



T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



BANACH DİZİ UZAYLARINDA
DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Melik KARAKAYA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalını

Eylül-2019
MUŞ
Her Hakkı Saklıdır



T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



BANACH DİZİ UZAYLARINDA
DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Melik KARAKAYA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalını

Danışman
Prof. Dr. Harun POLAT

Eylül-2019
MUŞ
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL VE ONAYI

Melik KARAKAYA tarafından hazırlanan “Banach Dizi Uzaylarında Diferansiyel Denklemler” adlı tez çalışması 12/09/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü MATEMATİK Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan

Doç. Dr. Muhammed ÇINAR
Muş Alparslan Üniversitesi Eğitim Fakültesi
Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü

Danışman

Prof. Dr. Harun POLAT
Muş Alparslan Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Üye

Dr. Öğr. Üyesi Nazlım Deniz ARAL
Bitlis Eren Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

İmza



Yukarıdaki sonuç;
Enstitü Yönetim Kurulu 12./09./2019 Tarih ve 26./.../II nolu kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Sedat BOZARI
FBE Müdürü



TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.


Melik KARAKAYA
12./09/2019

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BANACH DİZİ UZAYLARINDA DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Melik KARAKAYA

**Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

Danışman: Prof. Dr. Harun POLAT

2019, 31 Sayfa

Jüri

Başkan: Doç. Dr. Muhammed ÇINAR

Jüri Üyesi: Prof. Dr. Harun POLAT

Jüri Üyesi: Dr. Öğr. Üyesi Nazlım Deniz ARAL

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmı olup, bu çalışma ile ilgili ön bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde konuya ilişkin temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde Banach dizi uzayları üzerinde sonsuz diferansiyel denklem sistemleri hakkında gerekli teoremlere yer verilmiştir. Dördüncü bölümde sonsuz diferansiyel denklem sistemlerinin bir modelinin çözümünün varlığı hakkında bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Banach Uzayları, Çözümler, Dizi Uzayları, Diferansiyel Denklemler, Eş Sınırlılık

ABSTRACT

MS THESIS

DIFFERENTIAL EQUATION IN BANACH SEQUENCE SPACES

Melik KARAKAYA

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF MUŞ
ALPARSLAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN MATHEMATICS SCIENCE**

Advisor: Prof. Dr. Harun POLAT

2019, 31 Pages

Jury

Supervisor: Doç. Dr. Muhammed ÇINAR

Jury Member: Prof. Dr. Harun POLAT

Jury Member: Asst. Prof. Dr. Nazlım Deniz ARAL

This study consists of four chapter. The first chapter is the introduction part and the preliminary informations about this work is given. In the second chapter fundamental definitions and theorems are given. In the three chapter solution necessary theorems about the infinite systems of differential equations on Banach sequence spaces are given. In the last chapter, some results are obtained about the existence of a solution of a model of infinite differential equation systems.

Keywords: Banach space, Diferential equations, Equibounded, Sequence space, Solution

ÖNSÖZ

Lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca her türlü bilgi ve tecrübeleriyle beni yönlendiren, desteğini her zaman yanımda hissettiğim, mesleki açıdan her zaman benim için bir ufuk çizgisi olan ve özellikle bu süreçte bana büyük sabır gösteren çok değerli danışman hocam Prof. Dr. Harun POLAT’a teşekkür eder saygı ve şükranlarımı sunarım.

Melik KARAKAYA
MUŞ-2019



İÇİNDEKİLER

TEZ BİLDİRİMİ	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ ve KAYNAK ARAŞTIRMASI	1
2. TEORİK ESASLAR	3
2.1. Temel Kavramlar	3
3. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA.....	14
3.1. Banach Dizi Uzaylarında Diferansiyel Denklemlerin Çözümü.....	14
3.2. c_0 Uzayında Diferansiyel Denklemlerin Sonsuz Sistemlerinin Çözümleri	15
3.3. c Uzayında Diferansiyel Denklemlerin Sonsuz Sistemlerinin Çözümleri.....	26
4. SONUÇ	29
KAYNAKLAR	30
ÖZGEÇMİŞ	32

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
(X, d)	: Metrik uzay
$\ \cdot \ $	: Norm
$(X, \ \cdot \)$	: Normlu uzay
$\ni$	: Öyle ki
δ	: Delta
μ	: Ölçü
λ	: Lambda
(X, τ)	: Topolojik uzay
c	: Yakınsak dizilerin uzayı
c_0	: Sıfıra yakınsak dizilerin uzayı
l_∞	: Sınırlı dizilerin uzayı
μ_c	: Yakınsak μ ölçülebilir dizilerin uzayı
μ_{c_0}	: Sıfıra yakınsak μ ölçülebilir dizilerin uzayı

1. GİRİŞ ve KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bütün dizilerin kümesini w ile göstereceğiz. Bu küme aynı zamanda bir vektör uzayıdır. Sıfıra yakınsak dizilerin kümesi c_0 , yakınsak dizilerin kümesi c , sınırlı dizilerin kümesi l_∞ ile gösterilir. Bu kümeler birer vektör uzaylarıdır. Bu dizi uzaylarını ilk olarak Maddox 1967 yılında çalıştı. Birçok matematikçi bu dizi uzaylarını genelleştirerek yeni dizi uzayları inşa ettiler. Bu dizi uzayları

$$c_0 = \{x = (x_k) : \lim_k x_k = 0\},$$

$$c = \{x = (x_k) : \lim_k x_k \text{ mevcut}\}$$

ve

$$l_\infty = \{x = (x_k) : \sup_k |x_k| < \infty\}$$

sırasıyla sıfıra yakınsak, yakınsak ve sınırlı dizilerin kümeleridir.

Diferansiyel denklemler 17. yüzyılda Isaac Newton (1665) ve Willhem Leibnitz'in (1673) çalışmalarıyla matematiğin bir konusu olmuştur. Newton diferansiyel denklemleri formlarına göre sınıflandırmış ve daha sonra Leibnitz bu formları daha da geliştirerek kullanmıştır. Aynı yüzyılda Bernoulli kardeşler (1690) diferansiyel denklemlerin çözüm metotları konusunda gelişmeler sağlamışlar ve uygulama alanlarını genişleterek mekaniğin birçok problemini diferansiyel denklemlerle modelleyerek integral kavramını ilk defa kullanmışlardır. 18. yüzyılın sonlarına doğru adi diferansiyel denklemlerin çözümleri için basit metodlar bulmuşlardır. Son yıllarda diferansiyel denklemler için simetri metotları önemli gelişme sağlamıştır. Riccati (1676 – 1754) diferansiyel denklemlere $y' + by^2 = cx^m$ Riccati diferansiyel denklemini kazandırdı. Daha genelleştirilmiş Riccati diferansiyel denklemi $y' + p(x)y^2 + q(x)y = r(x)$ şeklindedir. Euler (1728) diferansiyel denklemlerin derecesini düşürme yöntemlerini geliştirdi. Clairaut (1734) yılında diferansiyel denklemlere $y = xp + f(p)$, y değerine göre çözülmüş bir diferansiyel denklem tipini kazandırdı. Legendre (1753 – 1833) Fuche diferansiyel denklemleri diye adlandırılan $(1 - x^2)y - 2xy + n(n + 1) = 0$ diferansiyel denklemini kazandırdı. Bessel (1784 – 1846) diferansiyel denklemlere $x^2y + xy + (x^2 - n^2)y = 0$ şeklindeki denklemi kazandırdı. Diferansiyel denklemleri Leibniz (1961) yılında $F(x) = f(x).g(y)$ şeklindeki diferansiyel denklemin gelişmesinde büyük rol oynamıştır (Göker, 1997).

İlk olarak Banach uzaylarında diferansiyel denklemlerini Józef Banaś, Millenia Lecko (2000) “Banach Dizi Uzaylarında Diferansiyel Denklemlerin Sonsuz Çözümü” adlı çalışmayla yaptı. Daha sonra Mursaleen 2015’te “Klasik Dizi Uzaylarında Diferansiyel Denklemler” adlı çalışmayı yaptı. Józef Banaś ve Mohammad Mursaleen “Dizi Uzayları, Diferansiyel Denklemler ve İntegral Uygulamalarının Non-kompakt Ölçüleri” adlı kitabında 2017 yılında çalıştı.



2. TEORİK ESASLAR

Bu bölümde, çalışmamızda kullanacağımız bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

2.1. Temel Kavramlar

Tanım 2.1. Tanım kümesi $N = \{1,2,3, \dots\}$ doğal sayılar kümesinden ibaret olan fonksiyona dizi denir. Diziler değer kümesine göre çeşitli adlar alırlar. Eğer dizinin değer kümesi R reel sayılar kümesi ise diziye reel terimli dizi, Q rasyonel sayılar kümesi ise diziye rasyonel terimli dizi, C kompleks sayılar kümesi ise diziye kompleks terimli dizi adı verilir (Sarigöl ve Jafarov, 2007).

Tanım 2.2. $X \neq \emptyset$ bir küme ve K reel veya kompleks sayılar cismi olmak üzere

$$+: X \times X \rightarrow X, \quad \cdot: K \times X \rightarrow X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, X kümesine K cismi üzerinde bir vektör uzay (lineer uzay) adı verilir. Her $x, y, z \in X$ ve her $\alpha, \beta \in K$ için

V1. $x + y = y + x$

V2. $(x + y) + z = x + (y + z)$

V3. Her $x \in X$ için $x + \theta = x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır.

V4. Her bir $x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in X$ vardır.

V5. $1 \cdot x = x$

V6. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

V7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

V8. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ (Sarigöl ve Jafarov, 2007).

Tanım 2.3. X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\|\cdot\| : X \rightarrow R^+$$

$$x \rightarrow \|x\|$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu dönüşüme bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir. Her $x, y \in X$ için

N1. $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

N2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (λ skaler)

N3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

dir (Sarigöl ve Jafarov, 2007).

Tanım 2.4. $X \neq \emptyset$ bir küme ve $d: X \times X \rightarrow R^+$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa d ye X üzerinde bir metrik ve (X, d) de bir metrik uzay denir. Her $x, y, z \in X$ için

D1. $d(x, x) = 0$ ve $x \neq y$ için $d(x, y) > 0$

D2. $d(x, y) = d(y, x)$

D3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Sarigöl ve Jafarov, 2007).

Tanım 2.5. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $x = (x_n)$, X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall n > n_0$ iken

$$\|x_n - x\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in N$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisi x e yakınsaktır denir. $x = (x_n)$ dizisi x e yakınsak ise $\lim_n x_n = x$ veya $x_n \rightarrow x$ şeklinde yazılır (Sarigöl ve Jafarov, 2007).

Tanım 2.6. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu normlu uzaya tam normlu uzay veya Banach uzay adı verilir (Maddox, 1970).

Tanım 2.7. A reel sayıların bir alt kümesi ve V de bir vektör uzayı olsun. A nın her bir elemanına, V nin bir ve yalnız bir elemanını karşılık getiren fonksiyona bir vektör değerli fonksiyon adı verilir (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.8. $A \subset R$, ve $f: A \rightarrow R$ bir fonksiyon olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ için her $x, x_0 \in A$ olduğunda ve $|x - x_0| < \delta$ iken $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ sayısı varsa f fonksiyonu $x_0 \in A$ üzerinde süreklidir denir (Sarigöl ve Jafarov, 2007).

Tanım 2.9. $A \subset R$, $f: A \rightarrow R$ bir fonksiyon olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ için her $x, y \in A$ olduğunda ve $|x - y| < \delta$ iken $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa f ye A da düzgün süreklidir denir (Sarigöl ve Jafarov, 2007).

Tanım 2.10. L bir vektör uzayı ve $X \subset L$ olsun. Her $x, y \in X$ ve α skaleri için,

$$B = \{z \in L : z = \alpha x + (1 - \alpha)y, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subset X$$

oluyorsa X e konveks küme denir. Başka bir deyişle boş olmayan ve herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçasını içeren kümeye konveks küme denir (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.11. (X, d) ve (Y, ϕ) iki metrik uzay olsun. F , X den Y ye olan fonksiyonların bir ailesi olsun. Her $f \in F$, her $x \in X$ için $f(x) \in B$ olacak şekilde Y nin sınırlı bir B alt kümesi varsa, F ailesine eş sınırlıdır denir (Banas ve Lecko, 2001).

Tanım 2.12. X boş olmayan bir küme ve τ , X in elemanlarından oluşan alt kümelerinin bir ailesi olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa τ ya X üzerinde bir topoloji ve (X, τ) ya da bir topolojik uzay denir.

T1. $\emptyset, X \in \tau$

T2. τ nun keyfi elemanlarının birleşimi τ nun bir elemanıdır.

T3. τ ya ait sonlu sayıdaki elemanların kesişimi τ ya aittir (Bizim, 2013).

Tanım 2.13. (X, τ) topolojik uzayının herhangi iki farklı noktası verildiğinde bu noktaların birbirlerinden ayırık birer komşulukları varsa; yani $x, y \in X, (x \neq y)$ için, $\exists U \in \mathcal{U}(x)$ ve $\exists V \in \mathcal{U}(y) \ni U \cap V = \emptyset$ ise, (X, τ) uzayına T_2 - uzayı ya da Hausdorff uzayı denir (Bizim, 2013).

Tanım 2.14. $A \subset R^n$ ve $a \in R^n$ olsun. Eğer a nın her bir komşuluğunda, A kümesinin a elemanından farklı en az bir elemanı varsa a ya A kümesinin bir yığılma noktasıdır denir (Balcı, 2009).

Tanım 2.15. F vektör değerli bir fonksiyon t_0 da F nin tanım kümesinin bir yığılma noktası olsun. Eğer

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}$$

limiti varsa bu limite F fonksiyonun t_0 noktasındaki türevi denir. $F'(t_0)$ veya $\frac{dF}{dt}(t_0)$ ile gösterilir (Balcı, 2009).

Tanım 2.16. $A \subset R$ olsun. Her $a \in A$ için $a \leq M$ olacak biçimde bir $M \in R$ sayısı varsa A kümesine üstten sınırlı küme, M sayısına da A kümesinin üst sınırı denir. Benzer şekilde, her $a \in A$ için $m \leq a$ olacak biçimde bir $m \in R$ sayısı varsa A kümesine alttan sınırlı küme, m sayısına da A kümesinin alt sınırı denir. Eğer A kümesi hem alttan hem de üstten sınırlı ise A kümesine sınırlı küme denir (Balcı, 2009).

Tanım 2.17. $A \subset R$ ve $f(A)$ da A üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların kümesi olsun.

$$s: N \rightarrow f(A)$$

şeklinde tanımlanan s fonksiyonuna bir fonksiyon dizisi denir (Balcı, 2009).

Tanım 2.18. $\forall \varepsilon > 0$ ve her bir $x \in A$ için $n \geq n_0$ olduğunda $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\exists n_0 \in N$ varsa (f_n) dizisi A üzerinde f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır denir. Genelde bu n_0 sayısı ε ve x e bağlıdır (Balcı, 2009).

Tanım 2.19. $\forall \varepsilon > 0$ ve $n > n_0$ olduğunda her $x \in A$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde sadece ε na bağlı (fakat x e bağlı olmayan) bir n_0 varsa (f_n) dizisi f fonksiyonuna A üzerinde düzgün yakınsaktır denir (Balcı, 2009).

Tanım 2.20. Tanım kümesi doğal sayılar olan fonksiyona dizi denir. (a_n) dizisi verilmiş olsun. Genel terimi; $S_n = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ şeklinde tanımlanan (S_n) dizisini göz önüne alalım. $((a_n), (S_n))$ ikilisine seri denir. a_n terimine serinin genel terimi, (S_n) dizisine de

serinin kısmi toplamlar dizisi denir. Eğer (S_n) kısmi toplamlar dizisi bir S sayısına yakınsak, yani $\lim S_n = S$ ise $((a_n), (S_n))$ serisi yakınsak ve serinin toplamı S olur (Balcı, 2009).

Tanım 2.21. Terimleri $\sum a_n$ serisinin mutlak değerlerinden oluşan $\sum |a_n|$ serisi yakınsak ise, $\sum a_n$ serisine mutlak yakınsaktır denir (Balcı, 2009).

Tanım 2.22. C, F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Her $x, y, z \in C$ ve her $\alpha \in F$ için (vektörler arasında çarpma denilen) $.: C \times C \rightarrow C$ işlemi aşağıdaki şartları sağlıyorsa C ye F üzerinde cebir denir

C1. $\alpha(x.y) = (\alpha x).y = x.(\alpha y)$

C2. $x.(y + z) = x.y + x.z$ ve $(x + y).z = x.z + y.z$

C3. $x.(y.z) = (x.y).z$ (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.23. A, X kümesi üzerinde tanımlı bir cebir ve μ de A üzerinde tanımlanan genişletilmiş reel değerli bir fonksiyon olmak üzere

i. $\mu(\emptyset) = 0$

ii. $\forall A \in A$ için $\mu(A) \geq 0$

iii. A nın ikişer ikişer ayrık her $\{A_n\}$ dizisi için $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in A$ olacak şekilde $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ oluyorsa o zaman μ ye A üzerinde bir ölçüm denir (Mukherjea ve Pathoven, 1984).

Tanım 2.24. X_τ herhangi bir topolojik uzay ve λ, X in bazı alt kümelerinin bir ailesi olsun. $G \subset X$ olmak üzere

$$G \subset \bigcup_{A \in \lambda} A$$

ise λ ailesine G kümesinin bir örtüsü denir. Eğer λ ailesinin her bir elemanı açık küme ise λ ailesine G kümesinin bir açık örtüsü denir (Bizim, 2013).

Tanım 2.25. Bir K sınıfını ihtiva eden σ - cebirlerin en küçüğüne K nın ürettiği σ -cebiri denir ve $D(K)$ ile gösterilir. R^d deki bütün (a, b) açık aralıklarının doğurduğu σ -cebirine Borel cebir denir (Eroğlu, 2007).

Tanım 2.26. X boş olmayan bir küme ve $\preceq, X$ de bir bağıntı olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $\preceq$ bağıntısına kısmi sıralama bağıntısı denir.

S1. Her $x \in X$ için $x \preceq x$ dir. (Yansıma)

S2. $x \preceq y$ ve $y \preceq x$ ise $x = y$ dir. (Ters simetrik)

S3. $x \preceq y$ ve $y \preceq z$ ise $x \preceq z$ dir. (Geçişme)

$x \preceq y$ ifadesi “ x önce gelir y ” diye okunur. X de kısmi sıralama bağıntısı tanımlanmışsa X e kısmi sıralı küme denir ve $(X, \preceq)$ ile gösterilir (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.27. $(X, \preceq)$ kısmi sıralı bir küme, $A \subseteq X$ ve A nın alt sınırlarının kümesi A_1 olsun. $\alpha \in A_1$ olmak üzere her $x \in A_1$ için $x \preceq \alpha$ ise α ya A nın en büyük alt sınırı veya infimumu denir ve $\inf A$ ile gösterilir. A nın üst sınırlarının kümesini ise A_2 ile gösterelim. $\beta \in A_2$ olmak üzere her $y \in A_2$ için $\beta \preceq y$ ise β ya A nın en küçük üst sınırı veya A nın supremumu denir ve $\sup A$ ile gösterilir (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.28. $s \geq 0$ ve $\delta > 0$ ve $A \subseteq R^d$ olsun. O halde

$$H_\delta^s(A) = \inf \left\{ \sum |E_i|^s : A \subseteq \bigcup_i E_i, |E_i| \leq \delta \right\}$$

ve her biri için $\{|E_i| \leq \delta\}$ ölçüsüne Hausdorff ölçüsü denir. Burada infimum tüm sayılabilir δ -örtüler üzerinde alınmaktadır (Bandt ve Graf, 1992).

Tanım 2.29. X_τ topolojik uzay ve $K \subset X$ olsun. Eğer K kümesinin her bir açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü var ise K kümesine kompakt küme denir. (Bizim, 2013).

Tanım 2.30. Lineer uzaylarda tanımlı dönüşümlere operatör denir (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.31. $T: L \rightarrow L'$ lineer operatör olsun. T altında L' nün özdeş elemanına dönüşen elemanların cümlesine, T nin sıfır uzayı veya çekirdeği denir ve $\text{Çek}T$ ile gösterilir (Bayraktar, 2006).

$$\text{Çek}T = \{x \in L: T(x) = \theta'\} = T^{-1}(\theta')$$

Tanım 2.32. İçinde türev veya diferansiyeller bulunan ifadeler diferansiyel denklem denir. Diferansiyel denklemler tip, mertebe ve lineerliğe göre sınıflandırılırlar (Bayram, 2009).

Tanım 2.33. Bir tek değişkene bağlı bir fonksiyonun bu bağımsız değişkene göre türevlerini içeren bir denkleme adi diferansiyel denklem denir. Bir adi diferansiyel denklem genel olarak

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

şeklinde yazılır (Bayram, 2009).

Örnek 2.1. $(y - x)dx + 7xdy = 0$ denklemi bir adi diferansiyel denklemdir.

Tanım 2.34. İki ya da daha fazla bağımsız değişkene bağlı bir fonksiyonun bu bağımsız değişkenlere göre türevlerini içeren bir denkleme kısmi (parçalı) diferansiyel denklem denir.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u$$

birer kısmi diferansiyel denklemlerdir (Bayram, 2009).

Tanım 2.35. Bir diferansiyel denklemin mertebesi, denkleminde bulunan en yüksek mertebeden türevin mertebesine denir. x, y bağımsız değişkenler olmak üzere, $z = z(x, y)$ bilinmeyen fonksiyonu için en genel kısmi diferansiyel denklem

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, \dots) = 0$$

şeklinde yazılır (Bayram, 2009).

Örnek 2.2 $dy = \sin(x)dx$ (Diferansiyel denklemi birinci mertebeden)

$$(y'')^2 + (y')^2 + 6x = y^5 \text{ (Diferansiyel denklemi ikinci mertebeden)}$$

Tanım 2.36. x bağımsız değişkenine göre

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \left(x \frac{dy}{dx} \right) + a_0(x)y = g(x)$$

şeklinde yazılabilen ifadeye lineer diferansiyel denklem denir.

$$xdy - ydx = 0,$$

$$y'' - 3y' + y = 0$$

ve

$$x^3 y''' - x^2 y'' + 2xy' + 6y = e^{2x}$$

diferansiyel denklemleri sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü mertebeden lineer diferansiyel denklemlerdir. Lineer denklemlerin iki özelliği vardır:

1. y bağımlı değişkenin türevleri hep birinci dereceden ve y bağımlı değişkeni bulunan yerde bu y değişkeninin üssü hep bir olmalıdır.

2. Her bir katsayı yalnızca x bağımsız değişkeninin bir fonksiyonu olmalıdır.

Lineer olmayan diferansiyel denklemlere lineer olmayan (non-lineer) diferansiyel denklem denir.

$$yy'' - 2y' - x = 0$$

ve

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + y^2 = 0$$

denklemleri sırasıyla, ikinci ve üçüncü mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemlerdir (Bayram, 2009).

Örnek 2.3. $y = xe^x$ fonksiyonu, tüm reel ekseninde $y'' - 2y' + y = 0$ diferansiyel denklemin bir çözümüdür. Çünkü tüm $x \in R$ için $y' = xe^x + e^x$ ve $y'' = xe^x + 2e^x$ biçiminde olduklarından

$$(xe^x + 2e^x) - 2(xe^x + e^x) + xe^x = 0$$

olarak bulunur (Bayram, 2009).

Tanım 2.37.

$$f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.1)$$

diferansiyel denklemi verilmiş olsun. $c_1, c_2, \dots, c_n$ birbirinden bağımsız keyfi sabitler olmak üzere,

$$F(x, y, c_1, \dots, c_n) \quad (2.2)$$

bağıntısıyla tanımlanan n parametrelili bir fonksiyon ailesi göz önüne alalım. Eğer bu ailedeki her fonksiyon (2.1) denkleminin bir çözümü ise, bu fonksiyon kümesine (2.1) denkleminin genel çözümü denir (Bayram, 2009).

Tanım 2.38. Keyfi sabitlere özel değerler verilerek genel çözümden elde edilen çözümlere özel çözüm denir (Bayram, 2009).

Örnek 2.4. $y' = 2x$ denkleminin genel çözümünü bularak bazı özel çözümleri yazalım. $y' = \frac{dy}{dx}$ olduğundan verilen denklem $dy = 2xdx$ şeklinde yazıldıktan sonra her iki tarafın integrali alınırsa,

$$\int dy = \int 2xdx \Rightarrow y = x^2 + c$$

genel çözümü bulunur. Görüldüğü gibi genel çözüm bir parabol denklemi olup $c = 0$ ve $c = \pm 1$ değerleri için bir özel çözümdür (Bayram 2009).

Tanım 2.39. Keyfi sabitlere özel değerler verilerek genel çözümden elde edilemeyen fakat verilen diferansiyel denklemi sağlayan çözümlerde vardır, bu tür çözümlere singüler (tekil) çözüm denir (Bayram, 2009).

Tanım 2.40. Diferansiyel denklemin genel çözümü yerine onun bazı yan koşulları sağlayan özel çözümünün bulunması istenir.

$$y^n = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2.3)$$

şeklinde verilen bir diferansiyel denklem için bu yan koşullar:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{n-1}(x_0) = y_{n-1} \quad (2.4)$$

şeklinde verilir. İşte (2.3) denkleminin (2.4) yan koşullarını sağlayan çözümü bulma problemine başlangıç değer problemi denir (Bayram, 2009).

Örnek 2.5. $y' = 2x, y(0) = 1$ başlangıç değer problemini çözümler.

Verilen denklem $\frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow dy = 2xdx$ şeklinde yazılır ve integral alınır,

$$y = x^2 + c$$

şeklinde genel bir çözüm elde edilir. Genel çözümde $x = 0, y = 1$ yazılırsa $c = 1$ bulunur. Bulunan bu $c = 1$ değeri genel çözümde yerine yazılarak

$$y = x^2 + 1$$

istenilen çözüm elde edilir (Bayram, 2009).

Tanım 2.41. Bir diferansiyel denklemin, verilen bölgenin sınırlarında, önceden belirtilmiş koşulları sağlayan çözümünü bulma problemidir. Verilen $[a, b]$ aralığında

$$y'' = f(x, y, y')$$

denklemini ve buna ilave olarak aralığın sınırlarında

$$\varphi(a) + \varphi'(a) = y_1, \varphi(b) + \varphi'(b) = y_2$$

koşullarını sağlayan $\varphi(x) = y$ çözümü bulunmasına $y'' = f(x, y, y')$ denklemini için bir sınır değer problemi denir (Bayram, 2009).

Tanım 2.42. Diferansiyel denklem $y = f(x)$ şeklinde bir çözümü varsa, buna açık çözüm, $F(x, y) = 0$ şeklinde bir çözümü varsa buna kapalı çözüm denir (Bayram, 2009).

Örnek 2.6. $c \in R$ olmak üzere $x^2 + y^2 - c = 0$ bağıntısı

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

diferansiyel denkleminin kapalı çözümüdür. Çünkü $x^2 + y^2 - c = 0$ bağıntısının kapalı türevinden,

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) - \frac{d}{dx}(c) = 0$$

veya

$$x + y \frac{dy}{dx} = 0$$

bulunur. Bu ifade her $c \in R$ için doğru olduğundan, bir diferansiyel denklemin birçok veya sonsuz tane çözümü bulunur (Bayram, 2009).

Tanım 2.43. A boş olmayan keyfî bir küme ve $D(A)$, A da tanımlı skalar değerli dönüşümlerin cümlesi yani $D(A) = \{f: f: A \rightarrow F\}$ olsun. Toplama ve skalarla çarpma işlemleri sırasıyla,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

olarak tanımlanırsa bu işlemlere göre $D(A)$ bir lineer uzaydır (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.44. L, F cismi üzerindeki bir lineer uzay ve M, L nin bir alt kümesi olsun. Her $\alpha \in F$ ve her $x, y \in M$ için,

1). $x + y \in M$

2). $\alpha x \in M$

şartları sağlanıyorsa M ye L nin altuzayı denir (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.45. Aşağıdaki şartları sağlayan $\mu : M_E \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonuna non-kompakt ölçü denir (M_E , E de boş olmayan sınırlı kümeleri gösterebilir ve N_E de E nin relatif kompakt kümelerinin bir alt sınıfı olsun).

i. $\text{çek}\mu = \{X \in M_E : \mu(X) = 0\}$ ailesi ve $\text{çek}\mu \subset N_E$ boş değildir.

ii. $X \subset Y \Rightarrow \mu(Y) \leq \mu(X)$

iii. $\mu(\bar{X}) = \mu(X)$

iv. $\mu(\text{Conv}X) = \mu(X)$

v. $\mu(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda\mu(X) + (1 - \lambda)\mu(Y), \lambda \in [0, 1]$

vi. Eğer $X_n \in M_E, X_n = \bar{X}_n, X_{n+1} \subset X_n, n = 1, 2, 3, \dots$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(X_n) = 0 \text{ ve } \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \neq \emptyset.$$

Buradaki $\text{çek}\mu, \mu$ ölçüsünün çekirdeği olarak adlandırılır (Srivastava ve ark., 2018).

Tanım 2.46. μ non-kompakt ölçünün alt lineer ölçüsü olsun. Eğer

$$\mu(X \cup Y) = \max\{\mu(X), \mu(Y)\}$$

şartını sağladığında $\text{çek}\mu = N_E$ ye regülerdir denir. E Banach uzayının boş olmayan ve sınırlı X alt kümesinin non-kompakt Hausdorff ölçüsü,

$$\chi(X) = \inf\{\varepsilon > 0 : X, E \text{ nin } \varepsilon - \text{ağına sahip}\}$$

ile tanımlanır (Srivastava ve ark., 2018).

Tanım 2.47. X bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Her $x \in A$ için $D(x; r) \subseteq A$ olacak şekilde bir r pozitif sayısı varsa A ya X in açık alt kümesi veya A, X de açıktır denir. X in B altkümesinin X deki tümleyeni yani $B' = X - B, X$ de açıksa B ye kapalı küme denir (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.48. A, X metrik uzayının bir alt kümesi ve $x_0 \in X$ olsun (Bu nokta A nın bir noktası olabilir de olmayabilir de). x_0 ın her bir $D'(x_0; \varepsilon)$ delik civarı A ya ait bir nokta ihtiva ediyorsa bu x_0 noktasına A nın yığılma noktası denir. A nın yığılma noktalarının A' kümesi ile A nın noktalarından ibaret olan kümeye A nın kapanışı denir ve $\bar{A}$ ile gösterilir (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.49. E_1 ve E_2 iki banach uzay, μ_1 ve μ_2 de E_1 ve E_2 nin keyfi non-kompakt ölçümü olsun. Bir $f: E_1 \rightarrow E_2$ operatörüne (μ_1, μ_2) -condensing operatör denir. Eğer her $D \subset E_1$ kapalı kompaktlığı ile,

$$\mu_2(f(D)) < \mu_1(D)$$

ve f sürekli ise burada $E_1 = E_2$ ve $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ ise f, μ -condensing operatördür (Srivastava ve ark., 2018).

Tanım 2.50. (X, d) bir metrik uzay ve her $\varepsilon > 0$ için,

$$\varepsilon \leq d(x, y) < \varepsilon + \delta \Rightarrow d(Tx, Ty) < \varepsilon, (\forall x, y \in X)$$

şartını sağlayan bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa T ye X üzerinde Meir-Keeler kontraksiyonu denir (Srivastava ve ark., 2018).

Tanım 2.51. X boştan farklı bir küme ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer bir $x \in X$ için $Tx = x$ ise, x noktasına T nin bir sabit noktası denir ($T(x) = x$) (Agarwal, 2007).

Örnek 2.7. $f: R \rightarrow R; f(x) = x^2$ biçiminde tanımlanan fonksiyonun sabit noktaları $x = 1$ ve $x = 0$ dır (Agarwal, 2007).

Tanım 2.52. C, E Banach uzayının boş olmayan bir alt kümesi ve μ de E nin non-kompakt ölçüsü olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\varepsilon \leq \mu(X) < \varepsilon + \delta \Rightarrow \mu(T(X)) < \varepsilon$$

şartını sağlayan bir $\delta > 0$ varsa $T: C \rightarrow C$ ye operatörüne Meir-Keeler condensing operatörü denir (Srivastava ve ark., 2018).

Tanım 2.53. X bir topolojik uzay, $A \subset C(X) = \{f: X \rightarrow X: f \text{ sürekli}\}$ ve $x \in X$ verilsin. Her $\varepsilon > 0$ için $\sup_{y \in U, f \in A} |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ olacak biçimde x i içeren bir U açık kümesi var

ise, A kümesi x noktasında eş süreklidir denir. A kümesi her $x \in X$ noktasında eş sürekli ise, A ya eş süreklidir denir (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.54. İkinci mertebeden homojen olmayan lineer

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$$

diferansiyel denklemini ele alalım.

$$y(a) = 0, y'(a_1) = 0$$

bu denklemin hareketli sınır değer koşullarını sağlayan çözümünün kurulmasında Green fonksiyonu önemli rol oynar. Sınır değer problemi için Green fonksiyonu,

$$y(x) = \int_a^{a_1} G(x, t)f(t)dt$$

burada $f(t)$ verilen bir fonksiyondur. Green fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, bu halde bu fonksiyona hareketli sınır değer probleminin Green fonksiyonu denir.

G1. G fonksiyonu için x saptanan t aralığında $a < t < a_1$ diferansiyel denklemi $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ bütün $x \neq t$ sağlıyor.

G2. G fonksiyonu x e göre sınır değer problemini $G(a, t) = G'_x(a_1, t) = 0$ sağlar.

G3. G fonksiyonu $x = t$ için $a < t < a_1$ aralıksızdır, türevli $G'_x(a_1, t)$ bir değerine sıçrama yapar (Stakgold, 1979).

Teorem 2.1. Ω, E Banach uzayının boş olmayan, sınırlı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. Ayrıca $f: \Omega \rightarrow \Omega$ ya $\mu(f(X)) < k\mu(X)$, $k \in [0,1)$ şartını sağlayan sürekli bir dönüşüm olsun. Bu takdirde f, μ de sabit bir noktaya sahiptir (Srivastava ve ark., 2018).

Teorem 2.2. (X, d) tam bir metrik uzay olsun. Eğer $T: X \rightarrow X$ Meir-Keeler kontraksiyonu ise T tek bir sabit noktaya sahiptir (Srivastava ve ark., 2018).

Teorem 2.3. C, E Banach uzayının boş olmayan, sınırlı, kapalı ve konveks bir alt kümesi ayrıca μ de E nin keyfi bir non-kompakt ölçüsü olsun. Eğer $T: C \rightarrow C$ ye sürekli ve Meir-Keeler condensing operatörü ise bu takdirde T en az bir sabit noktaya sahip ve T nin bütün sabit noktaların kümesi C de kompakttır (Srivastava ve ark., 2018).

3. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

3.1. Banach Dizi Uzaylarında Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

Lineer olmayan analizde diferansiyel denklemlerin sonsuz çözümü önemlidir. Mesela; Kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik metotlarla çözümü ile adi diferansiyel denklemlerin sonsuz çözümleri elde edilir (Deimpling 1997). Parabolik kısmi diferansiyel denklemlere ait bazı problemlerin çözümü için kullanılan semidiskritizasyon metodudur. Bunların dışında karşımıza çıkan bazı doğal problemlerin çözümü için yine adi diferansiyel denklemlerin sonsuz çözümü kullanılır. Bu konu hakkında bazı temel örnekler şu şekilde sınırlanabilir. Bu sistemler biyolojide dallanma prensibinde ve sınır ağları teorisini anlamlandırmada ve polimerlerin ayrıştırma metotlarının incelenmesinde de kullanılır (Bellman, 1973).

Banach uzaylarındaki diferansiyel denklemlerin sonsuz çözüm sistemlerini adi diferansiyel denklemler teorisinin özel bir hali olarak düşünebiliriz (Deimpling, 1997).

Aslında diferansiyel denklemlerin herhangi çözümleri uygun Banach uzaylarında birer adi diferansiyel denklem olarak yazılır (Deimpling ark., 1997). Bu çalışmalar lineer olmayan analiz teorisindeki adi diferansiyel denklemleri anlamamız için çok önemlidir. Bu metot ile diferansiyel denklemleri uygun bir koşul ile Banach uzaylarında sonsuz çözümleri araştırmak mümkün olacaktır (Banas ve ark., 1987).

Bu bölümde diferansiyel denklemlerin sonsuz çözüm sistemleri teorisi nonkompakt ölçüm tekniği ile verilecektir. Özellikle bazı sonsuz diferansiyel denklem sistemlerinin çözümünün varlığı için yeterli şartlar tanımlanacaktır. Bu sayede nonkompakt ölçüm tekniği yardımıyla Banach uzaylarındaki adi diferansiyel denklemler için varlık şartları sunulacaktır. Böylece diferansiyel denklem sistemlerinin sonsuz çözümü için yeter şartları c_0 , c Banach uzaylarında gösterilecektir.

$E, \|\cdot\|$ ile bir Banach uzay olsun. E de x_0 merkezli, r yarıçaplı bir kapalı yuvar $B(x_0, r)$ olsun. Eğer X , E nin boş olmayan bir alt kümesi ise o halde, $\bar{X}$ ve $ConvX$ sırasıyla X in kapanışını ve konveks kapanışını gösterir. M_E , E de boş olmayan sınırlı kümeleri gösterebilir ve N_E de E nin relatif kompakt kümelerinin bir alt sınıfı olsun. I aralığı $I = [0, T]$ olsun. Bir f fonksiyonu da E de bir yuvar olan $B(x_0, r)$ için $I \times B(x_0, r)$ üzerinde tanımlansın. O halde başlangıç değeri şartı

$$x(0) = x_0 \quad (3.1)$$

olan adi diferansiyel denklem

$$x' = f(t, x) \quad (3.2)$$

olarak verilsin. Bu taktirde (3.1) ve (3.2) denklemlerindeki Cauchy problemlerinin varlık sonucu için aşağıdaki teoremi verelim (Banas ve Lecko, 2001).

Teorem 3.1. f fonksiyonu $I \times B(x_0, r)$ 'de düzgün sürekli ve $AT \leq r$ olmak üzere $\|f(t, x)\| \leq A$ olduğunu varsayalım. Ayrıca E de $\{x_0\} \in \text{çek}\mu$ olmak üzere μ nün non-kompakt alt lineer ölçüsü olduğunu kabul edelim. Boş olmayan $X \subset B(x_0, r)$ kümesi hemen hemen her $t \in I$ için verilen eşitsizlik sağlanır.

$$\mu(f(t, X)) \leq p(t)\mu(t) \quad (3.3)$$

$p(t)$, I da integrallenebilir bir fonksiyondur (Murseleen, 2017).

Teorem 3.2. $f(t, x)$ fonksiyonu $I \times E$ üzerinde verilen değerler için

$$\|f(t, x)\| \leq P + Q\|x\|, x \in E,$$

P ve Q da negatif olmayan sabitlerdir. Ayrıca $f, I_1 = [0, T_1] \subset I, QT_1 < 1$ ve $r = (PT_1 + QT_1\|x_0\|)/(1 - QT_1)$ olmak üzere $I_1 \times B(x_0, r)$ de düzgün süreklidir. Dahası fonksiyonun $\{x_0\} \in \text{çek}\mu$ şeklinde tanımlanan non-kompakt alt lineer ölçüsü için (3.3) eşitsizliğini sağladığını kabul edelim. O halde (3.1) – (3.2) problemi $\{x(t)\} \in \text{çek}\mu, t \in I_1$ olacak şekilde bir x çözümü vardır. Kabulümüzden dolayı

$$A = (P + Q\|x_0\|)/(1 - QT_1)$$

için $\|f(t, x)\| \leq A, t \in I_1$ ve $x \in B(x_0, r)$ olur. Üstelik

$$AT_1 = (PT_1 + QT_1\|x_0\|)/(1 - QT_1) = r$$

Olur (Murseleen, 2017).

Uyarı 3.1. Teorem 3.2, Teorem 3.1 in özel halidir. Eğer $\mu = \chi$ ise f üzerindeki düzgün süreklilik şartını daha zayıf olan süreklilik ile değiştirebiliriz (Murseleen, 2017).

3.2. c_0 Uzayında Diferansiyel Denklemlerin Sonsuz Sistemlerinin Çözümleri

Bu bölümde c_0 Banach uzayındaki $x = (x_i)$ reel dizilerini

$$\|x\| = \|(x_i)\| = \max\{|x_i| : i = 1, 2, 3, \dots\}$$

standart maksimum normuyla sıfıra yakınsayan sınıfları üzerinde çalışacağız. c_0 uzayındaki non-kompakt Hausdorff χ ölçüsü aşağıdaki gibi ifade edilir (Banas ve Lecko, 2001).

$$\chi(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{(x_i) \in X} \{ \sup\{|x_i| : i \geq n\} \} \right\}, X \in M_{c_0}$$

diferansiyel denklemlerin sonsuz bir sınıfı

$$x_i' = f_i(t, x_1, x_2, x_3, \dots) \quad (3.4)$$

başlangıç koşulu;

$$x_i(0) = x_i^0 \quad (3.5)$$

olmak üzere ve $t \in I = [0, T]$ için verilsin. $f_i (i = 1, 2, \dots)$ ler $f_i = I \times R^\infty \rightarrow R$ üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlar olmak üzere,

i. $x_0 = (x_i^0) \in c_0$

ii. $f = (f_1, f_2, \dots): I \times c_0 \rightarrow c_0$ fonksiyonu süreklidir.

iii. Doğal sayıların öyle bir artan (k_n) dizisi vardır ki $\forall t \in I$ ve $x = (x_i) \in c_0$ için

$$|f_n(t, x_1, x_2, \dots)| \leq p_n(t) + q_n(t) \sup\{|x_i| : i \geq k_n\} \\ (n = 1, 2, 3, \dots)$$

sağlanır. Burada $(p_i(t)), (q_i(t))$ reel değerli fonksiyonlar olup I da süreklidirler. Ayrıca $(p_i(t))$ fonksiyonu I da sıfıra düzgün yakınsak fonksiyon ve $(q_i(t))$ de I üzerinde eş sınırlı bir fonksiyondur.

$$q(t) = \sup\{q_n(t) : n = 1, 2, 3, \dots\}, \\ Q = \sup\{q(t) : t \in I\}$$

ve

$$P = \sup\{p_n(t) : t \in I, n = 1, 2, 3, \dots\}$$

olur (Banas ve Lecko, 2001).

Teorem 3.3. $x_i' = f_i(t, x_1, x_2, x_3, \dots)$ ve $x_i(0) = x_i^0$ denklemlerinde verilen başlangıç değer problemi $I_1 = [0, T_1]$, $T_1 < 1$ ve $QT_1 < 1$ üzerinde $x = x(t) = (x_i(t))$ olacak şekilde en az bir çözüme sahiptir. Ayrıca $\forall t \in I_1$ için $x(t) \in c_0$ dır (Banas ve Lecko, 2001).

İspat Herhangi bir $x = (x_i) \in c_0$ alalım. Kabulümüzden her $t \in I$ ve bir sabit $n \in N$ için;

$$|f_n(t, x)| = |f_n(t, x_1, x_2, \dots)| \\ \leq p_n(t) + q_n(t) \sup\{|x_i| : i \geq k_n\} \\ \leq P + Q \sup\{|x_i| : i \geq k_n\} \leq P + Q\|x\| \quad (3.6)$$

elde edilir. Böylece $\|f(t, x)\| \leq P + Q\|x\|$ olur. Teorem 3.1 deki haliyle bir $B(x_0, r)$ yuvarını seçelim. O halde bu yuvarın bir X alt kümesi ve $t \in I_1$ için aşağıdaki sonuç hesaplanır.

$$\chi(f(t, X)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{x \in X} \{ \sup\{|f_i(t, x)| : i \geq n\} \} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{x \in X} \left\{ \sup \{ |f_i(t, x_1, x_2, \dots)| : i \geq n \} \right\} \right\} \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{x \in X} \left\{ \sup_{i \geq n} \{ p_i(t) + q_i(t) \sup [|x_p| : p \geq k_i] \} \right\} \right\} \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{i \geq n} p_i(t) \right\} + q(t) \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{x \in X} \left\{ \sup_{i \geq n} \{ \sup [|x_p| : p \geq k_i] \} \right\} \right\} \\
&\leq q(t) \chi(X)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

(3.6), (3.7) eşitlikleri Teorem 3.2 ve Uyarı 3.1 den dolayı (3.4) ve (3.5) deki Cauchy probleminin $x = (x, t) \in c_0$ ve $t \in I_1$ olacak şekilde bir çözümü vardır. Şimdi bunu iki örnek ile açıklayalım (Banas ve Lecko, 2001).

Örnek 3.1. $\{k_n\}$ doğal sayıların artan bir dizisi olsun. Diferensiyel denklemlerin bir sınıfı,

$$x_i(0) = x_i^0 \tag{3.8}$$

başlangıç şartıyla

$$x'_i = f_i(t, x_1, x_2, \dots) + \sum_{j=k_i+1}^{\infty} a_{ij}(t)x_j \tag{3.9}$$

tanımlansın. (3.8) - (3.9) denklemlerinin çözümü aşağıdaki varsayımlarla incelenecektir.

i. $x_0 = (x_i^0) \in c_0$

ii. $f_i : I \times R^{k_i} \rightarrow R (i = 1, 2, \dots)$ fonksiyonları düzgün sürekli ve I üzerinde $\forall i \in N$ için sürekli bir $p_i(t)$ fonksiyonu aynı zamanda I üzerinde düzgün yakınsak olacak şekilde mevcuttur. Üstelik $t \in I$ ve $(x_1, x_2, \dots, x_{k_i}) \in R^{k_i}$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır (Banas ve Lecko, 2001).

$$|f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_{k_i})| \leq p_i(t)$$

iii. I üzerinde tanımlanan $a_{ij}(t)$ sürekli fonksiyonu için

$$\sum_{j=k_i+1}^{\infty} a_{ij}(t)$$

fonksiyon serisi I üzerinde $a_i(t)$ fonksiyonuna mutlak ve düzgün yakınsaktır.

iv. $(a_i(t))$ dizisi I üzerinde eş sınırlıdır.

v. $QT < 1$ ve $Q = \sup \{a_i(t) : i = 1, 2, \dots, t \in I\}$ olur.

(i) ve (v) kabüllerinden dolayı Teorem 3.3 ispatlanır. Buda (3.8) ve (3.9) problemlerinin bir sabit $t \in I$ için c_0 uzayına ait bir $x(t) = (x_i(t))$ çözümünün olduğunu gösterir (Banas ve Lecko, 2001).

Örnek 3.2. Şimdi $x_i(0) = x_i^0$ ve $x'_i = f_i(t, x_1, x_2, \dots) + \sum_{j=k_i+1}^{\infty} a_{ij}(t)x_j$ problemlerinin daha özel bir halini göz önünde bulunduralım. Yani kabul edelim ki, $i = 1, 2, \dots$ ve $a_{ij} = 0, \forall ij$ için $k_i = i$ olsun. O halde $x_i(0) = x_i^0$ denklemi

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1), \\ x_2' &= f_2(t, x_1, x_2), \\ &\vdots \\ x_i' &= f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_i), \end{aligned} \quad (3.10)$$

Buna da sonlu satır sistemi denir (Banas ve Lecko, 2001).

Örnek 3.1 deki şartlar sağlansın. Üstelik $\forall t \in I$ ve $(x_1, x_2, \dots) \in R$ için

$$|f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_i)| \leq p_i(t) \quad (3.11)$$

sağlayan sürekli $p_i(t)$, $(t \in I)$ olsun. Ayrıca $p_i(t)$ lerin I üzerinde sıfıra düzgün yakınsak olduğunu kabul edelim. Dahası $\| \cdot \|_i, R^i$ de maksimum normu gösterebilir. $f^i = (f_1, f_2, \dots, f_i)$ alalım. O halde

$$\begin{aligned} |f^i(t, x)|_i &= \max\{|f_1(t, x_1)|, |f_2(t, x_1, x_2)|, \dots, |f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_i)|\} \\ &\leq \max\{p_1(t), p_2(t), \dots, p_i(t)\} \end{aligned}$$

olur. Özel olarak $p_i(t) = \max\{p_1(t), p_2(t), \dots, p_i(t)\}$ alınırsa, yukarıdaki ifade $|f^i(t, x)|_i \leq P_i(t)$ halini alır. Dikkat edilirse $u' = P_i(t), u(0) = x_i^0$ başlangıç değer problemi varsayımlarla beraber I üzerinde tek bir çözüme sahiptir. O halde (3.9) ve (3.10) daki Cauchy probleminin tek bir çözümü vardır ve bu çözüm Teorem 3.3 ve Örnek 3.1 den dolayı c_0 uzayında olduğu açıktır (Banas ve Lecko, 2001).

$a, b \in R_+$, $(c_0, \| \cdot \|_{c_0})$ normu ile tanımlanan Banach uzayında χ non-kompakt Hausdorff ölçümü,

$$\begin{aligned} \chi(D) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{v=(v_k) \in D} (\max_{k \geq n} |v_k|) \right], \\ v(t) &= (v_i(t))_{i=1}^{\infty} \in c_0 \end{aligned}$$

$t \in [a, b]$ ve $D \in M_{c_0}$ olur. Bu çalışma boyunca $n \geq 2$ dereceden diferansiyel denklemlerin sonsuz sistemi için aşağıdaki şartlar geçerlidir.

$$v_i^{(n)}(t) + f_i(t, v(t)) = 0$$

ve sınır şartları da,

$$v_i(a) = v_i'(a) = v_i''(a) = \dots = v_i^{(n-2)}(a) = v_i(b) = 0,$$

$$v(t) = (v_i(t))_{i=1}^{\infty} \in c_0$$

$t \in [a, b]$ ve $I = [a, b]$ olmak üzere $C(I, R)$ reel değerli sürekli fonksiyonları gösterebilir.

Ayrıca $C^n(I, R)$ de I da n . dereceden türevlenebilir sürekli reel değerli fonksiyonların

sınıfı olsun. $v \in C^n(I, R)$ fonksiyonu $v_i^{(n)}(t) + f_i(t, v(t)) = 0$ denkleminin

çözümüdür. $v \in C^n(I, R)$, ancak ve ancak

$$\int_a^b K(t, s) f_i(s, v(s)) ds$$

ile verilen integral denkleminin sonsuz sisteminin çözümüdür. Yukarıdaki denklemin

Green fonksiyonu,

$$K(t, s) = \begin{cases} \frac{(b-s)^{n-1}(t-a)^{n-1} - (b-a)^{n-1}(t-s)^{n-1}}{(b-a)^{n-1}(n-1)!}, & (a \leq s \leq t \leq b) \\ \frac{(b-s)^{n-1}(t-a)^{n-1}}{(b-a)^{n-1}(n-1)!}, & (a \leq t \leq s \leq b). \end{cases}$$

böylece,

$$\begin{aligned} v_i'(t) &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} K(t, s) f_i(s, v(s)) ds, \dots, v_i^{(n-2)}(t) \\ &= \int_a^b \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} K(t, s) f_i(s, v(s)) ds \end{aligned}$$

sağlanır. Bu çalışmanın kalanında, $[a, b] = I$ için f_i fonksiyonlarının aşağıdaki iki şartı sağladığı varsayılmıştır.

A1. f operatörü $f: I \times c_0 \rightarrow c_0$

$$(t, v) \rightarrow (f(v(t))) = (f_1(t, v), f_2(t, v), f_3(t, v), \dots)$$

için $((f v)(t))_{t \in I}$ de c_0 uzayının her noktasında eş süreklidir.

A2. Her $t \in I$ ve $n \in N$ için $v(t) \in c_0$ ise aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$|f_n(t, v_1(t), v_2(t), v_3(t), \dots)| \leq \alpha_n(t) + \beta_n(t) \sup_{i \geq n} |v_i(t)|$$

olacak şekilde $\alpha_n(t)$ ve $\beta_n(t)$, I dan R ye sürekli fonksiyonları için $\alpha_n(t)$, I da sıfıra düzgün yakınsak ve $\beta_n(t)$, I da eş sınırlı dizileri vardır. Ayrıca

$$A = \sup_{t \in I, n \in N} \{\alpha_n(t)\},$$

$$B = \sup_{t \in I, n \in N} \{\beta_n(t)\}.$$

Teorem 3.4. (A1) ve (A2) şartları sağlansın. Eğer

$$\frac{2B(b-a)^n}{n!} < 1$$

sağlanırsa, o zaman $n \geq 2$ için

$$\begin{cases} v_i^{(n)}(t) + f_i(t, v(t)) = 0 \\ v_i(a) = v_i'(a) = v_i''(a) = \dots v_i^{(n-2)}(a) = v_i(b) = 0 \end{cases}$$

sonsuz diferansiyel denklem sisteminin en az bir çözümü vardır (Srivastava ve ark., 2018).

İspat Sabit bir $t \in I$ ve her $v(t) = (v_i(t)) \in c_0$ için,

$$\sup_{i \in N} |v_i(t)| \leq M_1 < \infty$$

olacak şekilde bir $M_1 > 0$ reel sayısı vardır. (A2) şartından ve

$$v_i(t) = \int_a^b K(t, s) f_i(s, v(s)) ds$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_{c_0} &= \max_{i \geq 1} \left| \int_a^b K(t, s) f_i(s, v(s)) ds \right| \\ &\leq \max_{i \geq 1} \int_a^b |K(t, s)| |f_i(s, v(s))| ds \\ &\leq \max_{i \geq 1} \int_a^b |K(t, s)| \left\{ \alpha_i(t) + \beta_i(t) \sup_{j \geq i} |v_j(t)| \right\} ds \\ &\leq \max_{i \geq 1} \left\{ A \int_a^b |K(t, s)| ds + BM_1 \int_a^b |K(t, s)| ds \right\} \\ &\leq \frac{2(A + BM_1)(b - a)^n}{n!} = r \end{aligned}$$

bulunur. $v^0(t) = (v^0_i(t))_{i=1}^\infty$, $t \in I$ alalım. Ayrıca $\bar{D} = \bar{D}(v^0, r_1)$, v^0 merkezli $r_1 \leq r$ yarıçaplı kapalı bir yuvar olsun. Böylece açık bir şekilde $\bar{D}$, c_0 ın boş olmayan, sınırlı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olur. $C(I, \bar{D})$ de tanımlı,

$$(Tv)(t) = \{(T_i v)(t)\} = \left\{ \int_a^b K(t, s) f_i(s, v(s)) ds \right\},$$

$(\forall t \in I)$ ve $T = (T_i)$ operatörünü göz önüne alalım.

$$v(t) = (v_i(t)) \in \bar{D}$$

ve $v_i(t) \in C(I, R)$, her $t \in I$ için $(f_i(t, v(t))) \in c_0$ olduğundan,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (T_i v)(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_a^b K(t, s) f_i(s, v(s)) ds$$

$$= \int_a^b K(t, s) \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(s, v(s)) ds = 0$$

dır. Böylece $(T_i v)(t) \in c_0$ olur. Üstelik $(T_i v)(t)$,

$$(T_i v)(a) = (T_i v)'(a) = \dots = (T_i v)^{(n-2)}(a) = (T_i v)(b) = 0$$

sınır şartlarını sağlar.

$$\|(Tv)(t) - v^0(t)\|_{c_0} \leq r$$

olduğundan dolayı $T, \bar{D}$ de bir öz dönüşümdür. Ayrıca (A1) kabulünden dolayı $T, C(I, \bar{D})$ de süreklidir. Şimdi T nin Meir-Keeler condensing operatör olduğunu ispatlayalım. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\varepsilon \leq \chi(\bar{D}) < \varepsilon + \delta \Rightarrow \chi(T(\bar{D})) < \varepsilon$$

şartını sağlayan bir $\delta > 0$ buluruz öyle ki,

$$\begin{aligned} \chi(T(\bar{D})) &= \lim_{n_1 \rightarrow \infty} \left[\sup_{v(t) \in \bar{D}} \left\{ \max_{k \geq n_1} \left| \int_a^b K(t, s) f_k(s, v(s)) ds \right| \right\} \right] \\ &\leq \lim_{n_1 \rightarrow \infty} \left[\sup_{v(t) \in \bar{D}} \left\{ \max_{k \geq n_1} \int_a^b |K(t, s)| |f_k(s, v(s))| ds \right\} \right] \\ &\leq \lim_{n_1 \rightarrow \infty} \left[\sup_{v(t) \in \bar{D}} \max_{k \geq n_1} \int_a^b |K(t, s)| \left\{ \alpha_k(s) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \beta_k(s) \sup_{i \geq k} |v_i(s)| \right\} ds \right] \\ &\leq B \chi(\bar{D}) \int_a^b |K(t, s)| ds \\ &\leq \frac{2B(b-a)^n \chi(\bar{D})}{n!} \end{aligned}$$

sağlanır. Böylece

$$\chi(T(\bar{D})) \leq \frac{2B(b-a)^n \chi(\bar{D})}{n!} \leq \varepsilon \Rightarrow \chi(\bar{D}) < \frac{n! \varepsilon}{2B(b-a)^n}$$

bulunur.

$$\delta = \frac{\varepsilon(n! - 2B(b-a)^n)}{2B(b-a)^n}$$

olduğunu kabul edersek,

$$\varepsilon \leq \mu(\bar{D}) < \varepsilon + \delta$$

elde edilir. Bu nedenle $T, \bar{D} \subset c_0$ da Meir-Keeler condensing operatör olarak tanımlanır. Yani T Teorem 2.3 ün tüm şartlarını sağlar. Buda T nin $\bar{D}$ de sabit bir noktasının var olduğunu ispatlar.

Örnek 3.3. 5. dereceden diferansiyel denklemlerin bir sonsuz sistemi olarak aşağıdaki örneği inceleyelim.

$$\frac{d^5 v_n(t)}{dt^5} + f_n(t, v(t)) = 0$$

ile

$$v_n(a) = v'_n(a) = v''_n(a) = v'''_n(a) = v_n(b) = 0$$

$$f_n(t, v(t)) = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{n^3} + \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(e^t \cos t) v_m(t)}{m^2}$$

$(n \in N; t \in I = [a, b])$ ve $v(t) \in c_0$ ise $t \in I$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t, v(t)) = 0$ olur. Bu nedenle,

$(f_n(t, v(t))) \in c_0$ bulunur. $\varepsilon > 0$ keyfi reel sayısı için $\bar{v}(t) \in c_0$ kabul edelim. Öyleki

$$\bar{v}(t) = (\bar{v}_i(t))_{i=1}^{\infty}$$

olur. Ayrıca burada,

$$\|v(t) - \bar{v}(t)\|_{c_0} \leq \delta = \frac{6\varepsilon}{e^b \pi^2}$$

şartı sağlansın. Böylece

$$\begin{aligned} |f_n(t, v(t)) - f_n(t, \bar{v}(t))| &= \left| \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(e^t \cos t)(v_m(t) - \bar{v}_m(t))}{m^2} \right| \\ &\leq e^b \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^2} \{|v_m(t) - \bar{v}_m(t)|\} \\ &\leq e^b \delta \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^2} \\ &\leq T\delta \cdot \frac{\pi^2}{6} = \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Bu nedenle (A1) deki süreklilik şartı c_0 uzayında sağlanır. Ayrıca

$$\begin{aligned} |f_n(t, v(t))| &\leq \frac{t^{\frac{1}{2}}}{n^3} + \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^2} |(e^t \cos t) v_m(t)| \\ &\leq \frac{t^{\frac{1}{2}}}{n^3} + e^t \sup_{i \geq n} |v_i(t)| \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^2} \\ &\leq \frac{t^{\frac{1}{2}}}{n^3} + \frac{e^t \pi^2}{6} \sup_{i \geq n} |v_i(t)| \\ &= \alpha_n(t) + \beta_n(t) \sup_{i \geq n} |v_i(t)| \end{aligned}$$

$$\alpha_n(t) = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{n^3} \text{ ve } \beta_n(t) = \frac{e^t \pi^2}{6}$$

dır. $\alpha_n(t)$ ve $\beta_n(t)$, I da açıkça süreklidir. Burada $\alpha_n(t)$, I da düzgün yakınsak ve $\beta_n(t)$ de I da eş sınırlıdır. Tanım gereği $a = 0$ ve $b = 1$ değerleri için $B \approx 4,45$ olacaktır. Buda

$$\frac{2B(b-a)^5}{5!} < 1$$

anlamına gelir. Böylece tanımdan $\frac{d^5 v_n(t)}{dt^5} + f_n(t, v(t)) = 0$ denkleminin c_0 uzayında en az bir çözümü vardır (Srivastava ve ark., 2018).

Teorem 3.5.

$$\begin{cases} v_i''(t) + v_i(t) = f_i(t, v(t)) \\ v_i(a) = v_i'(a) = 0 \end{cases}$$

sonsuz diferansiyel denklem sistemi (A1) ve (A2) şartlarını sağlasın. Eğer

$$B(b-a) < 1$$

sağlanıyorsa, o zaman sonsuz diferansiyel denklem sisteminin en az bir

$$v_i(t) = \int_a^b K(t, s) f_i(s, v(s)) ds$$

çözümü vardır. Burada

$$K(t, s) = \begin{cases} \sin(t-s), & (a \leq s \leq t \leq b) \\ 0, & (a \leq t \leq s \leq b) \end{cases}$$

sonsuz diferansiyel denklem sistemi için Green fonksiyonudur.

İspat Sabit bir $t \in I$ ve her $v(t) = (v_i(t)) \in c_0$ için,

$$\sup_{i \in N} |v_i(t)| \leq M_1 < \infty$$

olacak şekilde bir $M_1 > 0$ reel sayısı vardır. (A2) şartından,

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_{c_0} &= \max_{i \geq 1} \left| \int_a^b K(t, s) f_i(s, v(s)) ds \right| \\ &\leq \max_{i \geq 1} \int_a^b |K(t, s)| |f_i(s, v(s))| ds \\ &\leq \max_{i \geq 1} \int_a^b |K(t, s)| \left\{ \alpha_i(t) + \beta_i(t) \sup_{j \geq i} |v_j(t)| \right\} ds \\ &\leq \max_{i \geq 1} \left\{ A \int_a^b |K(t, s)| ds + B M_1 \int_a^b |K(t, s)| ds \right\} \\ &\leq (A + B M_1)(b-a) = r \end{aligned}$$

bulunur. $v^0(t) = (v^0_i(t))_{i=1}^\infty$, $t \in I$ alalım. Ayrıca $\bar{D} = \bar{D}(v^0, r_1)$, v^0 merkezli $r_1 \leq r$ yarıçaplı kapalı bir yuvar ise $\bar{D}$, c_0 ın boş olmayan, sınırlı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olur. $C(I, \bar{D})$ de tanımlı,

$$(Tv)(t) = \{(T_i v)(t)\} = \left\{ \int_a^b K(t, s) f_i(s, v(s)) ds \right\},$$

$(\forall t \in I)$ ve $T = (T_i)$ operatörünü göz önüne alalım.

$$v(t) = (v_i(t)) \in \bar{D}$$

ve $v_i(t) \in C(I, R)$, her $t \in I$ için $(f_i(t, v(t))) \in c_0$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} (T_i v)(t) &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_a^b K(t, s) f_i(s, v(s)) ds \\ &= \int_a^b K(t, s) \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(s, v(s)) ds = 0 \end{aligned}$$

dır. Böylece $(T_i v)(t) \in c_0$ olur. Üstelik $(T_i v)(t)$,

$$(T_i v)(a) = (T_i v)'(a) = 0$$

sınır şartlarını sağlar.

$$\|(Tv)(t) - v^0(t)\|_{c_0} \leq r$$

olduğundan dolayı $T, \bar{D}$ de bir öz dönüşümdür. Ayrıca (A1) kabulünden dolayı $T, C(I, \bar{D})$ de süreklidir. Şimdi T nin Meir-Keeler condensing operatör olduğunu ispatlayalım. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\varepsilon \leq \chi(\bar{D}) < \varepsilon + \delta \Rightarrow \chi(T(\bar{D})) < \varepsilon$$

şartını sağlayan bir $\delta > 0$ buluruz öyle ki,

$$\begin{aligned} \chi(T(\bar{D})) &= \lim_{n_1 \rightarrow \infty} \left[\sup_{v(t) \in \bar{D}} \left\{ \max_{k \geq n_1} \left| \int_a^b K(t, s) f_k(s, v(s)) ds \right| \right\} \right] \\ &\leq \lim_{n_1 \rightarrow \infty} \left[\sup_{v(t) \in \bar{D}} \left\{ \max_{k \geq n_1} \int_a^b |K(t, s)| |f_k(s, v(s))| ds \right\} \right] \\ &\leq \lim_{n_1 \rightarrow \infty} \left[\sup_{v(t) \in \bar{D}} \max_{k \geq n_1} \int_a^b |K(t, s)| \left\{ \alpha_k(s) + \beta_k(s) \sup_{i \geq k} |v_i(s)| \right\} ds \right] \\ &\leq B \chi(\bar{D}) \int_a^b |K(t, s)| ds \\ &\leq B(b-a) \chi(\bar{D}) \end{aligned}$$

sağlanır. Böylece

$$\chi(T(\bar{D})) \leq B(b-a) \chi(\bar{D}) \leq \varepsilon \Rightarrow \chi(\bar{D}) < \frac{\varepsilon}{B(b-a)}$$

bulunur. Şimdi

$$\delta = \frac{\varepsilon(1 - B(b - a))}{B(b - a)}$$

olduğunu kabul edelim. Sonuç olarak,

$$\varepsilon \leq \mu(\tilde{D}) < \varepsilon + \delta$$

elde edilir. Bu nedenle $T, \tilde{D} \subset c_0$ da Meir-Keeler condensing operatör olarak tanımlanır. Yani T Teorem 2.3 ün tüm şartlarını sağlar. Buda T nin $\tilde{D}$ de sabit bir noktası olduğunu ispatlar.

Örnek 3.4. 2. dereceden diferansiyel denklemlerin bir sonsuz sistemi olarak aşağıdaki örneği inceleyelim.

$$\frac{d^2 v_n(t)}{dt^2} + v_n(t) = f_n(t, v(t))$$

ile

$$v_n(a) = v'_n(a) = 0$$

$$f_n(t, v(t)) = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{n^3} + \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(e^t \sin t) v_m(t)}{5m^2}$$

$(n \in N; t \in I = [a, b])$ ve $v(t) \in c_0$ ise $t \in I$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t, v(t)) = 0$ olur. Bu nedenle,

$(f_n(t, v(t))) \in c_0$ bulunur. $\varepsilon > 0$ keyfi reel sayısı için $\bar{v}(t) \in c_0$ kabul edelim. Öyleki

$$\bar{v}(t) = (\bar{v}_i(t))_{i=1}^{\infty}$$

olur. Ayrıca burada,

$$\|v(t) - \bar{v}(t)\|_{c_0} \leq \delta = \frac{30\varepsilon}{e^b \pi^2}$$

şartı sağlansın. Böylece

$$\begin{aligned} |f_n(t, v(t)) - f_n(t, \bar{v}(t))| &= \left| \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(e^t \sin t)(v_m(t) - \bar{v}_m(t))}{5m^2} \right| \\ &\leq e^b \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{5m^2} \{|v_m(t) - \bar{v}_m(t)|\} \\ &\leq e^b \delta \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{5m^2} \\ &\leq T\delta \cdot \frac{\pi^2}{30} = \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Bu nedenle (A1) deki süreklilik şartı c_0 uzayında sağlanır. Ayrıca

$$\begin{aligned}
|f_n(t, v(t))| &\leq \frac{1}{n^3} + \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{5m^2} |(e^t \sin t) v_m(t)| \\
&\leq \frac{1}{n^3} + e^t \sup_{i \geq n} |v_i(t)| \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{5m^2} \\
&\leq \frac{1}{n^3} + \frac{e^t \pi^2}{30} \sup_{i \geq n} |v_i(t)| \\
&= \alpha_n(t) + \beta_n(t) \sup_{i \geq n} |v_i(t)| \\
\alpha_n(t) &= \frac{1}{n^3} \text{ ve } \beta_n(t) = \frac{e^t \pi^2}{30}
\end{aligned}$$

dır. $\alpha_n(t)$ ve $\beta_n(t)$, I da açıkça süreklidir. Burada $\alpha_n(t)$, I da düzgün yakınsak ve $\beta_n(t)$ de I da eş sınırlıdır. Tanım gereği $a = 0$ ve $b = 1$ değerleri için $B \approx 0,89$ olacaktır. Buda

$$B(b - a) < 1$$

anlamına gelir. Böylece tanımdan $\frac{d^2 v_n(t)}{dt^2} + f_n(t, v(t)) = 0$ denkleminin c_0 uzayında en az bir çözümü vardır.

3.3. c Uzayında Diferansiyel Denklemlerin Sonsuz Sistemlerinin Çözümleri

Başlangıç koşulu;

$$x_i(0) = x_i^0, t \in I = [0, T] \quad (3.12)$$

olan

$$x'_i = a_i(t)x_i + g_i(t, x_1, x_2, \dots) \quad (3.13)$$

formundaki diferansiyel denklemlerin perturbed diagonal sistemlerin çözüme katkısı, problem (3.12) ve (3.13) c uzayında $\|x\| = \sup\{|x_i| : i = 1, 2, \dots\}$ klasik mutlak değer normu ile tanımlı $x = (x_i)$ yakınsak dizileri için incelenecektir. Bu uzaydaki en uygun non-kompakt ölçülerden biri

$$\mu(X) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{(x_i) \in X} \{ \sup\{|x_n - x_m| : n, m \geq p\} \} \right\}, X \in M_c$$

dir. Bu μ ölçüsü regüler ve non-kompakt Hausdorff ölçüsüne denktir (Banas ve Lecko, 2001). Şimdi bu hipotezi (3.12) ve (3.13) problemlerinin çözümü için formülize edelim. Bunun için aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim.

i. $x_0 = (x_i^0) \in c$

- ii. $g = (g_1, g_2, \dots)$ dönüşümü $I \times c \rightarrow c$ de tanımlı ve düzgün süreklidir.
- iii. Sıfıra yakınsayan öyle bir (b_i) dizisi vardır öyle ki $\forall t \in I = [0, T]$ ve $x = (x_i) \in c$ $|g_i(t, x_1, x_2, \dots)| \leq b_i$ sağlanır.
- iv. $a_i(t)$ fonksiyonları I da sürekli ve $(a_i(t))$ dizisinde I üzerinde düzgün yakınsaktır.
- Üstelik

$$a(t) = \sup\{a_i(t) : i = 1, 2, 3, \dots\},$$

$$Q = \max\{a(t) : t \in I\}$$

ile gösterelim. Kabüllerden dolayı $a(t)$ fonksiyonunun I üzerinde sürekli ve $Q < \infty$ dur (Banas ve Lecko, 2001).

Teorem 3.6. (i) – (iv) koşulları sağlansın eğer $QT < 1$ ise

$$x(t) = (x_i(t)) \in c \text{ ve } \forall t \in I$$

olacak şekilde (3.12) – (3.13) başlangıç değer probleminin bir çözümü vardır.

İspat Her $t \in I$ ve $x(t) = (x_i(t)) \in c$ için

$$f_i(t, x) = a_i(t)x_i + g_i(t, x),$$

$$f(t, x) = (f_1(t, x), f_2(t, x), \dots) = (f_i(t, x))$$

olsun. Herhangi iki m, n sabit doğal sayıları için;

$$\begin{aligned} |f_n(t, x) - f_m(t, x)| &= |a_n(t)x_n + g_n(t, x) - a_m(t)x_m - g_m(t, x)| \\ &\leq |a_n(t)x_n - a_m(t)x_m| + |g_n(t, x) - g_m(t, x)| \\ &\leq |a_n(t)x_n - a_m(t)x_m| + |a_n(t)x_m - \\ &a_m(t)x_m| + b_n + b_m \\ &\leq |a_n(t)| \cdot |x_n - x_m| + |x_m| \cdot |a_n(t) - a_m(t)| + \\ &b_n b_m \\ &\leq |a_n(t)| \cdot |x_n - x_m| + \|x\| \cdot |a_n(t) - a_m(t)| + b_n \\ &\quad + b_m \end{aligned}$$

(iii) – (iv) dan $(f_i(t, x))$ reel bir Cauchy dizisidir. Öyleyse $(f_i(t, x)) \in c$ dir $B = \sup\{b_i : i = 1, 2, \dots\}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} |f_i(t, x)| &\leq |a_i(t)| \cdot |x_i| + |g_i(t, x)| \\ &\leq Q|x_i| + b_i \leq Q\|x\| + B \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\|f(t, x)\| \leq Q\|x\| + B \quad (3.14)$$

bulunur. $f(t, x)$ 'in $I \times B(x_0, r)$ de bir fonksiyon olduğunu kabul edelim. Buradaki r nin seçimi Teorem 3.3 ten dolayı

$$r = (BT + QT\|x_0\|)/(1 - QT)$$

dır. Ayrıca $t, s \in I$ ve $x, y \in B(x_0, r)$ olsun. Kabulümüzden dolayı sabit bir i için;

$$\begin{aligned} |f_i(t, x) - f_i(s, y)| &= |a_i(t)x_i + g_i(t, x) - a_i(s)y_i - g_i(s, y)| \\ &\leq |a_i(t)x_i - a_i(s)y_i| + |g_i(t, x) - g_i(s, y)| \\ &\leq |a_i(t) - a_i(s)| \cdot |x_i| + |a_i(s)| \cdot |x_i - y_i| + \\ &\quad |g_i(t, x) - g_i(s, y)| \end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki eşitsizliklerden

$$\begin{aligned} \|f(t, x) - f(s, y)\| &= \sup\{|f_i(t, x) - f_i(s, y)| : i \in N\} \\ &\leq (r + \|x_0\|) \cdot \sup\{|a_i(t) - a_i(s)| : i \in N\} \\ &\quad + Q\|x - y\| + \|g(t, x) - g(s, y)\| \end{aligned}$$

elde edilir. $(a_i(t))$ nin I üzerinde eş sınırlı olduğunu ve g nin $I \times c$ de düzgün sürekli olduğu göz önüne alınırsa $f(t, x)$ in $I \times B(x_0, r)$ de düzgün sürekli olur. $X, B(x_0, r)$ boş olmayan bir alt küme ve $t \in I, x \in X$ olsun. Herhangi iki n, m doğal sayısı için;

$$\begin{aligned} |f_n(t, x) - f_m(t, x)| &\leq |a_n(t)| \cdot |x_n - x_m| + |x_m| \cdot |a_n(t) - a_m(t)| \\ &\quad + |g_n(t, x)| + |g_m(t, x)| \\ &\leq |a_n(t)| \cdot |x_n - x_m| + |x_m| \cdot |a_n(t) - a_m(t)| \\ &\quad + |g_n(t, x)| + |g_m(t, x)| \\ &\leq a_n(t) \cdot |x_n - x_m| + (\|x_0\| + r) \cdot \\ &\quad |a_n(t) - a_m(t)| + b_n + b_m \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla,

$$\mu(f(t, x)) \leq a(t)\mu(x) \quad (3.15)$$

bulunur Sonuç olarak (3.14) ve (3.15) denklemleri ve Teorem 3.3 ten dolayı $f, I \times B(x_0, r)$ de düzgün sürekli olduğu gerçeklerini dikkate alırsak (3.12) ve (3.13) denklemlerinin c de çözümünün olduğu görülür.

Yukarıda tanımlanan non-kompakt μ ölçüsü χ Hausdorff ölçüsüne denktir (Banas ve Lecko, 2001).

4. SONUÇ

Bu çalışmada,

$$\begin{cases} v_i''(t) + v_i(t) = f_i(t, v(t)) \\ v_i(a) = v_i'(a) = 0 \end{cases}$$

diferansiyel denklemlerin sonsuz çözüm sisteminin c_0 uzayında en az bir çözümünün var olması için yeterli şartlar elde edilmiştir. Araştırmacılara,

$$\begin{cases} v_i''(t) + \alpha v_i'(t) + \beta v_i(t) = f_i(t, v(t)) \\ v_i(a) = v_i'(a) = 0 \end{cases}$$

sonsuz diferansiyel denklem sisteminin çözümünün c, c_0, l_1 ve l_p dizi uzaylarında çözümünün varlığının araştırılması önerilir.

KAYNAKLAR

- Agarwal, R.P., O' Regan, D., Sahu, D.R., 2007. Iterative construction of fixed points of nearly asymptotically non-expansive mappings. *Journal Nonlinear Convex Analysis*, 8 (1), 61-79.
- Balcı, M., 2009. Analiz, *Balcı Yayınları*, Ankara.
- Banas, J., 1987. Applications of measures noncompactness to various problems. *Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej Folia Scientiarum Universitatis Technicae Resoviensis Matematika i Fizyka*, 5.
- Banas, J., Krajewska, M., 2013. On solutions of semilinear infinite system of differential equations. *Dynamic Systems and Applications*, 22, 301-316.
- Banas, J., Lecko M., 2001. Solvability of infinite systems of differential equations in Banach sequence spaces. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 137 (2), 363-375.
- Bandt, C., Graf, S., 1992. Self-similar sets. VII. A characterization of self-similar fractals with positive Hausdorff measure. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 114 (4), 995-1001.
- Bayraktar, M., 2006. Fonksiyonel Analiz, *Gazi Kitabevi*, Ankara.
- Bayram, M., 2009. Diferensiyel Denklemler, *Birsen Yayınevi*, İstanbul.
- Bellman, R., 1973. Methods in Nonlinear Analysis II, *Akademic Press*, New York.
- Bizim, O., 2013. Genel Topoloji, *Dora Basım*, Bursa.
- Deimling, K., 1977. Ordinary differential equations in banach spaces, *Springer*, Berlin.
- Eroğlu M.S., 2007. Cantor Kümeler Kuramı, *Papatya Yayıncılık*, İstanbul.
- Göker, L., 1997. Matematik Tarihi ve Türk İslam Matematikçilerinin Yeri, *Milli Eğitim Bakanlığı*, İstanbul.
- Hille, E., 1961. Pathology of infinite system of linear first order differential equations with constant coefficients. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 55, 135-144.
- Kreyszig, E., 1989. Introductory Functional Analysis with Applications, *Wiley*, New York.
- Maddox, I.J., 1970. Elements of Functional Analysis, *Cambridge University Press*, Cambridge.
- Mukherjea, A., Pathoven, K., 1984. Real And Functional Analysis Part A Real Analysis, *Springer*, Berlin.
- Mursaleen, M., 2017. Differential equations in classical sequence spaces. *RACSAM*, 111 (2), 587-612.
- Mursaleen, M., Mohiuddine, S.A., 2012. Applications of measures of noncompactness to the infinite system of differential equations in l_p spaces. *Nonlinear Analysis*, 75, 2111-2115.
- Oguztoreli, M.N., 1972. On the neutral equations of Cowan and Stein. *Utilitas Mathematica*, 2, 305-315.
- Sarıgöl, M. A., Jafarov, S., 2007. Analiz I. *Baran Matbaacılık*, Denizli.
- Srivastava, H.M., Das, A., Hazarika, B., Mohiuddine, S.A., 2018. Existence of solutions of infinite systems of differential equations of general order with boundary conditions in the spaces c_0 and l_1 via the measure of noncompactness. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 41, 3558-3569.
- Stakgold, I., 1979. Greens Functions and Boundary Value Problems, *Wiley*, New York.
- Voigt, A., 1974. Line method approximations to the cauchy problem for nonlinear parabolic differential equations. *Numerische Mathematik*, 23, 23-36.
- Walter, W., 1970. Differential and Integral Inequalities. *Springer*, Berlin.

EKLER

Ek-9

Kontrol Edilecek Hususlar	Evet	Hayır
Sayfa yapısı uygun mu?	✓	
Şekil ve çizelge başlık ve içerikleri uygun mu?	✓	
Denklem yazımları uygun mu?	✓	
İç kapak, onay sayfası, tez bildirimi, özet, abstract, önsöz ve/veya teşekkür uygun yazıldı mı?	✓	
Tez yazımı; Giriş, Kaynak Araştırması, Materyal ve Yöntem (veya Teorik Esaslar), Araştırma Bulguları ve Tartışma, Sonuçlar ve Öneriler sıralamasında mıdır?	✓	
Kaynaklar soyadı sırasına göre verildi mi?	✓	
Kaynaklarda verilen her bir yayına tez içerisinde atıfta bulunuldu mu?	✓	
Kaynaklar açıklanan yazım kuralına uygun olarak yazıldı mı?	✓	
Tez içerisinde kullanılan şekil ve çizelgelerde kullanılan ifadeler Türkçe'ye çevrilmiş mi? (Latince ve Özel kelimeler hariçtir)	✓	
Tezin içindekiler kısmı, tez içerisinde verilen başlıklara uygun hazırlanmış mı?	✓	
*Tez Önerisi Formunun (FBE Form 22) ilk sayfası ile birlikte materyal ve yöntem kısımlarını içeren sayfaların fotokopisini tezinizin içindekiler sayfasından önce telli zımbalı formda koydunuz mu?	✓	

Yukarıdaki verilen cevapların doğruluğunu kabul ediyorum.

Unvanı Adı SOYADI

İmza

Öğrenci : Melik KARAKAYA

Melik Karakaya

Danışman : Prof. Dr. Harun POLAT

Harun Polat

Tez tesliminde enstitü web sayfası veri tabanında yayınlanmasına **izin veriyorum** /vermiyorum.

Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Bu tez MŞÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygundur.

Onaylayan Adı SOYADI

Tarih

İmza

Dr. Öğretim Üyesi Harun ÖNLÜ

12.09.2019

Harun Onlu

*Seminer, Yüksek Lisans ve doktora tezleri FBE tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanmalıdır. Tezler FBE'ne teslim edilmeden önce yukarıdaki kontrol listesi öğrenci ve danışman tarafından imzalanmalıdır. Bu sayfa tez teslimi esnasında en üst sayfa olarak verilmelidir.

*Tez ilk savunmaya sunulduğunda spiral cilt veya clip dosya formunda FBE teslim edilmelidir.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Melik KARAKAYA
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : MUŞ 01/01/1993
Telefon : 5345421864
Faks : -
e-mail : melik0049@gmail.com

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Nuh Mehmet Küçükçalık İnegöl/ BURSA	2011
Üniversite	: Muş Alparslan Üniversitesi	2015
Yüksek Lisans	: Muş Alparslan Üniversitesi	2019
Doktora	: -	

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2015-2016	Suvaran Ortaokulu	Matematik Öğretmeni
2016-2017	Yüzüncüyıl Zafer Ortaokulu	Matematik Öğretmeni
2017-2019	Özel Muş Final Temel Lisesi	Matematik Öğretmeni

YABANCI DİLLER

İngilizce