



**T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



Yüksek Lisans Tezi

**b_3 -ALT BALANS VE b_3 -LUCAS ALT BALANS SAYILARININ
CEBİRSEL ÖZELLİKLERİ**

Selin SARI

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

**DANIŞMAN
Doç. Dr. Gül KARADENİZ GÖZERİ**

Haziran, 2021

İSTANBUL

Bu alışma, 30.06.2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı, Matematik Programında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Doç. Dr. Gül KARADENİZ GÖZERİ (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Ahmet TEKCAN
Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi

Doç. Dr. Arzu ÖZKOÇ ÖZTÜRK
Düzce Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi

20.04.2016 tarihli Resmi Gazete’de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi’nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü’nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Bilimsel katkıları ve tecrübeleri ile bana yol gösteren, tez çalışmalarım ve yüksek lisans eğitimim boyunca vermiş olduğu büyük emeklerinden dolayı saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Gül KARADENİZ GÖZERİ' ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu zamana kadar bilgi ve birikimleriyle bana yol göstermiş, üzerimde emeği olan bütün öğretmenlerime teşekkür ederim.

Bu süreçte ve hayatımın her anında yanımda olan ve bana inanan, beni yürekten destekleyen ve teşvik eden canım annem Kıymet SARI'ya, canım babam Adnan SARI' ya ve sevgili ablam Aylin SARI' ya en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca tez hazırlama sürecimde manevi destekleriyle yanımda olan ve beni cesaretlendiren tüm arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Haziran 2021

Selin SARI

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ.....	iv
İÇİNDEKİLER	v
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ	vi
ÖZET.....	vii
SUMMARY	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL KISIMLAR	6
2.1. BALANS VE LUCAS-BALANS SAYILARI.....	6
2.2. KOBALANS VE LUCAS-KOBALANS SAYILARI.....	15
2.3. ALT BALANS SAYILARI.....	23
3. MALZEME VE YÖNTEM.....	28
4. BULGULAR.....	29
4.1. b_3 -ALT BALANS SAYILARI.....	30
4.1.1. b_3 -Alt Balans Sayıları ile İlgili Cebirsel Özdeşlikler	30
4.1.2. b_3 -Alt Balans Sayılarını Üreten Fonksiyonlar	37
4.2. b_3 -LUCAS ALT BALANS SAYILARI	43
4.2.1. b_3 -Lucas Alt Balans Sayıları ile İlgili Cebirsel Özdeşlikler.....	43
4.2.2. b_3 -Lucas Alt Balans Sayılarının b_3 -Alt Balans Sayıları ile İlişkisi	52
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	55
KAYNAKLAR.....	56
ÖZGEÇMİŞ	57

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler

Açıklama

B_n	: n . balans sayısı
b_n	: n . kobalans sayısı
C_n	: n . Lucas-balans sayısı
c_n	: n . Lucas-kobalans sayısı
$(CSb_3)_n$	: n . b_3 -Lucas alt balans sayısı
F_n	: n . Fibonacci sayısı
L_n	: n . Lucas sayısı
O_n	: n . oblong (pronik) sayısı
$(Sb_3)_n$	: n . b_3 -alt balans sayısı
T_n	: n . üçgensel sayı

Kısaltmalar

Açıklama

OEIS	: Tam sayı dizileri on-line ansiklopedisi
------	---

ÖZET

b_3 -ALT BALANS VE b_3 -LUCAS ALT BALANS SAYILARININ CEBİRSEL ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Selin SARI

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Gül KARADENİZ GÖZERİ

Bu tez çalışmasında, balans sayılarını veren eşitliğe benzer bir eşitlik ile elde edilen alt balans sayıları incelenmiştir. Balans sayılarına ait olan birtakım teorem ve eşitliklerden yararlanılarak b_3 -alt balans ve b_3 -Lucas alt balans sayılarının sağladığı cebirsel özdeşlikler elde edilmiştir. Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, tam sayı dizileri üzerinde durulmuş, bu tam sayı dizilerinin tanımları ve bazı cebirsel özellikleri verilmiştir.

İkinci bölümde, balans sayıları, kobalans sayıları, alt balans sayıları ve b_3 -alt balans sayıları üzerinde durulmuştur. Bu sayılar ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, tez yazımında yararlanılan kaynaklara yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise b_3 -alt balans sayıları ele alınarak bu sayılara ait bazı cebirsel özdeşlikler elde edilmiştir. Lucas-balans sayılarına benzer olarak b_3 -Lucas alt balans sayıları tanımlanmıştır ve b_3 -Lucas alt balans sayıları ile b_3 -alt balans sayıları arasında birtakım cebirsel bağıntılar elde edilmiştir.

Beşinci bölümde ise elde edilen bulguların değerlendirmesi yapılmıştır.

Haziran 2021, 67 sayfa.

Anahtar kelimeler: Tam sayı dizileri, balans sayıları, alt balans sayıları



SUMMARY

ALGEBRAIC PROPERTIES OF b_3 -SUBBALANCING AND b_3 -LUCAS SUBBALANCING NUMBERS

M.Sc. THESIS

Selin SARI

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Gül KARADENİZ GÖZERİ

In this thesis, the subbalancing numbers obtained by an equation similar to the equation giving the balancing numbers are investigated. Algebraic identities provided by b_3 -subbalancing and b_3 -Lucas subbalancing numbers are obtained by making use of some theorems and equations belonging to the balancing numbers. This thesis consists of five chapters.

In the first chapter, integer sequences are discussed, definitions and some algebraic properties of these integer sequences are given.

In the second chapter, balancing numbers, cobalancing numbers, subbalancing numbers and b_3 -subbalancing numbers are discussed. The basic definitions and theorems related to these numbers are given.

In the third chapter, the sources used in writing the thesis are given.

In the fourth chapter, b_3 -subbalancing numbers are discussed and some algebraic equations related to these numbers are obtained. Similiar to Lucas-balancing numbers, b_3 -Lucas subbalancing numbers are defined and some algebraic relations are obtained between b_3 - Lucas subbalancing numbers and b_3 -subbalancing numbers.

In the fifth chapter, on evaluation of the results of this study is indicated.

June 2021, 67 pages.

Keywords: Integer sequences, balancing numbers, subbalancing numbers.



1. GİRİŞ

Tam sayı dizileri, sahip oldukları özellikler ve bu özelliklerin uygulama alanları itibariyle sayılar teorisinde önemli bir yere sahiptir. Tam sayı dizilerinin en bilineni Fibonacci dizisidir (A000045 OEIS). Fibonacci dizisi, adını ünlü İtalyan matematikçi Leonardo Fibonacci' den (1170-1250) almıştır. Fibonacci, babasının işi nedeniyle birçok Doğu ve Arap ülkelerini gezmiş, buralarda görmüş olduğu Arap ve Hint sayı sistemlerini inceleyerek bu sayı sistemleri ile işlem yapmanın daha kolay olduğunu fark etmiştir. Böylece, İtalya'da kullanılan roma rakamlarını değiştirmeye çalışmış, bu amaç doğrultusunda *Liber Abaci* (1202) isimli kitabını yazarak bu sayı sistemlerini Avrupa'ya tanıtan kişi olmuştur. Bunlara ek olarak kitabında, altıncı yüzyılda Hintli matematikçilerin keşfetmiş olduğu sayı dizisine yer vermiş, bu diziyi bir zeka sorusu olarak sunmuştur. Bu zeka sorusu şu şekildedir: Bir çiftlikte bir çift (bir dişi, bir erkek) tavşan vardır. Bir yeni doğmuş tavşan, bir ay sonra yetişkin hale geliyor. Her yetişkin tavşan çifti de yetişkin olduktan bir ay sonra, bir çift tavşan doğuruyor. Bunu takip eden diğer aylarda da her ay bir çift tavşan doğurmaya devam ediyor. Tavşanların hiçbirinin ölmediği kabul ediliyor. Bu bilgilere göre bir yıl içinde herhangi bir ayda bu çiftlikte kaç tane tavşan çifti olduğu nasıl hesaplanır?

Problemin çözümüne bakıldığında, bulunan tavşan çifti sayısı $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\}$ şeklinde bir tam sayı dizisi oluşturur. Bu şekilde oluşturulan, n . aydaki toplam tavşan çifti sayısını veren tam sayı dizisine Fibonacci dizisi denir.

19. yüzyılın başlarından itibaren Fibonacci dizisi üzerine yapılan çalışmalar giderek artmıştır. Özellikle dizinin elemanları ile doğa arasındaki ilişkiler incelenmiş, böylece, altın oran kavramı ortaya çıkmıştır. Altın oran, Fibonacci dizisinin ardışık terimlerinin oranından oluşan dizinin limiti olarak tanımlanır ve doğada salyangozun kabuğunda, insan vücudunda, sanatta, müzikte karşımıza çıkar. Estetik ve geometrik olarak en iyi oran kabul edilir. Altın oran,

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cong 1,618$$

sayısına eşittir.

Daha dikkatli bakıldığında; Fibonacci dizisinin herhangi bir terimi, kendinden önce gelen ilk iki terimin toplamıdır. Bu şekilde ifade edersek, F_n , n . Fibonacci sayısı ve başlangıç değerleri $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olmak üzere,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 2) \quad (1.1)$$

bağıntısı elde edilir.

Fibonacci dizisi ile ilişkili olan diğer önemli bir tam sayı dizisi de Lucas dizisidir (A000032 OEIS). Fibonacci dizisi ile aynı bağıntıya sahiptir fakat başlangıç değerleri farklıdır. Lucas dizisini Fransız matematikçi Eduard Lucas (1842-1891) tanımlamıştır.

L_n , n . Lucas sayısı ve başlangıç terimleri $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ olmak üzere,

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad (n \geq 2) \quad (1.2)$$

dir.

Fibonacci ve Lucas dizilerinin terimleri arasında da çeşitli özdeşlikler bulunur. Bu özdeşliklerin bazıları şunlardır [1,2]:

$$F_{n-1} + F_{n+1} = L_n$$

$$L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n$$

$$F_n + L_n = 2F_{n+1}$$

$$F_{2n} = F_n L_n$$

$$5F_n^2 - L_n^2 = 4(-1)^{n+1}.$$

Tam sayı dizilerinde rekürans bağıntısı ve Binet formülü sık karşılaşılan kavramlardır. Rekürans bağıntısı sayesinde bir tam sayı dizisinin başlangıç değerleri verilerek bu dizinin terimlerinin, o terimden önce gelen terimler yardımıyla elde edilmesi sağlanır [3]. Buna göre (1.1) ve (1.2) eşitlikleri sırasıyla Fibonacci dizisi ve Lucas dizisinin rekürans bağıntılarıdır.

Binet (Jacques Philippe Marie Binet, 1786-1856) formülü ise, herhangi bir tam sayı dizisine ait olan rekürans bağıntısının, fark denklemi olarak çözülmesiyle elde edilen kökler yardımıyla dizinin n . terimini veren eşitliktir.

Fibonacci ve Lucas dizileri dışında pek çok tam sayı dizisi mevcut olup, bunlar arasında en çok dikkat çekenlerden ikisi balans ve kobalans sayı dizileridir.

Behera ve Panda [4] tarafından balans sayıları,

n ve r pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$1 + 2 + \dots + (n - 1) = (n + 1) + (n + 2) + \dots + (n + r) \quad (1.3)$$

eşitliğini sağlayan n sayısı olarak tanımlanmış ve r sayısına da n balans sayısının dengeleyicisi (balansır) adı verilmiştir.

B_n , n . balans sayısı ve $B_1 = 1$, $B_2 = 6$ olmak üzere, balans sayılarının rekürans bağıntısı,

$$B_{n+1} = 6B_n - B_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

şeklindedir [5].

(1.3) eşitliğini sağlayan n sayılarının dengeleyicilerinden oluşan diziye, Panda ve Ray [6] tarafından kobalans sayı dizisi adı verilmiştir. Dolayısıyla, n . balans sayısına karşılık gelen r dengeleyicisinin bir kobalans sayısı olduğu görülür.

b_n , n . kobalans sayısı ve $b_1 = 0$, $b_2 = 2$ olmak üzere, kobalans sayılarının rekürans bağıntısı,

$$b_{n+1} = 6b_n - b_{n-1} + 2 \quad (n \geq 2)$$

şeklindedir [6].

Bunlara ek olarak Ray [7], Lucas- balans sayılarını, Lucas- kobalans sayılarını tanımlayarak bu sayılar arasında bazı özdeşlikler elde etmiştir.

Balans ve kobalans sayıları ile doğrudan ilişkili olan tam sayı dizileri, üçgensel sayı dizisi ve oblong (pronik) sayı dizisidir.

Üçgensel sayı dizisi (A000217 OEIS),

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (n \geq 1) \quad (1.4)$$

şeklindeki sayılardan oluşan tam sayı dizisidir. Üçgensel sayılarla ilgili bazı özdeşlikler şu şekildedir [8, 9]:

$$T_n + T_{n-1} = n^2$$

$$T_{n+1}^2 - T_n^2 = (n+1)^3$$

$$nT_{n+1} = (n+2)T_n.$$

Oblong (pronik) sayı dizisi (A002378 OEIS),

$$O_n = n(n+1) \quad (n \geq 0) \quad (1.5)$$

şeklindeki sayılardan oluşan tam sayı dizisidir. Breiteig [10] çalışmasında, ardışık iki oblong sayısının çarpımının ne zaman bir oblong sayısı olacağını incelemiştir ve sonucunda,

$$O_{k-1}O_k = O_{k^2-1}$$

elde etmiştir.

Balans sayıları ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Liptai [11], Fibonacci dizisinde 1 sayısından başka hiçbir balans sayısının bulunmadığını göstermiştir. Panda ve Rout [12], k -boşluk balans sayılarını tanımlamışlardır. Panda ve Panda [13], hemen hemen balans sayılarını tanımlayarak bu sayılar ile balans sayıları arasındaki bağıntıları göstermişlerdir. Davala ve Panda [14], alt balans sayılarını tanımlamışlar, bu sayılar ile ilgili çeşitli teoremler ve sonuçlar elde etmişlerdir.

Davala ve Panda [14], balans sayılarının tanımına benzer olarak alt balans sayılarını,

D sabit bir pozitif tamsayı olmak üzere,

$$1 + 2 + \cdots + (n - 1) + D = (n + 1) + (n + 2) + \cdots + (n + r) \quad (1.6)$$

eşitliğini sağlayan n pozitif tam sayısı olarak tanımlamışlardır ve n sayısına D -alt balans sayısı adını vermişlerdir. Bu tanıma göre, her D pozitif tam sayısı için (1.6) eşitliğini sağlayan bir n sayısı bulunamadığını göstermişlerdir. D sayısının seçiminin önemli olduğunu ve D sayısının kobalans sayıları olarak seçildiğinde (1.6) eşitliğini sağlayan n pozitif tam sayısının bulunabileceğini elde etmişlerdir. Bu sonuç doğrultusunda, b_n -alt balans sayıları ile ilgili temel kavramlar ve teoremler bulmuşlardır. Özel olarak, $n = 3$ ve $n = 5$ değerleri için b_3 -alt balans sayıları ve b_5 -alt balans sayılarını inceleyerek b_3 -alt balans sayılarının, $\{11B_m + C_m, 11B_{m+1} - C_{m+1} : m = 0, 1, 2, \dots\}$ şeklinde iki farklı bağıntı ile elde edileceğini göstermişlerdir [14].

Bu tezin genel kısımlar başlığı altındaki kısımda ilk olarak balans sayıları, kobalans sayıları, Lucas-balans sayıları, Lucas-kobalans sayıları tanımları verilmiş, bu diziler arasındaki bağıntılar gösterilmiştir. Daha sonra, literatüre yeni girmiş olan alt balans sayılarının tanımına ve bu sayıların genel özelliklerine yer verilmiştir.

Tezin bulgular kısmında b_3 -alt balans sayıları ele alınmıştır. Bu sayılar ile ilgili özgün teoremler elde edilmiştir ve b_3 -alt balans sayılarını üreten fonksiyonlar bulunmuştur. Ayrıca b_3 -alt balans sayılarına bağlı olarak elde edilen b_3 -Lucas alt balans sayıları tanımlanmıştır. b_3 -Lucas alt balans sayıları için elde edilen birtakım cebirsel özdeşlikler verilmiştir. b_3 -Lucas alt balans sayılarının b_3 -alt balans sayıları ile olan cebirsel ilişkisi incelenmiştir.

2. GENEL KISIMLAR

Bu bölümde, tezin ilerleyen kısımlarında kullanılacak olan tanımlar, temel teoremler ve bazı önemli sonuçlar verilmiştir.

2.1. BALANS VE LUCAS-BALANS SAYILARI

Bu alt bölümde, balans sayılarının tanımı verilerek bu sayılar ile ilgili literatürde bulunan bazı cebirsel özdeşlikler gösterilmiştir. Daha sonra Lucas-balans sayılarının tanımı verilip bu sayıların sağladığı birtakım cebirsel bağıntılar ve bu sayıların balans sayıları ile olan ilişkisi verilmiştir.

Tanım 2.1.1 n ve r pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$1 + 2 + \dots + (n - 1) = (n + 1) + (n + 2) + \dots + (n + r) \quad (2.1)$$

eşitliğini sağlayan n sayısına balans sayısı, r sayısına ise n balans sayısının dengeleyicisi (balansır) denir [4].

(2.1) eşitliği, (1.4) eşitliğinden yararlanılarak düzenlenirse,

$$T_{n-1} + T_n = T_{n+r} \quad (2.2)$$

elde edilir. (2.2) eşitliğinden balans sayılarının, ardışık iki üçgensel sayı olan T_n ve T_{n-1} sayılarının toplamını yine bir üçgensel sayıya eşitleyen n sayısı olduğu görülür [7].

Örnek 2.1.1 $n = 6$ için $T_5 + T_6 = 36 = T_8$ olduğundan 6 bir balans sayısıdır ve dengeleyicisi 2 dir. Benzer şekilde, $n = 35$ için $T_{34} + T_{35} = 595 + 630 = T_{49}$ olduğundan 35 bir balans sayısıdır ve dengeleyicisi 14 tür.

(1.4) eşitliği kullanılarak,

$$T_{n-1} = \frac{(n-1)n}{2} \quad \text{ve} \quad T_{n+r} = \frac{(n+r)(n+r+1)}{2}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler ve (1.4) eşitliği, (2.2) eşitliğinde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} &= \frac{(n+r)(n+r+1)}{2} \\ n^2 &= \frac{(n+r)(n+r+1)}{2}\end{aligned}\quad (2.3)$$

bulunur [7]. (2.3) eşitliğinden aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 2.1.1 n pozitif tam sayısının balans sayısı olması için gerek ve yeter koşul n^2 sayısının üçgensel sayı olmasıdır. Dolayısıyla, tam kare olan üçgensel sayıların karekökü balans sayılarını verir [4].

Sonuç 2.1.2 (2.1) eşitliği kullanılarak,

$$r = \frac{-(2n+1) + \sqrt{8n^2+1}}{2}\quad (2.4)$$

bulunur [7].

(2.4) eşitliği kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.1.3 n pozitif tam sayısının balans sayısı olması için gerek ve yeter koşul $8n^2+1$ sayısının tam kare olmasıdır [7].

Teorem 2.1.1 B_m , m . balans sayısı olmak üzere,

$$B_m = \frac{(3 + \sqrt{8})^m - (3 - \sqrt{8})^m}{2\sqrt{8}}\quad (2.5)$$

balans sayılarının Binet formülüdür [7].

Behera ve Panda [4] tarafından, (2.1) eşitliğini sağlayan en küçük sayı 6 olduğundan balans sayılarının ilk terimi $B_1 = 6$ şeklinde gösterilmiştir. Ayrıca $n = 1$ için $8 \cdot 1^2 + 1$ sayısı bir tam kare sayı olduğundan Sonuç 2.1.3 kullanarak 1 sayısının balans sayısı olduğu gösterilip $B_0 = 1$ şeklinde ifade edilmiştir. Daha sonra Panda [5], balans sayılarının gösterimini, Fibonacci sayıları ile benzer bir gösterime sahip olmaları için $B_1 = 1$, $B_2 = 6$, $\dots$ şeklinde değiştirmiştir. Son olarak Ray [7], (2.5) eşitliğinde $m = 0$ alarak $B_0 = 0$ olduğunu göstermiştir.

Teorem 2.1.2 B_m , m . balans sayısı ve $B_1 = 1, B_2 = 6$ olmak üzere,

$$B_{m+1} = 6B_m - B_{m-1} \quad (m \geq 2) \quad (2.6)$$

balans sayılarının rekürans bağıntısıdır [5].

İspat. $\alpha_1 = 1 + \sqrt{2}$, $\alpha_2 = 1 - \sqrt{2}$ olmak üzere, (2.5) eşitliği

$$B_m = \frac{\alpha_1^{2m} - \alpha_2^{2m}}{4\sqrt{2}} \quad (2.7)$$

şeklinde yazılabilir. (2.7) eşitliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} B_{m+1} + B_{m-1} &= \frac{\alpha_1^{2(m+1)} - \alpha_2^{2(m+1)}}{4\sqrt{2}} + \frac{\alpha_1^{2(m-1)} - \alpha_2^{2(m-1)}}{4\sqrt{2}} \\ &= \frac{\alpha_1^{2m}\alpha_1^2 - \alpha_2^{2m}\alpha_2^2 + \alpha_1^{2m}\alpha_1^{-2} - \alpha_2^{2m}\alpha_2^{-2}}{4\sqrt{2}} \\ &= \frac{\alpha_1^{2m}(\alpha_1^2 + \alpha_1^{-2}) - \alpha_2^{2m}(\alpha_2^2 + \alpha_2^{-2})}{4\sqrt{2}} \\ &= \frac{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(\alpha_1^{2m} - \alpha_2^{2m})}{4\sqrt{2}} \\ &= \frac{6(\alpha_1^{2m} - \alpha_2^{2m})}{4\sqrt{2}} \\ &= 6B_m \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$B_{m+1} = 6B_m - B_{m-1}$$

eşitliği gösterilmiş olur.

Teorem 2.1.3 B_m , m . balans sayısı olmak üzere,

$$B_m^2 = 1 + B_{m-1}B_{m+1} \quad (m \geq 2)$$

dir [4].

İspat. İspatı tümevarımla yapalım. $m = 2$ için iddianın doğru olduğu

$$B_2^2 = 1 + B_1B_3 = 36$$

eşitliğinden görülür. $m = k$ için iddia doğru olsun, yani $B_k^2 = 1 + B_{k-1}B_{k+1}$ olsun.

$m = k + 1$ için iddianın doğru olduğunu gösterelim.

$$B_{k+1}^2 = B_{k+1}B_{k+1}$$

olup (2.6) eşitliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} B_{k+1}^2 &= (6B_k - B_{k-1})B_{k+1} \\ &= 6B_kB_{k+1} - B_{k-1}B_{k+1} \\ &= 6B_kB_{k+1} - (B_k^2 - 1) \\ &= B_k(6B_{k+1} - B_k) + 1 \\ &= B_kB_{k+2} + 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $m = k + 1$ için de iddianın doğru olduğu gösterilmiş olur.

Teorem 2.1.4 x herhangi bir balans sayısı olmak üzere,

$$(i) \ f(x) = 2x\sqrt{8x^2 + 1}$$

$$(ii) \ g(x) = 3x + \sqrt{8x^2 + 1}$$

birer balans sayısıdır [4].

İspat. (i) x bir balans sayısı olduğu için Sonuç 2.1.3 ten $8x^2 + 1$ tam kare sayıdır.

$$\frac{8x^2(8x^2 + 1)}{2} = 4x^2(8x^2 + 1)$$

sayısı hem tam kare sayıdır hem üçgensel sayıdır. Sonuç 2.1.1 gereğince, bu sayının karekökü balans sayısıdır. O halde $f(x) = 2x\sqrt{8x^2 + 1}$ bir balans sayısıdır.

$$\begin{aligned} (ii) \quad 8g^2(x) + 1 &= 8(9x^2 + 6x\sqrt{8x^2 + 1} + 8x^2 + 1) + 1 \\ &= (8x + 3\sqrt{8x^2 + 1})^2 \end{aligned}$$

dir. Böylece, Sonuç 2.1.3 ten $g(x)$ bir balans sayısıdır.

$f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarına bakıldığında $f(x)$ fonksiyonunun daima çift balans sayılarını ürettiği görülürken, $g(x)$ fonksiyonunun x tek sayı iken çift balans sayılarını, x çift sayı iken tek balans sayılarını ürettiği görülür.

Teorem 2.1.5 x herhangi bir balans sayısı olmak üzere,

$$g(x) = 3x + \sqrt{8x^2 + 1}$$

x balans sayısından bir sonraki balans sayısıdır [4].

İspat. x bir balans sayısı olsun. O halde, $x = B_m$ olacak şekilde m pozitif tam sayısı vardır. (2.6) eşitliğinden,

$$B_{m+1} = 3B_m + (3B_m - B_{m-1}) \tag{2.8}$$

elde edilir. (2.8) eşitliğinde parantez içindeki ifadenin karesi alınırsa,

$$(3B_m - B_{m-1})^2 = 9B_m^2 - 6B_mB_{m-1} + B_{m-1}^2$$

elde edilir. (2.6) eşitliği ve Teorem 2.1.3 kullanılarak,

$$\begin{aligned} (3B_m - B_{m-1})^2 &= 9B_m^2 + B_{m-1}^2 - (B_{m+1} + B_{m-1})B_{m-1} \\ &= 9B_m^2 + B_{m-1}^2 - B_{m+1}B_{m-1} - B_{m-1}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 9B_m^2 - (B_m^2 - 1) \\
&= 8B_m^2 + 1
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece,

$$(3B_m - B_{m-1}) = \sqrt{8B_m^2 + 1} \quad (2.9)$$

elde edilir. (2.9) eşitliği, (2.8) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$B_{m+1} = 3B_m + \sqrt{8B_m^2 + 1}$$

olur ve $g(B_m) = B_{m+1}$ bulunur.

Teorem 2.1.6 x herhangi bir balans sayısı olmak üzere,

$$\tilde{g}(x) = 3x - \sqrt{8x^2 + 1}$$

x balans sayısından bir önceki balans sayısıdır [4].

Sonuç 2.1.4 B_m , m . balans sayısı olmak üzere,

$$B_{m-1} = 3B_m - \sqrt{8B_m^2 + 1} \quad \text{ve} \quad B_{m+1} = 3B_m + \sqrt{8B_m^2 + 1}$$

dir [7].

Tanım 2.1.2 B_m , m . balans sayısı olmak üzere, bir tam kare olan $8B_m^2 + 1$ sayısının kareköküne m . Lucas-balans sayısı denir ve C_m ile gösterilir. Böylece,

$$C_m = \sqrt{8B_m^2 + 1}$$

şeklinde tanımlanır [7].

Örnek 2.1.2 $B_1 = 1$, $B_2 = 6$ alınırsa,

$$C_1 = \sqrt{8B_1^2 + 1} = 3 \quad \text{ve} \quad C_2 = \sqrt{8B_2^2 + 1} = 17$$

elde edilir.

Teorem 2.1.7 C_m , m . Lucas-balans sayısı ve $C_1 = 3$, $C_2 = 17$ olmak üzere,

$$C_{m+1} = 6C_m - C_{m-1} \quad (m \geq 2) \quad (2.10)$$

Lucas-balans sayılarının rekürans bağıntısıdır [7].

İspat. Tanım 2.1.2 den,

$$C_{m+1}^2 = 8B_{m+1}^2 + 1$$

dir. $B_{m+1} = 3B_m + \sqrt{8B_m^2 + 1}$ özdeşliğinden,

$$\begin{aligned} C_{m+1}^2 &= 8 \left(3B_m + \sqrt{8B_m^2 + 1} \right)^2 + 1 \\ &= 8 \left(9B_m^2 + 6B_m\sqrt{8B_m^2 + 1} + 8B_m^2 + 1 \right) + 1 \\ &= \left(3\sqrt{8B_m^2 + 1} + 8B_m \right)^2 \\ &= (3C_m + 8B_m)^2 \end{aligned}$$

dir. Buradan,

$$C_{m+1} = 3C_m + 8B_m \quad (2.11)$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$C_{m-1}^2 = 8B_{m-1}^2 + 1$$

yazarak $B_{m-1} = 3B_m - \sqrt{8B_m^2 + 1}$ özdeşliğinden,

$$C_{m-1} = 3C_m - 8B_m \quad (2.12)$$

dir. (2.11) ve (2.12) eşitlikleri toplanırsa,

$$C_{m+1} = 6C_m - C_{m-1}$$

elde edilir.

Teorem 2.1.8 C_m , m . Lucas-balans sayısı ve $\alpha_1 = 1 + \sqrt{2}$, $\alpha_2 = 1 - \sqrt{2}$ olmak üzere,

$$C_m = \frac{\alpha_1^{2m} + \alpha_2^{2m}}{2}$$

Lucas-balans sayılarının Binet formülüdür [7].

Lucas-balans sayılarının Binet formülünde $m = 0$ alınarak $C_0 = 1$ elde edilir.

Lucas-balans sayıları tanımından görüleceği üzere, balans sayıları ve Lucas-balans sayıları doğrudan ilişkilidir. Aşağıda, balans ve Lucas-balans sayıları arasındaki literatürde bulunan birtakım cebirsel bağıntılar gösterilmiştir.

Sonuç 2.1.5 Sonuç 2.1.4 te $\sqrt{8B_m^2 + 1}$ yerine C_m yazılırsa,

$$B_{m-1} = 3B_m - C_m \quad (2.13)$$

$$B_{m+1} = 3B_m + C_m \quad (2.14)$$

elde edilir [7].

Teorem 2.1.9 m ve n pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$B_{m+n} = B_m C_n + C_m B_n$$

dir [7].

Teorem 2.1.10 m ve n pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$C_{m+n} = C_m C_n + 8B_m B_n$$

dir [7].

Teorem 2.1.11 m ve n pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$B_{m-n} = B_m C_n - C_m B_n \quad (m > n)$$

dir [7].

İspat. (2.7) eşitliği ve Teorem 2.1.8 kullanılarak,

$$C_m + \sqrt{8}B_m = \alpha_1^{2m}$$

$$C_m - \sqrt{8}B_m = \alpha_2^{2m}$$

elde edilir. Böylelikle,

$$C_{m-n} - \sqrt{8}B_{m-n} = \alpha_2^{2(m-n)}$$

ve

$$(C_m - \sqrt{8}B_m)(C_n + \sqrt{8}B_n) = \alpha_2^{2m} \alpha_1^{2n} = \alpha_2^{2(m-n)}$$

dir. Buradan,

$$C_{m-n} - \sqrt{8}B_{m-n} = (C_m - \sqrt{8}B_m)(C_n + \sqrt{8}B_n)$$

$$C_{m-n} - \sqrt{8}B_{m-n} = C_m C_n - 8B_m B_n - \sqrt{8}(B_m C_n - C_m B_n)$$

olur. Böylece,

$$B_{m-n} = B_m C_n - C_m B_n$$

elde edilir.

Sonuç 2.1.6 m ve n pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$C_{m-n} = C_m C_n - 8B_m B_n \quad (m > n)$$

dir [7].

2.2. KOBALANS VE LUCAS-KOBALANS SAYILARI

Bu alt bölümde, kobalans sayılarının tanımı verilerek bu sayılar ile ilgili literatürde bulunan bazı cebirsel özdeşlikler ve bu sayıların balans sayıları ile olan cebirsel ilişkisi gösterilmiştir. Daha sonra, Lucas-kobalans sayılarının tanımı verilip bu sayıların sağladığı birtakım cebirsel bağıntılar gösterilmiştir.

Tanım 2.2.1 n ve r pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$1 + 2 + \cdots + n = (n + 1) + (n + 2) + \cdots + (n + r) \quad (2.15)$$

eşitliğini sağlayan n sayısına kobalans sayısı, r sayısına ise n kobalans sayısının dengeleyicisi (kobalansır) denir [6].

(2.15) eşitliği, (1.4) eşitliğinden yararlanılarak düzenlenirse,

$$T_n + T_n = T_{n+r} \quad (2.16)$$

elde edilir. (2.16) eşitliğinden kobalans sayılarının, T_n üçgensel sayısının iki katını yine bir üçgensel sayıya eşitleyen n sayısı olduğu görülür.

Örnek 2.2.1 $n = 2$ için $T_2 + T_2 = 6 = T_3$ olduğundan 2 bir kobalans sayısıdır ve dengeleyicisi 1 dir. Benzer şekilde, $n = 14$ için $T_{14} + T_{14} = 210 = T_{20}$ olduğundan 14 bir kobalans sayısıdır ve dengeleyicisi 6 dır.

(1.4) eşitliğinden,

$$T_{n+r} = \frac{(n+r)(n+r+1)}{2}$$

bulunur. Bu eşitlik ve (1.4) eşitliği, (2.16) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} &= \frac{(n+r)(n+r+1)}{2} \\ n(n+1) &= \frac{(n+r)(n+r+1)}{2} \end{aligned} \quad (2.17)$$

olur [6]. (2.17) eşitliğinden aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 2.2.1 n pozitif tam sayısının kobalans sayısı olması için gerek ve yeter koşul $n(n+1)$ sayısının üçgensel sayı olmasıdır. Dolayısıyla kobalans sayıları ile oblong (pronik) olan üçgensel sayılar arasında bir ilişki vardır [6].

Sonuç 2.2.2 (2.15) eşitliği kullanılarak,

$$r = \frac{-(2n+1) + \sqrt{8n^2 + 8n + 1}}{2} \quad (2.18)$$

bulunur [6].

(2.18) eşitliği kullanılarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 2.2.3 n pozitif tam sayısının kobalans sayısı olması için gerek ve yeter koşul $8n^2 + 8n + 1$ sayısının tam kare olmasıdır [6].

Panda ve Ray [6] tarafından, $n = 0$ için $8 \cdot 0^2 + 8 \cdot 0 + 1$ sayısı bir tam kare sayı olduğundan, kobalans sayıları tanımına uymamasına rağmen, Sonuç 2.2.3 kullanılarak 0 sayısının kobalans sayısı olduğu ifade edilmiştir ve $b_1 = 0$ şeklinde gösterilmiştir.

Teorem 2.2.1 x herhangi bir kobalans sayısı olmak üzere,

$$(i) \ f(x) = 3x + \sqrt{8x^2 + 8x + 1} + 1$$

$$(ii) \ g(x) = 17x + 6\sqrt{8x^2 + 8x + 1} + 8$$

birer kobalans sayısıdır [6].

Teorem 2.2.2 x herhangi bir kobalans sayısı olmak üzere,

$$f(x) = 3x + \sqrt{8x^2 + 8x + 1} + 1$$

x kobalans sayısından bir sonraki kobalans sayısıdır [6].

Teorem 2.2.3 x herhangi bir kobalans sayısı olmak üzere,

$$\tilde{f}(x) = 3x - \sqrt{8x^2 + 8x + 1} + 1$$

x kobalans sayısından bir önceki kobalans sayısıdır [6].

Sonuç 2.2.4 b_m , m . kobalans sayısı olmak üzere,

$$b_{m-1} = 3b_m - \sqrt{8b_m^2 + 8b_m + 1} + 1$$

$$b_{m+1} = 3b_m + \sqrt{8b_m^2 + 8b_m + 1} + 1$$

dir [6].

Teorem 2.2.4 b_m , m . kobalans sayısı ve $b_1 = 0$, $b_2 = 2$ olmak üzere,

$$b_{m+1} = 6b_m - b_{m-1} + 2 \quad (m \geq 2)$$

kobalans sayılarının rekürans bağıntısıdır [6].

İspat. Sonuç 2.2.4 ten,

$$b_{m+1} + b_{m-1} = 6b_m + 2$$

dir. Böylece,

$$b_{m+1} = 6b_m - b_{m-1} + 2$$

eşitliği gösterilmiş olur.

Teorem 2.2.5 b_m , m . kobalans sayısı ve $\alpha_1 = 1 + \sqrt{2}$, $\alpha_2 = 1 - \sqrt{2}$ olmak üzere,

$$b_m = \frac{\alpha_1^{2m-1} - \alpha_2^{2m-1}}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2}$$

kobalans sayılarının Binet formülüdür [7].

Teorem 2.2.6 Kobalans sayıları çifttir [6].

İspat. Tümevarımla ispatlayalım. $b_1 = 0$, $b_2 = 2$ çift sayıdır. $m \leq k$ için iddianın doğru olduğunu kabul edip $m = k + 1$ için iddianın doğru olduğunu gösterelim.

b_k ve b_{k-1} sayılarının çift sayı olduğu kabul edildiğinden $b_k = 2n$ ve $b_{k-1} = 2t$ olacak şekilde n, t tam sayıları vardır.

Teorem 2.2.4 kullanılarak,

$$b_{k+1} = 6b_k - b_{k-1} + 2$$

$$b_{k+1} = 6(2n) - 2t + 2 = 2(6n - t + 1)$$

elde edilir. Böylece, $m = k + 1$ için de iddianın doğru olduğu gösterilmiş olur.

Teorem 2.2.7 b_m , m . kobalans sayısı olmak üzere,

$$(b_m - 1)^2 = 1 + b_{m-1}b_{m+1} \quad (m \geq 2)$$

dir [6].

Balans ve kobalans sayıları arasındaki cebirsel ilişkiyi gösteren, literatürde bulunan birtakım teoremler aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.2.8 m pozitif tam sayı olmak üzere,

$$b_m = 2(B_1 + B_2 + \cdots + B_{m-1}) \quad (2.19)$$

dir [6].

Sonuç 2.2.5 m pozitif tam sayı olmak üzere,

$$B_m = \frac{b_{m+1} - b_m}{2}$$

dir [6].

İspat. (2.19) eşitliğinden,

$$b_{m+1} = 2(B_1 + B_2 + \cdots + B_{m-1} + B_m)$$

elde edilir. Bu eşitlikten (2.19) eşitliği çıkarılırsa,

$$b_{m+1} - b_m = 2B_m$$

bulunur.

Teorem 2.2.9 B_m , m . balans sayısı ve b_m , m . kobalans sayısı olmak üzere,

$$B_m^2 + b_m^2 = 5b_m^2 + (B_{m-1} + 1)(B_{m-1} + 4b_m + 1) \quad (m \geq 1)$$

dir [15].

Teorem 2.2.10 B_m , m . balans sayısı ve b_m , m . kobalans sayısı olmak üzere,

$$B_m^2 - b_m^2 = B_m + 2B_m b_m + b_m \quad (m \geq 1)$$

dir [15].

Teorem 2.2.11 m pozitif tam sayı olmak üzere,

$$(i) \quad B_m^2 + b_{2m} = \frac{1}{2} \left[\frac{B_{m-1} + 5B_m - 1}{2} \right] \left[\frac{B_{m-1} + 5B_m + 1}{2} \right]$$

$$(ii) \quad B_m^2 + b_{2m+1} = \frac{1}{2} \left[\frac{B_{m+1} + 5B_m - 1}{2} \right] \left[\frac{B_{m+1} + 5B_m + 1}{2} \right]$$

dir [14].

İspat. (i) (2.13) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} (B_{m-1} + 5B_m)^2 - C_m^2 &= (B_{m-1} + 5B_m)^2 - (3B_m - B_{m-1})^2 \\ &= 16(B_{m-1}B_m + B_m^2) \end{aligned}$$

dir. (2.7) eşitliğinden,

$$= 16 \left[\left(\frac{\alpha_1^{2m-2} - \alpha_2^{2m-2}}{4\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\alpha_1^{2m} - \alpha_2^{2m}}{4\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{\alpha_1^{2m} - \alpha_2^{2m}}{4\sqrt{2}} \right)^2 \right]$$

elde edilir. Burada $\alpha_1 \alpha_2 = -1$, $\alpha_1^{-2} = \alpha_2^2$ ve $\alpha_2^{-2} = \alpha_1^2$ eşitlikleri kullanılarak,

$$(B_{m-1} + 5B_m)^2 - C_m^2 = \frac{1}{2} [\alpha_1^{4m-2} + \alpha_2^{4m-2} - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \alpha_1^{4m} - 2 + \alpha_2^{4m}]$$

bulunur. Burada $\alpha_1^2 = 3 + 2\sqrt{2}$, $\alpha_2^2 = 3 - 2\sqrt{2}$ eşitlikleri ve Teorem 2.2.5 kullanılırsa,

$$\begin{aligned} (B_{m-1} + 5B_m)^2 - C_m^2 &= \frac{1}{2} [\alpha_1^{4m-1}(\alpha_1^{-1} + \alpha_1) + \alpha_2^{4m-1}(\alpha_2^{-1} + \alpha_2) - 8] \\ &= \frac{1}{2} [2\sqrt{2}\alpha_1^{4m-1} - 2\sqrt{2}\alpha_2^{4m-1} - 8] \\ &= 8b_{2m} \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla,

$$(B_{m-1} + 5B_m)^2 - C_m^2 = 8b_{2m}$$

ve buradan,

$$(B_{m-1} + 5B_m)^2 = 8b_{2m} + C_m^2$$

olup Tanım 2.1.2 kullanılarak,

$$(B_{m-1} + 5B_m)^2 = 8B_m^2 + 8b_{2m} + 1$$

bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned} B_m^2 + b_{2m} &= \frac{(B_{m-1} + 5B_m)^2 - 1}{8} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{B_{m-1} + 5B_m - 1}{2} \right] \left[\frac{B_{m-1} + 5B_m + 1}{2} \right] \end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) (2.13) ve (2.6) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned}
 (B_{m+1} + 5B_m)^2 - C_m^2 &= (B_{m+1} + 5B_m)^2 - (3B_m - B_{m-1})^2 \\
 &= (B_{m+1} + 5B_m)^2 - (B_{m+1} - 3B_m)^2 \\
 &= 16(B_{m+1}B_m + B_m^2)
 \end{aligned}$$

dir. (2.7) eşitliğinden,

$$= 16 \left[\left(\frac{\alpha_1^{2m+2} - \alpha_2^{2m+2}}{4\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\alpha_1^{2m} - \alpha_2^{2m}}{4\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{\alpha_1^{2m} - \alpha_2^{2m}}{4\sqrt{2}} \right)^2 \right]$$

elde edilir. Burada $\alpha_1\alpha_2 = -1$, $\alpha_1^2 = 3 + \sqrt{2}$ ve $\alpha_2^2 = 3 - \sqrt{2}$ eşitlikleri kullanılarak,

$$(B_{m+1} + 5B_m)^2 - C_m^2 = \frac{1}{2} [\alpha_1^{4m+1}(\alpha_1^{-1} + \alpha_1) + \alpha_2^{4m+1}(\alpha_2^{-1} + \alpha_2) - 8]$$

bulunur. Burada $\alpha_1^{-1} = -1 + \sqrt{2}$, $\alpha_2^{-1} = -1 - \sqrt{2}$ eşitlikleri ve Teorem 2.2.5 kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
 (B_{m+1} + 5B_m)^2 - C_m^2 &= \frac{1}{2} [2\sqrt{2}\alpha_1^{4m+1} - 2\sqrt{2}\alpha_2^{4m+1} - 8] \\
 &= 8b_{2m+1}
 \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla,

$$(B_{m+1} + 5B_m)^2 - C_m^2 = 8b_{2m+1}$$

ve buradan,

$$(B_{m+1} + 5B_m)^2 = 8b_{2m+1} + C_m^2$$

olup Tanım 2.1.2 kullanılarak,

$$(B_{m+1} + 5B_m)^2 = 8B_m^2 + 8b_{2m+1} + 1$$

bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned}
B_m^2 + b_{2m+1} &= \frac{(B_{m+1} + 5B_m)^2 - 1}{8} \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{B_{m+1} + 5B_m - 1}{2} \right] \left[\frac{B_{m+1} + 5B_m + 1}{2} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 2.2.2 b_m , m . kobalans sayısı olmak üzere, bir tam kare olan $8b_m^2 + 8b_m + 1$ sayısının kareköküne m . Lucas-kobalans sayısı denir ve c_m ile gösterilir. Böylece,

$$c_m = \sqrt{8b_m^2 + 8b_m + 1}$$

şeklinde tanımlanır [7].

Örnek 2.2.2 $b_1 = 0$, $b_2 = 2$ alınırsa,

$$c_1 = \sqrt{8b_1^2 + 8b_1 + 1} = 1 \text{ ve } c_2 = \sqrt{8b_2^2 + 8b_2 + 1} = 7$$

elde edilir.

Teorem 2.2.12 c_m , m . Lucas-kobalans sayısı ve $c_1 = 1$, $c_2 = 7$ olmak üzere,

$$c_{m+1} = 6c_m - c_{m-1} \quad (m \geq 2)$$

Lucas-kobalans sayılarının rekürans bağıntısıdır [7].

Teorem 2.2.13 c_m , m . Lucas-kobalans sayısı ve $\alpha_1 = 1 + \sqrt{2}$, $\alpha_2 = 1 - \sqrt{2}$ olmak üzere,

$$c_m = \frac{\alpha_1^{2m-1} + \alpha_2^{2m-1}}{2}$$

Lucas-kobalans sayılarının Binet formülüdür [7].

2.3. ALT BALANS SAYILARI

Tanım 2.3.1 D sabit bir pozitif tam sayı, n ve r pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$1 + 2 + \cdots + (n - 1) + D = (n + 1) + (n + 2) + \cdots + (n + r) \quad (2.20)$$

eşitliğini sağlayan n sayısına D -alt balans sayısı, r sayısına ise n sayısının D -alt dengeleyicisi (balansır) denir [14].

$D = 0$ alındığında (2.20) eşitliği, balans sayılarının elde edildiği (2.1) eşitliğine dönüşür. Bu nedenle, Tanım 2.3.1 de D pozitif tam sayı seçilerek $D = 0$ durumu dahil edilmemiştir [14].

(2.20) eşitliği, (1.4) eşitliğinden yararlanılarak düzenlenirse,

$$T_{n-1} + T_n + D = T_{n+r} \quad (2.21)$$

elde edilir. (1.4) eşitliğinden,

$$T_{n-1} = \frac{(n-1)n}{2} \quad \text{ve} \quad T_{n+r} = \frac{(n+r)(n+r+1)}{2}$$

dir. Bu eşitlikler ve (1.4) eşitliği, (2.21) eşitliğinde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} + D &= \frac{(n+r)(n+r+1)}{2} \\ n^2 + D &= \frac{(n+r)(n+r+1)}{2} \end{aligned} \quad (2.22)$$

bulunur [14]. (2.22) eşitliğinden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.3.1 n pozitif tam sayısının D -alt balans sayısı olması için gerek ve yeter koşul $n^2 + D$ sayısının üçgensel sayı olmasıdır [14].

Sonuç 2.3.2 (2.20) eşitliği kullanılarak,

$$r = \frac{-(2n+1) + \sqrt{8n^2 + 8D + 1}}{2} \quad (2.23)$$

bulunur [14].

(2.23) eşitliği kullanılarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 2.3.3 n pozitif tam sayısının D -alt balans sayısı olması için gerek ve yeter koşul $8n^2 + 8D + 1$ sayısının tam kare olmasıdır [14].

Davala ve Panda [14] tarafından, $D = 7$ alındığında $8n^2 + 57$ sayısının hiçbir n pozitif tam sayısı için tam kare olmadığı ifade edilmiştir. Bu nedenle, D pozitif tam sayısının her değeri için bir D -alt balans sayısı elde edilemeyeceği gösterilmiştir. Sonuç olarak, alt balans sayıları için D pozitif tam sayısının seçimi önemlidir.

Teorem 2.2.11 dikkate alınıp D sayısı, kobalans sayısı olarak seçilirse alt balans sayılarının elde edilmesi kesinleşmiş olur. Böylelikle, $m \geq 2$ tam sayısı için b_m -alt balans sayıları elde edilir. Burada, $m = 1$ için $b_1 = 0$ olduğundan ve bu durum Tanım 2.3.1 de dahil edilmediğinden $m \geq 2$ koşulu kabul edilmiştir.

Davala ve Panda [14], kobalans sayılarını tek ve çift indisli terimler şeklinde ayırarak b_m -alt balans sayılarının bu ayrıma göre elde edileceğini göstermişlerdir. b_m -alt balans sayılarının bu şekilde elde edilmesi aşağıdaki teoremlerle verilebilir.

Teorem 2.3.1 m sabit pozitif tam sayı ve $l \geq 0$ tam sayı olmak üzere, b_{2m} -alt balans sayıları,

$$x_{2l} = (B_{m-1} + 5B_m)B_l + B_m C_l$$

$$x_{2l+1} = (B_{m-1} + 5B_m)B_{l+1} - B_m C_{l+1}$$

dir [14].

Teorem 2.3.2 m sabit pozitif tam sayı ve $l \geq 0$ tam sayı olmak üzere, b_{2m+1} -alt balans sayıları,

$$x_{2l} = (B_{m+1} + 5B_m)B_l + B_m C_l$$

$$x_{2l+1} = (B_{m+1} + 5B_m)B_{l+1} - B_m C_{l+1}$$

dir [14].

$m \geq 2$ tam sayısı için, b_m -alt balans sayıları arasındaki rekürans bağıntısı aşağıdaki gibi verilebilir.

Teorem 2.3.3 x_n , b_m -alt balans sayısı olmak üzere,

$$x_{n+2} = 6x_n - x_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

b_m -alt balans sayılarının rekürans bağıntısıdır [14].

Davala ve Panda [14], verilen herhangi bir x balans sayısı için,

$$f(x) = (B_{m-1} + 5B_m)x + B_m\sqrt{8x^2 + 1}, g(x) = (B_{m-1} + 5B_m)x - B_m\sqrt{8x^2 + 1}$$

ve

$$\alpha(x) = (B_{m+1} + 5B_m)x + B_m\sqrt{8x^2 + 1}, \beta(x) = (B_{m+1} + 5B_m)x - B_m\sqrt{8x^2 + 1}$$

fonksiyonlarını tanımlamışlar ve aşağıdaki teoremleri elde etmişlerdir.

Teorem 2.3.4 Her bir x balans sayısı ve m pozitif tam sayısı için, yukarıda tanımlanan f ve g fonksiyonlarının x de aldığı değer birer b_{2m} -alt balans sayısıdır [14].

Teorem 2.3.5 Her bir x balans sayısı ve m pozitif tam sayısı için, yukarıda tanımlanan α ve β fonksiyonlarının x de aldığı değer birer b_{2m+1} -alt balans sayısıdır [14].

Davala ve Panda [14], verilen herhangi bir b_m -alt balans sayısı yardımıyla balans ve Lucas-balans sayısı elde edilebileceğini aşağıdaki teoremler ile göstermişlerdir.

Teorem 2.3.6 m pozitif tam sayı ve $y = (B_{m-1} + 5B_m)B_n + B_mC_n$ sayısı b_{2m} -alt balans sayısı olmak üzere,

$$B_n = \frac{(B_{m-1} + 5B_m)y - B_m\sqrt{8y^2 + 8b_{2m} + 1}}{8b_{2m} + 1} \quad (n \geq 0)$$

$$C_n = \frac{(B_{m-1} + 5B_m)\sqrt{8y^2 + 8b_{2m} + 1} - 8yB_m}{8b_{2m} + 1} \quad (n \geq 0)$$

dir [14].

Teorem 2.3.7 m pozitif tam sayı ve $y = (B_{m-1} + 5B_m)B_n - B_m C_n$ sayısı b_{2m} -alt balans sayısı olmak üzere,

$$B_n = \frac{(B_{m-1} + 5B_m)y + B_m \sqrt{8y^2 + 8b_{2m} + 1}}{8b_{2m} + 1} \quad (n \geq 0)$$

$$C_n = \frac{(B_{m-1} + 5B_m)\sqrt{8y^2 + 8b_{2m} + 1} + 8yB_m}{8b_{2m} + 1} \quad (n \geq 0)$$

dir [14].

Teorem 2.3.8 m pozitif tam sayı ve $y = (B_{m+1} + 5B_m)B_n + B_m C_n$ sayısı b_{2m+1} -alt balans sayısı olmak üzere,

$$B_n = \frac{(B_{m+1} + 5B_m)y - B_m \sqrt{8y^2 + 8b_{2m+1} + 1}}{8b_{2m+1} + 1} \quad (n \geq 0)$$

$$C_n = \frac{(B_{m+1} + 5B_m)\sqrt{8y^2 + 8b_{2m+1} + 1} - 8yB_m}{8b_{2m+1} + 1} \quad (n \geq 0)$$

dir [14].

Teorem 2.3.9 m pozitif tam sayı ve $y = (B_{m+1} + 5B_m)B_n - B_m C_n$ sayısı b_{2m+1} -alt balans sayısı olmak üzere,

$$B_n = \frac{(B_{m+1} + 5B_m)y + B_m \sqrt{8y^2 + 8b_{2m+1} + 1}}{8b_{2m+1} + 1} \quad (n \geq 1)$$

$$C_n = \frac{(B_{m+1} + 5B_m)\sqrt{8y^2 + 8b_{2m+1} + 1} + 8yB_m}{8b_{2m+1} + 1} \quad (n \geq 1)$$

dir [14].

Davala ve Panda [14], Tanım 2.3.1 de $D = b_3 = 14$ alıp b_3 -alt balans sayıları için aşağıdaki tanımı vermişlerdir ve Sonuç 2.3.2 ile Sonuç 2.3.3 te D pozitif tam sayısı yerine 14 yazarak aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir.

Tanım 2.3.2 n ve r pozitif tam sayılar olmak üzere,

$$1 + 2 + \cdots + (n - 1) + 14 = (n + 1) + (n + 2) + \cdots (n + r) \quad (2.24)$$

eşitliğini sağlayan n sayısına b_3 -alt balans sayısı, r sayısına ise n sayısının b_3 -alt dengeleyicisi (balansır) denir [14].

Sonuç 2.3.4 n , b_3 -alt balans sayısı olmak üzere, n sayısının b_3 -alt dengeleyicisi

$$r = \frac{-(2n + 1) + \sqrt{8n^2 + 113}}{2} \quad (2.25)$$

dir [14].

Sonuç 2.3.5 n pozitif tam sayısının b_3 -alt balans sayısı olması için gerek ve yeter koşul $8n^2 + 113$ sayısının tam kare olmasıdır [14].

Örnek 2.3.1 1, 8 birer b_3 -alt balans sayısıdır ve bu sayıların ikisinin de b_3 -alt dengeleyicisi 4 sayısıdır.

3. MALZEME VE YÖNTEM

Bu tez çalışmasında, kaynaklar kısmında belirtilen kitap ve makalelerden faydalanılmıştır. Bulgular bölümündeki ispatlarda, Ray [7] ın çalışmasında kullanılan tekniklerden faydalanılmış, Davala ve Panda [14] nın çalışmalarındaki teoremler ışığında b_3 -alt balans ve b_3 -Lucas alt balans sayıları için geçerli olan ve literatürde olmayan özgün teoremler elde edilmiştir.



4. BULGULAR

Bu bölümde, b_3 -alt balans sayıları ile ilgili elde edilen teorem ve sonuçlara yer verilmiştir. Tek ve çift indisli b_3 -alt balans sayılarının, kendisinden önceki b_3 -alt balans sayıları kullanılarak elde edilebileceği gösterilmiştir. b_3 -alt balans sayılarını üreten fonksiyonlar elde edilmiştir. b_3 -alt balans sayıları kullanılarak b_3 -Lucas alt balans sayıları tanımlanmıştır. b_3 -alt balans sayılarına benzer şekilde, tek ve çift indisli b_3 -Lucas alt balans sayılarının da kendisinden önceki b_3 -Lucas alt balans sayıları kullanılarak elde edilebileceği gösterilmiştir. Ayrıca, b_3 -Lucas alt balans sayıları ile b_3 -alt balans sayıları arasında birtakım cebirsel bağıntılar elde edilmiştir.

Tezin bu kısmında, m . b_3 -alt balans sayısı, $(Sb_3)_m$ ile m . b_3 -Lucas alt balans sayısı ise $(CSb_3)_m$ ile gösterilmiştir.

Teorem 2.3.2 den faydalanarak, b_3 -alt balans sayılarının çift ve tek indisli terimleri,

$$(Sb_3)_{2m} = 11B_m + C_m \quad (m \geq 0)$$

$$(Sb_3)_{2m+1} = 11B_{m+1} - C_{m+1} \quad (m \geq 0)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Teorem 2.3.3 ten faydalanıp, başlangıç değerleri verilerek b_3 -alt balans sayılarının çift ve tek indisli terimleri sırasıyla,

$(Sb_3)_0 = 1$, $(Sb_3)_2 = 14$ olmak üzere,

$$(Sb_3)_{2m} = 6(Sb_3)_{2m-2} - (Sb_3)_{2m-4} \quad (m \geq 2)$$

$(Sb_3)_1 = 8$, $(Sb_3)_3 = 49$ olmak üzere,

$$(Sb_3)_{2m+1} = 6(Sb_3)_{2m-1} - (Sb_3)_{2m-3} \quad (m \geq 2)$$

şeklinde ifade edilebilir.

4.1. b_3 -ALT BALANS SAYILARI

Bu alt bölümde, b_3 -alt balans sayıları ile ilgili elde edilen özgün teoremlere ve sonuçlara yer verilmiştir.

4.1.1. b_3 -Alt Balans Sayıları ile İlgili Cebirsel Özdeşlikler

Bu kısımda, b_3 -alt balans sayıları ile balans ve Lucas-balans sayıları arasındaki birtakım cebirsel özdeşliklere yer verilmiştir.

Teorem 4.1.1.1 $m \geq 0$ tam sayı olmak üzere,

$$(Sb_3)_{2m+1} = 8(Sb_3)_{2m} - 63B_m$$

dir.

İspat. (2.13) eşitliğinden,

$$C_{m+1} = 3B_{m+1} - B_m$$

dir. Bu eşitlik, $(Sb_3)_{2m+1} = 11B_{m+1} - C_{m+1}$ eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} (Sb_3)_{2m+1} &= 11B_{m+1} - (3B_{m+1} - B_m) \\ &= 8B_{m+1} + B_m \end{aligned} \tag{4.1}$$

elde edilir.

Benzer şekilde (2.14) eşitliğinden,

$$C_m = B_{m+1} - 3B_m$$

dir. Bu eşitlik, $(Sb_3)_{2m} = 11B_m + C_m$ eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} (Sb_3)_{2m} &= 11B_m + (B_{m+1} - 3B_m) \\ &= 8B_m + B_{m+1} \end{aligned} \tag{4.2}$$

elde edilir. (4.1) ve (4.2) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned}
8(Sb_3)_{2m} - (Sb_3)_{2m+1} &= 64B_m + 8B_{m+1} - 8B_{m+1} - B_m \\
&= 63B_m
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$(Sb_3)_{2m+1} = 8(Sb_3)_{2m} - 63B_m \quad (4.3)$$

elde edilir.

Not 4.1.1.1 b_3 -alt balans sayılarının çift ve tek indisli terimlerinin sadece balans sayılarına bağlı olarak yazılabileceği (4.1) ve (4.2) eşitlikleri ile görülmektedir.

Teorem 4.1.1.2 m pozitif tam sayı olmak üzere,

$$(Sb_3)_{2m} = 22B_m - (Sb_3)_{2m-1}$$

dir.

İspat. (4.1) eşitliğinden,

$$(Sb_3)_{2m-1} = 8B_m + B_{m-1} \quad (4.4)$$

dir. (2.6) eşitliği, (4.2) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
(Sb_3)_{2m} &= 8B_m + (6B_m - B_{m-1}) \\
&= 14B_m - B_{m-1}
\end{aligned} \quad (4.5)$$

elde edilir. (4.4) ve (4.5) eşitlikleri toplanırsa,

$$(Sb_3)_{2m} + (Sb_3)_{2m-1} = 22B_m$$

bulunur. Buradan,

$$(Sb_3)_{2m} = 22B_m - (Sb_3)_{2m-1}$$

elde edilir.

Sonuç 4.1.1.1 Herhangi bir çift indisli b_3 -alt balans sayısının kendisinden bir önceki b_3 -alt balans sayısı ile toplamı daima çifttir. Benzer şekilde, herhangi bir tek indisli b_3 -alt balans sayısının kendisinden bir sonraki b_3 -alt balans sayısı ile toplamı daima çifttir.

Teorem 4.1.1.3 m pozitif tam sayı olmak üzere,

$$22(Sb_3)_{2m+1} = 113(Sb_3)_{2m} - 63(Sb_3)_{2m-1}$$

dir.

İspat. (4.3) eşitliği ve Teorem 4.1.1.2 kullanılarak,

$$\begin{aligned} 22(Sb_3)_{2m+1} + 63(Sb_3)_{2m-1} &= 176(Sb_3)_{2m} - 1386B_m + 1386B_m - 63(Sb_3)_{2m} \\ &= 113(Sb_3)_{2m} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$22(Sb_3)_{2m+1} = 113(Sb_3)_{2m} - 63(Sb_3)_{2m-1}$$

eşitliği gösterilmiş olur.

Teorem 4.1.1.4 m pozitif tam sayı olmak üzere,

$$4(Sb_3)_{2m} = 7(Sb_3)_{2m-1} - 11B_{m-1}$$

dir.

İspat. (4.4) ve (4.5) eşitliğinden,

$$7(Sb_3)_{2m-1} = 56B_m + 7B_{m-1}$$

$$4(Sb_3)_{2m} = 56B_m - 4B_{m-1}$$

dir. Buradan,

$$4(Sb_3)_{2m} - 7(Sb_3)_{2m-1} = -11B_{m-1}$$

elde edilir.

Böylece,

$$4(Sb_3)_{2m} = 7(Sb_3)_{2m-1} - 11B_{m-1}$$

eşitliği gösterilmiş olur.

Teorem 4.1.1.5 m pozitif tam sayı olmak üzere,

$$63(Sb_3)_{2m} = 113(Sb_3)_{2m-1} - 22(Sb_3)_{2m-2}$$

dir.

İspat. (4.3) eşitliğinden,

$$8(Sb_3)_{2m-2} = (Sb_3)_{2m-1} + 63B_{m-1} \quad (4.6)$$

dir. Teorem 4.1.1.4 ve (4.6) eşitlikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} 252(Sb_3)_{2m} + 88(Sb_3)_{2m-2} &= 441(Sb_3)_{2m-1} - 693B_{m-1} + 11(Sb_3)_{2m-1} \\ &\quad + 693B_{m-1} \\ &= 452(Sb_3)_{2m-1} \end{aligned} \quad (4.7)$$

elde edilir. (4.7) eşitliğinin her tarafı 4 ile bölünürse,

$$63(Sb_3)_{2m} + 22(Sb_3)_{2m-2} = 113(Sb_3)_{2m-1}$$

bulunur. Böylece,

$$63(Sb_3)_{2m} = 113(Sb_3)_{2m-1} - 22(Sb_3)_{2m-2}$$

eşitliği gösterilmiş olur.

Teorem 4.1.1.6 $m \geq 0$ tam sayı olmak üzere,

$$11(Sb_3)_{2m+1} = 25(Sb_3)_{2m} + 63C_m$$

dir.

İspat. (2.11) ve (2.14) eşitlikleri, $(Sb_3)_{2m+1} = 11B_{m+1} - C_{m+1}$ eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
 (Sb_3)_{2m+1} &= 11(3B_m + C_m) - (3C_m + 8B_m) \\
 &= 33B_m + 11C_m - 3C_m - 8B_m \\
 &= 25B_m + 8C_m
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

elde edilir. $(Sb_3)_{2m} = 11B_m + C_m$ eşitliği ve (4.8) eşitlikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned}
 11(Sb_3)_{2m+1} - 25(Sb_3)_{2m} &= 275B_m + 88C_m - 275B_m - 25C_m \\
 &= 63C_m
 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece,

$$11(Sb_3)_{2m+1} = 25(Sb_3)_{2m} + 63C_m$$

eşitliği gösterilmiş olur.

Teorem 4.1.1.7 m pozitif tam sayı olmak üzere,

$$(Sb_3)_{2m} = (Sb_3)_{2m-1} + 22C_m$$

dir.

İspat. $(Sb_3)_{2m+1} = 11B_{m+1} - C_{m+1}$ eşitliğinden,

$$(Sb_3)_{2m-1} = 11B_m - C_m \tag{4.9}$$

dir. $(Sb_3)_{2m} = 11B_m + C_m$ eşitliğinden (4.9) eşitliği çıkarılırsa,

$$\begin{aligned}
 (Sb_3)_{2m} - (Sb_3)_{2m-1} &= 11B_m + C_m - (11B_m - C_m) \\
 &= 2C_m
 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$(Sb_3)_{2m} = (Sb_3)_{2m-1} + 2C_m$$

eşitliği gösterilmiş olur.

Not 4.1.1.2 Teorem 4.1.1.1 ve Teorem 4.1.1.2 de b_3 -alt balans sayılarının herhangi bir terimi ile bu terimden bir önceki terim arasındaki cebirsel bağıntı, balans sayıları kullanılarak gösterilmiştir. Teorem 4.1.1.6 ve Teorem 4.1.1.7 de ise bu cebirsel bağıntı, Lucas-balans sayıları kullanılarak ifade edilmiştir.

Teorem 4.1.1.8 $(Sb_3)_m$, m . b_3 -alt balans sayısı olmak üzere,

$$(Sb_3)_m^2 = (Sb_3)_{m-2}(Sb_3)_{m+2} + 113 \quad (m \geq 2)$$

tür.

İspat. İspatı tümevarımla yapalım. $m = 2$ için iddianın doğru olduğu

$$(Sb_3)_2^2 = (Sb_3)_0(Sb_3)_4 + 113 = 196$$

eşitliğinden görülür. $m \leq k$ için iddianın doğru olduğunu kabul edip $m = k + 1$ için iddianın doğru olduğunu, yani $(Sb_3)_{k+1}^2 = (Sb_3)_{k-1}(Sb_3)_{k+3} + 113$ olduğunu gösterelim.

$$(Sb_3)_{k+1}^2 = (Sb_3)_{k+1}(Sb_3)_{k+1}$$

olup Teorem 2.3.3 kullanılarak,

$$\begin{aligned} (Sb_3)_{k+1}^2 &= (6(Sb_3)_{k-1} - (Sb_3)_{k-3})(Sb_3)_{k+1} \\ &= 6(Sb_3)_{k-1}(Sb_3)_{k+1} - (Sb_3)_{k-3}(Sb_3)_{k+1} \end{aligned}$$

elde edilir. İddianın $m \leq k$ için doğru olduğu kabul edildiğinden,

$$(Sb_3)_{k+1}^2 = 6(Sb_3)_{k-1}(Sb_3)_{k+1} - (Sb_3)_{k-1}^2 + 113$$

bulunur. Teorem 2.3.3 ten,

$$\begin{aligned} &= (Sb_3)_{k-1}(6(Sb_3)_{k+1} - (Sb_3)_{k-1}) + 113 \\ &= (Sb_3)_{k-1}(Sb_3)_{k+3} + 113 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $m = k + 1$ için de iddianın doğru olduğu gösterilmiş olur.

Teorem 4.1.1.9 m pozitif tam sayı olmak üzere,

$$(Sb_3)_{m+2} (Sb_3)_{m+1} - (Sb_3)_m (Sb_3)_{m-1} = 113B_{m+1}$$

dir.

İspat. İspatı tümevarımla yapalım. $m = 1$ için iddianın doğru olduğu

$$(Sb_3)_3 (Sb_3)_2 - (Sb_3)_1 (Sb_3)_0 = 113B_2 = 678$$

eşitliğinden görülür. $m \leq k$ için iddianın doğru olduğunu kabul edip $m = k + 1$ için iddianın doğru olduğunu, yani $(Sb_3)_{k+3} (Sb_3)_{k+2} - (Sb_3)_{k+1} (Sb_3)_k = 113B_{k+2}$ olduğunu gösterelim.

Teorem 2.3.3 kullanılarak,

$$\begin{aligned} (Sb_3)_{k+3} (Sb_3)_{k+2} - (Sb_3)_{k+1} (Sb_3)_k &= (6(Sb_3)_{k+1} - (Sb_3)_{k-1})(Sb_3)_{k+2} \\ &\quad - (Sb_3)_{k+1} (Sb_3)_k \\ &= 6(Sb_3)_{k+2} (Sb_3)_{k+1} - (Sb_3)_{k+2} (Sb_3)_{k-1} \\ &\quad - (Sb_3)_{k+1} (Sb_3)_k \\ &= 6(Sb_3)_{k+2} (Sb_3)_{k+1} - 6(Sb_3)_k (Sb_3)_{k-1} \\ &\quad + (Sb_3)_{k-1} (Sb_3)_{k-2} - (Sb_3)_{k+1} (Sb_3)_k \\ &= 6((Sb_3)_{k+2} (Sb_3)_{k+1} - (Sb_3)_k (Sb_3)_{k-1}) \\ &\quad - ((Sb_3)_{k+1} (Sb_3)_k - (Sb_3)_{k-1} (Sb_3)_{k-2}) \end{aligned}$$

elde edilir. İddianın $m \leq k$ için doğru olduğu kabul edildiğinden,

$$\begin{aligned} (Sb_3)_{k+3} (Sb_3)_{k+2} - (Sb_3)_{k+1} (Sb_3)_k &= 6(113B_{k+1}) - 113B_k \\ &= 113B_{k+2} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece, $m = k + 1$ için de iddianın doğru olduğu gösterilmiş olur.

4.1.2. b_3 -Alt Balans Sayılarını Üreten Fonksiyonlar

Bu kısımda, b_3 -alt balans sayılarını yine bir b_3 -alt balans sayısına dönüştüren fonksiyonlara yer verilmiştir. $(Sb_3)_{2m} = 11B_m + C_m$, $(Sb_3)_{2m+1} = 11B_{m+1} - C_{m+1}$ eşitlikleri ve Teorem 2.3.8 ile Teorem 2.3.9 kullanılarak, b_3 -alt balans sayıları ve balans sayıları için,

$$B_m = \frac{11(Sb_3)_{2m} - \sqrt{8(Sb_3)_{2m}^2 + 113}}{113} \quad (m \geq 0)$$

$$B_m = \frac{11(Sb_3)_{2m-1} + \sqrt{8(Sb_3)_{2m-1}^2 + 113}}{113} \quad (m \geq 1)$$

tür. Bu eşitlikler, aşağıda verilen teoremlerin ispatlarında kullanılacaktır.

Teorem 4.1.2.1 x herhangi bir çift indisli b_3 -alt balans sayısı olmak üzere, x ten önce ve sonra gelen b_3 -alt balans sayıları sırasıyla,

$$g(x) = \frac{129x - 22\sqrt{8x^2 + 113}}{113} \quad \text{ve} \quad \tilde{g}(x) = \frac{211x + 63\sqrt{8x^2 + 113}}{113}$$

fonksiyonlarının x te aldığı değerlerdir.

İspat. x herhangi bir çift indisli b_3 -alt balans sayısı olsun. O halde $x = (Sb_3)_{2m}$ olacak şekilde m pozitif tam sayısı vardır.

Teorem 4.1.1.2 ve $B_m = \frac{11(Sb_3)_{2m} - \sqrt{8(Sb_3)_{2m}^2 + 113}}{113}$ eşitliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} (Sb_3)_{2m-1} &= 22 \left(\frac{11(Sb_3)_{2m} - \sqrt{8(Sb_3)_{2m}^2 + 113}}{113} \right) - (Sb_3)_{2m} \\ &= \frac{242(Sb_3)_{2m} - 113(Sb_3)_{2m} - 22\sqrt{8(Sb_3)_{2m}^2 + 113}}{113} \\ &= \frac{129(Sb_3)_{2m} - 22\sqrt{8(Sb_3)_{2m}^2 + 113}}{113} \end{aligned}$$

olur ve $g((Sb_3)_{2m}) = (Sb_3)_{2m-1}$ bulunur.

Benzer şekilde, x herhangi bir çift indisli b_3 -alt balans sayısı olsun. O halde $x = (Sb_3)_{2m}$ olacak şekilde $m \geq 0$ tam sayısı vardır.

Teorem 4.1.1.1 ve $B_m = \frac{11(Sb_3)_{2m} - \sqrt{8(Sb_3)_{2m}^2 + 113}}{113}$ eşitliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} (Sb_3)_{2m+1} &= 8(Sb_3)_{2m} - 63 \left(\frac{11(Sb_3)_{2m} - \sqrt{8(Sb_3)_{2m}^2 + 113}}{113} \right) \\ &= \frac{904(Sb_3)_{2m} - 693(Sb_3)_{2m} + 63\sqrt{8(Sb_3)_{2m}^2 + 113}}{113} \\ &= \frac{211(Sb_3)_{2m} + 63\sqrt{8(Sb_3)_{2m}^2 + 113}}{113} \end{aligned}$$

olur ve $\tilde{g}((Sb_3)_{2m}) = (Sb_3)_{2m+1}$ bulunur. Böylece, ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.2.2 x herhangi bir tek indisli b_3 -alt balans sayısı olmak üzere, x ten önce ve sonra gelen b_3 -alt balans sayıları sırasıyla,

$$g(x) = \frac{211x - 63\sqrt{8x^2 + 113}}{113} \quad \text{ve} \quad \tilde{g}(x) = \frac{129x + 22\sqrt{8x^2 + 113}}{113}$$

fonksiyonlarının x te aldığı değerlerdir.

İspat. x herhangi bir tek indisli b_3 -alt balans sayısı olsun. O halde $x = (Sb_3)_{2m+1}$ olacak şekilde $m \geq 0$ tam sayısı vardır.

(4.1) eşitliğinden,

$$B_m = (Sb_3)_{2m+1} - 8B_{m+1}$$

dir. $B_{m+1} = \frac{11(Sb_3)_{2m+1} + \sqrt{8(Sb_3)_{2m+1}^2 + 113}}{113}$ eşitliği kullanılarak,

$$B_m = (Sb_3)_{2m+1} - 8 \left(\frac{11(Sb_3)_{2m+1} + \sqrt{8(Sb_3)_{2m+1}^2 + 113}}{113} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{113(Sb_3)_{2m+1} - 88(Sb_3)_{2m+1} - 8\sqrt{8(Sb_3)_{2m+1}^2 + 113}}{113} \\
&= \frac{25(Sb_3)_{2m+1} - 8\sqrt{8(Sb_3)_{2m+1}^2 + 113}}{113}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik ve $B_{m+1} = \frac{11(Sb_3)_{2m+1} + \sqrt{8(Sb_3)_{2m+1}^2 + 113}}{113}$ eşitliği kullanılarak (4.2) eşitliği düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
(Sb_3)_{2m} &= 8 \left(\frac{25(Sb_3)_{2m+1} - 8\sqrt{8(Sb_3)_{2m+1}^2 + 113}}{113} \right) \\
&\quad + \left(\frac{11(Sb_3)_{2m+1} + \sqrt{8(Sb_3)_{2m+1}^2 + 113}}{113} \right) \\
&= \frac{200(Sb_3)_{2m+1} - 64\sqrt{8(Sb_3)_{2m+1}^2 + 113}}{113} \\
&\quad + \frac{11(Sb_3)_{2m+1} + \sqrt{8(Sb_3)_{2m+1}^2 + 113}}{113} \\
&= \frac{211(Sb_3)_{2m+1} - 63\sqrt{8(Sb_3)_{2m+1}^2 + 113}}{113}
\end{aligned}$$

olur ve $g((Sb_3)_{2m+1}) = (Sb_3)_{2m}$ bulunur.

Teorem 4.1.1.2 den,

$$(Sb_3)_{2m+2} = 22B_{m+1} - (Sb_3)_{2m+1}$$

dir. $B_{m+1} = \frac{11(Sb_3)_{2m+1} + \sqrt{8(Sb_3)_{2m+1}^2 + 113}}{113}$ eşitliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
(Sb_3)_{2m+2} &= 22 \left(\frac{11(Sb_3)_{2m+1} + \sqrt{8(Sb_3)_{2m+1}^2 + 113}}{113} \right) - (Sb_3)_{2m+1} \\
&= \frac{242(Sb_3)_{2m+1} - 113(Sb_3)_{2m+1} + 22\sqrt{8(Sb_3)_{2m+1}^2 + 113}}{113}
\end{aligned}$$

$$= \frac{129(Sb_3)_{2m+1} + 22\sqrt{8(Sb_3)_{2m+1}^2 + 113}}{113}$$

olur ve $\tilde{g}((Sb_3)_{2m+1}) = (Sb_3)_{2m+2}$ bulunur. Böylece, ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.2.3 x herhangi bir b_3 -alt balans sayısı olmak üzere,

$$(i) \ f(x) = 3x + \sqrt{8x^2 + 113}$$

$$(ii) \ g(x) = 17x + 6\sqrt{8x^2 + 113}$$

birer b_3 -alt balans sayısıdır.

$$\begin{aligned} \text{İspat. (i)} \quad 8(f(x))^2 + 113 &= 8(3x + \sqrt{8x^2 + 113})^2 + 113 \\ &= 8(17x^2 + 6x\sqrt{8x^2 + 113} + 113) + 113 \\ &= 136x^2 + 48x\sqrt{8x^2 + 113} + 1017 \\ &= (8x + 3\sqrt{8x^2 + 113})^2 \end{aligned} \tag{4.10}$$

bulunur. $8(f(x))^2 + 113$ sayısı bir tam kare sayı olduğundan Sonuç 2.3.5 gereğince $f(x)$ bir b_3 -alt balans sayısıdır. Böylece, ispat tamamlanır.

$$(ii) \ g(x) = 17x + 6\sqrt{8x^2 + 113}$$

$$= 3(3x + \sqrt{8x^2 + 113}) + 8x + 3\sqrt{8x^2 + 113}$$

dir. (4.10) eşitliği kullanılarak,

$$g(x) = 3(3x + \sqrt{8x^2 + 113}) + \sqrt{8(f(x))^2 + 113}$$

elde edilir. (i) şikkından,

$$= 3f(x) + \sqrt{8(f(x))^2 + 113}$$

$$= f(f(x))$$

bulunur. Böylece, $f(x)$ bir b_3 -alt balans sayısı ve b_3 -alt balans sayılarının f fonksiyonu altındaki görüntüsü de bir b_3 -alt balans sayısı olduğundan $g(x) = 17x + 6\sqrt{8x^2 + 113}$ sayısı bir b_3 -alt balans sayısı olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.2.4 $(Sb_3)_m$, m . b_3 -alt balans sayısı ve $f(x) = 3x + \sqrt{8x^2 + 113}$ olmak üzere,

$$f((Sb_3)_m) = (Sb_3)_{m+2} \quad (m \geq 0)$$

dir.

İspat. x bir b_3 -alt balans sayısı olsun. O halde, $x = (Sb_3)_m$ olacak şekilde $m \geq 0$ tam sayısı vardır.

Teorem 2.3.3 ten,

$$\begin{aligned} (Sb_3)_{m+2} &= 6(Sb_3)_m - (Sb_3)_{m-2} \\ &= 3(Sb_3)_m + (3(Sb_3)_m - (Sb_3)_{m-2}) \end{aligned} \quad (4.11)$$

elde edilir. (4.11) eşitliğinde parantez içindeki ifadenin karesi alınırsa,

$$(3(Sb_3)_m - (Sb_3)_{m-2})^2 = 9(Sb_3)_m^2 - 6(Sb_3)_m(Sb_3)_{m-2} + (Sb_3)_{m-2}^2$$

olur. Teorem 2.3.3 kullanılarak,

$$\begin{aligned} (3(Sb_3)_m - (Sb_3)_{m-2})^2 &= 9(Sb_3)_m^2 + (Sb_3)_{m-2}^2 - ((Sb_3)_{m+2} + (Sb_3)_{m-2})(Sb_3)_{m-2} \\ &= 9(Sb_3)_m^2 + (Sb_3)_{m-2}^2 - (Sb_3)_{m+2}(Sb_3)_{m-2} - (Sb_3)_{m-2}^2 \\ &= 9(Sb_3)_m^2 - (Sb_3)_{m+2}(Sb_3)_{m-2} \end{aligned}$$

bulunur. Teorem 4.1.1.8 kullanılarak,

$$\begin{aligned} (3(Sb_3)_m - (Sb_3)_{m-2})^2 &= 9(Sb_3)_m^2 - (Sb_3)_m^2 + 113 \\ &= 8(Sb_3)_m^2 + 113 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$3(Sb_3)_m - (Sb_3)_{m-2} = \sqrt{8(Sb_3)_m^2 + 113} \quad (4.12)$$

elde edilir. (4.12) eşitliği, (4.11) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$(Sb_3)_{m+2} = 3(Sb_3)_m + \sqrt{8(Sb_3)_m^2 + 113} \quad (4.13)$$

olur ve $f((Sb_3)_m) = (Sb_3)_{m+2}$ bulunur.

Teorem 4.1.2.5 $(Sb_3)_m$, m . b_3 -alt balans sayısı ve $\tilde{f}(x) = 3x - \sqrt{8x^2 + 113}$ olmak üzere,

$$\tilde{f}((Sb_3)_m) = (Sb_3)_{m-2} \quad (m \geq 2)$$

dir.

İspat. x bir b_3 -alt balans sayısı olsun. O halde, $x = (Sb_3)_m$ olacak şekilde $m \geq 2$ tam sayısı vardır.

(4.12) eşitliğinden,

$$(Sb_3)_{m-2} = 3(Sb_3)_m - \sqrt{8(Sb_3)_m^2 + 113} \quad (4.14)$$

tür. Buradan,

$$\tilde{f}((Sb_3)_m) = (Sb_3)_{m-2}$$

bulunur. Böylece, ispat tamamlanır.

4.2. b_3 -LUCAS ALT BALANS SAYILARI

Bu alt bölümde, b_3 -Lucas alt balans sayıları ile ilgili elde edilen tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

4.2.1. b_3 -Lucas Alt Balans Sayıları ile İlgili Cebirsel Özdeşlikler

Bu kısımda, b_3 -Lucas alt balans sayılarının tanımı verilir ve bu sayılar ile balans ve Lucas-balans sayıları arasındaki birtakım cebirsel özdeşliklere yer verilmiştir.

Tanım 4.2.1.1 $(Sb_3)_m$, m . b_3 -alt balans sayısı olmak üzere, bir tam kare olan $8(Sb_3)_m^2 + 113$ sayısının kareköküne m . b_3 -Lucas alt balans sayısı denir ve $(CSb_3)_m$ ile gösterilir. Böylece,

$$(CSb_3)_m = \sqrt{8(Sb_3)_m^2 + 113}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 4.2.1.1 $(Sb_3)_0 = 1$, $(Sb_3)_1 = 8$ alınırsa,

$$(CSb_3)_0 = \sqrt{8(Sb_3)_0^2 + 113} = 11 \text{ ve } (CSb_3)_1 = \sqrt{8(Sb_3)_1^2 + 113} = 25$$

elde edilir.

Sonuç 4.2.1.1 (4.13) ve (4.14) eşitliklerinde, $\sqrt{8(Sb_3)_m^2 + 113}$ yerine $(CSb_3)_m$ yazılırsa,

$$(CSb_3)_m = (Sb_3)_{m+2} - 3(Sb_3)_m \quad (m \geq 0)$$

$$(CSb_3)_m = 3(Sb_3)_m - (Sb_3)_{m-2} \quad (m \geq 2)$$

elde edilir.

Herhangi bir çift indisli b_3 -Lucas alt balans sayısı ile bu sayıdan önce gelen çift indisli b_3 -Lucas alt balans sayıları arasında cebirsel bir ilişki vardır. Benzer şekilde, herhangi bir tek indisli b_3 -Lucas alt balans sayısı ile bu sayıdan önce gelen tek indisli b_3 -Lucas alt balans sayıları arasında cebirsel bir ilişki vardır. Bu cebirsel ilişkilere dair özdeşlikler aşağıdaki iki teoremlerle ifade edilebilir.

Teorem 4.2.1.1 $(CSb_3)_m$, m . b_3 -Lucas alt balans sayısı ve $(CSb_3)_0 = 11$, $(CSb_3)_2 = 41$ olmak üzere,

$$(CSb_3)_{2m} = 6(CSb_3)_{2m-2} - (CSb_3)_{2m-4} \quad (m \geq 2)$$

dir.

İspat. Tanım 4.2.1.1 den,

$$(CSb_3)_{2m}^2 = 8(Sb_3)_{2m}^2 + 113$$

tür. (4.13) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} (CSb_3)_{2m}^2 &= 8 \left(3(Sb_3)_{2m-2} + \sqrt{8(Sb_3)_{2m-2}^2 + 113} \right)^2 + 113 \\ &= 136(Sb_3)_{2m-2}^2 + 48(Sb_3)_{2m-2} \sqrt{8(Sb_3)_{2m-2}^2 + 113} + 1017 \\ &= \left(3\sqrt{8(Sb_3)_{2m-2}^2 + 113} + 8(Sb_3)_{2m-2} \right)^2 \\ &= (3(CSb_3)_{2m-2} + 8(Sb_3)_{2m-2})^2 \end{aligned}$$

dir. Buradan,

$$(CSb_3)_{2m} = 3(CSb_3)_{2m-2} + 8(Sb_3)_{2m-2} \quad (4.15)$$

bulunur. Benzer şekilde Tanım 4.2.1.1 den,

$$(CSb_3)_{2m-4}^2 = 8(Sb_3)_{2m-4}^2 + 113$$

tür. (4.14) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} (CSb_3)_{2m-4}^2 &= 8 \left(3(Sb_3)_{2m-2} - \sqrt{8(Sb_3)_{2m-2}^2 + 113} \right)^2 + 113 \\ &= 136(Sb_3)_{2m-2}^2 - 48(Sb_3)_{2m-2} \sqrt{8(Sb_3)_{2m-2}^2 + 113} + 1017 \\ &= \left(3\sqrt{8(Sb_3)_{2m-2}^2 + 113} - 8(Sb_3)_{2m-2} \right)^2 \end{aligned}$$

$$= (3(CSb_3)_{2m-2} - 8(Sb_3)_{2m-2})^2$$

dir. Buradan,

$$(CSb_3)_{2m-4} = 3(CSb_3)_{2m-2} - 8(Sb_3)_{2m-2} \quad (4.16)$$

bulunur. (4.15) ve (4.16) eşitlikleri toplanırsa,

$$(CSb_3)_{2m} = 6(CSb_3)_{2m-2} - (CSb_3)_{2m-4}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.1.2 $(CSb_3)_m$, m . b_3 -Lucas alt balans sayısı ve $(CSb_3)_1 = 25$, $(CSb_3)_3 = 139$ olmak üzere,

$$(CSb_3)_{2m+1} = 6(CSb_3)_{2m-1} - (CSb_3)_{2m-3} \quad (m \geq 2)$$

dir.

İspat. Tanım 4.2.1.1 den,

$$(CSb_3)_{2m+1}^2 = 8(Sb_3)_{2m+1}^2 + 113$$

tür. (4.13) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} (CSb_3)_{2m+1}^2 &= 8 \left(3(Sb_3)_{2m-1} + \sqrt{8(Sb_3)_{2m-1}^2 + 113} \right)^2 + 113 \\ &= 136(Sb_3)_{2m-1}^2 + 48(Sb_3)_{2m-1} \sqrt{8(Sb_3)_{2m-1}^2 + 113} + 1017 \\ &= \left(3\sqrt{8(Sb_3)_{2m-1}^2 + 113} + 8(Sb_3)_{2m-1} \right)^2 \\ &= (3(CSb_3)_{2m-1} + 8(Sb_3)_{2m-1})^2 \end{aligned}$$

dir. Buradan,

$$(CSb_3)_{2m+1} = 3(CSb_3)_{2m-1} + 8(Sb_3)_{2m-1} \quad (4.17)$$

bulunur. Benzer şekilde Tanım 4.2.1.1 den,

$$(CSb_3)_{2m-3}^2 = 8(Sb_3)_{2m-3}^2 + 113$$

tür. (4.14) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} (CSb_3)_{2m-3}^2 &= 8 \left(3(Sb_3)_{2m-1} - \sqrt{8(Sb_3)_{2m-1}^2 + 113} \right)^2 + 113 \\ &= 136(Sb_3)_{2m-1}^2 - 48(Sb_3)_{2m-1} \sqrt{8(Sb_3)_{2m-1}^2 + 113} + 1017 \\ &= \left(3\sqrt{8(Sb_3)_{2m-1}^2 + 113} - 8(Sb_3)_{2m-1} \right)^2 \\ &= (3(CSb_3)_{2m-1} - 8(Sb_3)_{2m-1})^2 \end{aligned}$$

dir. Buradan,

$$(CSb_3)_{2m-3} = 3(CSb_3)_{2m-1} - 8(Sb_3)_{2m-1} \quad (4.18)$$

bulunur. (4.17) ve (4.18) eşitlikleri toplanırsa

$$(CSb_3)_{2m+1} = 6(CSb_3)_{2m-1} - (CSb_3)_{2m-3}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.1.3 $(CSb_3)_m$, m . b_3 -Lucas alt balans sayısı olmak üzere,

$$(i) \quad (CSb_3)_{2m} = 11C_m + 8B_m \quad (m \geq 0) \quad (4.19)$$

$$(ii) \quad (CSb_3)_{2m+1} = 11C_{m+1} - 8B_{m+1} \quad (m \geq 0) \quad (4.20)$$

dir.

İspat. (i) İspatı tümevarımla yapalım. $m = 0$ için iddianın doğru olduğu

$$(CSb_3)_0 = 11C_0 + 8B_0 = 11$$

eşitliğinden görülür. $m \leq k$ için iddianın doğru olduğunu kabul edip $m = k + 1$ için iddianın doğru olduğunu, yani $(CSb_3)_{2k+2} = 11C_{k+1} + 8B_{k+1}$ olduğunu gösterelim.

Teorem 4.2.1.1 den,

$$(CSb_3)_{2k+2} = 6 (CSb_3)_{2k} - (CSb_3)_{2k-2}$$

dir. İddianın $m \leq k$ için doğru olduğu kabul edildiğinden,

$$\begin{aligned} (CSb_3)_{2k+2} &= 6(11C_k + 8B_k) - (11C_{k-1} + 8B_{k-1}) \\ &= 11(6C_k - C_{k-1}) + 8(6B_k - B_{k-1}) \end{aligned}$$

elde edilir. (2.6) ve (2.10) eşitliklerinden,

$$(CSb_3)_{2k+2} = 11C_{k+1} + 8B_{k+1}$$

bulunur. Böylece, $m = k + 1$ için de iddianın doğru olduğu gösterilmiş olur.

(ii) İspatı tümevarımla yapalım. $m = 0$ için iddianın doğru olduğu

$$(CSb_3)_1 = 11C_1 - 8B_1 = 25$$

eşitliğinden görülür. $m \leq k$ için iddianın doğru olduğunu kabul edip $m = k + 1$ için iddianın doğru olduğunu, yani $(CSb_3)_{2k+3} = 11C_{k+2} - 8B_{k+2}$ olduğunu gösterelim.

Teorem 4.2.1.2 den,

$$(CSb_3)_{2k+3} = 6 (CSb_3)_{2k+1} - (CSb_3)_{2k-1}$$

dir. İddianın $m \leq k$ için doğru olduğu kabul edildiğinden,

$$\begin{aligned} (CSb_3)_{2k+3} &= 6(11C_{k+1} - 8B_{k+1}) - (11C_k - 8B_k) \\ &= 11(6C_{k+1} - C_k) - 8(6B_{k+1} - B_k) \end{aligned}$$

olur. (2.6) ve (2.10) eşitlikleri kullanılırsa,

$$(CSb_3)_{2k+3} = 11C_{k+2} - 8B_{k+2}$$

bulunur. Böylece, $m = k + 1$ için de iddianın doğru olduğu gösterilmiş olur.

Teorem 4.2.1.4 $(CSb_3)_m$, m . b_3 -Lucas alt balans sayısı olmak üzere,

$$(i) \quad (CSb_3)_{2m} = 8C_m + C_{m+1} \quad (m \geq 0) \quad (4.21)$$

$$(ii) \quad (CSb_3)_{2m+1} = C_m + 8C_{m+1} \quad (m \geq 0) \quad (4.22)$$

dir.

İspat. (i) (2.11) eşitliğinden,

$$8B_m = C_{m+1} - 3C_m$$

dir. Bu eşitlik, (4.19) eşitliğinde kullanılırsa,

$$\begin{aligned} (CSb_3)_{2m} &= 11C_m + (C_{m+1} - 3C_m) \\ &= 8C_m + C_{m+1} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, ispat tamamlanır.

(ii) (2.12) eşitliğinden,

$$8B_{m+1} = 3C_{m+1} - C_m$$

dir. Bu eşitlik, (4.20) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} (CSb_3)_{2m+1} &= 11C_{m+1} - (3C_{m+1} - C_m) \\ &= C_m + 8C_{m+1} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, ispat tamamlanır.

Not 4.2.1.1 b_3 -Lucas alt balans sayılarının tek ve çift indisli terimleri, (4.19) ve (4.20) eşitliklerinde balans ve Lucas-balans sayılarına bağlı olarak gösterilmiştir. (4.21) ve (4.22) eşitliklerinde ise bu terimler sadece Lucas-balans sayılarına bağlı olarak ifade edilmiştir.

Teorem 4.2.1.5 $m \geq 0$ tam sayı olmak üzere,

$$(CSb_3)_{2m+1} = 8(CSb_3)_{2m} - 63C_m$$

dir.

İspat. (4.21) ve (4.22) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} 8(CSb_3)_{2m} - (CSb_3)_{2m+1} &= 64C_m + 8C_{m+1} - C_m - 8C_{m+1} \\ &= 63C_m \end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$(CSb_3)_{2m+1} = 8(CSb_3)_{2m} - 63C_m \quad (4.23)$$

elde edilir.

Teorem 4.2.1.6 m pozitif tam sayı olmak üzere,

$$(CSb_3)_{2m} = 22C_m - (CSb_3)_{2m-1}$$

dir.

İspat. (4.22) eşitliğinden,

$$(CSb_3)_{2m-1} = 8C_m + C_{m-1} \quad (4.24)$$

dir. (2.10) eşitliği, (4.21) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} (CSb_3)_{2m} &= 8C_m + (6C_m - C_{m-1}) \\ &= 14C_m - C_{m-1} \end{aligned} \quad (4.25)$$

elde edilir. (4.24) ve (4.25) eşitlikleri toplanırsa,

$$(CSb_3)_{2m} + (CSb_3)_{2m-1} = 22C_m$$

bulunur. Buradan,

$$(CSb_3)_{2m} = 22C_m - (CSb_3)_{2m-1}$$

elde edilir.

Sonuç 4.2.1.2 Herhangi bir çift indisli b_3 -Lucas alt balans sayısının kendisinden bir önceki b_3 -Lucas alt balans sayısı ile toplamı daima çifttir. Benzer şekilde, herhangi bir tek indisli b_3 -Lucas alt balans sayısının kendisinden bir sonraki b_3 -Lucas alt balans sayısı ile toplamı daima çifttir.

Teorem 4.2.1.7 m pozitif tam sayı olmak üzere,

$$22(CSb_3)_{2m+1} = 113(CSb_3)_{2m} - 63(CSb_3)_{2m-1}$$

dir.

İspat. Teorem 4.2.1.6 ve (4.23) eşitlikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} 22(CSb_3)_{2m+1} + 63(CSb_3)_{2m-1} &= 176(CSb_3)_{2m} - 1386C_m \\ &\quad + 1386C_m - 63(CSb_3)_{2m} \\ &= 113(CSb_3)_{2m} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$22(CSb_3)_{2m+1} = 113(CSb_3)_{2m} - 63(CSb_3)_{2m-1}$$

eşitliği gösterilmiş olur.

Teorem 4.2.1.8 m pozitif tam sayı olmak üzere,

$$4(CSb_3)_{2m} = 7(CSb_3)_{2m-1} - 11C_{m-1}$$

dir.

İspat. (4.24) ve (4.25) eşitliklerinden,

$$7(CSb_3)_{2m-1} = 56C_m + 7C_{m-1}$$

$$4(CSb_3)_{2m} = 56C_m - 4C_{m-1}$$

dir. Buradan,

$$\begin{aligned}
4(CSb_3)_{2m} - 7(CSb_3)_{2m-1} &= 56C_m - 4C_{m-1} - 56C_m - 7C_{m-1} \\
&= -11C_{m-1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$4(CSb_3)_{2m} = 7(CSb_3)_{2m-1} - 11C_{m-1} \quad (4.26)$$

eşitliği gösterilmiş olur.

Teorem 4.2.1.9 m pozitif tam sayı olmak üzere,

$$63(CSb_3)_{2m} = 113(CSb_3)_{2m-1} - 22(CSb_3)_{2m-2}$$

dir.

İspat. (4.23) eşitliğinden,

$$8(CSb_3)_{2m-2} = (CSb_3)_{2m-1} + 63C_{m-1} \quad (4.27)$$

dir.(4.26) ve (4.27) eşitlikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned}
252(CSb_3)_{2m} + 88(CSb_3)_{2m-2} &= 441(CSb_3)_{2m-1} - 693C_{m-1} + 11(CSb_3)_{2m-1} \\
&\quad + 693C_{m-1} \\
&= 452(CSb_3)_{2m-1}
\end{aligned} \quad (4.28)$$

elde edilir. (4.28) eşitliğinin her tarafı 4 ile bölünürse,

$$63(CSb_3)_{2m} + 22(CSb_3)_{2m-2} = 113(CSb_3)_{2m-1}$$

bulunur. Böylece,

$$63(CSb_3)_{2m} = 113(CSb_3)_{2m-1} - 22(CSb_3)_{2m-2}$$

eşitliği gösterilmiş olur.

4.2.2. b_3 -Lucas Alt Balans Sayılarının b_3 -Alt Balans Sayıları ile İlişkisi

Bu kısımda, b_3 -Lucas alt balans sayıları ile b_3 -alt balans sayıları arasındaki bazı özdeşliklere yer verilmiştir.

Teorem 4.2.2.1 m pozitif tam sayı olmak üzere,

$$(CSb_3)_m(Sb_3)_{m-1} + (CSb_3)_{m-1}(Sb_3)_m = 113B_m$$

dir.

İspat. Sonuç 4.2.1.1 den,

$$(CSb_3)_{m-1} = (Sb_3)_{m+1} - 3(Sb_3)_{m-1} \quad (4.29)$$

$$(CSb_3)_m = 3(Sb_3)_m - (Sb_3)_{m-2} \quad (4.30)$$

dir. (4.29) ve (4.30) eşitlikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} (CSb_3)_m(Sb_3)_{m-1} + (CSb_3)_{m-1}(Sb_3)_m &= (3(Sb_3)_m - (Sb_3)_{m-2})(Sb_3)_{m-1} \\ &\quad + ((Sb_3)_{m+1} - 3(Sb_3)_{m-1})(Sb_3)_m \\ &= 3(Sb_3)_m(Sb_3)_{m-1} - (Sb_3)_{m-1}(Sb_3)_{m-2} \\ &\quad + (Sb_3)_{m+1}(Sb_3)_m - 3(Sb_3)_m(Sb_3)_{m-1} \\ &= (Sb_3)_{m+1}(Sb_3)_m - (Sb_3)_{m-1}(Sb_3)_{m-2} \end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 4.1.1.9 dan,

$$(CSb_3)_m(Sb_3)_{m-1} + (CSb_3)_{m-1}(Sb_3)_m = 113B_m$$

bulunur. Böylece, ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.2.2 $m \geq 0$ tam sayı olmak üzere,

$$(CSb_3)_{2m}(Sb_3)_{2m+1} - (CSb_3)_{2m+1}(Sb_3)_{2m} = 63$$

tür.

İspat. İspatı tümevarımla yapalım. $m = 0$ için iddianın doğru olduğu

$$(CSb_3)_0(Sb_3)_1 - (CSb_3)_1(Sb_3)_0 = 63$$

eşitliğinden görülür. $m = k$ için iddianın doğru olduğunu kabul edip $m = k + 1$ için iddianın doğru olduğunu, yani $(CSb_3)_{2k+2}(Sb_3)_{2k+3} - (CSb_3)_{2k+3}(Sb_3)_{2k+2} = 63$ olduğunu gösterelim.

(4.1), (4.2), (4.21) ve (4.22) eşitlikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} (CSb_3)_{2k+2}(Sb_3)_{2k+3} - (CSb_3)_{2k+3}(Sb_3)_{2k+2} &= (8C_{k+1} + C_{k+2})(8B_{k+2} + B_{k+1}) \\ &\quad - (8C_{k+2} + C_{k+1})(8B_{k+1} + B_{k+2}) \\ &= 63B_{k+2}C_{k+1} - 63C_{k+2}B_{k+1} \\ &= 63(B_{k+2}C_{k+1} - C_{k+2}B_{k+1}) \end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 2.1.11 den,

$$B_1 = B_{k+2}C_{k+1} - C_{k+2}B_{k+1}$$

ve $B_1 = 1$ olduğundan,

$$(CSb_3)_{2k+2}(Sb_3)_{2k+3} - (CSb_3)_{2k+3}(Sb_3)_{2k+2} = 63$$

bulunur. Böylece, ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.2.3 $m \geq 0$ tam sayı olmak üzere,

$$(CSb_3)_{2m+1}(Sb_3)_{2m+2} - (CSb_3)_{2m+2}(Sb_3)_{2m+1} = 22$$

dir.

İspat. İspatı tümevarımla yapalım. $m = 0$ için iddianın doğru olduğu

$$(CSb_3)_1(Sb_3)_2 - (CSb_3)_2(Sb_3)_1 = 22$$

eşitliğinden görülür. $m = k$ için iddianın doğru olduğunu kabul edip $m = k + 1$ için iddianın doğru olduğunu, yani $(CSb_3)_{2k+3}(Sb_3)_{2k+4} - (CSb_3)_{2k+4}(Sb_3)_{2k+3} = 22$ olduğunu gösterelim.

(4.1), (4.2), (4.21) ve (4.22) eşitlikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned}
 (CSb_3)_{2k+3}(Sb_3)_{2k+4} - (CSb_3)_{2k+4}(Sb_3)_{2k+3} &= (8C_{k+2} + C_{k+1})(8B_{k+2} + B_{k+3}) \\
 &\quad - (8C_{k+2} + C_{k+3})(8B_{k+2} + B_{k+1}) \\
 &= 8(B_{k+3}C_{k+2} - C_{k+3}B_{k+2}) \\
 &\quad + 8(B_{k+2}C_{k+1} - C_{k+2}B_{k+1}) \\
 &\quad + (B_{k+3}C_{k+1} - C_{k+3}B_{k+1})
 \end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 2.1.11 den,

$$\begin{aligned}
 (CSb_3)_{2k+3}(Sb_3)_{2k+4} - (CSb_3)_{2k+4}(Sb_3)_{2k+3} &= 8.B_1 + 8.B_1 + B_2 \\
 &= 22
 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece, ispat tamamlanır.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında, balans sayılarının elde edildiği eşitliğe benzer bir eşitlik ile bulunan alt balans sayıları incelenmiştir. Alt balans sayılarının elde edildiği eşitlikte bulunan D pozitif tam sayısının seçimine bağlı olarak her D pozitif tam sayısı için bir alt balans sayısı bulunamayacağı belirtilerek D pozitif tam sayısının seçiminin önemli olduğu ifade edilmiştir.

D pozitif tam sayısı kobalans sayısı olarak seçildiğinde elde edilen alt balans sayıları ile ilgili genel bilgiler verilip özel olarak, b_m , m . kobalans sayısı olmak üzere, $D = b_3 = 14$ alınarak elde edilen b_3 -alt balans sayıları incelenmiştir.

Elde edilen sonuçlar iki kısım halinde ele alınabilir. Öncelikle, b_3 -alt balans sayıları ile ilgili bazı cebirsel özdeşlikler elde edilmiştir ve bu sayıları üreten birtakım fonksiyonlar bulunmuştur. Sonrasında, b_3 -alt balans sayıları kullanılarak elde edilen b_3 -Lucas alt balans sayıları tanımlanmıştır. b_3 -Lucas alt balans sayıları ile ilgili cebirsel özdeşlikler elde edilmiştir. Ayrıca b_3 -Lucas alt balans sayılarının b_3 -alt balans sayıları ile olan ilişkisi incelenmiştir.

Daha sonraki çalışmalarda, alt balans sayılarının elde edildiği eşitlikte bulunan D pozitif tam sayısının diğer tam sayı dizilerinin terimleri şeklinde seçilip seçilemeyeceği araştırılabilir. Öte yandan, m tam sayısının farklı değerleri için, b_m -alt balans sayılarının özellikleri incelenebilir. Bu alt balans sayıları yardımıyla yeni tam sayı dizileri tanımlanabilir.

KAYNAKLAR

- [1]. Vajda, S., 1989, *Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section*, Ellis Horwood Limited, West Sussex, ISBN: 0-7458-0715-1
- [2]. Koshy, T., 2001, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, Wiley, Canada, ISBN: 0-471-39969-8
- [3]. Balakrishnan, V.K., 2010, *Introductory Discrete Mathematics*, Dover Publications Inc., New York
- [4]. Behera, A. and Panda, G.K., 1999, On the Square Roots of Triangular Numbers, *Fibonacci Quarterly*, 37 (2), 98-105
- [5]. Panda, G.K., 2006, Some Fascinating Properties of Balancing Numbers, *Fibonacci Numbers and Their Applications*, 10
- [6]. Panda, G.K. and Ray, P.K., 2005, Cobalancing Numbers and Cobalancers, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 8, 1189-2000
- [7]. Ray, P.K., 2009, *Balancing and Cobalancing Numbers*, Thesis(PhD), Department of Mathematics National Institute of Technology
- [8]. Weisstein, E.W., 2002, *Triangular Number*, <http://mathworld.wolfram.com/TriangularNumber.html> , [Ziyaret Tarihi: 3 Haziran 2021]
- [9]. Hoggatt, V.E. and Bicknell, M., 1974, Triangular Numbers, *Fibonacci Quarterly*, 12(3), 221-230
- [10]. Breiteig, T., 2000, When is the Product of Two Oblong Numbers Another Oblong?, *Math. Mag.*, 73, 120-129
- [11]. Liptai, K., 2004, Fibonacci Balancing Numbers, *Fibonacci Quarterly*, 42 (4), 330-340
- [12]. Panda, G.K. and Rout, S.S., 2015, K-Gap Balancing Numbers, *Periodica Mathematica Hungarica*, 70(1), 109-121
- [13]. Panda, G.K. and Panda, A.K., 2015, Almost Balancing Numbers, *J. Indian Math. Soc.(N.S)*, 82(3-4), 147-156
- [14]. Davala, R.K. and Panda, G.K., 2018, Subbalancing Numbers, *Matematika*, 34 (1), 163-172
- [15]. Gözeri, G.K., Özkoç, A. ve Tekcan, A., 2017, Some Algebraic Relations on Balancing Numbers, *Util. Math.*, 103, 217-236

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Selin SARI

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Anadolu Üniversitesi
Fakülte	Fen Fakültesi
Bölümü	Matematik Bölümü
Mezuniyet Yılı	2018

Yüksek Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Programı	Matematik Programı
Mezuniyet Yılı	2021