



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

B-KONVEKSLİK İÇİN JENSEN EŞİTSİZLİĞİ VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Burcu AVCI

DANIŞMAN

Doç. Dr. İlknur YEŞİLCE IŞIK

AKSARAY, 2022

Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 192342407 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi Burcu AVCI tarafından hazırlanan “**B-KONVEKSLİK İÇİN JENSEN EŞİTSİZLİĞİ VE UYGULAMALARI**” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. İlknur YEŞİLCE IŞIK

AKSARAY ÜNİVERSİTESİ

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Prof. Dr. Gabil ADILOV

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Samet MALDAR

AKSARAY ÜNİVERSİTESİ

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Tez Savunma Tarihi: 10/01/2022

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Doç. Dr. Mehmet Ali HINIS
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinalliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Burcu AVCI

TEŞEKKÜR

Öncelikle, tüm lisansüstü öğrenimim süresince değerli zamanını, bilgi ve tecrübelerini esirgemeyerek, yol göstererek her zaman elinden gelen emek ve sabrın fazlasını gösterdiğine emin olduğum saygıdeğer hocam Doç. Dr. İlknur YEŞİLCE IŞIK' a sonsuz teşekkür etmek isterim. Ayrıca bu tez çalışmam boyunca her zaman yanımda olan desteklerini ve emeklerini benden esirgemeyen sevgili aileme çok teşekkür ederim.

Burcu AVCI
AKSARAY, 2022



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
SİMGELER VE KISALTMALAR	vi
1.GİRİŞ	1
2.KAYNAK ÖZETLERİ.....	2
3.MATERYAL VE YÖNTEM.....	4
3.1 Afın Kümeler ve Dönüşümler	4
3.2 Konveks Kümeler ve Konveks Fonksiyonlar	5
3.3 Soyut Konveks Fonksiyonlar	19
3.3.1 m-konveks fonksiyonlar.....	20
3.3.2 (s, m)-konveks fonksiyonlar	20
3.3.3 Kuazikonveks fonksiyonlar.....	20
3.3.4 B^{-1} -konveks fonksiyonlar	20
3.4 B-konveks Kümeler ve B-konveks Fonksiyonlar.....	21
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA.....	26
4.1 B-konveks Fonksiyon Örnekleri	26
4.2 B-konveks Fonksiyonlar için Jensen Eşitsizliği ve Genelleştirmeleri	33
4.3 B-konveks Fonksiyonlar için Jensen Eşitsizliği Uygulamaları	35
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	40
5.1 Sonuçlar.....	40
5.2 Öneriler.....	40
KAYNAKÇA	41
ÖZGEÇMİŞ.....	46

YÜKSEK LİSANS TEZİ

B-KONVEKSLİK İÇİN JENSEN EŞİTSİZLİĞİ VE UYGULAMALARI

Burcu AVCI

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. İlknur YEŞİLCE IŞIK

ÖZET

Jensen Eşitsizliği konveks fonksiyonlar için gerek ve yeter koşul veren temel bir eşitsizliktir. Bu önemli eşitsizlik bir fonksiyonun konveksliğini tespit etmek için kullanıldığı gibi, aynı zamanda çok önemli bazı eşitsizliklerin de elde edilmesinde pratik bir araçtır. Bu çalışmada, literatür bilgisi ve konu ile ilgili gerekli bilgiler verildikten sonra, Jensen Eşitsizliği ifade edilecektir. Bu eşitsizliği bazı klasik konveks fonksiyonlar ve değişkenler için ele aldığımızda, aritmetik ortalama – geometrik ortalama gibi ortalama eşitsizliklerinin yanı sıra, Minkowski Eşitsizliği ve Hölder Eşitsizliği gibi ispatı zor, çok önemli eşitsizliklerin de elde edildiği gösterilecektir.

Bu tezde soyut konvekslik çeşitlerinden olan B-konvekslik çalışılacaktır. B-konveks fonksiyonlar için Jensen Eşitsizliği daha önce elde edilmişti; bu tezde ise Jensen Eşitsizliği'nin hem genelleştirmeleri hem uygulamaları hem de farklı formlarının ispatı yapılacaktır, örneklerle desteklenecektir.

Anahtar Kelimeler: Konvekslik, Soyut Konvekslik, Soyut Konveks Fonksiyonlar, B-Konvekslik, B-Konveks Fonksiyonlar, Jensen Eşitsizliği.

Ocak, 2022; 46 sayfa

M.Sc. THESIS

**JENSEN INEQUALITY FOR B-CONVEX FUNCTIONS AND ITS
APPLICATIONS**

Burcu AVCI

**Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assoc. Prof. İlknur YEŞİLCE IŞIK

ABSTRACT

Jensen Inequality is giving a sufficient and necessary condition for convex functions. Both this important inequality is using to determine to convexity of a function and it is practical tool to obtain some considerable inequalities. In this work, after giving information of literature and required information about the subject, the Jensen Inequality is expressed. When handing the inequality for some classic convex functions and variables, obtaining besides mean inequalities as arithmetic-geometric inequalities, Minkowski Inequality and Holder Inequality, which are important and has difficult proof, is shown.

In this thesis, B-convexity which is an abstract convexity type. Previously, the Jensen Inequality for B-convex functions was proven; in the thesis both its generalizations and its applications and its different forms are proved, it is supported by examples.

Keywords: Convexity, Abstract Convexity, Abstract Convex Functions, B-convexity, B-convex Functions, Jensen Inequality

January, 2022; 46 pages

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. İki noktadan geçen doğru.....	4
Şekil 3.2. Konveks ve konkav kümeler	6
Şekil 3.3. İki konveks kümenin kesişimi	6
Şekil 3.4. Konkav kümelerin konveks örtüleri	7
Şekil 3.5. Konveks koni	8
Şekil 3.6. Konveks olmayan koni	8
Şekil 3.7. Konveks fonksiyon	10
Şekil 3.8. Konkav fonksiyon.....	10
Şekil 3.9. Ne konkav ne konveks olan fonksiyon.....	10
Şekil 3.10. Tek değişkenli fonksiyonun epigrafı	11
Şekil 3.11. Verilen farklı ikili noktaların B-konveks kabuklarının grafikleri.....	22
Şekil 4.1. $\frac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiği ve konveksliği.....	26
Şekil 4.2. $\sin x$ fonksiyonu B-konkavlığı.....	28
Şekil 4.3. $\cos x$ fonksiyonu B-konveksliği	29

SİMGELER VE KISALTMALAR

$Co^r(B)$	B Kümesinin r -konveks Kabuğu
$Co^\infty(B)$	B Kümesinin B -konveks Kabuğu
$B[B]$	B Kümesinin B -konveks Örtüsü
$ConvC$	C Kümesinin Konveks Örtüsü
$\circ$	Fonksiyonların Bileşkesi
$epif$	Fonksiyonun Epigraf Kümesi
hyp^+f	Fonksiyonun Hypograf Kümesi
$\vee$	Koordinatlara Göre Maksimum
$\wedge$	Koordinatlara Göre Minimum
$\max$	Maksimum
$\cup$	Birleşim
$\cap$	Kesişim
B'	B Kümesinin Tümleyeni
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}_{++}$	Pozitif Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^n$	n Boyutlu Öklid Uzayı
$\mathbb{R}_+^n$	$\{(x_1, \dots, x_n): x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\}$
$\overline{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
$\mathbb{R}_+$	Negatif Olmayan Reel Sayılar Kümesi

1.GİRİŞ

Matematik ve matematiğin alt branşlarında kullanılan en temel enstrümanlarından biri eşitsizlikler teorisidir. Aynı zamanda eşitsizlikler; mekanik, fizik ve diğer bilimlerde de yaygın bir kullanıma sahiptir. Eşitsizlikler konvekslik için de çok önemli bir uygulama alanıdır. Bu eşitsizlikler hesaplamada her zaman elde edemeyeceğimiz yaklaşımları verdiği için hem matematik hem de uygulamada çok büyük öneme sahiptir. Klasik konveksliğin en önemli eşitsizliklerinden birisi de Jensen Eşitsizliği'dir [1].

Jensen Eşitsizliği konveks fonksiyonlar için gerek ve yeter koşul veren temel bir eşitsizliktir. Bu önemli eşitsizlik bir fonksiyonun konveksliğini tespit etmek için kullanıldığı gibi, aynı zamanda çok popüler bazı eşitsizliklerin de elde edilmesinde pratik bir araçtır [1, 2]. Bu çalışmada, literatür bilgisi ve konu ile ilgili gerekli bilgiler verildikten sonra, Jensen Eşitsizliği ifade edilecektir [3,4]. Bu eşitsizliği bazı klasik konveks fonksiyonlar için ele aldığımızda, karşımıza aritmetik ortalama – geometrik ortalama gibi ortalama eşitsizliklerinin yanı sıra, Minkowski Eşitsizliği, Hölder Eşitsizliği, Cauchy Eşitsizliği gibi ispatı zor, çok önemli eşitsizliklerin de elde edildiği gösterilecektir [3, 4].

B-konvekslik de soyut konvekslik kavramlarından biridir. B-konveks kümeler ile fonksiyonlar farklı araştırmacılar tarafından incelenmiş, ekonomi ve eşitsizlikler teorisi alanlarındaki uygulamaları üzerine çeşitli çalışmalar yapılmıştır [5, 6, 7, 8,9, 10,11, 12, 13, 14, 15, 3, 4,]. B-konveks fonksiyonlar için Jensen Eşitsizliği daha önce elde edilmiştir. Bu tezde ise Jensen Eşitsizliği'nin hem genelleştirmeleri hem uygulamaları hem de farklı formlarının ispatı yapılacaktır, örneklerle desteklenecektir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Konveks Analiz matematiğin en temel alt dallarından ve en önemli alanlarından biridir. Özellikle son zamanlarda Konveks Analiz üzerine yapılan çalışmalar daha da hızlanarak popüler hale gelmiştir. Konvekslik kavramının hem günlük hayattaki gereksinimleri hem de bilimsel çalışmalardaki kullanışlı uygulamalarının varlığı konvekslik kavramının önemini ve gerekliliğini oldukça artırmasına neden olmuştur. Bunun yanı sıra, Optimizasyon Teorisi [16, 17, 18, 19, 20, 21], Eşitsizlikler Teorisi [22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33], Matematiksel Ekonomi [34, 35], Yöneylem Araştırması [36, 37, 38, 39,40, 41, 42] gibi konveks analizin çok çeşitli uygulama alanları mevcuttur. Bu uygulama alanları hem teorik hem de pratik olarak büyük bir ilgi çekmektedir.

Jensen Eşitsizliği konveks fonksiyonlar için gerek ve yeter koşul veren temel bir eşitsizliktir [1]. Klasik konvekslikte Jensen Eşitsizliği daha önce elde edilmiştir. Bu eşitsizlik önemli uygulamalara sahiptir [1, 2]. Aritmetik ortalama – geometrik ortalama gibi ortalama eşitsizliklerinin yanı sıra, Minkowski Eşitsizliği, Hölder Eşitsizliği, Cauchy Eşitsizliği gibi uygulamaları da vardır [3, 4]. Aslında bu eşitsizlikler tek başına ispatlanmaya çalışıldığında çok uğraş gerektiren eşitsizlikler olmasına rağmen Jensen Eşitsizliği ile bir konveks fonksiyon ele alınarak kolay bir şekilde elde edilebilecek eşitsizliklerdir. Dolayısıyla, Jensen Eşitsizliği daha genel bir eşitsizliktir. Son zamanlarda ise Jensen Eşitsizliği farklı tür konveks fonksiyonlar için çalışılmaya başlanmıştır [43, 44, 45, 46].

Soyut konvekslik ise konveks analizin yeni ilgi odaklarından biridir. Soyut konvekslik farklı çeşitleriyle çalışılmakta ve yeni türleri de üretilmeye devam edilmektedir, bu türlerin her biri ayrıca uygulamaları ile birlikte de çalışılmaktadır [20, 36, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57].

Bugüne kadar çok sayıda soyut konvekslik çeşitleri elde edilmiştir. [6, 7, 8,9, 58, 11, 12, 13]. Bazıları sadece fonksiyon türlerinin üretilmesi ve uygulamalarının sonuçlandırılması olarak çalışılmakta iken, bazıları da hem küme hem de fonksiyon teorisi ve uygulamaları ile bir bütün halinde çalışılmaktadır. Kuazikonveks fonksiyonlar [55], Multiplikativ konveks fonksiyonlar [20], p-konvekslik [55], m-konvekslik [27, 56, 57, 59, 60], s-konvekslik [61], r-konvekslik [61, 62, 63], (s,m)-

konvekslik [49, 60], B^{-1} -konvekslik [64] soyut konveksliğin bazı türleri olarak verilebilir. B-konvekslik de bunlardan bir tanesidir [6].

B-konvekslik, küme teorisi ve ekonomi yönündeki uygulamalarıyla ilgili çeşitli çalışmalar yapılmış olan genelleştirilmiş bir konvekslik biçimidir [5, 6, 7, 8]. B-konveks kümeler matematiksel ekonomide çok önemli uygulamalara sahip olduğu için bu zamana kadar pek çok çalışmada hem teorik olarak hem de bu uygulamaları ile bir bütün halinde çalışılmıştır [10, 11, 12, 13, 14]. B-konvekslik kavramını ilk olarak C. D. Horvath ve W. Briec 2004 yılında yayınlanan [6] makalesinde ortaya koymuştur. B-konveks kümelerle ilgili araştırmalar G. Adilov ve A. M. Rubinov tarafından yayınlanan makale ile devam ettirilmiştir [5]. 2005 yılında W. Briec, C. D. Horvath ve A. M. Rubinov tarafından yayınlanan makalede ayırma özelliklerinin incelenip ifade edildiği görülmektedir [8]. Daha sonra bu makaledeki sonuçlar genelleştirilerek genel Hahn-Banach teoreminin çeşidi B-konvekslik için gösterilmiştir: 2008 yılında yayınlanmış bu makalede W. Briec ve C. D. Horvath tarafından, hem matematiksel analizde hem de ekonomide çok önemli yere sahip olan sabit nokta teorisi ile ilgili çalışmalar da yapılmıştır [58]. Ayrıca, 2015 yılında W. Briec tarafından yayınlanan [15] makalesinde de B-konvekslik kavramının uygulamaları ile birlikte çalışılmaya devam edildiği görülmektedir. B-konveksliğin eşitsizliklerini ve fonksiyon özelliklerini I. Yesilce ve G. Adilov çalışmıştır [64, 65].

B-konveks fonksiyonlar için Jensen Eşitsizliği daha önce ispat edilmiştir. Bu tezde öncelikle B-konveks fonksiyon örnekleri çoğaltılmıştır, temel ve önemli bazı fonksiyonlara bakılıp B-konveks olup olmadığını incelenmiştir. Ayrıca daha önce özellikleri incelenmiş olan B-konveksliğin örnekleri, bu özelliklerden yararlanılarak ve işlemler altında korunurluğuna bakılarak çoğaltılacaktır. Jensen Eşitsizliği'nin B-konveks fonksiyonlar için genelleştirilmiş versiyonları elde edilecektir ve eşitsizliğin fonksiyon örneklerinden de yararlanılarak farklı formları ispat edilecektir. Sonra da ele alınan çok çeşitli örnekler bu elde edilen eşitsizliklere uygulanacaktır. Bunun yanı sıra, yeni elde edilen eşitsizliklerin karşılaştırılması yapılacaktır. Ayrıca B-konveks fonksiyonlar için Minkowski Eşitsizliği, Hölder Eşitsizliği ve Cauchy Eşitsizliği gibi genel eşitsizliklerin yeni durumları da elde edilecektir.

3.MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde ilk olarak klasik konveksliğin temeli olan afin kümeler ve dönüşümlerin tanımı verilecektir. Daha sonra klasik konvekslikte gerekli olan bilgiler sunulacaktır. Ardından da soyut konveksliğe değinilecektir ve bu bağlamda B-konvekslikle ilgili temel bilgiler ifade edilecektir.

3.1 Afin Kümeler ve Dönüşümler

Konveksliğin temel yapı taşı elementer fonksiyonlardır. Klasik konveks fonksiyonlar için bunlar afinlere denk gelmektedir. Dolayısıyla öncelikle bu fonksiyonlardan bahsedilecektir. Afinlerle ilgili genel bilgiler aşağıdaki gibi verilebilir [20].

Tanım 3.1.1. $\mathbb{R}^n$ de x ve y iki farklı nokta olmak üzere $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \quad (3.1)$$

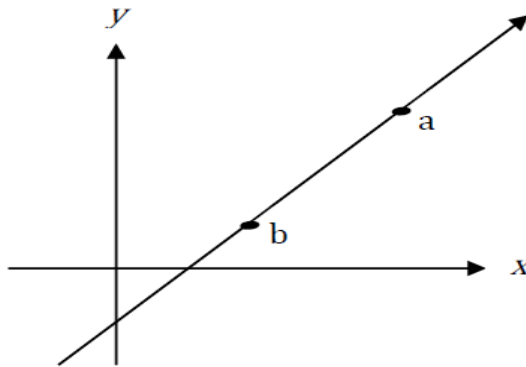
tipindeki noktalar kümesine x ve y 'den geçen doğru denir.

Tanım 3.1.2. $A \subset \mathbb{R}^n$ ve $\forall x, y \in A$ için

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in A \quad (3.2)$$

ise A 'ya afin küme denir.

Başka bir deyişle herhangi iki noktasından geçen doğruyu içeren kümelere afin kümeler denir. $\emptyset$, $\mathbb{R}$, tek nokta kümeleri, doğrular ve düzlemler afin kümelerdir.



Şekil 3.1. İki noktadan geçen doğru

Tanım 3.1.3. $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ noktaları verisin ve $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ gerçel sayıları için $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$ koşulu sağlansın. Bu durumda

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \quad (3.3)$$

toplamına $x_1, x_2, \dots, x_n$ noktalarının afin kombinasyonu denir.

Tanım 3.1.4. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x \mapsto f(x)$ dönüşümü ve $\lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) = (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) \quad (3.4)$$

koşulunu sağlayan dönüşüme afin dönüşüm denir.

3.2 Konveks Kümeler ve Konveks Fonksiyonlar

Bu tezde, konveks kümeler ve konveks fonksiyonlarla ilgili aşağıdaki bilgileri göz önünde bulundurmanız gerekecektir.

Tanım 3.2.1. $C \subset \mathbb{R}^n$ ve $C \neq \emptyset$ küme olsun. $\forall x, y \in C$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in C \quad (3.5)$$

ise C kümesine konveks küme denir. Yani C kümesinden alınan herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçası yine kümenin kendisinde ise bu C kümesine konveks küme denir. Bir küme konveks değilse konkav küme olur.



C_1



C_2



C_3



C_4



C_5

Şekil 3.2. Konveks ve konkav kümeler

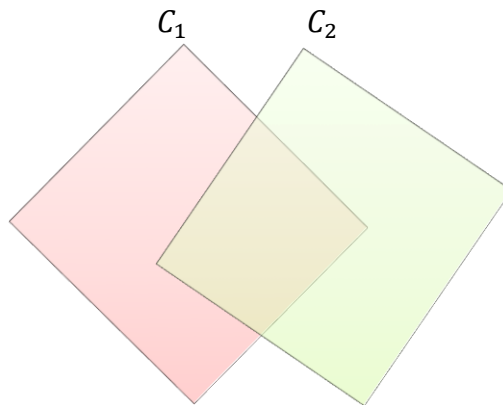
C_1, C_2 ve C_3 kümeleri konveks küme iken C_4 ve C_5 kümeleri konkav kümelerdir.

Önerme 3.2.1. $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^n$ iki konveks küme olmak üzere,

i) İki konveks kümenin toplamı da konvektir.

$$C_1 + C_2 = \{x_1 + x_2 : x_1 \in C_1 \text{ ve } x_2 \in C_2\} \subset \mathbb{R}^n \quad (3.6)$$

ii) İki konveks kümenin kesişimi de konvektir.



Şekil 3.3. İki konveks kümenin kesişimi

iii) $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere λC_1 yine bir konveks kümedir.

$$\lambda C_1 = \{ \lambda x_1 : \lambda \in \mathbb{R} \text{ ve } x_1 \in C_1 \} \subset \mathbb{R}^n \quad (3.7)$$

Tanım 3.2.2. $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ noktaları ve negatif olmayan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sayıları verilsin, $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$ koşulu sağlansın. Bu durumda

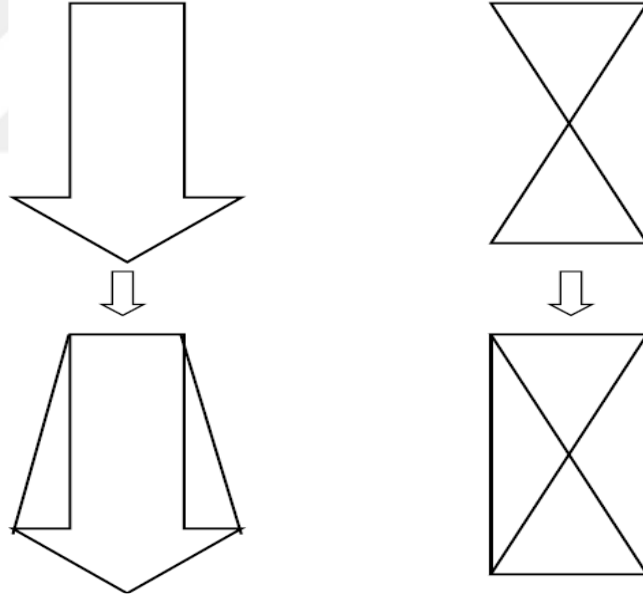
$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \quad (3.8)$$

toplamına $x_1, x_2, \dots, x_n$ noktalarının bir konveks kombinasyonu denir.

Tanım 3.2.3. $C \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin elemanlarının tüm konveks kombinasyonlarından oluşan kümeye C kümesinin konveks örtüsü denir ve $\text{Conv}C$ ile gösterilir.

$$\text{Conv}C = \{ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n : x_i \in C, \lambda_i \geq 0 \text{ ve } \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1 \} \quad (3.9)$$

Diğer bir deyişle C kümesini kapsayan tüm konveks kümelerin kesişimine bu kümenin konveks örtüsü denir.



Şekil 3.4. Konkav kümelerin konveks örtüleri

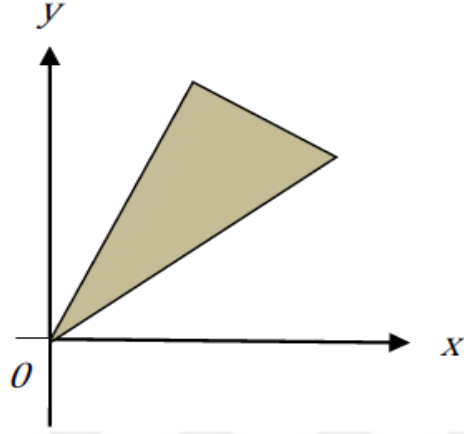
Yukarıdaki kümeler konkav kümelerdir. Ancak konveks örtüleri alınarak bu kümeler konveks küme haline dönüştürülür.

Tanım 3.2.4. $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \neq \emptyset$ ve $x \in K$ olmak üzere, $\lambda \geq 0$ için

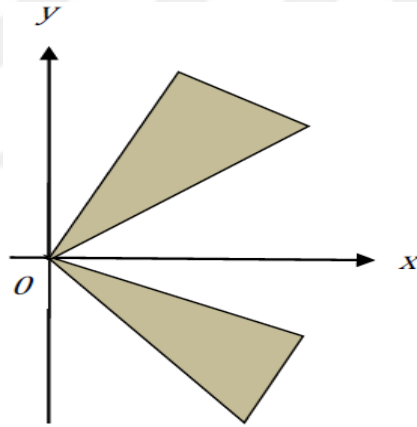
$$\lambda x \in K \quad (3.10)$$

ise K kümesine koni denir. $K \subset \mathbb{R}^n$ konisinin konveks olması için gerek ve yeter koşul K 'nın toplama ve pozitif skaler ile çarpma işlemine göre kapalı olmasıdır.

Tanım 3.2.5. Bir koni konveks ise konveks koni olarak adlandırılır.



Şekil 3.5. Konveks koni



Şekil 3.6. Konveks olmayan koni

Tanım 3.2.6. $C \neq \emptyset$ bir konveks küme ve $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ olmak üzere $f: C \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ fonksiyonu tanımlansın. Eğer $\forall x, y \in C$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) \quad (3.11)$$

şartı sağlanıyor ise f fonksiyonuna C kümesi üzerinde konveks fonksiyon denir.

Tanım 3.2.7. Eğer $\forall x, y \in C$, $0 < \lambda < 1$ ve $x \neq y$ için

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) < (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) \quad (3.12)$$

şartı sağlanıyor ise f fonksiyonuna C kümesi üzerinde kesin konveks fonksiyon denir.

Not 3.2.1. - f fonksiyonu C kümesi üzerinde konveks (kesin konveks) bir fonksiyon ise f fonksiyonuna C kümesinde konkav (kesin konkav) fonksiyon denir.

$f: C \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere tek değişkenli bir fonksiyonun belirli şartlar altında konveksliği için gerekli koşullar aşağıdaki gibi verilebilir.

i) f fonksiyonu C kümesi üzerinde, ikinci mertebeden türevlenebilir olmak üzere C kümesi üzerinde konveks fonksiyon olması için gerekli ve yeterli koşul $\forall x \in C$ için

$$f''(x) \geq 0 \quad (3.13)$$

şartını sağlamasıdır.

ii) f fonksiyonu C kümesi üzerinde, ikinci mertebeden türevlenebilir olmak üzere C kümesi üzerinde kesin konveks fonksiyon olması için gerekli ve yeterli koşul $\forall x \in C$ için

$$f''(x) > 0 \quad (3.14)$$

şartını sağlamasıdır.

iii) f fonksiyonu, C kümesi üzerinde sürekli fonksiyon ise fonksiyonun C kümesi üzerinde konveks fonksiyon olması için gerekli ve yeterli koşul $\forall x_1, x_2 \in C$ için

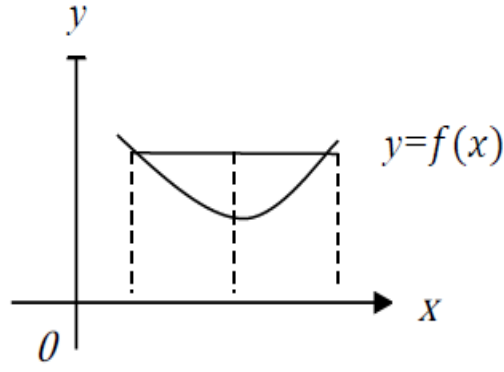
$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \quad (3.15)$$

şartını sağlamasıdır.

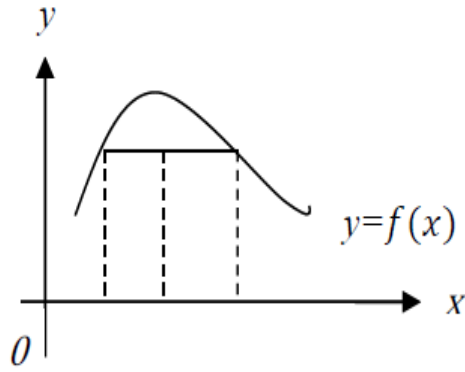
iv) f fonksiyonu, C kümesi üzerinde sürekli fonksiyon ise fonksiyonun C kümesi üzerinde konveks fonksiyon olması için gerekli ve yeterli koşul $\forall x_1, x_2 \in C$ ve $x_1 \neq x_2$ için

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \quad (3.16)$$

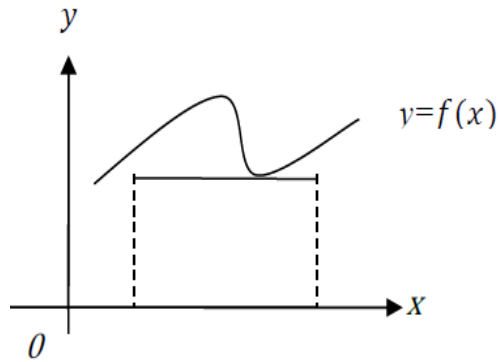
şartını sağlamasıdır.



Şekil 3.7. Konveks fonksiyon



Şekil 3.8. Konkav fonksiyon



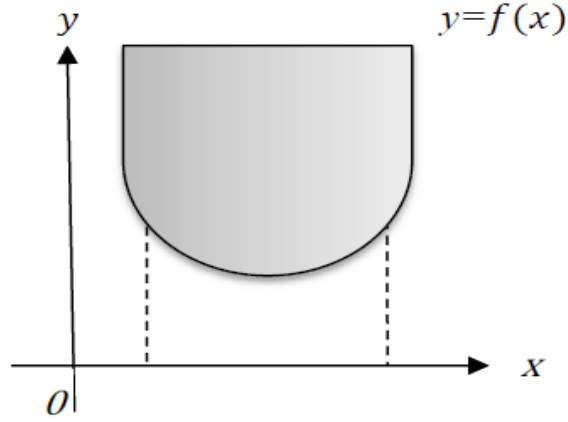
Şekil 3.9. Ne konkav ne konveks olan fonksiyon

Tanım 3.2.8. $C \neq \emptyset$ ve $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere, f fonksiyonunun

$$\text{epi } f = \{(x, \mu) : f(x) \leq \mu, \mu \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \quad (3.17)$$

ile ifade edilen kümesine f fonksiyonunun epigrafı denir ve $\text{epi } f$ ile gösterilir. Özel olarak $C \subset \mathbb{R}$ için f fonksiyonunun epigrafı f 'nin grafiğinin üstünde kalan kümeyi

belirtir. Bir fonksiyonun konveks olması için fonksiyonun üstte kalan kısım yani epigraf kümesinin konveks olması gerekir.



Şekil 3.10. Tek değişkenli fonksiyonun epigrafı

Konveks fonksiyonlar için bazı örnekler:

- i) $x \in \mathbb{R}$ ve $n \geq 1$ için $f(x) = x^{2n}$ fonksiyonu,
- ii) $x \geq 0, p > 1, f(x) = x^p$ fonksiyonu,
- iii) $x > -\alpha, p > 0, f(x) = \frac{1}{(x+\alpha)^p}$ fonksiyonu,
- iv) $x \in [0, \pi/2), f(x) = \tan x$ fonksiyonu,
- v) $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = e^x$ fonksiyonu konveks fonksiyonlardır.

Konkav fonksiyonlar için bazı örnekler:

- i) $x \in (0, \infty)$ için $f(x) = \ln x$ fonksiyonu,
- ii) $x \in [-\pi/2, \pi/2], f(x) = \cos x$ fonksiyonu,
- iii) $x \geq 0, p \in (0,1), f(x) = x^p$ fonksiyonu,
- iv) $x \in [0, \pi]$ için $f(x) = \sin x$ fonksiyonu konkav fonksiyonlardır.

Tanım 3.2.9. Jensen Eşitsizliği: $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ 'ye bir fonksiyon olmak üzere, f fonksiyonu konvekstir ancak ve ancak

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n) \quad (3.18)$$

Bura da $x_1, x_2, \dots, x_n \in C$ ve $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0$ iken $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$ dir.

“ $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$ ” konvekslik şartının genişletilmesiyle Jensen Eşitsizliği elde edilir. Eşitsizlik adını 1905’te eşitsizliği ispatlayan Danimarkalı matematikçiden almıştır. Jensen Eşitsizliği pek çok eşitsizlikten daha genel bir eşitsizliktir ve birçok uygulaması vardır. En önemli klasik eşitsizliklerin birçoğunu kanıtlamak için de kullanılır [4].

Not 3.2.2.

1)Eğer $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ iken Jensen Eşitsizliği

$$f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n} \quad (3.19)$$

haline dönüşür.

2)Eğer f konkav fonksiyon ise Jensen Eşitsizliği ve 1)’de verilen eşitsizlik

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n) \quad (3.20)$$

ve

$$f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n} \quad (3.21)$$

olarak elde edilir.

Tanım 3.2.10. Ağırlıklı Aritmetik Ortalama- Geometrik Ortalama Eşitsizliği:

$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$ ise aşağıdaki Ağırlıklı Aritmetik Ortalama- Geometrik Ortalama Eşitsizliği geçerlidir.

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \quad (3.22)$$

Tanım 3.2.11. Aritmetik Ortalama – Geometrik Ortalama Eşitsizliği:

$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$ olmak üzere $\lambda_1 =$

$\lambda_2 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ için

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \quad (3.23)$$

Aritmetik Ortalama – Geometrik Ortalama Eşitsizliği elde edilir. Burada eşitlik hali yalnızca $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ durumu için doğrudur.

$x_1, x_2, \dots, x_n > 0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0$ ve $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$ için $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$t \neq 0$ için

$$m_t = \left(\frac{\lambda_1 x_1^t + \lambda_2 x_2^t + \dots + \lambda_n x_n^t}{n} \right)^{1/t} \quad (3.24)$$

ağırlıklı ortalama eşitliği olarak tanımlanır.

Bu fonksiyon;

$t=1$ için

$$m_1 = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n}{n} \quad (3.25)$$

ağırlıklı aritmetik ortalama,

$t=-1$ için

$$m_{-1} = \frac{n}{\frac{\lambda_1}{x_1} + \frac{\lambda_2}{x_2} + \dots + \frac{\lambda_n}{x_n}} \quad (3.26)$$

ağırlıklı harmonik ortalama,

$t=2$ için

$$m_2 = \sqrt{\frac{\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2}{n}} \quad (3.27)$$

ağırlıklı kare kök ortalamasını vermektedir.

$$m_0 = \lim_{t \rightarrow 0} m_t \quad (3.28)$$

olarak tanımlarsak

$$m_0 = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n} \quad (3.29)$$

ağırlıklı geometrik ortalama elde edilir. Ayrıca eğer

$$m_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} m_t \quad (3.30)$$

ve

$$m_{-\infty} = \lim_{t \rightarrow -\infty} m_t \quad (3.31)$$

kabul edersek

$$m_\infty = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad (3.32)$$

ve

$$m_{-\infty} = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad (3.33)$$

elde edilir. Bunlar L' Hospital kuralı kullanılarak kolayca gösterilebilir.

Tanım 3.2.12. Kuvvet Ortalaması Eşitsizliği:

$x_1, x_2, \dots, x_n > 0$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0$ ve $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$ olsun. s ve t sıfır olmayan reel sayılar ve $s < t$ olmak üzere,

$$\left(\frac{\lambda_1 x_1^s + \lambda_2 x_2^s + \dots + \lambda_n x_n^s}{n} \right)^{1/s} < \left(\frac{\lambda_1 x_1^t + \lambda_2 x_2^t + \dots + \lambda_n x_n^t}{n} \right)^{1/t} \quad (3.34)$$

dir. Bu eşitsizliğe kuvvet ortalaması eşitsizliği denir. Bu eşitsizlik m_t fonksiyonunun monoton artanlığından elde edilir[66].

Not 3.2.3.

Eğer $t < 0 < s$ ise $m_t < m_0 < m_s$ olur. Ayrıca yukarıdaki eşitsizlikten

$$m_{-\infty} \leq m_{-1} \leq m_0 \leq m_1 \leq m_2 \leq m_{\infty} \quad (3.35)$$

elde edilir.

Tanım 3.2.13. Hölder Eşitsizliği:

$p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ reel sayıları ve $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ reel (kompleks) sayıları için

$$\sum_{k=1}^n |a_k| |b_k| \leq (\sum_{k=1}^n |a_k|^p)^{1/p} (\sum_{k=1}^n |b_k|^q)^{1/q} \quad (3.36)$$

dir. Bu eşitsizlik Hölder Eşitsizliği olarak isimlendirilir.

Hölder Eşitsizliği'nin ispatı; $f(x) = x^p$ kesin konveks fonksiyonuna Jensen Eşitsizliği uygulanarak elde edilir.

Not 3.2.4.

Hölder Eşitsizliği eğer $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ ise Hölder Eşitliği'ne dönüşebilir. Bu eşitlik ise

$$\frac{|a_1|^p}{|b_1|^q} = \frac{|a_2|^p}{|b_2|^q} = \dots = \frac{|a_n|^p}{|b_n|^q} \quad (3.37)$$

dir.

Eğer $p=q=2$ ise Hölder Eşitsizliği Cauchy Eşitsizliği'ne dönüşür. Yani

$$(\sum_{k=1}^n |a_k| |b_k|)^2 \leq (\sum_{k=1}^n |a_k|^2) (\sum_{k=1}^n |b_k|^2) \quad (3.38)$$

Cauchy Eşitsizliği elde edilir.

Tanım 3.2.14. Minkowski Üçgen Eşitsizliği:

$p > 1$ ve $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \geq 0$ ise

$$(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p)^{1/p} \leq (\sum_{k=1}^n a_k^p)^{1/p} + (\sum_{k=1}^n b_k^p)^{1/p} \quad (3.39)$$

dir. Bu eşitsizlik Minkowski Eşitsizliği olarak isimlendirilir.

Minkowski Eşitsizliği'nin ispatı: $f(x) = \left(1 + x^{\frac{1}{p}}\right)^p, x \in (0, \infty)$ üzerinde kesin konkav fonksiyonuna Jensen Eşitsizliği uygulanarak elde edilir.

Not 3.2.5.

1) $\frac{|b_k|}{|a_k|} = \frac{|b_k|}{|a_k|} = \dots = \frac{|b_k|}{|a_k|}$ olduğu zaman Minkowski Üçgen Eşitsizliği

$$(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p)^{1/p} = (\sum_{k=1}^n a_k^p)^{1/p} + (\sum_{k=1}^n b_k^p)^{1/p} \quad (3.40)$$

eşitliğine dönüşür.

2) Eğer $p=2$ ise

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} \quad (3.41)$$

üçgen Eşitsizliği olarak adlandırılır.

Jensen Eşitsizliği'nin uygulamaları

i). Eğer $a, b \geq 0$ ve $a + b = 2$ ise

$$(1 + \sqrt[5]{a})^5 + (1 + \sqrt[5]{b})^5 \leq 2^6 \quad (3.42)$$

dir.

Gerçekten, $f(x) = (1 + \sqrt[5]{x})^5$ fonksiyonu $[0, \infty)$ üzerinde kesin konkavdır ve Jensen Eşitsizliği'nin tersini sağlar. Dolayısıyla bu fonksiyon için Jensen Eşitsizliği uygulandığında yukarıdaki eşitsizlik elde edilir.

ii) Eğer $a, b, c > 0$ ise

$$a^a b^b c^c \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c} \quad (3.43)$$

dir.

Gerçekten, $f(x) = x \ln x$ fonksiyonu için Jensen Eşitsizliği'ni kullanarak

$$\ln(a^a b^b c^c) \geq (a + b + c) \ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \quad x \in (0, \infty) \quad (3.44)$$

elde edilir. Gerçekten, $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ olduğundan, f fonksiyonu $(0, \infty)$ üzerinde kesin konvektir, Jensen Eşitsizliği'ni sağlar. Dolayısıyla bu fonksiyon için Jensen Eşitsizliği uygulandığında yukarıdaki eşitsizlik elde edilir.

iii) Eğer $a, b, c > 0$ ise

$$\frac{a}{a+3b+3c} + \frac{b}{3a+b+3c} + \frac{c}{3a+3b+c} \geq \frac{3}{7} \quad (3.45)$$

dir.

Gerçekten, s bir pozitif sayı v $f(x) = \frac{x}{s-x} = \frac{s}{s-x} - 1$, $x \in (0, s)$ kesin konveks fonksiyon olsun. Bu fonksiyon için Jensen Eşitsizliği uygulandığında yukarıdaki eşitsizlik elde edilir.

iv) Bir üçgen ve açıları α, β, γ için, Jensen Eşitsizliği kullanılarak aşağıdakiler elde edilebilir.

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (3.46)$$

$$\sqrt{\sin \alpha} + \sqrt{\sin \beta} + \sqrt{\sin \gamma} \leq 3\sqrt[4]{\frac{3}{4}} \quad (3.47)$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8} \quad (3.48)$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma \leq \frac{1}{8} \quad (3.49)$$

$$\sec \frac{\alpha}{2} + \sec \frac{\beta}{2} + \sec \frac{\gamma}{2} \geq 2\sqrt{3} \quad (3.50)$$

Gerçekten, Jensen eşitsizliğini $x \in (0, \pi)$ için $\sin x, \sqrt{\sin x}$, $\ln \sin x$, $\ln \cos x$ kesin konkav fonksiyonları ve $\sec \frac{x}{2}$ kesin konveks fonksiyonu için uyguladığımızda yukarıdaki eşitsizlikler elde edilir.

v) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n > 0$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0$ ve $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$ olsun. Eğer

$$\alpha_1^{\lambda_1} \dots \alpha_n^{\lambda_n} = 1 \text{ ise}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \geq \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n} \quad (3.51)$$

dir. $k=1, \dots, n$ için eşitlik $\alpha_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}$ iken olur.

Gerçekten, Ağırlıklı Aritmetik Ortalama – Geometrik Ortalama eşitsizliğini kullanarak

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \lambda_1 \left(\frac{\alpha_1}{\lambda_1} \right) + \dots + \lambda_n \left(\frac{\alpha_n}{\lambda_n} \right) \geq \left(\frac{\alpha_1}{\lambda_1} \right)^{\lambda_1} + \dots + \left(\frac{\alpha_n}{\lambda_n} \right)^{\lambda_n} = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}.$$

$$\alpha_1^{\lambda_1} \dots \alpha_n^{\lambda_n} = 1 \text{ ise } k=1, \dots, n \text{ ve } \frac{\alpha_1}{\lambda_1} = \frac{\alpha_2}{\lambda_2} = \dots = \frac{\alpha_n}{\lambda_n}$$

kısıtlaması olduğu durumda $\alpha_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}$ için eşitlik oluşur.

vi) a) Eğer $a, b, c > 0$ ise

$$\frac{a^{10} + b^{10} + c^{10}}{a^5 + b^5 + c^5} \geq \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^5 \quad (3.52)$$

b) $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ ve $k > p \geq 0$ ise

$$\frac{a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k}{a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^{k-p} \quad (3.53)$$

Gerçekten, a) (ii)'nin özel durumudur.

c)

$$m_t = \left(\frac{a_1^t + a_2^t + \dots + a_n^t}{n} \right)^{1/t} \frac{a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k}{a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^{k-p} \quad (3.54)$$

olsun. Kuvvet Ortalama Eşitsizliği kullanılarak

$$a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k = n m_k^k = n m_k^k m_k^{k-p} \geq n m_p^p m_1^{k-p} \quad (3.55)$$

Kuvvet Ortalaması Eşitsizliği ile

$$a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k = (a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p) \cdot \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^{k-p} \quad (3.56)$$

elde edilir.

vii) Eğer $a, b, c, x, y, z, n > 0$ ve $(a^n + b^n + c^n)^{n+1} = x^n + y^n + z^n$ ise

$$\frac{a^{n+1}}{x} + \frac{b^{n+1}}{y} + \frac{c^{n+1}}{z} \geq 1 \quad (3.57)$$

Gerçekten,

$$a^n + b^n + c^n = \left[\frac{a^{n+1}}{x} \right]^{\frac{n}{n+1}} \cdot x^{\frac{n}{n+1}} + \left[\frac{b^{n+1}}{y} \right]^{\frac{n}{n+1}} \cdot y^{\frac{n}{n+1}} + \left[\frac{c^{n+1}}{z} \right]^{\frac{n}{n+1}} \cdot z^{\frac{n}{n+1}} \quad (3.58)$$

$$p = \frac{n}{n+1} \text{ ve } q = \frac{p}{p-1} = n + 1$$

ile Hölder Eşitsizliği'ni kullanarak

$$a^n + b^n + c^n \leq \left(\frac{a^{n+1}}{x} + \frac{b^{n+1}}{y} + \frac{c^{n+1}}{z} \right)^{\frac{n}{n+1}} (x^n + y^n + z^n)^{\frac{n}{n+1}} \quad (3.59)$$

elde edilir.

viii) Eğer $a_1, a_2, \dots, a_n > 0, b_1, b_2, \dots, b_n > 0$ ise

$$\frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^{n+1}}{(b_1 + b_2 + \dots + b_n)^n} \leq \frac{a_1^{n+1}}{b_1^n} + \dots + \frac{a_n^{n+1}}{b_n^n} \quad (3.60)$$

Gerçekten, $p=n+1, q=\frac{n}{n+1}$ ile Hölder Eşitsizliği kullanılarak

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \left[\frac{a_1^{n+1}}{b_1^n} \right]^{\frac{n}{n+1}} b_1^{\frac{n}{n+1}} + \dots + \left[\frac{a_n^{n+1}}{b_n^n} \right]^{\frac{n}{n+1}} b_n^{\frac{n}{n+1}} \quad (3.61)$$

$$\leq \left[\frac{a_1^{n+1}}{b_1^n} + \dots + \frac{a_n^{n+1}}{b_n^n} \right]^{\frac{n}{n+1}} (b_1 + b_2 + \dots + b_n)^{\frac{n}{n+1}} \quad (3.62)$$

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^{n+1} \leq \left(\frac{a_1^{n+1}}{b_1^n} + \dots + \frac{a_n^{n+1}}{b_n^n} \right) (b_1 + b_2 + \dots + b_n)^n \quad (3.63)$$

ile istenilen eşitsizlik bulunmuş olur.

3.3 Soyut Konveks Fonksiyonlar

Bu tez çalışmasında da bahsedilmiş olan konveksliğin bir alt dalı, soyut konveks analiz yakın zamanda oldukça popüler hale gelmiştir. Uygulama ve teorik çalışmaları konvekslik kavramının soyutlaştırılması zorunluluğunu beraberinde getirmiştir. Konveksliğin genelleştirilmesi topolojik soyut konvekslik, fonksiyonel soyut konvekslik ve bunlara ek farklı birkaç yöntemle gerçekleştirilmektedir. Günümüze kadar çok sayıda soyut konvekslik biçimi elde edilmiştir. Bu başlıkta temel bazı soyut konvekslik biçimleri verilecektir.

3.3.1 m-konveks fonksiyonlar

$a^* > 0$ ve $m \in [0,1]$ olmak üzere $f: [0, a^*] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x, y \in [0, a^*]$ ve $k \in [0,1]$ için

$$f(kx + m(1-k)y) \leq kf(x) + m(1-k)f(y) \quad (3.64)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, bu fonksiyona m-konveks fonksiyon denir [27, 56, 57, 49, 60].

3.3.2 (s, m)-konveks fonksiyonlar

$a^* > 0$ ve $m \in [0,1]$ olmak üzere, $f: [0, a^*] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyon $\forall x, y \in [0, a^*], k \in [0,1]$ ve $(s, m) \in [0,1]^2$ için

$$f(kx + m(1-k)y) \leq k^s f(x) + m(1-k^s)f(y) \quad (3.65)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, bu fonksiyona (s, m)-konveks fonksiyon denir [49, 60].

3.3.3 Kuazikonveks fonksiyonlar

Eğer $f: [a^*, b^*] \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu $\forall x, y \in [a^*, b^*]$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\} \quad (3.66)$$

eşitsizliği sağlıyorsa, bu fonksiyona kuazikonveks fonksiyon denir [55].

3.3.4 B^{-1} -konveks fonksiyonlar

$U \subset \mathbb{R}_{++}^n$ olmak üzere B^{-1} -konveks küme ve $f: U \rightarrow \mathbb{R}_{++}$ fonksiyonu $\forall x, y \in U$ ve $\lambda \in [1, +\infty]$ için

$$f(\lambda x \wedge y) \leq \lambda f(x) \wedge f(y) \quad (3.67)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, bu fonksiyona B^{-1} -konveks fonksiyon denir [64].

3.4 B-konveks Kümeler ve B-konveks Fonksiyonlar

B-konvekslik tanımında, $\forall r \in \mathbb{N}$ için $\phi_r: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\phi_r(x_1, \dots, x_n) =$

$(x_1^{2r+1}, \dots, x_n^{2r+1})$ homeomorfizmi ele alınır. Bu fonksiyon yardımıyla aşağıdaki ifadeler ve B-konveks kümeler tanımlanır. Daha sonra ise B-konveks kümelerin özellikleri verilecek ve buna bağlı çalışmalar yapılacaktır.

Tanım 3.4.1. Boştan farklı sonlu bir $B = \{x^{(1)}, \dots, x^{(m)}\} \subset \mathbb{R}^n$ olsun.

$$Co^r(B) = \{\phi_r^{-1}(\sum_{i=1}^m t_i \phi_r(x^{(i)})) : t_i \geq 0, \sum_{i=1}^m t_i = 1\} \quad (3.68)$$

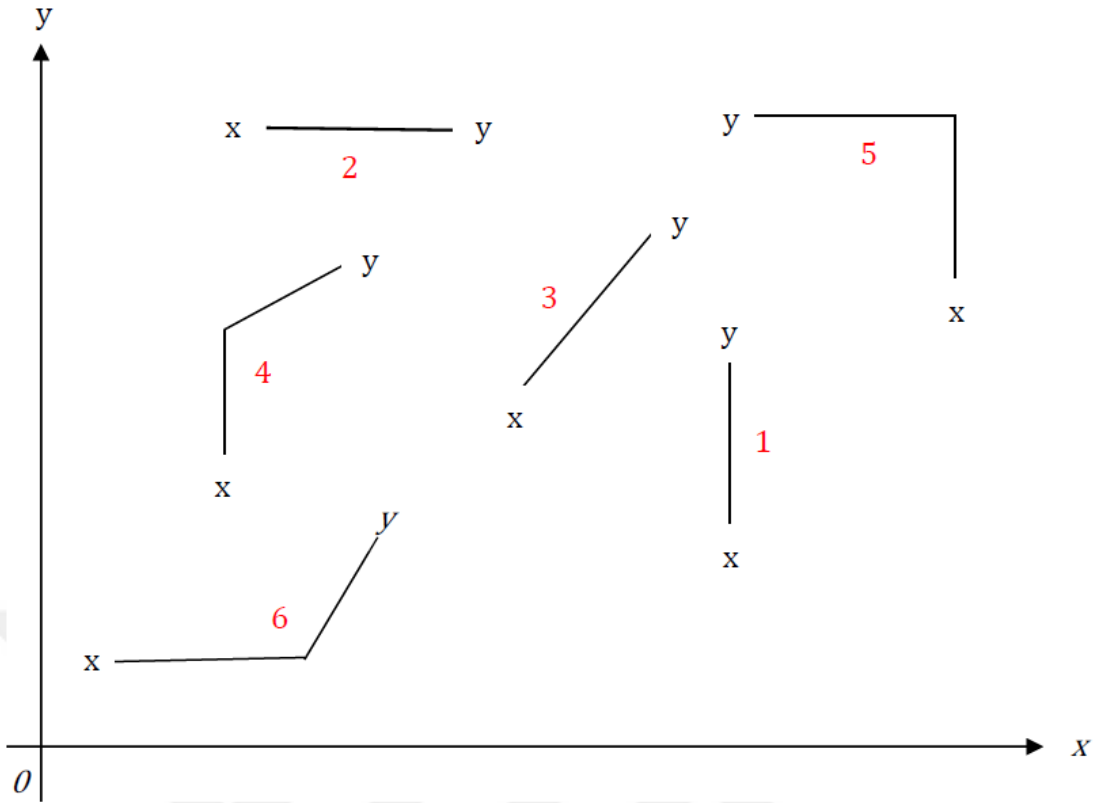
kümesine B kümesinin r -konveks kabuğu denir.

Tanım 3.4.2. Boştan farklı sonlu bir $B = \{x^{(1)}, \dots, x^{(m)}\} \subset \mathbb{R}^n$ kümesi için

$$Co^\infty(B) = \lim_{r \rightarrow \infty} Co^r(B) \quad (3.69)$$

kümesine B kümesinin B-konveks kombinasyonu denir.

Tanım 3.4.3. $B \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin her sonlu alt kümesinin B-konveks kombinasyonu da B 'nin alt kümesi oluyor ise B kümesine B-konveks küme den



Şekil 3.11. Verilen farklı ikili noktaların B-konveks kabuklarının grafikleri

1. $x = (6,1), y = (6,8)$

2. $x = (2,5), y = (4,5)$

3. $x = (3,3), y = (6,6)$

4. $x = (2,3), y = (7,10)$

5. $x = (6,2), y = (3,8)$

6. $x = (1,1), y = (6,3)$

Teorem 3.4.1. a) Boş küme, $\mathbb{R}^n$ ve tek nokta kümeleri B-konvektir.

b) $\{L_\lambda / \lambda \in \Lambda\}$ kümesi B-konveks kümelerin keyfi bir ailesi olsun. Bu durumda

$$\bigcap_{\lambda} L_\lambda$$

B-konvektir.

c) $\{L_\lambda / \lambda \in \Lambda\}$ kümesi B-konveks kümelerin keyfi bir ailesi olsun. Her $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ için $L_{\lambda_1} \cup L_{\lambda_2} \subset L_{\lambda_3}$ şartını sağlayan bir $\lambda_3 \in \Lambda$ varsa

$$\bigcup_{\lambda} L_{\lambda}$$

kümesi B-konvektir.

Tanım 3.4.4. $B \subset \mathbb{R}^n$ B-konveks bir küme olsun. Eğer B kümesinin tümleyeni $B' = \mathbb{R}^n \setminus B$ de B-konveks ise B kümesine B-konveks yarı uzay denir.

Tanım 3.4.5. $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ olsun. $\mathbb{R}^n$ 'de, B kümesini içeren tüm B-konveks kümelerin kesişimine $\mathcal{B}$ 'nin B-konveks kabuğu denir. $B[\mathcal{B}]$ ile gösterilir.

Teorem 3.4.2. B-konveks kabuk ile ilgili aşağıdaki özellikler sağlanır:

- a) $B[\emptyset] = \emptyset, B[\mathbb{R}^n] = \mathbb{R}^n$ ve her $x \in \mathbb{R}^n$ için $B[\{x\}] = \{x\}$ dir.
- b) Her $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ için $\mathcal{B} \subset B[\mathcal{B}]$ ve $B[B[\mathcal{B}]] = B[\mathcal{B}]$ olur.
- c) Her $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \subset \mathbb{R}^n$ için eğer $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$ ise $B[\mathcal{B}_1] \subset B[\mathcal{B}_2]$ olur.
- d) Her $S \subset \mathbb{R}^n$ için $B[S] = \bigcup \{B[\mathcal{B}]: \mathcal{B}, S \text{ kümesinin sonlu bir alt kümesi}\}$.
- e) Bir $S \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin B-konveks olması için gerekli ve yeterli koşul her bir sonlu $\mathcal{B} \subset S$ için $B[\mathcal{B}] \subset S$ olmasıdır.

Eğer boştan farklı sonlu $\mathcal{B}$ kümesi özel olarak $\mathcal{B} = \{x^{(1)}, \dots, x^{(m)}\} \subset \mathbb{R}_+^n$ ise $\mathcal{B}$ 'nin B-konveks kombinasyonu

$$Co^\infty \mathcal{B} = \lim_{r \rightarrow \infty} Co^r(\mathcal{B}) = \left\{ \bigvee_{i=1}^m \lambda_i x^{(i)} : \lambda_i \in [0,1], \max_{1 \leq i \leq m} \{\lambda_i\} = 1 \right\} \quad (3.70)$$

biçiminde açık bir analitik gösterime sahip olur. Burada

$$\bigvee_{i=1}^m x^{(i)} = (\max\{x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(m)}\}, \dots, \max\{x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(m)}\}) \quad (3.71)$$

Tanım 3.4.6. $B \subset \mathbb{R}^n$ ve $f: B \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ olsun. Eğer $epif$ kümesi B-konveks küme ise f fonksiyonuna B-konveks fonksiyon denir.

Teorem 3.4.3. $B \subset \mathbb{R}_+^n$, $f : B \rightarrow \mathbb{R}_+^n \cup \{+\infty\}$ olsun. f fonksiyonunun B-konveks olabilmesi için gerek ve yeter koşul B kümesinin B-konveks olması ve her $x, y \in B$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x \vee y) \leq \lambda f(x) \vee f(y) \quad (3.72)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Tanım 3.4.7. $f: B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ olsun.

$$\text{hyp}^+ f := \{(x, \mu) : x \in B, \mu \in \mathbb{R}_+, \mu \leq f(x)\} \quad (3.73)$$

kümesi B-konveks ise f fonksiyonuna B-konkav fonksiyon denir.

Teorem 3.4.4. $B \subset \mathbb{R}_+^n$, $f : B \rightarrow \mathbb{R}_+^n \cup \{+\infty\}$ olsun. f fonksiyonunun B-konkav olabilmesi için gerek ve yeter koşul B kümesinin B-konkav olması ve $\forall x, y \in B$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$\lambda f(x) \vee f(y) \leq f(\lambda x \vee y) \quad (3.74)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Teorem 3.4.5. i) $B \subset \mathbb{R}_+^n$, $f : B \rightarrow \mathbb{R}_+^n \cup \{+\infty\}$ olsun. f 'in pozitif skaler ile çarpımı da B-konvektir.

ii) $f: B \subset \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n \cup \{+\infty\}$ olsun. Her bir $A \subset B$ B-konveks alt kümesi için f fonksiyonun A kümesine kısıtlanması da B-konvektir.

iii) Eğer $f: U \subset \mathbb{R}_+^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}_+^n \cup \{+\infty\}$ B-konveks fonksiyon ve $g: V \subset \mathbb{R}_+^n \cup \{+\infty\} \rightarrow \mathbb{R}_+^n \cup \{+\infty\}$ azalmayan B-konveks bir fonksiyon ise $g \circ f$ 'de B-konvektir.

iv) $f: U \subset \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ ve $g: U \subset \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ azalan(artan) ve B-konveks ise $h(x) = f(x).g(x)$ fonksiyonu da azalan(artan) ve B-konvektir.

v) $f: U \subset \mathbb{R}_+ \rightarrow V \subset \mathbb{R}_+$ birebir, örten ve artan bir fonksiyon olsun. f 'in B-konveks olması için gerekli ve yeterli koşul f^{-1} fonksiyonun B-konkav olmasıdır. Eğer

f azalan ise f ile f^{-1} fonksiyonu aynı konvekslik karakterindedir. Yani f B-konveks ise f^{-1} fonksiyonu da B-konvekstir, f B-konkav ise f^{-1} fonksiyonu da B-konkavdır.



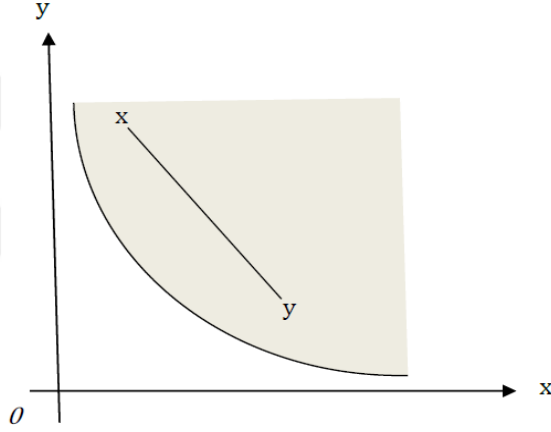
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

4.1 B-konveks Fonksiyon Örnekleri

Jensen Eşitsizliği'nin temel uygulamaları için öncelikle $\mathbb{R}_+$ 'da çeşitli fonksiyonların B-konveksliği incelenecektir.

Örnek 4.1.1. $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu B-konveks fonksiyondur.

İlk önce $f(x) = \frac{1}{x}$ 'in konveksliği incelenecektir. Bu fonksiyonun konveks olabilmesi için $\text{epi } f$ den aldığımız iki noktayı birleştiren doğru parçasının da yine $\text{epi } f$ de kalması gerekmektedir. Grafik üzerinde iki nokta alıp gösterilecek olursa;



Şekil 4.1. $\frac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiği ve konveksliği

Şimdide f fonksiyonunun B-konveksliği incelenecektir. Bunun için, aşağıdaki iki durumun incelenmesi gerekmektedir.

1) $\lambda x \vee y = \lambda x$ olsun.

$$f(\lambda x \vee y) = \frac{1}{\lambda x \vee y} = \frac{1}{\lambda x} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{\lambda}{x} \vee \frac{1}{y} = \lambda f(x) \vee f(y) \quad (4.1)$$

2) $\lambda x \vee y = y$

$$f(\lambda x \vee y) = \frac{1}{\lambda x \vee y} = \frac{1}{y} \leq \frac{\lambda}{x} \vee \frac{1}{y} = \lambda f(x) \vee f(y) \quad (4.2)$$

Gerçekten bu koşullar sağlandığından f fonksiyonunun B-konveks olduğu ispatlanmıştır.

Dolayısıyla bu örnekle konveks bir fonksiyonun B-konveks olduğu gösterilmiş olur.

Örnek 4.1.2. $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, f(x) = x^2$ fonksiyonu B-konveks fonksiyondur. Gerçekten;

1) $\lambda x \vee y = \lambda x$ olsun. Bu durumda,

$$f(\lambda x \vee y) = (\lambda x \vee y)^2 = (\lambda x)^2 = \lambda^2 x^2 \leq \lambda x^2 \leq \lambda x^2 \vee y^2 = \lambda f(x) \vee f(y) \quad (4.3)$$

2) $\lambda x \vee y = y$ olması durumunda ise,

$$f(\lambda x \vee y) = (\lambda x \vee y)^2 = (y)^2 \leq \lambda x^2 \vee y^2 = \lambda f(x) \vee f(y) \quad (4.4)$$

Böylece f fonksiyonunun B-konveks olduğu ispatlanmıştır.

Örnek 4.1.3. $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, f(x) = e^x$ fonksiyonu B-konkav fonksiyondur. Gerçekten;

1) $\lambda x \vee y = \lambda x$ olsun. Bu durumda;

$$f(\lambda x \vee y) = e^{(\lambda x \vee y)} = e^{(\lambda x)} = e^\lambda e^x \geq \lambda e^x \quad (4.5)$$

Burada $\lambda \in [0,1]$ olduğunda $e^\lambda \geq \lambda$ olduğu kullanılmıştır. Ayrıca $f(x) = e^x$ fonksiyonu artan olduğundan;

$$e^{(\lambda x)} \geq e^y \quad (4.6)$$

olur. Böylece;

$$f(\lambda x \vee y) = e^{(\lambda x)} \geq \lambda e^x \vee e^y = \lambda f(x) \vee f(y) \quad (4.7)$$

2) $\lambda x \vee y = y$ olsun. (i) durumundaki koşullar altında, $e^y \geq e^{\lambda x}$ ve $e^\lambda e^x \geq \lambda e^x$ olduğundan,

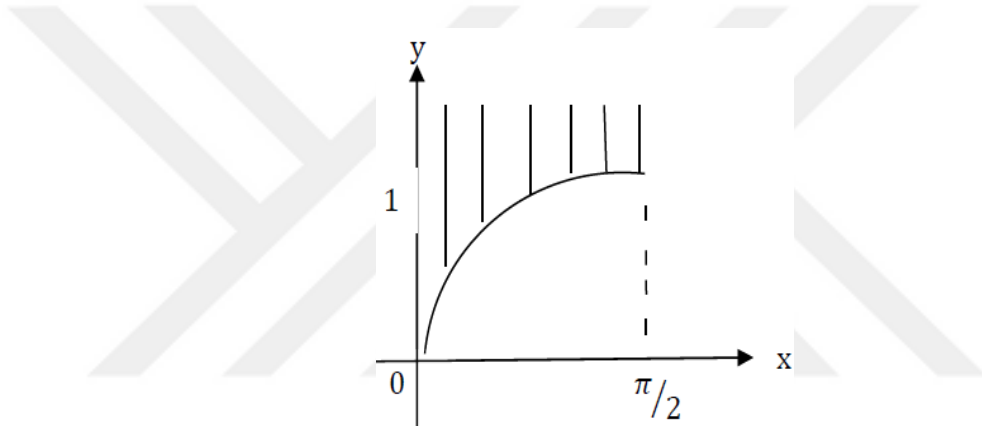
$$f(\lambda x \vee y) = e^{(\lambda x \vee y)} = e^y = \lambda e^x \vee e^y = \lambda f(x) \vee f(y) \quad (4.8)$$

olur. Böylece f fonksiyonunun B-konkav olduğu ispatlanmıştır. e^x fonksiyonu ise konveks olan ancak B-konveks olmayan fonksiyona bir örnektir. Dolayısıyla konveks ve B-konveks fonksiyon sınıflarının birbirini içermediği ifade edilebilir.

Örnek 4.1.4. $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [0,1], f(x) = \sin x$ fonksiyonu B-konkav fonksiyondur. Gerçekten;

$$f(\lambda x \vee y) = \sin(\lambda x \vee y) \geq \lambda \sin x \vee \sin y = \lambda f(x) \vee f(y) \quad (4.9)$$

olduğunu göstereceğiz, bu durumda aşağıdaki koşullar incelenecektir.



Şekil 4.2. $\sin x$ fonksiyonu B-konkavlığı

1) $\lambda x \vee y = \lambda x$ olsun.

$$f(\lambda x \vee y) = \sin(\lambda x \vee y) = \sin(\lambda x) \geq \lambda \sin x \quad (4.10)$$

dir. Ayrıca $\sin x$ fonksiyonu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında artan olduğundan $\sin(\lambda x) \geq \sin y$ kullanarak

$$f(\lambda x \vee y) = \sin(\lambda x) \geq \lambda \sin x \vee \sin y = \lambda f(x) \vee f(y) \quad (4.11)$$

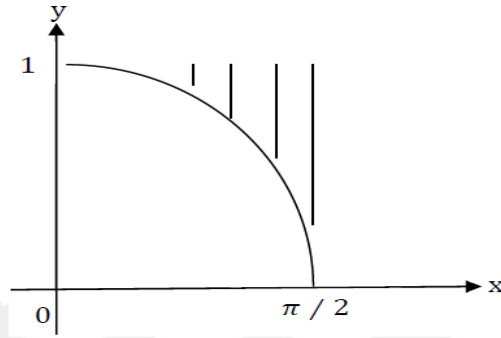
2) $\lambda x \vee y = y$ olduğu durumda, yine $\sin x$ fonksiyonunun $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında artan olduğunu kullanarak,

$$f(\lambda x \vee y) = \sin(\lambda x \vee y) = \sin y$$

$$= \sin(\lambda x) \vee \sin y = \lambda \sin x \vee \sin y = \lambda f(x) \vee f(y) \quad (4.12)$$

elde edilir. Böylece f fonksiyonunun B-konkav olduğu ispatlanmıştır.

Örnek 4.1.5. $f: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [0, 1], f(x) = \cos x$ fonksiyonu B-konveks fonksiyondur, gerçekten;



Şekil 4.3. $\cos x$ fonksiyonu B-konveksliği

$$f(\lambda x \vee y) = \cos(\lambda x \vee y) \leq \lambda \cos x \vee \cos y = \lambda f(x) \vee f(y) \quad (4.13)$$

olduğunu göstereceğiz, bu durumda aşağıdaki koşullar incelenecektir.

1) $\lambda x \vee y = \lambda x$ olsun. $f(x) = \cos x$ fonksiyonu $[0, \frac{\pi}{2}]$ aralığında azalan olduğundan $\cos \lambda x \leq \cos y$ dir, böylece;

$$\cos \lambda x \leq \lambda \cos x \vee \cos y \quad (4.14)$$

olur.

2) $\lambda x \vee y = y$ olsun, bu durumda;

$$\cos y \leq \lambda \cos x \vee \cos y \quad (4.15)$$

eşitsizliği sağlanır.

Böylece f fonksiyonunun B-konveks olduğu ispatlanmış olur.

Bu örnekle, konveks olmayan B-konveks bir fonksiyonun varlığı gösterilmiş olur.

Örnek 4.1.6. $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [0,1], f(x) = \cos^n x$ fonksiyonu B-konveks fonksiyondur, gerçekten;

1) $\lambda x \vee y = \lambda x$ ise,

$$f(\lambda x \vee y) = \cos^n(\lambda x \vee y) = \cos^n(\lambda x) \leq \lambda^n \cos^n x \leq \lambda \cos^n x \quad (4.16)$$

$$\leq \lambda \cos^n x \vee \cos^n y = \lambda f(x) \vee f(y) \quad (4.17)$$

2) $\lambda x \vee y = y$ ise,

$$f(\lambda x \vee y) = \cos^n(\lambda x \vee y) = \cos^n y \leq \lambda \cos^n x \vee \cos^n y = \lambda f(x) \vee f(y) \quad (4.18)$$

Böylece f fonksiyonunun B-konveks olduğu ispatlanmıştır.

Örnek 4.1.7. $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, f(x) = x^n$ fonksiyonu B-konveks fonksiyondur. Gerçekten;

1) $\lambda x \vee y = \lambda x$ olmak üzere,

$$f(\lambda x \vee y) = (\lambda x \vee y)^n = (\lambda x)^n$$

$$= \lambda^n x^n \leq \lambda x^n \leq \lambda x^n \vee y^n = \lambda f(x) \vee f(y) \quad (4.19)$$

elde edilir.

2) $\lambda x \vee y = y$ ise,

$$f(\lambda x \vee y) = (\lambda x \vee y)^n = y^n \leq \lambda x^n \vee y^n = \lambda f(x) \vee f(y) \quad (4.20)$$

Böylece f fonksiyonunun B-konveks olduğu ispatlanmış olur. Bu örnekle, konveks olan bir fonksiyonun B-konveks bir fonksiyon olduğu gösterilmiş olur.

Örnek 4.1.8. $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu B-konkav fonksiyondur. Bu durumda

$$f(\lambda x \vee y) \geq \lambda f(x) \vee f(y) \quad (4.21)$$

$$\sqrt{\lambda x \vee y} \geq \lambda \sqrt{x} \vee \sqrt{y} \quad (4.22)$$

olduğunu gösterelim. Gerçekten;

1) $\lambda x \vee y = \lambda x$ olsun. $\lambda x \geq y \Rightarrow \sqrt{\lambda x} \geq \sqrt{y}$ 'dir. Ayrıca,

$$f(\lambda x \vee y) = \sqrt{\lambda x \vee y} = \sqrt{\lambda x} = \sqrt{\lambda} \sqrt{x} \geq \lambda \sqrt{x} = \lambda f(x) \quad (4.23)$$

olduğundan,

$$f(\lambda x \vee y) = \sqrt{\lambda x} \geq \lambda \sqrt{x} \vee \sqrt{y} = \lambda f(x) \vee f(y) \quad (4.24)$$

2) $\lambda x \vee y = y$ olsun.

$$f(\lambda x \vee y) = \sqrt{\lambda x \vee y} = \sqrt{y} \geq \sqrt{\lambda x} \geq \lambda \sqrt{x} \quad (4.25)$$

olduğundan istenilen eşitsizlik elde edilir. Böylece f fonksiyonunun B-konkav olduğu ispatlanmıştır.

Örnek 4.1.9. $n \in \mathbb{N}$ ve $n \geq 2$ olmak üzere $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, f(x) = \sqrt[n]{x}$ fonksiyonu B-konkav fonksiyondur. Gerçekten;

$$f(\lambda x \vee y) \geq \lambda f(x) \vee f(y) \quad (4.26)$$

$$\sqrt[n]{\lambda x \vee y} \geq \lambda \sqrt[n]{x} \vee \sqrt[n]{y} \quad (4.27)$$

1) $\lambda x \vee y = \lambda x$ olsun. $\lambda x \geq y \Rightarrow \sqrt[n]{\lambda x} \geq \sqrt[n]{y}$ 'dir.

$$f(\lambda x \vee y) = \sqrt[n]{\lambda x \vee y} = \sqrt[n]{\lambda x} = \sqrt[n]{\lambda} \sqrt[n]{x} \geq \lambda \sqrt[n]{x} \vee \sqrt[n]{y} = \lambda f(x) \vee f(y) \quad (4.28)$$

2) $\lambda x \vee y = y$ olsun.

$$f(\lambda x \vee y) = \sqrt[n]{\lambda x \vee y} = \sqrt[n]{y} \geq \lambda \sqrt[n]{x} \vee \sqrt[n]{y} = \lambda f(x) \vee f(y) \quad (4.29)$$

Böylece f fonksiyonunun B-konkav olduğu ispatlanmıştır.

Örnek 4.1.10. [67] makalesinde iki B-konveks fonksiyonun toplamının B-konveks olmadığı ispatlanmıştır. Bu özelliğe bir örnekte aşağıdaki gibi verilmiştir.

$f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu B-konkav, $g(x) = 1$ fonksiyonu B-konvektir. Ancak $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, h(x) = \sqrt{x} + 1$ fonksiyonu B-konkav fonksiyondur. Gerçekten;

$$h(x) = f(x) + g(x), h(x) = \sqrt{x} + 1$$

$$h(\lambda x \vee y) \geq \lambda h(x) \vee h(y) \quad (4.30)$$

$$\sqrt{\lambda x \vee y} + 1 \geq \lambda(\sqrt{x} + 1) \vee \sqrt{y} + 1 \quad (4.31)$$

$$1) \lambda x \vee y = \lambda x$$

$$h(\lambda x \vee y) = \sqrt{\lambda x \vee y} + 1 = \sqrt{\lambda x} + 1 \quad (4.32)$$

$$y \leq \lambda x \text{ olduğundan } \sqrt{y} \leq \sqrt{\lambda x} \text{ 'dır ve } \sqrt{y} + 1 \leq \sqrt{\lambda x} + 1$$

$$0 \leq \lambda \leq 1 \text{ olduğundan } \lambda \leq \sqrt{\lambda}, \text{ dir. Buradan } \lambda\sqrt{x} \leq \sqrt{\lambda x}$$

$$\begin{aligned} h(\lambda x \vee y) &= \sqrt{\lambda x \vee y} + 1 = \sqrt{\lambda x} + 1 \geq \lambda(\sqrt{x} + 1) \vee \sqrt{y} + 1 \\ &= \lambda h(x) \vee h(y) \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$2) \lambda x \vee y = y$$

$$h(\lambda x \vee y) = \sqrt{\lambda x \vee y} + 1 = \sqrt{y} + 1 \quad (4.34)$$

$$\lambda x \leq y \text{ olduğundan } \sqrt{\lambda x} \leq \sqrt{y} \text{ 'dır ve } \lambda\sqrt{x} \leq \sqrt{\lambda x} \text{ olduğundan}$$

$$\lambda(\sqrt{x} + 1) \leq \sqrt{\lambda x} + 1 \leq \sqrt{y} + 1 = h(\lambda x \vee y) \quad (4.35)$$

olur. Buradan

$$h(\lambda x \vee y) = \sqrt{y} + 1 \geq \lambda(\sqrt{x} + 1) \vee \sqrt{y} + 1 = \lambda h(x) \vee h(y) \quad (4.36)$$

Böylece h fonksiyonunun B-konkav olduğu ispatlanmıştır.

Örnek 4.1.11. $f(x) = \frac{1}{x}$ ve $g(x)=x^2$ iken $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x^2}$ B-konveks fonksiyon olur.

$h(x)=(g \circ f)(x)=g(f(x))=\left(\frac{1}{x}\right)^2=\frac{1}{x^2}$ B-konveks fonksiyondur. Gerçekten eşitsizlik ile de h' ın B-konveksliği aşağıdaki gibi gösterilebilir;

$$h(\lambda x \vee y) \leq \lambda h(x) \vee h(y) \quad (4.37)$$

$$\frac{1}{(\lambda x \vee y)^2} \leq \frac{\lambda}{x^2} \vee \frac{1}{y^2} \quad (4.38)$$

olduğunu göstermeye çalışıyoruz.

1) $\lambda x \vee y = \lambda x$ için,

$$\frac{1}{(\lambda x \vee y)^2} = \frac{1}{(\lambda x)^2} = \frac{1}{\lambda^2 x^2} \leq \frac{1}{y^2} \leq \frac{\lambda}{x^2} \vee \frac{1}{y^2} \quad (4.39)$$

2) $\lambda x \vee y = y$ için,

$$\frac{1}{(\lambda x \vee y)^2} = \frac{1}{y^2} \leq \frac{\lambda}{x^2} \vee \frac{1}{y^2} \quad (4.40)$$

elde edilir.

Benzer şekilde $\cos^n x$ fonksiyonu da x^n ve $\cos x$ fonksiyonlarının bileşkeleri olarak bu teoremin yardımıyla ispatlanabilir. Ayrıca bununla birlikte başka fonksiyonların B-konveksliği de bu yolla incelenebilir.

4.2 B-konveks Fonksiyonlar için Jensen Eşitsizliği ve Genelleştirmeleri

Teorem 4.2.1. (B-konveks fonksiyonlar için Jensen Eşitsizliği) $B \subset \mathbb{R}_+^n, f: B \rightarrow \mathbb{R}_+^n \cup \{+\infty\}$ olsun. f fonksiyonunun B-konveks olması için gerekli yeterli ve gerekli koşul B kümesinin B-konveks olmasıdır ve $i=1, \dots, m$ olmak üzere $\forall x_i \in B$ ve $\forall \lambda_i \in [0,1], \max_{1 \leq i \leq m} \{\lambda_i\} = 1$ için

$$f(\vee_{i=1}^m \lambda_i x_i) \leq \vee_{i=1}^m \lambda_i f(x_i) \quad (4.41)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Bu teoremin ispatı[4] makalesinde verilmiştir.

Teorem 4.2.2. B-konveks fonksiyonlar için genelleştirilmiş Jensen Eşitsizliği:

$B \subset \mathbb{R}_+^n$, $f : B \rightarrow \mathbb{R}_+^n \cup \{+\infty\}$ sürekli bir fonksiyon olsun f fonksiyonunun B-konveks olması gerekli koşul B kümesinin B-konveks olmasıdır ve $i=1, \dots, m$ olmak üzere $x_i \in B$ noktaları ile $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in [0, +\infty)$ için

$$f\left(\bigvee_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\max_{1 \leq j \leq m} \{\lambda_j\}} x_i\right) \leq \frac{1}{\max_{1 \leq j \leq m} \{\lambda_j\}} \bigvee_{i=1}^m \lambda_i f(x_i) \quad (4.42)$$

özelliliği sağlanır. Eğer f konkav olursa eşitsizlik tersine döner.

İspat:

$\max\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\} = P$ olsun,

$$\frac{\max\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}}{P} = 1$$

olur.

$$\max\left\{\frac{\lambda_1}{P}, \frac{\lambda_2}{P}, \dots, \frac{\lambda_m}{P}\right\} = 1, \max\left\{\frac{\lambda_1}{\max_{1 \leq j \leq m} \{\lambda_j\}}, \frac{\lambda_2}{\max_{1 \leq j \leq m} \{\lambda_j\}}, \dots, \frac{\lambda_m}{\max_{1 \leq j \leq m} \{\lambda_j\}}\right\} = 1$$

$$f\left(\frac{\lambda_1}{\max_{1 \leq j \leq m} \{\lambda_j\}} x_1 \bigvee \frac{\lambda_2}{\max_{1 \leq j \leq m} \{\lambda_j\}} x_2 \bigvee \dots \bigvee \frac{\lambda_m}{\max_{1 \leq j \leq m} \{\lambda_j\}} x_m\right)$$

$$\leq \frac{\lambda_1}{\max_{1 \leq j \leq m} \{\lambda_j\}} f(x_1) \bigvee \frac{\lambda_2}{\max_{1 \leq j \leq m} \{\lambda_j\}} f(x_2) \bigvee \dots \bigvee \frac{\lambda_m}{\max_{1 \leq j \leq m} \{\lambda_j\}} f(x_m) \quad (4.43)$$

$$f\left(\bigvee_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\max_{1 \leq j \leq m} \{\lambda_j\}} x_i\right) \leq \frac{1}{\max_{1 \leq j \leq m} \{\lambda_j\}} \bigvee_{i=1}^m \lambda_i f(x_i) \quad (4.44)$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.3. $B \subset \mathbb{R}_+^n$, $f : B \rightarrow \mathbb{R}_+^n \cup \{+\infty\}$ sürekli bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun B-konveks olması gerekli koşul B kümesinin B-konveks olmasıdır ve $i=1, \dots, m$ olmak üzere $x_i \in B$ noktaları ile $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in [0, +\infty)$, $\max_{1 \leq i \leq n} \{\lambda_i\} = P$ için

$$f\left(\frac{1}{P} \bigvee_{j=1}^m \lambda_j x_j\right) \leq \frac{1}{P} \bigvee_{j=1}^m \lambda_j f(x_j) \quad (4.45)$$

eşitsizliği tanımlanır. Eğer f konkav olursa eşitsizlik tersine döner.

İspat: $x_1, x_2, \dots, x_m \in B$ olmak üzere $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in [0, +\infty)$ ve

$\max_{1 \leq i \leq m} \{\lambda_i\} = P$ olsun. Böylece

$$\max\left\{\frac{\lambda_1}{P}, \frac{\lambda_2}{P}, \dots, \frac{\lambda_m}{P}\right\} = 1, \max\left\{\frac{\lambda_1}{\max_{1 \leq i \leq m} \{\lambda_i\}}, \frac{\lambda_2}{\max_{1 \leq i \leq m} \{\lambda_i\}}, \dots, \frac{\lambda_m}{\max_{1 \leq i \leq m} \{\lambda_i\}}\right\} = 1$$

$$f\left(\frac{\lambda_1}{\max_{1 \leq i \leq m} \{\lambda_i\}} x_1 \vee \frac{\lambda_2}{\max_{1 \leq i \leq m} \{\lambda_i\}} x_2 \vee \dots \vee \frac{\lambda_m}{\max_{1 \leq i \leq m} \{\lambda_i\}} x_m\right)$$

$$\leq \frac{\lambda_1}{\max_{1 \leq i \leq m} \{\lambda_i\}} f(x_1) \vee \frac{\lambda_2}{\max_{1 \leq i \leq m} \{\lambda_i\}} f(x_2) \vee \dots \vee \frac{\lambda_m}{\max_{1 \leq i \leq m} \{\lambda_i\}} f(x_m) \quad (4.46)$$

$$= \frac{\lambda_1}{P} f(x_1) \vee \frac{\lambda_2}{P} f(x_2) \vee \dots \vee \frac{\lambda_m}{P} f(x_m) \quad (4.47)$$

$$f\left(\bigvee_{j=1}^m \frac{\lambda_j}{\max_{1 \leq i \leq m} \{\lambda_i\}} x_j\right) \leq \frac{1}{\max_{1 \leq i \leq m} \{\lambda_i\}} \bigvee_{j=1}^m \lambda_j f(x_j) \quad (4.48)$$

$$f\left(\frac{1}{P} \bigvee_{j=1}^m \lambda_j x_j\right) \leq \frac{1}{P} \bigvee_{j=1}^m \lambda_j f(x_j) \quad (4.49)$$

dır.

B-konveks fonksiyonlar için Jensen Eşitsizliği ve genelleştirmelerinden yararlanılarak aşağıdaki önemli eşitsizlikleri elde edilir.

4.3 B-konveks Fonksiyonlar için Jensen Eşitsizliği Uygulamaları

Teorem 4.3.1. $\forall x_i \in \mathbb{R}_+$ ve $\forall \lambda_i \in [0,1]$, $\max_{1 \leq i \leq m} \{\lambda_i\} = 1$ olmak üzere

$$\min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{1}{\lambda_i x_i} \right\} \leq \bigvee_{i=1}^m \lambda_i (x_i)^{-1} \quad (4.50)$$

olur.

İspat: $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu B-konveks olduğundan (4.41) eşitsizliğini sağlar.

Dolayısıyla bu eşitsizlikte yerine konulduğunda

$$f(V_{i=1}^m \lambda_i x_i) = \frac{1}{V_{i=1}^m \lambda_i x_i} \leq V_{i=1}^m \lambda_i f(x_i) \quad (4.51)$$

$$\min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{1}{\lambda_i x_i} \right\} \leq V_{i=1}^m \lambda_i (x_i)^{-1} \quad (4.52)$$

bu eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.3.2. $x_i \in B$, $1 \leq i \leq m$ ve negatif olmayan reel sayılar $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ noktaları ile $\max_{1 \leq i \leq m} \{\lambda_i\} = P$ olmak üzere

$$e^{\frac{1}{P} V_{i=1}^m \lambda_i x_i} \geq \frac{1}{P} V_{i=1}^m \lambda_i e^{x_i} \quad (4.53)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $f(x) = e^x$ fonksiyonu B-konkav olduğundan (4.45) eşitsizliğinin tersini sağlar. Dolayısıyla bu eşitsizlikte yerine konulduğunda

$$f\left(\frac{1}{P} V_{i=1}^m \lambda_i x_i\right) = e^{\frac{1}{P} V_{i=1}^m \lambda_i x_i} \geq \frac{1}{P} V_{i=1}^m \lambda_i f(x_i) = \frac{1}{P} V_{i=1}^m \lambda_i e^{x_i} \quad (4.54)$$

bu eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.3.3. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in [0, +\infty)$, $\max_{1 \leq i \leq m} \{\lambda_i\} = 1$, $x_i \in \mathbb{R}_+$ olmak üzere

$$(V_{i=1}^m \lambda_i x_i)^n \leq V_{i=1}^m \lambda_i (x_i)^n \quad (4.55)$$

olur.

İspat: $f(x) = x^n$ fonksiyonu B-konveks olduğundan (4.42) eşitsizliğini sağlar. Dolayısıyla bu eşitsizlikte yerine konulduğunda

$$f(V_{i=1}^m \lambda_i x_i) = (V_{i=1}^m \lambda_i x_i)^n \leq V_{i=1}^m \lambda_i (x_i)^n = V_{i=1}^m \lambda_i f(x_i) \quad (4.56)$$

bu eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.3.4. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in [0, +\infty)$, $\max_{1 \leq i \leq m} \{\lambda_i\} = 1$, $\forall x_i \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ olmak üzere

$$\cos(V_{i=1}^m \lambda_i x_i) \leq V_{i=1}^m \lambda_i \cos(x_i) \leq V_{i=1}^m \cos(x_i) \quad (4.57)$$

olur.

İspat: $f(x) = \cos x$ fonksiyonu B-konveks olduğundan (4.42) eşitsizliğini sağlar. Dolayısıyla bu eşitsizlikte yerine konulduğunda

$$\cos(V_{i=1}^m \lambda_i x_i) \leq V_{i=1}^m \lambda_i \cos(x_i) \leq V_{i=1}^m \cos(x_i) \quad (4.58)$$

bu eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.3.5. $\forall x_i \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ve $\forall \lambda_i \in [0,1], \max_{1 \leq i \leq m} \{\lambda_i\} = 1$ olmak üzere

$$\cos^n(V_{i=1}^m \lambda_i x_i) \leq V_{i=1}^m \lambda_i \cos^n(x_i) \quad (4.59)$$

olur.

İspat: $f(x) = \cos^n x$ fonksiyonu B-konveks olduğundan (4.41) eşitsizliğini sağlar. Dolayısıyla bu eşitsizlikte yerine konulduğuna

$$\cos^n(V_{i=1}^m \lambda_i x_i) \leq V_{i=1}^m \lambda_i \cos^n(x_i) \leq V_{i=1}^m \cos^n(x_i) \quad (4.60)$$

bu eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.3.6. $\forall x_i \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ve $\forall \lambda_i \in [0,1], \max_{1 \leq i \leq m} \{\lambda_i\} = 1$ olmak üzere

$$\sin(V_{i=1}^m \lambda_i x_i) \geq V_{i=1}^m \lambda_i \sin(x_i) \quad (4.61)$$

olur.

İspat: $f(x) = \sin x$ fonksiyonu B-konkav olduğundan (4.41) eşitsizliğinin tersini sağlar. Dolayısıyla bu eşitsizlikte yerine konulduğunda

$$\sin(V_{i=1}^m \lambda_i x_i) \geq V_{i=1}^m \lambda_i \sin(x_i) \quad (4.62)$$

bu eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.3.7. $\forall x_i \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], 1 \leq i \leq m$ ve negatif olmayan reel sayılar $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ noktaları ile $\max_{1 \leq i \leq m} \{\lambda_i\} = P$ olmak üzere

$$\sin^n \left(\frac{1}{P} \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \right) \geq \frac{1}{P} \sum_{i=1}^m \lambda_i \sin^n(x_i) \quad (4.63)$$

olur.

İspat: $f(x) = \sin^n x$ fonksiyonu B-konkav olduğundan (4.45) eşitsizliğinin tersini sağlar. Dolayısıyla bu eşitsizlikte yerine konulduğunda

$$\sin^n \left(\frac{1}{P} \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \right) \geq \frac{1}{P} \sum_{i=1}^m \lambda_i \sin^n(x_i) \quad (4.64)$$

bu eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.3.8. $x_i \in \mathbb{R}_+, 1 \leq i \leq m$ ve $\forall \lambda_i \in [0,1], \max_{1 \leq i \leq m} \{\lambda_i\} = 1$ olmak üzere

$$\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i (x_i)^2 \quad (4.65)$$

olur.

İspat: $f(x) = x^2$ fonksiyonu B-konveks olduğundan (4.41) eşitsizliğini sağlar. Bu eşitsizlikte yerine konulduğunda

$$f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right) = \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i (x_i)^2 \quad (4.66)$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.3.9. B-konveks fonksiyonlar için Hölder eşitsizliği eğer $p, q > 1$ reel sayılar $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ reel (kompleks) sayılar ise

$$\sum_{k=1}^m |a_k| |b_k| \leq \left(\sum_{i=1}^m |a_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^m |b_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (4.67)$$

dir.

İspat:

$|a_k| > 0, k=1, \dots, m$ olmak üzere $f(x) = x^p$ fonksiyonu için $A = (V_{i=1}^m |a_i|^q), \lambda_k = \frac{1}{A} |a_k|^q, x_k = \frac{1}{\lambda_k} |a_k| |b_k|$ verilenleri yerine yazıldığında

$$(V_{k=1}^m \lambda_k x_k)^P \leq V_{k=1}^m \lambda_k x_k^P \quad (4.68)$$

$$\left(V_{k=1}^m \lambda_k \frac{1}{\lambda_k} |a_k| |b_k| \right)^P \leq V_{k=1}^m \frac{1}{V_{i=1}^m |a_i|^q} |a_k|^q \left(\frac{1}{\lambda_k} |a_k| |b_k| \right)^P \quad (4.69)$$

$$(V_{k=1}^m |a_k| |b_k|)^P \leq V_{k=1}^m \frac{1}{V_{i=1}^m |a_i|^q} |a_k|^q \left(\frac{V_{i=1}^m |a_i|^q}{|a_k|^q} |a_k| |b_k| \right)^P \quad (4.70)$$

$$= V_{k=1}^m \frac{1}{V_{i=1}^m |a_i|^q} |a_k|^q \left(\frac{(V_{i=1}^m |a_i|^q)^p}{(|a_k|^{q-1})^p} |b_k|^p \right) \quad (4.71)$$

$$= V_{k=1}^m \frac{1}{(V_{i=1}^m |a_i|^q)^{1-p}} |b_k|^p \quad (4.72)$$

$$(V_{k=1}^m |a_k| |b_k|)^P \leq (V_{i=1}^m |a_i|^q)^{p-1} (V_{k=1}^m |b_k|^p) \quad (4.73)$$

$$V_{k=1}^m |a_k| |b_k| \leq (V_{i=1}^m |a_i|^q)^{\frac{p-1}{p}} (V_{k=1}^m |b_k|^p)^{\frac{1}{p}} \quad (4.74)$$

$$V_{k=1}^m |a_k| |b_k| \leq (V_{i=1}^m |a_i|^q)^{\frac{1}{q}} (V_{k=1}^m |b_k|^p)^{\frac{1}{p}} \quad (4.75)$$

Sonuç 4.3.1.

Eğer $p=q=2$ ise B-konveks fonksiyonlar için olan Hölder Eşitsizliği Cauchy Eşitsizliği'ne dönüşür. Yani

$$(V_{k=1}^m |a_k| |b_k|)^2 \leq (V_{k=1}^m |a_k|^2) (V_{k=1}^m |b_k|^2) \quad (4.76)$$

Cauchy Eşitsizliği oluşur.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Bu tezde elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibi listelenebilir.

1) B-konveks fonksiyon sınıfı için farklı örnekler elde edilmiştir. (Örnek 4.1.1. , Örnek 4.1.2. , Örnek 4.1.3. , Örnek 4.1.4. , Örnek 4.1.5. , Örnek 4.1.6. , Örnek 4.1.7. , Örnek 4.1.8. , Örnek 4.1.9. , Örnek 4.1.10. , Örnek 4.1.11.)

2) B-konveks fonksiyonlar için Jensen Eşitsizliği genelleştirilmiştir. (Teorem 4.2.2, Teorem 4.2.3)

3) B-konveks fonksiyonlar için elde edilen Jensen Eşitsizliği ve genelleştirilmiş versiyonları için uygulamaları yapılmıştır. (Teorem 4.3.1, Teorem 4.3.2, Teorem 4.3.3, Teorem 4.3.4, Teorem 4.3.5, Teorem 4.3.6, Teorem 4.3.7, Teorem 4.3.8, Teorem 4.3.9)

5.2 Öneriler

Jensen Eşitsizliği ile bazı özel fonksiyonların B-konveks olması durumunun incelenmesi yoluyla, bu fonksiyonlara karşılık gelen özel Jensen-Mercer Eşitsizliği, Minkowski Eşitsizliği, Cauchy Eşitsizliği gibi eşitsizliklerin B-konveks durumunun elde edilmesi için çalışmalar devam ettirilebilir. B-konveks fonksiyonların örnekleri artırılabilir ve bu örneklerle ilgili uygulamalar çoğaltılabilir. Ayrıca, Jensen Eşitsizliği'nin başka genelleştirilmiş durumları B-konvekslik için incelenebilir. Buna bağlı eşitsizlik ve uygulamalar da genelleştirilebilir. Buna ek olarak, elde edilen sonuçlar farklı tür soyut konvekslik biçimleri (B^{-1} -konvekslik, p-konvekslik, s-konvekslik, gibi) için de uygulanabilir.

KAYNAKÇA

1. Rockafellar, R., 1970. Tyrrell, Convex Analysis. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
2. Rubinov, A., 2000. Abstract Convexity and Global Optimization. Nonconvex Optimization and Its Applications, Kluwer Academic Publishers .
3. Hrimiuc, D., 2001. Inequalities for Convex Functions (Part I), π in the Sky, December, 20-24.
4. Mitrinovich, D.S., 1970. Analytic Inequalities, Springer-Verlag, Heidelberg .
5. Adilov, G.; Rubinov, A., 2006. B-Convex Sets and Functions. Numerical Functional Analysis and Optimization, 27, (3-4), 237-257.
6. Briec, W.; Horvath, C. D., 2004. B-convexity. Optimization, 53, 103-127.
7. Briec, W.; Horvath, C. D., 2008. Halfspaces and Hahn-Banach Like Properties in B-convexity and Max-Plus Convexity. Pacific Journal of Optimization , 4, (2), 293-317.
8. Briec, W.; Horvath, C. D. ; Rubinov, A. M., 2005. Separation in B-convexity. Pacific Journal of Optimization, 1, 13-30.
9. Kuratowski, K., 1968. Topology. Vol. 2, Academic Press, New York.
10. Barros, C. P.; Liang, Q. B.; PeyPOCH, N., 2013. The Technical Efficiency of US Airlines. Transportation Research Part A Policy and Practice, 50, 139-148.
11. Briec, W.; Horvath, C. D., 2009. A B-convex Production Model for Evaluating Performance of Firms. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 355, 131-144.
12. Briec, W.; Horvath, C. D., 2011. On the Separation of Convex Sets in Some Idempotent Semimodules. Linear Algebra and its Applications, 435, 1542-1548.
13. Briec, W.; Liang, Q. B., 2011. On Some Semilattice Structures for Production Technologies. European Journal of Operational Research, 215, 740-749.
14. Suo, H., 2009. Some Properties of B-convexity. Journal of Nonlinear Sciences Applications, 2, 2, 71-77.
15. Briec, W., 2015. Some Remarks on an Idempotent and Non-Associative Convex Structure. Journal of Convex Analysis, 22, 1, 259-289.
16. Berkovitz, L. D., 2002. Convexity and Optimization in n. Wiley, New York.

17. Bertsekas, D. P.; Nedic, A., 2003. Convex Analysis and Optimization, Athena Scientific.
18. Borwein, J. M.; Lewis, A. S., 2000. Convex Analysis and Nonlinear Optimization, Theory and Examples, Canadian Mathematical Society Books in Mathematics Springer, New York.
19. Boyd, S. ; Vandenberghe, L, 2004. Convex Optimization, Cambridge University Press, Cambridge, MA.
20. Rubinov, A., 2000. Abstract Convexity and Global Optimization, Kluwer Academic Publishers, Boston Dordrecht-London.
21. Tuy, H., 1998. Convex Analysis and Global Optimization, Kluwer Academic Publishers Dordrecht.
22. Adilov, G.; Tinaztepe, G., 2009. The Sharpening Some Inequalities via Abstract Convexity. Mathematical Inequalities and Applications 12, 33-51.
23. Adilov, G.; Yesilce, I., 2010. Some Inequalities for $L(j)$ -convex Functions. Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications Proceeding Book 19-24.
24. Beckenbach, E. F. ; Bellman, R., 1961. Inequalities, Springer, Berlin.
25. Dragomir, S. S.; Pearce, C. E. M., 2000. Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications, RGMIA Monographs, Victoria University [ONLINE:<http://rgmia.vu.edu.au/monographs>, July 29, 2014].
26. Dragomir, S. S.; Pecaric, J. E., Persson, L. E. , 1995. Some Inequalities of Hadamard Type. Soochow Journal of Mathematics, 21, 335-341.
27. Dragomir, S. S.; Toader, G. H., 1993. Some Inequalities for m -convex Functions. Studia Universitatis Babes-Bolyai, Mathematica , 38, (1), 21-28.
28. Hardy, G. H.; Littlewood, J. E., Polya, G., 1934. Inequalities, Cambridge University Press, Cambridge, England.
29. Mitrinovic, D. S.; Pecaric, J. E.; Fink, A. M., Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London.
30. Niculescu, C. P., 2001. A Multiplicative Mean Value and its Applications, in Inequality Theory and Applications. (Y.J. Cho, J.K. Kim and S.S. Dragomir(Ed.s)), Nova Science Publishers, 249-261.
31. Niculescu, C. P.; Persson, L. - E., 2003. Old and New on the Hermite-Hadamard Inequality. Real Analysis Exchange 29, 2, 663-685.
32. Pecaric, J.; Beesack, P. R., 1986. On Jessen's Inequality for Convex Functions II. Journal of Mathematical Analysis and Applications 118, 125-144.

33. Vasic, P. M; Lackovic, I. B., 1976. Some Complements to the Paper: "On an Inequality for Convex Functions". Univ. Beograd Publ. Elek. Fak., Serija Matematika Fizika , No. 544-576, 59- 62.
34. Niculescu, C. P.; Persson, L. - E., 2006. Convex Functions and their Applications. A Contemporary Approach. CMS Books in Mathematics volume 23, Springer-Verlag, New York.
35. Pečarić, J.; Proschan, F.; Tong, Y. L., 1992. Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications. Academic Press Inc.
36. Rubinov, A. M., 2000. Abstract Convexity: Examples and Applications. Optimization 47, 1-13.
37. Dutta, J.; Martinez-Legaz, J. E.; Rubinov, A.M., 2004. Monotonic Analysis Over Cones: I. Optimization 53, 2, 129-146.
38. Dutta, J.; Martinez-Legaz, J. E ; Rubinov, A. M., 2004. Monotonic Analysis Over Cones: II. Optimization, 53, 5-6, 529-547.
39. Minoux, M., 1986. Mathematical Programming: Theory and Algorithms. Wiley, Chichester , 489.
40. Rado, T., 1935. On Convex Functions. Transactions of the American Mathematical Society 37, 266-285.
41. Rubinov, A. M.; Kutateladze, S. S., 1972. Minkowski Duality and its Applications. Russian Mathematical Surveys 27.
42. Van de Vel, M., 1993. Theory of Convex Structures, Volume. 50. North Holland Mathematical Library, Elsevier.
43. Dragomir, S.S., and Pecaric, J. , 2001. Further reverse results for Jensen's discrete inequality and applications in information theory. Journal of Inequalities in Pure Applied Mathematics 2 (1), Art. 5.
44. Cîrtoaje, V., 2011. The best upper bound for Jensen's inequality. The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications, 7(2): Article 22: 1-7.
45. Dragomir, S.S., and Inescu, N.M., 1994. Some converse of Jensen's Inequality and Applications. Analysis Number Theory Approximately , 23: 71-78.
46. Dragomir, S.S., 2001. On a converse of Jensen's inequality. Serija Matematika 12: 48-51.
47. Adilov, G., 2011. Increasing Co-radiant Functions and Hermite-Hadamard Type Inequalities. Mathematical Inequalities and Applications 14, 1, 45-60.

48. Adilov, G.; Kemali, S., 2009. Abstract Convexity and Hermite-Hadamard Type Inequalities. *Journal of Inequalities and Applications*, Article ID 943534, 13 pages, doi:10.1155/953534.
49. Beckenbach, E. F., 1948. Convex Functions. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 54, 439-460.
50. Beckenbach, E. F., 1937. Generalized Convex Functions. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 43, 363- 371.
51. Ben-Tal, A., 1977. On Generalized Means and Generalized Convex Functions. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 21, (1), 1-13.
52. Bessenyei, M., 2008. Hermite-Hadamard-Type Inequalities For Generalized Convex Functions. *Journal of Inequalities In Pure and Applied Mathematics*, 9.
53. Roberts, A. W.; Varberg, P. E. , 2016. *Convex Functions*. Academic Press, 1973.
54. Rubinov, A. M., 1999. Some Properties of Increasing Convex-along-rays Functions. *Processings of the Centre for Mathematics and its Applications*, 19, 593-614.
55. Singer, I., 1997. *Abstract Convex Analysis*. Wiley-Interscience Publication, New York.
56. Toader, G. H., 1984. Some generalisations of the convexity. *Proceedings of the Colloquium on Approximation Cluj-Napoca (Romania)*, 329-338.
57. Toader, G. H., 1988. On a generalisation of the convexity. *Mathematica*, 30, (53), 83-87.
58. Briec W.; Horvath, C. D., 2008. Nash points, Ky Fan Inequality and Equilibria of Abstract Economies in Max-Plus and B-convexity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 341, (1), 188–199.
59. M.K. Bakula, M. E Özdemir, J. 2008. Pečarić Hadamard type inequalities for m-convex and (α, m) -convex functions. *Journal of Inequalities in Pure Applied Mathematics*, 9
60. M. Klaričić Bakula, J. Pečarić, M. Ribičić Companion inequalities to Jensen's inequality for m-convex and (α, m) -convex functions.
61. Hudzik, H.; Maligranda, L., Some remarks on s-convex functions. *Aequationes Mathematica* 1994, 48, 100-111.
62. Avriel, M., 1972. r-convex Functions. *Mathematical Programming*, 2, 309-323.
63. Pinheiro, M.R., 2007. Exploring the concept of s-convexity, *Aequationes Mathematica*, 74, 201-209.

64. Yesilce, I. , Adilov, G., 2017. Hermite-Hadamard Inequalities for B-convex and B^{-1} -convex Functions, International Journal of Nonlinear Analysis and Applications, 8 (1), pp. 225-233.
65. Adilov, G., Yesilce, I., 2018. Some important properties of B-convex functions. Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 19(4):669-680.
66. Adilov, G., Tınaztepe, G., Kemali, S., 2011. Genelleştirilmiş Ortalama Fonksiyonu ve Bazı Önemli Eşitsizliklerin Öğretimi Üzerine. Mersin Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 5 (2), 294-300.
67. Reşidoğlu, H., Yesilce, I., 2016. B-convex functions and properties Mersin Üniversitesi.



ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı: Burcu AVCI

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans: Aksaray Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2012-2015

Yüksek Lisans: Aksaray Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, 2019-2022

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Kongrelerde Sunulan Makaleler

- 1) Yeşilce Işık, I. ve Avcı, B. , 2021. Jensen Inequality and its Applications for B-convex Functions, ICOMAA2021, Istanbul-TURKEY May 26-29, 2021