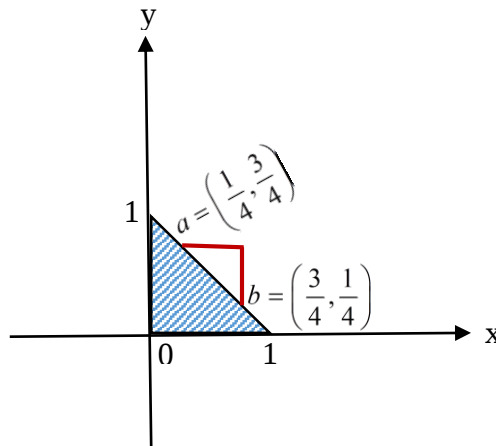
sağlanır. Buradan

$$\lambda a \vee b = \lambda(x_1, y_1) \vee (x_2, y_2) = (\lambda x_1 \vee x_2, \lambda y_1 \vee y_2) \in U$$

olduğu gösterilmelidir. Bu durumda aşağıdaki durumlar incelenmelidir.

- 1) $\lambda x_1 \vee x_2 = \lambda x_1$ ve $\lambda y_1 \vee y_2 = \lambda y_1$ olsun. Bu durumda sırasıyla $\lambda x_1 \leq \lambda \leq 1$ ve $\lambda y_1 \leq \lambda \leq 1$ olur, ayrıca $\lambda x_1 + \lambda y_1 \geq x_2 + y_2 \geq 1$ olup istenilen sağlanır.
- 2) $\lambda x_1 \vee x_2 = \lambda x_1$ ve $\lambda y_1 \vee y_2 = y_2$ olsun. Bu durumda $\lambda x_1 \leq \lambda \leq 1$ ve $y_2 \leq 1$ olur, $\lambda x_1 + y_2 \geq x_2 + y_2 \geq 1$ olup istenilen sağlanır.
- 3) $\lambda x_1 \vee x_2 = x_2$ ve $\lambda y_1 \vee y_2 = \lambda y_1$ olsun. Bu durumda $x_2 \leq 1$ ve $\lambda y_1 \leq \lambda \leq 1$ elde edilir, $x_2 + \lambda y_1 \geq x_2 + y_2 \geq 1$ olup istenilen sağlanır.
- 4) $\lambda x_1 \vee x_2 = x_2$ ve $\lambda y_1 \vee y_2 = y_2$ olsun. Bu durumda $x_2 \leq 1$ ve $y_2 \leq 1$ olur, bunun yanı sıra $x_2 + y_2 \leq 1$ olup istenilen sağlanır.

Örnek 2.4.1.2 Şekil 2.7’de verilen $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ kümesi klasik anlamda konvektir ancak B-konveks küme değildir.



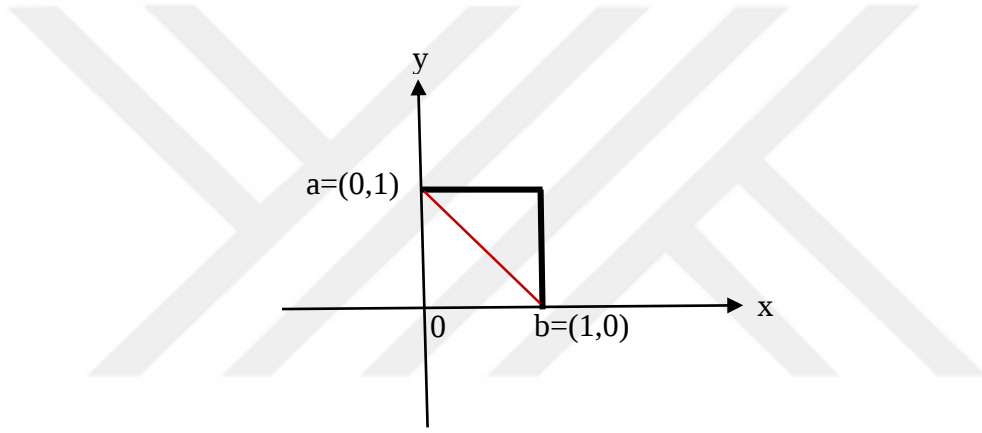
Şekil 2.7. $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ kümesi

Burada $a = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), b = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) \in V$ ve $\lambda = \frac{1}{2} \in [0,1]$ olarak seçilirse

$$\lambda a \vee b = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \vee \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{8}\right)$$

olur ki buradan $\frac{3}{4} + \frac{3}{8} = \frac{9}{8} > 1$ olduğundan $\lambda a \vee b \notin V$, yani V kümesi B-konveks küme değildir.

Örnek 2.4.1.3 $Y = \{(1, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, 1) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}$ kümesi klasik anlamda konveks değildir ancak B-konveks küme bir kümedir (Şekil 2.8).



Şekil 2.8. $Y = \{(1, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, 1) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}$ kümesi

B-konvekslik için aşağıdaki durumlar incelenmelidir.

- 1) $(1, y_1), (1, y_2) \in Y$ olsun. Bu durumda $\lambda(1, y_1) \vee (1, y_2) = (1, \lambda y_1 \vee y_2) \in Y$ olup istenilen sağlanır.
- 2) $(1, y_1), (x_2, 1) \in Y$ ise $\lambda(1, y_1) \vee (x_2, 1) = (\lambda \vee x_2, 1) \in Y$ olup istenilen sağlanır.
- 3) $(x_1, 1), (x_2, 1) \in Y$ olsun. Bu durumda $\lambda(x_1, 1) \vee (x_2, 1) = (\lambda x_1 \vee x_2, 1) \in Y$ olup istenilen sağlanır.
- 4) $(x_1, 1), (1, y_2) \in Y$ olsun. Böylece $\lambda(x_1, 1) \vee (1, y_2) = (1, \lambda \vee y_2) \in Y$ olup istenilen sağlanır.

Sonuç olarak $Y = \{(1, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, 1) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}$ kümesi B-konveks kümedir.

Konvekslik durumu için ise $a = (0,1), b = (1,0) \in Y$ ve $\lambda = \frac{1}{2} \in [0,1]$ olarak seçilirse

$$\lambda a + (1-\lambda)b = \frac{1}{2}(0,1) + \left(1 - \frac{1}{2}\right)(1,0)$$

olur ki buradan $\frac{1}{2}(0,1) + \frac{1}{2}(1,0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ olduğundan $\lambda a + (1-\lambda)b \notin Y$, yani Y kümesi konveks küme değildir.

Böylece, konveks ve aynı zamanda B-konveks olan (Örnek 2.4.1.1.), konveks olan ve B-konveks olmayan (Örnek 2.4.1.2.) ve son olarak konveks olmayan ve B-konveks olan (Örnek 2.4.1.3.) kümelerin her biri için örnek verilmiştir. Bu da konveks kümeler ile B-konveks kümeler arasındaki ilişkiyi göstermektedir. Dolayısıyla, her iki konvekslik biçiminin kesiştiği durum söz konusu iken, tersi de mümkündür denilebilir.

2.4.2 B-konveks fonksiyonlar

Tanım 2.4.2.1 $A \subset \mathbb{R}^n$ ve $f : A \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ olsun. Eğer, f fonksiyonunun epigraf kümesi B-konveks bir küme ise f fonksiyonuna **B-konveks fonksiyon** denir [48].

Teorem 2.4.2.1 $A \subset \mathbb{R}_+^n$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ olmak üzere, f fonksiyonunun B-konveks bir fonksiyon olması için gerek ve yeter koşul A kümesinin B-konveks bir küme olması ve her $x, y \in A$, $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x \vee y) \leq \lambda f(x) \vee f(y) \quad (2.20)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır [48].

Teorem 2.4.2.2 Herhangi bir $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tanımlı B-konveks fonksiyonu ve herhangi bir $\beta \in [-\infty, +\infty]$ reel sayısı için $\{x \mid f(x) \leq \beta\}$ ve $\{x \mid f(x) < \beta\}$ biçimdeki seviye kümeleri de B-konveks kümelerdir [47].

Tanım 2.4.2.2 $\mathbb{R}^n$ kümesinde tanımlı bir f fonksiyonu için, her $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$f(\lambda x) = \lambda f(x), \quad 0 < \lambda < +\infty \quad (2.21)$$

şartı sağlanıyor ise, f fonksiyonuna **(1. dereceden) pozitif homojen fonksiyon** denir [48].

Teorem 2.4.2.3 Bir $f : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tanımlı pozitif homojen fonksiyonunun B-konveks fonksiyon olması için gerek ve yeter şart her $x, y \in \mathbb{R}_+^n$ elemanı için

$$f(x \vee y) \leq f(x) \vee f(y) \quad (2.22)$$

eşitsizliğini sağlamasıdır [48].

Teorem 2.4.2.4 $\{f_t \mid f_t : A \subset \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}\}$ kümesi B-konveks fonksiyonların bir ailesi olmak üzere, $f(x) = \sup_t f_t(x)$ ile tanımlanan fonksiyon da B-konvektir [48].

Teorem 2.4.2.5 Eğer $f : A \subset \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ ve $g : A \subset \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ azalan (ve ya artan) ve B-konveks birer fonksiyon ise $h(x) = f(x)g(x)$ fonksiyonu da azalan (ve ya artan) ve B-konveks fonksiyondur [48].

B-konveks fonksiyonlar için aşağıdaki çeşitli örnekler verebiliriz.

Örnek 2.4.2.1 $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, f(u) = \frac{1}{u}$ fonksiyonu B-konveks fonksiyondur.

Çözüm: Bu fonksiyonun B-konveks olabilmesi için (2.20) eşitsizliğini sağlaması gerekmektedir. Bunun için aşağıdaki iki durum söz konusudur;

1) $\lambda u \vee v = \lambda u$ ise,

$$f(\lambda u \vee v) = \frac{1}{\lambda u \vee v} = \frac{1}{\lambda u} \leq \frac{1}{v} \leq \frac{\lambda}{u} \vee \frac{1}{v} = \lambda f(u) \vee f(v) \quad (2.23)$$

sağlanır.

2) $\lambda u \vee v = v$ ise,

$$f(\lambda u \vee v) = \frac{1}{\lambda u \vee v} = \frac{1}{v} \leq \frac{\lambda}{u} \vee \frac{1}{v} = \lambda f(u) \vee f(v) \quad (2.24)$$

koşulu sağlandığından f fonksiyonu B-konveks olur. Bu fonksiyon aynı zamanda konvektir. Dolayısıyla hem konveks hem de B-konveks olan bir fonksiyona örnek olarak gösterilmiş olur.

Örnek 2.4.2.2 $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ $f(u) = e^u$ B-konkav fonksiyondur.

Çözüm: Gerçekten, B-konkavlık için (2.20) eşitsizliğinin tersinin sağlandığını göstereceğiz. Bu durumda, aşağıdaki koşullar söz konusudur.

1) $\lambda u \vee v = \lambda u$ olması durumunda,

$$f(\lambda u \vee v) = e^{(\lambda u \vee v)} = e^{(\lambda u)} = e^\lambda e^u \geq \lambda e^u \quad (2.25)$$

ayrıca $f(u) = e^u$ artan olduğundan $e^{(\lambda u)} \geq e^v$ olur. Böylece;

$$f(\lambda u \vee v) = e^{(\lambda u)} \geq \lambda e^v \vee e^v = \lambda f(u) \vee f(v) \quad (2.26)$$

sağlanır.

2) $\lambda u \vee v = v$ olduğunda ise 1. maddedeki koşullar altında $e^v \geq e^{\lambda u}$ ve $e^\lambda e^u \geq \lambda e^u$ olduğundan

$$f(\lambda u \vee v) = e^{\lambda u \vee v} = e^v = \lambda e^u \vee e^v = \lambda f(u) \vee f(v) \quad (2.27)$$

olur. Böylece f fonksiyonu B-konkavdır. Bu örnek ise, konveks olan ancak B-konveks olmayan fonksiyona bir örnek olarak gösterilebilir.

Örnek 2.4.2.3 $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f(u) = \sqrt{u}$ fonksiyonu B-konkavdır.

Çözüm: Gerçekten f fonksiyonunun B-konkav olduğunu göstermek için (2.20) eşitsizliğinin tersini sağladığını göstereceğiz. Bu durumda aşağıdaki iki durum söz konusudur.

1) $\lambda u \vee v = \lambda u$ ise $\lambda u \geq v \Rightarrow \sqrt{\lambda u} \geq \sqrt{v}$ olduğundan;

$$f(\lambda u \vee v) = \sqrt{\lambda u \vee v} = \sqrt{\lambda u} = \sqrt{\lambda} \sqrt{u} \geq \lambda \sqrt{u} = \lambda f(u) \quad (2.28)$$

olup, yukarıdaki koşullar göz önüne alındığında

$$f(\lambda u \vee v) = \sqrt{\lambda u} \geq \lambda \sqrt{u} \vee \sqrt{v} = \lambda f(u) \vee f(v) \quad (2.29)$$

eşitsizliği sağlanır.

2) $\lambda u \vee v = v$ olması durumunda,

$$f(\lambda u \vee v) = \sqrt{\lambda u \vee v} = \sqrt{v} \geq \sqrt{\lambda u} \geq \lambda \sqrt{u} \quad (2.30)$$

olduğundan ilk durumdaki gibi eşitsizlik sağlanmış olur. Böylece f fonksiyonun B-konkav olduğu ispatlanmış olur. Bu fonksiyon ise hem konveks olmayan hem de B-konveks olmayan bir fonksiyon örneğidir.

Örnek 2.4.2.4 $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [0,1]$, $f(u) = \sin u$ fonksiyonu B-konkav fonksiyondur.

Çözüm: Bu fonksiyonun B-konkavlığını göstermek için (2.20) eşitsizliğinin tersini sağladığını göstermeliyiz. Bu durumda aşağıdaki iki durum incelenmelidir.

1) $\lambda u \vee v = \lambda u$ ise

$$f(\lambda u \vee v) = \sin(\lambda u \vee v) = \sin(\lambda u) \geq \lambda \sin u \quad (2.31)$$

olur. $\sin u$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında artan fonksiyon olduğundan $\sin(\lambda u) \geq \sin v$ olur ve bu durumda

$$f(\lambda u \vee v) = \sin(\lambda u) \geq \lambda \sin u \vee \sin v = \lambda f(u) \vee f(v) \quad (2.32)$$

sağlanır.

2) $\lambda u \vee v = v$ durumunu inceleyelim. $\sin u$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında artan fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} f(\lambda u \vee v) &= \sin(\lambda u \vee v) = \sin v \\ &= \sin(\lambda u) \vee \sin v = \lambda \sin u \vee \sin v \\ &= \lambda f(u) \vee f(v) \end{aligned} \quad (2.33)$$

elde edilir. Böylece f fonksiyonun B-konkav fonksiyon olduğu ispatlanmış olur.

Örnek 2.4.2.5 $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [0,1]$, $f(u) = \cos u$ fonksiyonu B-konveks fonksiyondur.

Çözüm: Gerçekten, bu fonksiyonun B-konveks olduğunu göstermek için (2.20) eşitsizliğini sağladığını göstermeliyiz. Bu durumda aşağıdaki durumlar söz konusudur.

1) $\lambda u \vee v = \lambda u$ ise $\cos u, \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında azalan olduğu için $\cos \lambda u \leq \cos v$

olur, buradan

$$\cos \lambda u \leq \lambda \cos u \vee \cos v \quad (2.34)$$

dir.

2) $\lambda u \vee v = v$ ise

$$\cos v \leq \lambda \cos u \vee \cos v \quad (2.35)$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece f fonksiyonu B-konveks fonksiyon olduğu ispatlanmış olur.

3. KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN BAZI EŞİTSİZLİKLER

3.1 Jensen Eşitsizliği

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tanımlı bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun konveks bir fonksiyon olması için gerekli ve yeterli şart

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n) \quad (3.1)$$

eşitsizliğini sağlamasıdır, burada $x_i \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0$ ve $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$ dir ve bu eşitsizlik Jensen eşitsizliği olarak isimlendirilir [13].

Bazı farklı soyut konveks fonksiyon çeşitleri için Jensen eşitsizliği aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

3.1.1 B-konveks fonksiyonlar için Jensen eşitsizliği

$A \subset \mathbb{R}_+^n$ ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ olmak üzere, f fonksiyonunun B-konveks bir fonksiyon olması için gerekli ve yeterli şart A kümesinin B-konveks küme olması ve $i = 1, \dots, m$ için her $x_i \in A$ ve $\lambda_i \in [0, 1]$ öyle ki $\max_{i=1, \dots, m} \{\lambda_i\} = 1$ için

$$f\left(\bigvee_{i=1}^m \lambda_i x_i\right) \leq \bigvee_{i=1}^m \lambda_i f(x_i) \quad (3.2)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır [48].

3.1.2 B⁻¹-konveks fonksiyonlar için Jensen eşitsizliği

$A \subset \mathbb{R}_{++}^n$ ve $f : A \subset \mathbb{R}_{++}^n \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ olmak üzere f fonksiyonunun B⁻¹-konveks fonksiyon olabilmesi için gerekli ve yeterli şart A kümesinin B⁻¹-konveks küme olması ve $i = 1, \dots, m$ için her $x_i \in A$ ve $\lambda_i \in [1, +\infty)$ öyle ki $\min_{i=1, \dots, m} \{\lambda_i\} = 1$ için

$$f\left(\bigwedge_{i=1}^m \lambda_i x_i\right) \leq \bigwedge_{i=1}^m \lambda_i f(x_i) \quad (3.3)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır [50].

3.2 Hermite-Hadamard Eşitsizliği

$I, \mathbb{R}$ 'de herhangi bir aralık ve $\alpha, \beta \in I$ öyle ki $\alpha < \beta$ olmak üzere $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı fonksiyonu konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \leq \frac{1}{\beta-\alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} \quad (3.4)$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizlik, Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak isimlendirilir [14].

Hermite-Hadamard eşitsizliği iyileştirmeleri üzerine çalışılmaktadır, bu iyileştirmelerden biri aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$f : [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ biçiminde tanımlı konveks bir fonksiyon olsun. Sırasıyla $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ ve $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$ aralıkları için Hermite-Hadamard eşitsizlikleri;

$$f\left(\frac{3\alpha+\beta}{4}\right) \leq \frac{2}{\beta-\alpha} \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x) dx \leq \frac{1}{2} \left[f(\alpha) + f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \right] \quad (3.5)$$

ve

$$f\left(\frac{\alpha+3\beta}{4}\right) \leq \frac{2}{\beta-\alpha} \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} f(x) dx \leq \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + f(\beta) \right] \quad (3.6)$$

biçiminde elde edilir. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplandığında

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) &\leq \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{3\alpha+\beta}{4}\right) + f\left(\frac{\alpha+3\beta}{4}\right) \right] \leq \frac{1}{\beta-\alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \\ &\leq \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} \right] \leq \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} \end{aligned} \quad (3.7)$$

eşitsizliği elde edilir ve f 'in integral ortalaması için daha iyi sonuçlar ifade edilmiş olur [6].

Ayrıca, bir diğer iyileştirme çalışması da kesirli integraller yardımıyla daha genel integral değerleri için verilen aşağıdaki eşitsizlik gibidir.

$f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif bir fonksiyon, $0 \leq a < b$ ve $f \in L_1[a,b]$ olsun. f , $[a,b]$ aralığında konveks fonksiyon ise bu durumda Hermite-Hadamard eşitsizliğinin Riemann-Liouville kesirli integral ile ifadesi aşağıdaki gibi olur [28].

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(k+1)}{2(b-a)^\alpha} [J_{a+}^k f(b) + J_{b-}^k f(a)] \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (3.8)$$

Bu sonuçlar haricinde, farklı konvekslik sınıfları için Hermite-Hadamard eşitsizlikleri mevcuttur, bunlardan bazıları aşağıdaki gibidir.

3.2.1 B-konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Eşitsizliği:

$f:[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ B-konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \leq \begin{cases} f(\alpha), & f(\alpha) \geq f(\beta) \\ \frac{\beta([f(\alpha)]^2 + [f(\beta)]^2) - 2\alpha f(\alpha)f(\beta)}{2(\beta - \alpha)f(\beta)}, & f(\alpha) < f(\beta) \end{cases} \quad (3.9)$$

eşitsizliği sağlanır [25].

3.2.2 p-konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

$f:\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ integrallenebilir p-konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ ve $\alpha < \beta$ için

$$\begin{aligned} 2^{\frac{1}{p}-1} f\left(\frac{\alpha + \beta}{2^{\frac{1}{p}}}\right) (\beta - \alpha) &\leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \\ &\leq \frac{1}{2p} \left\{ p[\beta f(\beta) + \alpha f(\alpha)] + [\beta(\alpha) + \alpha f(\beta)] B\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right) \right\} \end{aligned} \quad (3.10)$$

eşitsizliği sağlanır [32].

3.2.3 Üçüncü anlamda s-konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

$U \subseteq \mathbb{R}_+$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}_+$ integrallenebilir ve üçüncü anlamda s-konveks fonksiyon olsun. $\alpha, \beta \in U$ ve $\alpha < \beta$ için,

$$\begin{aligned} 2^{\frac{1}{s^2}-1} f\left(\frac{\alpha+\beta}{2^{\frac{1}{s}}}\right)(\beta-\alpha) &\leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \\ &\leq \frac{1}{s+1} \left(\frac{1}{s} [f(\alpha)\beta + f(\beta)\alpha] B\left(\frac{1}{s^2}, \frac{1}{s}\right) + s [f(\beta)\beta + f(\alpha)\alpha] \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

eşitsizliği sağlanır [33].

3.3 Hermite-Hadamard-Fejer Eşitsizliği

Bir $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı konveks fonksiyon ve $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ise negatif olmayan, integrallenebilir ve $\frac{\alpha+\beta}{2}$ noktasına göre simetrik bir fonksiyon olmak üzere,

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) g(x) dx \leq \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx \quad (3.12)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik Hermite-Hadamard-Fejer Eşitsizliği olarak isimlendirilir [14].

Bu eşitsizlik farklı anlamlardaki konveks fonksiyonlar için de çalışılmıştır. Bunlardan bazıları aşağıdaki gibi verilebilir.

3.3.1 p-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliği

$f : I \subset (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ p-konveks fonksiyon ve $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\alpha, \beta \in I$ ve $\alpha < \beta$ olmak üzere eğer $f \in L[\alpha, \beta]$ ve $w : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan integrallenebilir ve

$\left[\frac{\alpha^p + \beta^p}{2} \right]^{\frac{1}{p}}$ noktasına göre p-simetrik ise bu durumda

$$f \left(\left[\frac{\alpha^p + \beta^p}{2} \right]^{\frac{1}{p}} \right) \int_{\alpha}^{\beta} \frac{w(x)}{x^{1-p}} dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x)w(x)}{x^{1-p}} dx \leq \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{w(x)}{x^{1-p}} dx \quad (3.13)$$

p-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliği sağlanır [36].

Ayrıca belirtilmesi gerekir ki, bu teoremden kullanılan p-konvekslik kavramı tezde verdiğimiz tanımdan farklıdır. Literatürde de pek çok p-konveks fonksiyon tanımı mevcuttur. (3.13) eşitsizliği için verilen p-konvekslik tanımı [36]'de ifade edilmektedir.

3.3.2 Dördüncü anlamda s-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliği

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilir fonksiyonlar, f fonksiyonu dördüncü anlamda s-konveks fonksiyon ve w negatif olmayan, $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$, 'ye göre simetrik yani $w(x) = w(\alpha + \beta - x)$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $\alpha < \beta$ için

$$\begin{aligned} \frac{2^{\frac{1}{s}-1}}{\beta - \alpha} f \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \int_{\alpha}^{\beta} w(x) dx &\leq \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) w(x) dx \\ &\leq \frac{1}{(\beta - \alpha)^{1+\frac{1}{s}}} \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \left[(\beta - x)^{\frac{1}{s}} + (x - \alpha)^{\frac{1}{s}} \right] w(x) dx \end{aligned} \quad (3.14)$$

dördüncü anlamda s-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliği sağlanır [51].

4. B-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMİTE-HADAMARD-FEJER TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde, Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliğinin B-konveks fonksiyonlar için formu ve bu temel eşitsizliğin farklı durumlardaki versiyonlarını içeren teoremler ispat edilecektir. Ayrıca daha sonra bu eşitsizliklere uygun özel durumlar incelenecektir.

4.1 B-konveks Fonksiyon İçin Hermite-Hadamard-Fejer Eşitsizliği

Teorem 4.1 $f : [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu B-konveks bir fonksiyon ve $g : [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ tanımlı negatif olmayan, integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)g(t)dt \leq \begin{cases} f(\alpha) \int_{\alpha}^{\beta} g(t)dt, & 1 \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} \\ f(\alpha) \int_{\alpha}^{\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)}} g(t)dt + \frac{f(\beta)}{\beta} \int_{\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)}}^{\beta} t g(t)dt, & 0 \leq \frac{\alpha}{\beta} \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} < 1 \\ \frac{g(\alpha)[\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)]^2}{2\beta f(\beta)} + \frac{f(\beta)}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} t g(t)dt, & 0 \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} < \frac{\alpha}{\beta} \leq 1 \end{cases}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $\forall \lambda \in [0, 1]$ ve $\alpha \leq \beta$ için $\max\{\lambda\alpha, \beta\} = \beta$ olur. B-konvekslik tanımından

$$f(\lambda\alpha \vee \beta) = f(\beta) \leq \lambda f(\alpha) \vee f(\beta) \quad (4.1)$$

aşikâr durumuna dönüşür. Dolayısıyla bu durumu incelemeye gerek yoktur. Bu sebeple $\max\{\alpha, \lambda\beta\}$ durumunu incelenecektir. f fonksiyonu B-konveks olduğundan (2.20) eşitsizliği sağlanır, eşitsizliğin her iki tarafı $g(\alpha \vee \lambda\beta)$ ile çarpılıp $\lambda \in [0, 1]$ ya göre integrallendiğinde sol kısım için

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(\alpha \vee \lambda\beta)g(\alpha \vee \lambda\beta)d\lambda &= \int_0^{\frac{\alpha}{\beta}} f(\alpha \vee \lambda\beta)g(\alpha \vee \lambda\beta)d\lambda \\
&+ \int_{\frac{\alpha}{\beta}}^1 f(\alpha \vee \lambda\beta)g(\alpha \vee \lambda\beta)d\lambda \\
&= \int_0^{\frac{\alpha}{\beta}} f(\alpha)g(\alpha)d\lambda + \int_{\frac{\alpha}{\beta}}^1 f(\lambda\beta)g(\lambda\beta)d\lambda
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Burada $\lambda\beta = t$ dönüşümü yapılırsa

$$\int_0^1 f(\alpha \vee \lambda\beta)g(\alpha \vee \lambda\beta)d\lambda = \frac{\alpha}{\beta} f(\alpha)g(\alpha) + \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} f(t)g(t)dt \quad (4.2)$$

olur. Ayrıca eşitsizliğin sağ tarafı için

$$\int_0^1 f(\alpha \vee \lambda\beta)g(\alpha \vee \lambda\beta)d\lambda \leq \int_0^1 (f(\alpha) \vee \lambda f(\beta))g(\alpha \vee \lambda\beta)d\lambda \quad (4.3)$$

ifadesinin sağ kısmı incelenecektir. Bu durumda aşağıdaki koşullar karşımıza çıkar.

$$1 \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} \text{ ise}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 (f(\alpha) \vee \lambda f(\beta))g(\alpha \vee \lambda\beta)d\lambda \\
&= f(\alpha) \int_0^1 g(\alpha \vee \lambda\beta)d\lambda \\
&= f(\alpha) \left(\int_0^{\frac{\alpha}{\beta}} g(\alpha \vee \lambda\beta)d\lambda + \int_{\frac{\alpha}{\beta}}^1 g(\alpha \vee \lambda\beta)d\lambda \right) \\
&= \frac{\alpha}{\beta} f(\alpha)g(\alpha) + \frac{f(\alpha)}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} g(t)dt \quad (4.4)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan eşitsizlik

$$\frac{\alpha}{\beta} f(\alpha)g(\alpha) + \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} f(t)g(t)dt \leq \frac{\alpha}{\beta} f(\alpha)g(\alpha) + \frac{f(\alpha)}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} g(t)dt$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)g(t)dt \leq f(\alpha) \int_{\alpha}^{\beta} g(t)dt \quad (4.5)$$

şekline dönüşür.

Eğer $\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} < 1$ ise

$$\begin{aligned} \int_0^1 (f(\alpha) \vee \lambda f(\beta))g(\alpha \vee \lambda\beta) d\lambda &= \int_0^{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}} (f(\alpha) \vee \lambda f(\beta))g(\alpha \vee \lambda\beta) d\lambda \\ &+ \int_{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}}^1 (f(\alpha) \vee \lambda f(\beta))g(\alpha \vee \lambda\beta) d\lambda \\ &= \int_0^{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}} f(\alpha)g(\alpha \vee \lambda\beta) d\lambda \\ &+ \int_{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}}^1 \lambda f(\beta)g(\alpha \vee \lambda\beta) d\lambda \end{aligned} \quad (4.6)$$

olur. Bu durumda aşağıdaki iki alt durum ortaya çıkar.

$$1) \quad 0 \leq \frac{\alpha}{\beta} \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} < 1 \text{ iken,}$$

$$\int_0^{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}} f(\alpha)g(\alpha \vee \lambda\beta) d\lambda + \int_{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}}^1 \lambda f(\beta)g(\alpha \vee \lambda\beta) d\lambda$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\alpha}{\beta}} f(\alpha) g(\alpha \vee \lambda \beta) d\lambda + \int_{\frac{\alpha}{\beta}}^{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}} f(\alpha) g(\alpha \vee \lambda \beta) d\lambda \\
&\quad + \int_{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}}^1 \lambda f(\beta) g(\lambda \beta) d\lambda \\
&= \frac{\alpha}{\beta} f(\alpha) g(\alpha) + f(\alpha) \int_{\frac{\alpha}{\beta}}^{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}} g(\lambda \beta) d\lambda + \int_{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}}^1 \lambda f(\beta) g(\lambda \beta) d\lambda \\
&= \frac{\alpha}{\beta} f(\alpha) g(\alpha) + \frac{f(\alpha)}{\beta} \int_{\alpha}^{\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)}} g(t) dt + \frac{f(\beta)}{\beta^2} \int_{\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)}}^{\beta} t g(t) dt \quad (4.7)
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{\beta} f(\alpha) g(\alpha) + \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} f(t) g(t) dt &\leq \frac{\alpha}{\beta} f(\alpha) g(\alpha) + \frac{f(\alpha)}{\beta} \int_{\alpha}^{\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)}} g(t) dt \\
&\quad + \frac{f(\beta)}{\beta^2} \int_{\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)}}^{\beta} t g(t) dt \\
\int_{\alpha}^{\beta} f(t) g(t) dt &\leq f(\alpha) \int_{\alpha}^{\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)}} g(t) dt + \frac{f(\beta)}{\beta^2} \int_{\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)}}^{\beta} t g(t) dt \quad (4.8)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

$$2) \quad 0 \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} < \frac{\alpha}{\beta} \leq 1 \text{ ise}$$

$$\int_0^{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}} f(\alpha) g(\alpha \vee \lambda \beta) d\lambda + \int_{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}}^1 \lambda f(\beta) g(\alpha \vee \lambda \beta) d\lambda$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}} f(\alpha) g(\alpha) d\lambda + \int_{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}}^{\frac{\alpha}{\beta}} \lambda f(\beta) g(\alpha \vee \lambda \beta) d\lambda \\
&\quad + \int_{\frac{\alpha}{\beta}}^1 \lambda f(\beta) g(\alpha \vee \lambda \beta) d\lambda \\
&= f(\alpha) g(\alpha) \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} + \int_{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}}^{\frac{\alpha}{\beta}} \lambda f(\beta) g(\alpha) d\lambda + \int_{\frac{\alpha}{\beta}}^1 \lambda f(\alpha) g(\lambda \beta) d\lambda \\
&= \frac{[f(\alpha)]^2 g(\alpha)}{f(\beta)} + \frac{f(\beta) g(\alpha)}{2} \left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} - \frac{[f(\alpha)]^2}{[f(\beta)]^2} \right) \\
&\quad + \frac{f(\beta)}{\beta^2} \int_{\alpha}^{\beta} t g(t) dt
\end{aligned} \tag{4.9}$$

ifadesi elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{\beta} f(\alpha) g(\alpha) + \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} f(t) g(t) dt &\leq \frac{[f(\alpha)]^2 g(\alpha)}{f(\beta)} + \frac{f(\beta) g(\alpha)}{2} \left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} - \frac{[f(\alpha)]^2}{[f(\beta)]^2} \right) \\
&\quad + \frac{f(\beta)}{\beta^2} \int_{\alpha}^{\beta} t g(t) dt \\
\int_{\alpha}^{\beta} f(t) g(t) dt &\leq \frac{g(\alpha) [\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)]^2}{2\beta f(\beta)} \\
&\quad + \frac{f(\beta)}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} t g(t) dt
\end{aligned} \tag{4.10}$$

ifadesi elde edilir. Bu durumda B-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliği ispatlanmış olur.

Teorem 4.2 $f : [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu B-konveks fonksiyon ve $g : [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu da B-konveks bir fonksiyon olmak üzere

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)g(t)dt \leq \begin{cases} (\beta - \alpha) f(\alpha) g(\alpha), & 1 \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)}, 1 \leq \frac{g(\alpha)}{g(\beta)} \\ \frac{\beta f(\alpha) \left([g(\alpha)]^2 + [g(\beta)]^2 - 2\alpha g(\alpha) g(\beta) \right)}{2g(\beta)}, & \frac{g(\alpha)}{g(\beta)} < 1 \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} \\ \frac{g(\alpha) \left(\beta [f(\alpha)]^2 + \beta [f(\beta)]^2 - 2\alpha f(\alpha) f(\beta) \right)}{2f(\beta)}, & \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} < 1 \leq \frac{g(\alpha)}{g(\beta)} \\ \frac{3f(\alpha)g(\alpha)[g(\beta)]^2(\beta f(\alpha) - 2\alpha f(\beta))}{6[g(\beta)]^2 f(\beta)} + \\ + \frac{\beta [f(\beta)]^2 ([g(\alpha)]^3 + 2[g(\beta)]^3)}{6[g(\beta)]^2 f(\beta)}, & 0 \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} < \frac{g(\alpha)}{g(\beta)} < 1 \\ \frac{3f(\alpha)g(\alpha)[f(\beta)]^2(\beta g(\alpha) - 2\alpha g(\beta))}{6[f(\beta)]^2 g(\beta)} + \\ + \frac{\beta [g(\beta)]^2 ([f(\alpha)]^3 + 2[f(\beta)]^3)}{6[f(\beta)]^2 g(\beta)}, & 0 \leq \frac{g(\alpha)}{g(\beta)} \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} < 1 \end{cases}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: f ve g fonksiyonları B-konveks fonksiyon olduğundan (2.20) eşitsizliğini sağlarlar, f fonksiyonu için geçerli (2.20) eşitsizliğinin her iki tarafı $g(\alpha \vee \lambda\beta)$ ile çarpılıp $\lambda \in [0,1]$ ya göre integrallendiğinde sol kısım için

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(\alpha \vee \lambda\beta)g(\alpha \vee \lambda\beta)d\lambda &= \int_0^{\frac{\alpha}{\beta}} f(\alpha)g(\alpha)d\lambda + \int_{\frac{\alpha}{\beta}}^1 f(\lambda\beta)g(\lambda\beta)d\lambda \\ &= \frac{\alpha}{\beta} f(\alpha)g(\alpha) + \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} f(t)g(t)dt \end{aligned} \quad (4.11)$$

olur. Ayrıca eşitsizliğin sağ tarafı için

$$\int_0^1 f(\alpha \vee \lambda \beta) g(\alpha \vee \lambda \beta) d\lambda \leq \int_0^1 (f(\alpha) \vee \lambda f(\beta))(g(\alpha) \vee \lambda g(\beta)) d\lambda \quad (4.12)$$

ifadesinin sağ kısmı incelenecektir. Buna göre aşağıdaki durumlar söz konusudur.

1) $f(\beta) \leq f(\alpha)$ olması durumunda;

i) $1 \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)}$ ve $1 \leq \frac{g(\alpha)}{g(\beta)}$ ise

$$\begin{aligned} \int_0^1 (f(\alpha) \vee \lambda f(\beta))(g(\alpha) \vee \lambda g(\beta)) d\lambda &= \int_0^1 f(\alpha) g(\alpha) d\lambda \\ &= f(\alpha) g(\alpha) \end{aligned} \quad (4.13)$$

ifadesi elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\beta} f(\alpha) g(\alpha) + \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} f(t) g(t) dt &\leq f(\alpha) g(\alpha) \\ \int_{\alpha}^{\beta} f(t) g(t) dt &\leq (\beta - \alpha) f(\alpha) g(\alpha) \end{aligned} \quad (4.14)$$

eşitsizliği elde edilir.

ii) $\frac{g(\alpha)}{g(\beta)} < 1 \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)}$ olsun

$$\begin{aligned} &\int_0^1 (f(\alpha) \vee \lambda f(\beta))(g(\alpha) \vee \lambda g(\beta)) d\lambda \\ &= \int_0^{\frac{g(\alpha)}{g(\beta)}} f(\alpha) g(\alpha) d\lambda + \int_{\frac{g(\alpha)}{g(\beta)}}^1 f(\alpha) \lambda g(\beta) d\lambda \\ &= f(\alpha) g(\alpha) \frac{g(\alpha)}{g(\beta)} + \frac{f(\alpha) g(\beta)}{2} - \frac{f(\alpha) g(\beta)}{2} \left[\frac{g(\alpha)}{g(\beta)} \right]^2 \\ &= \frac{f(\alpha) ([g(\alpha)]^2 + [g(\beta)]^2)}{2g(\beta)} \end{aligned} \quad (4.15)$$

ifadesi elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\beta} f(\alpha) g(\alpha) + \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} f(t) g(t) dt &\leq \frac{f(\alpha) \left([g(\alpha)]^2 + [g(\beta)]^2 \right)}{2g(\beta)} \\ \int_{\alpha}^{\beta} f(t) g(t) dt &\leq \frac{\beta f(\alpha) \left(\left([g(\alpha)]^2 + [g(\beta)]^2 \right) - 2\alpha g(\alpha) g(\beta) \right)}{2g(\beta)} \end{aligned} \quad (4.16)$$

eşitsizliği elde edilir.

2) $f(\alpha) < f(\beta)$ olması durumunda ise;

i) $\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} < 1 \leq \frac{g(\alpha)}{g(\beta)}$ ise,

$$\begin{aligned} &\int_0^1 (f(\alpha) \vee \lambda f(\beta)) (g(\alpha) \vee \lambda g(\beta)) d\lambda \\ &= \int_0^{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}} f(\alpha) g(\alpha) d\lambda + \int_{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}}^1 \lambda f(\beta) g(\alpha) d\lambda \\ &= f(\alpha) g(\alpha) \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} + \frac{f(\beta) g(\alpha)}{2} \left(1 - \left[\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} \right]^2 \right) \\ &= \frac{g(\alpha) \left([f(\alpha)]^2 + [f(\beta)]^2 \right)}{2f(\beta)} \end{aligned} \quad (4.17)$$

ifadesi elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\beta} f(\alpha) g(\alpha) + \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} f(t) g(t) dt &\leq \frac{g(\alpha) \left([f(\alpha)]^2 + [f(\beta)]^2 \right)}{2f(\beta)} \\ \int_{\alpha}^{\beta} f(t) g(t) dt &\leq \frac{g(\alpha) \left(\beta [f(\alpha)]^2 + \beta [f(\beta)]^2 - 2\alpha f(\alpha) f(\beta) \right)}{2f(\beta)} \end{aligned} \quad (4.18)$$

eşitsizliği elde edilir.

ii) $\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} < 1$ ve $\frac{g(\alpha)}{g(\beta)} < 1$ için aşağıdaki iki durum söz konusu olur;

a) $0 \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} < \frac{g(\alpha)}{g(\beta)} < 1$ ise,

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 (f(\alpha) \vee \lambda f(\beta))(g(\alpha) \vee \lambda g(\beta)) d\lambda \\
&= \int_0^{\frac{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}}{\frac{g(\alpha)}{g(\beta)}}} f(\alpha) g(\alpha) d\lambda + \int_{\frac{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}}{\frac{g(\alpha)}{g(\beta)}}}^{\frac{g(\alpha)}{g(\beta)}} \lambda f(\beta) g(\alpha) d\lambda + \int_{\frac{g(\alpha)}{g(\beta)}}^1 \lambda f(\beta) \lambda g(\beta) d\lambda \\
&= f(\alpha) g(\alpha) \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} + \frac{f(\alpha) g(\alpha)}{2} \left(\left[\frac{g(\alpha)}{g(\beta)} \right]^2 - \left[\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} \right]^2 \right) \\
&\quad + \frac{f(\beta) g(\beta)}{3} \left(1 - \left[\frac{g(\alpha)}{g(\beta)} \right]^3 \right) \\
&= \frac{3[f(\alpha)g(\beta)]^2 g(\alpha) + [f(\beta)]^2 ([g(\alpha)]^3 + 2[g(\beta)]^3)}{6f(\beta)[g(\beta)]^2} \tag{4.19}
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{\beta} f(\alpha) g(\alpha) + \int_{\alpha}^{\beta} f(t) g(t) dt &\leq \frac{3[f(\alpha)g(\beta)]^2 g(\alpha)}{6f(\beta)[g(\beta)]^2} \\
&\quad + \frac{[f(\beta)]^2 ([g(\alpha)]^3 + 2[g(\beta)]^3)}{6f(\beta)[g(\beta)]^2} \\
\int_{\alpha}^{\beta} f(t) g(t) dt &\leq \frac{3f(\alpha)g(\alpha)[g(\beta)]^2 (\beta f(\alpha) - 2\alpha f(\beta))}{6[g(\beta)]^2 f(\beta)} \\
&\quad + \frac{[f(\beta)]^2 (\beta[g(\alpha)]^3 + 2[g(\beta)]^3)}{6[g(\beta)]^2 f(\beta)} \tag{4.20}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

$$\text{b) } 0 \leq \frac{g(\alpha)}{g(\beta)} \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} < 1 \text{ olduğunda ise}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (f(\alpha) \vee \lambda f(\beta))(g(\alpha) \vee \lambda g(\beta)) d\lambda \\ &= \int_0^{\frac{g(\alpha)}{g(\beta)}} f(\alpha) g(\alpha) d\lambda + \int_{\frac{g(\alpha)}{g(\beta)}}^{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}} f(\alpha) \lambda g(\beta) d\lambda \\ & \quad + \int_{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}}^1 \lambda f(\beta) \lambda g(\beta) d\lambda \\ &= f(\alpha) g(\alpha) \frac{g(\alpha)}{g(\beta)} + \frac{g(\beta) f(\beta)}{2} \left(\left[\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} \right]^2 - \left[\frac{g(\alpha)}{g(\beta)} \right]^2 \right) \\ & \quad + \frac{f(\beta) g(\beta)}{3} \left(1 - \left[\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} \right]^3 \right) \\ &= \frac{3f(\alpha) [f(\beta) g(\alpha)]^2 + [g(\beta)]^2 ([f(\alpha)]^3 + 2[f(\beta)]^3)}{6[f(\beta)]^2 g(\beta)} \quad (4.21) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\beta} f(\alpha) g(\alpha) + \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} f(t) g(t) dt &\leq \frac{[g(\beta)]^2 ([f(\alpha)]^3 + 2[f(\beta)]^3)}{6[f(\beta)]^2 g(\beta)} \\ & \quad + \frac{3f(\alpha) [f(\beta) g(\alpha)]^2}{6[f(\beta)]^2 g(\beta)} \\ \int_{\alpha}^{\beta} f(t) g(t) dt &\leq \frac{3f(\alpha) g(\alpha) [f(\beta)]^2 (\beta g(\alpha) - 2\alpha g(\beta))}{6[g(\beta)]^2 f(\beta)} \\ & \quad + \frac{\beta [g(\beta)]^2 ([f(\alpha)]^3 + 2[f(\beta)]^3)}{6[g(\beta)]^2 f(\beta)} \quad (4.22) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3 $f : [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu B-konveks fonksiyon, $g : [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu da türevlenebilir ve aynı zamanda integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)g'(t)dt \leq \begin{cases} f(\alpha)(g(\alpha) - g(\beta)), & 1 \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} \\ f(\alpha) \left(g\left(\frac{\beta f(\alpha)}{g(\beta)}\right) - g(\beta) \right) + \\ \frac{f(\beta)}{\beta} \left(\frac{g(\beta)f(\beta) - \beta g(\alpha)g\left(\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)}\right)}{f(\beta)} - \int_{\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)}}^{\beta} g(t)dt \right), & 0 \leq \frac{\alpha}{\beta} \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} < 1 \\ \frac{\beta [f(\alpha)]^2 g'(\alpha)}{f(\beta)} + \frac{\beta f(\beta)g'(\alpha)}{2} \left(\left[\frac{\alpha}{\beta}\right]^2 - \left[\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}\right]^2 \right) + \\ \frac{f(\beta)}{\beta} \left(\frac{g(\beta)f(\beta) - \beta g(\alpha)g\left(\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)}\right)}{f(\beta)} - \int_{\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)}}^{\beta} g(t)dt \right), & 0 \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} < \frac{\alpha}{\beta} < 1 \end{cases}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: f fonksiyonu B-konveks fonksiyon olduğundan (2.20) eşitsizliği sağlanır, eşitsizliğin her iki tarafı $g'(\alpha \vee \lambda\beta)$ ile çarpılıp $\lambda \in [0,1]$ göre integrallendiğinde sol kısım için aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(\alpha \vee \lambda\beta)g'(\alpha \vee \lambda\beta)d\lambda &= \int_0^{\frac{\alpha}{\beta}} f(\alpha)g'(\alpha)d\lambda + \int_{\frac{\alpha}{\beta}}^1 f(\lambda\beta)g'(\lambda\beta)d\lambda \\ &= \frac{\alpha}{\beta} f(\alpha)g'(\alpha) + \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} f(t)g'(t)dt \end{aligned} \quad (4.23)$$

Ayrıca eşitsizliğin sağ tarafı için

$$\int_0^1 f(\alpha \vee \lambda \beta) g'(\alpha \vee \lambda \beta) d\lambda \leq \int_0^1 (f(\alpha) \vee \lambda f(\beta)) g'(\alpha \vee \lambda \beta) d\lambda \quad (4.24)$$

ifadesinin sağ tarafı incelenecektir. Bu durumda aşağıdaki iki koşul karşımıza çıkar;

$$1) \quad 1 \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} \text{ ise,}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(\alpha \vee \lambda \beta) g'(\alpha \vee \lambda \beta) d\lambda &= f(\alpha) \left(\int_0^{\frac{\alpha}{\beta}} g'(\alpha) d\lambda + \int_{\frac{\alpha}{\beta}}^1 g'(\lambda \beta) d\lambda \right) \\ &= \frac{\alpha}{\beta} f(\alpha) g'(\alpha) + \frac{f(\alpha)}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} g'(t) dt \\ &= \frac{\alpha}{\beta} f(\alpha) g'(\alpha) + \frac{f(\alpha)}{\beta} (g(\beta) - g(\alpha)) \end{aligned} \quad (4.25)$$

ifadesi elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\beta} f(\alpha) g'(\alpha) + \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} f(t) g'(t) dt &\leq \frac{\alpha}{\beta} f(\alpha) g'(\alpha) + \frac{f(\alpha)}{\beta} (g(\beta) - g(\alpha)) \\ \int_{\alpha}^{\beta} f(t) g'(t) dt &\leq f(\alpha) (g(\beta) - g(\alpha)) \end{aligned} \quad (4.26)$$

eşitsizliği elde edilir.

$$2) \quad \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} < 1 \text{ ise}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(\alpha \vee \lambda \beta) g'(\alpha \vee \lambda \beta) d\lambda &= \int_0^{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}} f(\alpha) g'(\alpha \vee \lambda \beta) d\lambda \\ &\quad + \int_{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}}^1 \lambda f(\beta) g'(\alpha \vee \lambda \beta) d\lambda \end{aligned} \quad (4.27)$$

eşitliği elde edilir ve bu şart altında aşağıdaki koşullar ortaya çıkar.

i) $0 \leq \frac{\alpha}{\beta} \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} < 1$ oluyorsa,

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}} f(\alpha) g'(\alpha \vee \lambda \beta) d\lambda + \int_{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}}^1 \lambda f(\beta) g'(\alpha \vee \lambda \beta) d\lambda \\
&= \int_0^{\frac{\alpha}{\beta}} f(\alpha) g'(\alpha) d\lambda + \int_{\frac{\alpha}{\beta}}^{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}} f(\alpha) g'(\lambda \beta) d\lambda \\
&\quad + \int_{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}}^1 \lambda f(\beta) g'(\lambda \beta) d\lambda \\
&= \frac{\alpha}{\beta} f(\alpha) g'(\alpha) + \frac{f(\alpha)}{\beta} \left(g\left(\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)}\right) - g(\alpha) \right) \\
&\quad + \frac{f(\beta)}{\beta^2} \left(\frac{f(\beta) g(\beta) - \beta f(\alpha) g\left(\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)}\right)}{f(\beta)} - \int_{\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)}}^{\beta} g(t) dt \right) \quad (4.28)
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha}{\beta} f(\alpha) g'(\alpha) + \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} f(t) g'(t) dt \\
&\leq \frac{\alpha}{\beta} f(\alpha) g'(\alpha) + \frac{f(\alpha)}{\beta} \left(g\left(\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)}\right) - g(\alpha) \right) \\
&\quad + \frac{f(\beta)}{\beta^2} \left(\frac{f(\beta) g(\beta) - \beta f(\alpha) g\left(\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)}\right)}{f(\beta)} - \int_{\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)}}^{\beta} g(t) dt \right) \\
&\int_{\alpha}^{\beta} f(t) g'(t) dt \leq f(\alpha) \left(g\left(\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)}\right) - g(\alpha) \right) \\
&\quad + \frac{f(\beta)}{\beta} \left(\frac{f(\beta) g(\beta) - \beta f(\alpha) g\left(\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)}\right)}{f(\beta)} - \int_{\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)}}^{\beta} g(t) dt \right) \quad (4.29)
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

$$\text{ii)} \quad 0 \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} < \frac{\alpha}{\beta} < 1 \text{ ise}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}} (f(\alpha))g'(\alpha \vee \lambda\beta) d\lambda + \int_{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}}^1 \lambda f(\beta)g'(\alpha \vee \lambda\beta) d\lambda \\ &= \int_0^{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}} f(\alpha)g'(\alpha) d\lambda + \int_{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}}^{\frac{\alpha}{\beta}} \lambda f(\beta)g'(\alpha) d\lambda \\ & \quad + \int_{\frac{\alpha}{\beta}}^1 \lambda f(\beta)g'(\lambda\beta) d\lambda \\ &= f(\alpha)g'(\alpha) \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} + \frac{f(\beta)g'(\alpha)}{2} \left(\left[\frac{\alpha}{\beta} \right]^2 - \left[\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} \right]^2 \right) \\ & \quad + \frac{f(\beta)}{\beta^2} \left(\frac{f(\beta)g(\beta) - \beta f(\alpha)g\left(\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)}\right)}{f(\beta)} - \int_{\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)}}^{\beta} g(t) dt \right) \quad (4.30) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{\beta} f(\alpha)g'(\alpha) + \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} f(t)g'(t) dt \\ & \leq f(\alpha)g'(\alpha) \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} + \frac{f(\beta)g'(\alpha)}{2} \left(\left[\frac{\alpha}{\beta} \right]^2 - \left[\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} \right]^2 \right) \\ & \quad + \frac{f(\beta)}{\beta^2} \left(\frac{f(\beta)g(\beta) - \beta f(\alpha)g\left(\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)}\right)}{f(\beta)} - \int_{\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)}}^{\beta} g(t) dt \right) \\ & \int_{\alpha}^{\beta} f(t)g'(t) dt \leq f(\alpha)g'(\alpha) \left(\frac{\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)}{f(\beta)} \right) \\ & \quad + \frac{\beta f(\beta)g'(\alpha)}{2} \left(\left[\frac{\alpha}{\beta} \right]^2 - \left[\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} \right]^2 \right) \end{aligned}$$

$$+ \frac{f(\beta)}{\beta} \left(\frac{f(\beta)g(\beta) - \beta f(\alpha)g\left(\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)}\right)}{f(\beta)} - \int_{\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)}}^{\beta} g(t) dt \right) \quad (4.31)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.4 $f : [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu B-konveks fonksiyon, $g : [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ türevlenebilir ve türevi B-konveks bir fonksiyon ve integrallenebilir ise

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)g'(t)dt \leq \begin{cases} (\beta - \alpha)f(\alpha)g'(\alpha), & 1 \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)}, 1 \leq \frac{g'(\alpha)}{g'(\beta)} \\ \frac{f(\alpha)\left(\beta[g'(\alpha)]^2 + \beta[g'(\beta)]^2 - 2\alpha g'(\alpha)g'(\beta)\right)}{2g'(\beta)}, & \frac{g'(\alpha)}{g'(\beta)} < 1 \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} \\ \frac{g'(\alpha)\left(\beta[f(\alpha)]^2 + \beta[f(\beta)]^2 - 2\alpha f(\alpha)f(\beta)\right)}{2f(\beta)}, & \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} < 1 \leq \frac{g'(\alpha)}{g'(\beta)} \\ \frac{3f(\alpha)g'(\alpha)[g'(\beta)]^2(\beta f(\alpha) - 2\alpha f(\beta))}{6[g'(\beta)]^2 f(\beta)} + \\ \frac{\beta[f(\beta)]^2([g'(\alpha)]^3 + 2[g'(\beta)]^3)}{6[g'(\beta)]^2 f(\beta)}, & 0 \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} < \frac{g'(\alpha)}{g'(\beta)} < 1 \\ \frac{3f(\alpha)g'(\alpha)[f(\beta)]^2(\beta g'(\alpha) - 2\alpha g'(\beta))}{6[f(\beta)]^2 g'(\beta)} + \\ \frac{\beta[g'(\beta)]^2([f(\alpha)]^3 + 2[f(\beta)]^3)}{6[f(\beta)]^2 g'(\beta)}, & 0 \leq \frac{g'(\alpha)}{g'(\beta)} \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} < 1 \end{cases}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: f ve g' fonksiyonları B-konveks olduğundan (2.20) eşitsizliğini sağlarlar, f için geçerli olan (2.20)'nin her iki tarafını $g'(\alpha \vee \lambda\beta)$ ile çarpıp $\lambda \in [0,1]$ 'ya göre integrallersek sol kısım için

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(\alpha \vee \lambda \beta) g'(\alpha \vee \lambda \beta) d\lambda &= \int_0^{\frac{\alpha}{\beta}} f(\alpha) g'(\alpha) d\lambda + \int_{\frac{\alpha}{\beta}}^1 f(\lambda \beta) g'(\lambda \beta) d\lambda \\
&= \frac{\alpha}{\beta} f(\alpha) g'(\alpha) + \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} f(t) g'(t) dt \quad (4.32)
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca eşitsizliğin sağ tarafı için

$$\int_0^1 f(\alpha \vee \lambda \beta) g'(\alpha \vee \lambda \beta) d\lambda \leq \int_0^1 (f(\alpha) \vee \lambda f(\beta))(g'(\alpha) \vee \lambda g'(\beta)) d\lambda \quad (4.33)$$

ifadesinin sağ kısmı incelenecektir. Bu durum altında aşağıdaki koşullar ortaya çıkar.

$f(\beta) \leq f(\alpha)$ için aşağıdaki iki koşul ortaya çıkar.

$$1) \quad 1 \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} \text{ ve } 1 \leq \frac{g'(\alpha)}{g'(\beta)} \text{ ise}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (f(\alpha) \vee \lambda f(\beta))(g'(\alpha) \vee \lambda g'(\beta)) d\lambda &= \int_0^1 f(\alpha) g'(\alpha) d\lambda \\
&= f(\alpha) g'(\alpha) \quad (4.34)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{\beta} f(\alpha) g'(\alpha) + \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} f(t) g'(t) dt &\leq f(\alpha) g'(\alpha) \\
\int_{\alpha}^{\beta} f(t) g'(t) dt &\leq (\beta - \alpha) f(\alpha) g'(\alpha) \quad (4.35)
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

$$2) \frac{g'(\alpha)}{g'(\beta)} < 1 \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} \text{ ise}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 (f(\alpha) \vee \lambda f(\beta))(g'(\alpha) \vee \lambda g'(\beta)) d\lambda \\
&= \int_0^{\frac{g'(\alpha)}{g'(\beta)}} f(\alpha) g'(\alpha) d\lambda + \int_{\frac{g'(\alpha)}{g'(\beta)}}^1 f(\alpha) \lambda g'(\beta) d\lambda \\
&= f(\alpha) g'(\alpha) \frac{g'(\alpha)}{g'(\beta)} + \frac{f(\alpha) g'(\beta)}{2} \\
&\quad - \frac{f(\alpha) g'(\beta)}{2} \left[\frac{g'(\alpha)}{g'(\beta)} \right]^2 \\
&= \frac{f(\alpha) \left([g'(\alpha)]^2 + [g'(\beta)]^2 \right)}{2g'(\beta)} \tag{4.36}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha}{\beta} f(\alpha) g'(\alpha) + \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} f(t) g'(t) dt \leq \frac{f(\alpha) \left([g'(\alpha)]^2 + [g'(\beta)]^2 \right)}{2g'(\beta)} \\
& \int_{\alpha}^{\beta} f(t) g'(t) dt \leq \frac{f(\alpha) \left(\beta [g'(\alpha)]^2 + \beta [g'(\beta)]^2 - 2\alpha g'(\alpha) g'(\beta) \right)}{2g'(\beta)} \tag{4.37}
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

$f(\alpha) < f(\beta)$ için aşağıdaki iki durumu ortaya çıkar.

$$1) \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} < 1 \leq \frac{g'(\alpha)}{g'(\beta)} \text{ ise}$$

$$\int_0^1 (f(\alpha) \vee \lambda f(\beta))(g'(\alpha) \vee \lambda g'(\beta)) d\lambda$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}} f(\alpha) g'(\alpha) d\lambda + \int_{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}}^1 \lambda f(\beta) g'(\alpha) d\lambda \\
&= f(\alpha) g'(\alpha) \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} + \frac{f(\beta) g'(\alpha)}{2} \left(1 - \left[\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} \right]^2 \right) \\
&= \frac{g'(\alpha) \left([f(\alpha)]^2 + [f(\beta)]^2 \right)}{2 f(\beta)} \tag{4.38}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha}{\beta} f(\alpha) g'(\alpha) + \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} f(t) g'(t) dt \leq \frac{g'(\alpha) \left([f(\alpha)]^2 + [f(\beta)]^2 \right)}{2 f(\beta)} \\
&\int_{\alpha}^{\beta} f(t) g'(t) dt \leq \frac{g'(\alpha) \left(\beta [f(\alpha)]^2 + \beta [f(\beta)]^2 - 2\alpha f(\alpha) f(\beta) \right)}{2 f(\beta)} \tag{4.39}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

2) $\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} < 1$ ve $\frac{g'(\alpha)}{g'(\beta)} < 1$ ise bu durum altında aşağıdaki iki koşul ortaya çıkar.

i) $0 \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} < \frac{g'(\alpha)}{g'(\beta)} < 1$ ise

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 (f(\alpha) \vee \lambda f(\beta)) (g'(\alpha) \vee \lambda g'(\beta)) d\lambda \\
&= \int_0^{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}} f(\alpha) g'(\alpha) d\lambda + \int_{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}}^{\frac{g'(\alpha)}{g'(\beta)}} \lambda f(\beta) g'(\alpha) d\lambda
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\frac{g'(\alpha)}{g'(\beta)}}^1 \lambda f(\beta) \lambda g'(\beta) d\lambda \\
& = f(\alpha) g'(\alpha) \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} + \frac{f(\alpha) g'(\alpha)}{2} \left(\left[\frac{g'(\alpha)}{g'(\beta)} \right]^2 - \left[\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} \right]^2 \right) \\
& \quad + \frac{f(\alpha) g'(\beta)}{3} \left(1 - \left[\frac{g'(\alpha)}{g'(\beta)} \right]^3 \right) \\
& = \frac{3 [f(\alpha) g'(\beta)]^2 g'(\alpha)}{6 f(\beta) [g'(\beta)]^2} \\
& \quad + \frac{f(\beta) \left([g'(\alpha)]^3 + 2 f(\beta) [g'(\beta)]^3 \right)}{6 f(\beta) [g'(\beta)]^2} \tag{4.40}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{\beta} f(\alpha) g'(\alpha) + \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} f(t) g'(t) dt & \leq \frac{3 [f(\alpha) g'(\beta)]^2 g'(\alpha)}{6 f(\beta) [g'(\beta)]^2} \\
& \quad + \frac{f(\beta) \left([g'(\alpha)]^3 + 2 f(\beta) [g'(\beta)]^3 \right)}{6 f(\beta) [g'(\beta)]^2} \\
\int_{\alpha}^{\beta} f(t) g'(t) dt & \leq \frac{3 f(\alpha) g'(\alpha) [g'(\beta)]^2 (\beta f(\alpha) - 2 \alpha f(\beta))}{6 f(\beta) [g'(\beta)]^2} \\
& \quad + \frac{\beta f(\beta) \left([g'(\alpha)]^3 + 2 f(\beta) [g'(\beta)]^3 \right)}{6 f(\beta) [g'(\beta)]^2} \tag{4.41}
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

$$\text{ii)} \quad 0 \leq \frac{g'(\alpha)}{g'(\beta)} \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} < 1 \text{ ise}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 (f(\alpha) \vee \lambda f(\beta))(g'(\alpha) \vee \lambda g'(\beta)) d\lambda \\
&= \int_0^{\frac{g'(\alpha)}{g'(\beta)}} f(\alpha) g'(\alpha) d\lambda + \int_{\frac{g'(\alpha)}{g'(\beta)}}^{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}} f(\alpha) \lambda g'(\beta) d\lambda \\
&\quad + \int_{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}}^1 \lambda f(\beta) \lambda g'(\beta) d\lambda \\
&= f(\alpha) g'(\alpha) \frac{g'(\alpha)}{g'(\beta)} + \frac{g'(\beta) f(\alpha)}{2} \left(\left[\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} \right]^2 - \left[\frac{g'(\alpha)}{g'(\beta)} \right]^2 \right) \\
&\quad + \frac{f(\beta) g'(\beta)}{3} \left(1 - \left[\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} \right]^3 \right) \\
&= \frac{3f(\alpha) [f(\beta) g'(\alpha)]^2 + [g'(\beta)]^2 ([f(\alpha)]^3 + 2[f(\beta)]^3)}{6[f(\beta)]^2 g'(\beta)} \quad (4.42)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha}{\beta} f(\alpha) g'(\alpha) + \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} f(t) g'(t) dt \leq \frac{3f(\alpha) [f(\beta) g'(\alpha)]^2}{6[f(\beta)]^2 g'(\beta)} \\
&\quad + \frac{[g'(\beta)]^2 ([f(\alpha)]^3 + 2[f(\beta)]^3)}{6[f(\beta)]^2 g'(\beta)} \\
& \int_{\alpha}^{\beta} f(t) g'(t) dt \leq \frac{3f(\alpha) g'(\alpha) [f(\beta)]^2 (\beta g'(\alpha) - 2\alpha g'(\beta))}{6[f(\beta)]^2 g'(\beta)} \\
&\quad + \frac{\beta [g'(\beta)]^2 ([f(\alpha)]^3 + 2[f(\beta)]^3)}{6[f(\beta)]^2 g'(\beta)} \quad (4.43)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu koşullar altında ispat tamamlanmış olur.

4.2 B-konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejer Tipi Eşitsizliklerin Uygulamaları

Bu bölümde B-konveks fonksiyonlar için geçerli olan Hermite-Hadamard-Fejer tipi eşitsizliğinin bazı uygulamaları verilecektir.

Sonuç 4.1 $f : [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu B-konveks fonksiyon olmak üzere, $g : [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $g(t) = \sqrt{t}$ negatif olmayan integrallenebilir fonksiyonu için

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{t} f(t) dt \leq \begin{cases} \frac{2(\sqrt{\beta^3} - \sqrt{\alpha^3}) f(\alpha)}{3}, & 1 \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} \\ \frac{2f(\alpha)}{3} \left(\sqrt{\left[\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)} \right]^3} - \sqrt{\alpha^3} \right) + \frac{2f(\beta)}{5\beta} \left(\sqrt{\beta^5} - \sqrt{\left[\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)} \right]^5} \right), & 0 \leq \frac{\alpha}{\beta} \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} < 1 \\ \frac{\beta \sqrt{\alpha} [f(\alpha)]^2}{2f(\beta)} - \frac{\sqrt{\alpha^3} f(\alpha)}{5\beta} + \frac{(\sqrt{\alpha^5} - \sqrt{\beta^5}) f(\beta)}{10\beta}, & 0 \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} < \frac{\alpha}{\beta} \leq 1 \end{cases}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: f fonksiyonu B-konveks fonksiyon olduğundan (2.20) eşitsizliği sağlanır, eşitsizliğin her iki tarafı $(\sqrt{\alpha \vee \lambda \beta})$ ile çarpılıp $\lambda \in [0, 1]$ göre integrallendiğinde sol kısım için

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(\alpha \vee \lambda \beta) \sqrt{\alpha \vee \lambda \beta} d\lambda &= \int_0^{\frac{\alpha}{\beta}} f(\alpha \vee \lambda \beta) \sqrt{\alpha \vee \lambda \beta} d\lambda + \int_{\frac{\alpha}{\beta}}^1 f(\alpha \vee \lambda \beta) \sqrt{\alpha \vee \lambda \beta} d\lambda \\ &= \int_0^{\frac{\alpha}{\beta}} f(\alpha) \sqrt{\alpha} d\lambda + \int_{\frac{\alpha}{\beta}}^1 f(\lambda \beta) \sqrt{\lambda \beta} d\lambda \\ &= \frac{\alpha \sqrt{\alpha} f(\alpha)}{\beta} + \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{t} f(t) dt \end{aligned} \quad (4.44)$$

olur. Böylece eşitsizliğin sağ tarafı için

$$\int_0^1 f(\alpha \vee \lambda \beta) \sqrt{\alpha \vee \lambda \beta} d\lambda \leq \int_0^1 (f(\alpha) \vee \lambda f(\beta)) \sqrt{\alpha \vee \lambda \beta} d\lambda \quad (4.45)$$

ifadesinin sağ kısmı incelenecektir. Sağ kısım için aşağıdaki durumlar ortaya çıkar.

1) Eğer $1 \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)}$ ise

$$\begin{aligned} \int_0^1 (f(\alpha) \vee \lambda f(\beta)) \sqrt{\alpha \vee \lambda \beta} d\lambda &= \int_0^1 f(\alpha) \sqrt{\alpha \vee \lambda \beta} d\lambda \\ &= f(\alpha) \left(\int_0^{\frac{\alpha}{\beta}} \sqrt{\alpha \vee \lambda \beta} d\lambda + \int_{\frac{\alpha}{\beta}}^1 \sqrt{\alpha \vee \lambda \beta} d\lambda \right) \\ &= \frac{\alpha \sqrt{\alpha} f(\alpha)}{\beta} + \frac{2(\sqrt{\beta^3} - \sqrt{\alpha^3}) f(\alpha)}{3\beta} \end{aligned} \quad (4.46)$$

elde edilir. Buradan;

$$\begin{aligned} \frac{\alpha \sqrt{\alpha} f(\alpha)}{\beta} + \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{t} f(t) dt &\leq \frac{\alpha \sqrt{\alpha} f(\alpha)}{\beta} + \frac{2(\sqrt{\beta^3} - \sqrt{\alpha^3}) f(\alpha)}{3\beta} \\ \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{t} f(t) dt &\leq \frac{2(\sqrt{\beta^3} - \sqrt{\alpha^3}) f(\alpha)}{3} \end{aligned} \quad (4.47)$$

eşitsizliği elde edilir.

2) $\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} < 1$ ise

$$\int_0^1 (f(\alpha) \vee \lambda f(\beta)) \sqrt{\alpha \vee \lambda \beta} d\lambda = \int_0^{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}} (f(\alpha) \vee \lambda f(\beta)) \sqrt{\alpha \vee \lambda \beta} d\lambda$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}}^1 (f(\alpha) \vee \lambda f(\beta)) \sqrt{\alpha \vee \lambda \beta} d\lambda \\
& = \int_0^{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}} f(\alpha) \sqrt{\alpha \vee \lambda \beta} d\lambda \\
& + \int_{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}}^1 \lambda f(\beta) \sqrt{\alpha \vee \lambda \beta} d\lambda \tag{4.48}
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Bu durum için iki farklı koşul karşımıza çıkar.

$$\begin{aligned}
\text{i)} \quad & 0 \leq \frac{\alpha}{\beta} \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} < 1 \text{ ise} \\
& \int_0^1 (f(\alpha) \vee \lambda f(\beta)) \sqrt{\alpha \vee \lambda \beta} d\lambda \\
& = \int_0^{\frac{\alpha}{\beta}} f(\alpha) \sqrt{\alpha} d\lambda + \int_{\frac{\alpha}{\beta}}^{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}} f(\alpha) \sqrt{\lambda \beta} d\lambda \\
& + \int_{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}}^1 \lambda f(\beta) \sqrt{\lambda \beta} d\lambda \\
& = \frac{\alpha \sqrt{\alpha} f(\alpha)}{\beta} + \frac{1}{\beta} \int_{\frac{\alpha}{\beta}}^{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}} f(\alpha) \sqrt{t} dt + \int_{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}}^1 \frac{t}{\beta} f(\beta) \sqrt{t} dt \\
& = \frac{\alpha \sqrt{\alpha} f(\alpha)}{\beta} + \frac{2 f(\alpha)}{3 \beta} \left(\sqrt{\left[\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)} \right]^3} - \sqrt{\alpha^3} \right) \\
& + \frac{2 f(\beta)}{5 \beta^2} \left(\sqrt{\beta^5} - \sqrt{\left[\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)} \right]^5} \right) \tag{4.49}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Buradan;

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha\sqrt{\alpha}f(\alpha)}{\beta} + \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{t}f(t)dt &\leq \frac{\alpha\sqrt{\alpha}f(\alpha)}{\beta} + \frac{2f(\alpha)}{3\beta} \left(\sqrt{\left[\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)} \right]^3} - \sqrt{\alpha^3} \right) \\
&\quad + \frac{2f(\beta)}{5\beta^2} \left(\sqrt{\beta^5} - \sqrt{\left[\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)} \right]^5} \right) \\
\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{t}f(t)dt &\leq \frac{2f(\alpha)}{3} \left(\sqrt{\left[\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)} \right]^3} - \sqrt{\alpha^3} \right) \\
&\quad + \frac{2f(\beta)}{5\beta} \left(\sqrt{\beta^5} - \sqrt{\left[\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)} \right]^5} \right) \tag{4.50}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

$$\text{ii) } 0 \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} < \frac{\alpha}{\beta} \leq 1 \text{ ise}$$

$$\int_0^1 (f(\alpha) \vee \lambda f(\beta)) \sqrt{\alpha \vee \lambda \beta} d\lambda$$

$$= \int_0^{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}} f(\alpha) \sqrt{\alpha} d\lambda + \int_{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}}^{\frac{\alpha}{\beta}} \lambda f(\beta) \sqrt{\alpha} d\lambda$$

$$+ \int_{\frac{\alpha}{\beta}}^1 \lambda f(\beta) \sqrt{\lambda \beta} d\lambda$$

$$= \frac{\sqrt{\alpha} [f(\alpha)]^2}{f(\beta)} + \frac{\sqrt{\alpha} f(\alpha)}{2} \left(\left[\frac{\alpha}{\beta} \right]^2 - \left[\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} \right]^2 \right)$$

$$+ \frac{2(\sqrt{\beta^5} - \sqrt{\alpha^5}) f(\alpha)}{5\beta^2}$$

$$= \frac{\sqrt{\alpha} [f(\alpha)]^2}{2f(\beta)} + \frac{\alpha^2 \sqrt{\alpha} f(\beta)}{2\beta^2} + \frac{2(\sqrt{\beta^5} - \sqrt{\alpha^5}) f(\alpha)}{5\beta^2} \tag{4.51}$$

ifadesi elde edilir. Buradan;

$$\begin{aligned} \frac{\alpha\sqrt{\alpha}f(\alpha)}{\beta} + \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{t}f(t)dt &\leq \frac{\sqrt{\alpha}[f(\alpha)]^2}{2f(\beta)} + \frac{\alpha^2\sqrt{\alpha}f(\beta)}{2\beta^2} + \frac{2(\sqrt{\beta^5}-\sqrt{\alpha^5})f(\alpha)}{5\beta^2} \\ \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{t}f(t)dt &\leq \frac{\beta\sqrt{\alpha}[f(\alpha)]^2}{2f(\beta)} - \frac{\sqrt{\alpha^3}f(\alpha)}{5\beta} + \frac{(\sqrt{\alpha^5}-\sqrt{\beta^5})f(\beta)}{10\beta} \quad (4.52) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. Gerçekten, $g(t) = \sqrt{t}$ fonksiyonu da herhangi bir fonksiyon olduğundan, Teorem 4.1 koşullarını sağlar ve eşitsizlik bu teoremdeki ile çıkarılır.

Sonuç 4.2 $f: [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu B-konveks fonksiyon olmak üzere, $g: [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $g(t) = e^t$ negatif olmayan integrallenebilir fonksiyonu için

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^t f(t) dt \leq \begin{cases} (e^{\beta} - e^{\alpha}) f(\alpha), & 1 \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} \\ \frac{e^{\alpha}(\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta))^2 + (e^{\beta}(\beta - 1) - e^{\alpha}(\alpha - 1))[f(\beta)]^2}{2\beta^2 f(\beta)}, & 0 \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} < \frac{\alpha}{\beta} < 1 \\ \frac{\beta f(\alpha) \left(e^{\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)}} - e^{\alpha} \right) + e^{\beta}(\beta - 1)f(\beta)}{\beta}, & \\ -\frac{e^{\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)}}(\beta f(\alpha) - f(\beta))}{\beta}, & 0 \leq \frac{\alpha}{\beta} \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} < 1 \end{cases}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: f fonksiyonu B-konveks fonksiyon olduğundan (2.20) eşitsizliğini sağlar, eşitsizliğin her iki tarafı $(e^{\alpha \vee \lambda \beta})$ ile çarpılıp $\lambda \in [0, 1]$ göre integrallendiğinde sol kısım için

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(\alpha \vee \lambda \beta) (e^{\alpha \vee \lambda \beta}) d\lambda &= \int_0^{\frac{\alpha}{\beta}} f(\alpha \vee \lambda \beta) (e^{\alpha \vee \lambda \beta}) d\lambda + \int_{\frac{\alpha}{\beta}}^1 f(\alpha \vee \lambda \beta) (e^{\alpha \vee \lambda \beta}) d\lambda \\
&= \int_0^{\frac{\alpha}{\beta}} f(\alpha) (e^{\alpha}) d\lambda + \int_{\frac{\alpha}{\beta}}^1 f(\lambda \beta) (e^{\lambda \beta}) d\lambda \\
&= \frac{\alpha}{\beta} e^{\alpha} f(\alpha) + \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} e^t f(t) dt
\end{aligned} \tag{4.53}$$

f fonksiyonunun B-konveks fonksiyon olma şartından dolayı

$$\int_0^1 f(\alpha \vee \lambda \beta) (e^{\alpha \vee \lambda \beta}) d\lambda \leq \int_0^1 (f(\alpha) \vee \lambda f(\beta)) (e^{\alpha \vee \lambda \beta}) d\lambda \tag{4.54}$$

ifadesi elde edilir. Buradan (4.60) eşitsizliğinin sağ kısmı için aşağıdaki koşullar incelenecektir.

$$1) \quad \frac{\alpha}{\beta} < 1 \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} \text{ ise}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (f(\alpha) \vee \lambda f(\beta)) (e^{\alpha \vee \lambda \beta}) d\lambda &= \int_0^{\frac{\alpha}{\beta}} f(\alpha) (e^{\alpha}) d\lambda + \int_{\frac{\alpha}{\beta}}^1 f(\lambda \beta) (e^{\lambda \beta}) d\lambda \\
&= \frac{\alpha}{\beta} e^{\alpha} f(\alpha) + \frac{(e^{\beta} - e^{\alpha}) f(\alpha)}{\beta}
\end{aligned} \tag{4.55}$$

eşitliği elde edilir. Buradan;

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{\beta} (e^{\alpha}) f(\alpha) + \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} f(t) (e^t) dt &\leq \frac{\alpha}{\beta} (e^{\alpha}) f(\alpha) + \frac{(e^{\beta} - e^{\alpha}) f(\alpha)}{\beta} \\
\int_{\alpha}^{\beta} e^t f(t) dt &\leq (e^{\beta} - e^{\alpha}) f(\alpha)
\end{aligned} \tag{4.56}$$

eşitsizliği elde edilir.

$$2) \quad 0 \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} < \frac{\alpha}{\beta} < 1 \text{ ise}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (f(\alpha) \vee \lambda f(\beta)) (e^{\alpha \vee \lambda \beta}) d\lambda &= \int_0^{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}} f(\alpha) e^{\alpha} d\lambda + \int_{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}}^{\frac{\alpha}{\beta}} \lambda f(\beta) e^{\alpha} d\lambda \\ &\quad + \int_{\frac{\alpha}{\beta}}^1 \lambda f(\beta) e^{\lambda \beta} d\lambda \\ &= \frac{e^{\alpha} \left(\beta^2 [f(\alpha)]^2 + \alpha^2 [f(\beta)]^2 \right)}{2\beta^2 f(\beta)} \\ &\quad + \frac{(e^{\beta}(\beta-1) - e^{\alpha}(\alpha-1)) [f(\beta)]^2}{2\beta^2 f(\beta)} \end{aligned} \quad (4.57)$$

eşitliği elde edilir. Buradan;

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\beta} (e^{\alpha}) f(\alpha) + \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} (e^t) f(t) dt &\leq \frac{e^{\alpha} \left(\beta^2 [f(\alpha)]^2 + \alpha^2 [f(\beta)]^2 \right)}{2\beta^2 f(\beta)} \\ &\quad + \frac{(e^{\beta}(\beta-1) - e^{\alpha}(\alpha-1)) [f(\beta)]^2}{2\beta^2 f(\beta)} \\ \int_{\alpha}^{\beta} (e^t) f(t) dt &\leq \frac{e^{\alpha} (\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta))^2}{2\beta^2 f(\beta)} \\ &\quad + \frac{(e^{\beta}(\beta-1) - e^{\alpha}(\alpha-1)) [f(\beta)]^2}{2\beta^2 f(\beta)} \end{aligned} \quad (4.58)$$

eşitsizliği elde edilir.

$$3) \quad 0 \leq \frac{\alpha}{\beta} \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} < 1 \text{ ise}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (f(\alpha) \vee \lambda f(\beta)) (e^{\alpha \vee \lambda \beta}) d\lambda \\ &= \int_0^{\frac{\alpha}{\beta}} f(\alpha) e^{\alpha} d\lambda + \int_{\frac{\alpha}{\beta}}^{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}} f(\alpha) e^{\lambda \beta} d\lambda + \int_{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}}^1 \lambda f(\beta) e^{\lambda \beta} d\lambda \\ &= \frac{\alpha}{\beta} e^{\alpha} f(\alpha) + \left(e^{\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)}} - e^{\alpha} \right) \frac{f(\alpha)}{\beta} \\ & \quad + \left(\frac{e^{\beta} (\beta - 1) f(\beta) - e^{\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)}} (\beta f(\alpha) - f(\beta))}{\beta^2 f(\beta)} \right) f(\beta) \quad (4.59) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Buradan;

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\beta} (e^{\alpha}) f(\alpha) + \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} (e^t) f(t) dt &\leq \frac{\alpha}{\beta} e^{\alpha} f(\alpha) + \left(e^{\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)}} - e^{\alpha} \right) \frac{f(\alpha)}{\beta} \\ & \quad + \left(\frac{e^{\beta} (\beta - 1) f(\beta) - e^{\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)}} (\beta f(\alpha) - f(\beta))}{\beta^2 f(\beta)} \right) f(\beta) \\ \int_{\alpha}^{\beta} e^t f(t) dt &\leq \frac{\beta \left(e^{\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)}} - e^{\alpha} \right) f(\alpha) + e^{\beta} (\beta - 1) f(\beta)}{\beta} \\ & \quad - \frac{e^{\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)}} (\beta f(\alpha) - f(\beta))}{\beta} \quad (4.60) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $g(t) = e^t$ fonksiyonu için gerçekten Teorem 4.1 koşulları sağlandığından, elde edilen eşitsizlik bu teorem ile de çıkarılır.

Sonuç 4.3 $f : [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ B-konveks fonksiyonu ve $g : [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$,

$g(t) = \frac{1}{t}$ B-konveks fonksiyonu için

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(t)}{t} dt \leq \begin{cases} \frac{(\beta - \alpha) f(\alpha)}{\alpha}, & 1 \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)}, 1 \leq \frac{\beta}{\alpha} \\ \frac{\beta \left([f(\alpha)]^2 + [f(\beta)]^2 \right) - 2\alpha f(\alpha) f(\beta)}{2\alpha f(\beta)}, & \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} < 1 \leq \frac{\beta}{\alpha} \end{cases}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: f ve $g(t) = \frac{1}{t}$ fonksiyonları B-konveks fonksiyon olduğundan (2.20)

eşitsizliği sağlanır, eşitsizliğin her iki tarafı $\left(\frac{1}{\alpha \vee \lambda \beta} \right)$ ile çarpılıp $\lambda \in [0, 1]$ 'ya göre integrallendiğinde sol kısım için

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(\alpha \vee \lambda \beta) \left(\frac{1}{\alpha \vee \lambda \beta} \right) d\lambda &= \int_0^{\frac{\alpha}{\beta}} f(\alpha \vee \lambda \beta) \left(\frac{1}{\alpha \vee \lambda \beta} \right) d\lambda + \int_{\frac{\alpha}{\beta}}^1 f(\alpha \vee \lambda \beta) \left(\frac{1}{\alpha \vee \lambda \beta} \right) d\lambda \\ &= \int_0^{\frac{\alpha}{\beta}} f(\alpha) \frac{1}{\alpha} d\lambda + \int_{\frac{\alpha}{\beta}}^1 f(\lambda \beta) \left(\frac{1}{\lambda \beta} \right) d\lambda \\ &= \frac{f(\alpha)}{\beta} + \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(t)}{t} dt \end{aligned} \quad (4.61)$$

olur. Böylece eşitsizliğin sağ tarafı için

$$\int_0^1 f(\alpha \vee \lambda \beta) \left(\frac{1}{\alpha \vee \lambda \beta} \right) d\lambda \leq \int_0^1 (f(\alpha) \vee \lambda f(\beta)) \left(\frac{1}{\alpha} \vee \frac{\lambda}{\beta} \right) d\lambda \quad (4.62)$$

elde edilir, (4.69) un sağ kısmı için aşağıdaki koşullar ortaya çıkar.

$f(\beta) \leq f(\alpha)$ durumu için aşağıdaki iki koşul çıkar karşımıza

$$1) \quad 1 \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} \text{ ve } 1 \leq \frac{\beta}{\alpha} \text{ ise}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (f(\alpha) \vee \lambda f(\beta)) \left(\frac{1}{\alpha} \vee \frac{\lambda}{\beta} \right) d\lambda &= \int_0^1 f(\alpha) \frac{1}{\alpha} d\lambda \\ &= \frac{f(\alpha)}{\alpha} \end{aligned} \quad (4.63)$$

eşitliği elde edilir. Buradan;

$$\begin{aligned} \frac{f(\alpha)}{\beta} + \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(t)}{t} dt &\leq \frac{f(\alpha)}{\alpha} \\ \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(t)}{t} dt &\leq \frac{(\beta - \alpha) f(\alpha)}{\alpha} \end{aligned} \quad (4.64)$$

eşitsizliği elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{f(\alpha)}{\beta} + \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(t)}{t} dt &\leq \frac{f(\alpha)}{\beta} + \frac{f(\alpha)}{2\beta} \left(1 - \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \right) \\ \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(t)}{t} dt &\leq \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2} \right) \frac{f(\alpha)}{2} \end{aligned} \quad (4.65)$$

sonucuna ulaşılır.

$f(\alpha) < f(\beta)$ için aşağıdaki durum karşımıza çıkar.

$$\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} < 1 \leq \frac{\beta}{\alpha} \text{ ise;}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (f(\alpha) \vee \lambda f(\beta)) \left(\frac{1}{\alpha} \vee \frac{\lambda}{\beta} \right) d\lambda &= \int_0^{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}} f(\alpha) \frac{1}{\alpha} d\lambda + \int_{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}}^1 \lambda f(\beta) \frac{1}{\alpha} d\lambda \\ &= \frac{[f(\alpha)]^2}{\alpha f(\beta)} + \frac{f(\beta)}{2\alpha} \left(1 - \left[\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} \right]^2 \right) \\ &= \frac{[f(\alpha)]^2 + [f(\beta)]^2}{2\alpha f(\beta)} \end{aligned} \quad (4.66)$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{f(\alpha)}{\beta} + \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(t)}{t} dt &\leq \frac{[f(\alpha)]^2 + [f(\beta)]^2}{2\alpha f(\beta)} \\ \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(t)}{t} dt &\leq \frac{\beta([f(\alpha)]^2 + [f(\beta)]^2) - 2\alpha f(\alpha) f(\beta)}{2\alpha f(\beta)} \end{aligned} \quad (4.67)$$

olur. Böylece ispat tamamlanmış olur. Teorem 4.2 den de görülebileceği gibi $g(t) = \frac{1}{t}$

B-konveks fonksiyonu için bu eşitsizlik geçerlidir.

Sonuç 4.4 $f : [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu B-konveks fonksiyon olmak üzere,

$g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [0, 1]$, $g(t) = \cos(t)$ fonksiyonu türevlenebilir bir fonksiyon olduğundan,

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sin(t) f(t) dt \leq \begin{cases} (\cos(\alpha) - \cos(\beta)) f(\alpha), & 1 \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} \\ \frac{\sin(\alpha) [\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)]^2}{2\beta f(\beta)} \\ + \frac{2(\sin(\beta) - \beta \cos(\beta) - \sin(\alpha) + \alpha \cos(\alpha)) f(\alpha) f(\beta)}{2\beta f(\beta)}, & 0 < \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} < \frac{\alpha}{\beta} \leq 1 \\ \frac{\beta \cos(\alpha) f(\alpha) - \beta \cos\left(\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)}\right)}{\beta} \\ + \frac{\left(\sin(\beta) - \beta \cos(\beta) - \sin\left(\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)}\right)\right) f(\beta)}{\beta} \\ + \frac{\beta \cos\left(\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)}\right) f(\alpha)}{\beta}, & 0 \leq \frac{\alpha}{\beta} \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} < 1 \end{cases}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: f fonksiyonu B-konveks olduğundan (2.20) eşitsizliği sağlanır, eşitsizliğin her iki tarafını $(\sin(\alpha \vee \lambda\beta))$ ile çarpıp $\lambda \in [0, 1]$ ya göre integrallendiğinde sol kısım için

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(\alpha \vee \lambda \beta) \sin(\alpha \vee \lambda \beta) d\lambda &= \int_0^{\frac{\alpha}{\beta}} f(\alpha \vee \lambda \beta) \sin(\alpha \vee \lambda \beta) d\lambda \\
&+ \int_{\frac{\alpha}{\beta}}^1 f(\alpha \vee \lambda \beta) \sin(\alpha \vee \lambda \beta) d\lambda \\
&= \int_0^{\frac{\alpha}{\beta}} f(\alpha) \sin(\alpha) d\lambda + \int_{\frac{\alpha}{\beta}}^1 f(\lambda \beta) \sin(\lambda \beta) d\lambda \\
&= \frac{\alpha}{\beta} \sin(\alpha) f(\alpha) + \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} \sin(t) f(t) dt \quad (4.68)
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca eşitsizliğin sağ tarafı için

$$\int_0^1 f(\alpha \vee \lambda \beta) \sin(\alpha \vee \lambda \beta) d\lambda \leq \int_0^1 (f(\alpha) \vee \lambda f(\beta)) \sin(\alpha \vee \lambda \beta) d\lambda \quad (4.69)$$

ifadesinin sağ kısmı incelenecektir. Buradan aşağıdaki durumlar ortaya çıkar;

$$1) \quad 1 \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} \text{ ise}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 (f(\alpha) \vee \lambda f(\beta)) \sin(\alpha \vee \lambda \beta) d\lambda \\
&= \int_0^{\frac{\alpha}{\beta}} f(\alpha) \sin(\alpha) d\lambda + \int_{\frac{\alpha}{\beta}}^1 f(\alpha) \sin(\lambda \beta) d\lambda \\
&= \frac{\alpha}{\beta} \sin(\alpha) f(\alpha) + \frac{(\cos(\alpha) - \cos(\beta)) f(\alpha)}{\beta} \quad (4.70)
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Buradan;

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{\beta} \sin(\alpha) f(\alpha) + \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} \sin(t) f(t) dt &\leq \frac{\alpha \sin(\alpha) f(\alpha)}{\beta} \\
&+ \frac{(\cos(\alpha) - \cos(\beta)) f(\alpha)}{\beta} \\
\int_{\alpha}^{\beta} f(t) \sin(t) dt &\leq (\cos(\alpha) - \cos(\beta)) f(\alpha) \quad (4.71)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

$$2) \quad 0 < \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} < \frac{\alpha}{\beta} \leq 1 \text{ ise}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 (f(\alpha) \vee \lambda f(\beta)) \sin(\alpha \vee \lambda \beta) d\lambda \\
&= \int_0^{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}} f(\alpha) \sin(\alpha) d\lambda + \int_{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}}^{\frac{\alpha}{\beta}} \lambda f(\beta) \sin(\alpha) d\lambda + \int_{\frac{\alpha}{\beta}}^1 \lambda f(\beta) \sin(\lambda \beta) d\lambda \\
&= \frac{\sin(\alpha) [f(\alpha)]^2}{2 f(\beta)} + \frac{\alpha^2 \sin(\alpha) f(\beta)}{2 \beta^2} \\
&\quad + \left(\frac{\sin(\beta) - \beta \cos(\beta) - \sin(\alpha) + \alpha \cos(\alpha)}{\beta^2} \right) f(\alpha) \\
&= \frac{\sin(\alpha) (\beta^2 [f(\alpha)]^2 + \alpha^2 [f(\beta)]^2)}{2 \beta^2 f(\beta)} \\
&\quad + \frac{2(\sin(\beta) - \beta \cos(\beta) - \sin(\alpha) + \alpha \cos(\alpha)) f(\alpha) f(\beta)}{2 \beta^2 f(\beta)} \quad (4.72)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Buradan;

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha}{\beta} \sin(\alpha) f(\alpha) + \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} \sin(t) f(t) dt \\
& \leq \frac{\sin(\alpha) \left(\beta^2 [f(\alpha)]^2 + \alpha^2 [f(\beta)]^2 \right)}{2\beta^2 f(\beta)} \\
& \quad + \frac{2(\sin(\beta) - \beta \cos(\beta) - \sin(\alpha) + \alpha \cos(\alpha)) f(\alpha) f(\beta)}{2\beta^2 f(\beta)} \\
& \int_{\alpha}^{\beta} \sin(t) f(t) dt \leq \frac{\sin(\alpha) [\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)]^2}{2\beta f(\beta)} \\
& \quad + \frac{2(\sin(\beta) - \beta \cos(\beta) - \sin(\alpha) + \alpha \cos(\alpha)) f(\alpha) f(\beta)}{2\beta f(\beta)} \quad (4.73)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

$$3) \quad 0 \leq \frac{\alpha}{\beta} \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} < 1 \text{ ise}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 (f(\alpha) \vee \lambda f(\beta)) \sin(\alpha \vee \lambda \beta) \\
& = \int_0^{\frac{\alpha}{\beta}} f(\alpha) \sin(\alpha) d\lambda + \int_{\frac{\alpha}{\beta}}^{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}} f(\alpha) \sin(\lambda \beta) d\lambda + \int_{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}}^1 \lambda f(\beta) \sin(\lambda \beta) d\lambda \\
& = \frac{\alpha}{\beta} \sin(\alpha) f(\alpha) + \frac{\beta \cos\left(\frac{\beta f(\alpha)}{\beta}\right) (f(\alpha) - 1)}{\beta^2} \\
& \quad + \frac{\beta \cos(\alpha) f(\alpha) + (\sin(\beta) - \beta \cos(\beta)) f(\beta) - \sin\left(\frac{\beta f(\alpha)}{\beta}\right)}{\beta^2} \quad (4.74)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Buradan;

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha}{\beta} \sin(\alpha) f(\alpha) + \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} \sin(t) f(t) dt \\
& \leq \frac{\alpha}{\beta} \sin(\alpha) f(\alpha) + \frac{\beta \cos(\alpha) f(\alpha) - \beta \cos\left(\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)}\right)}{\beta^2} \\
& \quad + \frac{\left(\sin(\beta) - \beta \cos(\beta) - \sin\left(\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)}\right) + \frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)} \cos\left(\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)}\right) \right) f(\beta)}{\beta^2} \\
& \int_{\alpha}^{\beta} \sin(t) f(t) dt \leq \frac{\beta \cos(\alpha) f(\alpha) - \beta \cos\left(\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)}\right)}{\beta} \\
& \quad + \frac{\left(\sin(\beta) - \beta \cos(\beta) - \sin\left(\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)}\right) + \frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)} \cos\left(\frac{\beta f(\alpha)}{f(\beta)}\right) \right) f(\beta)}{\beta} \quad (4.75)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Gerçekten bu sonucun doğruluğu Teorem 4.3'den de görülebilir.

Sonuç 4.5 $f : [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu B-konveks fonksiyon,

$g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [0, 1]$ $g(t) = \sin(t)$ türevlenebilir ve türevi $g'(t) = \cos(t)$ ise B-konveks

bir fonksiyon olduğundan,

$$\int_{\alpha}^{\beta} \cos(t) f(t) dt \begin{cases} (\beta - \alpha) \cos(\alpha) f(\alpha), & 1 \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)}, 1 \leq \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)} \\ \frac{\cos(\alpha) \left(\beta [f(\alpha)]^2 + \beta [f(\beta)]^2 - 2\alpha f(\alpha) f(\beta) \right)}{2 f(\beta)}, & \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} < 1 \leq \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)} \end{cases}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: f ve g' fonksiyonları B-konveks olduğundan (2.20) eşitsizliği bu iki fonksiyon için de sağlanır, f fonksiyonu için geçerli (2.20) eşitsizliğinin her iki tarafı $g'(\alpha \vee \lambda \beta) = (\cos(\alpha \vee \lambda \beta))$ ile çarpılıp $\lambda \in [0, 1]$ ya göre integrallendiğinde sol kısım için

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(\alpha \vee \lambda \beta) \cos(\alpha \vee \lambda \beta) d\lambda &= \int_0^{\frac{\alpha}{\beta}} f(\alpha \vee \lambda \beta) \cos(\alpha \vee \lambda \beta) d\lambda \\
&+ \int_{\frac{\alpha}{\beta}}^1 f(\alpha \vee \lambda \beta) \cos(\alpha \vee \lambda \beta) d\lambda \\
&= \int_0^{\frac{\alpha}{\beta}} f(\alpha) \cos(\alpha) d\lambda + \int_{\frac{\alpha}{\beta}}^1 f(\lambda \beta) \cos(\lambda \beta) d\lambda \\
&= \frac{\alpha}{\beta} \cos(\alpha) f(\alpha) + \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} \cos(t) f(t) dt \quad (4.76)
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca eşitsizliğin sağ tarafı için

$$\int_0^1 f(\alpha \vee \lambda \beta) \cos(\alpha \vee \lambda \beta) d\lambda \leq \int_0^1 (f(\alpha) \vee \lambda f(\beta)) (\cos(\alpha) \vee \lambda \cos(\beta)) d\lambda \quad (4.77)$$

eşitsizliğin sağ kısmı incelenecektir. Bu durumda aşağıdaki koşullar ortaya çıkar.

$$1 \leq \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} \text{ ve } 1 \leq \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)} \text{ ise;}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (f(\alpha) \vee \lambda f(\beta)) (\cos(\alpha) \vee \lambda \cos(\beta)) d\lambda &= \int_0^1 f(\alpha) \cos(\alpha) d\lambda \\
&= \cos(\alpha) f(\alpha) \quad (4.78)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Buradan;

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{\beta} \cos(\alpha) f(\alpha) + \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} \cos(t) f(t) dt &\leq \cos(\alpha) f(\alpha) \\
\int_{\alpha}^{\beta} \cos(t) f(t) dt &\leq (\beta - \alpha) \cos(\alpha) f(\alpha) \quad (4.79)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

$$\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} < 1 \leq \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)} \text{ iken,}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (f(\alpha) \vee \lambda f(\beta)) (\cos(\alpha) \vee \lambda \cos(\beta)) d\lambda \\ &= \int_0^{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}} f(\alpha) \cos(\alpha) d\lambda + \int_{\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}}^1 \lambda f(\beta) \cos(\alpha) d\lambda \\ &= \frac{\cos(\alpha) [f(\alpha)]^2}{f(\beta)} + \frac{\cos(\alpha) f(\beta)}{2} - \frac{\cos(\alpha) [f(\alpha)]^2}{2f(\beta)} \\ &= \frac{\cos(\alpha) ([f(\alpha)]^2 + [f(\beta)]^2)}{2f(\beta)} \end{aligned} \quad (4.80)$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{\beta} \cos(\alpha) f(\alpha) + \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} \cos(t) f(t) dt \leq \frac{\cos(\alpha) ([f(\alpha)]^2 + [f(\beta)]^2)}{2f(\beta)} \\ & \int_{\alpha}^{\beta} \cos(t) f(t) dt \leq \frac{\cos(\alpha) (\beta [f(\alpha)]^2 + \beta [f(\beta)]^2 - 2\alpha f(\alpha) f(\beta))}{2f(\beta)} \end{aligned} \quad (4.81)$$

eşitsizliği elde edilir. Sonucun doğruluğu fonksiyonlar üzerindeki koşulların çakıştığı Teorem 4.4 ile de kontrol edilebilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

5.1 Tezde Elde Edilen Sonuçlar

Bu tezde soyut konvekslik üzerine bir matematiksel uygulama çalışması yapılması amaçlanmıştır. Bu doğrultuda son zamanlarda da oldukça popüler olan bir çalışma biçimi belirlenmiştir. Konvekslik temel durumu ile çok uzun zamandır ayrıntılı şekilde çalışılmış ve pek çok sonuç elde edilmiştir. Bunun yanında, uygulama ve hayatta yer edinmesi bakımından konveksliğin farklı yönlerde kullanımı ve çeşitleri ortaya çıkmaya başlamıştır. Daha iyi sonuçlar elde edilmesi için geliştirilen bu çalışma biçimleri, tezde de yansıtılmıştır. Uygulama alanına göre klasik konvekslikten daha iyi sonuç veren genelleştirilmiş konvekslik çeşitleri ortaya konulmuş ve üzerinde ayrıntılı incelemeler yapılmaya başlanmıştır.

Tezde de aynı duruma sahip olan B-konvekslik ele alınmıştır. Ekonomik bazı problemleri çözerken daha yakın sonuçlar elde etmekte kullanılan genelleştirilmiş bu konvekslik için teorik ve bazı uygulama incelemeleri yapılmış, bu tezde ise bunlar ileriye çalışılmıştır. Daha önce, B-konveks fonksiyonlar ayrıntılı biçimde özellikleri ile birlikte çalışılmıştır. Tezde bu konvekslik biçimi için bazı tek değişkenli, özel örnekler verilmiş, konvekslikle karşılaştırılması yapılarak ifade edilmiştir.

Başka bir çalışma ile çözümlenmiş olan Hermite-Hadamard eşitsizliğinin B-konveks fonksiyonlar için olan formu bu tez ile genelleştirilmeye çalışılmıştır. Bu bağlamda, bu tezde elde edilen sonuç Hermite-Hadamard-Fejer tipi eşitsizliğin B-konveks fonksiyonlar için genelleştirilmesi olarak çalışılmıştır (**Teorem 4.1**). Bununla birlikte Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliğindeki çekirdek fonksiyonun üzerine bazı şartlar konularak eşitsizliğin farklı versiyonları da ispat edilmiştir (**Teorem 4.2, Teorem 4.3 ve Teorem 4.4**). Bu teoremler ile ifade edilen, elde edilen genelleştirilmiş bu eşitsizliklerin uygulamaları, özel fonksiyonlar yardımıyla ispat edilmiştir (**Sonuç 4.1, Sonuç 4.2, Sonuç 4.3, Sonuç 4.4, Sonuç 4.5**). Böylece tezde B-konvekslik üzerine matematiksel uygulama açısından daha genel sonuçlar ifade edilmiş ve üzerine örnek ve uygulamaları verilmiştir.

5.2 Öneriler

Bu tezde, elde edilmiş olan Hermite-Hadamard-Fejer tipi eşitsizliklerde fonksiyonun B-konveks fonksiyon olma şartı incelenmiştir. Bununla birlikte, ortaya çıkan bu eşitsizlikler daha farklı koşullar ve fonksiyonların özel durumlarda incelenmesi ile ilerletilebilir. Çekirdek fonksiyonunun özel durumları ve üzerine konulan şartlar farklılaştırılarak inceleme yapılabilir. Çekirdek fonksiyonunun özellikleri üzerinde ayrıntılı durulabilir. Ayrıca, tüm bulunan sonuçlar, özel değerler ile incelenmelidir. Böylece, hem tezde elde edilmiş veriler için, hem de daha sonra ispat edilecek olan matematiksel verilerin sağlamlığı, kontrolü ve ispatı yeniden sağlanmış olacaktır.

Bunlara ek olarak, eşitsizliğin Riemann-Liouville kesirli integral çekirdeğine sahip olacak şekilde B-konveks fonksiyonlar için durumu incelenerek, var olan sonuçlar ile karşılaştırılması yapılabilir. Bununla birlikte çekirdek fonksiyonunun değişimi ile çok daha farklı kesirli integrallere geçiş sağlanabilir. Hadamard kesirli integrali, Caputo kesirli integrali, Katugampola kesirli integrali gibi bilinen, popüler ve daha genel kesirli integrallerin, uygun çekirdekler yardımıyla Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliğinden elde edilebilirliği incelenebilir. Kesirli integrallerin her geçen gün çoğaldığı ve genelleştiği göz önünde bulundurulur ise bu konuda çalışma alanının ne derecede çok olduğu anlaşılabılır.

Ayrıca tezde incelenen Hermite-Hadamard-Fejer eşitsizliği farklı soyut konvekslik biçimleri için incelenebilir. Örneğin, bu tezde ifade ettiğimiz B^{-1} -konveks fonksiyonlar, farklı anlamlardaki s-konveks fonksiyonlar gibi çeşitler için bu incelemeler hala yapılmamıştır. Bununla birlikte tüm bu eşitsizlikler ile bunların uygulamaları ve eşitsizliğin farklı fonksiyonlar için ayrıntılı incelenmesi mümkündür.

Konveksliğin daha farklı ve önemli eşitsizlikler üzerine pek çok uygulaması olduğu düşünülürse, tezde ele alınan B-konvekslik için bu tarz eşitsizliklerin de çalışılması hala açık bir problem olarak durmaktadır. Ayrıca, hem eşitsizliklerin farklı formları hem de uygulamalarının çalışılması kaliteli ve yetkin çalışmalar olacaktır. Bunun yanı sıra, aynı eşitsizlikler farklı konvekslik çeşitleri için de bu geniş açı ile incelenebilir.

Uygulamalar üzerine daha iyi sonuçlar veren ve ihtiyaca göre genelleştirilen farklı konvekslik biçimleri üzerine çalışmalar yapılması da oldukça ileri seviye ve pek çok

veri içeren bir araştırma olacaktır. Böylece şimdiye kadar bir genelleştirilmiş konvekslik biçiminin fonksiyon ve küme teorisi, uygulamaları ve eşitsizlik formları üzerine yapılan incelemeleri gibi, ortaya atılan yeni kavram için de tüm bu çalışmaların yapılması doktora tezi olabilecek seviyede bir çalışma temeli oluşturur.



KAYNAKÇA

1. Berkovitz, L. D., 2002. Convexity and Optimization in $\mathbb{R}^n$. Wiley, New York.
2. Bertsekas, D. P., Nedic, A., 2003. Convex Analysis and Optimization, Athena Scientific.
3. Borwein, J. M., Lewis, A. S., 2000. Convex Analysis and Nonlinear Optimization, Theory and Examples, Canadian Mathematical Society Books in Mathematics Springer, New York.
4. Boyd, S., Vandenberghe, L., 2004. Convex Optimization, Cambridge University Press, Cambridge, MA.
5. Beckenbach, E. F., Bellman, R., 1961. Inequalities, Springer, Berlin.
6. Dragomir, S. S., & Pearce, C., 2003. Selected topics on Hermite-Hadamard inequalities and applications. Science Direct Working Paper, (S1574-0358), 04.
7. Dragomir, S. S., Pecaric, J. E., Presson, L. E., 1995. Some Inequalities of Hadamard Type. Soochow Journal of Mathematics. 21, 335-341.
8. Hardy, G., Littlewood, J.E. and Polya, G., 1952. Inequalities. 2nd Ed., Cambridge University Press, 324, United Kingdom.
9. Pecaric, J., Beesack, P. R., 1986. On Jessen's Inequality for Convex Functions II. Journal of mathematical analysis and applications. 118, 125-144.
10. Vasic, P. M., & Lacković, I. B., 1976. Some complements to the paper: On an inequality for convex functions. Publikacije Elektrotehnickog fakulteta. Serija Matematika i fizika, (544/576), 59-62.
11. Anastassiou, G. A., 1995. Ostrowski type inequalities. Proceedings of the American Mathematical Society, 123(12), 3775-3781.
12. Fejer L., 1906. Uber die fourierreihen, II. Math. Naturwiss. Anz Ungar. Akad. Wiss., 24, 369-390.
13. Mitrinovich, D.S., 1970. Analytic Inequalities, Springer- Verlag, Heidelberg.
14. Mitrinovic, D.S. and Lackovic I., 1985. Hermite and Convexity. Aequationes Mathematicae, 28, 229-232.
15. Rockafellar, R., 1970. Tyrrell, Convex Analysis. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
16. Rubinov, A., 2000. Abstract Convexity and Global Optimization, Kluwer Academic Publishers, Boston Dordrecht-London.

17. Rubinov, A. M., 2000. Abstract Convexity: Examples and Applications. Optimization 47(1-2), 1-33.
18. Singer, I., 1997. Abstract Convex Analysis. Wiley-Interscience Publication, New York.
19. Bricc, W., Horvath, C. D., 2004. B-convexity. Optimization, 53, 103-127.
20. Eken, Z., Sezer, S., Tınaztepe, G., & Adilov, G., 2021. s-Convex functions in the fourth sense and some of their properties. Konuralp Journal of Mathematics (KJM), 9(2), 260-267.
21. Hudzik, H., Maligranda, L., 1994. Some remarks on s-convex functions. Aequationes mathematicae. 48, 100-111.
22. Iscan, I., 2016. Hermite-Hadamard type inequalities for p-convex functions. International Journal of Analysis and Application 11(2), 137-145.
23. Orlicz, W., 1961. A note on modular spaces. I. Bulletin L'Academie Polonaise des Science, Serie des Scences Mathematiques, Astronomiques et Physiques 9, 157–162.
24. Sezer, S., Eken, Z., Tınaztepe, G., & Adilov, G., 2021. p-Convex functions and some of their properties. Numerical Functional Analysis and Optimization, 42(4), 443-459.
25. Yesilce, I., Adilov, G., 2017. Hermite-Hadamard Inequalities for B-convex and B^{-1} -convex Functions, International Journal of Nonlinear Analysis and Applications, 8 (1), pp.225-233.
26. Adilov, G., & Yesilce, I., 2012. B^{-1} -convex Sets and B^{-1} -measurable Maps. Numerical functional analysis and optimization, 33(2), 131-141.
27. Tınaztepe, G., Yesilce, I., & Adilov, G., 2014. Separation of B^{-1} -convex Sets by B^{-1} -measurable Maps. Journal of Convex Analysis, 21(2), 571-580.
28. Sarıkaya, M. Z., Set, E., Yaldiz, H., & Başak, N., 2013. Hermite-Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities. Mathematical and Computer Modelling, 57(9-10), 2403-2407.
29. Yesilce, I., 2019. Inequalities for B -convex functions via generalized fractional integral. Journal of Inequalities and Applications, 2019(1), 1-15.
30. Yesilce, I., & Adilov, G., 2017. Fractional integral inequalities for B-convex functions. Creative Mathematics and Informatics, 26(3), 345-351.
31. Yesilce, I., & Adilov, G., 2018. Hermite-Hadamard type inequalities for B^{-1} -convex functions involving generalized fractional integral operators. Filomat, 32(18), 6457-6464.

32. Eken, Z., Kemali, S., Tinaztepe, G., & Adilov, G., 2021. The Hermite-Hadamard inequalities for p -convex functions. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 50(5), 1268-1279.
33. Sezer, S., 2021. The Hermite-Hadamard inequality for s -Convex functions in the third sense. *AIMS Mathematics*, 6(7), 7719-7732.
34. Chen, H., & Katugampola, U. N., 2017. Hermite-Hadamard and Hermite-Hadamard-Fejer type inequalities for generalized fractional integrals. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 446(2), 1274-1291.
35. İşcan, I., 2014. Hermite-Hadamard-Fejer type inequalities for convex functions via fractional integrals. *Arxiv preprint arxiv*, 1404.7722.
36. Kunt, M., & İşcan, İ., 2017. Hermite-Hadamard-Fejer type inequalities for p -convex functions. *Arab Journal of Mathematical Sciences*, 23(2), 215-230.
37. Khan, M. B., Treanța, S., Soliman, M. S., Nonlaopon, K., & Zaini, H. G., 2022. Some Hadamard-Fejer Type Inequalities for LR-Convex Interval-Valued Functions. *Fractal and Fractional*, 6(1), 6.
38. Sarikaya, M. Z., 2012. On new Hermite Hadamard Fejer type integral inequalities. *Studia Universitatis Babes-Bolyai Mathematica*, 57(3), 377-386.
39. Set, E., İşcan, İ., Sarikaya, M. Z., & Özdemir, M. E., 2015. On new inequalities of Hermite-Hadamard-Fejer type for convex functions via fractional integrals. *Applied Mathematics and Computation*, 259, 875-881.
40. Vivas-Cortez, M., Korus, P., & Valdes, J. E. N., 2021. Some generalized Hermite-Hadamard-Fejer inequality for convex functions. *Advances in Difference Equations*, (1), 1-11.
41. Briec, W., & Horvath, C., 2008. Nash points, Ky Fan inequality and equilibria of abstract economies in Max-Plus and B-convexity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 341(1), 188-199.
42. Briec, W., Horvath, C. D., Rubinov, A. M., 2005. Separation in B-convexity. *Pacific Journal of Optimization*, 1, 13-30.
43. Briec, W., Horvath, C. D., 2008. Halfspaces and Hahn-Banach Like Properties in B-convexity and Max-Plus Convexity. *Pacific Journal of Optimization*, 4, (2), 293-317.
44. Briec, W., Horvath, C. D., 2009. A B-convex Production Model for Evaluating Performance of Firms. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 355, 131-144.
45. Briec, W., Horvath, C. D., 2011. On the Separation of Convex Sets in Some Idempotent Semimodules. *Linear Algebra and its Applications*, 435, 1542-1548.

46. Briec, W., Liang, Q. B., 2011. On Some Semilattice Structures for Production Technologies. *European Journal of Operational Research*, 215, 740–749.
47. Adilov, G., Rubinov, A., 2006. B-Convex Sets and Functions. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 27, (3-4), 237-257.
48. Adilov, G., Yesilce, I., 2018, Some important properties of B-convex functions. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 19(4):669-680.
49. Pečarić, J., Proschan, F., Tong, Y. L., 1992. *Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications*. Academic Press Inc.
50. Adilov, G., & Yesilce, I., 2017. B^{-1} -convex Functions. *Journal of Convex Analysis*, 24(2), 505-517.
51. Eken, Z., 2022. Fejer Inequality For S–Convex Functions In The Fourth Sense, *Journal of Mathematical Inequalities*, 16(1), 19–34.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı: Soner ÖZDEMİR

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans: Aksaray Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2013-2018

Yüksek Lisans: Aksaray Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, 2019-2022

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Kongrelerde Sunulan Bildiriler

1. Yeşilce Işık, I ve Ozdemir, S, 2022 Hermite-Hadamard-Fejer Type Inequalities for B-convex Functions, ISAME2022, Istanbul-TURKEY January 21-23, 2022, p.135.