

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



**B-SPLİNE EĞRİLERİ İLE EULERİAN TİPLİ POLİNOMLAR ARASINDAKİ
İLİŞKİLER VE BUNLARIN UYGULAMALARI**

Damla GÜN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ARALIK 2020

ANTALYA

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ**



**B-SPLİNE EĞRİLERİ İLE EULERİAN TİPLİ POLİNOMLAR ARASINDAKİ
İLİŞKİLER VE BUNLARIN UYGULAMALARI**

Damla GÜN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ARALIK 2020

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**B-SPLİNE EĞRİLERİ İLE EULERİAN TİPLİ POLİNOMLAR ARASINDAKİ
İLİŞKİLER VE BUNLARIN UYGULAMALARI**

Damla GÜN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Bu tez T.C. Akdeniz Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP) Koordinasyon
Birimi tarafından FYL-2020-5360 nolu proje ile desteklenmiştir.**

ARALIK 2020

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**B-SPLİNE EĞRİLERİ İLE EULERİAN TİPLİ POLİNOMLAR ARASINDAKİ
İLİŞKİLER VE BUNLARIN UYGULAMALARI**

Damla GÜN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 25/12/2020 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK (Danışman)

Prof. Dr. Mustafa ALKAN

Dr. Öğr. Üyesi İrem KÜÇÜKOĞLU

ÖZET

B-SPLİNE EĞRİLERİ İLE EULERİAN TİPLİ POLİNOMLAR ARASINDAKİ İLİŞKİLER VE BUNLARIN UYGULAMALARI

Damla GÜN

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK

Aralık 2020, 83 sayfa

Bu tezde, B-spline eğrilerini içeren spline eğri ailelerinin bazı özellikleri incelenmiştir. B-spline eğrilerinin ilişkili olduğu, kardinal spline, üstel spline, üstel Euler spline ve Bernoulli monospline aileleri gibi özel spline eğri aileleri de çalışılmıştır ve bazı temel özellikleri verilmiştir. Kardinal spline eğri aileleri yardımıyla, B-spline eğri ailelerinin inşası çalışılmıştır. Kardinal spline aileleri ve B-spline eğri aileleri ile Eulerian tipli polinomlar ve bunların üreteç fonksiyonları arasındaki ilişkiler detaylı olarak incelenmiştir. Bernoulli sayıları ve polinomları, Euler sayıları ve polinomları, Genocchi sayıları ve polinomları, Eulerian tipli sayılar ve polinomlar ve diğer bazı özel sayı ve polinom ailelerinin tanımları ve bazı özellikleri verilmiştir. Ayrıca, bu özel sayı ve polinom aileleri kullanılarak yeni kardinal tipli spline eğri aileleri de tanımlanmıştır. Tanımlanan bu ailelerinin Wolfram Mathematica paket programı yardımıyla grafikleri çizilmiştir. Ayrıca, B-spline eğri aileleri ile yakın ilişkisi olan Bernstein baz fonksiyonları ile inşa edilen Bézier eğri aileleri de çalışılmıştır. Bunlara ek olarak, bu tez çalışmasında çalışılan eğri aileleri ile özel polinom ailelerini içeren sonuçlar verilmiştir ve Bernoulli sayıları ve polinomları, Eulerian tipli sayılar ve polinomlar, Genocchi sayıları ve polinomları, Frobenius-Euler sayıları ve polinomları, ikinci tür Stirling sayıları, yüksek mertebeden Bernoulli sayıları, Catalan sayıları gibi iyi bilinen bazı özel sayı ve polinomlar ailelerini içeren yeni formüller, bağıntılar ve özdeşlikler elde edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELEER: Bernoulli monospline, Bernoulli sayıları ve polinomları, B-spline eğrileri, Catalan sayıları, Eulerian sayıları ve polinomları, Frobenius-Euler sayıları ve polinomları, Genocchi sayı ve polinomları, İkinci tür Stirling sayıları, Kardinal spline, Özel sayılar ve polinomlar, Üreteç fonksiyonları, Üstel Euler spline, Üstel spline, Spline eğrileri.

JÜRİ: Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK (Danışman)

Prof. Dr. Mustafa ALKAN

Dr. Öğr. Üyesi İrem KÜÇÜKOĞLU



ABSTRACT

RELATIONS BETWEEN B-SPLINE CURVES AND EULERIAN TYPE POLYNOMIALS AND THEIR APPLICATIONS

Damla GÜN

MSc Thesis in MATHEMATICS

Supervisor: Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK

December 2020, 83 pages

In this thesis, some properties of families of spline curve including B-spline curves have been investigated. Families of special spline curve with which B-spline curves are related, such as cardinal spline, exponential spline, exponential Euler spline and Bernoulli monospline families have also been studied and some basic properties have been given. The construction of the families of B-spline curve with the help of cardinal spline families have been studied. Relations among families of cardinal spline and B-spline curve and Eulerian type polynomials and their generating functions have been investigated in detail. The definitions and some properties of the Bernoulli numbers and polynomials, the Euler numbers and polynomials, the Genocchi numbers and polynomials, the Eulerian type numbers and polynomials and other some families of special numbers and polynomials have been given. In addition, these families of special numbers and polynomials and families of novel cardinal type spline curve have also been defined. By using Mathematica package program in the Wolfram, graphs of these families have been drawn. Moreover, the families of Bézier curve constructed with Bernstein basis functions, which are closely related to families of B-spline curve, have also been studied. Finally, results including the curve families studied in this thesis and families of special polynomials are given and new formulas, relations and identities including some well-known special numbers and polynomials such as the Bernoulli numbers and polynomials, Eulerian type numbers and polynomials, the Genocchi numbers and polynomials, the Frobenius-Euler numbers and polynomials, the Stirling numbers of the second kind, Bernoulli numbers of higher order, the Catalan numbers are obtained.

KEYWORDS: Bernoulli monospline, Bernoulli numbers and polynomials, B-spline curves, Catalan numbers, Eulerian numbers and polynomials, Frobenius-Euler numbers and polynomials, Genocchi numbers and polynomials, Stirling numbers of the second kind, Cardinal spline, Special numbers and polynomials, Generating functions, Exponential Euler spline, Exponential spline, Spline curves.

COMMITTEE: Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK

Prof. Dr. Mustafa ALKAN

Asst. Prof. Dr. İrem KÜÇÜKOĞLU



ÖNSÖZ

Spline'ların babası olarak bilinen Isaac Jacob Schoenberg tarafından kardinal spline, üstel spline, üstel Euler spline ve Bernoulli monospline aileleri gibi pek çok özel spline eğri aileleri inşa edilmiştir. Bu tez çalışmasında, B-spline eğrilerini içeren bazı özel spline eğri ailelerinin temel özellikleri incelenmiştir. B-spline eğrilerinin ilişkili olduğu, kardinal spline, üstel spline, üstel Euler spline ve Bernoulli monospline ve Bernstein baz fonksiyonları ile inşa edilen Bézier eğri aileleri gibi özel eğri aileleri arasındaki ilişkiler detaylı olarak incelenmiştir. Ayrıca, B-spline aileleri ile ilişkili olan Eulerian tipli polinomlar ailesinin üreteç fonksiyonları verilmiştir ve bazı özellikleri incelenmiştir. Bernoulli tipli sayılar ve polinomlar, Euler tipli sayılar ve polinomlar, Genocchi tipli sayılar ve polinomlar, Frobenius-Euler sayıları ve polinomları, ikinci tür Stirling sayıları gibi iyi bilinen bazı özel sayı ve polinom ailelerinin üreteç fonksiyonları ve bazı özellikleri de verilmiştir. Bu tez çalışmasında, bazı özel sayı ve polinom aileleri yardımıyla, üstel Apostol-Bernoulli spline, üstel Apostol-Euler spline ve üstel Apostol-Genocchi spline aileleri gibi kardinal tipli üstel spline eğri aileleri inşa edilmiştir. İnşa edilen bu eğri ailelerinin bazı temel özellikleri verilmiştir. Ayrıca, Wolfram Mathematica paket programı kullanılarak, bu ailelerin grafikleri çizilmiştir. Bunlara ek olarak, Bernoulli sayıları ve polinomları Eulerian tipli sayı ve polinomlar, ikinci tür Stirling sayıları, yüksek mertebeden Bernoulli sayıları, Catalan sayıları gibi iyi bilinen bazı özel sayı ve polinom aileleri içeren bağıntılar, formüller ve özdeşlikler de elde edilmiştir.

Üreteç fonksiyonları ve bunların fonksiyonel denklemleri, son yılların en ilgi çeken alanlarından biridir ve özellikle de matematik, matematiksel fizik, olasılık ve istatistik gibi birçok alanda uygulamaya sahiptir. Bézier eğrileri ve B-Spline eğrileri de özellikle bilgisayar grafiklerinin çizilmesinde, bilgisayar destekli tasarım (CAD) uygulamalarında, yüzeylerin modellenmesinde büyük bir önem taşımaktadır ve sıklıkla kullanılmaktadır. Bu tezde, B-Spline eğrileri ile Eulerian tipli polinomlar arasındaki ilişkiler araştırılmış ve bunların uygulamaları verilmiştir. Ayrıca, bazı özel sayı ve polinom aileleri kullanılarak, kardinal tipli spline eğri aileleri inşa edilmiş ve bazı özellikleri incelenmiştir.

Bu tez, Giriş, Kaynak Taraması, Materyal ve Metot, Bulgular ve Tartışma, Sonuçlar olmak üzere beş ana bölümden oluşmaktadır.

Giriş bölümünde, B-spline eğrileri aileleri ve bunlarla ilişkili olan kardinal spline, üstel spline, üstel Euler spline ve Bernoulli monospline gibi bazı eğri ailelerinin ve bazı özel sayı ve polinom ailelerinin üreteç fonksiyonlarının önemi ve tarihçesi hakkında kısa bilgi verilmiştir. Ardından, tez çalışmasının kapsamı ve amacı kısaca açıklanmıştır.

Kaynak taraması bölümünde, Bernoulli sayı ve polinomları, Euler sayı ve polinomları, Eulerian tipli sayı ve polinomlar, Genocchi sayı ve polinomları, Frobenius-Euler sayıları ve polinomları, ikinci tür Stirling sayıları, negatif kuvvetli Bernoulli sayıları, Catalan sayıları gibi iyi bilinen sayı ve polinom ailelerinin tanımları ve temel özellikleri ve bazı uygulamaları literatür taraması ile birlikte verilmiştir.

Materyal ve Metot bölümünde, tez çalışmasında kullanılan B-spline eğri aileleri ve bu aileler ile ilişkili olan kardinal spline, üstel spline, üstel Euler spline ve Bernoulli monospline eğri ailelerinin tanımları, temel özellikleri verilmiş ve bunların bazı uygulamaları incelenmiştir. Ayrıca, kardinal spline aileleri ile ilişkili olan Eulerian tipli polinomlar arasındaki ilişkiler de verilmiştir.

Bulgular ve Tartışma bölümünde, kardinal spline eğri ailesi ile inşa edilen B-spline eğri ailesi kullanılarak, üstel Apostol-Bernoulli spline, üstel Apostol-Euler spline, üstel Apostol-Genocchi spline gibi kardinal tipli spline eğri aileleri tanımlanmıştır. Tanımlanan bu eğri ailelerinin Wolfram Mathematica paket programı yardımıyla grafikleri çizilmiştir. Ayrıca, Eulerian tipli sayı ve polinomlar, ikinci tür Stirling sayıları, negatif kuvvetli Bernoulli sayıları, Catalan sayıları gibi iyi bilinen bazı özel sayı ve polinom ailelerini içeren bağıntılar, formüller ve özdeşlikler elde edilmiştir.

Tezin diğer bölümleri Sonuç, Kaynaklar ve Özgeçmiş ile bitmektedir.

Bu tez çalışması boyunca bilgisi ile bana her zaman yardımcı olan ve yol gösteren sayın danışmanım Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK'e teşekkür ederim ve saygılarımı sunarım. Her zaman yanımda olan eşim Mehmet Taha GÜN'e, oğullarım Veli Alpar GÜN ve Taha Alpan GÜN'e, çalışmam boyunca benden bir an olsun yardımlarını esirgemeyen arkadaşım Neslihan KILAR'a yürekten teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖNSÖZ	v
AKADEMİK BEYAN	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR	x
ŞEKİLLER DİZİNİ	xii
ÇİZELGELER DİZİNİ	xiv
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK TARAMASI	4
2.1. Bazı Özel Sayı ve Polinom Ailelerinin Üreteç Fonksiyonları ve Özellikleri	5
2.2. Yüksek Mertebeden Bazı Özel Sayı ve Polinom Ailelerinin Üreteç Fonksiyonları ve Özellikleri	20
2.2.1. Yüksek mertebeden pozitif kuvvetli bazı özel sayı ve polinom ailelerinin üreteç fonksiyonları ve özellikleri	20
2.2.2. Yüksek mertebeden negatif kuvvetli bazı özel sayı ve polinom ailelerinin üreteç fonksiyonları ve özellikleri	27
2.3. Apostol Tipli Sayı ve Polinom Ailelerinin Üreteç Fonksiyonları ve Özellikleri	35
3. MATERYAL VE METOT	40
3.1. Kardinal Spline Eğri Aileleri	40
3.1.1. Kardinal spline ve B-spline eğri aileleri arasındaki ilişkiler	41
3.2. B-spline ile Bézier Eğrileri Arasındaki İlişkiler	47
3.2.1. Bernstein baz fonksiyonları ve Bézier eğrileri	47
3.3. Üstel Spline	51
3.4. Üstel Euler Polinom ve Spline Eğri Aileleri	53
3.4.1. Üstel Euler polinomları	53
3.4.2. Üstel spline ailelerinin inşası	55
3.4.3. $\mathfrak{S}_n^*$ sınıfında üstel Euler polinomlar ailesi	56
3.4.4. Üstel Euler spline eğri aileleri	58
3.5. Bernoulli Monospline ve Kardinal Monospline	59
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	61
4.1. Eulerian Sayılarını İçeren Formüller ve Bağıntılar	61

4.2. Spline Eğri Ailelerini İçeren Formüller ve Bağıntılar	63
4.2.1. Kardinal tipli spline ailelerini içeren formüller ve bağıntılar	63
4.2.2. Bernoulli monospline eğri ailelerini içeren bağıntılar ve formüller	70
5. SONUÇLAR	72
6. KAYNAKLAR	73
ÖZGEÇMİŞ	



AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “B-Spline Eğrileri İle Eulerian Tipli Polinomlar Arasındaki İlişkiler Ve Bunların Uygulamaları”adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

25/12/2020

Damla GÜN



SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler:

$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
x_+	: $\max\{0, x\}$
$B_n(x)$	: Bernoulli polinomları
B_n	: Bernoulli sayıları
$\overline{B}_n(x)$	: Bernoulli fonksiyonu
$E_n(x)$	: Euler polinomları
E_n	: Euler sayıları
$G_n(x)$	: Genocchi polinomları
G_n	: Genocchi sayıları
$S_2(n, k)$	: İkinci tür Stirling sayıları
$A_n(\alpha)$	: Euler Frobenius polinomları
$E(n, k)$	: Eulerian sayıları
$H_n(x; u)$	: Frobenius-Euler polinomları
$H_n(u)$	: Frobenius-Euler sayıları
C_n	: Catalan sayıları
$w_g(n)$	: Fubini sayıları
$B_n^{(m)}(x)$	: m . mertebeden Bernoulli polinomları
$B_n^{(m)}$	: m . mertebeden Bernoulli sayıları
$E_n^{(m)}(x)$	: m . mertebeden Euler polinomları
$E_n^{(m)}$	: m . mertebeden Euler sayıları
$G_n^{(m)}(x)$	: m . mertebeden Genocchi polinomları
$G_n^{(m)}$	: m . mertebeden Genocchi sayıları

$B_n^{(-k)}(x)$	: k . mertebeden negatif kuvvetli Bernoulli polinomları
$B_n^{(-k)}$	: k . mertebeden negatif kuvvetli Bernoulli sayıları
$E_n^{(-k)}(x)$	: k . mertebeden negatif kuvvetli Euler polinomları
$E_n^{(-k)}$	: k . mertebeden negatif kuvvetli Euler sayıları
$G_n^{(-k)}(x)$	: k . mertebeden negatif kuvvetli Genocchi polinomları
$G_n^{(-k)}$	: k . mertebeden negatif kuvvetli Genocchi sayıları
$\mathcal{B}_n^{(m)}(x; \lambda)$	: m . mertebeden Apostol-Bernoulli polinomları
$\mathcal{B}_n^{(m)}(\lambda)$	: m . mertebeden Apostol-Bernoulli sayıları
$\mathcal{E}_n^{(m)}(x; \lambda)$	: m . mertebeden Apostol-Euler polinomları
$\mathcal{E}_n^{(m)}(\lambda)$	: m . mertebeden Apostol-Euler sayıları
$\mathcal{G}_n^{(m)}(x; \lambda)$	: m . mertebeden Apostol-Genocchi polinomları
$\mathcal{G}_n^{(m)}(\lambda)$	: m . mertebeden Apostol-Genocchi sayıları
$\mathfrak{S}_n$	: Kardinal spline sınıfı (class of cardinal splines)
$S(x)$	: Kardinal spline (cardinal spline)
$\mathfrak{S}_n^*$	: Orta nokta kardinal spline sınıfı (class of cardinal midpoint splines)
$N_n(x)$	: B-spline
$N_{k,n}(x)$	: Düzgün B-spline (uniform B-spline)
$B_k^n(t)$	: Bernstein baz fonksiyonları
$B_e(t)$	: Bézier eğrileri
$\Phi_n(x; t)$	: Üstel spline (exponential spline)
$\mathfrak{s}_n(x; u)$	: Orta nokta üstel Euler polinomları
$S_n(x; u)$	: Üstel Euler spline
$S_n^*(x; u)$	: Orta nokta üstel Euler spline
$\eta_n(x)$	: Bernoulli monospline

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1	$n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $x \in [-1, 1]$ için Bernoulli polinomlarının grafiği	8
Şekil 2.2	$n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $x \in [-5, 5]$ için Bernoulli polinomlarının grafiği	9
Şekil 2.3	$n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $x \in [-1, 1]$ için Euler polinomlarının grafiği	11
Şekil 2.4	$n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $x \in [-5, 5]$ için Euler polinomlarının grafiği	12
Şekil 2.5	(2.17) ile verilen rekürans bağıntısı yardımıyla Eulerian sayıları (Petersen 2015)	15
Şekil 2.6	$n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $x \in [-1, 1]$ için 2. mertebeden Bernoulli polinomlarının grafiği	24
Şekil 2.7	$n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $x \in [-5, 5]$ için 2. mertebeden Bernoulli polinomlarının grafiği	24
Şekil 2.8	$n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $x \in [-1, 1]$ için 3. mertebeden Bernoulli polinomlarının grafiği	26
Şekil 2.9	$n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $x \in [-5, 5]$ için 3. mertebeden Bernoulli polinomlarının grafiği	26
Şekil 2.10	$n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $x \in [-1, 1]$ için 1. mertebeden negatif kuvvetli Bernoulli polinomlarının grafiği	31
Şekil 2.11	$n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $x \in [-5, 5]$ için 1. mertebeden negatif kuvvetli Bernoulli polinomlarının grafiği	31
Şekil 2.12	$n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $x \in [-1, 1]$ için 2. mertebeden negatif kuvvetli Bernoulli polinomlarının grafiği	33
Şekil 2.13	$n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $x \in [-5, 5]$ için 2. mertebeden negatif kuvvetli Bernoulli polinomlarının grafiği	33
Şekil 2.14	$n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $x \in [-1, 1]$ için 3. mertebeden negatif kuvvetli Bernoulli polinomlarının grafiği	35
Şekil 2.15	$n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $x \in [-5, 5]$ için 3. mertebeden negatif kuvvetli Bernoulli polinomlarının grafiği	35
Şekil 3.16	$n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $t \in [0, 1]$ için $B_k^n(t)$ polinomlarının grafiği . .	49

Şekil 3.17	Lineer Bézier eğrisi (Salomon 2006; Simsek 2016; Wikipedia,a)	49
Şekil 3.18	Kuadratik Bézier eğrisi (Salomon 2006; Simsek 2016; Wikipedia,a)	50
Şekil 3.19	Kübik Bézier eğrisi (Salomon 2006; Simsek 2016)	51
Şekil 4.20	$n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ için $\mathfrak{s}_n(x; -\frac{1}{2})$ polinomlarının grafiği	65
Şekil 4.21	$n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ için $\mathfrak{s}_n(x; 5)$ polinomlarının grafiği	66
Şekil 4.22	$n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $x \in [0, 1]$ için $\Phi_n(x; -\frac{1}{2})$ polinomlarının grafiği	69
Şekil 4.23	$n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $x \in [0, 1]$ için $\Phi_n(x; -1)$ polinomlarının grafiği	69

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1	$E(n, k)$ için bazı değerler	15
Çizelge 2.2	$S_2(n, k)$ için bazı değerler	19
Çizelge 2.3	$B_n^{(m)}$ için bazı değerler	22
Çizelge 2.4	$B_n^{(-k)}$ için bazı değerler	29
Çizelge 3.5	$B_k^n(t)$ için bazı değerler	47
Çizelge 3.6	$H_n(2)$ için bazı değerler	55



1. GİRİŞ

Spline eğri aileleri ilk olarak Isaac Jacob Schoenberg tarafından keşfedilmiştir ve bu konuda birbirinden değerli eserler vermiştir (Schoenberg 1946; Schoenberg 1987; Schoenberg 1988). Bu sebepten dolayı, Schoenberg'e spline eğrilerini çalışan bilim adamları tarafından spline'ların babası ismi verilmiştir. Bu tezin sonuçlarının ilham kaynağı olan Schoenberg hakkında kısa bir bilgi verelim. Schoenberg, 1903-1990 yılları arasında yaşamış Romen-Amerika asıllı bir matematikçidir. 1922 yılında Laşi Üniversitesi'nde yüksek lisans yapmıştır ve 1925 yılına kadar Berlin ve Göttingen üniversitelerinde analitik sayılar teorisi üzerinde çalışmıştır. Schoenberg, 1943-1945 yılları arasında, Aberdeen Proving Ground'da bir matematikçi olarak askeri projelerde çalışma yapmak için Pennsylvania Üniversitesi'nden ayrılmıştır ve bu süre zarfında spline teorisini inşa etmeye başlamıştır. Bilgisayarların ortaya çıkmasıyla birlikte, spline eğri aileleri daha da önem kazanmıştır. Çünkü, spline eğri aileleri ilk önce interpolasyonda polinomların yerine, daha sonra bilgisayar grafiklerinde düzgün (pürüzsüz) ve esnek şekiller oluşturmak için kullanılmıştır. Yani, bilgisayar destekli tasarım ve bilgisayar grafikleri gibi bilgisayar bilimi alt alanlarında, spline terimi parçalı polinomları ifade etmektedir. Polinomlar ile inşa edilen spline eğri aileleri ve bunların alt ailesi olan kardinal spline, B-spline, üstel spline, üstel Euler spline ve Bernoulli monospline aileleri gibi özel spline eğri aileleri de kolay hesaplanabilir ve eğri denkliği yöntemi kolaylığından dolayı bu alanlarda çok sıklıkla kullanılan eğrilerdir. Spline kelimesi ilk olarak 1946 yılında Schoenberg'in "Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions" isimli çalışmasında görülmüştür ve düzgün parçalı bir polinom yaklaşımı ile bağlantılı olarak kullanılmıştır. Daha sonrasında, 1987 yılında Bartels vd. tarafından "An Introduction to Splines for Use in Computer Graphics and Geometric Modeling" isimli kitabının önsözünde, Robin Forrest'ın, II. Dünya Savaşı sırasında İngiliz uçak endüstrisinde uçaklar için ince ahşap şeritleri "spline" olarak adlandırdığını bahsetmiştir ve böylece uçak ve gemi yapımı endüstrilerinde kullanılmaya başlanmıştır. Matematikte ise spline, polinomlarla parçalı olarak tanımlanan basamak ve adım fonksiyonlarına dayalı özel bir fonksiyondur. Yani, spline eğri aileleri, yüzeyin şeklini tanımlayan kontrol noktaları kümesini kullanarak geometrik bir şekilde polinomlar ve parçalı sürekli fonksiyonlar ile temsil edilirler ve bu konuda birbirinden de-

ğerli eserler verilmiştir (Bkz: Boor 1970; Schoenberg 1987; Schoenberg 1988; Lin 1976; Gamkrelidze 1990; Boor vd. 1993; Micula ve Micula 1999; Goldman 2002; Höllig 2003; Salomon 2006; Mann 2006; He 2011; Goldman 2012; He 2012; Farouki 2012; Goldman ve Simeonov 2012; Dişibüyük vd. 2014; Goldman vd. 2014; Penner 2019; Dişibüyük ve Ulutaş 2020; Wikipedia,b; Wikipedia,c). Nümerik analizin önde gelen interpolasyon problemlerinde, spline eğrileri genellikle polinom interpolasyonunda kullanılmaktadırlar. Spline eğrilerinin yanı sıra, B-spline eğrileri sadece bir grup veri noktası için tanımlanan fonksiyonların sayısal türev ve integrasyonu için de kullanıldığı bilinmektedir (Wikipedia,b; Wikipedia,c).

Spline eğrilerinin çok özel bir üyesi olan Bézier eğrileri de ilk olarak 1959 yılında Citroen araba fabrikasında çalışan bir Fransız otomotiv mühendisi olan Paul de Faget ve aynı dönemde Renault araba fabrikasında silindir parçalarının kesişimi üzerinde çalışma yapan bir başka Fransız otomotiv mühendisi Pierre Bézier tarafından farklı matematiksel yaklaşımlar ile birbirlerinden bağımsız olarak geliştirmiştir. Paul de Faget ve Pierre Bézier birbirlerinden bağımsız olarak benzer sonuçları elde etmiş olmalarına rağmen, bu konu hakkında yayınlanan ilk makale Bézier tarafından yazıldığından ve kabul edildiğinden dolayı, günümüzde bu eğriler, Bézier eğrisi olarak isimlendirilmektedir (Bernstein 1912; Goldman 1995; Salomon 2006; Farouki 2012; wikipedia,a). Bézier eğrileri özellikle bilgisayar destekli tasarım (CAD) programlarının ve modelleme uygulamalarının çok sık kullanıldığı bir eğri ailesidir. Son yıllarda Bézier eğri aileleri ile ilgili çalışmalar artmıştır ve bu konuda birbirinden değerli eserler verilmiştir (Lorentz 1986; Goldman 2002; Acikgoz ve Araci 2010; Simsek ve Acikgoz 2010; Bayad vd. 2011; Simsek 2011; Farouki 2012; Goldman ve Simeonov 2012; Goldman vd. 2014; Simsek 2013b,c; Simsek 2014; Simsek 2015; Kucukoglu ve Simsek 2016; Simsek 2016; Simsek ve Yardimci 2016; Kucukoglu vd. 2019). Sonuç olarak, Bézier eğrileri ve B-spline eğri aileleri ve yüzeyleri, yalnızca matematik alanında değil, aynı zamanda CAD sistemlerinde, uçak ve otomobillerin tasarımında kullanılan serbest biçimli eğriler ve yüzeyler için matematiksel modellemelerde ve bilgisayar animasyon endüstrisinde sıkça kullanılırlar. Ayrıca, Spline eğri sınıflarını çalışmak ve özellikle süreklilik özelliklerini ve tek yönlü türevlerini incelemek için başta B-spline eğrileri için de De Boor algoritması, Bézier eğrileri için Casteljau algoritması gibi değişik temel algoritmalar verilmiştir (Boor vd. 1993; Goldman 2002; Höllig 2003;

Mann 2006; He 2012; Farouki 2012; Goldman ve Simeonov 2012; Goldman vd. 2014; Wikipedia,b; Wikipedia,c).

Üreteç fonksiyonları ve bunların fonksiyonel denklemleri, son yılların pek çok bilim dalında ilgi çeken alanlarından biridir. Çünkü bu fonksiyonların, başta matematik olmak üzere, fizik, matematiksel fizik ve kuantum fizik, olasılık ve istatistik, analitik sayılar teorisi gibi birçok bilim dalında uygulamaları mevcuttur. Bu fonksiyonlar yardımıyla, birçok özel sayı ve özel polinom ailesinin temel özellikleri incelenebilmektedir. Örneğin, spline eğrileri ile ilişkili olan Bernoulli tipli sayılar ve polinomlar, Euler tipli sayılar ve polinomlar, Frobenius-Euler sayıları ve polinomları, Genocchi tipli sayılar ve polinomlar ailelerinin üreteç fonksiyonları kullanılarak bu tezde birçok bağıntı ve özdeşlik elde edilmiştir. Bunların yanında, Ron Goldman tarafından düzgün B-spline eğrilerinin üreteç fonksiyonları inşa edilmiştir ve bu fonksiyonlar yardımıyla, spline eğri ailelerinin De Boor algoritması da dahil olmak üzere, birçok temel özelliklerini vermiş ve ispatlamıştır (Goldman 2012).

Bu tez çalışmasında, B-spline eğri ailelerini ve bunlarla ilişkili olan, kardinal spline, üstel spline, üstel Euler spline ve Bernoulli monospline gibi özel spline eğri ailelerinin de bazı temel özellikleri verilmiş ve bunlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Spline eğri aileleri ile ilişkili olan Bernoulli sayıları ve polinomları, Euler sayıları ve polinomları, Genocchi sayıları ve polinomları, Eulerian tipli sayılar ve polinomlar ve diğer iyi bilinen bazı özel sayı ve polinom ailelerinin üreteç fonksiyonları ve bazı özellikleri verilmiştir. B-spline eğri aileleri ile Eulerian sayıları ve polinomları arasındaki ilişkiler detaylı olarak verilmiştir. Ayrıca, Bernstein baz polinomları ile inşa edilen Bézier eğri aileleri de çalışılmıştır. Bu tezde, bazı özel sayı ve polinom aileleri ile kardinal tipli spline eğri aileleri de tanımlanmıştır. Tanımlanan bu ailelerin Wolfram Mathematica paket programı kullanılarak, grafikleri çizilmiştir ve bunların kodları verilmiştir. Bunlara ek olarak, bu tez çalışmasında çalışılan eğri aileleri ile özel polinom ailelerini içeren sonuçlar elde edilmiştir. Dahası, Bernoulli sayı ve polinomlar, Eulerian tipli sayı ve polinomlar, ikinci tür Stirling sayıları, negatif kuvvetli Bernoulli sayıları, Catalan sayıları gibi iyi bilinen bazı özel sayı ve polinomlar ailelerini de içeren formüller ve bağıntılar verilmiştir.

Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçların matematik, matematiksel fizik ve kuantum fizik, mühendislik, olasılık ve istatistik gibi birçok alanda kullanılma potansiyeli vardır.

2. KAYNAK TARAMASI

Bu bölümde, tezde kullanılacak olan temel tanımlar, bağıntılar ve formüller Apostol 1951, Carlitz 1959, Rademacher 1973, Comtet 1974, Apostol 1976, Royden 1988, Graham vd. 1994, Srivastava ve Pinter 2004, Luo ve Srivastava 2005, Koshy 2009, Luo ve Srivastava 2011, Srivastava 2011, Srivastava ve Choi 2012, Zou 2017 kaynaklarından yararlanılarak verilmiştir.

Tanım 2.1. χ_A , A kümesinin bir karakteristik fonksiyonu olmak üzere,

$$\chi_A = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

dır (Royden 1988).

Tanım 2.2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, f fonksiyonuna bir adım (basamak) fonksiyonu denir. Yani, $\alpha_j \in \mathbb{R}$ ve $n \geq 0$ olmak üzere,

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \alpha_j \chi_{A_j}(x)$$

ve

$$A_i \cap A_j = \emptyset; \quad i \neq j,$$

$$A_i \cup A_j = \mathbb{R}$$

dir (Royden 1988).

Tanım 2.3. $m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $[x]$ tam değer fonksiyonu

$$[x] = \max \{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\}$$

şeklinde tanımlanır (Rademacher 1973; Apostol 1976; Graham vd. 1994; Bartle ve Sherbert 2011).

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $[x]$, tam değer fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$n < x \Leftrightarrow [x] < n,$$

$$n \leq x \Leftrightarrow [x] \leq n,$$

$$\begin{aligned}
[x] + [y] &\leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1, \\
[x] + [-x] &= \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Z} \\ -1, & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}, \\
\left[\frac{x+m}{n} \right] &= \left[\frac{[x] + m}{n} \right], \\
[mx] &= [x] + \left[x + \frac{1}{m} \right] + \dots + \left[x + \frac{m-1}{m} \right],
\end{aligned}$$

ve

$$\left[\frac{n}{m} \right] = \left[\frac{n+m-1}{m} \right] = \left[\frac{n+1}{m} \right] - 1$$

dir (Rademacher 1973; Apostol 1976; Berndt ve Dieter 1982; Graham vd. 1994).

Tanım 2.4. V , F cismi üzerindeki bir vektör uzayı ve $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ V vektör uzayının bir alt kümesi olsun. $c_i \in F$ ve $\alpha_i \in S$ olmak üzere,

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_n\alpha_n = 0$$

iken

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$$

ise S kümesine lineer (doğrusal) bağımsız küme denir. Aksi halde S kümesi lineer bağımlı küme olur (Lipschutz 1991).

2.1. Bazı Özel Sayı ve Polinom Ailelerinin Üreteç Fonksiyonları ve Özellikleri

Burada, Bernoulli sayıları ve polinomları, Euler sayıları ve polinomları, Genocchi sayıları ve polinomları, Frobenius-Euler sayıları ve polinomları, ikinci tür Stirling sayıları ve polinomlar, Catalan sayıları gibi bazı özel sayı ve polinom ailelerinin üreteç fonksiyonlarının tanımları verilecek ve bunların bazı iyi bilinen temel özellikleri incelenecektir.

Alman matematikçi Faulhaber (1580-1635) tarafından bulununan, $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$1^m + 2^m + \dots + (n-1)^m + n^m \quad (2.1)$$

toplamı günümüzde Faulhaber formülü olarak bilinmektedir. Bu formül başta Jacob Bernoulli olmak üzere, birçok matematikçinin çalışma alanına girmiştir ve halen de bu formül üzerinde çalışılmaktadır. Çünkü bu formül yalnız sayılar teorisinde değil aynı zamanda

başta Diophantine denklemler olmak üzere bir çok eğriler ailesinde de ortaya çıkmaktadır. 1713 yılında, Jacob Bernoulli “Ars conjectandi, Basel 1713” isimli kitabında da görüleceği üzere, Faulhaber formülünden bahsetmektedir (Jacobi 1834; Conway ve Guy 1996; Faulhaber 1631; Knuth 1993). Aynı zamanda Bernoulli bu kitabında günümüzde Bernoulli sayıları ve polinomları olarak bilinen bazı özel seri ailelerini ve fonksiyonlarını içeren sonsuz toplamlar üzerinde çalıştığı görülmektedir.

Bernoulli sayıları ve polinomlarının tanımı aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile vermiştir.

Tanım 2.5. $|t| < 2\pi$ olmak üzere, $B_n(x)$ ile gösterilen Bernoulli polinomları,

$$F_B(t, x) = \frac{t}{e^t - 1} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} \quad (2.2)$$

üstel üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Jordan 1950; Erdelyi 1953; Abramowitz ve Stegun 1972; Milne-Thomson 1980; Srivastava ve Choi 2012).

(2.2) bağıntısında verilen üreteç fonksiyonunda $x = 0$ alınırsa,

$$B_n(0) = B_n$$

ile gösterilen Bernoulli sayılarının üreteç fonksiyonu elde edilir (Jordan 1950; Erdelyi 1953; Abramowitz ve Stegun 1972; Milne-Thomson 1980; Srivastava ve Choi 2012).

Faulhaber tarafından (2.1) denklemiyle verilmiş olan ardışık tamsayıların kuvvetleri toplamını, aynı zamanda (2.2) denklemi ve geometrik seri yardımıyla, iyi bilinen aşağıdaki yöntemle verelim:

$$\sum_{v=0}^{m-1} e^{vt} = \frac{1 - e^{mt}}{1 - e^t}$$

kullanılarak,

$$t \sum_{v=0}^{m-1} e^{vt} = \frac{te^{mt}}{e^t - 1} - \frac{t}{e^t - 1}$$

elde edilir. (2.2) denkleminde verilen üreteç fonksiyonu kullanılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \sum_{v=0}^{m-1} v^{n-1} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(m) \frac{t^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$$

bulunur. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$ ifadesinin katsayıları karşılaştırılırsa

$$n \sum_{v=0}^{m-1} v^{n-1} = B_n(m) - B_n$$

olur. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa, $m, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, pozitif tamsayıların kuvvetleri toplamını, Bernoulli sayıları ve polinomları cinsinden veren formül aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\sum_{v=1}^m v^n = \frac{B_{n+1}(m+1) - B_{n+1}}{n+1} \quad (2.3)$$

(Jacobi 1834; Abramowitz ve Stegun 1972; Conway ve Guy 1996; Ewell 1975; Knuth 1993; Kim 2004; Kim vd. 2006; Srivastava ve Choi 2012; Kucukoglu ve Simsek, 2019; Kilar ve Simsek 2020; Kim vd. 2021).

$B_0 = 1$ ve $n \geq 1$ olmak üzere, Bernoulli sayıları aşağıdaki bağıntı ile hesaplanır:

$$B_n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} B_j \quad (2.4)$$

(Jordan 1950; Apostol 1951; Erdelyi 1953; Abramowitz ve Stegun 1972; Comtet 1974; Srivastava ve Pinter 2004; Luo ve Srivastava 2005; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012; Srivastava vd. 2012).

(2.2) denklemi kullanılarak, Bernoulli sayıları ve polinomları arasındaki ilişki aşağıdaki bağıntı ile verilir:

$$B_n(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^{n-j} B_j \quad (2.5)$$

(Jordan 1950; Apostol 1951; Erdelyi 1953; Abramowitz ve Stegun 1972; Comtet 1974; Srivastava ve Pinter 2004; Luo ve Srivastava 2005; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012; Srivastava vd. 2012).

(2.5) bağıntısı yardımıyla Bernoulli polinomlarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} B_0(x) &= 1, \\ B_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\ B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6}, \\ B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \\ B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}, \\ B_5(x) &= x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x. \end{aligned}$$

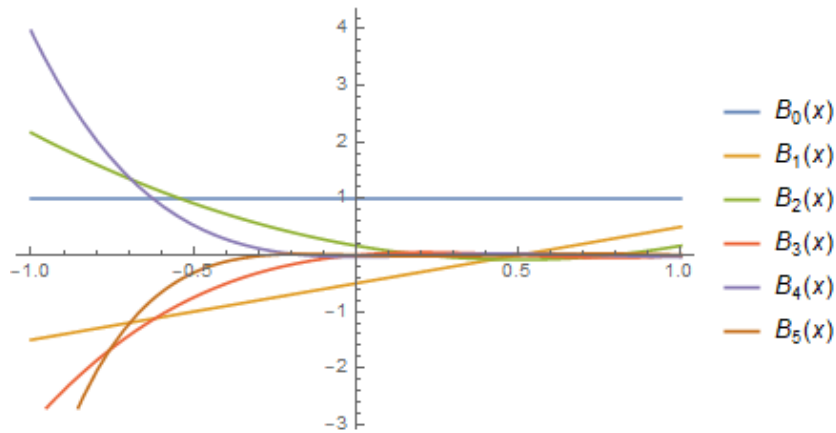
Mathematica Uygulaması 1. İlk altı Bernoulli polinomunun, x parametresi için rastgele seçilmiş iki özel aralıkta grafiğini çizen Mathematica uygulaması aşağıdaki gibidir:

```

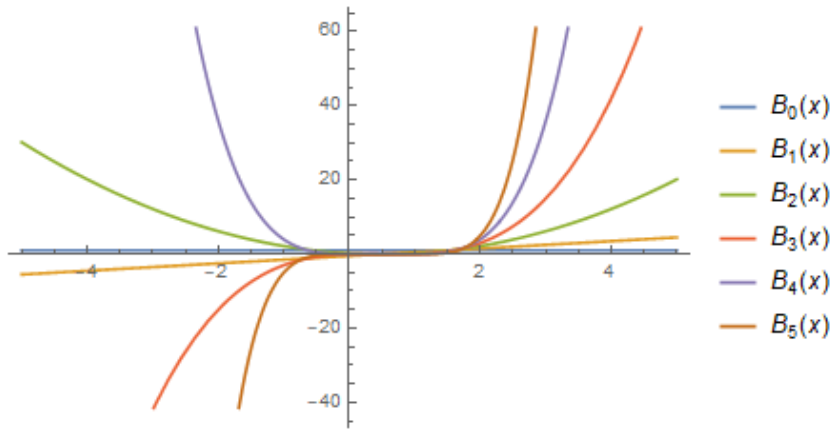
1 BernoulliPolyPlot = Plot[Evaluate[Simplify [Table[BernoulliB[n, x], {n, 0, 5}]]], {x, -1, 1},
  PlotLegends -> {ToString[ToExpression["{HoldForm}{{B}_{0}}\\left(x\\right)"], TeXForm],
    TraditionalForm], ToString[ToExpression["{HoldForm}{{B}_{1}}\\left(x\\right)"], TeXForm],
    TraditionalForm], ToString[ToExpression["{HoldForm}{{B}_{2}}\\left(x\\right)"], TeXForm],
    TraditionalForm], ToString[ToExpression["{HoldForm}{{B}_{3}}\\left(x\\right)"], TeXForm],
    TraditionalForm], ToString[ToExpression["{HoldForm}{{B}_{4}}\\left(x\\right)"], TeXForm],
    TraditionalForm], ToString[ToExpression["{HoldForm}{{B}_{5}}\\left(x\\right)"], TeXForm],
    TraditionalForm]]]
2 Export["bernP11.png", BernoulliPolyPlot]
3 BernoulliPolyPlot = Plot[Evaluate[Simplify [Table[BernoulliB[n, x], {n, 0, 5}]]], {x, -5, 5},
  PlotLegends -> {ToString[ToExpression["{HoldForm}{{B}_{0}}\\left(x\\right)"], TeXForm],
    TraditionalForm], ToString[ToExpression["{HoldForm}{{B}_{1}}\\left(x\\right)"], TeXForm],
    TraditionalForm], ToString[ToExpression["{HoldForm}{{B}_{2}}\\left(x\\right)"], TeXForm],
    TraditionalForm], ToString[ToExpression["{HoldForm}{{B}_{3}}\\left(x\\right)"], TeXForm],
    TraditionalForm], ToString[ToExpression["{HoldForm}{{B}_{4}}\\left(x\\right)"], TeXForm],
    TraditionalForm], ToString[ToExpression["{HoldForm}{{B}_{5}}\\left(x\\right)"], TeXForm],
    TraditionalForm]]]
4 Export["bernoulliP1.png", BernoulliPolyPlot]

```

Mathematica uygulaması 1 yardımıyla, $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ için Bernoulli polinomlarının $x \in [-1, 1]$ ve $x \in [-5, 5]$ aralıklarındaki grafiklerinin çizimleri sırasıyla Şekil 2.1 ve Şekil 2.2 ile verilir:



Şekil 2.1. $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $x \in [-1, 1]$ için Bernoulli polinomlarının grafiği



Şekil 2.2. $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $x \in [-5, 5]$ için Bernoulli polinomlarının grafiği

Tanım 2.6. $|t| < \pi$ olmak üzere, $E_n(x)$ ile gösterilen Euler polinomları,

$$F_E(t, x) = \frac{2}{e^t + 1} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{t^n}{n!} \quad (2.6)$$

üstel üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Jordan 1950; Erdelyi 1953; Abramowitz ve Stegun 1972; Milne-Thomson 1980; Srivastava ve Choi 2012).

(2.6) denkleminde verilen üreteç fonksiyonunda $x = 0$ alınırsa,

$$E_n(0) = E_n$$

ile gösterilen Euler sayılarının üreteç fonksiyonu elde edilir (Jordan 1950; Erdelyi 1953; Abramowitz ve Stegun 1972; Milne-Thomson 1980; Srivastava ve Choi 2012).

Faulhaber formülüne benzer şekilde, pozitif tamsayıların kuvvetlerinin alterne toplamaları da (2.6) denklemi ve

$$\sum_{v=0}^{m-1} (-1)^v e^{vt} = \frac{1 + (-1)^{m+1} e^{mt}}{1 + e^t}$$

seri yardımıyla,

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{m-1} (-1)^v v^n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{t^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^m E_n (m+1) \frac{t^n}{n!}$$

bulunur. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$ ifadesinin katsayıları karşılaştırılırsa

$$\sum_{v=1}^m (-1)^v v^n = \frac{(-1)^m E_n (m+1) + E_n}{2}$$

elde edilir (Jacobi 1834; Abramowitz ve Stegun 1972; Conway ve Guy 1996; Ewell 1975; Knuth 1993; Kim 2004; Kim vd. 2006; Srivastava ve Choi 2012; Kucukoglu ve Simsek, 2019; Kilar ve Simsek 2020; Kim vd. 2021).

$E_0 = 1$ ve $n \geq 1$ olmak üzere, Euler sayıları aşağıdaki bağıntı ile hesaplanır:

$$E_n = - \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} E_j \quad (2.7)$$

(Jordan 1950; Apostol 1951; Erdelyi 1953; Abramowitz ve Stegun 1972; Comtet 1974; Srivastava ve Pinter 2004; Luo ve Srivastava 2005; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012; Srivastava vd. 2012).

(2.6) denklemini kullanılarak, Euler sayıları ve polinomları arasındaki ilişki aşağıdaki bağıntı ile verilir:

$$E_n(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^{n-j} E_j \quad (2.8)$$

(Jordan 1950; Apostol 1951; Erdelyi 1953; Abramowitz ve Stegun 1972; Comtet 1974; Srivastava ve Pinter 2004; Luo ve Srivastava 2005; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012; Srivastava vd. 2012).

(2.8) bağıntısı yardımıyla Euler polinomlarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} E_0(x) &= 1, \\ E_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\ E_2(x) &= x^2 - x, \\ E_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}, \\ E_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x, \\ E_5(x) &= x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Mathematica Uygulaması 2. İlk altı Euler polinomunun, x parametresi için rastgele seçilmiş iki özel aralıkta grafiğini çizen Mathematica uygulaması aşağıdaki gibidir:

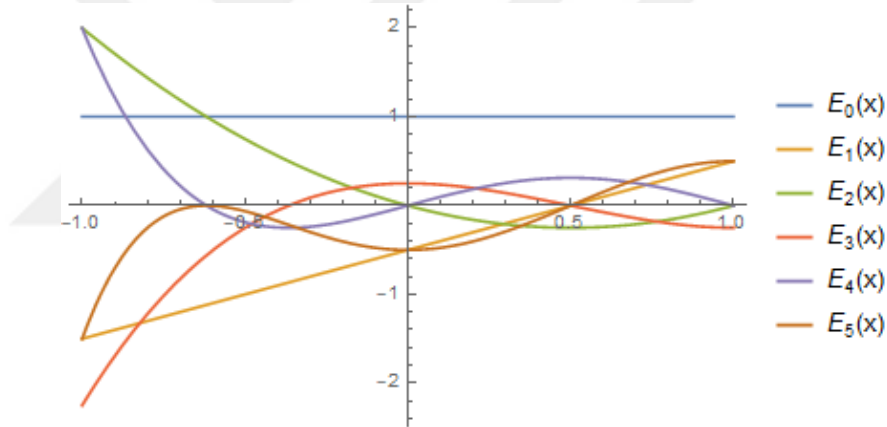
```
EulerPolyPlot1 = Plot[Evaluate[Simplify[Table[EulerE[n, x], {n, 0, 5}]]], {x, -1, 1},
  PlotLegends -> {Row[{"\(*SubscriptBox[E,0]\)", Row[{"(", "x", ")"}]}, Row[{"\(*SubscriptBox[E,1]\)", Row[{"(", "x", ")"}]}, Row[{"\(*SubscriptBox[E,2]\)", Row[{"(", "x", ")"}]}, Row[{"\(*SubscriptBox[E,3]\)", Row[{"(", "x", ")"}]}, Row[{"\(*SubscriptBox[E,4]\)", Row[{"(", "x", ")"}]}, Row[{"\(*SubscriptBox[E,5]\)", Row[{"(", "x", ")"}]}]}
```

```

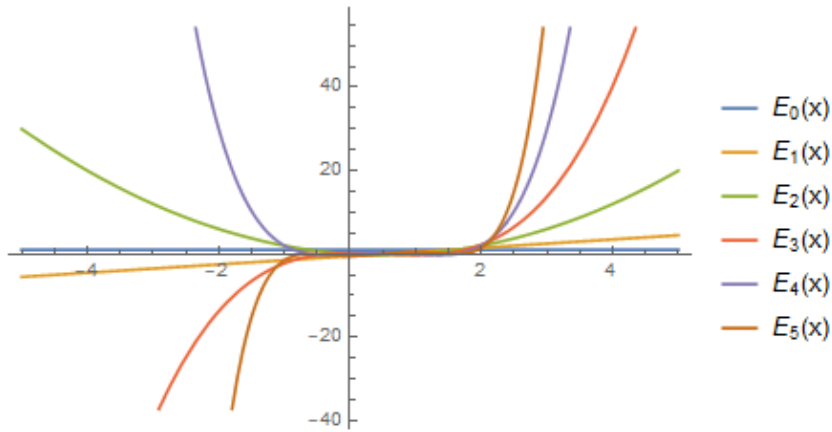
SubscriptBox[E,4])", Row[{"(", "x", ")"}]], Row[{"\\(\\* SubscriptBox[E,5])", Row[{"(", "x",
, ")"}]]]]]
2 Export["eulerP11.png", EulerPolyPlot1]
3 EulerPolyPlot2 = Plot[Evaluate[Simplify [Table[EulerE[n, x], {n, 0, 5}]]], {x, -5, 5},
PlotLegends -> {Row[{"\\(\\* SubscriptBox[E,0])", Row[{"(", "x", ")"}]], Row[{"\\(\\*
SubscriptBox[E,1])", Row[{"(", "x", ")"}]], Row[{"\\(\\* SubscriptBox[E,2])", Row[{"(", "x",
, ")"}]], Row[{"\\(\\* SubscriptBox[E,3])", Row[{"(", "x", ")"}]], Row[{"\\(\\*
SubscriptBox[E,4])", Row[{"(", "x", ")"}]], Row[{"\\(\\* SubscriptBox[E,5])", Row[{"(", "x",
, ")"}]]]]]
4 Export["eulerP1_5.png", EulerPolyPlot2]

```

Mathematica uygulaması 2 yardımıyla, $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ için Euler polinomlarının $x \in [-1, 1]$ ve $x \in [-5, 5]$ aralıklarındaki grafiklerinin çizimleri sırasıyla Şekil 2.3 ve Şekil 2.4 ile verilir:



Şekil 2.3. $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $x \in [-1, 1]$ için Euler polinomlarının grafiği



Şekil 2.4. $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $x \in [-5, 5]$ için Euler polinomlarının grafiği

Tanım 2.7. $|t| < \pi$ olmak üzere, $G_n(x)$ ile gösterilen Genocchi polinomları,

$$F_G(t, x) = \frac{2t}{e^t + 1} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x) \frac{t^n}{n!} \quad (2.9)$$

üstel üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Apostol 1951; Comtet 1974; Srivastava ve Pinter 2004; Luo ve Srivastava 2005; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012).

(2.9) denkleminde verilen üreteç fonksiyonunda $x = 0$ alınırsa,

$$G_n(0) = G_n$$

ile gösterilen Genocchi sayılarının üreteç fonksiyonu elde edilir (Comtet 1974; Roman 1984; Srivastava ve Pinter 2004; Luo ve Srivastava 2005; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012).

(2.6) ve (2.9) bağıntıları kullanılarak, Genocchi polinomları ve Euler polinomları arasındaki aşağıdaki iyi bilinen bağıntı elde edilir:

$$nE_{n-1}(x) = G_n(x). \quad (2.10)$$

$G_0 = 0$, $G_1 = 1$ ve $n \geq 2$ olmak üzere, Genocchi sayıları aşağıdaki bağıntı ile hesaplanır:

$$G_n = - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} G_k \quad (2.11)$$

(Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012; Zou 2017).

(2.9) bağıntısı kullanılarak, Genocchi sayıları ve polinomları arasındaki ilişki aşağıdaki bağıntı ile verilir:

$$G_n(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^{n-j} G_j \quad (2.12)$$

(2.12) bağıntısı yardımıyla Genocchi polinomlarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$G_0(x) = 0,$$

$$G_1(x) = 1,$$

$$G_2(x) = 2x - 1,$$

$$G_3(x) = 3x^2 - 3x,$$

$$G_4(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1,$$

$$G_5(x) = 5x^4 - 10x^3 + 5x.$$

Tanım 2.8. $\alpha \neq 1$ olmak üzere, $A_n(\alpha)$ ile gösterilen Euler Frobenius polinomları,

$$\frac{1 - \alpha}{1 - \alpha e^{t(1-\alpha)}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\alpha) \frac{t^n}{n!} \quad (2.13)$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır ve bu polinomlara Eulerian polinomları da denilmektedir. $A_n(\alpha)$, $n > 0$ olmak üzere, $(n-1)$. dereceden α 'nın bir polinomudur ve

$$A_n(\alpha) = \sum_{k=0}^n E(n, k) \alpha^k \quad (2.14)$$

şeklindedir. Burada, $0 \leq k < n$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $E(n, k)$ ile gösterilen Eulerian sayıları,

$$E(n, k) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{n+1}{j} (k+1-j)^n, \quad (2.15)$$

şeklinde tanımlanır (Carlitz 1959; Carlitz vd. 1966; Carlitz 1969; He 2011; He 2012; Gun ve Simsek 2020a).

Literatürde Eulerian sayıları $A_{n,k}$, $A(n, k)$, $W_{n,k}$, $\left\langle \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle$ ve $E(n, k)$ gibi notasyonlar ile de gösterilmektedir. Bu tez çalışmasında, Eulerian sayıları $E(n, k)$ notasyonu ile, Euler Frobenius polinomlarını ise $A_n(\alpha)$ notasyonu ile gösterilecektir.

Ayrıca, $A_n(\alpha)$ polinomları,

$$\sum_{l=0}^{\infty} l^n \alpha^l = \frac{A_n(\alpha)}{(1-\alpha)^{n+1}}, \quad |\alpha| < 1$$

şeklinde de tanımlanmaktadır (Carlitz 1959; Carlitz vd. 1966; Carlitz 1969; He 2011; He 2012; Gun ve Simsek 2020a).

$E(n, k)$ ile gösterilen Eulerian sayılarının kombinatorik yorumu aşağıdaki şekilde verilebilir:

n . mertebeden simetrik grubun $k - 1$ uzunluğundaki permütasyonların sayısını verir (Carlitz 1959; Carlitz vd. 1966; Carlitz 1969; He 2011; He 2012).

$E(n, k)$ sayılarının geometrik bir yorumu, $(a)_+ = \max\{0, a\}$ olmak üzere, aşağıdaki şekilde verilir:

$$E(n, k) = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n+1}{j} (k-j)_+^n, \quad 1 \leq k \leq n.$$

dir ve düğüm noktalarında Eulerian sayıları ile B-spline eğrileri arasındaki ilişkiyi sağlar (He 2012).

(2.13) bağıntısı yardımıyla, $A_0(\alpha) = 1$ olmak üzere, Euler Frobenius polinomları

$$A_{n+1}(\alpha) = \alpha(1-\alpha)A'_n(\alpha) + (\alpha n + 1)A_n(\alpha) \quad (2.16)$$

özyineleme (rekürans) bağıntısını sağlar (Hee 2011; He 2012).

(2.14) bağıntısı yardımıyla, Eulerian sayıları

$$E(n, k) = kE(n-1, k) + (n-k+1)E(n-1, k-1), \quad (2.17)$$

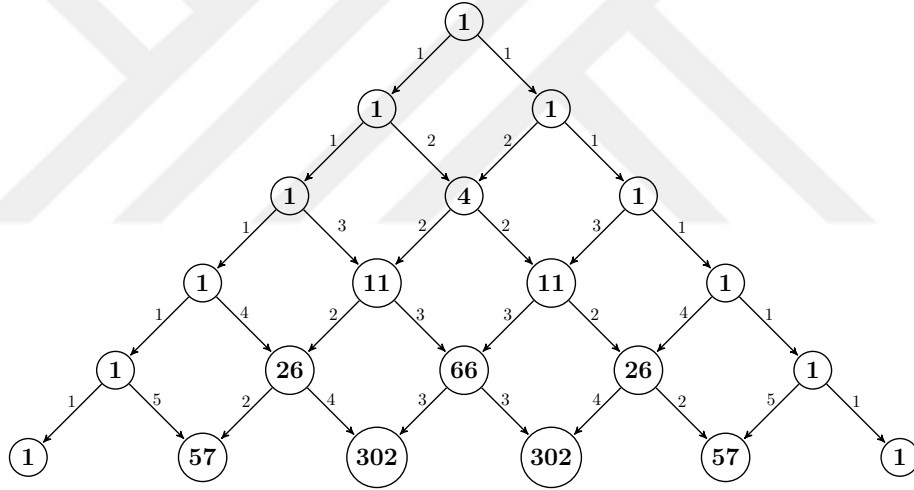
rekürans bağıntısını sağlar (Carlitz vd. 1966; Wang vd. 2010; Gun ve Simsek 2020a).

(2.15) denklemi yardımıyla, Eulerian sayılarının birkaç değeri aşağıdaki Çizelge 2.1 ile verilir:

Çizelge 2.1. $E(n, k)$ için bazı değerler

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0
3	1	4	1	0	0	0
4	1	11	11	1	0	0
5	1	26	66	26	1	0
6	1	57	302	302	57	1

(2.17) bağıntısı yardımıyla Eulerian sayıları aşağıdaki Şekil 2.5 ile de verilebilir:

**Şekil 2.5.** (2.17) ile verilen rekürans bağıntısı yardımıyla Eulerian sayıları (Petersen 2015)

(2.14) denklemi kullanılarak, Euler Frobenius polinomlarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned}
A_0(\alpha) &= 1, \\
A_1(\alpha) &= 1, \\
A_2(\alpha) &= \alpha + 1, \\
A_3(\alpha) &= \alpha^2 + 4\alpha + 1, \\
A_4(\alpha) &= \alpha^3 + 11\alpha^2 + 11\alpha + 1, \\
A_5(\alpha) &= \alpha^4 + 26\alpha^3 + 66\alpha^2 + 26\alpha + 1.
\end{aligned}$$

Tanım 2.9. $H_n(x; u)$ ile gösterilen Frobenius-Euler polinomları,

$$\frac{u-1}{u-e^t} e^{tx} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x; u) \frac{t^n}{n!} \quad (2.18)$$

üstel üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Carlitz 1959; Carlitz 1969; Schoenberg 1987; Schoenberg 1988, Kim, 1999; Simsek, 2013a).

(2.18) denkleminde verilen üreteç fonksiyonunda $x = 0$ alınırsa,

$$H_n(0; u) = H_n(u)$$

ile gösterilen Frobenius-Euler sayılarının üreteç fonksiyonu elde edilir. Yani, Frobenius-Euler sayıları

$$\frac{u-1}{u-e^t} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(u) \frac{t^n}{n!} \quad (2.19)$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Carlitz 1959; Carlitz 1969; Schoenberg 1987; Schoenberg 1988, Kim, 1999; Simsek, 2013a).

Literatürde, Frobenius-Euler polinomları ve sayıları farklı notasyonlar ve farklı adlandırılmalar ile kullanılmaktadır. Örneğin, Schoenberg, Frobenius-Euler sayılarını ve polinomlarını, sırasıyla, aşağıdaki notasyonlar ile göstermektedir:

$$H_n(0; u) = a_n(u),$$

ve

$$H_n(x; u) = A_n(x; u).$$

Aynı zamanda Schoenberg, Frobenius-Euler sayılarını ve polinomlarını, u parametresine bağlı n . dereceden üstel Euler sayıları ve polinomları olarak isimlendirmektedir.

Ayrıca, (2.18) denkleminde verilen üreteç fonksiyonunda $u = -1$ alınırsa, Frobenius-Euler polinomları ile Euler polinomları arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde verilir:

$$H_n(x; -1) = E_n(x). \quad (2.20)$$

Yukarıdaki bağıntıda $x = 0$ alınırsa

$$H_n(-1) = E_n \quad (2.21)$$

elde edilir (Carlitz 1959; Carlitz 1969; Schoenberg 1987; Schoenberg 1988, Kim, 1999; Simsek, 2013a).

(2.13) bağıntısı yardımıyla,

$$\frac{1 - \frac{1}{\alpha}}{e^{t(1-\alpha)} - \frac{1}{\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\alpha) \frac{t^n}{n!}$$

elde edilir. Buradan (2.19) bağıntısı kullanılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n\left(\frac{1}{\alpha}\right) (1-\alpha)^n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\alpha) \frac{t^n}{n!}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$ ifadesinin katsayıları karşılaştırılırsa, Frobenius-Euler sayıları ile Eulerian polinomları arasındaki iyi bilinen ilişki aşağıdaki şekilde verilir:

$$H_n\left(\frac{1}{\alpha}\right) (1-\alpha)^n = A_n(\alpha).$$

Bu bağıntı yardımıyla Eulerian polinom ailesi bulunur.

(2.10) bağıntısında $x = 0$ alınırsa ve (2.21) bağıntısı kullanılırsa, aşağıdaki iyi bilinen bağıntı elde edilir:

$$H_n(-1) = \frac{1}{n+1} G_{n+1}. \quad (2.22)$$

(2.19) bağıntısında verilen üreteç fonksiyonu yardımıyla Frobenius-Euler sayılarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned}
H_0(u) &= 1, \\
H_1(u) &= \frac{1}{u-1}, \\
H_2(u) &= \frac{1+u}{(u-1)^2}, \\
H_3(u) &= \frac{u^2+4u+1}{(u-1)^3}, \\
H_4(u) &= \frac{u^3+11u^2+11u+1}{(u-1)^4}, \\
H_5(u) &= \frac{u^4+26u^3+66u^2+26u+1}{(u-1)^4}.
\end{aligned}$$

Tanım 2.10. $k \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere, $S_2(n, k)$ ile gösterilen ikinci tür Stirling sayıları

$$F_{S_2}(t, k) = \frac{(e^t - 1)^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} S_2(n, k) \frac{t^n}{n!} \quad (2.23)$$

üstel üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Jordan 1950; Erdelyi 1953; Abramowitz ve Stegun 1972; Milne-Thomson 1980; Graham vd. 1994; Charalambides 2005; Srivastava ve Choi 2012; Simsek 2013).

(2.23) denkleminde verilen üreteç fonksiyonu kullanılarak, $S_2(0, 0) = 1$, $n > 0$ ise $S_2(n, 0) = 0$ ve $k > n$ ise $S_2(n, k) = 0$ olmak üzere, ikinci tür Stirling sayıları için,

$$S_2(n, k) = k S_2(n-1, k) + S_2(n-1, k-1)$$

rekürans bağıntısı elde edilir (Jordan 1950; Erdelyi 1953; Abramowitz ve Stegun 1972; Milne-Thomson 1980; Graham vd. 1994; Charalambides 2005; Srivastava ve Choi 2012; Simsek 2013).

(2.23) bağıntısı kullanılarak, ikinci tür Stirling sayıları aşağıdaki bağıntı ile hesaplanır:

$$S_2(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n \quad (2.24)$$

(Jordan 1950; Erdelyi 1953; Riordan 1958; Abramowitz ve Stegun 1972; Milne-Thomson 1980; Charalambides 2005; Boyadzhiev 2012; Srivastava ve Choi 2012; Simsek 2013).

(2.24) denklemi yardımıyla, ikinci tür Stirling sayılarının birkaç değeri aşağıdaki Çizelge 2.2 ile verilir:

Çizelge 2.2. $S_2(n, k)$ için bazı değerler

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0	0
3	0	1	3	1	0	0	0	0
4	0	1	7	6	1	0	0	0
5	0	1	15	25	10	1	0	0
6	0	1	31	90	65	15	1	0
7	0	1	63	301	350	140	21	1

(2.23) ve (2.14) bağıntıları kullanılarak Eulerian sayıları ve ikinci tür Stirling sayıları arasındaki ilişki aşağıdaki bağıntı ile verilir:

$$S_2(m, n) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{j}{m-n} E(m, j) \quad (2.25)$$

(Carlitz vd. 1966; Comtet 1974; Putzer ve Hauss 1993; Charalambides 2005; Gun ve Simsek 2020a).

Tanım 2.11. $0 < |t| < \frac{1}{4}$ olmak üzere, C_n ile gösterilen Catalan sayıları,

$$\frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4t}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n \quad (2.26)$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Koshy 2009; Elezovic 2015; Qi 2017; Roman, 2015; Simsek 2015).

(2.26) denklemi kullanılarak, Catalan sayıları aşağıdaki formül ile hesaplanır:

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \quad (2.27)$$

(Koshy 2009; Elezovic 2015; Roman 2015; Simsek 2015, Stanley 2015; Qi 2017;).

(2.27) bağıntısı yardımıyla, Catalan sayılarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$C_0 = 1, \quad C_1 = 1, \quad C_2 = 2, \quad C_3 = 5, \quad C_4 = 14, \quad C_5 = 42, \quad C_6 = 132.$$

Tanım 2.12. $|t| < \ln 2$ olmak üzere, $w_g(n)$ ile gösterilen Fubini sayıları

$$F_{w_g}(t) = \frac{1}{2 - e^t} = \sum_{n=0}^{\infty} w_g(n) \frac{t^n}{n!} \quad (2.28)$$

üstel üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Comtet 1974; Good 1975; Kılar 2017; Kılar ve Simsek 2017).

(2.23) ve (2.28) bağıntılarını kullanılarak, Fubini sayıları ile ikinci tür Stirling sayıları arasındaki ilişki aşağıdaki bağıntı ile verilir:

$$w_g(n) = \sum_{k=0}^n k! S_2(n, k) \quad (2.29)$$

(Comtet 1974; Kılar 2017; Kılar ve Simsek 2017).

(2.29) denklemi yardımıyla, Fubini sayılarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$w_g(0) = 1, \quad w_g(1) = 1, \quad w_g(2) = 3, \quad w_g(3) = 13, \quad w_g(4) = 75, \quad w_g(5) = 541.$$

2.2. Yüksek Mertebeden Bazı Özel Sayı ve Polinom Ailelerinin Üreteç Fonksiyonları ve Özellikleri

Burada, yüksek mertebeden bazı özel sayıların ve polinomların üreteç fonksiyonlarının tanımları verilecek ve bunların temel özellikleri Srivastava ve Pinter 2004, Charalambides 2005, Luo ve Srivastava 2005, Luo ve Srivastava 2011, Srivastava 2011, Srivastava ve Choi 2012 kaynaklarından yararlanılarak incelenecektir.

2.2.1. Yüksek mertebeden pozitif kuvvetli bazı özel sayı ve polinom ailelerinin üreteç fonksiyonları ve özellikleri

Tanım 2.13. $m \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere, $B_n^{(m)}(x)$ ile gösterilen m . mertebeden Bernoulli polinomları,

$$F_{B_P}(t, x; m) = \left(\frac{t}{e^t - 1} \right)^m e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(m)}(x) \frac{t^n}{n!} \quad (2.30)$$

üstel üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Jordan 1950; Erdelyi 1953; Abramowitz ve Stegun 1972; Milne-Thomson 1980; Srivastava ve Pinter 2004; Charalambides 2005; Luo ve Srivastava 2005, Luo ve Srivastava 2011; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012).

Tanım 2.14. $m \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere, $B_n^{(m)}$ ile gösterilen m . mertebeden Bernoulli sayıları,

$$F_{B_S}(t; m) = \left(\frac{t}{e^t - 1} \right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(m)} \frac{t^n}{n!} \quad (2.31)$$

üstel üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Jordan 1950; Erdelyi 1953; Abramowitz ve Stegun 1972; Milne-Thomson 1980; Bretti ve Ricci 2004; Bretti vd. 2004, Srivastava ve Pinter 2004; Charalambides 2005; Luo ve Srivastava 2005, Luo ve Srivastava 2011; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012).

Burada, (2.30) denkleminde verilen üreteç fonksiyonunda $x = 0$ alınırsa,

$$B_n^{(m)}(0) = B_n^{(m)}$$

için üreteç fonksiyonu elde edilir.

(2.31) ve (2.30) bağıntıları kullanılarak, m . mertebeden Bernoulli sayıları ve polinomları arasındaki ilişki aşağıdaki bağıntı ile verilir:

$$B_n^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k^{(m)} x^{n-k} \quad (2.32)$$

(Jordan 1950; Erdelyi 1953; Abramowitz ve Stegun 1972; Milne-Thomson 1980; Bretti ve Ricci 2004; Bretti vd. 2004; Srivastava ve Pinter 2004; Charalambides 2005; Luo ve Srivastava 2005, Luo ve Srivastava 2011; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012).

(2.31) denkleminde verilen üreteç fonksiyonu yardımıyla, m . mertebeden Bernoulli sayıları aşağıdaki formül ile hesaplanır:

$$B_n^{(m)} = \sum_{k=0}^n \binom{m+n}{n-k} \binom{m+k-1}{k} \frac{n!}{(n+k)!} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} j^{n+k} \quad (2.33)$$

(Erdelyi 1953; Charalambides 2005; Srivastava ve Choi 2012).

Ayrıca, (2.24) ve (2.33) bağıntıları kullanılarak, m . mertebeden Bernoulli sayıları ile ikinci tür Stirling sayıları arasındaki ilişki aşağıdaki bağıntı ile verilir:

$$B_n^{(m)} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{m+n}{n-k} \binom{m+k-1}{k} \binom{n+k}{k}^{-1} S_2(n+k, k)$$

(Erdelyi 1953; Charalambides 2005; Srivastava ve Choi 2012).

(2.30) ve (2.31) bağıntılarında $m = 1$ alınırsa,

$$B_n^{(1)}(x) = B_n(x) \quad (2.34)$$

ve

$$B_n^{(1)} = B_n$$

elde edilir (Jordan 1950; Apostol 1951; Erdelyi 1953; Abramowitz ve Stegun 1972; Comtet 1974; Milne-Thomson 1980; Srivastava ve Pinter 2004; Charalambides 2005; Luo ve Srivastava 2005; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012).

(2.33) denklemi kullanılarak, yüksek mertebeden Bernoulli sayılarının birkaç değeri Çizelge 2.3 ile verilmiştir.

Çizelge 2.3. $B_n^{(m)}$ için bazı değerler

$n \backslash m$	0	1	2	3	4	5
0	1	1	1	1	1	1
1	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	-2	$-\frac{5}{2}$
2	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	2	$\frac{11}{3}$	$\frac{35}{6}$
3	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{9}{4}$	-6	$-\frac{25}{2}$
4	0	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{19}{10}$	$\frac{251}{30}$	24
5	0	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{3}{4}$	-9	$-\frac{475}{12}$

(2.32) denkleminde $m = 2$ alınırsa, 2. mertebeden Bernoulli polinomlarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$B_0^{(2)}(x) = 1,$$

$$B_1^{(2)}(x) = x - 1,$$

$$B_2^{(2)}(x) = x^2 - 2x + \frac{5}{6},$$

$$B_3^{(2)}(x) = x^3 - 3x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{1}{2},$$

$$B_4^{(2)}(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x + \frac{1}{10},$$

$$B_5^{(2)}(x) = x^5 - 5x^4 + \frac{25}{3}x^3 - 5x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}.$$

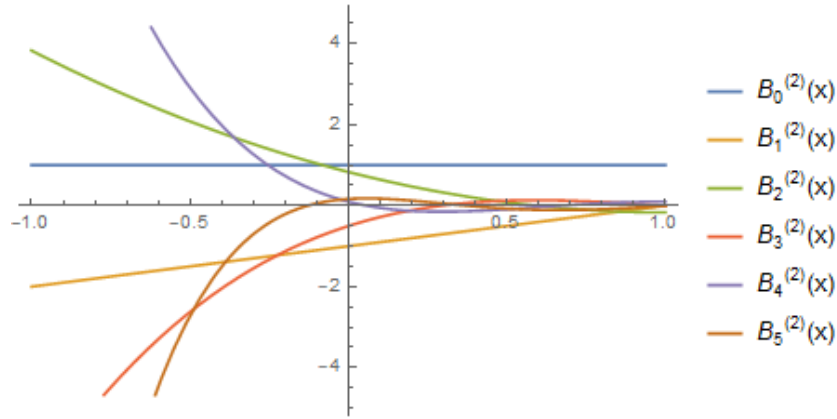
Mathematica Uygulaması 3. (2.33) ve (2.32) bağıntıları yardımıyla, yüksek mertebeden Bernoulli polinomlarını hesaplayan ve ikinci mertebeden Bernoulli polinomlarının, x parametresi için rastgele seçilmiş iki özel aralıkta grafiğini çizen Mathematica uygulaması aşağıdaki gibidir:

```

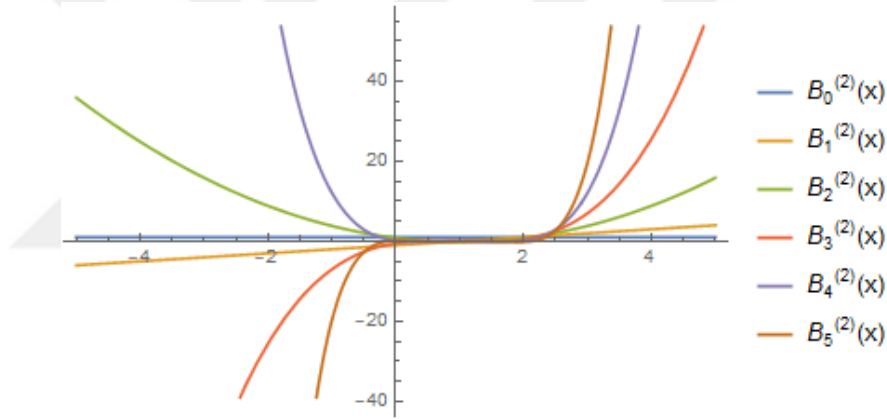
1 Unprotect[Power]; Power[0, 0] = 1; Protect[Power]; B[n_, m_] := Sum[Binomial[m+n, n-k]
  Binomial[m+k-1, k] Binomial[k, j] (-1)^j ((n!)/(n+k)! j^(n+k), {k, 0, n}, {j, 0, k}]; B[n_, x_, m_] := Sum[
  Binomial[n, k] B[k, m] x^(n-k), {k, 0, n}]; BernoulliPolyPlot1 = Plot[Evaluate[Simplify [Table[B[n,
  x, 2], {n, 0, 5}]]], {x, -1, 1}, PlotLegends -> {Row[{Superscript["\[(*SubscriptBox[B,0])"],
  Row[{"(", "2", ")"}]}], Row[{"(", "x", ")"}]}], Row[{Superscript["\[(*SubscriptBox[B,1])"],
  Row[{"(", "2", ")"}]}], Row[{"(", "x", ")"}]}], Row[{Superscript["\[(*SubscriptBox[B,2])"],
  Row[{"(", "2", ")"}]}], Row[{"(", "x", ")"}]}], Row[{Superscript["\[(*SubscriptBox[B,3])"],
  Row[{"(", "2", ")"}]}], Row[{"(", "x", ")"}]}], Row[{Superscript["\[(*SubscriptBox[B
  ,4])"], Row[{"(", "2", ")"}]}], Row[{"(", "x", ")"}]}], Row[{Superscript["\[(*SubscriptBox[
  B,5)"], Row[{"(", "2", ")"}]}], Row[{"(", "x", ")"}]}]}]
2 Export["bernP21.png", BernoulliPolyPlot1]
3 BernoulliPolyPlot2 == Plot[Evaluate[Simplify [Table[B[n, x, 2], {n, 0, 5}]]], {x, -5, 5},
  PlotLegends -> { Row[{Superscript["\[(*SubscriptBox[B,0])"], Row[{"(", "2", ")"}]}], Row[{"(
  ", "x", ")"}]}], Row[{Superscript["\[(*SubscriptBox[B,1])"], Row[{"(", "2", ")"}]}], Row
  [{"(", "x", ")"}]}], Row[{Superscript["\[(*SubscriptBox[B,2])"], Row[{"(", "2", ")"}]}],
  Row[{"(", "x", ")"}]}], Row[{Superscript["\[(*SubscriptBox[B,3])"], Row[{"(", "2", ")"}]}],
  Row[{"(", "x", ")"}]}], Row[{Superscript["\[(*SubscriptBox[B,4])"], Row[{"(", "2", ")"}]}
  ]], Row[{"(", "x", ")"}]}], Row[{Superscript["\[(*SubscriptBox[B,5])"], Row[{"(", "2", ")"}
  " ]}], Row[{"(", "x", ")"}]}]}]
4 Export["bernoulliP2.png", BernoulliPolyPlot2]

```

Mathematica uygulaması 3 yardımıyla, $m = 2$ için, 2. mertebeden Bernoulli polinomlarının $x \in [-1, 1]$ ve $x \in [-5, 5]$ aralıklarındaki grafiklerinin çizimleri sırasıyla Şekil 2.6 ve Şekil 2.7 ile verilir:



Şekil 2.6. $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $x \in [-1, 1]$ için 2. mertebeden Bernoulli polinomlarının grafiği



Şekil 2.7. $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $x \in [-5, 5]$ için 2. mertebeden Bernoulli polinomlarının grafiği

(2.32) denkleminde $m = 3$ alınırsa, 3. mertebeden Bernoulli polinomlarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned}
B_0^{(3)}(x) &= 1, \\
B_1^{(3)}(x) &= x - \frac{3}{2}, \\
B_2^{(3)}(x) &= x^2 - 3x + 2, \\
B_3^{(3)}(x) &= x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x - \frac{9}{4}, \\
B_4^{(3)}(x) &= x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 9x + \frac{19}{10}, \\
B_5^{(3)}(x) &= x^5 - \frac{15}{2}x^4 + 20x^3 - \frac{45}{2}x^2 + \frac{19}{2}x - \frac{3}{4}, \dots
\end{aligned}$$

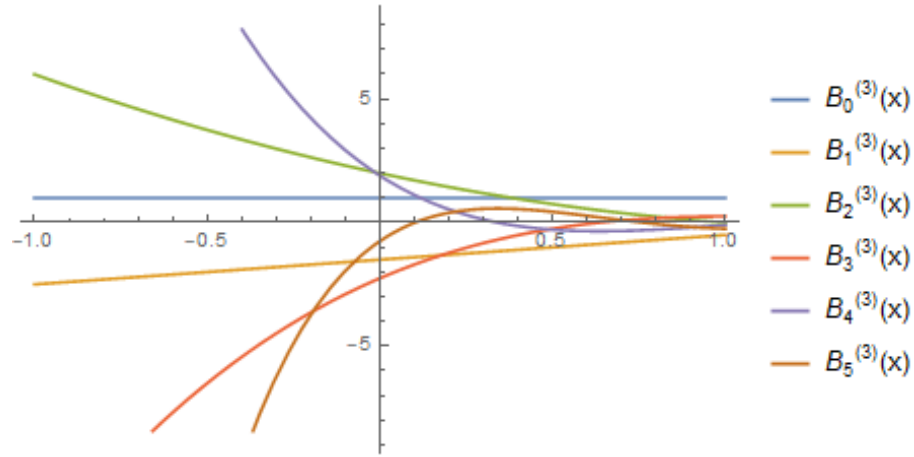
Mathematica Uygulaması 4. (2.33) ve (2.32) bağıntıları yardımıyla, üçüncü mertebeden Bernoulli polinomlarının, x parametresi için rastgele seçilmiş iki özel aralıkta grafiğini çizen Mathematica uygulaması aşağıdaki gibidir:

```

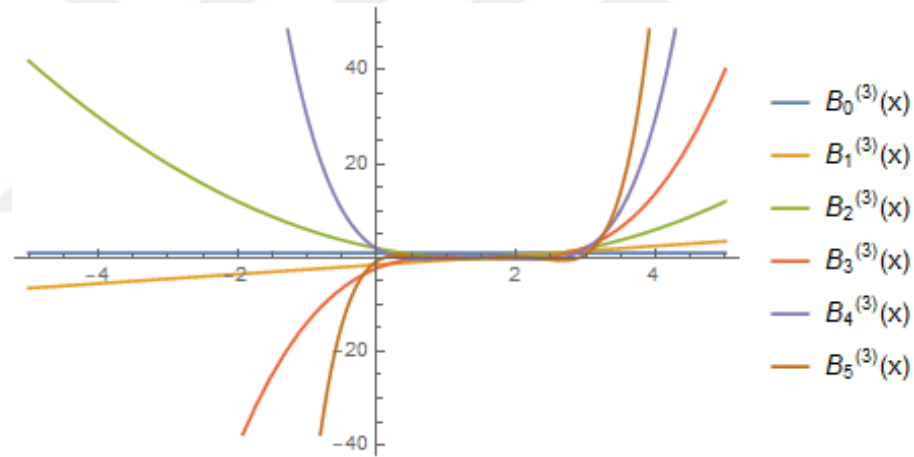
1 BernoulliPolyPlot3 = Plot[Evaluate[Simplify [Table[B[n, x, 3], {n, 0, 5}]]], {x, -1, 1},
  PlotLegends -> {Row[{Superscript["\[SubscriptBox[B,0]"]],Row[{"(", "3", ")"}]}, Row[
{"(", "x", ")"}]}, Row[{Superscript["\[SubscriptBox[B,1]"]],Row[{"(", "3", ")"}]}, Row
[{"(", "x", ")"}]}, Row[{Superscript["\[SubscriptBox[B,2]"]],Row[{"(", "3", ")"}]},
Row[{"(", "x", ")"}]}, Row[{Superscript["\[SubscriptBox[B,3]"]],Row[{"(", "3", ")"}]},
Row[{"(", "x", ")"}]}, Row[{Superscript["\[SubscriptBox[B,4]"]],Row[{"(", "3", ")"}]},
Row[{"(", "x", ")"}]}, Row[{Superscript["\[SubscriptBox[B,5]"]],Row[{"(", "3", ")"}]},
Row[{"(", "x", ")"}]}]}]
2 Export["bernP31.png", BernoulliPolyPlot3]
3 BernoulliPolyPlot4 = Plot[Evaluate[Simplify [Table[B[n, x, 3], {n, 0, 5}]]], {x, -5, 5},
  PlotLegends -> {Row[{Superscript["\[SubscriptBox[B,0]"]],Row[{"(", "3", ")"}]}, Row[
{"(", "x", ")"}]}, Row[{Superscript["\[SubscriptBox[B,1]"]],Row[{"(", "3", ")"}]}, Row
[{"(", "x", ")"}]}, Row[{Superscript["\[SubscriptBox[B,2]"]],Row[{"(", "3", ")"}]},
Row[{"(", "x", ")"}]}, Row[{Superscript["\[SubscriptBox[B,3]"]],Row[{"(", "3", ")"}]},
Row[{"(", "x", ")"}]}, Row[{Superscript["\[SubscriptBox[B,4]"]],Row[{"(", "3", ")"}]},
Row[{"(", "x", ")"}]}, Row[{Superscript["\[SubscriptBox[B,5]"]],Row[{"(", "3", ")"}]},
Row[{"(", "x", ")"}]}]}]
4 Export["bernoulliP3.png", BernoulliPolyPlot4]

```

Mathematica uygulaması 4 yardımıyla, $m = 3$ için, 3. mertebeden Bernoulli polinomlarının $x \in [-1, 1]$ ve $x \in [-5, 5]$ aralıklarındaki grafiklerinin çizimleri sırasıyla Şekil 2.8 ve Şekil 2.9 ile verilir:



Şekil 2.8. $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $x \in [-1, 1]$ için 3. mertebeden Bernoulli polinomlarının grafiği



Şekil 2.9. $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $x \in [-5, 5]$ için 3. mertebeden Bernoulli polinomlarının grafiği

Tanım 2.15. $m \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere, $E_n^{(m)}(x)$ ile gösterilen m . mertebeden Euler polinomları,

$$F_{EP}(t, x; m) = \left(\frac{2}{e^t + 1} \right)^m e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(m)}(x) \frac{t^n}{n!} \quad (2.35)$$

üstel üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Jordan 1950; Erdelyi 1953; Abramowitz ve Stegun 1972; Milne-Thomson 1980; Srivastava ve Pinter 2004; Luo ve Srivastava 2005, Luo ve Srivastava 2011; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012).

Tanım 2.16. $m \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere, $E_n^{(m)}$ ile gösterilen m . mertebeden Euler sayıları,

$$F_{ES}(t; m) = \left(\frac{2}{e^t + 1} \right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(m)} \frac{t^n}{n!} \quad (2.36)$$

üstel üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Jordan 1950; Erdelyi 1953; Abramowitz ve Stegun 1972; Milne-Thomson 1980; Srivastava ve Pinter 2004; Luo ve Srivastava 2005, Luo ve Srivastava 2011; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012).

Burada, (2.35) denkleminde verilen üreteç fonksiyonunda $x = 0$ alınırsa,

$$E_n^{(m)}(0) = E_n^{(m)}$$

için üreteç fonksiyonu elde edilir.

(2.35) ve (2.36) bağıntıları kullanılarak, m . mertebeden Euler sayıları ve polinomları arasındaki ilişki aşağıdaki bağıntı ile verilir:

$$E_n^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E_k^{(m)} x^{n-k}$$

(Srivastava ve Pinter 2004; Luo ve Srivastava 2005, Luo ve Srivastava 2011; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012).

(2.35) ve (2.36) bağıntılarında $m = 1$ alınırsa,

$$E_n^{(1)}(x) = E_n(x)$$

ve

$$E_n^{(1)} = E_n$$

elde edilir (Jordan 1950; Apostol 1951; Erdelyi 1953; Abramowitz ve Stegun 1972; Comtet 1974; Milne-Thomson 1980; Srivastava ve Pinter 2004; Luo ve Srivastava 2005; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012).

2.2.2. Yüksek mertebeden negatif kuvvetli bazı özel sayı ve polinom ailelerinin üreteç fonksiyonları ve özellikleri

Tanım 2.17. $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $B_n^{(-k)}(x)$ ile gösterilen k . mertebeden negatif kuvvetli Bernoulli polinomları,

$$G_{BP}(t, x; k) = \left(\frac{e^t - 1}{t} \right)^k e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(-k)}(x) \frac{t^n}{n!} \quad (2.37)$$

üstel üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Jordan 1950; Erdelyi 1953; Abramowitz ve Stegun 1972; Milne-Thomson 1980; Charalambides 2005; Luo ve Srivastava 2011; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012).

Tanım 2.18. $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $B_n^{(-k)}$ ile gösterilen k . mertebeden negatif kuvvetli Bernoulli sayıları,

$$G_{BS}(t; k) = \left(\frac{e^t - 1}{t} \right)^k = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(-k)} \frac{t^n}{n!} \quad (2.38)$$

üstel üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Jordan 1950; Erdelyi 1953; Abramowitz ve Stegun 1972; Milne-Thomson 1980; Charalambides 2005; Luo ve Srivastava 2011; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012).

Burada, (2.37) denkleminde verilen üreteç fonksiyonunda $x = 0$ alınırsa,

$$B_n^{(-k)}(0) = B_n^{(-k)}$$

için üreteç fonksiyonu elde edilir.

Diğer yandan, (2.31) ve (2.38) bağıntıları kullanılarak, aşağıdaki fonksiyonel denklem elde edilir:

$$F_{BS}(t; k) G_{BS}(t; k) = 1.$$

Bu fonksiyonel yardımıyla,

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)} \frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(-k)} \frac{t^n}{n!} = 1.$$

elde edilir. Buradan

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} B_j^{(-k)} B_{n-j}^{(k)} \frac{t^n}{n!}.$$

olarak bulunur. Yukarıdaki denklemde $\frac{t^n}{n!}$ ifadesinin katsayıları karşılaştırılırsa, yüksek mertebeden negatif kuvvetli Bernoulli sayıları ve yüksek mertebeden Bernoulli sayıları arasındaki ilişki aşağıdaki bağıntılar ile verilir:

$n = 0$ ise,

$$1 = B_0^{(-k)} B_0^{(k)},$$

ve $n \geq 1$ olmak üzere,

$$0 = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} B_j^{(-k)} B_{n-j}^{(k)}$$

(Charalambides 2005; Luo ve Srivastava 2011; Srivastava 2011; Simsek 2012b).

(2.37) bağıntısı kullanılarak, k . mertebeden negatif kuvvetli Bernoulli polinomları aşağıdaki bağıntı ile hesaplanır:

$$B_n^{(-k)}(x) = \binom{n+k}{k}^{-1} \sum_{v=0}^{n+k} \binom{n+k}{v} S_2(v, k) x^{n+k-v} \quad (2.39)$$

(Charalambides 2005; Luo ve Srivastava 2011; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012).

(2.38) bağıntısı kullanılarak, k . mertebeden negatif kuvvetli Bernoulli sayıları aşağıdaki bağıntı ile hesaplanır:

$$B_n^{(-k)} = \binom{n+k}{k}^{-1} S_2(n+k, k) \quad (2.40)$$

(Charalambides 2005; Luo ve Srivastava 2011; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012).

(2.40) denklemini kullanılarak, yüksek mertebeden negatif kuvvetli Bernoulli sayılarının birkaç değeri Çizelge 2.4 ile verilmiştir.

Çizelge 2.4. $B_n^{(-k)}$ için bazı değerler

n/k	0	1	2	3	4	5
0	1	1	1	1	1	1
1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
2	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{13}{3}$	$\frac{20}{3}$
3	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$	10	$\frac{75}{4}$
4	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{31}{15}$	$\frac{43}{5}$	$\frac{243}{10}$	$\frac{331}{6}$
5	0	$\frac{1}{6}$	3	$\frac{69}{4}$	$\frac{185}{3}$	$\frac{675}{4}$

(2.39) denkleminde $k = 1$ alınırsa, 1. mertebeden negatif kuvvetli Bernoulli polinom-

larının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned}
 B_0^{(-1)}(x) &= 1, \\
 B_1^{(-1)}(x) &= x + \frac{1}{2}, \\
 B_2^{(-1)}(x) &= x^2 + x + \frac{1}{3}, \\
 B_3^{(-1)}(x) &= x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{1}{4}, \\
 B_4^{(-1)}(x) &= x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + \frac{1}{5}, \\
 B_5^{(-1)}(x) &= x^5 + \frac{5}{2}x^4 + \frac{10}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + x + 1.
 \end{aligned}$$

Mathematica Uygulaması 5. (2.39) bağıntısı yardımıyla, birinci mertebeden negatif kuvvetli Bernoulli polinomlarını hesaplayan ve x parametresi için rastgele seçilmiş iki özel aralıkta grafiğini çizen Mathematica uygulaması aşağıdaki gibidir:

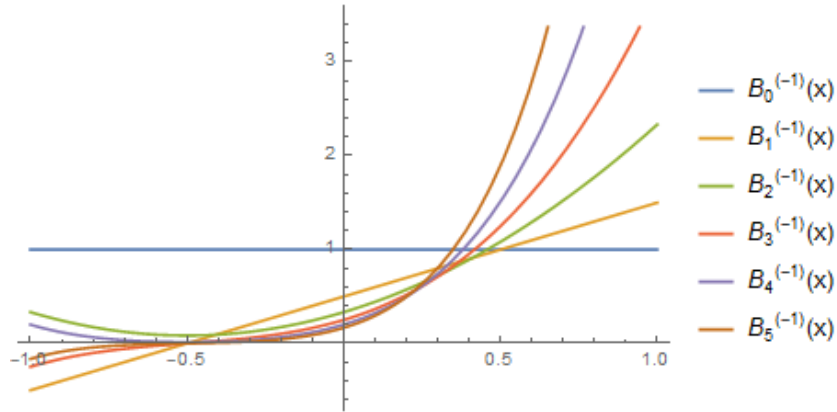
```

1 NB[x_,n_,k_]:= (Binomial[n+k,k])^(-1)Sum[Binomial[n+k,v]StirlingS2[v,k]x^(n+k-v),{v,0,n+k}];
   BernoulliPolyPlot = Plot[Evaluate[Simplify [Table[NB[x, n, 1], {n, 0, 5}]]], {x, -1, 1},
   PlotLegends -> {Row[{Superscript["\[SubscriptBox[B,0]"]],Row[{"(", "-1", ")"}]}, Row
   [{"(", "x", ")"}]}, Row[{Superscript["\[SubscriptBox[B,1]"]],Row[{"(", "-1", ")"}]},
   Row[{"(", "x", ")"}]}, Row[{Superscript["\[SubscriptBox[B,2]"]],Row[{"(", "-1", ")"}]},
   Row[{"(", "x", ")"}]}, Row[{Superscript["\[SubscriptBox[B,3]"]], Row[{"(", "-1",
   ")"}]}, Row[{"(", "x", ")"}]}, Row[{Superscript["\[SubscriptBox[B,4]"]], Row[{"(", "
   -1", ")"}]}, Row[{"(", "x", ")"}]}, Row[{Superscript["\[SubscriptBox[B,5]"]], Row[{"
   (-1", ")"}]}, Row[{"(", "x", ")"}]}]}]}
2 Export["bernN11.png", BernoulliPolyPlot]
3 BernoulliPolyPlot = Plot[Evaluate[Simplify [Table[NB[x, n, 1], {n, 0, 5}]]], {x, -5, 5},
   PlotLegends -> {Row[{Superscript["\[SubscriptBox[B,0]"]],Row[{"(", "-1", ")"}]}, Row
   [{"(", "x", ")"}]}, Row[{Superscript["\[SubscriptBox[B,1]"]],Row[{"(", "-1", ")"}]},
   Row[{"(", "x", ")"}]}, Row[{Superscript["\[SubscriptBox[B,2]"]],Row[{"(", "-1", ")"}]},
   Row[{"(", "x", ")"}]}, Row[{Superscript["\[SubscriptBox[B,3]"]], Row[{"(", "-1",
   ")"}]}, Row[{"(", "x", ")"}]}, Row[{Superscript["\[SubscriptBox[B,4]"]], Row[{"(", "
   -1", ")"}]}, Row[{"(", "x", ")"}]}, Row[{Superscript["\[SubscriptBox[B,5]"]], Row[{"
   (-1", ")"}]}, Row[{"(", "x", ")"}]}]}]}
4 Export["bernoulliN1.png", BernoulliPolyPlot]

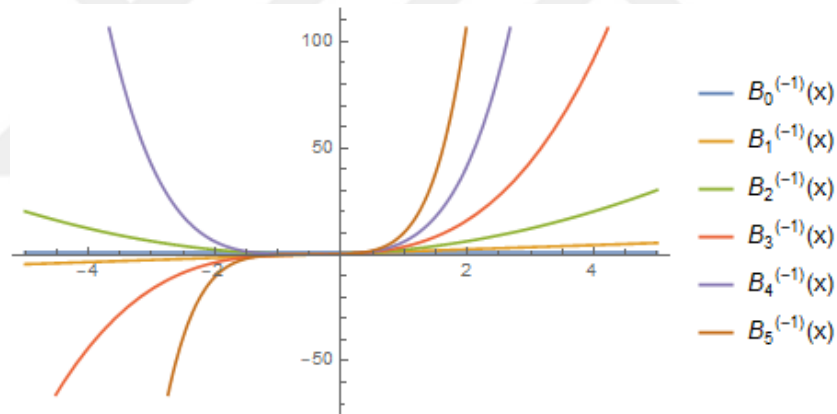
```

Mathematica uygulaması 5 yardımıyla, $k = 1$ için, 1. mertebeden negatif kuvvetli Bernoulli polinomlarının $x \in [-1, 1]$ ve $x \in [-5, 5]$ aralıklarındaki grafiklerinin çizimleri

sırasıyla Şekil 2.10 ve Şekil 2.11 ile verilir:



Şekil 2.10. $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $x \in [-1, 1]$ için 1. mertebeden negatif kuvvetli Bernoulli polinomlarının grafiği



Şekil 2.11. $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $x \in [-5, 5]$ için 1. mertebeden negatif kuvvetli Bernoulli polinomlarının grafiği

(2.39) denkleminde $k = 2$ alınırsa, 2. mertebeden negatif kuvvetli Bernoulli polinom-

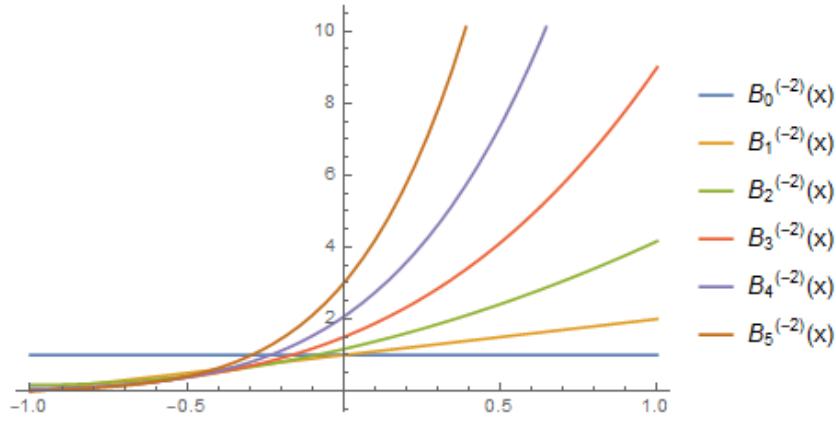
larının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned}
 B_0^{(-2)}(x) &= 1, \\
 B_1^{(-2)}(x) &= x + 1, \\
 B_2^{(-2)}(x) &= x^2 + 2x + \frac{7}{6}, \\
 B_3^{(-2)}(x) &= x^3 + 3x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}, \\
 B_4^{(-2)}(x) &= x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 6x + \frac{31}{15}, \\
 B_5^{(-2)}(x) &= x^5 + 5x^4 + \frac{35}{3}x^3 + 15x^2 + \frac{31}{3}x + 3.
 \end{aligned}$$

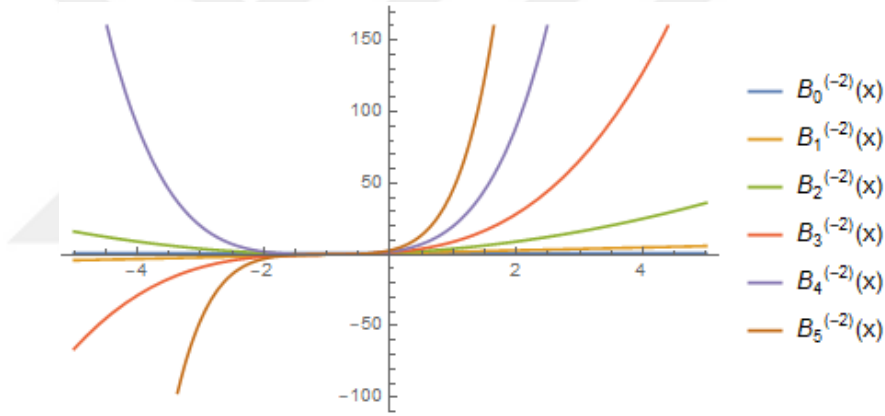
Mathematica Uygulaması 6. (2.39) bağıntısı yardımıyla, ikinci mertebeden negatif kuvvetli Bernoulli polinomlarının, x parametresi için rastgele seçilmiş iki özel aralıkta grafiğini çizen Mathematica uygulaması aşağıdaki gibidir:

-
- 1 BernoulliPolyPlot1 = **Plot[Evaluate[Simplify [Table[NB[x, n, 2], {n, 0, 5}]]], {x, -1, 1}, PlotLegends -> {Row[{Superscript["\(\(*SubscriptBox[B,0]\)\)", Row[{"(", "-2", ")"}]], Row[{"(", "x", ")"}]}], Row[{Superscript["\(\(*SubscriptBox[B,1]\)\)", Row[{"(", "-2", ")"}]], Row[{"(", "x", ")"}]}], Row[{Superscript["\(\(*SubscriptBox[B,2]\)\)", Row[{"(", "-2", ")"}]], Row[{"(", "x", ")"}]}], Row[{Superscript["\(\(*SubscriptBox[B,3]\)\)", Row[{"(", "-2", ")"}]], Row[{"(", "x", ")"}]}], Row[{Superscript["\(\(*SubscriptBox[B,4]\)\)", Row[{"(", "-2", ")"}]], Row[{"(", "x", ")"}]}], Row[{Superscript["\(\(*SubscriptBox[B,5]\)\)", Row[{"(", "-2", ")"}]], Row[{"(", "x", ")"}]}]}**
 - 2 **Export["bernN21.png", BernoulliPolyPlot1]**
 - 3 BernoulliPolyPlot2 = **Plot[Evaluate[Simplify [Table[NB[x, n, 2], {n, 0, 5}]]], {x, -5, 5}, PlotLegends -> {Row[{Superscript["\(\(*SubscriptBox[B,0]\)\)", Row[{"(", "-2", ")"}]], Row[{"(", "x", ")"}]}], Row[{Superscript["\(\(*SubscriptBox[B,1]\)\)", Row[{"(", "-2", ")"}]], Row[{"(", "x", ")"}]}], Row[{Superscript["\(\(*SubscriptBox[B,2]\)\)", Row[{"(", "-2", ")"}]], Row[{"(", "x", ")"}]}], Row[{Superscript["\(\(*SubscriptBox[B,3]\)\)", Row[{"(", "-2", ")"}]], Row[{"(", "x", ")"}]}], Row[{Superscript["\(\(*SubscriptBox[B,4]\)\)", Row[{"(", "-2", ")"}]], Row[{"(", "x", ")"}]}], Row[{Superscript["\(\(*SubscriptBox[B,5]\)\)", Row[{"(", "-2", ")"}]], Row[{"(", "x", ")"}]}]}**
 - 4 **Export["bernoulliN2.png", BernoulliPolyPlot2]**
-

Mathematica uygulaması 6 yardımıyla, $k = 2$ için, 2. mertebeden negatif kuvvetli Bernoulli polinomlarının $x \in [-1, 1]$ ve $x \in [-5, 5]$ aralıklarındaki grafiklerinin çizimleri sırasıyla Şekil 2.12 ve Şekil 2.13 ile verilir:



Şekil 2.12. $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $x \in [-1, 1]$ için 2. mertebeden negatif kuvvetli Bernoulli polinomlarının grafiği



Şekil 2.13. $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $x \in [-5, 5]$ için 2. mertebeden negatif kuvvetli Bernoulli polinomlarının grafiği

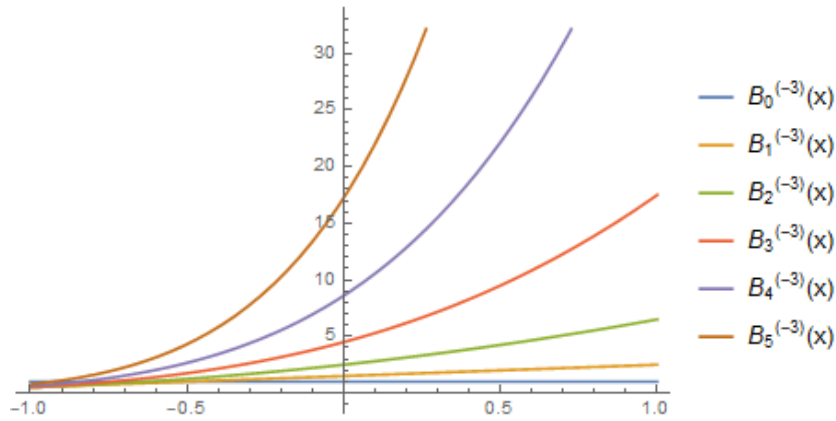
(2.39) denkleminde $k = 3$ alınırsa, 3. mertebeden negatif kuvvetli Bernoulli polinomlarının birkaç değeri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned}
B_0^{(-3)}(x) &= 1, \\
B_1^{(-3)}(x) &= x + \frac{3}{2}, \\
B_2^{(-3)}(x) &= x^2 + 3x + \frac{5}{2}, \\
B_3^{(-3)}(x) &= x^3 + \frac{9}{2}x^2 + \frac{15}{2}x + \frac{9}{2}, \\
B_4^{(-3)}(x) &= x^4 + 6x^3 + 15x^2 + 18x + \frac{43}{5}, \\
B_5^{(-3)}(x) &= x^5 + \frac{15}{2}x^4 + 25x^3 + 45x^2 + 43x + \frac{69}{4}, \dots
\end{aligned}$$

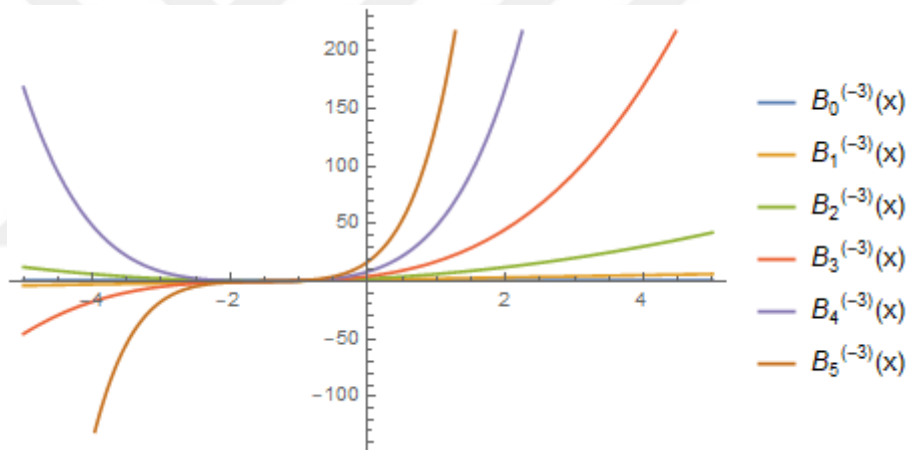
Mathematica Uygulaması 7. (2.39) bağıntısı yardımıyla, üçüncü mertebeden negatif kuvvetli Bernoulli polinomlarının, x parametresi için rastgele seçilmiş iki özel aralıkta grafiğini çizen Mathematica uygulaması aşağıdaki gibidir:

-
- 1 **BernoulliPolyPlot1 = Plot[Evaluate[Simplify [Table[NB[x, n, 3], {n, 0, 5}]]], {x, -1, 1}, PlotLegends -> {Row[{Superscript["\(*SubscriptBox[B,0]\)", Row[{"(", "-3", ")"}]]], Row[{"(", "x", ")"}]]], Row[{Superscript["\(*SubscriptBox[B,1]\)", Row[{"(", "-3", ")"}]]], Row[{"(", "x", ")"}]]], Row[{Superscript["\(*SubscriptBox[B,2]\)", Row[{"(", "-3", ")"}]]], Row[{"(", "x", ")"}]]], Row[{Superscript["\(*SubscriptBox[B,3]\)", Row[{"(", "-3", ")"}]]], Row[{"(", "x", ")"}]]], Row[{Superscript["\(*SubscriptBox[B,4]\)", Row[{"(", "-3", ")"}]]], Row[{"(", "x", ")"}]]], Row[{Superscript["\(*SubscriptBox[B,5]\)", Row[{"(", "-3", ")"}]]], Row[{"(", "x", ")"}]]]**
 - 2 **Export["bernN31.png", BernoulliPolyPlot1]**
 - 3 **BernoulliPolyPlot2 = Plot[Evaluate[Simplify [Table[NB[x, n, 3], {n, 0, 5}]]], {x, -5, 5}, PlotLegends -> {Row[{Superscript["\(*SubscriptBox[B,0]\)", Row[{"(", "-3", ")"}]]], Row[{"(", "x", ")"}]]], Row[{Superscript["\(*SubscriptBox[B,1]\)", Row[{"(", "-3", ")"}]]], Row[{"(", "x", ")"}]]], Row[{Superscript["\(*SubscriptBox[B,2]\)", Row[{"(", "-3", ")"}]]], Row[{"(", "x", ")"}]]], Row[{Superscript["\(*SubscriptBox[B,3]\)", Row[{"(", "-3", ")"}]]], Row[{"(", "x", ")"}]]], Row[{Superscript["\(*SubscriptBox[B,4]\)", Row[{"(", "-3", ")"}]]], Row[{"(", "x", ")"}]]], Row[{Superscript["\(*SubscriptBox[B,5]\)", Row[{"(", "-3", ")"}]]], Row[{"(", "x", ")"}]]]**
 - 4 **Export["bernoulliN3.png", BernoulliPolyPlot2]**
-

Mathematica uygulaması 7 yardımıyla, $k = 3$ için, 3. mertebeden negatif kuvvetli Bernoulli polinomlarının $x \in [-1, 1]$ ve $x \in [-5, 5]$ aralıklarındaki grafiklerinin çizimleri sırasıyla Şekil 2.14 ve Şekil 2.15 ile verilir:



Şekil 2.14. $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $x \in [-1, 1]$ için 3. mertebeden negatif kuvvetli Bernoulli polinomlarının grafiği



Şekil 2.15. $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $x \in [-5, 5]$ için 3. mertebeden negatif kuvvetli Bernoulli polinomlarının grafiği

2.3. Apostol Tipli Sayı ve Polinom Ailelerinin Üreteç Fonksiyonları ve Özellikleri

Bu alt bölümde, yüksek mertebeden Apostol-Bernoulli sayıları ve polinomları, Apostol-Euler sayıları ve polinomları, Apostol-Genocchi sayıları ve polinomlarının üreteç fonksiyonlarının tanımı verilecek ve bunların temel özellikleri Luo ve Srivastava 2005, Luo ve Srivastava 2011, Srivastava 2011, Srivastava ve Choi 2012, Zou 2017 kaynaklarından yararlanılarak incelenecektir.

Tanım 2.19. $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda = 1$ iken $|t| < |2\pi|$ ve $\lambda \neq 1$ iken $|t| < |\log \lambda|$ olsun. $m \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere, $\mathcal{B}_n^{(m)}(x; \lambda)$ ile gösterilen m . mertebeden Apostol-Bernoulli polinomları,

$$A_B(t, x; \lambda, m) = \left(\frac{t}{\lambda e^t - 1} \right)^m e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n^{(m)}(x; \lambda) \frac{t^n}{n!}, \quad (2.41)$$

üstel üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Luo ve Srivastava 2005; Luo ve Srivastava 2011; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012).

Tanım 2.20. $m \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere, $\mathcal{B}_n^{(m)}(\lambda)$ ile gösterilen m . mertebeden Apostol-Bernoulli sayıları,

$$\left(\frac{t}{\lambda e^t - 1} \right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n^{(m)}(\lambda) \frac{t^n}{n!}, \quad (2.42)$$

üstel üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Luo ve Srivastava 2011; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012).

(2.42) bağıntısı kullanılarak, m . mertebeden Apostol-Bernoulli sayıları aşağıdaki bağıntı ile hesaplanır:

$$\mathcal{B}_n^{(m)}(\lambda) = m! \binom{n}{m} \sum_{j=0}^{n-m} \binom{m+j-1}{j} \frac{j! (-\lambda)^j}{(\lambda-1)^{j+m}} S_2(n-m, j) \quad (2.43)$$

(Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012; Simsek 2018).

(2.41) ve (2.42) bağıntıları kullanılarak, m . mertebeden Apostol-Bernoulli sayıları ve polinomları arasındaki ilişki aşağıdaki bağıntı ile verilir:

$$\mathcal{B}_n^{(m)}(x; \lambda) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \mathcal{B}_j^{(m)}(\lambda) x^{n-j} \quad (2.44)$$

(Luo ve Srivastava 2005; Luo ve Srivastava 2011; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012).

(2.41) bağıntısında $\lambda = 1$ alınırsa,

$$B_n^{(m)}(x) = \mathcal{B}_n^{(m)}(x; 1)$$

elde edilir.

(2.41) bağıntısında $m = 1$ alınırsa,

$$\mathcal{B}_n(x; \lambda) = \mathcal{B}_n^{(1)}(x; \lambda)$$

ile gösterilen Apostol-Bernoulli polinomları elde edilir (Apostol, 1951; Luo 2004; Luo ve Srivastava 2005; Luo ve Srivastava 2011; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012).

Tanım 2.21. $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda = 1$ iken $|t| < |\pi|$ ve $\lambda \neq 1$ iken $|t| < |\log(-\lambda)|$ olsun. $m \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere, $\mathcal{E}_n^{(k)}(x; \lambda)$ ile gösterilen m . mertebeden Apostol-Euler polinomları,

$$A_E(t, x; \lambda, k) = \left(\frac{2}{\lambda e^t + 1} \right)^m e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}_n^{(m)}(x; \lambda) \frac{t^n}{n!} \quad (2.45)$$

üstel üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Luo 2006; Luo ve Srivastava 2011; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012).

Tanım 2.22. $m \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere, $\mathcal{E}_n^{(k)}(\lambda)$ ile gösterilen m . mertebeden Apostol-Euler sayıları,

$$\left(\frac{2}{\lambda e^t + 1} \right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}_n^{(m)}(\lambda) \frac{t^n}{n!} \quad (2.46)$$

üstel üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Luo 2006; Luo ve Srivastava 2011; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012).

(2.46) bağıntısı kullanılarak, m . mertebeden Apostol-Euler sayıları aşağıdaki bağıntı ile hesaplanır:

$$\mathcal{E}_n^{(m)}(\lambda) = (-1)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{k+m} m^{n-k} \sum_{j=0}^k \binom{m+j-1}{j} \frac{j! (-\lambda)^j}{(\lambda+1)^{m+j}} S_2(k, j) \quad (2.47)$$

(Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012; Simsek 2018).

(2.45) ve (2.46) bağıntıları kullanılarak, m . mertebeden Apostol-Euler sayıları ve polinomları arasındaki ilişki aşağıdaki bağıntı ile verilir:

$$\mathcal{E}_n^{(m)}(x; \lambda) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \mathcal{E}_j^{(m)}(\lambda) x^{n-j}. \quad (2.48)$$

Ayrıca m . mertebeden Apostol-Euler polinomları aşağıdaki gibi de hesaplanabilir:

$$\mathcal{E}_n^{(m)}(x; \lambda) = 2^m \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \sum_{j=0}^k \binom{m+j-1}{j} \frac{j! (-\lambda)^j}{(\lambda+1)^{m+j}} S_2(k, j) \quad (2.49)$$

(Luo 2006; Luo ve Srivastava 2011; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012).

(2.45) bağıntısında $\lambda = 1$ alınırsa,

$$E_n^{(m)}(x) = \mathcal{E}_n^{(m)}(x; 1)$$

elde edilir.

(2.45) bağıntısında $m = 1$ alınırsa,

$$\mathcal{E}_n(x; \lambda) = \mathcal{E}_n^{(1)}(x; \lambda)$$

ile gösterilen Apostol-Euler polinomları elde edilir (Apostol, 1951; Luo 2004; Luo ve Srivastava 2005; Luo ve Srivastava 2011; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012).

Tanım 2.23. $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda = 1$ iken $|t| < |\pi|$ ve $\lambda \neq 1$ iken $|t| < |\log(-\lambda)|$ olsun. $m \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere, $\mathcal{G}_n^{(m)}(x; \lambda)$ ile gösterilen m . mertebeden Apostol-Genocchi polinomları

$$A_G(t, x; \lambda, m) = \left(\frac{2t}{\lambda e^t + 1} \right)^m e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n^{(m)}(x; \lambda) \frac{t^n}{n!} \quad (2.50)$$

üstel üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Luo ve Srivastava 2011; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012; Zou 2017).

Tanım 2.24. $m \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere, $\mathcal{G}_n^{(m)}(\lambda)$ ile gösterilen m . mertebeden Apostol-Genocchi sayıları

$$\left(\frac{2t}{\lambda e^t + 1} \right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}_n^{(m)}(\lambda) \frac{t^n}{n!} \quad (2.51)$$

üstel üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Luo ve Srivastava 2011; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012; Zou 2017).

(2.51) bağıntısı kullanılarak, m . mertebeden Apostol-Genocchi sayıları aşağıdaki bağıntı ile hesaplanır:

$$\mathcal{G}_n^{(m)}(\lambda) = \frac{2^m n!}{(n-m)!} \sum_{j=0}^{n-m} \binom{m+j-1}{j} \frac{j! (-\lambda)^j}{(\lambda+1)^{j+m}} S_2(n-m, j) \quad (2.52)$$

(Luo ve Srivastava 2011; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012).

(2.50) ve (2.51) bağıntıları kullanılarak, m . mertebeden Apostol-Genocchi sayıları ve polinomları arasındaki ilişki aşağıdaki bağıntı ile verilir:

$$\mathcal{G}_n^{(m)}(x; \lambda) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \mathcal{G}_j^{(m)}(\lambda) x^{n-j} \quad (2.53)$$

(Luo ve Srivastava 2011; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012; Zou 2017).

(2.50) bağıntısında $\lambda = 1$ alınırsa,

$$G_n^{(m)}(x) = \mathcal{G}_n^{(m)}(x; 1)$$

elde edilir.

(2.50) bağıntısında $m = 1$ alınırsa,

$$\mathcal{G}_n(x; \lambda) = \mathcal{G}_n^{(1)}(x; \lambda)$$

ile gösterilen Apostol-Genocchi polinomları elde edilir (Apostol, 1951; Luo 2004; Luo ve Srivastava 2005; Luo ve Srivastava 2011; Srivastava 2011; Srivastava ve Choi 2012).

(2.50) bağıntısında $m = 1$ alınırsa ve (2.18) bağıntısı kullanılırsa, Apostol-Genocchi polinomları ve Frobenius-Euler polinomları arasındaki iyi bilinen aşağıdaki ilişki elde edilir:

$$\mathcal{G}_n\left(x; -\frac{1}{u}\right) = \frac{2nu}{u-1} H_{n-1}(x; u). \quad (2.54)$$

(2.41), (2.45) ve (2.50) bağıntılarında verilen üreteç fonksiyonları kullanılarak, yüksek mertebeden Apostol-Bernoulli polinomları, Apostol-Euler polinomları ve Apostol-Genocchi polinomları arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile verilir:

Teorem 2.25. $n, m \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq m \leq n$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere;

$$\mathcal{G}_n^{(m)}(x; -\lambda) = \frac{n!}{(n-m)!} \mathcal{E}_{n-m}^{(m)}(x; -\lambda) = (-2)^m \mathcal{B}_n^{(m)}(x; \lambda) \quad (2.55)$$

dır (Luo ve Srivastava 2011; Srivastava 2011).

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde, kaynak taramasında detaylı olarak bahsedilen üreteç fonksiyonları metodu da kullanılarak, B-spline, kardinal spline, üstel spline, üstel Euler spline ve Bernoulli monospline eğri ailelerinin tanımları ve bunların bazı özellikleri Schoenberg 1946, Schoenberg 1987, Schoenberg 1988, He 2012 kaynaklarından yararlanılarak incelenecektir.

3.1. Kardinal Spline Eğri Aileleri

İlk olarak, bu bölümde kullanacağımız bazı notasyonları ve tanımları aşağıdaki gibi verelim:

$n \in \mathbb{N}_0$ ve

$$\mathfrak{S}_n = \{S(x) : S(x) \in C^{n-1}(\mathbb{R})\}$$

olmak üzere $\mathfrak{S}_n$ kümesinin her elemanına n . dereceden kardinal spline denir ve $S(x)$ fonksiyonlar ailesi aşağıdaki özellikleri sağlar:

$x \in (v, v+1)$ ve $v \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$S(x) \in C^{n-1}(\mathbb{R}),$$

ve

$$S(x) \in P_n$$

dir. Burada, P_n , $\mathbb{C}$ üzerinde, derecesi n sayısını geçmeyen polinomlar ailesidir (Schoenberg 1946; Schoenberg 1987; Schoenberg 1988).

Kardinal spline eğri ailelerinin bazı özellikleri aşağıda verilmiştir:

$S(x)$, n -kez türevlenebilen sürekli fonksiyonlar sınıfındadır ve $S^{(n)}(x)$, adım fonksiyonudur ve tanım aralığının uç noktaları eğrinin süreksizlik noktalarıdır.

$S^{(k)}(x)$, $S(x)$ 'nin k . türevi olmak üzere, $1 \leq k \leq n$ ise,

$$S(x) \in \mathfrak{S}_n$$

olduğunda

$$S^{(k)}(x) \in \mathfrak{S}_{n-k} \quad (3.1)$$

dir. Burada, $\mathfrak{S}_n$ kümesi $\mathfrak{S}_0$ sınıfındaki adım fonksiyonlarının ailesi olur (Schoenberg 1946; Schoenberg 1987; Schoenberg 1988).

$\mathfrak{S}_n^*$ ile gösterilen orta nokta spline aileleri aşağıdaki şekilde verilir:

$$\mathfrak{S}_n^* = \left\{ S(x) : S\left(x + \frac{1}{2}\right) \in \mathfrak{S}_n \right\}.$$

Yani, $\mathfrak{S}_n^*$ kümesinin her elemanına orta nokta kardinal spline (midpoint cardinal spline) denir (Schoenberg 1987; Schoenberg 1988).

Sonuç olarak, $n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere,

$$P_n \subset \mathfrak{S}_n, \quad P_n \subset \mathfrak{S}_n^*$$

dir (Schoenberg 1946; Schoenberg 1987; Schoenberg 1988).

3.1.1. Kardinal spline ve B-spline eğri aileleri arasındaki ilişkiler

B-spline yöntemleri, eğriler ve yüzeyler için ilk olarak 1940'lı yıllarda ortaya çıkmıştır ve 1970'li yıllarda daha da geliştirilmiştir. “B” harfi baz (basis) anlamına gelir, bu nedenle eğri ve yüzey tasarımına yönelik bu yaklaşımın tam adı baz spline anlamına gelmektedir. Burada, kardinal spline yardımıyla B-spline eğri ailesinin tanımı ve özellikleri Schoenberg 1946, Schoenberg 1987, Schoenberg 1988, He 2012 kaynaklarından yararlanılarak incelenecektir.

n . dereceden bir spline $(n - 1)$. dereceden x değişkeninine bağlı olarak her parçası bir polinom olmak üzere parçalı sürekli bir fonksiyondur. Polinom parçalarının birleştiği x değerlerine düğüm noktası denir ve $x_0, x_1, \dots, x_n$ ile gösterilir ve artan sıraya göre sıralanmaktadır.

$x_0, x_1, \dots, x_n$ düğüm noktaları ve $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ olmak üzere, $(n - 1)$. dereceden B-spline ailesi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$x \in \mathbb{R}$, $\omega(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n)$, $w'(x) = \frac{d}{dx}w(x)$ ve $x_+ = \max\{0, x\}$ olmak üzere, $M(x; x_0, x_1, \dots, x_n)$ ile gösterilen B-spline ailesi

$$M(x; x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^n \frac{n(x_j - x)_+^{n-1}}{\omega'(x_j)} \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanır (Schoenberg 1946; Schoenberg 1987; Schoenberg 1988; He 2012).

n . dereceden ardışık kardinal B-spline (cardinal forward B-spline) (ya da B-Spline)

$$N_n(x) = M(x; 0, 1, \dots, n),$$

ve $n \geq 2$ olmak üzere, n . dereceden B-spline eğri ailesi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$N_n(x) = \int_0^1 N_{n-1}(x-t)dt$$

(Schoenberg 1946; Schoenberg 1987; Schoenberg 1988; He 2012).

Ayrıca, (3.2) bağıntısı yardımıyla merkezi B-spline (central B-spline) aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$M_n(x) = M\left(x; \frac{-n}{2}, \frac{-n}{2} + 1, \dots, \frac{n}{2}\right)$$

(Schoenberg 1946; Schoenberg 1987; Schoenberg 1988).

Şimdi de B-spline için aşağıdaki formülleri verelim:

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$N_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{v=0}^n (-1)^v \binom{n}{v} (x-v)_+^{n-1}, \quad (3.3)$$

ya da buna denk olarak

$$N_n(x) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \sum_{v=0}^n (-1)^v \binom{n}{v} (v-x)_+^{n-1}$$

bağıntıları sağlanır. Burada,

$$(x-v)_+^0 = \begin{cases} 1, & x \geq v \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve

$$(x-v)_+^{m-1} = \begin{cases} (x-v)^{m-1}, & x \geq v \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak alınır (Schoenberg 1946; Schoenberg 1987; Schoenberg 1988). Bunlara ek olarak,

$$M_n(x) = N_n\left(x + \frac{n}{2}\right)$$

bağıntısı kullanılarak, merkezi B-spline'lar içinde açık formüller elde edilebilir. Dahası,

$$N_n(x) \in \mathfrak{S}_{n-1}, \quad M_n(x) \in \begin{cases} \mathfrak{S}_{n-1}, & n \text{ çift ise,} \\ \mathfrak{S}_{n-1}^*, & n \text{ tek ise,} \end{cases}$$

dır (Schoenberg 1946; Schoenberg 1987; Schoenberg 1988).

Kardinal spline eğri aileleri ve B-spline eğri aileleri cinsinden ifadesini ve bunların bazı özelliklerini aşağıdaki gibi verelim:

Teorem 3.26. $S(x)$, $(n - 1)$. dereceden bir kardinal spline ise,

$$S(x) \in \mathfrak{S}_{n-1},$$

o zaman

$$S(x) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} c_v N_n(x - v)$$

şeklinde yazılabilir ve genellikle, $N_n(x) = N(x)$ olarak yazılır (Schoenberg 1946; Schoenberg 1987; Schoenberg 1988).

Kardinal spline ve B-spline ailelerin sağladığı bazı özellikler aşağıdaki gibi verilir:

1. Spline eğri ailesinin üzerinde tanımlı olduğu aralığa destekleyicisi denir. $N_n(x)$ kardinal spline ailesinin destekleyicisi $(0, n)$ aralığı üzerinde olmak üzere, $S(x)$ kardinal spline ailesinin bazıdır. $S(x)$ yerine $N_n(x)$ alınabilir ve $x < 0$ ve $x > n - 1$ ise,

$$S(x) = 0$$

dır. Yani, $S(x)$ kardinal spline ailesinin düğüm noktaları $0, 1, 2, \dots, n - 1$ dir.

Sonuç olarak, $\forall x \in \mathbb{R}$ için, $N_n(x)$, B-spline ile $0, 1, 2, \dots, n - 1$ düğümlerine karşılık gelen $S(x)$ kardinal spline aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$S(x) = c_0 x_+^{n-1} + c_1 (x - 1)_+^{n-1} + \dots + c_{n-1} (x - n + 1)_+^{n-1}$$

(Schoenberg 1946; Schoenberg 1987; Schoenberg 1988).

Özel olarak, $x > n - 1$ ise,

$$S(x) = c_0 x^{n-1} + c_1 (x - 1)^{n-1} + \dots + c_{n-1} (x - n + 1)^{n-1} = 0$$

elde edilir (Schoenberg 1946; Schoenberg 1987; Schoenberg 1988).

2. $q \in \mathbb{Z}$ ve $x \in (q - 1, q)$ ya da $x \in (q + n - 1, q + n)$ olmak üzere,

$$S(x) = 0$$

oluyorsa, o zaman

$$S(x) = 0, \quad x \in (q - 1, q + n) \quad (3.4)$$

dır (Schoenberg 1987; Schoenberg 1988). Bu durumda, $S_1(x)$ yeni bir spline olmak üzere,

$$S_1(x) = \begin{cases} S(x), & q \leq x \leq q + n - 1, \\ 0, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

olarak tanımlanır ve burada $S_1(x) \in \mathfrak{S}_{n-1}$ dir. (3.4) bağıntısında verilen özellik kullanılırsa $x \in \mathbb{R}$ için $S_1(x) = 0$ olur (Schoenberg 1987; Schoenberg 1988).

3. $N(x), N(x-1), \dots, N(x-n+1)$ B-spline eğri ailesi olmak üzere, $n-1 \leq x \leq n$ aralığında

$$N(x), N(x-1), \dots, N(x-n+1)$$

lineer bağımsızdır (Schoenberg 1987; Schoenberg 1988). Yani, $x \in (n-1, n)$ olmak üzere,

$$\sum_{v=0}^{n-1} c_v N_n(x-v) = 0$$

ve $c_v = 0$ dir. O zaman, $N(x), N(x-1), \dots, N(x-n+1)$ lineer bağımsız B-spline'lar yardımıyla

$$S(x) = \sum_{v=0}^{n-1} c_v N_n(x-v)$$

kardinal spline olarak yazılır (Schoenberg 1987; Schoenberg 1988). Buradan, $S(x) \in \mathfrak{S}_{n-1}$ olur ve $x \in (n-1, n)$ için

$$S(x) = 0$$

elde edilir. Diğer taraftan $x < 0$ ise,

$$S(x) = 0$$

olur (Schoenberg 1987; Schoenberg 1988).

Şimdi de Goldman (2012) tarafından verilen n . dereceden düzgün B-spline eğrisini verelim:

$\{k, k+1, \dots, k+n+1\}$ düğüm noktaları olmak üzere destek aralığı $[k, k+n+1]$ ve derecesi n olan $N_{k,n}(x)$ düzgün B-spline eğri ailesi aşağıdaki üreteç fonksiyonu ile tanımlanır:

$$G_k(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} N_{k,n}(x) t^n$$

(Goldman 2012). Burada, $N_{k,n}(x)$ fonksiyonları $N_{0,n}(x)$ fonksiyonlarının kaydırılması (shifts) ile oluşmaktadır. Yani,

$$N_{k,n}(x) = N_{0,n}(x-k),$$

dır. Böylece

$$G_k(x, t) = G_0(x - k, t)$$

olur. Sonuç olarak, $N_{k,n}(x)$ B-spline eğrisi ve bunun üreteç fonksiyonlarını $G_k(x, t)$ incelemek yerine $N_{0,n}(x)$ B-spline eğrisi ve bunun üreteç fonksiyonlarını $G_0(x, t)$ incelemek yeterli olacaktır (Goldman 2012).

$N_{0,n}(x)$, düzgün B-spline araştırmak için De Boor rekürans bağıntısını göz önüne alalım:

$$N_{0,n}(x) = \frac{x}{n}N_{0,n-1}(x) + \frac{n+1-x}{n}N_{1,n-1}(x).$$

Burada, $x \leq 1$ için $N_{1,n}(x) = 0$ olur. Bu nedenle, $0 \leq x \leq 1$ olmak üzere,

$$N_{0,n}(x) = \frac{x}{n}N_{0,n-1}(x)$$

olur. Dolayısıyla $x \in [0, 1]$ olmak üzere,

$$N_{0,n}(x) = 1, \quad N_{0,1}(x) = x, \quad N_{0,2}(x) = \frac{x^2}{2!}, \dots, \quad N_{0,n}(x) = \frac{x^n}{n!}$$

elde edilir. Buradan $0 \leq x \leq 1$ olmak üzere, $N_{0,n}(x)$ düzgün B-spline ailesinin üreteç fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilir:

$$\begin{aligned} G_0(x, t) &= \sum_{j=0}^p (-1)^j \left(\frac{(x-j)^j t^j}{j!} + \frac{(x-j)^{j-1} t^{j-1}}{(j-1)!} \right) e^{(x-j)t} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} N_{0,n}(x) \frac{t^n}{n!} \end{aligned} \quad (3.5)$$

(Goldman 2012).

$p \leq x \leq p+1$ olmak üzere, (3.5) bağıntısı yardımıyla Goldman (2012) tarafından $N_{0,n}(x)$ için Schoenberg özdeşliği aşağıdaki şekilde verilir:

$$N_{0,n}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^p (-1)^j \binom{n+1}{j} (x-j)^n$$

(Goldman 2012).

$N_{k,n}(t)$, n . dereceden düzgün B-spline baz fonksiyonu aşağıdaki rekürans bağıntısı ile verilir:

$$N_{k,0}(t) = \begin{cases} 1, & t_k \leq t < t_{k+1} \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

olmak üzere, $k = 0, \dots, p$ ve $n \geq 1$ ise

$$N_{k,n}(t) = \frac{t - t_k}{t_{k+n} - t_k} N_{k,n-1}(t) + \frac{t_{k+n+1} - t}{t_{k+n+1} - t_{k+1}} N_{k+1,n-1}(t) \quad (3.6)$$

dir (Goldman 2012; Salomon 2006).

Şimdi, (3.6) rekürans bağıntısı yardımıyla, Goldman (2012) tarafından verilen aşağıdaki örneği verelim:

Örnek 3.27.

$$N_{0,0} = N_{1,0} = 0, \text{ her yerde}$$

$$N_{2,0} = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

$$N_{3,0} = N_{4,0} = 0, \text{ her yerde}$$

olmak üzere, düğümleri $\{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$ olan 1. ve 2. dereceden düzgün B-spline baz fonksiyonları sırasıyla

$$N_{0,1} = \frac{t - 0}{0 - 0} N_{0,0} + \frac{0 - t}{0 - 0} N_{1,0}, \text{ her yerde}$$

$$N_{1,1} = \frac{t - 0}{0 - 0} N_{1,0} + \frac{1 - t}{1 - 0} N_{2,0} = \begin{cases} 1 - t, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

$$N_{2,1} = \frac{t - 0}{1 - 0} N_{2,0} + \frac{1 - t}{1 - 1} N_{3,0} = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

$$N_{3,1} = \frac{t - 1}{1 - 1} N_{3,0} + \frac{1 - t}{1 - 1} N_{4,0} = 0, \text{ her yerde}$$

ve

$$N_{0,2} = \frac{t - 0}{0 - 0} N_{0,1} + \frac{1 - t}{1 - 0} N_{1,1} = \begin{cases} (1 - t)^2, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

$$N_{1,2} = \frac{t - 0}{1 - 0} N_{1,1} + \frac{1 - t}{1 - 0} N_{2,1} = \begin{cases} 2t(1 - t), & 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

$$N_{2,2} = \frac{t - 0}{1 - 0} N_{2,1} + \frac{1 - t}{1 - 1} N_{3,1} = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

olarak elde edilir (Goldman 2012; Salomon 2006).

3.2. B-spline ile Bézier Eğrileri Arasındaki İlişkiler

3.2.1. Bernstein baz fonksiyonları ve Bézier eğrileri

Bu bölümde, B-spline eğri aileleri ile yakın ilişkisi olan Bernstein baz fonksiyonları yardımıyla Bézier eğrilerinin tanımı verilecektir ve Bézier eğrileri ile B-spline arasındaki ilişkiler de çalışılacaktır. Bunlara ek olarak, Bernstein baz polinomlarının Wolfram Mathematica paket programı yardımıyla grafikleri çizdirilmiştir.

Tanım 3.28. $n, k \in \mathbb{N}_0$ ve $t \in [0, 1]$ olmak üzere, Bernstein baz fonksiyonları

$$B_k^n(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \quad (3.7)$$

şeklinde tanımlanır (Goldman 2002; Farouki 2012; Salomon 2006; Simsek 2016).

Tanım 3.29. $t \in [0, 1]$ olsun. $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ kontrol noktaları ile belirlenen n . dereceden Bézier eğrisi

$$B_e(t) = \sum_{k=0}^n P_k B_k^n(t) \quad (3.8)$$

şeklinde tanımlanır (Goldman 2002; Farouki 2012; Salomon 2006; Simsek 2016).

(3.7) denklemi yardımıyla, Bernstein baz fonksiyonlarının birkaç değeri aşağıdaki Çizelge 3.5 ile verilir:

Çizelge 3.5. $B_k^n(t)$ için bazı değerler

$k \backslash n$	0	1	2	3	4	5
0	1	$1-t$	$(1-t)^2$	$(1-t)^3$	$(1-t)^4$	$(1-t)^5$
1	0	t	$2t(1-t)$	$3t(1-t)^2$	$4t(1-t)^3$	$5t(1-t)^4$
2	0	0	t^2	$3t^2(1-t)$	$6t^2(1-t)^2$	$10t^2(1-t)^3$
3	0	0	0	t^3	$4t^3(1-t)$	$10t^3(1-t)^2$
4	0	0	0	0	t^4	$5t^4(1-t)$
5	0	0	0	0	0	t^5

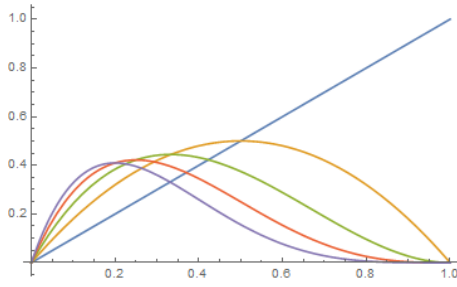
Mathematica Uygulaması 8. (3.7) bağıntısı yardımıyla, Bernstein baz fonksiyonlarını hesaplayan ve $k = 1, 2, 3, 4$ durumlarında, t parametresi için rastgele seçilmiş bir özel aralıkta grafiğini çizen Mathematica uygulaması aşağıdaki gibidir:

```

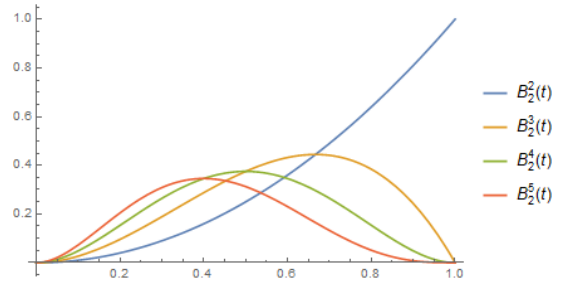
1 Bernstein[n_,k_,t_]:=Binomial[n,k](t^k)(1-t)^(n-k); BernsteinPolyPlot1=Plot[Evaluate[
    Simplify[Table[Bernstein[n,1,t],{n ,1,5}]],{ t , 0,1},PlotLegends ->{ToString[
    ToExpression["{HoldForm}{{B}_{1}^{1}\\left(t\\right)"} , TeXForm],TraditionalForm],
    ToString[ToExpression["{HoldForm}{{B}_{1}^{2}\\left(t\\right)"} , TeXForm],TraditionalForm
    ],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{B}_{1}^{3}\\left(t\\right)"} , TeXForm],
    TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{B}_{1}^{4}\\left(t\\right)"} , TeXForm
    ],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{B}_{1}^{5}\\left(t\\right)"} ,
    TeXForm],TraditionalForm]]]
2 Export["Berstein1.png", BernsteinPolyPlot1]
3 BernsteinPolyPlot2=Plot[Evaluate[Simplify[Table[Bernstein[n,2,t],{n ,2,5}]],{ t , 0,1},
    PlotLegends ->{ToString[ToExpression["{HoldForm}{{B}_{2}^{2}\\left(t\\right)"} , TeXForm],
    TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{B}_{2}^{3}\\left(t\\right)"} , TeXForm
    ],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{B}_{2}^{4}\\left(t\\right)"} ,
    TeXForm],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{B}_{2}^{5}\\left(t\\right)"} ,
    TeXForm],TraditionalForm]]]
4 Export["Berstein2.png", BernsteinPolyPlot2]
5 BernsteinPolyPlot3=Plot[Evaluate[Simplify[Table[Bernstein[n,3,t],{n ,3,5}]],{ t , 0,1},
    PlotLegends ->{ToString[ToExpression["{HoldForm}{{B}_{3}^{3}\\left(t\\right)"} , TeXForm],
    TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{B}_{3}^{4}\\left(t\\right)"} , TeXForm
    ],TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{B}_{3}^{5}\\left(t\\right)"} ,
    TeXForm],TraditionalForm]]]
6 Export["Berstein3.png", BernsteinPolyPlot3]
7 BernsteinPolyPlot4=Plot[Evaluate[Simplify[Table[Bernstein[n,4,t],{n ,4,5}]],{ t , 0,1},
    PlotLegends ->{ToString[ToExpression["{HoldForm}{{B}_{4}^{4}\\left(t\\right)"} , TeXForm],
    TraditionalForm],ToString[ToExpression["{HoldForm}{{B}_{4}^{5}\\left(t\\right)"} , TeXForm
    ],TraditionalForm]]]
8 Export["Berstein4.png", BernsteinPolyPlot4]

```

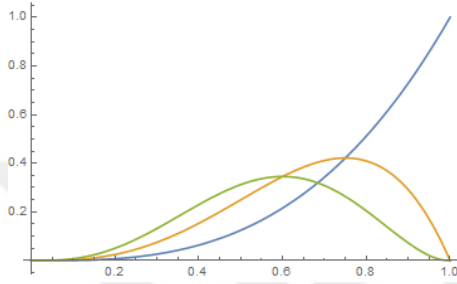
Mathematica uygulaması 8 yardımıyla, $k = 1, 2, 3, 4$ için, Bernstein baz fonksiyonlarının $t \in [0, 1]$ aralığındaki grafiklerinin çizimleri Şekil 3.16 ile verilir:



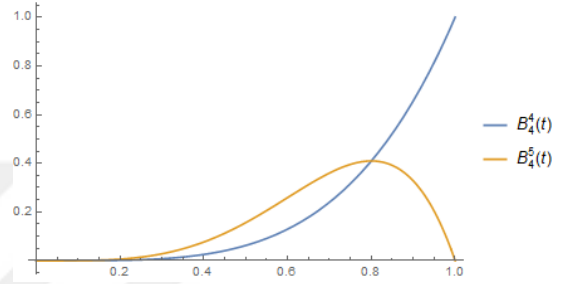
(a) $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $t \in [0, 1]$ için $B_1^n(t)$ polinomlarının grafiği



(b) $n \in \{2, 3, 4, 5\}$ ve $t \in [0, 1]$ için $B_2^n(t)$ polinomlarının grafiği



(c) $n \in \{3, 4, 5\}$ ve $t \in [0, 1]$ için $B_3^n(t)$ polinomlarının grafiği



(d) $n \in \{4, 5\}$ ve $t \in [0, 1]$ için $B_4^n(t)$ polinomlarının grafiği

Şekil 3.16. $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $t \in [0, 1]$ için $B_k^n(t)$ polinomlarının grafiği

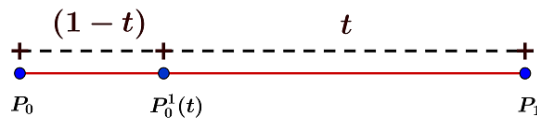
Şimdi (3.8) bağıntısı yardımıyla, birkaç Bézier eğrisinin tanımlarını ve şekillerini verelim:

$t \in [0, 1]$ olsun. P_0 ve P_1 iki kontrol noktası verildiğinde, bu kontrol noktalarına bağlı lineer (doğrusal) Bézier eğrisi

$$B_e(t) = (1 - t)P_0 + tP_1 \quad (3.9)$$

şeklinde tanımlanır (Goldman 2009; Farouki 2012; Simsek 2016; Wikipedia,a).

(3.9) bağıntısı yardımıyla, lineer Bézier eğrisi Şekil 3.17 ile verilir:



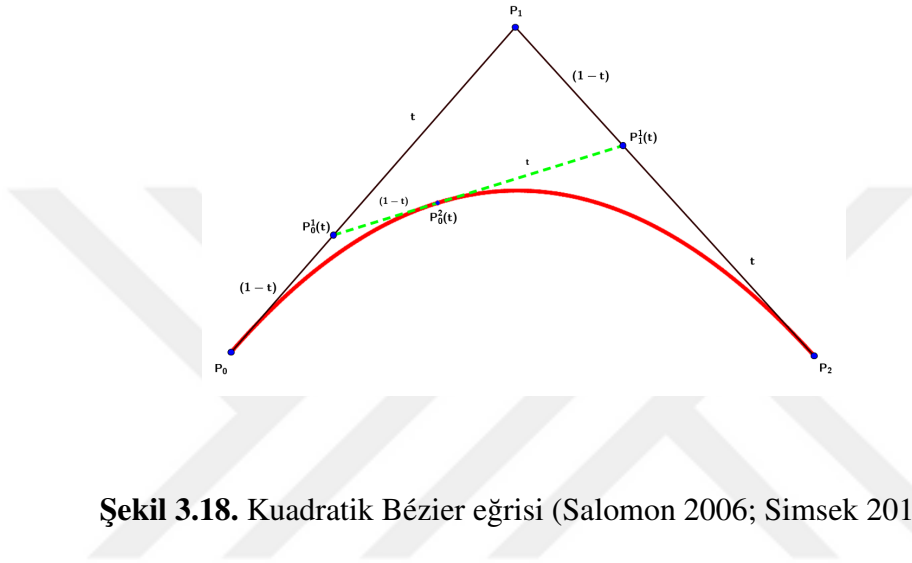
Şekil 3.17. Lineer Bézier eğrisi (Salomon 2006; Simsek 2016; Wikipedia,a)

$t \in [0, 1]$ olsun. P_0, P_1 ve P_2 üç kontrol noktası verildiğinde, bu kontrol noktalarına bağlı kuadratik Bézier eğrisi (2D)

$$B_e(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t) P_1 + t^2 P_2 \quad (3.10)$$

şeklinde tanımlanır (Goldman 2009; Farouki 2012; Simsek 2016; Wikipedia,a).

(3.10) bağıntısı yardımıyla, kuadratik Bézier eğrisi Şekil 3.18 ile verilir:



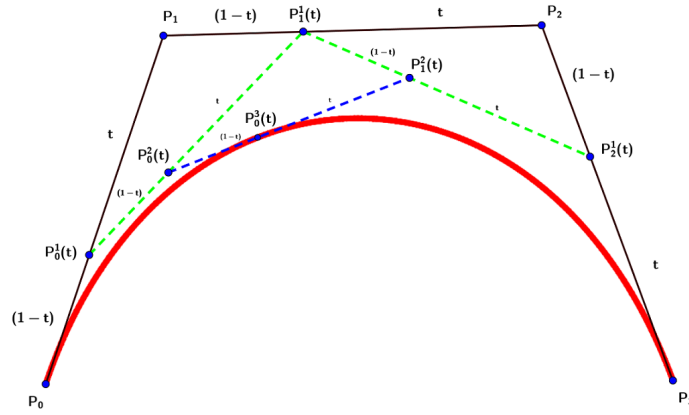
Şekil 3.18. Kuadratik Bézier eğrisi (Salomon 2006; Simsek 2016; Wikipedia,a)

$t \in [0, 1]$ olsun. P_0, P_1, P_2 ve P_3 dört kontrol noktası verildiğinde, bu kontrol noktalarına bağlı kübik Bézier eğrisi (3D)

$$B_e(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3 \quad (3.11)$$

şeklinde tanımlanır (Goldman 2009; Farouki 2012; Simsek 2016; Wikipedia,a).

(3.11) bağıntısı yardımıyla, kübik Bézier eğrisi Şekil 3.19 ile verilir:



Şekil 3.19. Kübik Bézier eğrisi (Salomon 2006; Simsek 2016)

Bézier eğrileri, B-spline eğrilerine göre aşağıdaki dezavantajlara sahiptir.

Bézier eğrisinin derecesi kontrol noktalarının sayısına bağlıdır. Ancak Bézier eğrileri bu dezavantajlara sahip olmasına rağmen pek çok farklı kullanım alanlarına da sahiptir. Diğer yandan, B-spline eğrileri Bézier eğrilerinde de olduğu gibi kontrol noktaları ile tanımlanır. Bu kontrol noktalarına ek olarak, düğümler aracılığıyla B-spline eğrisi belirlenir.

B-spline eğrileri düzgün ve düzgün olmayan eğriler olarak farklı sınıflara ayrılır. Düzgün olmayan B-spline eğrileri aynı zamanda NURBS olarak adlandırılır (Salomon 2006).

3.3. Üstel Spline

Burada, kardinal spline eğri ailelerinin daha genel sınıfı olan üstel spline ailesinin tanımları ve bazı temel özellikleri Schoenberg 1946, Schoenberg 1987, Schoenberg 1988 kaynaklarından yararlanılarak incelenecektir.

$t \neq 0, t \neq 1$ olmak üzere, $t \in \mathbb{R}$ ya da $t \in \mathbb{C}$ olacak şekilde bir sabit olsun. O halde,

$$f(x) = t^x$$

üstel fonksiyonu

$$f(x+1) = tf(x)$$

fonksiyonel denklemini sağlar. Bu durumda, “Bu fonksiyonel denklemi sağlayan $\mathfrak{S}_n$ kümesinin elemanları nelerdir?” sorusu aklımıza gelir (Schoenberg 1987). Bu sorunun ce-

vabı aşağıdaki gibi verilir:

Önteorem 3.30.

$$S(x+1) = tS(x) \quad (3.12)$$

fonksiyonel denklemini sağlayan $\mathfrak{S}_n$ kümesinin $S(x)$ en genel hali, c_0 sabit olmak üzere,

$$S(x) = c_0 \sum_{j=-\infty}^{\infty} t^j N_{n+1}(x-j)$$

dir (Schoenberg 1946; Schoenberg 1987; Schoenberg 1988).

İspat $N_{n+1} = N$ olmak üzere,

$$S(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j N(x-j)$$

gösterimini kullanırsak, $tS(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} tc_j N(x-j)$ iken,

$$S(x+1) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j N(x+1-j) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{j+1} N(x-j)$$

olarak bulunur. Buradan (3.12) bağıntısı göz önüne alınırsa,

$$c_{j+1} = tc_j$$

elde edilir. Sonuç olarak, tüm j 'ler için,

$$c_j = c_0 t^j$$

olur ve buradan istenilen sonuç elde edilir (Schoenberg 1946; Schoenberg 1987; Schoenberg 1988). $\square$

Tanım 3.31. $t \neq 0$ ve $t \neq 1$ olmak üzere, t parametresine bağlı n . dereceden bir üstel spline,

$$\Phi_n(x; t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} t^j N_{n+1}(x-j) \quad (3.13)$$

şeklinde ile tanımlanır. Burada, $N_n(x) \in \mathfrak{S}_{n-1}$ ve $\Phi_n(x; t) \in \mathfrak{S}_n$ dir (Schoenberg 1946; Schoenberg 1987; Schoenberg 1988; He 2012).

Önteorem 3.32. (3.13) bağıntısında verilen üstel spline

$$\Phi_n(x+1;t) = t\Phi_n(x;t) \quad (3.14)$$

sağlar ve $0 < x < 1$ aralığındaki polinom

$$\Phi_n(x;t) = \frac{1}{n!} (1-t^{-1})^n x^n + (n\text{'den küçük dereceli terimler}) \quad (3.15)$$

şeklinde (Schoenberg 1946; Schoenberg 1987; Schoenberg 1988).

3.4. Üstel Euler Polinom ve Spline Eğri Aileleri

3.4.1. Üstel Euler polinomları

Tanım 3.33. $H_n(x, u) = x^n + (n\text{'den küçük dereceli terimler})$ olacak şekilde bir monik polinom, $u \neq 0$ ve $u \neq 1$ olmak üzere, u parametresine bağlı n . dereceden üstel Euler polinomu,

$$H_n(x; u) = n! (1 - u^{-1})^{-n} \Phi_n(x; u), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.16)$$

şeklinde tanımlanır (Schoenberg 1987; Schoenberg 1988; He 2012).

(3.16) bağıntısı, $x \in [0, 1]$ olmak üzere,

$$\Phi_n(x; u) = \frac{(1 - u^{-1})^n}{n!} H_n(x; u) \quad (3.17)$$

şeklinde de yazılır.

Binom katsayıları yardımıyla, üstel Euler polinomlarının katsayıları aşağıdaki Teorem 3.34 ile verilir:

Teorem 3.34.

$$H_n(x; u) = x^n + \binom{n}{1} H_1(u) x^{n-1} + \binom{n}{2} H_2(u) x^{n-2} + \dots + H_n(u) \quad (3.18)$$

dir (Schoenberg 1946; Schoenberg 1987; 1988).

Yukarıda verilen teoremden, $H_n(x; u)$ Appell tipli bir polinom ailesidir ve

$$H'_n(x; u) = nH_{n-1}(x; u)$$

özelliğini sağlar ve $H_n(x; u)$ Frobenius-Euler polinomları olarak da bilinir. $H_n(u)$ katsayıları ise, (2.19) bağıntısında tanımlanan Frobenius-Euler sayılarıdır. Yani,

$$\frac{u-1}{u-e^z} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(u) \frac{z^n}{n!}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Carlitz 1959; Carlitz 1969; Schoenberg 1987; Schoenberg 1988; Simsek, 2013a). Ayrıca, (3.18) bağıntısı yardımıyla, (2.18) bağıntısında verilen $H_n(x; u)$ Frobenius-Euler polinomlarının üstel üreteç fonksiyonu elde edilir. Yani,

$$\frac{u-1}{u-e^z} e^{zx} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x; u) \frac{z^n}{n!}$$

şeklinde tanımlanır (Carlitz 1959; Carlitz 1969; Schoenberg 1987; Schoenberg 1988; Simsek, 2013a).

Ayrıca, $H_n(u)$ ile gösterilen Frobenius-Euler sayıları,

$$H_n(u) = \frac{A_n(u)}{(u-1)^n} \quad (3.19)$$

biçiminde de yazılır ve böylece (2.19) bağıntısı kullanılarak

$$\frac{u-1}{u-e^z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(u)}{(u-1)^n} \frac{z^n}{n!}$$

elde edilir (Schoenberg 1946; Schoenberg 1987; Schoenberg 1988).

Teorem 3.35. $A_n(u)$ katsayıları tam sayı olan $(n-1)$. dereceden u 'nun bir polinomudur ve $N_{n+1}(x)$, B-spline arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilir:

$$A_n(u) = n! \sum_{j=0}^{n-1} N_{n+1}(j+1) u^j \quad (3.20)$$

(Schoenberg 1946; Schoenberg 1987; Schoenberg 1988).

(2.14) bağıntısında verilen Eulerian sayıları ile B-spline arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilir:

$$E(n, k) = n! N_{n+1}(k)$$

(He 2012).

Ayrıca, $A_n(u)$ polinomu aşağıdaki şekilde de tanımlanır:

$$\frac{A_n(u)}{(1-u)^{n+1}} = \sum_{v=0}^{\infty} (v+1)^n u^v \quad (3.21)$$

(Schoenberg 1987; Schoenberg 1988). Bunlara ek olarak, $A_n(u)$ polinomlarının λ_n sıfırları basit ve negatiftir ve bunları aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\lambda_{n-1} < \lambda_{n-2} < \dots < \lambda_2 < \lambda_1 < 0,$$

ve böylece

$$\lambda_n \lambda_{n-1} = \lambda_2 \lambda_{n-1} = \dots = 1$$

dir (Schoenberg 1987; Schoenberg 1988).

3.4.2. Üstel spline ailelerinin inşası

(2.19) bağıntısı kullanılarak,

$$u - 1 = (u - e^z) \sum_{n=0}^{\infty} H_n(u) \frac{z^n}{n!}$$

elde edilir. Buradan,

$$u - 1 = u \sum_{n=0}^{\infty} H_n(u) \frac{z^n}{n!} - e^z \sum_{n=0}^{\infty} H_n(u) \frac{z^n}{n!}$$

bulunur. O halde yukarıdaki bağıntıda Cauchy çarpımı yapılırsa,

$$u - 1 = u \sum_{n=0}^{\infty} H_n(u) \frac{z^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} H_j(u) \frac{z^n}{n!}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki denklemde $\frac{z^n}{n!}$ ifadesinin katsayıları karşılaştırılırsa, $n \geq 1$ için,

$$u H_n(u) = 1 + \binom{n}{1} H_1(u) + \dots + H_n(u) \quad (3.22)$$

elde edilir (Schoenberg 1987; Schoenberg 1988).

(3.22) bağıntısında özel olarak $u = 2$ alınırsa,

$$H_n(2) = 1 + \binom{n}{1} H_1(2) + \dots + \binom{n}{n-1} H_{n-1}(2) \quad (3.23)$$

bulunur. Ayrıca (3.23) bağıntısı kullanılarak, $H_n(2)$ polinomları için aşağıdaki Çizelge 3.6 elde edilir:

Çizelge 3.6. $H_n(2)$ için bazı değerler

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$H_n(2)$	1	1	3	13	75	541	4683	47293

Çizelge 3.6 ve (2.28) bağıntısı yardımıyla, Fubini sayıları ve $H_n(2)$ sayıları arasındaki aşağıdaki gibi verilir:

$$H_n(2) = w_g(n).$$

Çizelge 3.6 ve (3.18) bağıntısı yardımıyla, $H_7(x; 2)$ polinomları aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$H_7(x; 2) = x^7 + 7x^6 + 63x^5 + 455x^4 + 2625x^3 + 11361x^2 + 32781x + 47293.$$

Diğer yandan, (2.18) bağıntısını kullanarak,

$$(1-u)e^{zx} = e^z \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x; u) \frac{z^n}{n!} - u \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x; u) \frac{z^n}{n!}$$

elde edilir. Buradan,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1-u) x^n \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} H_{n-j}(x; u) - u H_n(x; u) \right) \frac{z^n}{n!}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki denklemde $\frac{z^n}{n!}$ ifadesinin katsayıları karşılaştırılırsa,

$$(1-u) x^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} H_{n-j}(x; u) - u H_n(x; u) \quad (3.24)$$

elde edilir. Bu da $H_n(x; u)$ polinomlarını hesaplamak için bir başka formüldür.

3.4.3. $\mathfrak{S}_n^*$ sınıfında üstel Euler polinomlar ailesi

Bu alt bölümde, $\mathfrak{S}_n^*$ sınıfındaki üstel Euler spline ailelerinin tanımını ve özelliklerini Schoenberg 1987, Schoenberg 1988 kaynaklarından yararlanılarak verilecektir.

Tanım 3.36. $\mathfrak{S}_n^*$ sınıfında üstel spline,

$$\Phi_n^*(x; u) = u \Phi_n\left(x + \frac{1}{2}; u\right) \quad (3.25)$$

şeklinde tanımlanır (Schoenberg 1987; Schoenberg 1988).

Orta nokta üstel Euler polinomların tanımı aşağıdaki gibi verilir:

Tanım 3.37. Orta nokta üstel Euler polinomları

$$\mathfrak{s}_n(x; u) = H_n\left(x + \frac{1}{2}; u\right) \quad (3.26)$$

şeklinde tanımlanır (Schoenberg 1987; Schoenberg 1988).

Bir başka ifadeyle, (3.1) bağıntısında x yerine $x + \frac{1}{2}$ yazılırsa, $\mathfrak{s}_n(x; u)$ polinomları

$$\frac{u-1}{u-e^z} e^{(x+\frac{1}{2})z} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{s}_n(x; u) \frac{z^n}{n!} \quad (3.27)$$

üstel üreteç fonksiyonu ile tanımlanır (Schoenberg 1987; Schoenberg 1988).

Buradan, (3.27) bağıntısı kullanılarak,

$$\mathfrak{s}_n(x; u) = x^n + \binom{n}{1} b_1(u) x^{n-1} + \cdots + b_n(u)$$

elde edilir. Ayrıca, (3.27) bağıntısında $x = 0$ yazılırsa ve yukarıdaki bağıntı göz önüne alınırsa,

$$\frac{u-1}{u-e^z} e^{\frac{z}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(u) \frac{z^n}{n!} \quad (3.28)$$

bulunur. Buradan (3.28) bağıntısı yardımıyla aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 3.38. *Katsayıları tamsayı ve derecesi n olan monik $\rho_n(u)$ polinomları,*

$$\frac{u-1}{u-e^z} e^{\frac{z}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_n(u)}{2^n(u-1)^n} \frac{z^n}{n!}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır. Burada,

$$\rho_n(u) = 2^n(u-1)^n b_n(u)$$

dir (Schoenberg 1987; Schoenberg 1988).

Yukarıda verilen üreteç fonksiyonu yardımıyla, $N_{n+1}(x)$ B-spline ailesi ile $\rho_n(u)$ polinomları arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilir:

$$\rho_n(u) = 2^n n! \sum_{j=0}^n N_{n+1}(j + \frac{1}{2}) u^j.$$

Buradan, $\rho_n(u)$ polinomu açık halde aşağıdaki gibi yazılır:

$$\frac{\rho_n(u)}{(1-u)^{n+1}} = \sum_{v=0}^{\infty} (2v+1)^n u^v.$$

(Schoenberg 1987; Schoenberg 1988). Ayrıca, $\rho_0(u) = 1$ olmak üzere, $\rho_n(u)$ polinomu,

$$\rho_{n+1}(u) = (1 + (2n+1)u) \rho_n(u) + 2u(1-u) \rho'_n(u) \quad (3.29)$$

rekürans bağıntısını sağlar. Bunlara ek olarak, $\rho_n(u)$ 'nin sıfırları basit ve negatiftir ve bunları aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\mu_n < \mu_{n-1} < \dots < \mu_2 < \mu_1 < 0,$$

ve böylece

$$\mu_n \mu_1 = \mu_{n-1} \mu_2 = \dots = 1$$

dir (Schoenberg 1987; Schoenberg 1988).

Şimdi de (3.29) bağıntısında verilen rekürans bağıntısını kullanarak, Schoenberg (1987) tarafından $\rho_n(u)$ polinomlarının birkaç değerini aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned}\rho_0(u) &= 1, \\ \rho_1(u) &= u + 1, \\ \rho_2(u) &= u^2 + 6u + 1, \\ \rho_3(u) &= u^3 + 23u^2 + 23u + 1, \\ \rho_4(u) &= u^4 + 76u^3 + 230u^2 + 76u + 1, \\ \rho_5(u) &= u^5 + 237u^4 + 1682u^3 + 1682u^2 + 237u + 1.\end{aligned}$$

3.4.4. Üstel Euler spline eğri aileleri

Burada, üstel Euler spline ve orta nokta üstel Euler spline eğri ailelerinin tanımları Schoenberg 1987, Schoenberg 1988 kaynaklarından yararlanılarak incelenecektir.

(3.17) denklemi yardımıyla, $\Phi_n(0; u) \neq 0$ olmak üzere, u parametresine bağlı n . dereceden üstel Euler spline aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$S_n(x; u) = \frac{\Phi_n(x; u)}{\Phi_n(0; u)}. \quad (3.30)$$

Burada $S_n(x; u) \in \mathfrak{S}_n$ ve $v \in \mathbb{Z}$ için $S_n(v; u) = u^v$ dir (Schoenberg 1987; Schoenberg 1988).

(3.17) denklemi yardımıyla, u parametresine bağlı n . dereceden üstel orta nokta Euler spline aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$S_n^*(x; u) = \frac{\Phi_n(x + \frac{1}{2}; u)}{\Phi_n(\frac{1}{2}; u)}.$$

Burada $S_n^*(x; u) \in \mathfrak{S}_n^*$ ve $j \in \mathbb{Z}$ için $S_n^*(j; u) = u^j$ dir (Schoenberg 1987; Schoenberg 1988).

3.5. Bernoulli Monospline ve Kardinal Monospline

Bu bölümde, Bernoulli monospline'ları tanımlamak için Bernoulli polinomları ve Bernoulli fonksiyonlarının iyi bilinen bazı özelliklerini verelim.

Bernoulli fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\overline{B}_n(x) = B_n(x - [x]).$$

(2.2) denkleminde verilen Bernoulli polinomlarının tanımı kullanılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\overline{B}_n(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (x - [x])^j B_{n-j}. \quad (3.31)$$

Ayrıca,

$$\overline{B}_n(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} B_{n-j} \sum_{m=0}^j (-1)^{j-m} [x]^{j-m} x^m \quad (3.32)$$

olarak bulunur.

$$\overline{B}_n(x) = B_n(x)$$

olduğundan, $0 \leq x < 1$ olmak üzere,

$$\overline{B}_n(x+1) = \overline{B}_n(x),$$

$\overline{B}_n(x)$, periyodu 1 olan periyodik bir fonksiyondur (Apostol 1976; Simsek 2010; Milovanović ve Simsek 2020).

Aşağıda iyi bilinen, periyodik fonksiyon ve tam değer fonksiyonun özellikleri kullanılarak, Bernoulli fonksiyonunun Fourier açılımı kolaylıkla bulunur. Yani,

$$\{x\} = x - [x]$$

olmak üzere, $0 \leq \{x\} < 1$ bağıntısı kullanılarak,

$$\{x\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi kx)}{k}$$

elde edilir. Buradan

$$[x] = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi kx)}{k}$$

bulunur. Buradan, Bernoulli polinomlarının Fourier serisi,

$$\overline{B}_p(x) = -p! (2\pi i)^{-p} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{2\pi i m x}}{m^p}$$

elde edilir (Apostol 1976; Simsek 2010; Milovanović ve Simsek 2020).

O halde, Bernoulli monospline aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 3.39. $\eta_n(x) \in \mathfrak{S}_{n-1}$ olmak üzere, Bernoulli fonksiyonu yardımıyla Bernoulli monospline,

$$\eta_n(x) = \overline{B}_n(x) - x^n \in \mathfrak{S}_{n-1} \quad (3.33)$$

şeklinde tanımlanır (Schoenberg 1987; Schoenberg 1988).

Yukarıdaki tanımdan görüleceği gibi $\eta_n(x)$ Bernoulli monospline ailelerinden oluşan küme $(n - 1)$. dereceden kardinal spline ailesinin bir alt kümesidir. $\eta_n(x) \in \mathfrak{S}_{n-1}$ olduğundan, $\mathfrak{S}_{n-1}$ her elemanı için Bernoulli fonksiyonlarının Fourier serileriyle ilişkisi vardır. Bernoulli monospline yardımıyla başta Kardinal spline eğri ailesi, Bezier eğrileri ve diğer diğer spline eğri aileleri arasındaki ilişkiler incelenebilir. Bernoulli monospline ailesinin Fourier serileri ve Fourier dönüşümleri incelenip bunların diğer alanlarına uygulamaları da araştırılabilir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Eulerian Sayılarını İçeren Formüller ve Bağıntılar

Bu bölümde, Kardinal spline eğrileri ve B-spline eğrileri inşasında önemli bir rol oynayan Eulerian sayılarını içeren bazı formüller ve bağıntılar verilecektir. Bu sonuçlar yüksek mertebeden negatif kuvvetli Bernoulli sayılarını, yüksek mertebeden Bernoulli sayılarını, Catalan sayılarını ve ikinci tür Stirling sayılarını içermektedir.

Teorem 4.40. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$B_n^{(-n)} = \frac{\binom{2n}{n}^{-1}}{n!} \sum_{j=0}^{2n-1} \sum_{v=0}^j (-1)^v \binom{j}{n} \binom{2n+1}{v} (j+1-v)^{2n}$$

dir (Gun ve Simsek 2020a).

İspat (2.25) bağıntısı (2.15) bağıntısıyla birleştirilirse,

$$\binom{k+n}{n} B_k^{(-n)} = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{k+n-1} \binom{j}{k} E(k+n, j)$$

olarak bulunur. Yukarıdaki bu bağıntı ile (2.15) bağıntısı birleştirilirse aşağıdaki denklem elde edilir:

$$B_k^{(-n)} = \frac{\binom{k+n}{n}^{-1}}{n!} \sum_{j=0}^{k+n-1} \sum_{v=0}^j (-1)^v \binom{j}{k} \binom{k+n+1}{v} (j+1-v)^{n+k}. \quad (4.1)$$

Buradan (4.1) denkleminde $k = n$ alınırsa,

$$B_n^{(-n)} = \frac{\binom{2n}{n}^{-1}}{n!} \sum_{j=0}^{2n-1} \sum_{v=0}^j (-1)^v \binom{j}{n} \binom{2n+1}{v} (j+1-v)^{2n}$$

elde edilir. Buradan da verilen teoremin ispatı tamamlanmış olur (Gun ve Simsek 2020a).

□

(2.38), (2.23) ve (2.27) bağıntıları kullanılarak, negatif kuvvetli Bernoulli sayıları, ikinci tür Stirling sayıları ve Catalan sayıları arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde verilir.

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, Gun ve Simsek (2020a) tarafından aşağıdaki bağıntı verilmiştir:

$$S_2(2n, n) = (n+1)C_n B_n^{(-n)}. \quad (4.2)$$

Bu bağıntı yardımıyla Catalan sayıları, negatif Bernoulli sayıları ve Eulerian sayıları arasındaki aşağıdaki formüller ispatlanacaktır.

Teorem 4.41. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$B_n^{(-n)} = \frac{1}{(n+1)!C_n} \sum_{j=0}^{2n-1} \binom{j}{n} E(2n, j) \quad (4.3)$$

dir (Gun ve Simsek 2020a).

İspat (2.25) ve (4.2) bağıntıları kullanılarak,

$$(n+1)C_n B_n^{(-n)} = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{2n-1} \binom{j}{n} E(2n, j)$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa verilen teoremin ispatı tamamlanmış olur (Gun ve Simsek 2020a). $\square$

(4.2) ve (2.25) bağıntıları kullanılarak, negatif kuvvetli Bernoulli sayıları ve Eulerian sayıları arasındaki ilişki aşağıdaki Önerme 4.42 ile verilir:

Önerme 4.42. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\sum_{j=0}^k \sum_{d=0}^{j-1} \binom{k}{j} \binom{d}{j-n} E(j, d) B_{k-j}^{(n)} = 0$$

dir (Gun ve Simsek 2020a).

Teorem 4.43. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$B_n^{(-n)} = \frac{1}{(n+1)! \left(\binom{2n+1}{n+1} - 2 \binom{2n}{n+1} \right)} \sum_{j=0}^{2n-1} \binom{j}{n} E(2n, j)$$

dir (Gun ve Simsek 2020a).

İspat (4.3) bağıntısı,

$$C_n = \binom{2n+1}{n+1} - 2 \binom{2n}{n+1}$$

yukarıdaki iyi bilinen Catalan sayıları için hesaplama formülü ile birleştirilirse,

$$B_n^{(-n)} = \frac{1}{(n+1)! \left(\binom{2n+1}{n+1} - 2 \binom{2n}{n+1} \right)} \sum_{j=0}^{2n-1} \binom{j}{n} E(2n, j)$$

elde edilir. Buradan da verilen teoremin ispatı tamamlanmış olur (Gun ve Simsek 2020a).

$\square$

4.2. Spline Eğri Ailelerini İçeren Formüller ve Bağıntılar

4.2.1. Kardinal tipli spline ailelerini içeren formüller ve bağıntılar

Burada Frobenius-Euler polinomları, Apostol-Bernoulli polinomları, Apostol-Euler polinomları, Apostol-Genocchi polinomları, üstel tipli Euler polinomları, Kardinal tipli spline ve B-spline ailelerini içeren formüller ve bağıntılar verilecektir.

Orta nokta üstel Euler polinomları ile Frobenius-Euler polinomları arasındaki ilişki aşağıdaki Teorem 4.44 ile verilir:

Teorem 4.44. $n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere,

$$\mathfrak{s}_n(x; u) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} x^k 2^{k-j} H_{n-j}(u) \quad (4.4)$$

elde edilir.

İspat (3.27) bağıntısında verilen aşağıdaki üreteç fonksiyonu

$$\frac{u-1}{u-e^z} e^{(x+\frac{1}{2})z} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{s}_n(x; u) \frac{z^n}{n!}$$

ve (2.19) bağıntısı yardımıyla,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{s}_n(x; u) \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(u) \frac{z^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \left(x + \frac{1}{2}\right)^n \frac{z^n}{n!}$$

elde edilir. Buradan yukarıdaki denklemin sağ tarafında Cauchy çarpımı uygulanırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{s}_n(x; u) \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} H_{n-j}(u) \left(x + \frac{1}{2}\right)^j \frac{z^n}{n!}$$

elde edilir. Buradan gerekli düzenlemeler yapılsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{s}_n(x; u) \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} H_{n-j}(u) \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} x^k 2^{k-j} \frac{z^n}{n!}$$

bulunur. Bu son denklemin her iki tarafında $\frac{z^n}{n!}$ ifadesinin katsayıları karşılaştırılırsa, istenilen sonuç elde edilir. $\square$

(4.4) bağıntısında $x = 0$ alınırsa ve (3.28) ve (3.26) denklemi kullanılırsa, aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 4.45. $n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere,

$$b_n(u) = H_n\left(\frac{1}{2}; u\right) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} 2^{j-n} H_j(u)$$

dir.

Teorem 4.46. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\mathcal{B}_n\left(x + \frac{1}{2}; \frac{1}{u}\right) = \frac{nu}{1-u} \mathfrak{s}_{n-1}(x; u) \quad (4.5)$$

dir.

İspat (3.27) bağıntısında verilen $\mathfrak{s}_n(x; u)$ polinomlarının üreteç fonksiyonu kullanılarak,

$$\frac{-u}{e^z - u} e^{(x+\frac{1}{2})z} + \frac{1}{e^z - u} e^{(x+\frac{1}{2})z} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{s}_n(x; u) \frac{z^n}{n!}$$

bulunur. Buradan, gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$-\frac{z}{\frac{1}{u}e^z - 1} e^{(x+\frac{1}{2})z} + \frac{z}{u\left(\frac{1}{u}e^z - 1\right)} e^{(x+\frac{1}{2})z} = z \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{s}_n(x; u) \frac{z^n}{n!}$$

elde edilir. (2.41) bağıntısı kullanılarak,

$$-\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n\left(x + \frac{1}{2}; \frac{1}{u}\right) \frac{z^n}{n!} + \frac{1}{u} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n\left(x + \frac{1}{2}; \frac{1}{u}\right) \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} n \mathfrak{s}_{n-1}(x; u) \frac{z^n}{n!}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki denklemde $\frac{z^n}{n!}$ ifadesinin katsayıları karşılaştırılırsa, orta nokta üstel Euler polinomları ile Apostol-Bernoulli polinomları arasındaki ilişki elde edilir. $\square$

Mathematica Uygulaması 9. (2.43) ve (2.44) denklemlerinde $m = 1$ alınarak, (4.5) bağıntısı ile verilen $\mathfrak{s}_n(x; u)$ polinomlarını hesaplayan ve x parametresi için rastgele seçilmiş bir özel aralıkta, $u = -\frac{1}{2}$ ve $u = 5$ durumları için grafiğini çizen Mathematica uygulaması aşağıdaki gibidir:

```

1 B1[n_,\[Lambda]_]:=n*Sum[j!((-\[Lambda])^j/(\[Lambda]-1)^(j+1))StirlingS2[n-1,j],{j,0,n-1}];
   B2[x_,n_,\[Lambda]_]:=Sum[Binomial[n,j]x^(n-j)B1[j,\[Lambda]],{j,0,n}]; S[n_,u_]:=1/(u*n)
   )(B2[x+1/2,n,1/u]-u B2[x+1/2,n,1/u]); MidSplinePlot1 = Plot[Evaluate[Simplify[Table[S[x,
   n, -1/2], {n, 1, 5}]]], {x, -1/2, 1/2}, PlotLegends -> {StringJoin["\[GothicS]", ToString[
   ToExpression["{HoldForm}[_{1}_\Leftarrow(x;_-\frac{1}{2}\right)"]], TeXForm],
   TraditionalForm]], StringJoin["\[GothicS]", ToString[ToExpression["{HoldForm}[_{2}_\Leftarrow
   (x;_-\frac{1}{2}\right)"]], TeXForm], TraditionalForm]], StringJoin["\[GothicS]", ToString[

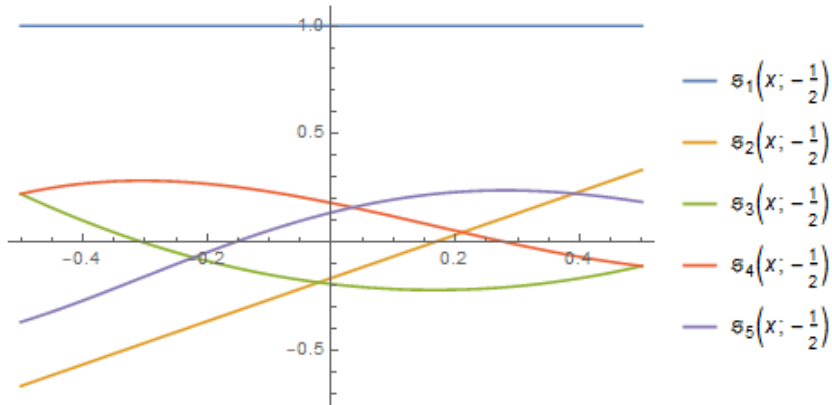
```

```

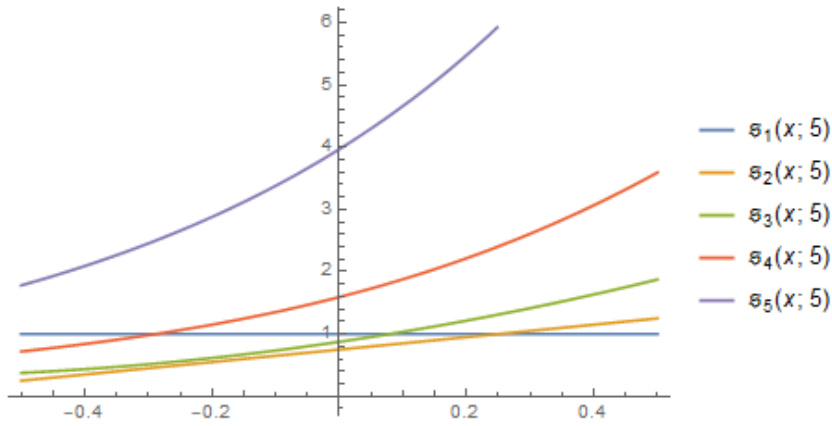
ToExpression["{HoldForm}[ $\_3\_ \left(x; -\frac{1}{2}\right)$ ]", TeXForm,
TraditionalForm], StringJoin["\[GothicS]", ToString[ToExpression["{HoldForm}[ $\_4\_ \left(x; -\frac{1}{2}\right)$ ]", TeXForm, TraditionalForm]], StringJoin["\[GothicS]", ToString[
ToExpression["{HoldForm}[ $\_5\_ \left(x; -\frac{1}{2}\right)$ ]", TeXForm,
TraditionalForm]]]]
2 Export["mid1.png", MidSplinePlot1]
3 MidSplinePlot2 = Plot[Evaluate[Simplify [Table[S[x, n, 5], {n, 1, 5}]], {x, -1/2, 1/2},
PlotLegends -> {StringJoin["\[GothicS]", ToString[ToExpression["{HoldForm}[ $\_1\_ \left(x; 5\right)$ ]", TeXForm, TraditionalForm]], StringJoin["\[GothicS]", ToString[
ToExpression["{HoldForm}[ $\_2\_ \left(x; 5\right)$ ]", TeXForm, TraditionalForm]],
StringJoin["\[GothicS]", ToString[ToExpression["{HoldForm}[ $\_3\_ \left(x; 5\right)$ ]",
TeXForm, TraditionalForm]], StringJoin["\[GothicS]", ToString[ToExpression["{
HoldForm}[ $\_4\_ \left(x; 5\right)$ ]", TeXForm, TraditionalForm]], StringJoin["\[GothicS]",
ToString[ToExpression["{HoldForm}[ $\_5\_ \left(x; 5\right)$ ]", TeXForm, TraditionalForm
]]]}
4 Export["mid2.png", MidSplinePlot2]

```

Mathematica uygulaması 9 yardımıyla, $s_n(x; -\frac{1}{2})$ ve $s_n(x; 5)$ polinomlarının $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ aralığındaki grafiklerinin çizimleri sırasıyla Şekil 4.20 ve Şekil 4.21 ile verilir:



Şekil 4.20. $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ için $s_n(x; -\frac{1}{2})$ polinomlarının grafiği



Şekil 4.21. $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ için $s_n(x; 5)$ polinomlarının grafiği

(2.54) ve (3.16) bağıntıları yardımıyla aşağıdaki tanım verilir:

Tanım 4.47. $\mathcal{G}_n(x; \frac{-1}{u}) = x^n + (n\text{'den küçük dereceli terimler})$ olacak şekilde bir monik polinom, $u \neq 0$ ve $u \neq 1$ olmak üzere, u parametresine bağlı n . dereceden üstel spline yardımıyla Apostol-Genocchi polinomu,

$$\mathcal{G}_{n+1}\left(x; \frac{-1}{u}\right) = \frac{2(n+1)!u^{n+1}}{(u-1)^{n+1}}\Phi_n(x; u), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.6)$$

şeklinde tanımlanır.

(4.6) bağıntısında $u = -1$ alınırsa, aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$\Phi_n(x; -1) = \frac{2^n}{(n+1)!}G_n(x).$$

(3.17), (3.30) ve (4.6) denklemleri kullanılarak, üstel Apostol-Genocchi spline aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 4.48. $u \neq 0$, $u \neq 1$ ve $\mathcal{G}_{n+1}(\frac{-1}{u}) \neq 0$ olmak üzere, u parametresine bağlı n . dereceden üstel Apostol-Genocchi spline,

$$g_n(x; u) = \frac{\mathcal{G}_{n+1}(x; \frac{-1}{u})}{\mathcal{G}_{n+1}(\frac{-1}{u})} \quad (4.7)$$

şeklinde tanımlanır.

Benzer şekilde, (3.17) ve (3.30) bağıntılar kullanılarak, üstel Apostol-Bernoulli spline ve üstel Apostol-Euler spline eğri aileleri de tanımlanabilir.

(3.13) ve (4.6) bağıntıları kullanılarak, Apostol-Genocchi polinomları ile B-spline eğri ailesi arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilir:

Tanım 4.49. $u \neq 0$ ve $u \neq 1$ olmak üzere, B-spline eğri ailesi yardımıyla Apostol-Genocchi polinomları

$$\mathcal{G}_{n+1} \left(x; \frac{-1}{u} \right) = \frac{2(n+1)!}{(u-1)^{n+1}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} u^{n+1+j} N_{n+1}(x-j)$$

şeklinde tanımlanır.

(2.54), (3.19) ve (3.20) bağıntıları kullanılarak, Apostol-Genocchi sayıları ile B-spline arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile verilir:

Teorem 4.50. $u \neq 0$, $u \neq 1$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\mathcal{G}_{n+1} \left(\frac{-1}{u} \right) = \frac{2(n+1)!}{(u-1)^{n+1}} \sum_{j=0}^{n-1} N_{n+1}(j+1) u^{j+1}. \quad (4.8)$$

(3.3) ve (4.8) bağıntıları kullanılarak, Apostol-Genocchi sayıları için aşağıdaki bağıntı elde edilir:

Teorem 4.51. $u \neq 0$, $u \neq 1$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\mathcal{G}_{n+1} \left(\frac{-1}{u} \right) = \frac{2(n+1)!}{(u-1)^{n+1}} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u^{j+1}}{n!} \sum_{v=0}^{n+1} (-1)^v \binom{n+1}{v} (j+1-v)_+^n.$$

(2.55) bağıntısı yardımıyla, Apostol-Euler polinomları ve Apostol-Bernoulli polinomları aşağıdaki gibi verilir:

Tanım 4.52. $\mathcal{E}_n(x; \frac{-1}{u}) = x^n + (n\text{'den küçük dereceli terimler})$ olacak şekilde bir monik polinom, $u \neq 0$ ve $u \neq 1$ olmak üzere, u parametresine bağlı n . dereceden üstel spline yardımıyla Apostol-Euler polinomu,

$$\mathcal{E}_n \left(x; \frac{-1}{u} \right) = \frac{2n!u^{n+1}}{(u-1)^{n+1}} \Phi_n(x; u), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.9)$$

şeklinde tanımlanır.

Özel olarak, (4.9) bağıntısında $u = -1$ alınırsa,

$$\Phi_n(x; -1) = \frac{2^n}{n!} E_n(x) \quad (4.10)$$

elde edilir. Buradan, yukarıdaki bağıntı yardımıyla,

$$\Phi_n(x; -1) = \frac{2^n}{n!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j E_{n-j}$$

elde edilir (Schoenberg 1987; Schoenberg 1988; He 2012).

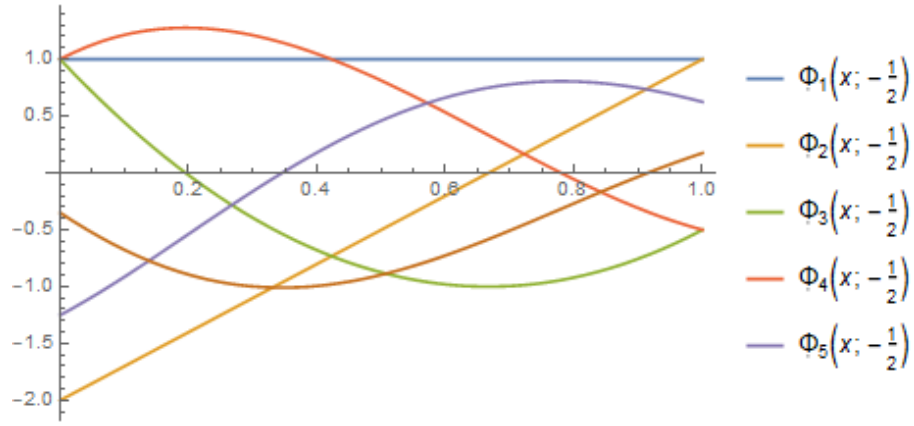
Mathematica Uygulaması 10. (2.49) denkleminde $m = 1$ alınarak, (4.9) ve (4.10) bağıntıları ile verilen $\Phi_n(x; u)$ polinomlarının x parametresi için rastgele seçilmiş bir özel aralıkta, $u = -\frac{1}{2}$ ve $u = 1$ durumları için grafiğini çizen Mathematica uygulaması aşağıdaki gibidir:

```

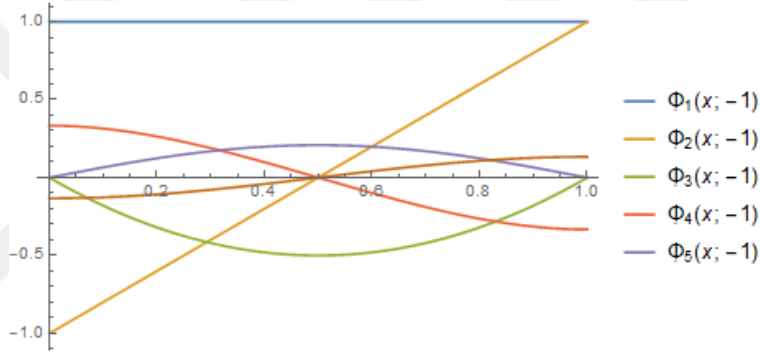
1 E1[x_,n_,u_]:=2*Sum[Binomial[n,k]x^(n-k)!((-u)^j/(u+1)^(j+1))StirlingS2[k,j],{k,0,n},{j,0,k];
   \[CapitalPhi][x_,u_]:=E1[x,n,-1/u]((u-1)^(n+1))/(2*n!*u^(n+1));MonoSplinePlot1 = Plot[
   Evaluate[Simplify[Table[\[CapitalPhi][x, -1/2], {n, 0, 5}]], {x, 0, 1}, PlotLegends ->
   {StringJoin["\[FormalCapitalPhi]", ToString[ToExpression["{HoldForm}[_{1}_\left(x;_-\frac{1}{2}\right)"]], TeXForm], TraditionalForm]], StringJoin["\[FormalCapitalPhi]",
   ToString[ToExpression["{HoldForm}[_{2}_\left(x;_-\frac{1}{2}\right)"]], TeXForm],
   TraditionalForm]], StringJoin["\[FormalCapitalPhi]", ToString[ToExpression["{HoldForm}[_{3}_\left(x;_-\frac{1}{2}\right)"]], TeXForm], TraditionalForm]], StringJoin["\[FormalCapitalPhi]",
   ToString[ToExpression["{HoldForm}[_{4}_\left(x;_-\frac{1}{2}\right)"]], TeXForm], TraditionalForm]], StringJoin["\[FormalCapitalPhi]",
   ToString[ToExpression["{HoldForm}[_{5}_\left(x;_-\frac{1}{2}\right)"]], TeXForm], TraditionalForm]]]]]
2 Export["mono1.png", MonoSplinePlot1]
3 MonoSplinePlot2 = Plot[Evaluate[Simplify[Table[\[CapitalPhi][x, -1], {n, 0, 5}]], {x, 0,
   1}, PlotLegends -> {StringJoin["\[FormalCapitalPhi]", ToString[ToExpression["{HoldForm}[_{1}_\left(x;_--1\right)"]], TeXForm], TraditionalForm]], StringJoin["\[FormalCapitalPhi]",
   ToString[ToExpression["{HoldForm}[_{2}_\left(x;_--1\right)"]], TeXForm],
   TraditionalForm]], StringJoin["\[FormalCapitalPhi]", ToString[ToExpression["{HoldForm}[_{3}_\left(x;_--1\right)"]], TeXForm], TraditionalForm]], StringJoin["\[FormalCapitalPhi]",
   ToString[ToExpression["{HoldForm}[_{4}_\left(x;_--1\right)"]], TeXForm], TraditionalForm]], StringJoin["\[FormalCapitalPhi]",
   ToString[ToExpression["{HoldForm}[_{5}_\left(x;_--1\right)"]], TeXForm], TraditionalForm]]]]]
4 Export["mono2.png", MonoSplinePlot2]

```

Mathematica uygulaması 10 yardımıyla, $\Phi_n(x; -\frac{1}{2})$ ve $\Phi_n(x; -1)$ polinomlarının $x \in [0, 1]$ ve aralığındaki grafiklerinin çizimleri sırasıyla Şekil 4.22 ve Şekil 4.23 ile verilir:



Şekil 4.22. $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $x \in [0, 1]$ için $\Phi_n(x; -\frac{1}{2})$ polinomlarının grafiği



Şekil 4.23. $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $x \in [0, 1]$ için $\Phi_n(x; -1)$ polinomlarının grafiği

(3.13) ve (4.9) bağıntıları yardımıyla, Apostol-Euler polinomları ile B-spline eğri ailesi arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilir:

Tanım 4.53. $u \neq 0$ ve $u \neq 1$ olmak üzere, B-spline eğri ailesi yardımıyla Apostol-Euler polinomları

$$\mathcal{E}_n\left(x; \frac{-1}{u}\right) = \frac{2n!}{(u-1)^{n+1}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} u^{n+1+j} N_{n+1}(x-j)$$

şeklinde tanımlanır.

(2.55), (3.19) ve (3.20) bağıntıları kullanılarak, Apostol-Euler sayıları ile B-spline arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile verilir:

Teorem 4.54. $u \neq 0$, $u \neq 1$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\mathcal{E}_n \left(\frac{-1}{u} \right) = \frac{2n!}{(u-1)^{n+1}} \sum_{j=0}^{n-1} N_{n+1}(j+1) u^{j+1}.$$

Tanım 4.55. $\mathcal{B}_n(x; \frac{-1}{u}) = x^n + (n\text{'den küçük dereceli terimler})$ olacak şekilde bir monik polinom, $u \neq 0$ ve $u \neq 1$ olmak üzere, u parametresine bağlı n . dereceden üstel spline yardımıyla Apostol-Bernoulli polinomu,

$$\mathcal{B}_{n+1} \left(x; \frac{1}{u} \right) = -\frac{(n+1)!u^{n+1}}{(u-1)^{n+1}} \Phi_n(x; u), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.11)$$

şeklinde tanımlanır.

(3.13) ve (4.11) bağıntıları yardımıyla, Apostol-Bernoulli polinomları ile B-spline eğri ailesi arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilir:

Tanım 4.56. $u \neq 0$ ve $u \neq 1$ olmak üzere, B-spline eğri ailesi yardımıyla Apostol-Bernoulli polinomları

$$\mathcal{B}_{n+1} \left(x; \frac{1}{u} \right) = -\frac{(n+1)!}{(u-1)^{n+1}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} u^{n+1+j} N_{n+1}(x-j)$$

şeklinde tanımlanır.

(2.55), (3.19) ve (3.20) bağıntıları kullanılarak, Apostol-Bernoulli sayıları ile B-spline arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile verilir:

Teorem 4.57. $u \neq 0$, $u \neq 1$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\mathcal{B}_n \left(\frac{1}{u} \right) = \frac{-(n+1)!}{(u-1)^{n+1}} \sum_{j=0}^{n-1} N_{n+1}(j+1) u^{j+1}$$

elde edilir.

4.2.2. Bernoulli monospline eğri ailelerini içeren bağıntılar ve formüller

Burada, Bernoulli fonksiyonu yardımıyla inşa edilen Bernoulli monospline eğri ailelerini içeren formüller verilecektir.

(3.31) ve (3.33) bağıntıları yardımıyla,

$$\mathfrak{v}_n(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (x - [x])^j B_{n-j} - x^n$$

bulunur. Buradan

$$\mathfrak{y}_n(x) = \binom{n}{n} (x - [x])^n - x^n + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} (x - [x])^j B_{n-j}$$

elde edilir. Yukarıdaki bağıntıda gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\mathfrak{y}_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} [x]^{n-k} x^k + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} (x - [x])^j B_{n-j} - x^n$$

bulunur. Sonuç olarak, aşağıdaki teoreme ulaşılır:

Teorem 4.58. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\mathfrak{y}_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} [x]^{n-k} x^k + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} (x - [x])^j B_{n-j}$$

elde edilir.

5. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında B-Spline eğrileri ile Eulerian tipli polinomlar arasındaki ilişkiler incelenmiş ve bunların uygulamaları verilmiştir. B-spline eğrilerinin ilişkili olduğu, kardinal spline, üstel spline, üstel Euler spline, Bernoulli monospline ve Bézier eğri aileleri gibi bazı özel eğrinin tanımları verilmiştir ve temel özellikleri incelenmiştir. Spline eğri aileleri ile ilişkili olan Bernoulli tipli sayı ve polinom, Euler tipli sayı ve polinom, Genocchi tipli sayı ve polinom aileleri gibi bazı özel sayı ve polinom ailelerinin üreteç fonksiyonları verilmiştir. Bu özel sayı ve polinomlar ailesi ile kardinal tipli spline eğri aileleri de tanımlanmış ve bunların Wolfram Mathematica paket programı yardımıyla grafikleri çizilmiştir. Ayrıca, Bernoulli sayıları ve Bernoulli monospline arasındaki ilişkiler de verilmiştir. Bunlara ek olarak, Eulerian tipli sayı ve polinomlar, ikinci tür Stirling sayıları, yüksek mertebeden Bernoulli sayıları, Catalan sayıları gibi iyi bilinen bazı özel sayı ve polinomlar ailelerini içeren formüller, bağıntılar ve özdeşlikler elde edilmiştir.

Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçların bazıları aşağıda özetlenmiştir:

Negatif kuvvetli Bernoulli sayıları, Catalan sayıları ve Eulerian sayılarını içeren bağıntı Teorem 4.41 teoremiyle ifade edilmiştir.

Apostol-Bernoulli polinomları, Apostol-Euler polinomları ve Apostol-Genocchi polinomları ile B-spline eğri aileleri arasındaki ilişkiler, sırasıyla Tanım 4.49, Tanım 4.53 ve Tanım 4.56 tanımlarında verilmiştir. Ayrıca, bu tez çalışmasında Tanım 4.49 yardımıyla Teorem 4.50 ve Teorem 4.51 teoremleri elde edilmiştir. Bunlara ek olarak, Tanım 4.53 ve Tanım 4.56 tanımları kullanılarak da sırasıyla Teorem 4.54 ve Teorem 4.57 elde edilmiştir.

6. KAYNAKLAR

- Abramowitz, M. and Stegun, I. A. 1972. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. Dover Publication, New York, 1045 p.
- Acikgoz, M. and Araci, S. 2010. On the generating function for Bernstein polynomials. In: American Institute of Physics Conference Proceedings CP1281, 1141–1144.
- Apostol, T. M. 1951. On the Lerch zeta function. *Pac.-Asian J. Math.*, 1 (2): 161–167.
- Apostol, T. M. 1976. Introduction to Analytic Number Theory. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 338 p.
- Araci, S., Acikgoz, M. and Şen, E. 2014. Some new formulae for Genocchi numbers and polynomials involving Bernoulli and Euler polynomials. *Int. J. Math. Math. Sci.*, 2014: 1–7.
- Back, A. and Sonnendrücker, E. 2011. Spline discrete differential forms. Application to Maxwell's equations. Hal Id: hal-00568811, 1–26.
- Bartle, R. G. and Sherbert, D. R. 2011. Introduction to Real Analysis. John Wiley & Sons, 402 p.
- Bartels, R. H., Beatty, J. C., Barsky, B. A. 1987. An Introduction to Splines for Use in Computer Graphics and Geometric Modeling. Morgan Kaufmann, 476 p.
- Bayad, A., Kim, T., Lee, S.H. and Dolgy, D.V. 2011. A note on the generalized Bernstein polynomials. *Honam Math. J.* 33 (56): 1–11 .
- Bayad, A. and Kim, T. 2016. Identities for Apostol-type Frobenius–Euler polynomials resulting from the study of a nonlinear operator. *Russ. J. Math. Phys.*, 23 (2): 164–171.
- Berndt, B. C. and Dieter, U. 1982. Sums involving the greatest integer function and Riemann Stieltjes integration. *J. Reine Angew. Math.* 1982 (337): 208–220.

- Boor, C. de, Höllig, K. and Riemenschneider, S. 1993. Box Splines, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag New York, Inc. 200 p.
- Boor, C. de. 1970. On calculating with B-splines, J. Approx. Theory 6 (1972) 50–62, Collection of articles dedicated to J. L. Walsh on his 75th birthday, V, Proc. Internat. Conf. Approximation Theory, Related Topics and their Applications, Univ. Maryland, College Park, Md.
- Bretti, G. and Ricci, P. E. 2004. Multidimensional extensions of the Bernoulli and Appell polynomials. *Taiwanese J. Math.*, 8 (3): 415–428.
- Bretti, G., Natalini, P. and Ricci, P. E. 2004. Generalizations of the Bernoulli and Appell polynomials. *Abstract and Applied Analysis*, 2004 (7): 613–623.
- Carlitz, L. 1959. Eulerian numbers and polynomials. *Math. Mag.*, 32 (5): 247–260.
- Carlitz, L. 1969. Generating functions. *Fibonacci Q.*, 7: 359–393.
- Carlitz, L., Roselle, D. P. and Scoville, R. 1966. Permutations and sequences with repetitions by number of increase. *J. Comb. Theory* 1: 350–374.
- Charalambides, C. A. 2005. Combinatorial Methods in Discrete Distributions. Wiley-Interscience, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey. 433 p.
- Conway, J. H. and Guy, R. K. 1996. The Book of Numbers, Springer-Verlag, New York, 310 p.
- Comtet, L. 1974. Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland, Boston, 343 p.
- Dişibüyük, Ç. and Ulutaş, Ş. 2020. A B-spline approach to -Eulerian polynomials. *J. Comput. Appl. Math.*, 366: 112427, 1–12.
- Dişibüyük, Ç., Budakçı, G. Goldman, R. and Oruç, H. 2014. Generating functions for B-Splines with knots in geometric or affine progression. *Calcolo*, 51: 599–613.
- Elezovic, N. 2015. Asymptotic expansions of gamma and related functions, binomial coefficients, inequalities and means. *J. Math. Inequ.*, 9 (4): 1001–1054.

- Erdelyi, A. 1953. Higher Transcendental Functions. The Bateman Manuscript Project. Vol. I-III. McGraw Hill Book Company, Inc., New York.
- Ewell, J. 1975. On sums of consecutive k -th powers, $k = 1, 2$. *Math. Mag.* 48 (4): 203–207.
- Faulhaber, J. 1631. Academia Algebra, Darinnen die miraculosische Inventiones zu den höchsten Cossen weiters continuirt und pro tiert werden, call number QA154.8 F3 1631a f MATH at Stanford University Libraries, Johann Ulrich Schöbnigs, Augspurg [sic], 1631.
- Farouki, R. T. 2012. The bernstein polynomials basis: a centennial retrospective. *Comput. Aided Geom. Design*, 29: 379–419.
- Gamkrelidze, R. V. 1990. Analysis II: Convex Analysis and Approximation Theory. Springer-Verlag, 255 p.
- Good, I. J. 1975. The number of ordering of n candidates when ties are permitted. *Fibonacci Quarterly*, 13 (1): 11–18.
- Goldman, R. 2002. Pyramid algorithms, a dynamic programming approach to curves and surfaces for geometric modeling, in: The Morgan Kaufmann Series in Computer Graphics and Geometric Modeling, Elsevier Science, San Francisco.
- Goldman, R. 2012. Generating Functions for Uniform B-Splines. In International Conference on Mathematical Methods for Curves and Surfaces, pp.172–188.
- Goldman, R. and Simeonov, P. 2012. Formulas and algorithms for quantum differentiation of quantum Bernstein bases and quantum Bezier curves based on quantum blossoming. *Graph. Models*, 74 (6): 326–334.
- Goldman, R., Simeonov, P. and Simsek, Y. 2014. Generating functions for the q -Bernstein bases. *SIAM J. Discrete Math.*, 28 (3): 1009–1025.
- Gun, D. and Simsek, Y. 2020a. Some new identities and inequalities for Bernoulli polynomials and numbers of higher order related to the Stirling and Catalan numbers.

- RACSAM, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat., Ser. A Mat.*, 114 (167):
<https://doi.org/10.1007/s13398-020-00899-z>.
- Gun, D. and Simsek, Y. 2020b. Combinatorial sums involving Stirling, Fubini, Bernoulli numbers and approximate values of Catalan numbers. *Adv. Stud. Contemp. Math.*, 30 (4): 503–513.
- Gun, D. and Simsek, Y. 2020c. Formulas associated with combinatorial polynomials and two parametric Apostol-type polynomials. *AIP Conference Proceedings* 2293(1): 180007, 180007-1–180007-4.
- Graham, R. L., Knuth, D. E. and Patashnik, O. 1994. *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*. 2nd ed. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 657 p.
- He, T.-X. 2011. Generalized exponential Euler polynomials and exponential splines. *Open Journal of Discrete Mathematics*, 1: 35–42.
- He, T.-X. 2012. Eulerian polynomials and B-spline. *J. Comput. Appl. Math.*, 236 (15): 3763–3773.
- Höllig, K. 2003. *Finite Element Methods with B-splines*. Society Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 145 p.
- Jacobi, C. G. J. 1834. De usu legitimo formulae summatoriae Maclauriniana. *J. Reine Angew. Math.* 12: 263–272.
- Jordan, C. 1950. *Calculus of Finite Differences*. Chelsea Publishing Company, New York, 652 p.
- Kılar, N. 2017. Fubini Tipli Sayılar ve Bunların Üreteç Fonksiyonları. Yüksek Lisans Tezi, Akdeniz Üniversitesi, Antalya, 39 s.
- Kılar, N. and Simsek Y. 2017. A new family of Fubini numbers and polynomials associated with Apostol-Bernoulli numbers and polynomials. *J. Korean Math. Soc.*, 54 (5): 1605–1621.

- Kilar, N. and Simsek, Y. 2020. Formulas involving sums of powers, special numbers and polynomials arising from p -adic integrals, trigonometric and generating functions. *Publ. Inst. Math., Nouv. S.*, 108 (122): 103–120.
- Kim, T. 1999. On a q -analogue of the p -adic log gamma functions and related integrals. *J. Number Theory* 76 (2): 320–329.
- Kim, T. 2004. Sums of powers of consecutive q -integers. *Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang)*, 9 (1): 15–18.
- Kim, D. S. and Kim, T. 2012. Some new identities of Frobenius–Euler numbers and polynomials. *J. Inequal. Appl.*, 2012 (307): 1–10.
- Kim, T., Kim, D. S. and Kwon, J. 2021. Analogues of Faulhaber’s formula for poly-Bernoulli and type 2 poly-Bernoulli polynomials. *Montes Taurus J. Pure Appl. Math.*, Article ID: MTJPAM-D-20-00033, 3(1): 1–6.
- Kim, T. Rim, S.-H. and Simsek, Y. 2006. A note on the alternating sums of powers of consecutive q -integers. *Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang)*, 13(2): 159–164.
- Kim, T., Rim, S.-H., Simsek, Y. and Kim, D. 2008. On the analogs of Bernoulli and Euler numbers, related identities and zeta and L -functions. *J. Korean Math. Soc.*, 45: 435–453.
- Koshy, T. 2009. Catalan numbers with applications. Oxford University Press, New York, NY, USA 422 p.
- Kucukoglu, I. and Simsek, Y. 2016. A note on generating functions for the unification of the Bernstein type basis functions. *Filomat*, 30 (4): 985–992 .
- Kucukoglu, I. and Simsek, Y. 2017. Combinatorial identities associated with new families of the numbers and polynomials and their approximation values, arXiv:1711.00850.

- Kucukoglu, I. and Simsek, Y. 2019. Identities and relations on the q -Apostol type Frobenius-Euler numbers and polynomials. *J. Korean Math. Soc.* 56(1): 265–284.
- Kucukoglu, I., Simsek, B. and Simsek, Y. 2019. Multidimensional Bernstein polynomials and Bezier curves: Analysis of machine learning algorithm for facial expression recognition based on curvature. *Appl. Math. Comput.* 344-345: 150–162.
- Kurt, B. and Simsek, Y. 2013. On the generalized Apostol-type Frobenius–Euler polynomials. *Adv. Differ. Equ.*, 2013 (1): 1–9.
- Knuth, D. E. 1993. Johann Faulhaber and sums of powers. *Math. Comput.*, 61(203): 277–294.
- Lin, M.-I. 1976. A Note on spline functions & indeterminate best quadrature formulae. *The Journal of National Chiao Tung University*, 1: 175–184.
- Lipschutz, S. 1991. Schaum’s outline of Theory and Problems of Linear Algebra. McGraw-Hill, New York, 453 p.
- Lorentz, G. G. 1986. Bernstein Polynomials, Chelsea Publishing Company, New York.
- Luo, Q.-M. and Srivastava, H. M. 2005. Some generalizations of the Apostol–Bernoulli and Apostol–Euler polynomials. *J. Math. Anal. Appl.*, 308: 290–302.
- Luo, Q.-M. and Srivastava, H. M. 2011. Some generalizations of the Apostol–Genocchi polynomials and the Stirling numbers of the second kind. *Appl. Math. Comput.*, 217 (12): 5702–5728.
- Mann, S. 2006. A blossoming development of splines. *Synthesis Lectures on Computer Graphics*, 1(1): 1–108. doi:10.2200/s00041ed1v01200607cgr001
- Micula, G. and Micula, S. 1999. Handbook of Splines. Mathematics and Its Applications, Springer Netherlands, 621 p.
- Milne-Thomson, L. M. 1980. Calculus of Finite Differences. American Mathematical Society, 558 p.

- Milovanović, G. V. and Simsek, Y. 2020. Dedekind and Hardy Type Sums and Trigonometric Sums Induced by Quadrature Formulas. In *Trigonometric Sums and Their Applications* pp 183–228.
- Penner, A. 2019. *Fitting Spline to a Parametric Function*. Springer, 79 p.
- Petersen, T. K. 2015. *Eulerian Numbers*. Birkhäuser Basel, 456 p.
- Putzer, P. L. and Hauss, M. 1993. Eulerian numbers with fractional order parameters. *Aequationes Math.* 46: 119–142.
- Rademacher, H. 1973. *Topics in Analytic Number Theory*. Grundlehren Math. Wiss. 169, Springer-Verlag, Berlin, 320 p.
- Rainville, E. D. 1960. *Special Functions*. The Macmillan Company, New York, 365 p.
- Riordan, J. 1958. *An Introduction to Combinatorial Analysis*. John Wiley Sons Inc., New York, 244 p.
- Roman, S. 1984. *The Umbral Calculus*. Academic Press, Inc., New York, 193 p.
- Roman, S. 2015. *An Introduction to Catalan Numbers*. Birkhauser, 121 p.
- Royden, H. L. 1988. *Real Analysis*. The Macmillan Company, London, 349 p.
- Salomon, D. 2006. *Curves and Surfaces for Computer Graphics*. Springer, 460 p.
- Schoenberg, I. J. 1946. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. *Quart. Appl. Math.*, 4: 45–99 and 112–141.
- Schoenberg, I. J. 1987. *Cardinal Spline Interpolation*. Society for Industrial Mathematics, 125 p.
- Schoenberg, I. J. 1988. *Selected Papers, Volume 2* Edited by Carl de Boor, Springer Science+Business Media, New York, Birkhäuser, Boston, 441 p.
- Simsek, B. 2016. *Bezier Eğrileri ile Deforme El Modelinin Geliştirilmesi*. Yüksek Lisans Tezi, Akdeniz Üniversitesi, Antalya, 44 s.

- Simsek, B. and Yardimci, A. 2016. Using Bezier curves in medical applications. *Filomat* 30 (4): 937–943.
- Simsek, Y. 2010. Special functions related to Dedekind-type DC-sums and their applications. *Russ. J. Math. Phys.*, 17 (4): 495–508.
- Simsek, Y. 2011. Construction a new generating functions of Bernstein type polynomials. *Appl. Math. Comput.*, 218: 1072–1076.
- Simsek, Y. 2012a. Generating functions for q -Apostol type Frobenius–Euler numbers and polynomials. *Axioms*, 1: 395–403.
- Simsek, Y. 2012b. On q -deformed Stirling numbers. *Int. J. Math. Comput.* ISSN:0974-570X. 15 (2): 1–11.
- Simsek, Y. 2012c. Deriving novel formulas and identities for the Bernstein basis functions and their generating functions. In: Proceedings of the International Conference on Mathematical Methods for Curves and Surfaces MMCS 2012. In: Lecture Notes in Computer Science (LNCS) 8177, pp. 471–490.
- Simsek, Y. 2013a. Generating functions for generalized Stirling type numbers, Array type polynomials, Eulerian type polynomials and their applications. *Fixed Point Theory Appl.*, 87: 1–28.
- Simsek, Y. 2013b. Unification of the Bernstein-type polynomials and their applications. *Bound. Value Probl.*, 2013 (56): 1–15.
- Simsek, Y. 2013c. Functional equations from generating functions: a novel approach to deriving identities for the Bernstein basis functions. *Fixed Point Theory Appl.*, 2013 (80): 1–13 .
- Simsek, Y. 2014. Generating functions for the Bernstein type polynomials: a new approach to deriving identities and applications for the polynomials. *Hacet. J. Math. Stat.*, 43 (1): 1–14 .

- Simsek, Y. 2015. Analysis of the Bernstein basis functions: An approach to combinatorial sums involving binomial coefficients and Catalan numbers. *Math. Method. Appl. Sci.*, 38, 3007–3021.
- Simsek, Y. and Acikgoz, M. 2010. A new generating function of $(q-)$ Bernstein-type polynomials and their interpolation function. *Abstr. Appl. Anal.* 1–12, 769095.
- Srivastava, H. M. 2011. Some generalizations and basic (or $q-$) extensions of the Bernoulli, Euler and Genocchi Polynomials. *Appl. Math. Inf. Sci.*, 5 (3): 390–444.
- Srivastava, H. M. and Choi, J. 2012. Zeta and q -Zeta Functions and Associated Series and Integrals. Elsevier, Amsterdam, 657 p.
- Srivastava, H. M. and Pinter, A. 2004. Remarks on some relationships between the Bernoulli and Euler polynomials. *Appl. Math. Lett.*, 17: 375–380.
- Stanley, R. P. 2015. Catalan Numbers. Cambridge University Press, New York, 215 p.
- Qi, F. 2017. Parametric integrals, the Catalan numbers, and the beta function. *Elemente der Math.* 72 (3): 103–110.
- Wang, R.-H., Xu, Y. and Xu, Z.-Q. 2010. Eulerian numbers: A spline perspective. *J. Math. Anal. Appl.*, 370: 486–490.
- Wikipedia,a, https://en.wikipedia.org/wiki/Bézier_curve, Erişim Tarihi: 7 Aralık 2020.
- Wikipedia,b, <https://en.wikipedia.org/wiki/B-spline>, Erişim Tarihi: 7 Aralık 2020.
- Wikipedia,c, [https://en.wikipedia.org/wiki/Spline_\(mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Spline_(mathematics)), Erişim Tarihi: 7 Aralık 2020.
- Wolfram Research Inc., Mathematica Online (Wolfram Cloud), Champaign, IL, 2020, <https://www.wolframcloud.com>.

ÖZGEÇMİŞ

Damla GÜN
damlagun@akdeniz.edu.tr



ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Lisans:	Kırıkkale Üniversitesi
2003-2007	Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Kırıkkale
Yüksek Lisans:	Akdeniz Üniversitesi
2019-2020	Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya

MESLEKİ VE İDARİ GÖREVLER

Araştırma Görevlisi: Akdeniz Üniversitesi

ESERLER:

Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler

- 1- Gun, D. and Simsek, Y. (2020). Some new identities and inequalities for Bernoulli polynomials and numbers of higher order related to the Stirling and Catalan numbers. *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat., Ser. A Mat., RACSAM*, 114 (167): <https://doi.org/10.1007/s13398-020-00899-z>.
- 2- Gun, D. and Simsek, Y. (2020). Combinatorial sums involving Stirling, Fubini, Bernoulli numbers and approximate values of Catalan numbers. *Adv. Stud. Contemp. Math.*, 30 (4): 503–513.

3- Gun, D. and Simsek, Y. (2020). Formulas associated with combinatorial polynomials and two parametric Apostol-type polynomials. *American Institute of Physics (AIP) Conference Proceedings*, 2293(1): 180007, 180007-1–180007-4.

Ulusal bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitaplarında basılan bildiriler

1- Gun, D. and Simsek, Y. (2019). Formulas associated with combinatorial polynomials and two parametric Apostol-type polynomials II. The 8th symposium on generating functions of special numbers and polynomials and their applications (GFSNP2019) within The 17th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2019), September 23-28, 2019, Rodos, GREECE, pp. 36–38.