

T.C.
BİNGÖL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BANACH CEBİRLERİNDE SÜREKLİ TEMSİLLER ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SEVEKİ CAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
Dr. Öğr. Üyesi Ziyattin TAŞ

BİNGÖL-2025

BANACH CEBİRLERİNDE SÜREKLİ TEMSİLLER ÜZERİNE

Dr. Öğr. Üyesi Ziyattin TAŞ danışmanlığında, Seveki CAN tarafından hazırlanan bu çalışma 01/08/2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Süleyman EDİZ *İmza* :

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Ziyattin TAŞ *İmza* :

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Harun BİÇER *İmza* :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulunun// tarih ve/
nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Zafer ŞİAR
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖNSÖZ

Bu tezin ortaya çıkmasında emeği geçen, bilgi ve birikimleriyle yolumu aydınlatan değerli danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Ziyattin TAŞ'a en içten şükranlarımı sunarım. Kendisinin rehberliği, sabrı ve bilimsel yaklaşımı, bu uzun ve meşakkatli süreçte en büyük ilham kaynağım olmuştur. Tezimin her aşamasında gösterdiği titizlik ve sağladığı değerli geri bildirimler için minnettarım.

Bu akademik yolculuğumda, sadece bir arkadaş değil aynı zamanda güvenilir bir yol arkadaşı olan Doğan ZOROĞLU'na da bir teşekkür borçluyum. Kendisinin fikir alışverişleri, motivasyonu ve yeri geldiğinde sağladığı destek, bu sürecin zorlu anlarında bana güç vermiştir.

Varlığıyla hayatıma anlam katan, gösterdiği anlayış ve sonsuz sabırla her zaman yanımda olan, bu yoğun tempomda evin tüm yükünü omuzlayan, her anımda destek olan sevgili eşim Gülten CAN'a minnettarım. Hayatımın en tatlı meşguliyetleri, yorucu anların neşe kaynağı, gözümün nuru canım kızım Sare Meva CAN'a ve küçük adam Duha Zeyd CAN'a... Onların masum gülüşleri, bana her zaman en büyük motivasyonu sağladı. Bu tez, aynı zamanda onlara adanmıştır. Onların aydınlık geleceği için attığım bu akademik adımın, onlara ilham vermesi en büyük dileğimdir.

Seveki CAN

Bingöl 2025

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	i
İÇİNDEKİLER	ii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	iii
ÖZET.....	iv
ABSTRACT	v
1. GİRİŞ	1
1.1. Banach Cebirlerinde Kompaktlık ve Yapısal Kısıtlamalar	2
1.2. Arens Cebirleri, Yaklaşık Birimler ve Topolojik Merkez.....	2
1.3. Hemen Hemen Periyodik Fonksiyoneller ve Kompaktlık İlişkisi.....	3
1.4. Tezin Katkısı ve Yapısı	4
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	5
2.1. Topolojik Uzaylar ve Topolojik Gruplar.....	5
2.2. Banach Cebirleri ve Banach Uzayları	9
2.3. Dual Uzaylar.....	15
3. BANACH CEBİRLERİNİN SAĞDAN SÜREKLİ TEMSİLİ.....	21
3.1. Banach Cebirlerinde Sürekli Temsillerin Bazı Özellikleri.....	21
4. ARENS ÇARPIMLARI	37
4.1. Arens Çarpımları ve Arens Regülerlik	37
5. HEMEN HEMEN PERİYODİK FONKSİYONELLER	46
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	55
KAYNAKLAR	57

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

A^*	: A nın 1. Duali
A^{**}	: A nın 2. Duali
(X, τ)	: Topolojik uzay
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	: İç çarpım fonksiyonu
$\ \cdot\ $	: Norm fonksiyonu
$\ T\ $	: T nin operatör normu
G	: Topolojik grup
$B(X, Y)$	: X den Y ye bütün sınırlı lineer dönüşümlerin kümesi
$L^1(G)$	: G üzerindeki grup cebiri
$L^\infty(G)$	: $L^1(G)$ nin dual uzayı
L_h	: Sol çarpım operatörü
R_h	: Sağ çarpım operatörü
T^{-1}	: T fonksiyonunun tersi
(e_α)	: Sınırlı yaklaşık birim
$(\ker \phi)^\perp$	: ϕ nin çekirdeğinin dikeyi
$ap(A)$	: A daki tüm hemen hemen periyodik fonksiyoneller
$wap(A)$	: A daki zayıf hemen hemen periyodik fonksiyoneller
$l^1(G)$	: Ayırık bir G grubu üzerindeki toplanabilir diziler uzayı
$M(G)$	: Bir lokal kompakt G grubu üzerinde sonlu Radon ölçülerinin uzayı
c_0	: $\{x \in F(\mathbb{N}, \mathbb{F}) : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\} = \{x = \{x_n\} \in l^\infty(\mathbb{N}) : \{x_n\} \text{ yakınsak}\}$
l^p	: p . kuvveti toplanabilir diziler uzayı
$a_n \xrightarrow{w} a$	: Zayıf yakınsaklık
$a_n \xrightarrow{w^*} a$	: Zayıf* yakınsaklık
$\text{span} A$	: A nın gereni

BANACH CEBİRLERİNDE SÜREKLİ TEMSİLLER ÜZERİNE

ÖZET

Bu tez çalışması, Banach cebirlerinde sürekli temsiller ve Banach cebirlerinin bazı özellikleri üzerine altı temel bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, tezin genel bilgileri ve ele alınan konu ile ilgili kısa bir tarihçe ve literatür bildirisi verilmiştir. İkinci bölümde; ilerleyen bölümler için gerekli olan bazı temel tanım, teoremler ve örnekler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Banach cebirlerinde sürekli temsillerin bazı özellikleri verilmiştir. G lokal kompakt bir grup ve $L^1(G)$ de G üzerinde tanımlı grup cebiri olsun. $\theta: L^1(G) \rightarrow A$ sürekli bir homomorfizma olmak üzere f_i ve h_j , $L^1(G)$ nin sırasıyla sağdan ve soldan sınırlı yaklaşık birimleri olsun. Eğer;

$$(f_i + h_j - f_i * h_j) \quad (1)$$

$L^1(G)$ için sınırlı bir yaklaşık birim ise,

$$\theta(f_i + h_j - f_i * h_j) \quad (2)$$

nin de A da sınırlı bir yaklaşık birim olacağı gösterilmiştir. Yine, homomorfizma ile ilgili bazı sonuçlar sunulmuştur.

Dördüncü bölümde, Arens çarpımları ile ilgili bazı özellikler verilmiştir. Yine bu bölümde A^{**} ikinci dual uzayı, hem sağdan hem de soldan bir $zayıf^*$ sınırlı yaklaşık birime sahip ise, A^{**} ın bir $zayıf^*$ sınırlı yaklaşık birime sahip olduğu üzerine çalışılmıştır.

Beşinci bölümde, hemen hemen periyodik fonksiyonellerin Banach cebirleri üzerindeki davranışları incelenmiştir. Bu fonksiyonellerin kompaktlık ve zayıf kompaktlık özellikleri ile Arens regülerlik arasındaki ilişkiler araştırılmıştır. Özellikle $ap(A)$ ve $wap(A)$ uzaylarının eşitliği için gerekli ve yeterli koşullar ortaya konmuştur. Altıncı ve son bölümde ise sonuçlar ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sınırlı yaklaşık birim, $zayıf^*$ yakınsaklık, dual uzay, hemen hemen periyodik fonksiyoneller, Arens çarpımları.

ON CONTINUOUS REPRESENTATIONS IN BANACH ALGEBRAS

ABSTRACT

This thesis consists of six main chapters focusing on continuous representations in Banach algebras and some properties of Banach algebras.

The first chapter provides general information about the thesis and a brief history of the topic. The second chapter presents a literature review.

The third chapter introduces some basic definitions, theorems, and examples necessary for the subsequent chapters. Let G be a locally compact group and $L^1(G)$ be the group algebra defined on G . Let $\theta: L^1(G) \rightarrow A$ be a continuous homomorphism, where f_i and h_j are bounded approximate identities from the right and left, respectively, in $L^1(G)$. If $L^1(G)$ has a bounded approximate identity for

$$(f_i + h_j - f_i * h_j) \tag{1}$$

the relationship regarding the homomorphism

$$\theta(f_i + h_j - f_i * h_j) \tag{2}$$

in A is shown to be a bounded approximate identity. Additionally, some results related to the homomorphism are presented.

The fourth chapter examines some properties related to Arens products. It is shown that A^{**} also possesses a *weak** bounded approximate identity if A has both left and right *weak** bounded approximate identities.

In the fifth chapter, the behavior of almost periodic functionals on Banach algebras was investigated. The relationships between the compactness and weak compactness properties of these functionals and Arens regularity were explored. In particular, necessary and sufficient conditions for the equality of the spaces $ap(A)$ and $wap(A)$ were established. The sixth and final chapter presents the conclusions and recommendations.

Keywords: Bounded approximate identity, *weak** approximate identity, dual space, almost periodic functions, Arens product.

1. GİRİŞ

Matematiğin en dinamik ve geniş uygulama alanlarından biri olan fonksiyonel analiz, modern analizin ve cebirsel yapıların kesişim noktasında durmaktadır. Sonsuz boyutlu uzayların ve bu uzaylar üzerindeki dönüşümlerin derinlemesine incelenmesi, bu disiplini teorik fizik, mühendislik bilimleri ve hatta ekonominin birçok alanında vazgeçilmez kılmıştır. Bu geniş çerçeve içinde, hem cebirsel hem de topolojik yapıları bir araya getiren Banach cebirleri, kendilerine özgü zengin bir araştırma alanı sunar. Bir Banach cebiri, üzerinde çarpma işlemi tanımlanmış bir normlu vektör uzayı olup, normun çarpma işlemine göre sürekli olması ve uzayın norma göre tam olması gibi temel özellikleriyle dikkat çeker. Bu yapı, operatör teorisinden harmonik analize, temsil teorisinden kuantum mekaniğine kadar uzanan geniş bir uygulama ve araştırma yelpazesine sahiptir.

Bu tez çalışması, Banach cebirleri teorisinin kritik bir yönü olan tamamen süreklilik (kompaktlık) kavramını ve bu özelliğin, belirli sınıf Banach cebirlerinin yapısal sonuçlarını nasıl etkilediğini derinlemesine incelemeyi amaçlamaktadır. Tamamen süreklilik, bir Banach uzayı üzerindeki lineer bir operatörün, kapalı ve sınırlı bir kümeyi nispeten kompakt bir kümeye dönüştürmesi olarak tanımlanır. Bu kavram, fonksiyonel analizin çekirdek konularından biri olup, integral denklemlerin çözüm teorisi ve spektral teorideki önemli sınıflandırmaların temelini atmıştır. Banach cebirleri bağlamında ise, cebirin kendi elemanları tarafından tanımlanan çarpım operatörlerinin veya cebirsel temsillerin bu özelliği taşıması, cebirin iç yapısı hakkında kritik bilgiler sunar. Özellikle sonsuz boyutlu Banach uzaylarında, norm yakınsamasından daha zayıf bir kavram olan zayıf yakınsama ve bununla ilişkili kompaktlık özellikleri, uzayın ve cebirin topolojik doğasını anlamak için hayati önem taşır. Banach-Steinhaus Teoremi gibi temel prensipler, operatör ailelerinin noktasal sınırlılığından düzgün sınırlılığa geçişi sağlayarak, zayıf yakınsaklık ve kompaktlık argümanlarının temelini oluşturur.

1.1. Banach Cebirlerinde Kompaktlık ve Yapısal Kısıtlamalar

Tamamen süreklilik kavramının evrimi, yirminci yüzyılın başlarında Frigyes Riesz ve Ernst Schmidt gibi matematikçilerin integral denklemler üzerine yaptıkları öncü çalışmalarla başlamıştır. Onların kompakt operatörlere dair keşifleri, bu kavramın daha sonra Stefan Banach'ın kendi adıyla anılan uzayları formüle etmesiyle genel bir teoriye dönüşmesine zemin hazırlamıştır. Banach cebirleri teorisi ise, Israel M. Gelfand ve Mark G. Krein'in (1940'lar) komütatif Banach cebirleri için Gelfand dönüşümünü geliştirmesiyle bağımsız bir disiplin olarak yükselişe geçmiştir. Bu çalışmalar, soyut cebirsel yapıları topolojik özelliklerle ilişkilendirerek, bir cebirin spektrumunun topolojik bir uzay olarak incelenmesine olanak sağlamıştır.

Bir Banach cebirinin belirli elemanları veya idealleri tarafından tanımlanan çarpım operatörlerinin (sol/sağ çarpım operatörleri) kompaktlığı, cebirin Jacobson radikali, yarı-basitliği ve hatta sonlu boyutlu alt yapıları hakkında önemli bilgiler sunar. Örneğin, bir Banach cebirinin tüm sürekli temsillerinin kompakt operatörlerden oluşması, cebirin yapısını güçlü bir şekilde kısıtlar. Bu alandaki yoğun araştırmalar, özellikle 1960'lı yıllarda, B. E. Johnson (1964) ve A. M. Sinclair (1969) gibi matematikçiler tarafından yürütülmüştür. Onların çalışmaları, kompakt temsillerin bir cebirin yapısı üzerindeki derin etkilerini, özellikle de Jacobson radikali ve cebirin sonlu boyutlu olma eğilimini ortaya koymuştur. Bu tür cebirler, genellikle "iyi tanımlı" olarak nitelendirilir ve teorik analizde daha yönetilebilir özellikler sergilerler.

1.2. Arens Cebirleri, Yaklaşık Birimler ve Topolojik Merkez

Banach cebirleri teorisindeki önemli bir gelişme, Richard F. Arens'in (1951) bir Banach cebirinin ikinci dual uzayı A^{**} üzerinde tanımladığı iki farklı çarpım (Arens çarpımları) ve Arens regülerliği kavramıdır. Bu kavramlar, A^{**} nin bir Banach cebiri olarak cebirsel özelliklerini ve A ile olan ilişkisini anlamak için kritik öneme sahiptir. Arens regülerliği, bu iki çarpımın çakışması anlamına gelir ve çarpım işleminin, ikinci dual uzayına sürekli olarak genişletilebilme durumunu ifade eder. Arens regüler cebirler, belirli komütatiflik ve kompaktlık özelliklerine haiz olabilirler.

Yaklaşık birimler, bir Banach cebirinin topolojik ve cebirsel yapısını anlamak için vazgeçilmez araçlardır. Özellikle, bir Banach cebirinin sınırlı bir yaklaşık birime sahip olması, cebirin ideallerinin kapanışları ve bölümlerinin yapısı üzerinde güçlü etkilere sahiptir.

Bu tezde, lokal kompakt bir G grubu üzerinde tanımlı grup cebiri $L^1(G)$ gibi özel Banach cebirleri ve genel Banach cebirleri bağlamında sürekli homomorfizmaların, sınırlı yaklaşık birimlerle etkileşimi incelenecektir. A. T. Lau ve Ali Ülger gibi araştırmacılar, bu alanda önemli katkılarda bulunmuşlardır. Özellikle, Lau ve Ülger'in 1993 tarihli "Some Geometric Properties on the Fourier-Stieltjes Algebras of Locally Compact Groups, Arens Regularity and Related Problems" başlıklı çalışmaları, lokal kompakt grupların Fourier-Stieltjes cebirlerinin geometrik özelliklerini, Arens regülerliği ve ilgili problemleri derinlemesine incelemiştir. Bu çalışma, Arens regülerliği ve grup cebirlerinin dual uzayları arasındaki karmaşık ilişkileri anlamak için bir temel oluşturmuştur.

Ayrıca, Lau ve Ülger'in 1996 tarihli "Topological Center of Certain Dual Algebras" başlıklı çalışması, dual cebirlerin topolojik merkezlerini araştırmıştır. Topolojik merkez kavramı, Arens çarpımlarının komütatiflik derecesini yansıtır ve bir cebirin ikinci dual uzayındaki cebirsel davranışını anlamak için kritiktir. Bu tür araştırmalar, bir cebirin veya onun dual uzayının ne kadar "iyi tanımlanmış" olduğunu ve dolayısıyla kompaktlık özellikleriyle nasıl ilişkilendirilebileceğini gösterir. Bir cebirin topolojik merkezinin genişliği, Arens çarpımlarının ve dolayısıyla ikinci dualin yapısının belirlenmesinde önemli rol oynar, bu da tamamen süreklilik veya refleksiflik gibi kavramlarla örtüşebilir.

1.3. Hemen Hemen Periyodik Fonksiyoneller ve Kompaktlık İlişkisi

Hemen hemen periyodik fonksiyoneller, harmonik analiz ve dinamik sistemlerde önemli bir yere sahipken, bu fonksiyonellerin Banach cebirleri üzerindeki davranışı da yapı teorisini anlamak için incelenmiştir. Duncan ve Ali Ülger'in 1992'deki "Almost Periodic Functionals on Banach Algebras" başlıklı makaleleri, Banach cebirleri üzerindeki hemen hemen periyodik fonksiyonellerin özelliklerini ve bunların cebirin iç yapısıyla ilişkilerini araştırmıştır. Bu tür çalışmalar, belirli fonksiyonellerin kompaktlık veya zayıf kompaktlık özellikleri ile cebirin spektral veya ideal yapısı arasındaki bağlantıları ortaya koyar. Bir

cebiri üzerindeki hemen hemen periyodik fonksiyonların uzayının belirli bir anlamda kompakt olması, cebirin kendisi hakkında güçlü çıkarımlar yapılmasını sağlayabilir.

1.4. Tezin Katkısı ve Yapısı

Bu tez çalışması, yukarıda bahsedilen literatür zemininde yükselerek, belirli sınıf Banach cebirlerinin tamamen süreklilik özelliklerini, sürekli temsiller, sınırlı yaklaşık birimler, Arens çarpımları ve hemen hemen periyodik fonksiyonlar bağlamında irdeleyerek mevcut bilgi birikimine özgün bir katkı sağlamayı hedeflemektedir. Özellikle, lokal kompakt grupların grup cebirleri $L^1(G)$ üzerindeki sürekli homomorfizmaların, cebirlerin yapısındaki kompaktlık özelliklerine nasıl yansıdığı detaylıca incelenecektir. Arens regülerliği ve ilgili kompaktlık koşullarının, ikinci dual uzayın topolojik ve cebirsel karakteristiği üzerindeki etkileri analiz edilecektir.

Bu tez çalışması, fonksiyonel analiz ve Banach cebirleri teorisindeki temel kavramları bir araya getirerek, belirli sınıf cebirlerin tamamen süreklilik özelliklerini ve bunlarla ilişkili yapısal sonuçları daha iyi anlamaya yönelik önemli bir adım teşkil edecektir. Elde edilecek bulgular, bu alandaki teorik bilgi birikimine katkı sağlarken, gelecekteki araştırmalar için de sağlam bir zemin hazırlayacaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak bazı temel tanım, teorem ve önermelere yer verilmiştir.

2.1. Topolojik Uzaylar ve Topolojik Gruplar

Tanım 2.1.1. X boş olmayan bir küme ve X kümesinin alt kümelerinin bir sınıfı olan τ verilsin. Eğer;

$$T1) \emptyset, X \in \tau,$$

$$T2) \forall i = 1, 2, \dots, n \text{ için } G_i \in \tau \text{ olmak üzere,}$$

$$\bigcap_{i=1}^n G_i \in \tau \quad (2.1.1)$$

$$T3) \forall i \in I \neq \emptyset \text{ için } G_i \in \tau \text{ olmak üzere,}$$

$$\bigcup_i G_i \in \tau \quad (2.1.2)$$

şartları sağlanıyorsa; τ sınıfına X üzerinde bir topoloji ve (X, τ) ikilisine de **topolojik uzay** denir. (X, τ) topolojik uzayında, τ 'nın elemanlarına; bu topolojik uzayın **açık kümeleri** denir (Taş, 2005).

Tanım 2.1.2. X herhangi bir küme olsun. X 'in tüm altkümelerinin sınıfı τ ile gösterilsin. Bu açıkça bir topolojidir. Bu topolojiye **diskret topoloji** denir (Taş, 2005).

Tanım 2.1.3. (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere, A nın her açık örtüsünün sonlu bir açık alt örtüsü varsa, A kümesine **kompakt küme** denir (Taş, 2005).

Tanım 2.1.4. Bir $G \neq \emptyset$ kümesi ve bu küme üzerinde tanımlı ikili bir işlem

$\cdot : G \times G \rightarrow G, (a, b) \rightarrow a \cdot b$ çarpma işlemi aşağıdaki şartları sağlıyorsa, $(G, \cdot)$ ikilisine **grup** denir.

- i. Her $a, b \in G$ için, $a \cdot b \in G$ dir. (Kapalılık)
- ii. Her $a, b, c \in G$ için, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ dir. (Birleşme)
- iii. Her $a \in G$ için, $a \cdot e = e \cdot a = a$ olacak şekilde bir $e \in G$ vardır. (Birim eleman)
- iv. Her $a \in G$ için, $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ olacak şekilde bir $a^{-1} \in G$ vardır. (Ters eleman)

Ek olarak eğer, $a \cdot b = b \cdot a$ özelliği de sağlanıyorsa, yani işlem değişmeli ise, bu gruba **değişmeli (Abelian) grup** denir (Taş, 2005).

Tanım 2.1.5. $(G, \cdot)$ bir grup ve $H \subset G$ olsun. Eğer $(H, \cdot)$ da bir grup ise bu takdirde H grubuna G grubunun **altgrubu** denir (Taş, 2005).

Tanım 2.1.6. Bir $(G, *)$ grubundan bir $(H, \cdot)$ grubu içine tanımlı $\phi: G \rightarrow H$ dönüşümü her $x, y \in G$ için,

$$\phi(x * y) = \phi(x) \cdot \phi(y) \quad (2.1.3)$$

eşitliğini sağlıyorsa, ϕ ye bir **homomorfizma** adı verilir. Eğer bu homomorfizma birebir ve örten ise bu takdirde **izomorfizma** adını alır. Eğer G grubundan H grubuna bir izomorfizma varsa bu takdirde G ve H izomorfik grup olurlar ve birbirinin aynı olarak kabul edilirler (Gallian, 2007).

Tanım 2.1.7. G bir grup ve aynı zamanda (G, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer;

- i. $G \times G \rightarrow G$ dönüşümü sürekli
 $(x, y) \rightarrow xy$
- ii. $G \rightarrow G$ dönüşümü sürekli
 $x \rightarrow x^{-1}$

ise, G ye bir **topolojik grup** denir. Dahası; bir topolojik grup, bir G grubunun grup işlemlerini sürekli kılan bir topoloji ile donatılmasıdır (Taş, 2005).

Tanım 2.1.8. G bir topolojik grup olsun. Bu grup, üzerindeki topolojiye göre kompakt ise bu topolojik gruba, **kompakt topolojik grup** adı verilir (Taş, 2005).

Tanım 2.1.9. G bir topolojik grup olsun. G grubunun her bir noktasının bir V komşuluğu vardır öyle ki $\bar{V}$ kompakt ise, G ye **lokal kompakt topolojik grup** denir (Taş, 2005).

Tanım 2.1.10. G bir lokal kompakt topolojik değişmeli grup ise, $\chi: G \rightarrow \mathbb{T}$ şeklinde G grubundan $\mathbb{T}$ birim çember içine tanımlı sürekli bir homomorfizmaya **karakter** adı verilir. Bu şekilde tanımlı tüm karakterlerin kümesi de G 'nin **karakter grubu** veya **dual grubu** olarak adlandırılır ve $\hat{G}$ veya Γ ile gösterilir. Burada,

$$\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\} \quad (2.1.4)$$

şeklinde. Eğer $\chi \in G$ ise, χ ye G nin karakteri denir. Şunu belirtelim ki; buradaki $\hat{G}$ dual grubunun kendisi de aynı zamanda lokal kompakt topolojik değişmeli gruptur (Taş, 2005).

Tanım 2.1.11. G herhangi bir topolojik grup olsun. Bir f fonksiyonu verilsin. Bu f fonksiyonunun G üzerinde sürekli olması için; $\forall \varepsilon > 0$ için G üzerinde e birim elemanının bir U komşuluğu vardır ve $a \in G$ için $t \in aU$ ise,

$$|f(t) - f(a)| < \varepsilon \quad (2.1.5)$$

olmasıdır (Taş, 2005).

Tanım 2.1.12. G herhangi bir lokal kompakt topolojik grup ve f , G üzerinde bir fonksiyon olsun. Eğer f sol (sağ) düzgün sürekli ise, $\forall \varepsilon > 0$ için G üzerinde bir e birim elemanının bir U komşuluğu vardır öyle ki; $x \in G$ ve her $u \in U$ için,

$$|f(x) - f(xu)| < \varepsilon \quad (2.1.6)$$

$$|f(x) - f(ux)| < \varepsilon \quad (2.1.7)$$

dur (Taş, 2005).

Tanım 2.1.13. G herhangi bir lokal kompakt topolojik grup ve f , G üzerinde bir fonksiyon olsun. Eğer f , G üzerinde düzgün sürekli ise o halde, $\forall \varepsilon > 0$ için G üzerinde e birim elemanının bir U komşuluğu vardır öyle ki; $x \in G$ ve her $u \in U$ için,

$$|f(xu^{-1}) - f(x)| < \varepsilon \quad (2.1.8)$$

dur (Taş, 2005).

Önerme 2.1.1. G bir topolojik grup, her $h \in G$ için $L_h: G \rightarrow G$ ve $R_h: G \rightarrow G$ dönüşümleri birer homeomorfizma olsun. L_h ve R_h dönüşümlerinin tersi de birer homeomorfizmadır (Morris, 1977).

İspat. $L_h: G \rightarrow G$ ve $R_h: G \rightarrow G$ dönüşümleri sürekli iki dönüşümdür. Herhangi bir $h \in G$ için L_h ve R_h dönüşümleri sürekli olup bu dönüşümlerin ters dönüşümleri de sürekli olur. $L_{h^{-1}}$ dönüşümü L_h ın, $R_{h^{-1}}$ dönüşümü de R_h ın sürekli bir tersi olur. Bu durumda

$$L_h(L_{h^{-1}}(g)) = L_h(h^{-1}g) = h(h^{-1}g) = g \quad (2.1.9)$$

$$L_{h^{-1}}(L_h(g)) = L_{h^{-1}}(hg) = h^{-1}(hg) = g \quad (2.1.10)$$

olur. Böylece sol dönüşümün tersi bir homeomorfizmadır (Morris, 1977). Benzer şekilde sağ dönüşümün tersinin de bir homeomorfizma olduğunu gösterelim;

$$R_h(R_{h^{-1}}(g)) = R_h(gh^{-1}) = (gh^{-1})h = g \quad (2.1.12)$$

$$R_{h^{-1}}(R_h(g)) = R_{h^{-1}}(gh) = (gh)h^{-1} = g \quad (2.1.12)$$

olur. Böylece, sağ dönüşümün tersi de bir homeomorfizmadır.

2.2. Banach Cebirleri ve Banach Uzayları

Tanım 2.2.1. X , $\mathbb{C}$ veya $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı bir lineer uzay olsun. $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir **norm** ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de **normlu uzay** denir.

- i. $\|x\| \geq 0$
- ii. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- iii. $x \in X$ ve α skaleri için, $\|\alpha x\| \leq |\alpha| \|x\|$
- iv. $\forall x, y \in X$ için, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Norm; $x \rightarrow \|x\|$ şeklinde bir fonksiyondur. Üzerinde bir norm tanımlanmış olan bir $(X, \|\cdot\|)$ lineer uzayına ise **normlu lineer uzay** denir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.2.2. X normlu uzayında bir $\{x_n\}$ dizisi alalım. Eğer her $\varepsilon > 0$ için ε na bağlı bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var ve her $n, m \geq n_0$ için,

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon \quad (2.2.1)$$

oluyor ise, $\{x_n\}$ dizisine **Cauchy dizisi** denir. X normlu uzayında her Cauchy dizisi, bu uzayın bir elemanına yakınsak ise, X e bir **Banach uzayı** denir (Coşkun, 2002).

X ve Y iki Banach uzayı olsun. $T: X \rightarrow Y$ dönüşümü, X den elde edilen her $x \in X$ için, Y nin tek bir $y = Tx$ elemanını eşlerse, X üzerinde (*Y de değerler alan*) bir T operatörü tanımlanmıştır denir (Taş, 2005).

Tanım 2.2.3. $T: X \rightarrow Y$ operatörü, X den elde edilen her x_1, x_2 ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olmak üzere,

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T(x_1) + \beta T(x_2) \quad (2.2.2)$$

şartını sağlıyorsa, T operatörüne **lineer operatör** denir (Taş, 2005).

Tanım 2.2.4. X ve Y normlu vektör uzaylar ve $T: X \rightarrow Y$ lineer bir dönüşüm olsun. Eğer her $x \in X$ için,

$$\|Tx\|_Y \leq k\|x\|_X \quad (2.2.3)$$

olacak şekilde pozitif bir k sabiti varsa, T ye sınırlıdır denir (Soykan, 2008).

Tanım 2.2.5. Eğer $T: X \rightarrow Y$ lineer operatörü $(n \rightarrow \infty)$ için, $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ olması,

$$\|Tx_n - Tx\| \rightarrow 0 \quad (2.2.4)$$

olmasını gerektirirse, T operatörüne **süreklili operatör** denir (Taş, 2005).

Teorem 2.2.1. X ve Y normlu vektör uzaylar olsun ve $T: X \rightarrow Y$ lineer bir dönüşüm olsun. Aşağıdakiler denktir:

- i. T süreklidir.
- ii. T sınırlıdır (Soykan, 2008).

Teorem 2.2.2. X sonlu boyutlu bir normlu vektör uzay, Y herhangi bir normlu vektör uzay ve $T: X \rightarrow Y$ lineer bir dönüşüm olsun. O zaman T süreklidir (bu nedenle sınırlıdır) (Soykan, 2008).

X uzayını Y uzayına dönüştüren bütün sınırlı ve lineer operatörlerin kümesini $B(X, Y)$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.2.6. X ve Y normlu uzaylar olsun. $\|\cdot\| : B(X, Y) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| \quad (2.2.5)$$

ile tanımlı ise, o zaman $\|\cdot\|, B(X, Y)$ üzerinde bir norm tanımlar. Bu norma, T nin operatör normu adı verilir (Soykan, 2008).

Önerme 2.2.1. X, Y ve Z normlu vektör uzaylar ve $T \in B(X, Y)$ ve $S \in B(Y, Z)$ ise o zaman $S \circ T \in B(X, Z)$ dir ve

$$\|S \circ T\| \leq \|S\| \|T\| \quad (2.2.6)$$

dir (Soykan, 2008).

İspat.

$$\|(S \circ T)(x)\| = \|S(T(x))\| \leq \|S\| \|T(x)\| \leq \|S\| \|T\| \|x\| \quad (2.2.7)$$

olduğunan $S \circ T \in B(X, Z)$ dir ve ayrıca

$$\|S \circ T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|(S \circ T)(x)\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|S\| \|T\| \|x\| \leq \|S\| \|T\| \quad (2.2.8)$$

olduğundan

$$\|S \circ T\| \leq \|S\| \|T\| \quad (2.2.9)$$

elde edilir (Soykan, 2008).

Tanım 2.2.7. X bir kompleks vektör uzay olsun. X üzerinde bir iç çarpım aşağıdaki özellikleri sağlayan bir

$$\langle ., . \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$$

fonksiyonudur: Her $x, y, z \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için,

- i. $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$ ve $\langle x, x \rangle \geq 0$
- ii. $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- iii. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$
- iv. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (Soykan, 2008).

Önerme 2.2.2. X bir iç çarpım uzayı olsun.

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

ile tanımlı $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu X üzerinde bir normdur.

Tanım 2.2.8. A kümesi, $\mathbb{C}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Eğer $A \times A$ dan A ya tanımlı olan ve $(x, y) \rightarrow xy$ olarak belirlenen dönüşüm $x, y, z \in A$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ için,

i. $x(yz) = (xy)z$

ii. $x(y + z) = xy + xz$ ve $(x + y)z = xz + yz$

iii. $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$

şartlarını sağlıyorsa, bu uzaya bir **A cebir** adı verilir.

iv. $xy = yx$ ise **değişmeli** cebir,

v. $xe = ex = x$ olacak şekilde bir $e \in A$ varsa, **birimli cebir** adını alır (Taş, 2005).

Tanım 2.2.9. $\mathbb{C}$ üzerindeki bir $(A, \|\cdot\|)$ normlu lineer uzayı eğer,

i. A bir cebir,

ii. $x, y \in A$ olmak üzere, $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$

şartlarını sağlıyorsa, A cebirine bir **normlu cebir** denir (Taş, 2005).

Tanım 2.2.10. Eğer $(A, \|\cdot\|)$ normlu cebiri bir Banach uzayı ise bu normlu cebire bir *Banach cebiri* denir. Örneğin; $B(X)$ de aşağıdaki şekilde bir çarpma işlemi tanımlanabilir. $S, T \in B(X)$ olmak üzere,

$$(ST)(x) = S(Tx) \quad (2.2.10)$$

ve

$$\|ST\| \leq \|S\|\|T\| \quad (2.2.11)$$

eşitsizliğinden görüldüğü gibi bu çarpma işlemi süreklidir ve dolayısıyla $B(X)$ bir Banach cebiridir (Taş, 2005).

Tanım 2.2.11. A birimsiz bir Banach cebiri olsun. A_1 de $x \in A$ ve $a \in \mathbb{C}$ olmak üzere (a, x) sıralı ikililerin cümlesi, yani

$$A_1 = A \times \mathbb{C} = \{(a, x) : x \in A, a \in \mathbb{C}\} \quad (2.2.12)$$

olsun. Bu cümle $x, y \in A$ ve $a, b \in \mathbb{C}$ için, aşağıda verilen işlemlere göre bir cebirdir:

- i. $(x, a) + (y, b) = (x + y, a + b)$
- ii. $b(x, a) = (bx, ba)$
- iii. $(x, a)(y, b) = (xy + ay + bx, ab)$

A_1 , aşağıda verilen norm ile bir Banach cebiridir:

$$\|(x, a)\| = \|x\| + |a| \quad (2.2.13)$$

(Taş, 2005).

Tanım 2.2.12. A bir cebir ve $I \subset A$ verilsin. I lineer altuzayı, $x, y \in I$ olduğunda $xy \in I$ ise bu I altuzayına *altcebir* denir (Taş, 2005).

Tanım 2.2.13. A değişmeli bir Banach cebiri olsun. $a \in A$ ve $\{e_i\} \subset A$ olmak üzere, A Banach cebirinde $ae_i \rightarrow a$ olacak şekilde bir $(e_i)_{i \in I}$ ağı varsa, $(e_i)_{i \in I}$ ağına bu cebirin **yaklaşık birimi** denir. Eğer her $i \in I$ için $\|e_i\| \leq C$ olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti mevcutsa $(e_i)_{i \in I}$ ye **sınırlı yaklaşık birim** adı verilir (Taş, 2005).

Tanım 2.2.14. A bir cebir ve I da bir altcebir olsun. $x \in A$ ve $y \in I$ için $xy \in I$ oluyorsa, I altcebirine **ideal** adı verilir. Eğer burada $I \neq A$ ve $I \neq \emptyset$ ise, I ideali *has ideal* olur. Hiçbir ideali, başka bir ideal tarafından kapsanılmayan ideale **maksimal ideal** denir (Taş, 2005).

Tanım 2.2.15. G lokal kompakt bir Hausdorff topolojik grubu olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan λ ölçüsüne, G üzerinde bir sol **Haar ölçüsü** adı verilir:

- Sol Değişmezlik: Herhangi bir $g \in G$ ve Borel ölçülebilir $A \subseteq G$ için $gA = \{ga \mid a \in A\}$ olmak üzere, $\lambda(gA) = \lambda(A)$.
- Regülerlik: $K \subseteq G$ sonlu bir kompakt küme olmak üzere, $\lambda(K) < \infty$ ve $U \subseteq G$ boş kümeden farklı bir açık küme olmak üzere, $\lambda(U) > 0$.
- İç-dış yaklaşım özelliği: Bu özellik, ölçülebilir bir kümenin hacmini hem içten (kompakt kümelerle) hem de dıştan (açık kümelerle) yaklaşarak ölçebilmemize olanak tanır.

Benzer şekilde, $Ag = \{ag \mid a \in A\}$ olmak üzere, $\nu(Ag) = \nu(A)$ ise yani ν ölçüsü sağ değişmez ise bir sağ Haar ölçüsü adı verilir

Sol Haar ölçüsü λ kullanılarak, her $g \in G$ için bir modüler fonksiyon $\Delta(g)$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\lambda(Ag) = \Delta(g)\lambda(A) \quad (2.2.14)$$

$\Delta(g) = 1$ ise (örneğin, değişmeli gruplar veya kompakt gruplar), sol ve sağ Haar ölçüleri çakışır. Haar ölçüsü, pozitif bir skalerle çarpım dışında tektir. Başka bir deyişle, eğer λ_1 ve λ_2 iki sol Haar ölçüsü ise, öyle bir $c > 0$ sabiti vardır ki $\lambda_1 = c\lambda_2$ (Buradaki c sayısına ölçeklendirme faktörü denir) olur. $L^1(G)$ uzayındaki integral işlemleri Haar ölçüsüyle tanımlanır (Hewitt and Stromberg, 1965).

Tanım 2.2.16. G bir lokal kompakt grup olsun. Bu durumda, $L^1(G)$, G üzerinde Haar ölçüsüne göre toplanabilir (integrallenebilir) kompleks değerli fonksiyonların uzayıdır. Daha matematiksel bir ifadeyle, bir $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonunun $L^1(G)$ de olması için aşağıdaki koşulun sağlanması gerekir:

$$\int_G |f(t)| d\lambda(t) < \infty \quad (2.2.15)$$

Burada λ , G üzerindeki sol Haar ölçüsünü (veya sağ Haar ölçüsünü, seçime göre) temsil eder. Haar ölçüsü, grup işlemi altında öteleme değişmezliği özelliğine sahip benzersiz (ölçeklendirme faktörü hariç) bir ölçüdür. $L^1(G)$ uzayı, fonksiyon toplaması ve skaler çarpma işlemleri altında bir vektör uzayıdır.

G lokal kompakt bir grup ve λ sol Haar ölçümü olsun. $L^1(G)$, birinci dereceden mutlak değerce Haar ölçümüne göre Lebesgue anlamında integrallenebilir sürekli fonksiyonların uzayı olsun. $L^1(G)$ uzayı, $f \in L^1(G)$ için yukarıdaki integralden tanımlanan L^1 -normu ile bir Banach uzayıdır:

$$\|f\|_1 = \int_G |f(t)| d\lambda(t) \quad (2.2.16)$$

Ayrıca $f, g \in L^1(G)$ için, aşağıdaki şekilde tanımlanan " $*$ " çarpma işlemi (konvolüsyon) ile $L^1(G)$ uzayı bir Banach cebiridir:

$$(f * g)(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x) d\lambda(y) \quad (2.2.17)$$

Eğer, G kompakt bir grup ise $1 < p < \infty$ için $L^p(G)$ uzayı $f \in L^p(G)$ için,

$$\|f\|_p = \left(\int_G |f(t)|^p d\lambda(t) \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.2.18)$$

normu ile bir Banach cebiridir (Taş, 2005).

2.3. Dual Uzaylar

Tanım 2.3.1. X Banach uzayında tanımlı $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ dönüşümü X uzayından elde edilen her x, y ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için,

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \quad (2.3.1)$$

eşitliğini sağlarsa, bu dönüşüme **lineer fonksiyonel** denir.

X bir Banach uzayı ve f de X üzerinde tanımlı bir lineer fonksiyonel olsun. Her $x \in X$ için,

$$|f(x)| \leq C\|x\| \quad (2.3.2)$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti varsa, bu fonksiyonele **sınırlı fonksiyonel** adı verilir.

Yukarıdaki eşitsizliği sağlayan C sabitlerinin supremumuna, f fonksiyonellerinin normu denir ve $\|f\|$ ile gösterilir. Yani;

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \quad (2.3.3)$$

dir (Taş, 2005).

Teorem 2.3.1. Eğer X bir normlu vektör uzay ve Y bir Banach uzayı ise o zaman $B(X, Y)$ normlu uzayı bir Banach uzayıdır (Soykan, 2008).

İspat. $B(X, Y)$ nin bir tam metrik uzay olduğunu göstermek zorundayız. $\{T_n\}$, $B(X, Y)$ içinde bir Cauchy dizisi olsun. Herhangi bir metrik uzayda bir Cauchy dizisi sınırlıdır, bu nedenle her $n \in \mathbb{N}$ için, $\|T_n\| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ vardır. $x \in X$ olsun.

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| = \|(T_n - T_m)(x)\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\| \quad (2.3.4)$$

ve $\{T_n\}$ bir Cauchy dizisi olduğundan $\{T_n\{x\}\}$, Y içinde bir Cauchy dizisidir. Y tam olduğundan, $\{T_n\{x\}\}$ yakınsaktır. Bu nedenle, $T : X \rightarrow Y$ ye dönüşümünü

$$T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) \quad (2.3.5)$$

ile tanımlayabiliriz. Şimdi, T nin lineerliğini gösterelim. $x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{F}$ için,

$$\begin{aligned}
T(x + y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x + y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (T_n(x) + T_n(y)) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(y) \\
&= T(x) + T(y)
\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

ve

$$T(\alpha x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\alpha x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha T_n(x) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = \alpha T(x) \tag{2.3.7}$$

olduğundan, T lineer bir dönüşümdür. Şimdi de T nin sınırlı olduğunu gösterelim.

$$\|T(x)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(x)\| \tag{2.3.8}$$

olduğundan

$$\|T(x)\| \leq \sup\{\|T_n(x)\| : n \in \mathbb{N}\} \leq \sup\{\|T_n\| \|x\| : n \in \mathbb{N}\} \leq M \|x\| \tag{2.3.9}$$

O halde T sınırlıdır ve bu nedenle $T \in B(X, Y)$ dir. Son olarak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T \tag{2.3.10}$$

olduğunu göstermemiz gerekiyor. $\varepsilon > 0$ olsun. $m, n \geq n_0$ olduğunda

$$\|T_n - T_m\| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.3.11}$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. O zaman, $\|x\| \leq 1$ i sağlayan herhangi bir x ve $m, n \geq n_0$ için,

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\| < \frac{\varepsilon}{2} \|x\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.3.12}$$

dir. Böylece

$$T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) \quad (2.3.13)$$

olduğundan $m \geq n_1$ için,

$$\|T(x) - T_m(x)\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.3.14)$$

olacak şekilde $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. O zaman $n \geq n_0$ ve $m \geq n_1$ olduğunda

$$\begin{aligned} \|(T - T_n)(x)\| &= \|T(x) - T_n(x)\| \\ &\leq \|T(x) - T_m(x)\| + \|T_n(x) - T_m(x)\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \|x\| < \varepsilon \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

elde edilir. O halde $n \geq n_0$ olduğunda $\|T - T_n\| < \varepsilon$ bulunur. Bu nedenle

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T \quad (2.3.16)$$

dir. Sonuç olarak $B(X, Y)$ bir Banach uzayıdır (Soykan, 2008).

Tanım 2.3.2. Bir iç çarpım uzayı, iç çarpımın indirgediği normdan indirgenen metriğe göre tam ise bu uzaya **Hilbert uzayı** denir (Soykan, 2008).

Bir $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ iç çarpım uzayı verildiğinde, iç çarpımın indirgediği normun

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad (2.3.17)$$

ve bu normun indirgediği metriğin

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad (2.3.18)$$

olduğunu hatırlayınız (Soykan, 2008).

Tanım 2.3.3. $\mathcal{H}$ ve $\mathcal{K}$ Hilbert uzayları olsun ve $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ olsun. Her $x \in \mathcal{H}$ ve her $y \in \mathcal{K}$ için,

$$(Tx, y) = (x, T^*y) \quad (2.3.19)$$

olacak şekilde bir tek $T^* \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ operatörü vardır. Bu operatöre T nin eşleniği (adjointi ya da eşlenik operatör) denir. Ayrıca, $(T^*)^* = T$ ve $\|T^*\| = \|T\|$ dir (Soykan, 2008).

Tanım 2.3.4. $X, \mathbb{F}$ cismi üzerinde bir normlu vektör uzay olsun. $B(X, \mathbb{F})$ uzayına, X in **dual uzayı** adı verilir. X in dual uzayını X^* ile göstereceğiz (Soykan, 2008).

Tanım 2.3.5. $X, \mathbb{F}$ cismi üzerinde bir normlu vektör uzay ise Teorem 2.3.1. den X^* nin bir Banach uzayı olduğunu biliyoruz. X^* bir Banach uzayı olduğundan, X^* bir dual uzaya sahiptir ve bu dual uzay $(X^*)^* = X^{**}$ ile gösterilir. X^{**} da bir Banach uzayıdır. Bu yüzden X^{**} da bir duale sahiptir. $x \in X$ ise x elemanı, X^{**} in bir $\hat{x}$ elemanını tanımlar. Yani; $x^* \in X^*$ için,

$$\hat{x}(x^*) = x^*(x) \quad (2.3.20)$$

eşitliği ile $\hat{x}: X^* \rightarrow \mathbb{F}$ dönüşümünü tanımlar. O zaman her $x \in X$ için, $\|\hat{x}\| = \|x\|$ olur. $x \rightarrow \hat{x}$ ile $\hat{x}: X \rightarrow X^{**}$ dönüşümüne, X in kendisinin ikinci dualinin içine doğal gömmesi denir (Taş, 2005).

Tanım 2.3.6. Genel olarak bilinmektedir ki; bir topolojik vektör uzayındaki topoloji, sıfır noktasının komşulukları (veya taban komşulukları) ile belirlenir. X bir Banach uzayı olmak üzere, X de sıfırın $\{x : \|x\| \leq \varepsilon\}$ komşulukları ile oluşan topolojiye **kuvvetli topoloji** denir (Taş, 2005).

Tanım 2.3.7. Kuvvetli topolojiye göre X de bir $\{x_n\}$ dizisinin x noktasına yakınsaması demek, $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ olması demektir. Bu yakınsama **kuvvetli yakınsama** olarak adlandırılır (Taş, 2005).

Tanım 2.3.8. Şimdi de zayıf topolojiyi tanımlayalım. Keyfi $\varepsilon > 0$ ve sonlu $f_1, f_2, \dots, f_n \in X^*$ için, X de $\{x : |f_1(x)| < \varepsilon, \dots, |f_n(x)| < \varepsilon\}$ komşulukları ile oluşan topolojiye **zayıf topoloji** denir (Taş, 2005).

X den elde edilen her $\{x_n\}$ dizisinin x noktasına, zayıf topolojiye göre yakınsaması demek, her $f \in X^*$ için $f(x_n) \rightarrow f(x)$ olması demektir. Zayıf (weak) topoloji bazen $\sigma(X, X^*)$ ile de gösterilir.

Dual uzaylarda bu iki topolojinin yanı sıra daha zayıf topolojilerden de bahsedilebilir. X bir normlu uzay, X^* bu uzayın duali olsun. Keyfi $\varepsilon > 0$ ve sonlu $x_1, \dots, x_n \in X$ için X^* da $\{f : |f(x_1)| < \varepsilon, \dots, |f(x_n)| < \varepsilon\}$ komşuluklarının belirttiği topolojiye *zayıf* topoloji* ya da (*weak* topology*) denir (Taş, 2005).

Tanım 2.3.9. Bir normlu lineer uzay $(X, \|\cdot\|)$ üzerinde tanımlı bir $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi ve bir $x \in X$ verilsin. Eğer her bir sürekli fonksiyonel $f \in X^*$ için, aşağıdaki koşul sağlanırsa, $\{x_n\}$ dizisi x e zayıf yakınsar denir (ve $x_n \rightarrow x$ veya $x_n \xrightarrow{w} x$ şeklinde gösterilir).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x) \quad (2.3.21)$$

(Rudin, 1991).

X^* içindeki bir $\{f_n\}$ dizisi, eğer her $x \in X$ için, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ özelliğini sağlarsa $\{f_n\}$ dizisi $f \in X^*$ ne *zayıf* yakınsaktır* denir ve $f_n \xrightarrow{w^*} f$ şeklinde gösterilir (Soykan, 2008).

3. BANACH CEBİRLERİNİN SAĞDAN SÜREKLİ TEMSİLİ

Bu bölümde, Banach cebirlerinde sürekli temsillerin bazı özellikleri verilmiştir. Yine, homomorfizmayla ilgili bazı sonuçlar sunulmuştur.

3.1. Banach Cebirlerinde Sürekli Temsillerin Bazı Özellikleri

Tanım 3.1.1. A bir Banach uzayı $B(A)$ da A yı A ya dönüştüren tüm lineer ve sınırlı operatörler cebiri olsun. 1_A ile A nın birim dönüşümünü göstereceğiz. G , birimi e olan lokal kompakt bir grup olsun.

$$R: G \rightarrow B(A), \quad g \rightarrow R_g$$

$$L: G \rightarrow B(A), \quad g \rightarrow L_g$$

olarak tanımlanan dönüşümler için

- i. $R_e = 1_A$ veya $L_e = 1_A$
- ii. $\forall g, s \in G, R_{gs} = R_s R_g$ veya $L_{gs} = L_g L_s$

eşitlikleri sağlanıyorsa R (veya L) ye, G grubundan A Banach uzayına bir **sağ(sol) temsil** denir. A ya da **temsiller uzayı** denir. Eğer $R: g \rightarrow R_g$ temsili $\forall a \in A$ için,

$$\lim_{g \rightarrow e} \|R_g a - a\| = 0 \quad (3.1.1)$$

eşitliği sağlanıyorsa, R temsiline G grubundan A Banach uzayına **sürekli bir sağ temsil** denir.

$$\sup_{g \in G} \|R_g\| < \infty \quad (3.1.2)$$

şartını sağlayan R temsiline **sınırlı bir sağ temsil** denir (Taş, 2005).

$R: g \rightarrow R$ dönüşümü, G grubundan A Banach uzayına sürekli bir sağ temsil olsun. Eğer, her $a \in A$ için, $\{R_g a: g \in G\}$ kümesinin A da kapanışı kompakt ise R temsiline **hemen hemen periyodik bir sağ temsil** denir. Bir Banach uzayında her kompakt küme sınırlı olduğundan anlıyoruz ki, eğer $R: g \rightarrow R_g$ temsili hemen hemen periyodik bir sağ temsil ise $\forall a \in A$ için,

$$\sup_{g \in G} \|R_g a\| < K_a \quad (3.1.3)$$

olacak şekilde a ya bağlı bir K_a sabiti vardır. Banach-Steinhaus teoreminden dolayı R temsiline sınırlı olduğunu elde ediyoruz. Böylece hemen hemen periyodik sağ bir temsiline sınırlı olduğunu görüyoruz. Sağ temsil için verilen bilgiler sol temsil için de verilebilir.

Bir $\chi \in \hat{G}$ ve tüm $g \in G$ için $R_g a = a \cdot \chi(g)$ eşitliğini sağlayan a vektörüne R temsiline öz vektörü denir. Bu durumda A Banach uzayı R temsiline öz vektörleri tarafından doğrulur. Bir başka deyişle R 'nin öz vektörlerinin lineer birleşiminin A 'nin normuna göre kapanışı, tüm A uzayını verir (Taş, 2005).

Teorem 3.1.1. (Banach-Steinhaus Teoremi) X bir Banach uzayı ve Y bir normlu lineer uzay olsun. F de, X ten Y ye giden sürekli lineer operatörlerin bir ailesi olsun, yani; $F \subseteq L(X, Y)$ (burada $L(X, Y)$, X ten Y ye giden tüm sürekli lineer operatörlerin uzayıdır). Eğer F ailesindeki her bir T operatörü, X in her bir x elemanı için noktasal olarak sınırlıysa (yani, her $x \in X$ için $\{\|T(x)\| : T \in F\}$ kümesi sınırlıysa), o zaman F ailesi düzgün olarak sınırlıdır. Yani, öyle bir $M > 0$ sabiti vardır ki, her $T \in F$ ve her $x \in X$ için,

$$\|T(x)\| \leq M\|x\| \quad (3.1.4)$$

eşitsizliği sağlanır (Rudin, 1991).

Önerme 3.1.1. G lokal kompakt bir grup, A bir Banach uzayı, A_0 , A uzayının yoğun lineer bir altuzayı olsun. Her $g \in G$ ye karşılık A_0 da tanımlı R_g operatörler ailesinin aşağıdaki şartları sağladığını varsayalım.

- a) Her $g \in G$ ve her $a \in A_0$ için, $\|R_g a\| \leq K \cdot \|a\|$ olacak şekilde bir $K > 0$ sabiti vardır.
- b) Her $a \in A_0$ için, $\lim_{g \rightarrow e} \|R_g a - a\| = 0$ olur.
- c) Her $g, s \in G$ ve her $a \in A_0$ için, $R_{gs} a = R_s R_g a$ eşitliği vardır.

Bu şartlar altında her R_g operatörü A da tanımlı bir $\overline{R_g}$ operatörüne genişletilebilir; öyle ki, $g \rightarrow \overline{R_g}$ dönüşümü G grubundan A Banach uzayına sınırlı ve sürekli bir sağ temsil olur.

İspat. Kabul edelim ki, $a \in A$ ve $g \in G$ olsun. A_0 , A da yoğun olduğundan, $a_n \rightarrow a$ olacak şekilde A_0 da bir $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır. Her $n, m \in \mathbb{N}$ ve $(n, m \rightarrow \infty)$ için,

$$\|R_g a_n - R_g a_m\| \leq K \cdot \|a_n - a_m\| \rightarrow 0 \quad (3.1.5)$$

dir. Bu da bize $(R_g a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. Şimdi de $\overline{R_g}$ nı aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\overline{R_g} a = \lim_{n \rightarrow \infty} R_g a_n \quad (3.1.6)$$

Kolayca görebiliriz ki $\overline{R_g} a$, a ya yakınsayan $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin seçimine bağlı değildir. Bunun dışında

$$\overline{R_g} a = R_g a \quad (3.1.7)$$

olur. Buradan da her $a \in A_0$ için

$$\|\overline{R_g} a\| \leq K \cdot \|a\| \quad (3.1.8)$$

olur. Bu da $\overline{R_g}$ nın G grubundan bir A Banach uzayına sınırlı bir sağ temsil olduğunu gösterir.

Şimdi, $a_n \rightarrow a$ olduğundan keyfi bir $s \in G$ için $R_s a_n \rightarrow \overline{R_s} a$ olup

$$\overline{R_s}(\overline{R_g}a) = \lim_{n \rightarrow \infty} R_s R_g a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} R_{gs} a_n = \overline{R_{gs}} a \quad (3.1.9)$$

olur. Böylece $\overline{R_{gs}} a = \overline{R_s}(\overline{R_g}a)$ elde edilir.

Son olarak $\overline{R_g}$ nın sürekli olduğunu gösterlim. Bunun için keyfi bir $a \in A$ alalım. A_0 , A da yoğun olduğundan her $\varepsilon > 0$ için

$$\|a_n - a\| < \varepsilon \quad (3.1.10)$$

olacak şekilde A_0 da bir $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır. Bu durumda,

$$\overline{R_g}a - a = \overline{R_g}a - \overline{R_g}a_n + \overline{R_g}a_n - a_n + a_n - a \quad (3.1.11)$$

olur. Bu eşitlikten

$$\begin{aligned} \|\overline{R_g}a - a\| &= \|\overline{R_g}a - \overline{R_g}a_n + \overline{R_g}a_n - a_n + a_n - a\| \\ &\leq \|\overline{R_g}a - \overline{R_g}a_n\| + \|\overline{R_g}a_n - a_n\| + \|a_n - a\| \\ &\leq K \cdot \|a - a_n\| + \|\overline{R_g}a_n - a_n\| + \|a_n - a\| \\ &< K \cdot \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = (K + 2)\varepsilon \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

elde edilir. Böylece $\lim_{g \rightarrow e} \|\overline{R_g}a - a\| = 0$ olur. Bu da $\overline{R_g}$ temsilinin sürekli olduğunu gösterir. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 3.1.1. A değişmeli bir Banach cebiri olsun. Eğer, değerler kümesi A da yoğun bir $\theta : L^1(G) \rightarrow A$ sürekli bir homomorfizma var ise bu takdirde, G grubundan A cebirine sürekli bir sağ R temsili mevcuttur.

İspat. R bir sağ temsil olduğundan keyfi bir $f \in L^1(G)$ ve $g \in G$ için R temsilini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$R_g \theta(f) = \theta(f_g) \quad (3.1.13)$$

$\{R_g : g \in G\}$ operatörler ailesinin Önerme 3.1.1. in şartlarını sağladığını gösterelim. θ nın değerler kümesi A da yoğun olduğundan, $A_0 = \theta(L^1(G))$ alınabilir. Bu durumda A_0, A da yoğundur.

a) Her $g \in G$ ve $a \in A_0$ için, $a = \theta(f)$ olacak şekilde bir $f \in L^1(G)$ vardır. θ sürekli olduğundan $\|\theta(f)\| \leq C\|f\|$ olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti vardır. $R_g \theta(f) = \theta(f_g)$ tanımından

$$\|R_g a\| = \|\theta(f_g)\| \leq C\|f_g\| = C\|f\| = C\|\theta(f)\| = C\|a\| \quad (3.1.14)$$

olacak şekilde bir $K > 0$ sabiti vardır. Bu da (a) koşulunun sağlandığını gösterir. Burada $\|f_g\| = \|f\|$ (Sağ öteleme L^1 - normunu korur) dir.

b) Her $a \in A_0$ için $a = \theta(f)$ alalım. $L^1(G)$ de sağ öteleme sürekli olduğundan

$$\lim_{g \rightarrow e} \|f_g - f\| = 0 \quad (3.1.15)$$

dır. θ sürekli bir homomorfizma olduğundan

$$\|R_g a - a\| = \|\theta(f_g) - \theta(f)\| \leq C\|f_g - f\| \quad (3.1.16)$$

olur. Bu durumda

$$\lim_{g \rightarrow e} \|R_g a - a\| = 0 \quad (3.1.17)$$

elde edilir.

c) Her $g, s \in G$ ve $a \in A_0$ için $a = \theta(f)$ alalım.

$$R_{gs}\theta(f) = \theta(f_{gs}) \quad (3.1.18)$$

$$f_{gs}(h) = f(h(gs)^{-1}) = f(hs^{-1}g^{-1}) = ((f_g)_s)(h) \quad (3.1.19)$$

olur. Buradan,

$$R_{gs}\theta(f) = \theta(f_{gs}) = \theta((f_g)_s) = R_s(\theta(f_g)) = R_s R_g \theta(f) \quad (3.1.20)$$

elde edilir ki, bu da ispatı tamamlar.

Şimdi de yukarıda sözü edilen Önerme 3.1.1. i $PF_p(G)$ cebirine uygulayalım. Önce hatırlatalım ki; $PF_p(G)$ cebiri $\{\theta(f) : f \in L^1(G)\}$ operatörler ailesinin $B(L^p(G))$ uzayının norm topolojisine göre kapanışıdır. Burada, $\theta(f): L^p(G) \rightarrow L^p(G)$ konvolüsyon operatörü $h \in L^p(G)$ için,

$$\theta(f)h = f * h \quad (3.1.21)$$

olarak tanımlanır.

Sonuç 3.1.1. G lokal kompakt bir grup, $\theta : L^1(G) \rightarrow PF_p(G) \subseteq B(L^p(G))$ sürekli bir homomorfizma olsun. $f \in L^1(G)$ için

$$R_g \theta(f) = \theta(f_g) \quad (3.1.22)$$

olarak tanımlanan $\{R_g : g \in G\}$ operatörler ailesi, $PF_p(G)$ uzayına G grubunun sürekli bir sağ temsili olarak genişletilebilir.

İspat. $\{R_g : g \in G\}$ operatörler ailesi için bunu gösterelim. $PF_p(G)$ nin tanımından da anlaşıldığı gibi $\{\theta(f) : f \in L^1(G)\}$ operatörler ailesi $PF_p(G)$ de lineer yoğun bir küme oluşturur. Şimdi de $\{\theta(f) : f \in L^1(G)\}$ üzerinde

$$R_g \theta(f) = \theta(f_g)$$

olarak tanımladığımız $\{R_g : g \in G\}$ operatörler ailesinin Önerme 3.1.1. in şartlarını sağladığını gösterelim.

i. $f \in L^1(G)$ ve $h \in L^p(G)$, $1 < p < \infty$ olmak üzere, $\forall g \in G$ için,

$$f_g * h = f * {}_g h \quad (3.1.23)$$

eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned} \|R_g \theta(f)\| &= \|\theta(f_g)\| = \sup_{\|h\|_p \leq 1} \|f_g * h\|_p \\ &= \sup_{\|h\|_p \leq 1} \|f * {}_g h\|_p = \sup_{\|h\|_p \leq 1} \|f * h\|_p = \|\theta(f)\| \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

olduğunu ve dolayısıyla da birinci şartın sağlandığını görürüz.

ii. Bir $h \in L^p(G)$ ve $f \in L^1(G)$ alalım.

$$\begin{aligned} \lim_{g \rightarrow e} \|R_g \theta(f)h - \theta(f)h\| &= \lim_{g \rightarrow e} \|\theta(f_g)h - \theta(f)h\| \\ &\leq \lim_{g \rightarrow e} \|f_g * h - f * h\|_1 = 0 \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

olması ikinci şartı ispatlar.

iii. Keyfi $g, s \in G$ alalım. $f \in L^1(G)$ için,

$$R_{gs} \theta(f) = \theta(f_{gs}) = \theta((f_g)_s) = R_s(\theta(f_g)) = R_s R_g \theta(f) \quad (3.1.26)$$

elde edilir ki bu da $R_{gs}\theta(f) = R_s R_g \theta(f)$ olduğunu gösterir. Demek ki; $\{R_g : g \in G\}$ operatörler ailesi $\{\theta(f) : f \in L^1(G)\}$ kümesi üzerinde Önerme 3.1.1. in tüm şartlarını sağlıyor. Böylece elde ediyoruz ki; $g \rightarrow R_g$ dönüşümü $PF_p(G)$ ye sürekli bir sağ temsil olarak genişletilebilir.

Teorem 3.1.2. A bir Banach cebiri, G bir lokal kompakt grup ve $L^1(G)$ de bir grup cebiri olsun. Eğer; $\theta : L^1(G) \rightarrow A$ sürekli bir homomorfizma ise, $\theta^{**} : L^1(G)^{**} \rightarrow A^{**}$ da sürekli bir homomorfizmadır.

İspat. $L^1(G)^*$, $L^1(G)$ üzerindeki sürekli lineer fonksiyonellerin uzayıdır. $\theta^* : A^* \rightarrow L^1(G)^*$ dönüşümü de θ dönüşümünün dual dönüşümü olup; her $\varphi \in A^*$, $f \in L^1(G)$ için,

$$\langle \theta^*(\varphi), f \rangle = \langle \varphi, \theta(f) \rangle \quad (3.1.27)$$

dir. $\theta^{**} : L^1(G)^{**} \rightarrow A^{**}$ dönüşümü de θ^* dönüşümünün dual dönüşümüdür. Biz θ nın homomorfizma olması durumunda θ^{**} nin de homomorfizma olduğunu göstermek istiyoruz. Öncelikle bu dönüşümün sürekliliğini ve lineerliğini gösterelim.

Her $F \in L^1(G)^{**}$ ve $\varphi \in A^*$ için,

$$\langle \theta^{**}(F), \varphi \rangle = \langle F, \theta^*(\varphi) \rangle \quad (3.1.28)$$

dir. θ sürekli bir homomorfizma olduğundan $f \in L^1(G)$ için,

$$\|\theta(f)\| \leq C\|f\| \quad (3.1.29)$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti vardır. θ sürekli olduğundan, $\varphi \circ \theta$ da sürekli dir. Buradan, θ^* da $zayıf^*$ sürekli olur ($\theta^*(\varphi) = \varphi \circ \theta$ olduğunu hatırlayalım). $\|\theta\| = \|\theta^*\| \leq C$ olmak üzere, her $F \in L^1(G)^{**}$ için,

$$\|\theta^{**}(F)\| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \|F(\theta^*(\varphi))\| \leq \|F\| \cdot \|\theta^*\| \leq C\|F\| \quad (3.1.30)$$

olduğundan, θ^{**} dönüşümü de *zayıf** sürekli olur. Şimdi de lineerliği gösterelim. Her $\varphi \in A^*$, $F_1, F_2 \in L^1(G)^{**}$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için,

$$\begin{aligned} \langle \theta^{**}(\lambda F_1 + F_2), \varphi \rangle &= \langle \lambda F_1 + F_2, \theta^*(\varphi) \rangle \\ &= \lambda \langle F_1, \theta^*(\varphi) \rangle + \langle F_2, \theta^*(\varphi) \rangle \\ &= \lambda \langle \theta^{**}(F_1), \varphi \rangle + \langle \theta^{**}(F_2), \varphi \rangle \\ &= \langle \lambda \theta^{**}(F_1) + \theta^{**}(F_2), \varphi \rangle \end{aligned} \quad (3.1.31)$$

olur ki bu da bize, $\theta^{**}(\lambda F_1 + F_2) = \lambda \theta^{**}(F_1) + \theta^{**}(F_2)$ olduğunu gösterir. Böylelikle, θ^{**} nin lineer bir dönüşüm olduğunu elde ederiz.

Artık, θ^{**} nin bir homomorfizma olduğunu göstermeye geçebiliriz. Bunun için, θ^{**} nin Arens çarpımını koruduğunu yani; $F, H \in L^1(G)^{**}$ için,

$$\theta^{**}(F \cdot H) = \theta^{**}(F) \cdot \theta^{**}(H) \quad (3.1.32)$$

olduğunu göstermeliyiz. $\varphi \in A^*$ için (3.1.32) eşitliğinin sol tarafı,

$$\langle \theta^{**}(F \cdot H), \varphi \rangle = \langle F \cdot H, \theta^*(\varphi) \rangle = \langle F, H \cdot \theta^*(\varphi) \rangle \quad (3.1.33)$$

olur. Yine (3.1.32) eşitliğinin sağ tarafı,

$$\langle \theta^{**}(F) \cdot \theta^{**}(H), \varphi \rangle = \langle \theta^{**}(F), \theta^{**}(H) \cdot \varphi \rangle = \langle F, \theta^*(\theta^{**}(H) \cdot \varphi) \rangle \quad (3.1.34)$$

olur. Bu durumda, eğer θ^{**} bir homomorfizma ise, her $H \in L^1(G)^{**}$ ve $\varphi \in A^*$ için,

$$\langle F, H \cdot \theta^*(\varphi) \rangle = \langle F, \theta^*(\theta^{**}(H) \cdot \varphi) \rangle \quad (3.1.35)$$

eşitliğinin var olması, dolayısıyla da

$$H \cdot \theta^*(\varphi) = \theta^*(\theta^{**}(H) \cdot \varphi) \quad (3.1.36)$$

eşitliğinin geçerli olması gerekir. Burada $\theta^{**}(H) \cdot \varphi \in A^*$ tanımını kullanarak

$$\langle \theta^{**}(H) \cdot \varphi, a \rangle = \langle \theta^{**}(H), \varphi \cdot a \rangle = \langle H, \theta^*(\varphi \cdot a) \rangle \quad (3.1.37)$$

eşitliklerini yazabiliriz. Şimdi (3.1.36) eşitliğini göstermeye çalışalım. Her $h \in L^1(G)$ için (3.1.36) eşitliğinin sol tarafı için,

$$\langle H \cdot \theta^*(\varphi), h \rangle = \langle H, \theta^*(\varphi) \cdot h \rangle \quad (3.1.38)$$

yazılabilir. Yine (3.1.36) eşitliğinin sağ tarafı için de

$$\langle \theta^*(\theta^{**}(H) \cdot \varphi), h \rangle = \langle \theta^{**}(H) \cdot \varphi, \theta(h) \rangle = \langle H, \theta^*(\varphi \cdot \theta(h)) \rangle \quad (3.1.39)$$

yazılabilir. (3.1.36) eşitliğinin var olabilmesi için,

$$\langle H, \theta^*(\varphi) \cdot h \rangle = \langle H, \theta^*(\varphi \cdot \theta(h)) \rangle \quad (3.1.40)$$

eşitliğinin var olması ve dolayısıyla da

$$\theta^*(\varphi) \cdot h = \theta^*(\varphi \cdot \theta(h)) \quad (3.1.41)$$

eşitliğinin var olması gerekir. O halde şimdi bu eşitliğin sağlandığını göstererek ispatı tamamlayalım. Her $k \in L^1(G)$ için,

$$\begin{aligned} \langle \theta^*(\varphi) \cdot h, k \rangle &= \langle \theta^*(\varphi), h * k \rangle = \langle \varphi, \theta(h * k) \rangle = \langle \varphi, \theta(h) \cdot \theta(k) \rangle \\ &= \langle \varphi \cdot \theta(h), \theta(k) \rangle = \langle \theta^*(\varphi \cdot \theta(h)), k \rangle \end{aligned} \quad (3.1.42)$$

olur. Buradan, $\theta^*(\varphi) \cdot h = \theta^*(\varphi \cdot \theta(h))$ elde edilir. Dolayısıyla,

$$\langle H \cdot \theta^*(\varphi), h \rangle = \langle H, \theta^*(\varphi \cdot \theta(h)) \rangle = \langle \theta^*(\theta^{**}(H) \cdot \varphi), h \rangle \quad (3.1.43)$$

olur. Bu da $H \cdot \theta^*(\varphi) = \theta^*(\theta^{**}(H) \cdot \varphi)$ olduğunu gösterir. Böylece,

$$\langle \theta^{**}(F \cdot H), \varphi \rangle = \langle F, H \cdot \theta^*(\varphi) \rangle = \langle F, \theta^*(\theta^{**}(H) \cdot \varphi) \rangle = \langle \theta^{**}(F) \cdot \theta^{**}(H), \varphi \rangle$$

elde edilir. Buradan da $\theta^{**}(F \cdot H) = \theta^{**}(F) \cdot \theta^{**}(H)$ olduğu gösterilmiş olur. Böylelikle ispat tamamlanır.

Önerme 3.1.2. R lokal kompakt G grubunun A Banach uzayına sürekli bir sağ temsili olsun. $(f_i)_{i \in I}$ ağı, $L^1(G)$ cebirinin sağdan sınırlı yaklaşık bir birimi olmak üzere; her $a \in A$ için,

$$\int_G R_g f_i(g) a dg \rightarrow a \quad (3.1.44)$$

yakınsar.

İspat. R sağdan sürekli bir temsil olduğundan, $\forall \varepsilon > 0$ için e elemanı G nin birimi olduğundan G de e nin en az bir V komşuluğu vardır, öyle ki $\forall g \in V$ için,

$$\|R_g a - a\| < \varepsilon \quad (3.1.45)$$

olur. Diğer taraftan bazı j_0 vardır ve $\forall i > j_0$ için ve $\text{supp} f_i \subseteq V_i \subseteq V$ dir. Bunları gözönünde bulundurursak, $\forall i > j_0$ için,

$$\begin{aligned} \left\| \int_G R_g f_i(g) a dg - a \right\| &= \left\| \int_{V_i} R_g f_i(g) a dg - \int_{V_i} f_i(g) a dg \right\| \\ &\leq \int_{V_i} \|R_g a - a\| f_i(g) dg \\ &\leq \sup_{g \in V_i} \|R_g a - a\| \leq \varepsilon \end{aligned} \quad (3.1.46)$$

olur ki, böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.1.2. R , lokal kompakt G grubunun A Banach uzayına sürekli bir sağ temsili olsun. $(e_i)_{i \in I}$ ağı, $L^1(G)$ cebirinin sağdan sınırlı yaklaşık birimi olmak üzere, $\forall a \in A$ için,

$$\int_G R_g[e_i(g)]_{s^{-1}} adg \rightarrow R_s a \quad (3.1.47)$$

dır.

İspat.

$$\int_G R_g[e_i(g)]_{s^{-1}} adg = \int_G R_g \Delta(s^{-1}) e_i(g s^{-1}) adg \quad (3.1.48)$$

eşitliğinde, $gs^{-1} = p$ değişken değişimi yaparsak, $g = ps$ ve $dg = \Delta(s)dp$ elde edilir.

Bu eşitlik yukarıda yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \int_G R(g)[e_i(g)]_{s^{-1}} adg &= \int_G R_g \Delta(s^{-1}) e_i(g s^{-1}) adg \\ &= \int_G R_{ps} \Delta(s^{-1}) e_i(p) \Delta(s) adp \\ &= \int_G R_s R_g \Delta(s^{-1}) e_i(p) \Delta(s) adp \\ &= R_s \left(\int_G R_p e_i(p) adp \right) \end{aligned} \quad (3.1.49)$$

olur. Bu da bir önceki önermeden dolayı $R_s a$ ya yakınsar.

Önerme 3.1.3. G lokal kompakt bir grup ve $L^1(G)$ de, G üzerinde tanımlı grup cebiri olsun.

$(f_i)_i$ ve $(h_j)_j$ ağları $L^1(G)$ için sırasıyla soldan ve sağdan sınırlı yaklaşık birimler olsun.

Bu durumda, $(f_i + h_j - f_i * h_j)_{i,j}$ ağı da $L^1(G)$ için sınırlı bir yaklaşık birimdir.

İspat. $F_{i,j} = f_i + h_j - f_i * h_j$ olsun. Herhangi bir $f \in L^1(G)$ için,

$$\begin{aligned}
\|(F_{i,j}) * f - f\| &= \|(f_i + h_j - f_i * h_j) * f - f\| \\
&= \|f_i * f + h_j * f - f_i * h_j * f - f\| \\
&= \|f_i * f - f + h_j * f - f_i * h_j * f\| \\
&= \|f_i * f - f + h_j * (f - f_i * f)\| \\
&\leq \|f_i * f - f\| + \|h_j\| \|f - f_i * f\| \\
&= (1 + \|h_j\|) \|f_i * f - f\|
\end{aligned} \tag{3.1.50}$$

elde edilir. Yine benzer şekilde

$$\|f * (F_{i,j}) - f\| \leq (1 + \|f_i\|) \|f - f * h_j\| \tag{3.1.51}$$

olur. Dolayısıyla, $(f_i + h_j - f_i * h_j)$ ağı $L^1(G)$ için bir sınırlı yaklaşık birimdir.

Sonuç 3.1.3. $\theta : L^1(G) \rightarrow A$ sürekli bir homomorfizma olsun. f_i ve h_j , $L^1(G)$ nin sağdan ve soldan sınırlı bir yaklaşık birimi olsun. Eğer

$$(f_i + h_j - f_i * h_j) \tag{3.1.52}$$

$L^1(G)$ için sınırlı yaklaşık birim ise

$$\theta(f_i + h_j - f_i * h_j) \tag{3.1.53}$$

de A için sınırlı bir yaklaşık birimdir.

İspat. $F_{i,j} = f_i + h_j - f_i * h_j$ olsun. Böylece herhangi bir $a \in A$ için,

$$\begin{aligned}
\|\theta(F_{i,j})a - a\| &= \|\theta(f_i + h_j - f_i * h_j)a - a\| \\
&= \|\theta(f_i)a - a + \theta(h_j)a - \theta(f_i)\theta(h_j)a\| \\
&= \|\theta(f_i)a - a + \theta(h_j)(a - \theta(f_i)a)\| \\
&= \|(1 - \theta(h_j))(\theta(f_i)a - a)\| \\
&\leq 1 + \|\theta(h_j)\| \cdot \|\theta(f_i)a - a\|
\end{aligned} \tag{3.1.54}$$

olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\|a\theta(F_{i,j}) - a\| &= \|a\theta(f_i + h_j - f_i * h_j) - a\| \\
&= \|a\theta(h_j) - a + a\theta(f_i) - a\theta(f_i)\theta(h_j)\| \\
&= \|a\theta(h_j) - a + \theta(f_i)(a - a\theta(h_j))\| \\
&\leq \|1 + \theta(f_i)\| \cdot \|a - a\theta(h_j)\| \quad (3.1.55)
\end{aligned}$$

olur. Böylece $\theta(F_{i,j})$, A için bir yaklaşık birimdir.

$$\|\theta(F_{i,j})\| = \|\theta(f_i + h_j - f_i * h_j)\| \leq \|\theta(f_i)\| + \|\theta(h_j)\| + \|\theta(f_i)\| \cdot \|\theta(h_j)\| \quad (3.1.56)$$

olduğundan sınırlıdır. O hale $\theta(F_{i,j})$, A için bir sınırlı yaklaşık birimdir.

Teorem 3.1.3. A değişmeli bir Banach cebiri olsun. Değerler kümesi A da yoğun olan $\theta: L^1(G) \rightarrow A$ sürekli bir homomorfizma olsun. Eğer (f_i) ağı, $L^1(G)$ nin sağdan sınırlı bir yaklaşık birimi ise, $\theta(f_i)$ ağı da A cebirinin sağdan sınırlı bir yaklaşık birimidir.

İspat. $a \in A$ alalım. $\forall \varepsilon > 0$ ve bazı $f \in L^1(G)$ için, $\|a - \theta(f)\| < \frac{\varepsilon}{3}$ olur. Diğer taraftan,

$$\|\theta(f)\theta(f_i) - \theta(f)\| = \|\theta(f * f_i - f)\| \leq \|\theta\| \|f * f_i - f\| \rightarrow 0 \quad (3.1.57)$$

olduğundan, bazı i_0 vardır öyleki her $i > i_0$ için,

$$\|\theta(f)\theta(f_i) - \theta(f)\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (3.1.58)$$

olur. Şimdi de

$$a\theta(f_i) - a = a\theta(f_i) - \theta(f)\theta(f_i) + \theta(f)\theta(f_i) - \theta(f) + \theta(f) - a \quad (3.1.59)$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\|a\theta(f_i) - a\| &= \|a\theta(f_i) - \theta(f)\theta(f_i) + \theta(f)\theta(f_i) - \theta(f) + \theta(f) - a\| \\
&\leq \|a\theta(f_i) - \theta(f)\theta(f_i)\| + \|\theta(f)\theta(f_i) - \theta(f)\| + \|\theta(f) - a\| \\
&= \|\theta(f_i)(a - \theta(f))\| + \|\theta(f)\theta(f_i) - \theta(f)\| + \|\theta(f) - a\| \\
&= \|\theta(f_i)\| \|a - \theta(f)\| + \|\theta(f)\theta(f_i) - \theta(f)\| + \|\theta(f) - a\| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned} \tag{3.1.60}$$

olur. Buradan, $\|a\theta(f_i) - a\| \leq \varepsilon$ elde edilir. Bu da bize $a\theta(f_i) = a$ olduğunu, yani $\theta(f_i)$ nin de A nın sağdan bir sınırlı yaklaşık birimi olduğunu gösterir.

Sonuç 3.1.4. $\theta : L^1(G) \rightarrow PF_p(G)$ ye sürekli bir homomorfizma olsun. $(f_i)_{i \in I}$ ağı, $L^1(G)$ nin sağdan sınırlı yaklaşık birimi ise, $(\theta(f_i))_{i \in I}$ ağı da $PF_p(G)$ nin sağdan sınırlı yaklaşık birimidir.

İspat. Bir $R \in PF_p(G)$ alalım. $\forall \varepsilon > 0$ ve $\exists f \in L^1(G)$ için, $\|R - \theta(f)\| < \frac{\varepsilon}{3}$ olur. Ayrıca,

$$\|\theta(f)\theta(f_i) - \theta(f)\| = \|\theta(f * f_i) - \theta(f)\| \leq \|f * f_i - f\|_1 \rightarrow 0 \tag{3.1.61}$$

olduğundan, bazı j_0 vardır öyle ki $\forall i > j_0$ için,

$$\|\theta(f)\theta(f_i) - \theta(f)\| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{3.1.62}$$

olur. Şimdi de

$$R\theta(f_i) - R = R\theta(f_i) - \theta(f)\theta(f_i) + \theta(f)\theta(f_i) - \theta(f) + \theta(f) - R \tag{3.1.63}$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\|R\theta(f_i) - R\| &\leq \|R - \theta(f)\| \|\theta(f_i)\| + \|\theta(f)\theta(f_i) - \theta(f)\| + \|\theta(f) - R\| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned} \tag{3.1.64}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.5. $\theta : L^1(G) \rightarrow A$ sürekli bir homomorfizma olsun. $L^1(G)$ nin birim elemanı tek ise A nın da birim elemanı tektir.

İspat. $f', L^1(G)$ nin birim elemanı olsun. Bu durumda $\theta(f')$, A nın birim elemanıdır. Şimdi bu birim elemanın tek olduğunu gösterelim. f' ve f'' , $L^1(G)$ nin farklı iki birim elemanı olsun.

$f', L^1(G)$ nin birim elemanı ise; $f'' = f'' * f'$ olacak şekilde bir $f'' \in L^1(G)$ vardır.

$f'', L^1(G)$ nin birim elemanı ise; $f' = f' * f''$ olacak şekilde bir $f' \in L^1(G)$ vardır.

$$f'' = f'' * f' = f' * f'' = f' \quad (3.1.65)$$

olur. O halde, $L^1(G)$ nin birim elemanı tektir. Şimdi de A nın birim elemanının tek olduğunu gösterelim. $\theta(f'')$ ve $\theta(f')$, A nın iki farklı birim elemanı olsun. $\theta(f')$, A nın birim elemanı olduğundan

$$\theta(f' * f'') = \theta(f') \cdot \theta(f'') = \theta(f'') \quad (3.1.66)$$

olacak şekilde bir $\theta(f'') \in A$ vardır. Yine $\theta(f'')$, A nın birim elemanı olduğundan

$$\theta(f' * f'') = \theta(f') \cdot \theta(f'') = \theta(f') \quad (3.1.67)$$

olacak şekilde bir $\theta(f') \in A$ vardır. Buradan

$$\theta(f') = \theta(f') \cdot \theta(f'') = \theta(f'') \quad (3.1.68)$$

elde edilir. Bu da A nın birim elemanının tek olduğunu gösterir.

4. ARENS ÇARPIMLARI

Bu bölümde, Arens çarpımları ile ilgili bazı özellikler verilmiştir. Yine bu bölümde A^{**} ikinci dual uzayı, hem sağdan hem de soldan bir $zayıf^*$ sınırlı yaklaşık birime sahip ise, A^{**} ın bir $zayıf^*$ sınırlı yaklaşık birime sahip olduğu üzerine çalışılmıştır.

4.1. Arens Çarpımları ve Arens Regülerlik

A bir Banach cebiri ve A^* ve A^{**} sırasıyla A nın birinci ve ikinci dualidir. $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağı, her $b \in A$ için,

$$be_\alpha \rightarrow b \text{ ve } e_\alpha b \rightarrow b$$

oluyorsa, $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ ağı, A nın sınırlı yaklaşık birimidir. $b \in A$ ve $\varphi \in A^*$ için sırasıyla,

$$\langle \varphi \cdot b, c \rangle = \langle \varphi, bc \rangle = \varphi(bc) \quad (4.1.1)$$

ve

$$\langle b \circ \varphi, c \rangle = \langle \varphi, cb \rangle = \varphi(cb) \quad (4.1.2)$$

şeklinde tanımlanan A^* üzerindeki fonksiyonelleri $\varphi \cdot b$ ve $b \circ \varphi$ ile gösteririz. A Banach cebiri, ikinci dualinin bir alt uzayı olarak düşünülebileceğinden, her $b \in A$ ve $\varphi \in A^*$ için $\langle b, \varphi \rangle$ yi, $\langle \varphi, b \rangle$ olarak tanımlayabiliriz. A^*A ve AA^* ni sırasıyla,

$$\{\varphi \cdot b : b \in A \text{ ve } \varphi \in A^*\} \quad (4.1.3)$$

ve

$$\{b\varphi : b \in A \text{ ve } \varphi \in A^*\} \quad (4.1.4)$$

kümeleri ile gösteririz. Bu iki küme, A^* nin alt kümeleridir (Haghnejad Azar and Riazi, 2009).

A , bir BAI (sınırlı bir yaklaşık birim) içeren bir Banach cebiri olsun. Eğer, $A^*A = A^*$ ($AA^* = A^*$) eşitliği sağlanıyorsa, A^* nin soldan(sağdan) çarpanlarına ayrılabilir olduğu söylenir. Eğer hem $A^*A = A^*$ hem de $AA^* = A^*$ eşitlikleri sağlanıyorsa, A^* nin iki taraftan da çarpanlarına ayrılabilir olduğu söylenir (Haghnejad Azar and Riazi, 2009).

Arens [1], herhangi bir A Banach cebiri verildiğinde, A nın ikinci duali üzerinde çarpımı genişleten iki cebir çarpımı olduğunu göstermiştir. Aşağıda, [11]'de verilen bu iki çarpımı tanımlayacağız. Birinci Arens çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanır. $b, c \in A$, $\varphi \in A^*$ ve $F, G \in A^{**}$ olsun.

$$\langle \varphi \cdot b, c \rangle = \langle \varphi, b \cdot c \rangle \quad (4.1.5)$$

$$\langle F \cdot \varphi, b \rangle = \langle F, \varphi \cdot b \rangle \quad (4.1.6)$$

$$\langle F \cdot G, \varphi \rangle = \langle F, G \cdot \varphi \rangle \quad (4.1.7)$$

Açıkça $F \cdot \varphi \in A^*$ ve $F \cdot G \in A^{**}$ dir. $(A^{**}, \cdot)$ gösterimi, A^{**} in birinci Arens çarpımıyla donatılmış hali için kullanılır. Ayrıca tüm $b \in A$ ve $\varphi \in A^*$ için $\varphi \cdot b$ yerine φb gösterimini kullanırız (Haghnejad Azar and Riazi, 2009). İkinci Arens çarpımı da aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$b, c \in A$, $\varphi \in A^*$ ve $F, G \in A^{**}$ için, A^* kümesindeki $b \circ \varphi$ ve $\varphi \circ F$ elemanları ile A^{**} kümesindeki $F \circ G$ elemanı, sırasıyla aşağıdaki eşitliklerle tanımlanır.

$$\langle b \circ \varphi, c \rangle = \langle \varphi, cb \rangle \quad (4.1.8)$$

$$\langle \varphi \circ F, b \rangle = \langle F, b \circ \varphi \rangle \quad (4.1.9)$$

$$\langle F \circ G, \varphi \rangle = \langle G, \varphi \circ F \rangle \quad (4.1.10)$$

E, A^{**} da bir eleman olmak üzere, E nin birinci Arens çarpımı için sağ birim ve ikinci Arens çarpımı için sol birim olması durumunda **karma birim** olduğu söylenir. Yani, E bir karma birimdir ancak ve ancak her $F \in A^{**}$ için, $F \cdot E = E \circ F = F$ koşulu sağlanır (Haghnejad Azar and Riazi, 2009).

Her $F \in A^{**}$ için $F \cdot E = E \cdot F = F$ olacak şekilde bir $E \in A^{**}$ elemanı varsa, A^{**} in birinci Arens çarpımına göre birimli olduğu söylenir. Benzer şekilde, her $F \in A^{**}$ için, $F \circ E = E \circ F = F$ olacak şekilde bir $E \in A^{**}$ elemanı varsa, A^{**} in ikinci Arens çarpımına göre birimli olduğu söylenir. [3, s.146] ya göre A^{**} dakı bir E elemanının karma birim olması, A dakı bir BAI $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ nın $zayıf^*$ kapanışı olmasıyla denktir (Haghnejad Azar and Riazi, 2009).

A^{**} nin birinci Arens çarpımına göre $zayıf^*$ sınırlı bir sol yaklaşık birime ($= W^*LBAI$) sahip olduğu söylendiğinde, A kümesinde $(e_\alpha)_\alpha \subseteq A$ şeklinde gösterilen ve aşağıdaki koşulu sağlayan sınırlı bir ağı var olduğu ifade edilir. Her $F \in A^{**}$ ve $\varphi \in A^*$ için,

$$\langle e_\alpha \cdot F, \varphi \rangle \rightarrow \langle F, \varphi \rangle \quad (4.1.11)$$

dir. W^*RBAI nin tanımı W^*LBAI ye benzerdir. Eğer A^{**} hem W^*LBAI hem de W^*RBAI ye sahip ise o zaman A^{**} ın W^*BAI ye sahip olduğunu söyleriz (Haghnejad Azar and Riazi, 2009).

$F, G \in A^{**}$ olsun ve $F \cdot G, F \circ G$ sırasıyla A^{**} dakı birinci ve ikinci Arens çarpımları olsun. O halde, A^{**} da sabit bir G için, $F \rightarrow F \cdot G$ dönüşümü $zayıf^* - zayıf^*$ süreklidir, ancak $F \rightarrow G \cdot F$ dönüşümü, $G \in A$ olmadığı sürece genellikle A^{**} üzerinde $zayıf^* - zayıf^*$ sürekli değildir (Haghnejad Azar and Riazi, 2009).

Örneğin, G sonsuz bir topolojik grup olduğunda $L^1(G)^{**}$ ve $M(G)^{**}$ cebirleri için, genellikle $F \rightarrow G \cdot F$ dönüşümü $L^1(G)^{**}$ ve $M(G)^{**}$ üzerinde $zayıf^* - zayıf^*$ sürekli değildir (bkz. [10,11]) (Haghnejad Azar and Riazi, 2009).

Ayrıca, A^{**} dakı ikinci Arens çarpımı için; $b \circ \varphi, \varphi \circ F \in A^*$ ve $F \circ G \in A^{**}$ olduğunu biliyoruz. A^{**} da sabit bir G için, $F \mapsto G \circ F$ dönüşümü A^{**} üzerinde $zayıf^* - zayıf^*$

süreklidir, ancak $F \mapsto F \circ G$ dönüşümü genellikle $G \in A$ olmadığı sürece, A^{**} üzerinde $\text{zayıf}^* - \text{zayıf}^*$ sürekli değildir, ancak $G \in A$ ise süreklidir (Haghnejad Azar and Riazi, 2009).

Her $F, G \in A^{**}$ için, $F \cdot G = F \circ G$ eşitliği geçerliyse, A cebirinin Arens regüler olduğu söylenir (Lau and Ulger, 1993).

Her zayıf Cauchy dizisinin zayıf bir limiti varsa, A zayıf dizisel tam olarak adlandırılır ve her $b \in A$ için eğer $x \rightarrow bx$, çarpım operatörü zayıf kompakt ise, A ya zayıf tamamen süreklidir denir.

Örnek 4.1.1 Her $b \in A$, $\varphi \in A^*$ ve $F \in A^{**}$ için aşağıdaki ifadeler geçerlidir;

- i. $\varphi \circ b = \varphi \cdot b$ ve $b \circ \varphi = b \cdot \varphi$
- ii. $b \circ F = b \cdot F$ ve $F \circ b = F \cdot b$

(Haghnejad Azar and Riazi, 2009).

İspat. i. $\forall b \in A, \varphi \in A^*$ için $c \in A$ ise,

$$\langle \varphi \circ b, c \rangle = \langle c, \varphi \circ b \rangle = \langle bc, \varphi \rangle = \varphi(bc) \quad (4.1.12)$$

ve

$$\langle \varphi \cdot b, c \rangle = \langle c, \varphi \cdot b \rangle = \langle bc, \varphi \rangle = \varphi(bc) \quad (4.1.13)$$

olduğundan $\varphi \circ b = \varphi \cdot b$ olur. Yine; $b \circ \varphi = b \cdot \varphi$ eşitliği de benzer şekilde yapılır.

ii. $\forall b \in A, \varphi \in A^*$ ve $F \in A^{**}$ için,

$$\langle b \circ F, \varphi \rangle = \langle b, F \cdot \varphi \rangle = \langle F \cdot \varphi, b \rangle = \langle F, \varphi \cdot b \rangle = \langle b \cdot F, \varphi \rangle \quad (4.1.14)$$

olduğundan, $b \circ F = b \cdot F$ olur. Yine; $F \circ b = F \cdot b$ eşitliği de benzer olarak yapılır.

Yukarıdaki (ii) ifadesi, A^{**} nin birinci Arens çarpımına göre W^*LBAI özelliğine sahip olmasının ancak ve ancak ikinci Arens çarpımına göre W^*LBAI özelliğine sahip olması durumunda geçerli olduğunu göstermektedir (Haghnejad Azar and Riazi, 2009).

Lemma 4.1.1. $(b_\alpha)_{\alpha \in I}$, A Banach cebirinin sınırlı bir yaklaşık birimi olsun. Bu takdirde A^* ın soldan(sağdan) çarpanlarına ayrılabilir olması için gerek ve yeter şart, her bir $\varphi \in A^*$ için $(\varphi b_\alpha)_{\alpha \in I}$ ve $(b_\alpha \circ \varphi)_{\alpha \in I}$ ağılarının, φ ye zayıf yakınsak olmasıdır (Lau and Ulger, 1996).

İspat. Biz sadece A^* nin soldan çarpanlarına ayrılabilirdiğini göstereceğiz. Sağdan çarpanlarına ayrılabilirdi de benzer şekilde gösterilebilir.

A^* soldan çarpanlarına ayrılabilir ve $\varphi \in A^*$ olsun. Bazı $\rho \in A^*$ ve $b \in A$ için, $\varphi = \rho b$ dır. Böylece, $\|b b_\alpha - b\| \rightarrow 0$ olduğundan, herhangi bir $F \in A^{**}$ için,

$$\begin{aligned} \langle \varphi \cdot b_\alpha, F \rangle &= \langle \varphi, b_\alpha \cdot F \rangle \rightarrow \langle \rho b, b_\alpha \cdot F \rangle = \langle \rho, b b_\alpha \cdot F \rangle \\ &= \langle \rho, b \cdot F \rangle = \langle \rho b, F \rangle = \langle \varphi, F \rangle \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

elde edilir ki, bu da $\varphi b_\alpha \rightarrow \varphi$ zayıf yakınsak olduğunu gösterir.

Tersine, kabul edelim ki $\varphi \in A^*$ için $\varphi b_\alpha \rightarrow \varphi$ zayıf yakınsak olsun. Bu durumda $\varphi b_\alpha \in A^*A$ ve A^*A da, A^* in kapalı bir alt uzayı olduğundan [17, 32.22] den $\varphi \in A^*A$ dır. Buradan, $A^* = A^*A$ olur. Böylece, A^* soldan çarpanlarına ayrılabilir (Lau and Ulger, 1996).

Önerme 4.1.1. A sınırlı yaklaşık birime sahip bir Banach cebiri olsun. Aşağıdaki iddialar geçerlidir.

- i. A^* ın soldan çarpanlarına ayrılabilir olması için gerek ve yeter şart $(A^{**}, \cdot)$ cebirinin birimli olmasıdır.
- ii. A^* ın sağdan çarpanlarına ayrılabilir olması için gerek ve yeter şart $(A^{**}, \circ)$ cebirinin birimli olmasıdır.
- iii. A^* , her iki taraftan da çarpanlarına ayrılabilir ise $(A^{**}, \cdot)$ ve $(A^{**}, \circ)$ cebirlerinin birim elemanları aynıdır (Lau and Ulger, 1996).

İspat. i. A^* soldan çarpanlarına ayrılabilir olsun. A sınırlı bir yaklaşık birime sahip olduğundan A^{**} bir karma birime sahiptir ve E de A^{**} ın bir birimi olsun. Böylece $F \in A^{**}$ için $F \cdot E = F$ olur. Herhangi bir $\varphi \in A^*$ ve $b \in A$ için $\varphi = \rho \cdot b$ olacak şekilde bir $\rho \in A^*$ vardır ve $b \cdot E = b$ dır.

$$\langle \varphi, E \cdot F \rangle = \langle \rho \cdot b, E \cdot F \rangle = \langle \rho, b \cdot F \rangle = \langle \varphi, F \rangle \quad (4.1.16)$$

dir. Böylece, $E \cdot F = F$ olur. Dolayısıyla A^{**} birimlidir.

Tersine A^{**} ın bir birim elemana sahip olduğunu varsayalım. Bu durumda A nın, A^{**} ın zayıf topolojisinde E ye yakınsayan bir $BAI (b_\alpha)_{\alpha \in I}$ vardır. Dolayısıyla $\varphi \in A^*$ ve $F \in A^{**}$ için birinci Arens Çarpımının özelliklerine göre,

$$\langle \varphi \cdot b_\alpha, F \rangle = \langle \varphi, b_\alpha \cdot F \rangle \rightarrow \langle \varphi, E \cdot F \rangle = \langle \varphi, F \rangle \quad (4.1.17)$$

dir. Böylece $\varphi \cdot b_\alpha \rightarrow \varphi$ zayıf yakınsaktır ve önceki lemmaya göre A^* , soldan çarpanlarına ayrılabilir (Lau and Ulger, 1996).

ii. Buradaki ispat (i) deki ispata benzer olarak yapılabilir.

iii. A^* soldan ve sağdan çarpanlarına ayrılabilir olsun. O zaman $(A^{**}, \cdot)$ ve $(A^{**}, \circ)$ cebirlerinin her ikisi de birimlidir. E_1 ve E_2 sırasıyla $(A^{**}, \cdot)$ ve $(A^{**}, \circ)$ cebirlerinin birim elemanları olsun. O halde, hem E_1 hem de E_2 karma birimlerdir. A^{**} birimli olduğundan, yalnızca bir karma birime sahip olabilir. Şimdi $E_1 = E_2$ olduğunu gösterelim.

Eğer E_1 , A^{**} nin bir karma birimi ise, $E_1 \cdot E_2 = E_2$ olacak şekilde bir $E_2 \in A^{**}$ vardır. (1)

Yine E_2 , A^{**} nin bir karma birimi ise, $E_1 \cdot E_2 = E_1$ olacak şekilde bir $E_1 \in A^{**}$ vardır. (2)

(1) ve (2) den

$$E_2 = E_2 \cdot E_1 = E_1 \cdot E_2 = E_1 \quad (4.1.18)$$

elde edilir. Bu da, $(A^{**}, \cdot)$ nin karma biriminin tek olduğunu gösterir.

Benzer olarak aynı işlemler $(A^{**}, \circ)$ için uygulanırsa $(A^{**}, \circ)$ nin karma biriminin tek olduğu gösterilebilir. Böylece $(A^{**}, \cdot)$ ve $(A^{**}, \circ)$ cebirlerinin birim elemanları aynı olur (Lau and Ulger, 1996).

Teorem 4.1.1. A nın bir sınırlı yaklaşık ağı $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- i. $\varphi \in A^*$ için $\varphi \cdot e_\alpha \xrightarrow{w^*} \varphi$ ve $e_\alpha \circ \varphi \xrightarrow{w^*} \varphi$ dir.
- ii. A^* nin sağdan çarpanlarına ayrılabilir olması için gerek ve yeterli şart A^{**} nin soldan *zayıf** sınırlı yaklaşık bir birime sahip olmasıdır.
- iii. A^* nin soldan çarpanlarına ayrılabilir olması için gerek ve yeterli şart A^{**} nin sağdan *zayıf** sınırlı yaklaşık bir birime sahip olmasıdır.
- iv. Eğer A^* , soldan çarpanlarına ayrılabilirse ve $E \in A^{**}$ için $e_\alpha \xrightarrow{w^*} E$ ise bu takdirde E , A^{**} nin birim elemanıdır. Ayrıca, A , sağdan çarpanlarına ayrılabilirse ve $E \in A^{**}$ için $e_\alpha \xrightarrow{w^*} E$ ise o zaman E , $(A^{**}, \circ)$ nin birim elemanıdır.
- v. Eğer A^* , soldan çarpanlarına ayrılabilir ise, $\overline{AA^{**}}^{w^*} = A^{**}$ dir (Haghnejad Azar and Riazi, 2009).

İspat. i. (i) nin ispatı açıktır.

- ii. $A^*A = A^*$ ve $F \in A^{**}$, $\varphi \in A^*$ olsun. O halde [11, 2.1] den $\varphi \cdot e_\alpha \xrightarrow{w} \varphi$ dir. O halde;

$$\langle e_\alpha \cdot F, \varphi \rangle = \langle e_\alpha, F \cdot \varphi \rangle = \langle F \cdot \varphi, e_\alpha \rangle = \langle F, \varphi \cdot e_\alpha \rangle \rightarrow \langle F, \varphi \rangle \quad (4.1.19)$$

dir. Sonuç olarak, $e_\alpha \cdot F \xrightarrow{w^*} F$ olur.

Tersine, her $F \in A^{**}$ için $e_\alpha \cdot F \xrightarrow{w^*} F$ olsun. O zaman her $\varphi \in A^*$ için $\langle e_\alpha \cdot F, \varphi \rangle \rightarrow \langle F, \varphi \rangle$ dir. $\langle e_\alpha \cdot F, \varphi \rangle = \langle F, \varphi \cdot e_\alpha \rangle$ olduğundan, $\langle F, \varphi \cdot e_\alpha \rangle \rightarrow \langle F, \varphi \rangle$ olur.

- iii. (iii) nin ispatı (ii) ile aynıdır.

iv. $e_\alpha \xrightarrow{w^*} E$ olsun. O zaman, her $F \in A^{**}$ için, [11, 2.1] i kullanarak aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$\langle E \cdot F, \varphi \rangle = \langle E, F \cdot \varphi \rangle = \lim_\alpha \langle e_\alpha, F \cdot \varphi \rangle = \lim_\alpha \langle F, \varphi \cdot e_\alpha \rangle \rightarrow \langle F, \varphi \rangle \quad (4.1.20)$$

Dolayısıyla $E \cdot F = F$ sonucuna varırız. Şimdi $F \in A^*$ ve $b \in A$ olsun. O zaman,

$$\langle E \cdot \varphi, b \rangle = \langle E, \varphi \cdot b \rangle = \lim_\alpha \langle e_\alpha, \varphi \cdot b \rangle = \lim_\alpha \langle \varphi, b \cdot e_\alpha \rangle = \langle \varphi, b \rangle \quad (4.1.21)$$

yazabiliriz. Sonuç olarak, $\langle F \cdot E, \varphi \rangle = \langle F, E \cdot \varphi \rangle = \langle F, \varphi \rangle$ ve buradan $F \cdot E = F$ elde edilir. Bu da, E in A^{**} nın bir birim elemanı olduğunu gösterir. Bir sonraki iddia da buna benzer.

v. $A^*A = A^*$ ve $\varphi \in A^*$ olsun. [11, 2.1] den $\varphi \cdot e_\alpha \xrightarrow{w} \varphi$ dir. Her $F \in A^{**}$ için, $e_\alpha \cdot F \in A^{**}$ olduğundan,

$$\langle e_\alpha \cdot F, \varphi \rangle = \langle F, \varphi \cdot e_\alpha \rangle \rightarrow \langle F, \varphi \rangle \quad (4.1.22)$$

yazabiliriz. Böylece $e_\alpha \cdot F \xrightarrow{w^*} F$ ve $F \in \overline{AA^{**}}^{w^*} = A^{**}$ olduğundan ispat tamamlanmış olur (Haghnejad Azar and Riazi, 2009).

Yukarıdaki teorem ve [11, 2.2a] uyarınca A^{**} , sağdan $zayıf^*$ sınırlı yaklaşık bir birime sahip (W^*RBAI) ve soldan $zayıf^*$ sınırlı yaklaşık bir birime sahip (W^*LBAI) ise, A^{**} bir $zayıf^*$ sınırlı yaklaşık bir birime sahiptir (W^*BAI) denir. Eğer, G lokal kompakt sonlu bir grup ve $A = L^1(G)$ için, $L^1(G)^{**}$ sağdan $zayıf^*$ sınırlı yaklaşık bir birime sahip (W^*RBAI) ve soldan $zayıf^*$ sınırlı yaklaşık bir birime sahip (W^*LBAI) ise, $L^1(G)^{**}$ bir $zayıf^*$ sınırlı yaklaşık bir birime sahiptir (W^*BAI) denir. Ancak; G lokal kompakt sonsuz bir grup olduğunda bu sağlanmaz. Yani $L^1(G)^{**}$, sınırlı bir yaklaşık birime sahip değildir (Haghnejad Azar and Riazi, 2009).

Sonuç 4.1.1. A nın sınırlı bir yaklaşık birime sahip olduğunu varsayalım. O halde aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

- i. $(A^{**}, \cdot)$ cebirinin birimli olması için gerek ve yeter şart A^{**} ın soldan $zayıf^*$ sınırlı yaklaşık bir birime sahip olmasıdır.
- ii. $(A^{**}, \circ)$ cebirinin birimli olması için gerek ve yeter şart A^{**} ın sağdan $zayıf^*$ sınırlı yaklaşık bir birime sahip olmasıdır.
- iii. A^{**} , ve $(A^{**}, \circ)$ cebirsel yapısı birimlidir ancak ve ancak A^{**} ın $zayıf^*$ sınırlı yaklaşık bir birime sahip olmasıdır.
- iv. Varsayalım ki A , sıralı bir sınırlı yaklaşık birim ile $zayıf$ sıralı tam (WSC) olsun. O halde A^{**} ın soldan $zayıf^*$ sınırlı yaklaşık bir birime sahip olması ancak ve ancak A^{**} ın sağdan $zayıf^*$ sınırlı yaklaşık bir birime sahip olması durumunda geçerlidir ve ayrıca $(A^{**}, \cdot)$ nin birimli olması için gerek ve yeter şart, $(A^{**}, \circ)$ nin de birimli olmasıdır (Haghnejad Azar and Riazi, 2009).

İspat. Teorem 4.1.1. ve [11, 2.2] kullanılarak, (i), (ii) nin kanıtları açıktır. (iv) ün kanıtı, [11, 2.6] ve Teorem 4.1.1. den çıkar (Haghnejad Azar and Riazi, 2009).

Sonuç 4.1.2. A nın sınırlı bir yaklaşık birime sahip Arens regüler olduğunu varsayalım. Ayrıca A^{**} nin A da iki taraflı bir ideal olduğunu varsayalım. O zaman A^{**} , $zayıf^*$ sınırlı yaklaşık bir birime sahip olacağından, birimli olur (Haghnejad Azar and Riazi, 2009).

5. HEMEN HEMEN PERİYODİK FONKSİYONELLER

Bu bölümde, hemen hemen periyodik fonksiyonellerin bazı özellikleri incelenmiş ve Arens regülerlik ile periyodik fonksiyoneller arasındaki ilişki üzerine çalışılmıştır.

Tanım 5.1. φ, A^* üzerinde bir fonksiyonel olmak üzere A dan A^* içine olan $b \rightarrow \varphi \cdot b$ eşleminin zayıf kompakt olması durumunda, A üzerinde zayıf hemen hemen periyodik (wap) olarak adlandırılır. Pym [15] te bu tanımın aşağıdaki denk koşulla eşdeğer olduğunu göstermiştir.

Herhangi iki $(b_\alpha)_\alpha$ ve $(c_\beta)_\beta$ ağırları için, $\{b \in A : \|b\| \leq 1\}$ kümesinde aşağıdaki eşitlik

$$\lim_{\alpha} \lim_{\beta} \langle \varphi, b_\alpha c_\beta \rangle = \lim_{\beta} \lim_{\alpha} \langle \varphi, b_\alpha c_\beta \rangle \quad (5.1)$$

her iki tekrarlı limit de mevcut olduğunda geçerlidir (Duncan and Ülger, 1992).

A üzerindeki tüm zayıf hemen hemen periyodik fonksiyonellerin kümesi $wap(A)$ ile gösterilir. Ayrıca, $wap(A) = A^*$ olması için gerek ve yeter koşul, her $F, G \in A^{**}$ için,

$$\langle F \cdot G, \varphi \rangle = \langle F \circ G, \varphi \rangle \quad (5.2)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Yani, A nın Arens regüler olmasıdır (Lau and Ülger, 1993).

Lemma 5.1. A , soldan $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ yaklaşık birimine sahip bir Banach cebiri olsun.

- i. $A^*A \subset c(A^*) \subset \overline{A^*A}$ dır.
- ii. Eğer $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ sınırlıysa o zaman A^*A kapalıdır ve $A^*A = c(A^*) = \overline{A^*A}$ dır.
- iii. Eğer A, A^{**} da bir sağ ideal ise o zaman $\overline{A^*A} \subset wap(A)$ dır. Ayrıca; $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ sınırlı ise o zaman $wap(A) = A^*A = \overline{A^*A}$ eşitlikleri geçerlidir.
- iv. Eğer A refleksif (yansımali) ise o zaman $\overline{A^*A} = A^*$ dır.

- v. Eğer A nın her a elemanı sol kompakt ise o zaman $\overline{A^*A} \subset ap(A)$ dir. Ayrıca, eğer $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ sınırlı ise o zaman $ap(A) = c(A^*) = A^*A$ dır (Duncan and Ulger, 1992).

İspat. i. $\varphi \in A^*$, $a \in A$ olmak üzere,

$$(\varphi e_\alpha)a = \varphi e_\alpha a \quad (5.3)$$

ve

$$\|\varphi e_\alpha a - \varphi a\| \leq \|\varphi\| \|e_\alpha a - a\| \rightarrow 0 \quad (5.4)$$

dir. Buradan $A^*A \subset c(A^*)$ olduğu görülür. $c(A^*) \subset \overline{A^*A}$ olduğu ise, $c(A^*)$ nin tanımından açıkça görülmektedir.

ii. Eğer $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ sınırlıysa o zaman A^*A uzayı, A^* da kapalıdır [9, Bölüm 32.22].

iii. A nın A^{**} da bir sağ ideal olduğunu varsayalım. O zaman, Le_α zayıf kompakt bir operatördür. Herhangi bir $\varphi \in A^*$ için,

$$\Phi_{\varphi e_\alpha} = \Phi_\varphi L_{e_\alpha} \quad (5.5)$$

eşitliği geçerlidir ve dolayısıyla $\varphi e_\alpha \in wap(A)$ dir. $\varphi \in c(A^*)$ için,

$$\|\Phi_{\varphi e_\alpha} - \Phi_\varphi\| \leq \|\varphi e_\alpha - \varphi\| \rightarrow 0 \quad (5.6)$$

dır. Bu, $c(A^*) \subset wap(A)$ olduğunu gösterir. $A^*A \subset c(A^*)$ ve $wap(A)$, A^* da kapalı olduğu için $\overline{A^*A} \subset wap(A)$ elde edilir.

Şimdi, $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ nın sınırlı olduğunu varsayalım. $\varphi \in wap(A)$ ve $a^{**} \in A^{**}$ olsun. Goldstine Teoremi'ne göre, $a_\beta \rightarrow a^{**}$ olacak şekilde *zayıf* topolojide* yakınsayan, A içinde bir (a_β) ağı vardır. (e_α) , soldan sınırlı yaklaşık bir birim ve $\varphi \in wap(A)$ olduğundan

$$\lim_{\alpha} \langle \varphi e_{\alpha}, a^{**} \rangle = \lim_{\alpha} \lim_{\beta} \langle \varphi, e_{\alpha} a_{\beta} \rangle = \lim_{\beta} \lim_{\alpha} \langle \varphi, e_{\alpha} a_{\beta} \rangle = \lim_{\beta} \langle \varphi, a_{\beta} \rangle = \langle \varphi, a^{**} \rangle \quad (5.7)$$

dir. Böylece zayıf topolojide, $\varphi e_{\alpha} \rightarrow \varphi$ olur. Bu, $\varphi \in A^*A$ olduğunu kanıtlar. Buradan

$$wap(A) = c(A^*) = A^*A \quad (5.8)$$

eşitliğine sahip oluruz.

iv. A nın refleksif (yansımali) olduğunu varsayalım, öyle ki her $\varphi \in A^*$ için zayıf topolojide $\varphi e_{\alpha} \rightarrow \varphi$ dir. Bu nedenle $A^* \subset \overline{A^*A}$ ve $A^* = \overline{A^*A}$ dir.

v. Eğer A daki her a elemanı kompakt ise o zaman (iii) durumunda olduğu gibi

$$A^*A \subseteq ap(A) \quad (5.9)$$

elde ederiz. Geri kalanı açıktır (Duncan and Ulger, 1992).

Lemma 5.2. Φ_A nın, A nın noktalarını ayırdığını varsayalım. a , A nın zayıf kompakt bir elemanı ve $\varphi \in A^*$ olsun. O zaman φa fonksiyoneli hemen hemen periyodiktir (Duncan and Ulger, 1992).

İspat. $\varphi a \in \overline{span}\Phi_A$ dır. Aksini varsayalım. O zaman, Hahn-Banach teoremine göre, $\langle \varphi a, a^{**} \rangle \neq 0$ dır ancak her $g \in span\Phi_A$ için $\langle g, a^{**} \rangle = 0$ olacak şekilde bir $a^{**} \in A^{**}$ vardır. Özellikle, $g \in \Phi_A$ için, $ga = g(a)g \in span\Phi_A$ dır ve dolayısıyla

$$\langle ga, a^{**} \rangle = \langle g, aa^{**} \rangle = 0 \quad (5.10)$$

dır. Ancak; a zayıf kompakt olduğundan, $aa^{**} \in A$ dır. Φ_A , A nın noktalarını ayırdığından, $aa^{**} = 0$ olur. Bu, $\langle \varphi a, a^{**} \rangle \neq 0$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla, $\varphi a \in \overline{span}\Phi_A$ dır (Duncan and Ulger, 1992).

Teorem 5.1. A , sınırlı bir soldan yaklaşık birim (e_α) yı içeren bir Banach cebiri olsun. A , A^{**} da bir sağ ideal olsun. O zaman $\overline{\text{span}}\Phi_A = \text{wap}(A)$ eşitliği ancak ve ancak Φ_A nın, A nın noktalarını ayırdığında geçerlidir. Bu durumda

$$\overline{\text{span}}\Phi_A = \text{wap}(A) = A^*A = c(A^*) = \text{ap}(A) \quad (5.11)$$

dir (Duncan and Ulger, 1992).

İspat. Kapsamalar, $\overline{\text{span}}\Phi_A \subset \text{ap}(A) \subset \text{wap}(A)$ açıktır. Φ_A , A nın noktalarını ayırdığını varsayalım. $\varphi \in \text{wap}(A)$ olsun. Önceki lemmaya göre, her $\alpha \in I$ için $\varphi e_\alpha \in \overline{\text{span}}\Phi_A$ dır. Lemma 5.1 (iii) den $\varphi e_\alpha \rightarrow \varphi$ zayıf yakınsadığını gösterir. Dolayısıyla, $\varphi \in \overline{\text{span}}\Phi_A$ dır ve buradan $\overline{\text{span}}\Phi_A = \text{wap}(A)$ olur.

Tersine, $\overline{\text{span}}\Phi_A = \text{wap}(A)$ olsun. $a \in A$ olsun. Öyle ki, her $g \in \Phi_A$ için $\langle g, a \rangle = 0$ olsun. O zaman her $\varphi \in \text{wap}(A)$ için, $\langle \varphi, a \rangle = 0$ dır. (e_α) , zayıf kompakt olduğundan, her $\varphi \in A^*$ için $\varphi e_\alpha \in \text{wap}(A)$ dır. Dolayısıyla, $\langle \varphi, e_\alpha a \rangle = 0$ dır. Bu, her α için $e_\alpha a = 0$ ve $a = 0$ demektir. Yani Φ_A , A nın noktalarını ayırır. Geri kalanı Lemma 5.1. den açıktır (Duncan and Ulger, 1992).

Teorem 5.2. A sınırlı bir sol yaklaşık birime sahip bir Banach cebiri olsun. Eğer A , DPP (Dunford-Pettis Property) özelliğine sahip ve ikinci dualinde bir sağ ideal ise, o halde

$$\text{wap}(A) = \text{ap}(A) \quad (5.12)$$

eşitliği geçerlidir (Duncan and Ulger, 1992).

İspat. Lemma 5.1. (iii) ye göre $\text{wap}(A) = c(A^*) = A^*A$ eşitlikleri geçerlidir. $\varphi \in \text{wap}(A)$ olsun. Le_α ve Φ_φ zayıf kompakt olduğundan, DPP ye göre operatör $\Phi_{\varphi e_\alpha} = \Phi_\varphi Le_\alpha$ kompakttır.

$$\|\Phi_{\varphi e_\alpha} - \Phi_\varphi\| \leq \|\varphi e_\alpha - \varphi\| \rightarrow 0 \quad (5.13)$$

olduğundan, $\varphi \in ap(A)$ dır. Buradan, $wap(A) = ap(A)$ olduğu gösterilmiş olur (Duncan and Ulger, 1992).

Önerme 5.1. G , lokal kompakt bir grup olmak üzere, $A = L^1(G)$ olsun. O zaman A, A^{**} da bir sağ idealdir ancak ve ancak G kompakt bir gruptur (Duncan and Ulger, 1992).

İspat. A nın, A^{**} da bir sağ ideal olduğunu varsayalım. Önceki teoreme göre $ap(A) = wap(A)$ yani, $WAP(G) = AP(G)$ dir (bkz. [17, 4]). G nin kompakt olduğu [4, Bölüm 2.24]'ten ispatı yapılır. Tersinin doğruluğu açıkça görülmektedir (bkz. [18]) (Duncan and Ulger, 1992).

Önerme 5.2. Aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

- i. $ap(c_0) = l^1$
- ii. $ap(l^1) = c_0$
- iii. $ap(l^p) = l^q$ $(1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$ (Duncan and Ulger, 1992).

İspat. i. Eğer $A = c_0$ sınırlı bir yaklaşık birime ve DPP ye sahipse ve de ikinci dualinde bir ideal ve aynı zamanda Arens regüler ise, o zaman $l^1 = wap(A) = ap(A)$ olur.

ii. l^1 bir yaklaşık birime sahiptir ve l^1 in her elemanı kompaktır. Bu nedenle Lemma 5.1. (v) ile $A = l^1$ için $\overline{A^*A} \subset ap(A)$ olur. Ancak $\overline{A^*A} = c_0$ ve $c_0 \subset ap(l^1)$ elde edilir. Ters kapsama işlemini kanıtlamak için öncelikle c_0 ın sınırlı bir H alt kümesinin

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in H} |x_n| = 0$ olması durumunda ve yalnızca bu durumda nispeten kompakt olduğunu

hatırlayalım. Şimdi, $\varphi \in ap(l^1)$ olsun. O zaman

$$H = \{\varphi a : a \in l, \|a\| < 1\} \quad (5.14)$$

kümesi c_0 içinde yer alır ve nispeten kompaktır.

$$\sup\{|(\varphi a)_n| : \|a\|_1 < 1\} = |\varphi_n| \quad (5.15)$$

olduğundan, $\varphi_n \rightarrow 0$ yani φ , gerektiği gibi c_0 içindedir.

iii. $1 < p < \infty$ için, l^p nin her elemanı kompaktır. Lemma 5.1. (iv), (v) den

$$ap(l^p) = l^q \quad (5.16)$$

olduğu sonucu çıkar (Duncan and Ulger, 1992).

Önerme 5.3. G , kompakt bir grup ve $1 < p < \infty$ olsun. Olağan konvolüsyon çarpımı ile $A = L^p(G)$ uzayı olsun. O zaman, $ap(A) = L^q(G)$ olur (Duncan and Ulger, 1992).

İspat. $L^p(G)$ nin her elemanı kompaktır ve $L^p(G)$ nin (sınırlı olmayan) bir yaklaşık birimi vardır. Lemma 5.1. (iv), (v) i uygulayın (Duncan and Ulger, 1992).

Lemma 5.3. X ve Y Banach uzayları, $\phi: X \rightarrow Y$ sürekli, lineer ve örten bir operatör, ϕ^* da onun adjoint operatörü olsun. H , Y^* nin sınırlı bir altkümesi olsun. Eğer $\phi^*(H)$ norm topolojisinde kompakt ise, H da norm topolojisinde kompaktır (Duncan and Ulger, 1992).

İspat. ϕ , örten olduğundan açıktır ve bu nedenle ϕ^* birebirdir ve tanım aralığında çift yönlü süreklidir. Sonuç buradan çıkar (Duncan and Ulger, 1992).

Önerme 5.4. A ve B Banach cebirleri ve $\phi: A \rightarrow B$ sürekli bir epimorfizm olsun. O zaman

$$\phi^*(ap(B)) = ap(A) \cap (ker\phi)^\perp \quad (5.17)$$

olur (Duncan and Ulger, 1992).

İspat. $g \in ap(B)$ olsun. Açıkça, $\phi^*(g), (ker\phi)^\perp$ içindedir. $a, b \in A$ için

$$\begin{aligned} \langle \phi^*(g)a, b \rangle &= \langle \phi^*(g), ab \rangle = \langle g, \phi(ab) \rangle = \langle g, \phi(a)\phi(b) \rangle \\ &= \langle g\phi(a), \phi(b) \rangle = \langle \phi^*(g\phi(a)), b \rangle \end{aligned} \quad (5.18)$$

dir. Dolayısıyla, $\phi^*(g)a = \phi^*(g\phi(a))$ olur. $\{g\phi(a) : a \in A_1\}$ kümesi nispeten kompakt olduğundan, $\phi^*(g)$ nin $ap(A)$ içinde olduğu sonucuna varırız.

Ters kapsama için φ , $ap(A) \cap (ker\phi)^\perp$ içinde olsun. O zaman $ker\phi \subset ker\varphi$ ve Sard'ın Bölüm Teoremi [10, s.176] ile $g \circ \phi = \varphi$ olacak şekilde tek bir $g \in B^*$ vardır. Basit bir hesaplama, $\phi^*(g) = \varphi$ olduğunu verir. Bu nedenle, g nin ap olduğunu kanıtlamak yeterlidir. Başka bir basit hesaplama

$$\langle g\phi(x), \phi(y) \rangle = \langle \varphi x, y \rangle \quad (5.19)$$

ve dolayısıyla

$$\phi^*(g\phi(x)) = \varphi x \quad (5.20)$$

olduğunu verir. φ , ap olduğundan, $\{\phi^*(g\phi(x)) : x \in A_1\}$ kümesi kompakttır ve bu nedenle Lemma 5.3. ile $\{g\phi(x) : x \in A_1\}$ de kompakttır. ϕ , örten olduğundan açık dönüşüm teoremi ile $\varepsilon B_1 \subset \phi(A_1)$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ vardır ve buradan

$$\{gb : b \in B_1\} \subset \varepsilon^{-1}\{g\phi(x) : x \in A_1\} \quad (5.21)$$

olur. Dolayısıyla g , hemen hemen periyodiktir (Duncan and Ulger, 1992).

Önerme 5.5. Eğer

$$A = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus A_n \right)_0 \quad (5.22)$$

ise, o zaman

$$ap(A) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus ap(A_n) \right)_1 \quad (5.23)$$

dir (Duncan and Ulger, 1992).

İspat. Verilen $a = (a_n) \in A$ ve $\varphi = (\varphi_n) \in A^*$ için $\varphi a = (\varphi_n a_n)$ olur. Buradan

$$ap(A) \subset \left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus ap(A_n) \right)_1 \quad (5.24)$$

sonucu çıkar. Öte yandan, $ap(A_n) \subset ap(A)$ olduğu açıktır ve dolayısıyla sonuç, $ap(A)$ nın, A^* nin kapalı bir alt uzayı olmasından çıkar (Duncan and Ulger, 1992).

Önerme 5.6.

$$A = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus A_n \right)_1 \quad (5.25)$$

olsun. Her $n \in N$ ve her $\varphi \in A_n$ için,

$$\|\varphi\| = \sup\{\|\varphi a\| : a \in A_n, \|a\| \leq 1\} \quad (5.26)$$

olsun. O halde

$$ap(A) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus ap(A_n) \right)_0 \quad (5.27)$$

dır (Duncan and Ulger, 1992).

İspat.

$$A^* = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus A_n^* \right)_{\infty} \quad (5.28)$$

olduđuna dikkat edin. $a = (a_n) \in A$ ve $\varphi = (\varphi_n) \in A^*$ için,

$$\varphi a = (\varphi_n a_n) \in \left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus A_n^* \right)_0 \quad (5.29)$$

dır. $H_n = \{\varphi_n a_n : a_n \in A_n, \|a_n\| \leq 1\}$ olsun. Skaler durumda olduğu gibi, $H(\varphi)$ nin

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus A_n^* \right)_0 \quad (5.30)$$

içinde nispeten kompakt olması için gerek ve yeter şart; her H_n nin nispeten kompakt olması ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{\|\varphi_n a_n\| : a \in A_1\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n\| = 0 \quad (5.31)$$

olmasıdır. Bu, ancak ve ancak

$$\varphi \in \left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus ap(A_n) \right)_0 \quad (5.32)$$

olması durumunda geçerlidir (Duncan and Ulger, 1992).

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, Banach cebirlerinde sürekli temsiller, Arens çarpımları ve hemen hemen periyodik fonksiyoneller üzerine derinlemesine analizler yapılmıştır. Elde edilen başlıca sonuçlar şu şekilde özetlenebilir:

- $L^1(G)$ grup cebirinden bir A Banach cebirine tanımlanan sürekli homomorfizmaların, sınırlı yaklaşık birimleri koruduğu gösterilmiştir. Özellikle, $(f_i + h_j - f_i * h_j)$ gibi bileşik yaklaşık birimlerin, homomorfizma altında A da sınırlı bir yaklaşık birim oluşturduğu kanıtlanmıştır.
- Sürekli homomorfizmaların ikinci dual uzaylara genişletilebilirliği incelenmiş ve bu genişletmelerin de homomorfizma özelliğini koruduğu ortaya konmuştur.
- Sürekli sağ temsillerin, $\theta: L^1(G) \rightarrow A$ homomorfizmalarıyla olan ilişkisi incelenmiş ve $\theta(f_i)$ nin A da sağdan sınırlı yaklaşık birim oluşturduğu gösterilmiştir. Özellikle, $PF_p(G)$ cebirine G grubunun sürekli sağ temsiline genişletilebilirliği kanıtlanmıştır.
- Arens regülerliği ile çarpanlara ayrılabilirlik arasındaki ilişki analiz edilmiş ve A^{**} nin birimli yapısı için gerekli koşullar belirlenmiştir.
- Grup cebirleri ve özel Banach uzayları üzerinde hemen hemen periyodik fonksiyonellerin karakterizasyonu yapılmıştır.
- Banach cebirlerinin tamamen süreklilik özellikleri ile Arens regülerlik arasındaki bağlantılar incelenmiş, bu özelliklerin cebirlerin yapısını nasıl etkilediği analiz edilmiştir.
- Lokal kompakt grupların grup cebirleri üzerinde yapılan çalışmalar, bu cebirlerin topolojik ve cebirsel özelliklerine ışık tutmuştur.

Bu tez çalışmasının sonuçlarından hareketle, gelecekte yapılabilecek çalışmalar için aşağıdaki öneriler sunulabilir:

- Bu çalışmada elde edilen sonuçlar, daha genel cebirsel yapılar (örneğin, von Neumann cebirleri veya operatör uzayları) üzerinde test edilebilir.

- Özellikle, Arens çarpımlarının farklı cebirsel yapılarındaki davranışları incelenebilir.
- Banach cebirlerindeki sürekli temsillerin ve hemen hemen periyodik fonksiyonellerin, kuantum mekaniği veya sinyal işleme gibi alanlarda uygulamaları araştırılabilir.
- Grup cebirlerinin harmonik analizdeki rolü daha detaylı çalışılabilir.
- Hemen hemen periyodik fonksiyonellerin kompaktlık özellikleri, daha genel topolojik uzaylar için genişletilebilir.
- Zayıf kompaktlık ve tamamen süreklilik arasındaki ilişkileri inceleyen yeni teoremler geliştirilebilir.
- Teorik sonuçların sayısal analizle desteklenmesi için algoritmalar geliştirilebilir. Örneğin, Arens çarpımlarının hesaplanmasına yönelik yöntemler araştırılabilir.
- Banach cebirlerinde yaklaşık birimlerin sayısal yakınsama özellikleri incelenebilir.
- Bu tezde ele alınan konularla ilgili literatürdeki açık problemler (örneğin, Arens regülerliğin gerekli ve yeterli koşulları) üzerine odaklanılabilir.
- Özellikle, sonsuz boyutlu Banach cebirlerinde hemen hemen periyodik fonksiyonellerin sınıflandırılmasına yönelik çalışmalar yapılabilir.

Bu öneriler, Banach cebirleri ve ilgili alanlardaki araştırmaların genişletilmesine ve derinleştirilmesine katkı sağlayacaktır. Ayrıca, disiplinlerarası çalışmalarla bu teorik sonuçların pratik uygulamalarının keşfedilmesi mümkündür.

KAYNAKLAR

Azar, K. H. and Riazi, A. (2009). Approximate Identity And Arens Regularity Of Some Banach Algebras. *arXiv preprint arXiv:0904.4102v1*.

Coşkun, E. (2002). *Analiz I*. Alp Yayınevi.

Duncan, J. and Ulger, A. (1992). Almost Periodic Functionals on Banach Algebras. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 22(3), 837–848.

Gallian, J. A. (2017). *Contemporary abstract algebra* (9th ed.). Cengage Learning.

Hewitt, E. and Stromberg, K. (1965). *Real and abstract analysis*. Springer-Verlag.

Kreyszig, E. (1978). *Introductory functional analysis with applications*. John Wiley ve Sons.

Lau, A. T.-M. and Ulger, A. (1993). Some geometric properties on the Fourier-Stieltjes algebras of locally compact groups, Arens regularity and related problems. *Transactions of the American Mathematical Society*, 337, 321–359.

Lau, A. T.-M. and Ulger, A. (1996). Topological Center of Certain Dual Algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, 348(3), 1191–1212.

Morris, S. A. (1977). *Pontryagin duality and the structure of locally compact abelian groups*. Cambridge University Press.

Rudin, W. (1991). *Functional analysis* (2nd ed.). McGraw-Hill

Soykan, Y. (2008). *Fonksiyonel Analiz*. Nobel Yayın Dağıtım.

Taş, Z. (2005). *Banach cebirlerinde hemen hemen periyodik fonksiyonellerin bazı geometrik özellikleri*, Doktora Tezi, Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Van, Türkiye.