



BANACH ÖRGÜLERİNDE SINIRSIZ NORM YAKINSAMA

Sinem ETYEMEZ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

HAZİRAN 2021

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
 - Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
 - Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
 - Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
 - Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,
- bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Sinem ETYEMEZ

30/06/2021

BANACH ÖRGÜLERİNDE SINIRSIZ NORM YAKINSAMA

(Yüksek Lisans Tezi)

Sinem ETYEMEZ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2021

ÖZET

Bu tezde Riesz uzaylarında sıra yakınsama ve sınırsız sıra yakınsama kavramları ile birlikte Banach örgülerinde sınırsız norm yakınsama kavramının özellikleri detaylı bir şekilde incelenmiştir. Sınırsız norm yakınsamanın diğer yakınsamalarla ilişkisi detaylandırılmıştır. Sınırsız norm sürekli operatörler tanımlanarak bazı özellikleri verilmiştir.

Bilim Kodu : 20404
Anahtar Kelimeler : Sınırsız norm yakınsama, atomik, sınırsız norm süreklilik, regüler eleman.
Sayfa Adedi : 81
Danışman : Prof. Dr. Bahri TURAN

UNBOUNDED NORM CONVERGENCE IN BANACH LATTICES

(M. Sc. Thesis)

Sinem ETYEMEZ

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2021

ABSTRACT

In this thesis, the terms of order convergence and unbounded order convergence in Riesz spaces, along with the properties of the term of unbounded convergence in Banach lattices, are examined in detail. The relationship of unbounded norm convergence with other convergences is detailed. The unbounded norm continuous operators are defined, and some properties of its are given.

Science Code : 20404

Key Words : Unbounded norm convergence, atomic, unbounded norm continuous, regular element.

Page Number : 81

Supervisor : Prof. Dr. Bahri TURAN

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim süresince, değerli bilgi birikimini ve zamanını benimle paylaşan, daima sabırla bana yol gösteren ve yardımlarını esirgemeyen, bilim insanı kişiliğinden ve insaniyetinden çok şey öğrendiğim değerli hocam Prof. Dr. Bahri TURAN'a, tüm çalışmalarım boyunca manevi desteklerini her zaman yanımda hissettiğim aileme ve arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	3
3. SIRA YAKINSAMA VE SINIRSIZ SIRA YAKINSAMA	11
3.1. Sıra Yakınsama ve Özellikleri	11
3.2. Sınırsız Sıra Yakınsama ve Özellikleri.....	32
4. BANACH ÖRGÜLERİNDE SINIRSIZ NORM YAKINSAMA.....	41
4.1. Sınırsız Norm Yakınsamanın Temel Özellikleri	41
4.2. Sınırsız Sıra Yakınsama ve Dik Diziler	53
4.3. Sınırsız Sıra Yakınsak Alt Diziler ve Ölçüde Yakınsama	58
4.4. Sınırsız Norm Yakınsama ile Sınırsız Sıra Yakınsamanın Aynı Olma Durumu	62
4.5. Sınırsız Norm Yakınsama ve Zayıf Yakınsama	68
5. SINIRSIZ NORM SÜREKLİ OPERATÖRLER.....	71
5.1. Sınırsız Norm Dualler	71
5.2. Sınırsız Sıra Sürekli Operatörler.....	75
6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	77
KAYNAKLAR	79
ÖZGEÇMİŞ	81

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklamalar

x^+	x 'in pozitif kısmı
x^-	x 'in negatif kısmı
$ x $	x 'in modülü
$x_\alpha \uparrow x$	Yukarı yönlendirilmiş ve supremumu x olan net
$x_\alpha \downarrow x$	Aşağı yönlendirilmiş ve infimumu x olan net
$x \vee y$	x ile y 'nin supremumu
$x \wedge y$	x ile y 'nin infimumu
$\sup A$	A kümesinin supremumu
$\inf A$	A kümesinin infimumu
X^δ	X in Dedekind tamlaması
$X^\sim$	X nin sıra duali
$L_b(X, Y)$	X den Y ye tanımlı sıra sınırlı operatörlerin kümesi
$L_{un}(X, Y)$	X den Y ye tanımlı sınırsız norm sürekli operatörlerin kümesi
$X_{un}^\sim$	X in sınırsız norm sürekli duali

1. GİRİŞ

90 yıl önce F.Riesz tarafından başlatılan Riesz uzayları ve pozitif operatörler hakkındaki çalışmalar, kısa bir süre sonra H.Freudenthal ve L.H.Kantorovich tarafından aksiyomatik olarak geliştirilmiştir. 1960'lı yılların sonuna doğru birçok önemli matematikçinin de katkılarıyla Riesz uzayları teorisi için zemin çalışması tamamlanmış ve 1970'lerde ise bu tezin de önemli bir parçası olan Banach örgüleriyle ilgili çalışmalar yapılmıştır. Yıllar içinde sistematik şekilde geliştirilen bu konu diferensiyel denklemler, fonksiyon cebirleri,... gibi matematiğin farklı alanlarına ek olarak matematiksel fizik ve matematiksel ekonomi gibi çeşitli disiplinlerde de önemli uygulama alanları bulmuştur ([1],[2],[3]).

Bu alandaki önemli çalışmalardan doğan topolojik kavramlar üzerine de çalışılmaya başlanmıştır. Bunlar yakınsama ve yakınsamaklarla elde edilen süreklilik kavramlarıdır. Bu tezde bunlardan önemli üç tanesi ele alınarak derinlemesine incelenmiştir. Bunlar sıra yakınsama, sınırsız sıra yakınsama ve sınırsız norm yakınsamadır. Sınırsız norm yakınsamaya bağlı süreklilik tanımı verilerek bazı özellikleri detaylandırılmıştır.

X bir Riesz uzayı, $(x_\alpha) \subseteq X$ net ve $x \in X$ olmak üzere her α için $\alpha_0 \leq \alpha$ iken $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $(y_\alpha) \subseteq X$ neti ve α_0 varsa $(x_\alpha), x$ e sıra yakınsaktır denir ve $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ şeklinde gösterilir. Her $u \in X^+$ için $|x_\alpha - x| \wedge u \xrightarrow{o} 0$ ise $(x_\alpha), x$ e sınırsız sıra yakınsaktır denir ve $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ biçiminde gösterilir. X bir Banach örgüsü olmak üzere $|x_\alpha - x| \wedge u \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ ise $(x_\alpha), x$ e sınırsız norm yakınsaktır denir ve $x_\alpha \xrightarrow{un} x$ şeklinde gösterilir.

Nakano, Birkhoff'un Ergodik teoremi ile bağlantılı olarak yaklaşık 80 yıl önce sınırsız sıra yakınsama hakkında çalışmalar yapmaya başlamıştır. 'Sınırsız sıra yakınsama' adı 1964 yılında R.De Mair tarafından üretilmiştir. Bu gelişmelerle birlikte geçen sürede yakınsamanın sınırsız versiyonlarını araştırma fikri birçok makalede kullanılmıştır. Son zamanlarda ise N.Gao, "Unbounded order convergence in dual spaces" [4], N.Gao ve F.Xanthos, "Unbounded order convergence and application to martingales without probability" [5] ve N.Gao, V.G.Troitsky ve F.Xanthos, "Uo-convergence and it applications to cesaro means in Banach lattices" [6] makalelerinde yoğun olarak incelenmiştir.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde diğer kısımlarda kullanacağımız gerekli tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde [6] da verilen “Uo-convergence and it applications to cesaro means in Banach lattices” isimli makale temel alınarak, sıra yakınsama ve sınırsız sıra yakınsama kavramları incelenmiştir. Sıra yakınsamanın ve sınırsız sıra yakınsamanın temel özellikleri incelendikten sonra bu yakınsamaların alt uzayda ve üst uzayda nasıl davrandıkları ve hangi koşullarda aynı yakınsaklığa sahip oldukları görülmüştür. Bu kısım aynı dönem yüksek lisans yapan Merve Özbek ile birlikte çalışılmıştır.

Dördüncü bölümde, [7] de verilen “Unbounded norm convergence in Banach lattices” isimli makelesi baz alınarak, Banach örgülerinde sınırsız norm yakınsamanın temel özellikleri verilmiştir. Sonra, diğer bilinen yakınsamalar ile sınırsız norm yakınsama ilişkileri ele alınarak, sınırsız sıra yakınsama ile sınırsız norm yakınsamanın hangi durumlarda birbirini gerektirdiği ve sınırsız norm yakınsama ve dik diziler arasındaki ilişki verilmiştir. Ölçüde yakınsama ile sınırsız norm yakınsaman arasındaki ilişki, μ sonlu bir ölçü iken $L_p(\mu)$ uzayından alınan bir dizinin sınırsız norm yakınsak olması ile ölçüde yakınsak olmasının denk olduğunun gösterilmesiyle açıklanmıştır. Sınırsız norm yakınsama ile sınırsız sıra yakınsamanın aynı olma durumunun, X sıra sürekli norma sahip ve atomik Banach örgüsü iken mümkün olduğu gösterilmiştir. Monoton netler için zayıf yakınsamanın norm yakınsamayı gerektirdiği ele alınarak monoton zayıf yakınsayan netlerin sınırsız norm yakınsak olduğu yine bir önceki bölümde olduğu gibi detaylandırılmıştır.

Beşinci bölümde sınırsız norm sürekli operatörler tanımlanmış ve ilk olarak sınırsız norm sürekli dualler incelenmiştir. Daha sonra genel sınırsız norm sürekli operatörler verilmiştir. X Riesz uzayı üzerinde tanımlı herhangi bir f fonksiyoneli sınırsız norm sürekli iken f^+, f^- ve $|f|$ in de sınırsız norm sürekli olduğu gösterilmiştir. X Riesz uzayı olmak üzere X in sınırsız norm sürekli dualinin X in norm sürekli duali içinde ideal olduğu gösterilmiştir. Bir operatörün sınırsız norm sürekliliği ile norm sürekliliğinin hangi durumlarda denk olduğu çalışılmıştır.

Çalışma boyunca tüm Riesz uzayları Archimedian olarak alınmıştır.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde ileride kullanacağımız bazı tanım ve önermeleri [1], [2], [3] ve [8] kullanarak vereceğiz.

2.1. Tanım

X reel vektör uzayı ve üzerindeki sıralama bağıntısı " $\leq$ " olmak üzere her $x, y \in X$ ve

$x \leq y$ iken

i) Her $z \in X$ için $x + z \leq y + z$

ii) Her $0 \leq \alpha \in \mathbb{R}$ için $\alpha x \leq \alpha y$

koşulları sağlanırsa X uzayına *sıralı vektör uzayı* denir.

2.2. Tanım

X sıralı vektör uzayı olsun. X deki herhangi iki elemanın supremumu veya infimumu var ve X e ait ise X e *Riesz uzayı* veya *vektör örgüsü* denir.

2.3. Tanım

$(X, \|\cdot\|)$ normlu Riesz uzayı olsun. Her $x, y \in X$ için $|x| \leq |y| \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|$ sağlanıyorsa X e *normlu vektör örgüsü* denir. X bu norma göre tam ise X e *Banach örgüsü* denir.

2.4. Tanım

$(\Lambda, \leq)$ yukarı yönlendirilmiş bir küme ve $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. Λ dan X e tanımlı her fonksiyona X de bir *net* denir.

2.5. Tanım

(x_α) bir net olsun. Her $x_\beta, x_\gamma \in (x_\alpha)$ için $x_\beta \leq x_\delta$ ve $x_\gamma \leq x_\delta$ olacak şekilde $x_\delta \in (x_\alpha)$ varsa (x_α) ya *yukarı yönlendirilmiş net* denir ve $x_\alpha \uparrow$ ile gösterilir. Benzer şekilde, her

$x_\beta, x_\gamma \in (x_\alpha)$ için $x_\delta \leq x_\beta$ ve $x_\delta \leq x_\gamma$ olacak şekilde $x_\delta \in (x_\alpha)$ varsa (x_α) ya *aşağı yönlendirilmiş net* denir ve $x_\alpha \downarrow$ ile gösterilir. Ayrıca $x_\alpha \uparrow$ ve $\sup x_\alpha = x$ ise $x_\alpha \uparrow x$ şeklinde gösterilir. Benzer şekilde $x_\alpha \downarrow$ ve $\inf x_\alpha = x$ ise $x_\alpha \downarrow x$ şeklinde gösterilir.

2.6. Tanım

X sıralı vektör uzayı ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer $A \subseteq [a, b]$ olacak şekilde $a, b \in X$ varsa A ya *sıra sınırlı küme* denir.

2.7. Tanım

X sıralı vektör uzayı olsun. Eğer X in her üstten sınırlı kümesinin supremumu ve her alttan sınırlı kümesinin infimumu var ise X e *Dedekind tam sıralı vektör uzayı* denir. Bazı kaynaklarda sıra tam vektör uzayı olarak da adlandırılır.

2.8. Tanım

X Riesz uzayı ve L bir Dedekind tam Riesz uzayı olsun. Eğer,

- i) X e Riesz izomorfik olacak şekilde L nin bir Y Riesz alt uzayı vardır.
- ii) Y, L nin majorizing ve sıra yoğun Riesz alt uzayıdır.

şartları sağlanırsa L ye X Riesz uzayının *Dedekind tamlaması* denir.

[2] Teorem 32.5 den her Riesz uzayının Dedekind tamlaması vardır ve bu X^δ biçiminde gösterilir.

2.1. Teorem

X Riesz uzayı, $\emptyset \neq A, B \subseteq X$ olsun. Aşağıdakiler sağlanır.

- i) $\sup A, \sup B$ var ve $A \subseteq B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$ dir.
- ii) $\inf A, \inf B$ var ve $A \subseteq B \Rightarrow \inf B \leq \inf A$ dir.

2.2. Teorem

X Riesz uzayı, $\emptyset \neq A \subseteq X$ bir küme olmak üzere $\sup A$ var ve $\sup A = a \in X$ ise aşağıdakiler sağlanır.

- i) $-A = \{-a : a \in A\}$ kümesinin infimumu var ve $\inf(-A) = -\sup A$ dir.
- ii) Her x vektörü için $x + A := \{x + a : a \in A\}$ kümesinin supremumu var ve $\sup(x + A) = x + \sup A$ dir.
- iii) Her $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $\lambda \geq 0$ için $\lambda A := \{\lambda a : a \in A\}$ kümesinin supremumu var ve $\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$ dir.

2.9. Tanım

X Riesz uzayı ve $x \in X$ olsun.

- (i) $x \vee 0$ elemanına x in *pozitif kısmı* denir ve x^+ ile gösterilir.
- (ii) $(-x) \vee 0$ elemanına x in *negatif kısmı* denir ve x^- ile gösterilir.
- (iii) $x \vee (-x)$ elemanına x in *modülü* denir ve $|x|$ ile gösterilir.

2.3. Teorem

X Riesz uzay ve $x \in X$ olsun. Aşağıdakiler sağlanır.

- i) $x = x^+ - x^-$
- ii) $|x| = x^+ + x^-$
- iii) $x^+ \wedge x^- = 0$

2.4. Teorem

X Riesz uzayı, $x, y, z \in X$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdakiler sağlanır.

- i) $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$
- ii) $|x \vee z - y \vee z| \leq |x - y|$
- iii) $|x \wedge z - y \wedge z| \leq |x - y|$
- iv) $x + (y \vee z) = (x + y) \vee (x + z)$ ve $x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z)$

$$v) x \vee y = -[(-x) \wedge (-y)] \text{ ve } x \wedge y = -[(-x) \vee (-y)]$$

$$vi) \lambda|x| = |\lambda x|$$

2.10. Tanım

X Riesz uzayı ve $x, y \in X$ olmak üzere eğer $|x| \wedge |y| = 0$ ise x, y ye *diktir* denir ve $x \perp y$ şeklinde gösterilir.

2.11. Tanım

X Riesz uzayı olmak üzere her $x \in X^+$ ve $n \in \mathbb{N}^+$ için $n^{-1}x \downarrow 0$ ise X e *Archimedian Riesz uzayı* denir.

2.12. Tanım

X bir Riesz uzayı, $A \subseteq X$ ve $x \in A$ olsun. Her $y \in X$ için $|y| \leq |x|$ iken $y \in A$ oluyorsa A ya *solid küme* denir. A solid alt uzay ise A ya *ideal* denir. $A \subseteq X$ herhangi bir küme olmak üzere A tarafından üretilen ideal (A yı kapsayan en küçük ideal) I_A ile gösterilir ve

$I_A = \{x \in X : \exists x_1, x_2, \dots, x_n \in A, \lambda \in \mathbb{R}^+, |x| < \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i|\}$ dir. $x \in X$ için x elemanı tarafından üretilen ideal I_x ile gösterilir ve $I_x = \{y \in X : \exists \lambda \in \mathbb{R}^+, |y| \leq \lambda |x|\}$ dir.

2.13. Tanım

X bir Riesz uzayı ve A, X de ideal olsun. Her $\emptyset \neq B \subseteq A$ için $\sup B \in X$ iken $\sup B \in A$ oluyorsa A ya *band* denir. $A \subseteq X$ herhangi bir küme için A tarafından üretilen band (A yı kapsayan en küçük band) B_A ile gösterilir ve $B_A = \{x \in X : \exists (x_\alpha) \subseteq A^+, 0 \leq x_\alpha \uparrow |x|\}$ dir. $x \in X$ için x elemanı tarafından üretilen band B_x ile gösterilir. B_x *principal band* olarak adlandırılır ve $B_x = \{y \in X : |y| \wedge |x| \uparrow |y|\}$ dir.

2.14. Tanım

X bir Riesz uzayı ve A, X de band olsun. $X = B \oplus B^d$ şeklinde yazılabiliyorsa B ye *projeksiyon band* denir.

2.15. Tanım

X ve Y vektör uzayı, her $x, y \in X$, her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $T: X \rightarrow Y$ bir lineer dönüşüm olmak üzere $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ sağlanıyorsa T ye *operatör* denir.

2.16. Tanım

X ve Y sıralı vektör uzayı ve $T: X \rightarrow Y$ bir lineer fonksiyon olsun. Her $x \in X^+$ için $T(x) \in Y^+$ ise T ye *pozitif operatör* denir.

2.17. Tanım

X bir Riesz uzayı, $P: X \rightarrow X$ operatör olsun. Eğer $P^2 = P$ ise P ye *projeksiyon* denir. Eğer P pozitif ise P ye *pozitif projeksiyon* denir.

2.18. Tanım

X Riesz uzayı ve B , X içinde bir projeksiyon bandı olsun. Dolayısıyla $X = B \oplus B^d$ olduğundan her $x \in X$ elemanı $x_1 \in B$ ve $x_2 \in B^d$ olmak üzere $x = x_1 + x_2$ biçiminde yazılabilir.

$P_B: X \rightarrow X$ ve $P_B(x) = x_1$ ile tanımlanırsa P_B pozitif projeksiyonuna *band projeksiyon* denir. Benzer şekilde $P_{B^d}: X \rightarrow X$ ve $P_{B^d}(x) = x_2$ de bir band projeksiyondur.

2.19. Tanım

X bir Riesz uzayı ve $0 < e \in X$ olsun. Eğer $B_e = X$ ise e ye *zayıf birim* denir.

2.5. Teorem

X Riesz uzayı ve $0 < e \in X$ olsun. e nin zayıf birim olması için gerek ve yeter koşul $x \perp e$ ise $x = 0$ olmasıdır.

2.20. Tanım

X bir normlu örgü ve $0 < e \in X$ olsun. Eğer $\overline{I_e} = X$ ise e ye *yarı iç nokta* denir.

2.21. Tanım

X Riesz uzayı ve $(x_n) \subseteq X$ bir dizi olsun. $n \neq m$ için $x_n \perp x_m$ ise (x_n) ye *dik dizi* denir.

2.22. Tanım

X ve Y Riesz uzayı, $T: X \rightarrow Y$ operatör olmak üzere her $x, y \in X$ için $T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$ ise T ye *Riesz homomorfizmi* ya da *örgü homomorfizmi* denir.

2.23. Tanım

X ve Y Riesz uzayı, $T: X \rightarrow Y$ Riesz homomorfizmi birebir ve örten ise T ye *Riesz izomorfizmi* ya da *örgü izomorfizmi* denir. X ile Y ye *Riesz izomorfik* denir.

2.6. Teorem

X ve Y Riesz uzayı, $T: X \rightarrow Y$ birebir ve örten operatör olsun. T nin Riesz izomorfizmi olması için gerek ve yeter şart T ve T^{-1} operatörlerinin pozitif olmasıdır.

2.24. Tanım

$(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) Her $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) \geq 0$

(iii) Her ayrık (A_n) dizisi için $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

özelliklerini sağlıyorsa bu fonksiyona *ölçü* denir. Eğer $\mu(X) < \infty$ ise μ ye bir *sonlu ölçü* denir.

2.25. Tanım

(X, A, μ) bir ölçü uzayı, f_n ve f ler X üzerinde tanımlı, reel değerli ve A -ölçülebilir fonksiyonlar olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(x \in X: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon) = 0$ ise f_n , f ye *ölçüde yakınsaktır* denir ve $f_n \xrightarrow{\mu} f$ şeklinde gösterilir.

2.26. Tanım

(X, A, μ) bir ölçü uzayı, f_n ve f ler X üzerinde tanımlı, reel değerli ve A -ölçülebilir fonksiyonlar olsun. Eğer (f_n) dizisinin f ye noktasal yakınsamadığı noktaların kümesinin ölçüsü sıfır ise f_n , f ye *hemen hemen her yerde yakınsaktır* denir ve $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ şeklinde gösterilir.

2.27. Tanım

(X, A, μ) bir ölçü uzayı olsun. $0 < p < \infty$, $M(X, A)$; X üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değerli A -ölçülebilir bütün fonksiyonların kümesi ve $L(X, A, \mu)$, X üzerinde μ ölçüsüne göre integrallenebilen fonksiyonların sınıfı olmak üzere $\mathcal{L}_p = \{f \in M(X, A) : |f|^p \in L(X, A, \mu)\}$ kümesine p -inci kuvvetten integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı denir. $\mathcal{L}_p$ üzerinde $f \sim g \Leftrightarrow$ *hemen hemen her yerde* $f = g$ biçiminde tanımlanan $\sim$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Dolayısıyla $\mathcal{L}_p$ uzayını denklik sınıflarına ayırır. Bu denklik sınıflarının kümesi L_p ile gösterilir. Şu halde L_p nin elemanları $[f]$ biçimindeki denklik sınıflarıdır. L_p uzayı, $[f] + [g] = [f + g]$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\lambda[f] = [\lambda f]$ şeklinde tanımlanan toplama ve skalar işlemlerine göre bir vektör uzayıdır. $p \geq 1$ olmak üzere $\|[f]\|_p = \|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$ biçiminde tanımlanan $\|\cdot\|_p$ fonksiyonu L_p üzerinde bir normdur. Her ne kadar L_p nin elemanları denklik sınıfları ise de, onları denklik sınıflarının temsilci elemanları ile göstermek mümkündür. $0 < p < \infty$ olsun. O halde $|f|^p$ nin integrallenebilir olduğu tüm ölçülebilir fonksiyonların kümesi $L_p(\mu)$ ile gösterilir.

2.7. Teorem (Riesz-Fischer Teoremi)

(X, A, μ) bir ölçü uzayı ve $1 \leq p < \infty$ olsun. $L_p(X, A, \mu)$ uzayı, $\|\cdot\|_p$ normu ve " $f \leq g \Leftrightarrow$ *Hemen hemen her x için* $f(x) \leq g(x)$ " sıralaması ile bir Banach örgüsüdür.

2.28. Tanım

Hemen hemen her x için $|f(x)| \leq M$ olacak şekilde M pozitif reel sayısı varsa, buna f fonksiyonunun *esas sınırı* denir. Bir fonksiyonun esas sınırı mevcutsa fonksiyona *esash sınırlı* denir. Bu nedenle bir f fonksiyonu, ölçüsü sıfır olan kümelerin dışında sınırlandırılmışsa esash sınırlıdır. Bir f fonksiyonunun *esash supremumu*

$$\|f\|_{\infty} = \inf\{M \geq 0 : \text{hemen hemen her } x \text{ için } |f(x)| \leq M\}$$

ile tanımlanır. Eğer f fonksiyonunun herhangi bir esas sınırı yoksa $\|f\|_{\infty} = \infty$ dır. Hemen hemen her x için $|f(x)| \leq \|f\|_{\infty}$ dır. Esash sınırlı ve ölçülebilir fonksiyonların sınıfı $\mathcal{L}_{\infty}(\mu)$ ile gösterilir. $\mathcal{L}_{\infty}$ üzerinde $f \sim g \Leftrightarrow \text{hemen hemen her yerde } f = g$ biçiminde tanımlanan denklik bağıntısı $\mathcal{L}_{\infty}$ kümesini denklik sınıflarına ayırır. Bu denklik sınıflarının kümesi L_{∞} ile gösterilir. $\mathcal{L}_{\infty}$ ve L_{∞} uzayları birer vektör uzayıdır. $\|\cdot\|_{\infty}$ fonksiyonu L_{∞} üzerinde bir normdur.

2.8. Teorem

(X, A, μ) bir ölçü uzayı olsun. $L_{\infty}(X, A, \mu)$ uzayı, $\|\cdot\|_{\infty}$ normu ve " $f \leq g \Leftrightarrow \text{Hemen hemen her } x \text{ için } f(x) \leq g(x)$ " sıralaması ile bir Banach örgüsüdür.

3. SIRA YAKINSAMA VE SINIRSIZ SIRA YAKINSAMA

Bu bölümde [6] da verilen “Uo-convergence and it applications to cesaro means in Banach lattices” isimli makalenin ve [1] de verilen “Positive Operators” isimli kitabın ilgili bölümleri incelenerek sıra yakınsama ve sınırsız sıra yakınsamanın temel özellikleri detaylandırılmıştır.

3.1. Sıra Yakınsama ve Özellikleri

3.1.1. Tanım

X Riesz uzayı, $(x_\alpha) \subseteq X$ net ve $x \in X$ olsun. Her α için $\alpha_0 \leq \alpha$ iken $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $(y_\alpha) \subseteq X$ neti ve α_0 varsa $(x_\alpha), x$ e sıra yakınsaktır denir ve $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ şeklinde gösterilir.

3.1.1. Lemma

X Riesz uzayı, $(x_\alpha), (y_\alpha) \subseteq X$ net, $x, y \in X$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olsun. Aşağıdakiler sağlanır.

- i) $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ ve $x_\alpha \xrightarrow{o} y$ ise $x = y$ dir.
- ii) $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ ve $y_\alpha \xrightarrow{o} y$ için,
 - $ax_\alpha + by_\alpha \xrightarrow{o} ax + by$
 - $x_\alpha \vee y_\alpha \xrightarrow{o} x \vee y$
 - $x_\alpha \wedge y_\alpha \xrightarrow{o} x \wedge y$
 - $x_\alpha^+ \xrightarrow{o} x^+$
 - $x_\alpha^- \xrightarrow{o} x^-$
 - $|x_\alpha| \xrightarrow{o} |x|$
- iii) Her α için $x_\alpha \geq y$ ve $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ ise $x \geq y$ dir.
- iv) $x_\alpha \uparrow (x_\alpha \downarrow)$ ve $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ ise $x_\alpha \uparrow x (x_\alpha \downarrow x)$ dir.

İspat

i) $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ ise her α için $\alpha_1 \leq \alpha$ iken $|x_\alpha - x| \leq p_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $(p_\alpha) \subseteq X$ neti ve α_1 vardır. $x_\alpha \xrightarrow{o} y$ ise her α için $\alpha_2 \leq \alpha$ iken $|x_\alpha - y| \leq q_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $(q_\alpha) \subseteq X$ neti ve α_2 vardır. Λ yukarı yönlendirilmiş olduğundan $\alpha_1 \leq \alpha_3$ ve $\alpha_2 \leq \alpha_3$ olacak şekilde $\alpha_3 \in \Lambda$ vardır. Her α için $\alpha_3 \leq \alpha$ iken Teorem 2.4 i) dikkate alınarak,

$$\begin{aligned} 0 &\leq |x - y| = |x - x_\alpha + x_\alpha - y| \leq |x - x_\alpha| + |x_\alpha - y| \leq p_\alpha + q_\alpha \\ \Rightarrow 0 &\leq |x - y| \leq \inf_\alpha (p_\alpha + q_\alpha) \leq \inf_\alpha (p_\alpha) + \inf_\alpha (q_\alpha) \\ \Rightarrow |x - y| &= 0 \\ \Rightarrow x &= y \end{aligned}$$

elde edilir.

ii) $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ ve $y_\alpha \xrightarrow{o} y$ için,

• $p_\alpha \downarrow 0$ ve $q_\alpha \downarrow 0$ ise $|a|p_\alpha \downarrow 0$ ve $|b|q_\alpha \downarrow 0$ dir. Dolayısıyla $(|a|p_\alpha + |b|q_\alpha) \downarrow 0$ olur. Buradan her α için $\alpha_3 \leq \alpha$ iken Teorem 2.4 i) ve vi) göz önünde bulundurularak,

$$\begin{aligned} |ax_\alpha + by_\alpha - ax - by| &\leq |a||x_\alpha - x| + |b||y_\alpha - y| \\ &\leq (|a|p_\alpha + |b|q_\alpha) \downarrow 0 \end{aligned}$$

bulunur. O halde $ax_\alpha + by_\alpha \xrightarrow{o} ax + by$ elde edilir.

• Her α için $\alpha_3 \leq \alpha$ iken Teorem 2.4 i) ve ii) göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned} |x_\alpha \vee y_\alpha - x \vee y| &= |x_\alpha \vee y_\alpha - x \vee y_\alpha + x \vee y_\alpha - x \vee y| \\ &\leq |x_\alpha \vee y_\alpha - x \vee y_\alpha| + |x \vee y_\alpha - x \vee y| \\ &\leq |x_\alpha - x| + |y_\alpha - y| \\ &\leq (p_\alpha + q_\alpha) \downarrow 0 \end{aligned}$$

bulunur. O halde $x_\alpha \vee y_\alpha \xrightarrow{o} x \vee y$ elde edilir.

- Her α için $\alpha_3 \leq \alpha$ iken Teorem 2.4 i) ve iii) dikkate alınarak,

$$\begin{aligned}
 |x_\alpha \wedge y_\alpha - x \wedge y| &= |x_\alpha \wedge y_\alpha - x \wedge y_\alpha + x \wedge y_\alpha - x \wedge y| \\
 &\leq |x_\alpha \wedge y_\alpha - x \wedge y_\alpha| + |x \wedge y_\alpha - x \wedge y| \\
 &\leq |x_\alpha - x| + |y_\alpha - y| \\
 &\leq (p_\alpha + q_\alpha) \downarrow 0
 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $x_\alpha \wedge y_\alpha \xrightarrow{o} x \wedge y$ elde edilir.

- Her α için $\alpha_1 \leq \alpha$ iken Teorem 2.4 iii) baz alınarak,

$$\begin{aligned}
 |x_\alpha^+ - x^+| &= |(x_\alpha \vee 0) - (x \vee 0)| \\
 &\leq |x_\alpha - x| \\
 &\leq p_\alpha \downarrow 0
 \end{aligned}$$

bulunur. O halde $x_\alpha^+ \xrightarrow{o} x^+$ elde edilir.

- Her α için $\alpha_1 \leq \alpha$ iken Teorem 2.4 ii) göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned}
 |x_\alpha^- - x^-| &= |(-x_\alpha \vee 0) - (-x \vee 0)| \\
 &= |(x - x_\alpha) \vee 0| \\
 &\leq |x - x_\alpha| \\
 &\leq p_\alpha \downarrow 0
 \end{aligned}$$

bulunur. O halde $x_\alpha^- \xrightarrow{o} x^-$ elde edilir.

- Her α için $\alpha_1 \leq \alpha$ iken Teorem 2.4 i) ve Teorem 2.3. ii) dikkate alınarak,

$$\begin{aligned}
 ||x_\alpha| - |x|| &= |(x_\alpha^+ + x_\alpha^-) - (x^+ + x^-)| \\
 &= |(x_\alpha^+ - x^+) + (x_\alpha^- - x^-)| \\
 &\leq |x_\alpha^+ - x^+| + |x_\alpha^- - x^-| \\
 &\leq p_\alpha \downarrow 0
 \end{aligned}$$

bulunur. O halde $|x_\alpha| \xrightarrow{o} |x|$ elde edilir.

iii) $x_\alpha \geq 0$ ve $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ olsun. (ii) den $x_\alpha^+ \xrightarrow{o} x^+$ ve $x_\alpha \geq 0$ olduğundan $x_\alpha^+ = x_\alpha$ dir. $x_\alpha^+ \xrightarrow{o} x^+$ ve $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ ise $x^+ = x$ dir. Yani $x \geq 0$ olur. $(x_\alpha - y) \geq 0$ ve ii) den $(x_\alpha - y) \xrightarrow{o} (x - y)$ dir. O halde $(x - y) \geq 0$ ve böylece $x \geq y$ olur.

iv) $x_\alpha \uparrow$ ve $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ olsun. $x_\alpha \uparrow$ ise $-x_\alpha \downarrow$ ve $(x - x_\alpha) \downarrow$ dir. Her $x \in X$ için $x^- \leq |x|$ olduğundan keyfi $\beta \leq \alpha$ için,

$$\beta \leq \alpha \Rightarrow x_\beta \leq x_\alpha$$

$$\Rightarrow -x_\alpha \leq -x_\beta$$

$$\Rightarrow x - x_\alpha \leq x - x_\beta$$

$$\Rightarrow -(x - x_\beta) \leq -(x - x_\alpha)$$

$$\Rightarrow -(x - x_\beta) \vee 0 \leq -(x - x_\alpha) \vee 0$$

$$\Rightarrow (x - x_\beta)^- \leq (x - x_\alpha)^-$$

olduğu düşünülürse $(x - x_\beta)^- \leq (x - x_\alpha)^- \leq |x - x_\alpha|$ bulunur.

Ayrıca $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ olduğundan her α için $\alpha_1 \leq \alpha$ iken,

$$0 \leq (x - x_\beta)^- \leq (x - x_\alpha)^- \leq |x - x_\alpha| \leq p_\alpha \downarrow 0$$

olacak şekilde (p_α) neti ve α_1 vardır. Buradan,

$$0 \leq (x - x_\beta)^- \leq \inf_\alpha (p_\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow -(x - x_\beta) \vee 0 = 0$$

$$\Rightarrow -x + x_\beta \leq 0$$

$$\Rightarrow x_\beta \leq x$$

olur. O halde x, x_β için bir üst sınır oldu. Her α için $\alpha_1 \leq \alpha$ iken,

$$0 \leq (x - x_\alpha) \leq |x - x_\alpha| \leq p_\alpha$$

$$\Rightarrow 0 \leq \inf_\alpha (x - x_\alpha) \leq \inf_\alpha (p_\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \inf_\alpha (x - x_\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow x = \sup_{\alpha}(x_{\alpha})$$

bulunur. O halde $x_{\alpha} \uparrow x$ elde edilir.

3.1.2. Tanım

X Dedekind tam Riesz uzayı ve $(x_{\alpha}) \subseteq X$ sıra sınırlı net olsun. $\bigvee_{\beta \geq \alpha}(x_{\beta})$ elemanına (x_{α}) netinin *alt limiti* denir ve $\liminf_{\alpha}(x_{\alpha})$ biçiminde gösterilir. $\bigwedge_{\beta \geq \alpha}(x_{\beta})$ elemanına (x_{α}) netinin *üst limiti* denir ve $\limsup_{\alpha}(x_{\alpha})$ şeklinde gösterilir.

3.1.1. Önerme

X Dedekind tam Riesz uzayı, $(x_{\alpha}) \subseteq X$ sıra sınırlı bir net ve $x \in X$ olsun. $x_{\alpha} \xrightarrow{o} x$ olması için gerek ve yeter koşul $x = \limsup_{\alpha}(x_{\alpha}) = \liminf_{\alpha}(x_{\alpha})$ olmasıdır.

İspat

$(\Leftarrow)$: X Dedekind tam Riesz uzayı, $(x_{\alpha}) \subseteq X$ sıra sınırlı bir net ve $x \in X$ olsun.

$x = \limsup_{\alpha}(x_{\alpha}) = \liminf_{\alpha}(x_{\alpha})$ alalım.

Tanım 2.1.2 den $\limsup_{\alpha}(x_{\alpha}) = \inf_{\alpha} \left(\sup_{\beta \geq \alpha}(x_{\beta}) \right) = \bigwedge_{\alpha} \left(\bigvee_{\beta \geq \alpha}(x_{\beta}) \right)$ ve

$\liminf_{\alpha}(x_{\alpha}) = \sup_{\alpha} \left(\inf_{\beta \geq \alpha}(x_{\beta}) \right) = \bigvee_{\alpha} \left(\bigwedge_{\beta \geq \alpha}(x_{\beta}) \right)$ olduğunu biliyoruz.

$y_{\alpha} = \bigvee_{\beta \geq \alpha}(x_{\beta})$ alınırsa y_{α} azalan olur. $y_{\alpha_1} = \bigvee_{\beta \geq \alpha_1}(x_{\beta})$ ve $y_{\alpha_2} = \bigvee_{\beta \geq \alpha_2}(x_{\beta})$ olsun. Λ yukarı yönlendirilmiş olduğundan $\alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda$ olmak üzere $\alpha_1 \leq \alpha_3$ ve $\alpha_2 \leq \alpha_3$ olacak şekilde $\alpha_3 \in \Lambda$ vardır. $y_{\alpha_3} = \bigvee_{\beta \geq \alpha_3}(x_{\beta})$ olsun.

$A_1 = \{x_{\beta} : \beta \in \Lambda, \beta \geq \alpha_1\}$, $A_2 = \{x_{\beta} : \beta \in \Lambda, \beta \geq \alpha_2\}$ ve $A_3 = \{x_{\beta} : \beta \in \Lambda, \beta \geq \alpha_3\}$ şeklinde tanımlansın. $\alpha_1 \leq \alpha_3$ ve $\alpha_2 \leq \alpha_3$ olduğundan $A_3 \subseteq A_1$ ve $A_3 \subseteq A_2$ dir. Buradan $\sup A_3 \leq$

$\sup A_1$ ve $\sup A_3 \leq \sup A_2$ olup $y_{\alpha_3} \leq y_{\alpha_1}$ ve $y_{\alpha_3} \leq y_{\alpha_2}$ elde edilir. $z_\alpha = \bigwedge_{\beta \geq \alpha} (x_\beta)$ ile tanımlanırsa z_α artan olur. $z_{\alpha_1} = \bigwedge_{\beta \geq \alpha_1} (x_\beta)$ ve

$z_{\alpha_2} = \bigwedge_{\beta \geq \alpha_2} (x_\beta)$ olsun. Λ yukarı yönlendirilmiş olduğundan $\alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda$ olmak üzere $\alpha_1 \leq \alpha_3$ ve $\alpha_2 \leq \alpha_3$ olacak şekilde $\alpha_3 \in \Lambda$ vardır. $z_{\alpha_3} = \bigwedge_{\beta \geq \alpha_3} (x_\beta)$ olsun. $B_1 = \{x_\beta : \beta \in \Lambda, \beta \geq \alpha_1\}$, $B_2 = \{x_\beta : \beta \in \Lambda, \beta \geq \alpha_2\}$ ve $B_3 = \{x_\beta : \beta \in \Lambda, \beta \geq \alpha_3\}$ şeklinde tanımlansın. $\alpha_1 \leq \alpha_3$ ve $\alpha_2 \leq \alpha_3$ seçildiğinden $B_3 \subseteq B_1$ ve $B_3 \subseteq B_2$ olur. Buradan $\inf B_1 \leq \inf B_3$ ve $\inf B_2 \leq \inf B_3$ olup $z_{\alpha_1} \leq z_{\alpha_3}$ ve $z_{\alpha_2} \leq z_{\alpha_3}$ elde edilir. Hipotez göz önüne alındığında $y_\alpha \downarrow x$ ve $z_\alpha \uparrow x$ dir.

Şimdi $u_\alpha = y_\alpha - z_\alpha$ olarak tanımlayalım. u_α nın azalan olduğunu gösterelim. Her α için $z_\alpha = \bigwedge_{\beta \geq \alpha} (x_\beta) \leq \bigvee_{\beta \geq \alpha} (x_\beta) = y_\alpha$ olduğundan $y_\alpha - z_\alpha \geq 0$ olur.

$u_{\alpha_1} = y_{\alpha_1} - z_{\alpha_1}$ ve $u_{\alpha_2} = y_{\alpha_2} - z_{\alpha_2}$ için Λ yukarı yönlendirilmiş olduğundan $\alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda$ olmak üzere $\alpha_1 \leq \alpha_3$ ve $\alpha_2 \leq \alpha_3$ olacak şekilde $\alpha_3 \in \Lambda$ vardır.

$u_{\alpha_3} = y_{\alpha_3} - z_{\alpha_3}$ olsun. y_α azalan olduğundan $y_{\alpha_3} \leq y_{\alpha_1}$ ve $y_{\alpha_3} \leq y_{\alpha_2}$ olur. z_α artan olduğundan $z_{\alpha_1} \leq z_{\alpha_3}$ ve $z_{\alpha_2} \leq z_{\alpha_3}$ olup $-z_{\alpha_3} \leq -z_{\alpha_1}$ ve $-z_{\alpha_3} \leq -z_{\alpha_2}$ dir. Buradan $y_{\alpha_3} - z_{\alpha_3} \leq y_{\alpha_1} - z_{\alpha_1}$ ve $y_{\alpha_3} - z_{\alpha_3} \leq y_{\alpha_2} - z_{\alpha_2}$ yani $u_{\alpha_3} \leq u_{\alpha_1}$ ve $u_{\alpha_3} \leq u_{\alpha_2}$ olur. Dolayısıyla u_α azalandır.

$0 \leq u_\alpha = y_\alpha - z_\alpha = y_\alpha + (-z_\alpha) = x - x = 0$ olduğundan $\inf_\alpha (u_\alpha) = 0$ dir.

$x \geq \bigwedge_{\beta \geq \alpha} (x_\beta) = z_\alpha$ ve $x_\alpha \leq \bigvee_{\beta \geq \alpha} (x_\beta) = y_\alpha$ olduğundan

$x_\alpha - x \leq \bigvee_{\beta \geq \alpha} (x_\beta) - \bigwedge_{\beta \geq \alpha} (x_\beta) = u_\alpha$ dir.

$x \leq \bigvee_{\beta \geq \alpha} (x_\beta)$ ve $x_\alpha \geq \bigwedge_{\beta \geq \alpha} (x_\beta)$ olduğundan

$x - x_\alpha \leq \bigvee_{\beta \geq \alpha} (x_\beta) - \bigwedge_{\beta \geq \alpha} (x_\beta) = u_\alpha$ dir.

Dolayısıyla $|x - x_\alpha| \leq u_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde (u_α) bulunduğundan $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ dir.

$(\Rightarrow) : x_\alpha \xrightarrow{o} x$ olsun. Her α için $\alpha_0 \leq \alpha$ iken $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $(y_\alpha) \subseteq X$ neti ve α_0 vardır. $\alpha_0 \leq \alpha$ için $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha$ olduğundan

$$-y_\alpha \leq x_\alpha - x \leq y_\alpha \text{ dir.}$$

$$\begin{aligned} x_\alpha - x \leq y_\alpha &\Rightarrow x_\alpha \leq y_\alpha + x \\ &\Rightarrow V_{\beta \geq \alpha}(x_\beta) \leq V_{\beta \geq \alpha}(y_\alpha + x) = x + V_{\beta \geq \alpha}(y_\beta) \\ &\Rightarrow \wedge_\alpha(V_{\beta \geq \alpha}(x_\beta)) \leq x + \wedge_\alpha(V_{\beta \geq \alpha}(y_\beta)) = x + \wedge_\alpha(y_\alpha) = x \\ &\Rightarrow \limsup_\alpha(x_\alpha) \leq x \end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} -y_\alpha \leq x_\alpha - x &\Rightarrow x - y_\alpha \leq x_\alpha \\ &\Rightarrow \wedge_{\beta \geq \alpha}(x - y_\beta) \leq \wedge_{\beta \geq \alpha}(x_\beta) \\ &\Rightarrow x - V_{\beta \geq \alpha}(y_\beta) \leq \wedge_{\beta \geq \alpha}(x_\beta) \\ &\Rightarrow x - \wedge_\alpha(V_{\beta \geq \alpha}(y_\beta)) \leq x - \wedge_\alpha(y_\alpha) = x - 0 = V_\alpha(\wedge_{\beta \geq \alpha}(x_\beta)) \\ &\Rightarrow x \leq V_\alpha(\wedge_{\beta \geq \alpha}(x_\beta)) \\ &\Rightarrow x \leq \liminf_\alpha(x_\alpha) \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca her $\beta \geq \alpha$ ve keyfi sabit $\alpha \geq \gamma$ için,

$$\begin{aligned} \wedge_{\beta \geq \alpha}(x_\beta) \leq x_\gamma \leq V_{\beta \geq \alpha}(x_\beta) &\Rightarrow \wedge_{\beta \geq \alpha}(x_\beta) \leq x_\gamma \leq \wedge_\alpha(V_{\beta \geq \alpha}(x_\beta)) \\ &\Rightarrow V_\alpha(\wedge_{\beta \geq \alpha}(x_\beta)) \leq x_\gamma \leq \wedge_\alpha(V_{\beta \geq \alpha}(x_\beta)) \\ &\Rightarrow V_\alpha(\wedge_{\beta \geq \alpha}(x_\beta)) \leq \wedge_\alpha(V_{\beta \geq \alpha}(x_\beta)) \end{aligned}$$

olur. Böylece $\limsup_\alpha(x_\alpha) \leq x \leq \liminf_\alpha(x_\alpha) \leq \limsup_\alpha(x_\alpha)$ olduğundan

$$x = \limsup_\alpha(x_\alpha) = \liminf_\alpha(x_\alpha) \text{ elde edilir.}$$

3.1.3. Tanım

X Riesz uzayı ve $Y \subseteq X$ alt Riesz uzayı olsun.

- i) Her $0 < x \in X$ için $0 < y \leq x$ olacak şekilde bir $y \in Y$ varsa Y ye X içinde *sıra yoğun* denir.
- ii) Her $x \in X$ için $x \leq y$ olacak şekilde en az bir $y \in Y$ varsa Y ye *majorizing* denir.
- iii) Her $x \in X$ için $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ olacak şekilde $(x_\alpha) \subseteq Y$ neti varsa Y ye X içinde *sıra yakınsamaya göre yoğun* denir.
- iv) $A \subseteq Y$ olsun. Y içinde $\inf A$ var ve X içindeki $\inf A$ ya eşit ise Y ye *regüler* denir.

3.1.2. Lemma

X Riesz uzayı ve $Y \subseteq X$ alt Riesz uzayı olsun. Aşağıdakiler denktir.

- i) Y regülerdir.
- ii) $A \subseteq Y$ olsun. Y içinde $\sup A$ var ise X içinde $\sup A$ vardır ve bu ikisi birbirine eşittir.
- iii) Y içinde $y_\alpha \xrightarrow{o} y$ ise X içinde $y_\alpha \xrightarrow{o} y$ dir.
- iv) Y içinde $y_\alpha \downarrow 0$ ise X içinde $y_\alpha \downarrow 0$ dir.

İspat

i) $\Rightarrow$ ii) : Y içinde $\sup A = y_0$ olsun. X içinde $\sup A = y_0$ olduğunu gösterelim. $B_Y = \{y \in Y: \forall x \in A, x \leq y\}$ ve $B_X = \{y \in X: \forall x \in A, x \leq y\}$ şeklinde tanımlansın. $\inf B_Y = y_0$ ve Y regüler olduğundan $\inf B_X = y_0$ dir. Buradan $\sup A = \inf B_X = y_0$ elde edilir.

i) $\Rightarrow$ iii) : Y içinde $y_\alpha \xrightarrow{o} y$ ise her α için $\alpha_0 \leq \alpha$ iken $|y_\alpha - y| \leq z_\alpha \downarrow 0$ (Y içinde

$z_\alpha \downarrow 0$) olacak şekilde $(z_\alpha) \subseteq Y$ neti ve α_0 vardır. Y regüler olduğundan X içinde $z_\alpha \downarrow 0$ dir. Buradan X içinde $|y_\alpha - y| \leq z_\alpha \downarrow 0$ (X içinde $z_\alpha \downarrow 0$) yani X içinde $y_\alpha \xrightarrow{o} y$ dir.

iii) $\Rightarrow$ i) : $A \subseteq Y$ ve Y içinde $\inf A = y_0$ olsun. $C_Y = \{y \in Y: \forall x \in A, y \leq x\}$ ve $C_X = \{y \in X: \forall x \in A, y \leq x\}$ olsun. Hipotezden $\sup C_Y, Y$ içinde var ve

$\sup C_Y = y_0$ olduğundan X içinde de $\sup C_Y$ vardır ve $\sup C_Y = y_0$ dir.

iv) $\Rightarrow$ iii) : Y içinde $y_\alpha \downarrow 0$ ise $y_\alpha \xrightarrow{o} 0$ dır. Hipotezden X içinde $y_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olur. Dolayısıyla X içinde $y_\alpha \xrightarrow{o} 0$ ve $y_\alpha \downarrow$ olduğundan X içinde $y_\alpha \downarrow 0$ elde edilir.

iv) $\Rightarrow$ i) : $A \subseteq Y$, Y içinde $\inf A$ var ve $\inf A = y_0$ olsun. X içinde $\inf A$ var ve

$\inf A = y_0$ olduğunu gösterelim. A alttan sınırlıdır. $B = \{\bigwedge_{i=1}^n a_i : a_i \in A\}$ olmak üzere $A \subseteq B$ dir. Her $b_1, b_2 \in B$ için $b_1 = \bigwedge_{i=1}^n a_i$, $b_2 = \bigwedge_{j=1}^m c_j$ olacak şekilde $n, m \in \mathbb{N}$ ve $a_i, c_j \in A$ vardır. $b_3 = a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n \wedge c_1 \wedge c_2 \wedge \dots \wedge c_m$ olsun.

$$d_k = \begin{cases} a_k & ; 1 \leq k \leq n \\ c_k & ; n+1 \leq k \leq m+n \end{cases}$$

olmak üzere $d_k \in A$, $b_3 = \bigwedge_{k=1}^{n+m} d_k$ olduğundan $b_3 \in B$ ve $b_3 \leq b_1$ ve $b_3 \leq b_2$ olduğundan B azalandır. $B \downarrow y_0$ olduğunu gösterelim. Bunun için $\inf A = \inf B$ olduğunu göstermek yeterlidir. $A \subseteq B$ olduğundan Teorem 2.1 i) den Y içinde $\inf B \leq \inf A$ dır. Her $a \in A$ için $y_0 \leq a$ ve her $b \in B$ için $b = \bigwedge_{i=1}^n a_i$ olduğundan $y_0 \leq b$ olur. Buradan Y içinde $y_0 \leq \inf B$ elde edilir. Dolayısıyla $\inf A = \inf B = y_0$ dır. B azalan olduğundan $(b - y_0) \downarrow 0$ dır ve $\inf_{b \in B} (b - y_0) = \left(\inf_{b \in B} b \right) - y_0 = y_0 - y_0 = 0$ olur. Hipotezden X içinde $\inf_{b \in B} (b - y_0) = 0$ dır. Buradan $\left(\inf_{b \in B} b \right) - y_0 = 0$ olduğundan $\inf_{b \in B} b = y_0$ bulunur. Yukarıdakine benzer şekilde X içinde $\inf A = \inf B = y_0$ olduğu gösterilir.

3.1.2. Sonuç

X Riesz uzayı olmak üzere,

i) Y , X in ideali

veya

ii) X normlu örgü, Y sıra sürekli norma sahip ve bu norma göre X in tam alt Riesz uzayı

şıklarından biri doğruysa Y regülerdir.

İspat

i) Lemma 3.1.2 (iv) den $(y_\alpha) \subseteq Y$ neti için Y içinde $y_\alpha \downarrow 0$ iken X içinde $y_\alpha \downarrow 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. X içinde her α için $0 \leq y_\alpha$ dır. X içinde bir başka alt sınır $z \in X$ ve $0 \leq z \leq y_\alpha$ olsun. Y içinde $y_\alpha \downarrow 0$ olduğundan $z = 0$ dır.

ii) Lemma 3.1.2 (iv) den $(y_\alpha) \subseteq Y$ neti için Y içinde $y_\alpha \downarrow 0$ iken X içinde $y_\alpha \downarrow 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. X içinde her α için $0 \leq y_\alpha$ dır. X içinde bir başka alt sınır $z \in X$ ve $0 \leq z \leq y_\alpha$ olsun. X örgü norm ve $0 \leq z \leq y_\alpha$ olduğundan

$0 \leq \|z\| \leq \|y_\alpha\| \downarrow 0$ olur. Y sıra sürekli norma sahip olduğundan $\|y_\alpha\| \downarrow 0$ dır. O halde $\|z\| = 0$ dır. Buradan $z = 0$ elde edilir.

Örnek 1

$\mathbb{R}^{[0,1]} = \{f|f:[0,1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ fonksiyon}\}$ ve $Y, [0,1]$ üzerinde tanımlı, reel değerli, sürekli fonksiyonların uzayı yani $Y = C[0,1]$ olsun.

Ayrıca $X = \{f:C[0,1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ fonksiyon ve } f = g + h, g \in Y \text{ ve } h:[0,1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ sonlu tane nokta hariç her yerde sıfır olan bir fonksiyon}\}$ olsun. $\mathbb{R}^{[0,1]}$ den indirgenen sıralama ile X in sıralı vektör uzayı olduğunu ve $Y \subseteq X$ olduğunu görmek kolaydır. X in $\mathbb{R}^{[0,1]}$ in Riesz alt uzayı olduğunu gösterelim. Bunun için $f \in X$ iken $|f| \in X$ olduğunu göstermek yeterlidir. $f \in X$ ise $g \in Y$ ve h sonlu tane nokta hariç her yerde sıfır olan bir fonksiyon olmak üzere $f = g + h$ biçiminde yazılabilir. h ın bir $x_0 \in [0,1]$ noktasından sıfırdan farklı diğer yerlerde sıfır olduğunu varsayabiliriz. Bu durumda yapılır ise n tane noktada da benzer şekilde yapılır. $f = g + h$ ise $\mathbb{R}^{[0,1]}$ içinde $|f| = |g + h|$ ve her $x \in [0,1]$ için

$$|f|(x) = |f(x)| = |g(x) + h(x)| \text{ dir.}$$

1.Durum : $|g(x_0)| \leq |g(x_0) + h(x_0)|$ olsun.

$$t:[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow t(x) = \begin{cases} |g(x_0) + h(x_0)| - |g(x_0)|, & x = x_0 \\ 0, & x \neq x_0 \end{cases}$$

ile tanımlı t bir fonksiyondur. Bu durumda $|f| = |g| + t$ dir.

- $x = x_0$ için $(|g| + t)(x_0) = |g|(x_0) + t(x_0)$

$$= |g(x_0)| + (|g(x_0) + h(x_0)| - |g(x_0)|)$$

$$= |g(x_0) + h(x_0)|$$

$$= |f(x_0)|$$

$$= |f|(x_0)$$

- $x \neq x_0$ için $(|g| + t)(x) = |g|(x) + t(x)$

$$= |g(x)| + (|g(x) + h(x)| - |g(x)|)$$

$$= |g(x) + h(x)|$$

$$= |f(x)|$$

$$= |f|(x)$$

olur.

2.Durum : $|g(x_0) + h(x_0)| \leq |g(x_0)|$ olsun.

$s: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow s(x) = \begin{cases} |g(x_0)| - |g(x_0) + h(x_0)|, & x = x_0 \\ 0, & x \neq x_0 \end{cases}$$

ile tanımlı s bir fonksiyondur. Bu durumda $|f| = |g| - s$ dir.

- $x = x_0$ için $(|g| - s)(x_0) = |g|(x_0) - s(x_0)$

$$= |g(x_0)| - (|g(x_0)| - |g(x_0) + h(x_0)|)$$

$$= |g(x_0) + h(x_0)|$$

$$= |f(x_0)|$$

$$= |f|(x_0)$$

- $x \neq x_0$ için $(|g| - s)(x) = |g|(x) + s(x)$

$$= |g(x)|$$

$$= |g(x) + h(x)|$$

$$\begin{aligned}
&= |f(x)| \\
&= |f|(x)
\end{aligned}$$

olur.

3.Durum : $|g(x_0) + h(x_0)| = |g(x_0)|$ olsun. Bu durumda $|f| = |g|$ dir.

$$\begin{aligned}
\bullet x = x_0 \text{ için } |g|(x_0) &= |g(x_0)| \\
&= |g(x_0) + h(x_0)| \\
&= |f(x_0)| \\
&= |f|(x_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet x \neq x_0 \text{ için } |g|(x) &= |g(x)| \\
&= |g(x) + h(x)| \\
&= |f(x)| \\
&= |f|(x)
\end{aligned}$$

olur. Böylece tüm durumlar göz önüne alındığında $|f| \in X$ bulunur.

Y nin X içinde sıra yakınsamaya göre yoğun olduğunu gösterelim. $f \in X$ için

$f = g + h, g \in Y$ ve h , bir $x_0 \in [0,1]$ noktasında sıfırdan farklı diğer yerlerde sıfır olsun. Eğer $g(x_0) = h(x_0)$ ise $f = g$ olacağından $(f_n) = f$ sabit dizisi için $(f_n) \subseteq Y$ ve $f_n \xrightarrow{o} f$ dir.

$f = 0 + \chi_{\{\frac{1}{2}\}}$ alırsak $f_n \xrightarrow{o} f$ ve $(f_n) \subseteq Y = C[0,1]$ dizisinin nasıl oluşturulduğunu gösterelim. Benzer şekilde herhangi bir $f \in X$ için yapılabilir.

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} \\ t2^n - 2^{n-1} + 1, & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} \leq t < \frac{1}{2} \\ -t2^n + 2^{n-1} + 1, & \frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} \\ 0, & \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$f_n \geq 0$ olduğunu gösterelim.

$$\blacksquare 0 \leq t \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} \text{ için } f_n(t) = 0 \geq 0 \text{ dir.}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} \leq t < \frac{1}{2} \text{ için } 2^n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} \right) &\leq t2^n < -\frac{1}{2} \\ &\Rightarrow 2^{n-1} - 1 \leq t2^n < 2^{n-1} \\ &\Rightarrow -1 \leq t2^n - 2^{n-1} < 0 \\ &\Rightarrow 0 \leq t2^n - 2^{n-1} + 1 < 1 \\ &\Rightarrow 0 \leq f_n(t) < 1 \end{aligned}$$

dir.

$$\blacksquare \frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} \text{ için } -\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} < -t \leq -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -2^{n-1} - 1 < -t2^n \leq -2^{n-1}$$

$$\Rightarrow -1 < -t2^n + 2^{n-1} \leq 0$$

$$\Rightarrow 0 < -t2^n + 2^{n-1} + 1 \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 < f_n(t) \leq 1$$

dir.

$$\blacksquare \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} \leq 0 \leq 1 \text{ için } f_n(t) = 0 \geq 0 \text{ dir.}$$

Dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}^+$ için $f_n \geq 0$ dir.

Her $n \in \mathbb{N}^+$ için $f_{n+1} \leq f_n$ olduğunu gösterelim.

$$f_{n+1}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \\ t2^{n+1} - 2^n + 1, & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \leq t < \frac{1}{2} \\ -t2^{n+1} + 2^n + 1, & \frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} \\ 0, & \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$\blacksquare 0 \leq t \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} \Rightarrow 0 \leq t \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} \text{ ve } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\Rightarrow f_n(t) = 0 \text{ ve } f_{n+1}(t) = 0$$

$$\Rightarrow f_{n+1}(t) \leq f_n(t)$$

$$\blacksquare \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} \leq t < \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} \leq t < \frac{1}{2} \text{ ve } \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \leq t < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f_n(t) = t2^n - 2^{n-1} + 1 \text{ ve } f_{n+1}(t) = -t2^{n+1} + 2^n + 1 \text{ dr.}$$

$$t < \frac{1}{2} \Rightarrow t2^n < 2^{n-1}$$

$$\Rightarrow t2^n(2-1) < 2^{n-1}(2-1)$$

$$\Rightarrow t2^{n+1} - t2^n < 2^n - 2^{n-1}$$

$$\Rightarrow t2^{n+1} - 2^n < t2^n - 2^{n-1}$$

$$\Rightarrow t2^{n+1} - 2^n + 1 < t2^n - 2^{n-1} + 1$$

$$\Rightarrow f_{n+1}(t) \leq f_n(t)$$

$$\blacksquare \frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} \text{ ve } \frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\Rightarrow f_n(t) = -t2^n + 2^{n-1} + 1 \text{ ve } f_{n+1}(t) = -t2^{n+1} + 2^n + 1 \text{ dr.}$$

$$\frac{1}{2} \leq t \Rightarrow 2^{n-1} \leq t2^n$$

$$\Rightarrow 2^{n-1}(2-1) < t2^n(2-1)$$

$$\Rightarrow 2^n - 2^{n-1} \leq t2^{n+1} - t2^n$$

$$\Rightarrow -t2^{n+1} + t2^n \leq -t2^n + 2^{n+1}$$

$$\Rightarrow -t2^{n+1} + t2^n + 1 \leq -t2^n + 2^{n+1} + 1$$

$$\Rightarrow f_{n+1}(t) \leq f_n(t)$$

$$\blacksquare \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} \leq t < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} \Rightarrow f_n(t) = -t2^n + 2^{n-1} + 1 \text{ ve } f_{n+1}(t) = 0 \text{ dr.}$$

Her $n \in \mathbb{N}^+$ için $f_n \geq 0$ olduğundan $f_{n+1}(t) = 0 \leq f_n(t)$ dir.

$$\begin{aligned} \blacksquare \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} \leq t \leq 1 &\Rightarrow f_n(t) = 0 \text{ ve } f_{n+1}(t) = 0 \\ &\Rightarrow f_{n+1}(t) \leq f_n(t) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}^+$ için $f_{n+1} \leq f_n$ olur.

$f_n \downarrow f$ olduğunu gösterelim. f_n azalan olduğundan $\mathbb{R}$ de $f_n(t)$ azalan dizidir. $\mathbb{R}$ de azalan bir dizinin limiti ile infimumu aynı olacağından dizinin limitini inceleyelim. Her $t \in [0,1]$ için $t \neq \frac{1}{2}$ iken $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = 0$ olduğunu gösterelim. $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ ise

$0 \leq t < \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n_0}}$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. (f_n) tanımından $f_n(t) = 0$ dr. Ayrıca f_n azalan ve pozitif olduğundan $n_0 \leq n$ iken $0 \leq f_n(t) \leq f_{n_0}(t) = 0$ olur. Buradan $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = 0$ elde edilir. $t \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ ise $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n_0}} \leq t \leq 1$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. (f_n) tanımından $f_{n_0}(t) = 0$ dr. Ayrıca f_n azalan ve pozitif olduğundan $n_0 \leq n$ iken $0 \leq f_n(t) \leq f_{n_0}(t) = 0$ olur. Buradan $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $f_n \xrightarrow{o} f$ olduğundan Y, X içinde sıra yakınsamaya göre sıra yoğundur. Y nin X içinde sıra yoğun olduğunu varsayalım. $0 < r \leq \chi_{\{\frac{1}{2}\}}$ olacak şekilde $r \in Y$ vardır. Her $t \in [0,1]$ için $t \neq \frac{1}{2}$ iken $0 < r(t) \leq \chi_{\{\frac{1}{2}\}}(t) = 0$ ve her $t \in [0,1]$ için $t \neq \frac{1}{2}$ iken $r(t) = 0$ olur. Bu ise kabulumüzle çelişir. r sürekli olduğundan $r\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ olacağından $r = 0$ olur. O halde Y, X içinde sıra yoğun değildir.

3.1.3. Lemma

X Riesz uzayı ve Y, X in Riesz alt uzayı olsun. Aşağıdakiler denktir.

- i) Y, X içinde majorizing ve sıra yoğundur.
- ii) Her $x \in X$ için $x = \sup\{y \in Y: y \leq x\}$ dir.
- iii) Her $x \in X$ için $x = \inf\{y \in Y: y \geq x\}$ dir.

İspat

i) $\Rightarrow$ ii) : Y, X içinde majorizing ve sıra yoğun olsun. $A = \{y \in Y : 0 \leq y \leq x\}$ ve önce $x \geq 0$ alalım. $0 \in A$ olduğundan $A \neq \emptyset$ dir. Şimdi $\sup A = x$ olduğunu gösterelim. Bunun için $\sup A \neq x$ olduğunu varsayalım. Bu durumda her $y \in A$ için $y \leq z$ ve $z < x$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. $x - z > 0$ ve Y, X içinde sıra yoğun olduğundan $0 < u \leq x - z$ olacak şekilde $u \in Y$ vardır. Buradan $z \leq u + z \leq x$ elde edilir. Ayrıca her $y \in A$ için $y \leq z$ olduğundan $u + y \leq u + z \leq x$ elde edilir. $u + y \in Y$ ve $u + y \leq x$ olduğundan $u + y \in A$ dir. Kabulden her $y \in A$ için $u + y \leq z$ olur. Y vektör uzayı olduğundan $2u + y \in Y$ dir. Herhangi bir $n > 2$ için $nu + y \leq z$ olduğunu tümevarımla gösterelim. Her n için doğru olsun. Buradan her $y \in A$ için $nu + u + y = (n + 1)u + y \leq u + z \leq x$ dir. Yani her $n \in \mathbb{N}^+$ ve her $y \in A$ için $y \geq 0$ olduğundan $0 < nu \leq nu + y \leq z$ elde edilir. X Archimedian Riesz uzayı olduğundan $u = 0$ bulunur ki bu çelişkidir. O halde $\sup A = x$ dir.

Şimdi $B = \{y \in Y : y \leq x\}$ şeklinde tanımlansın. A ve B nin tanımından $A \subseteq B$ dir. O halde $x = \sup A \leq \sup B$ olur. Her $y \in B$ için $y \leq x$ olduğundan $\sup B \leq x$ dir. Yani $x \geq 0$ için $\sup\{y \in Y : y \leq x\} = x$ olduğu gösterildi.

Şimdi $x \in X$ keyfi olsun. $C = \{y \in Y : y \leq x\}$ olmak üzere $y_0 \in C$ seçelim. $y_0 \in Y$ ve $y_0 \leq x$ dir. $[y_0, x] - y_0 = [0, x - y_0]$ olduğunu görmek kolaydır. İspatın ilk kısmı göz önüne alınırsa $\sup\{([y_0, x] - y_0) \cap Y\} = \sup\{([0, x - y_0]) \cap Y\} = x - y_0$ bulunur. Buradan da $\sup\{[y_0, x] \cap Y\} = x_0 - y_0 + y_0 = x$ elde edilir.

Herhangi bir $y \in C$ için

$$\begin{aligned} y \leq x &\Rightarrow \sup_{y \in C} y \leq x \\ &\Rightarrow \sup C \leq x = \sup\{[y_0, x] \cap Y\} \end{aligned}$$

bulunur. Diğer yandan $[y_0, x] \cap Y \subseteq C$ olduğundan $x = \sup\{[y_0, x] \cap Y\} \leq \sup C$ bulunur. Yani $\sup C = x$ elde edilir.

ii) $\Rightarrow$ iii) : Her $x \in X$ için $x = \sup\{y \in Y : y \leq x\}$ olsun.

Yani $-x = \sup\{y \in Y : y \leq x\}$ olur. Buradan

$$\begin{aligned}
x &= -\sup\{y \in Y: y \leq -x\} \\
&= \inf\{-y \in Y: x \leq -y\} \\
&= \inf\{u \in Y: x \leq u\}
\end{aligned}$$

elde edilir.

iii) $\Rightarrow$ ii) : Her $x \in X$ için $x = \inf\{y \in Y: y \geq x\}$ olsun.

Yani $-x = \inf\{y \in Y: y \geq -x\}$ olur. Buradan

$$\begin{aligned}
x &= -\inf\{y \in Y: y \geq -x\} \\
&= \inf\{-y \in Y: x \geq -y\} \\
&= \inf\{u \in Y: x \geq u\}
\end{aligned}$$

elde edilir.

ii) $\Rightarrow$ i) : Her $x \in X$ için $x = \sup\{y \in Y: y \leq x\}$ olsun. : $0 < x \in X$ ve en az bir $y \in Y$ için $0 < y \leq x$ olduğunu gösterelim. $0 < x$ ve $\{y \in Y: y \leq x\} = A$ olsun.

$x = \sup\{y \in Y: y \leq x\}$ olduğundan $A \neq \emptyset$ dir. En az bir $y \in Y$ için $y \leq x$ ise en az bir $y \in Y$ için $y^+ \leq x$ dir. Öncelikle $y^+ \neq 0$ olduğunu gösterelim. Her $y \in Y$ için $y^+ = 0$ olsun. Her $y \in Y$ için $y \leq y^+ \leq x$ ise $\sup_{y \in A} y \leq \sup_{y \in A} y^+$ dır. Buradan $x \leq 0$ bulunup çelişki elde edilir.

Y nin X içinde sıra yoğun olduğunu gösterdik, şimdi de Y nin X içinde majorizing olduğunu gösterelim. Bunun için $0 < x \in X$ ve en az bir $y \in Y$ için $x < y$ olduğunu göstermek yeterlidir. (ii) $\Rightarrow$ (iii) sağlandığından (iii) den $\{y \in Y: y \geq x\} = B$ alınırsa $x = \inf\{y \in Y: y \geq x\}$ olduğundan $B \neq \emptyset$ bulunur ve en az bir $y \in Y$ için $x \leq y$ sağlanır.

3.1.4. Lemma

X Riesz uzayı ve Y, X in Riesz alt uzayı olsun.

i) Y ideal ise regülerdir.

ii) Y sıra yoğun ise regülerdir.

İspat

Y, X içinde ideal olsun. [6] Lemma 2.5 den Y içinde $y_\alpha \downarrow 0$ iken X içinde $y_\alpha \downarrow 0$ olduğunu göstermek yeterlidir.

i) $(y_\alpha) \subseteq Y$ ve Y içinde $y_\alpha \downarrow 0$ olsun. $Y \subseteq X$ olduğundan $(y_\alpha) \subseteq X$ ve $y_\alpha \downarrow$ dır. Şimdi X içinde $\inf y_\alpha = 0$ olduğunu gösterelim. $z \in X$ ve her α için $0 \leq z \leq y_\alpha$ olsun. $(y_\alpha) \subseteq Y$ ve Y ideal olduğundan $z \in Y$ ve böylece $z = 0$ bulunur.

ii) $(y_\alpha) \subseteq Y$ ve Y içinde $y_\alpha \downarrow 0$ olsun. X içinde $y_\alpha \downarrow$ dır. $z \in X$ ve her α için

$0 \leq z \leq y_\alpha$ alalım. $z \neq 0$ olsun. Bu durumda Y sıra yoğun olduğundan

$0 < y \leq z \leq y_\alpha$ olacak şekilde $y \in Y$ vardır. Bu Y içinde $\inf y_\alpha = 0$ olmasıyla çelişir. O halde $z = 0$ yani X içinde $y_\alpha \downarrow 0$ dır.

3.1.5. Lemma

X ve Y Riesz uzayı, Y sıra yoğun ve majorizing ve $(x_\alpha) \subseteq Y$ bir net olsun. Bu durumda Y içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olması için gerek ve yeter şart X içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olmasıdır.

İspat

Y içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olsun. Lemma 3.1.4 den ve Lemma 3.1.2 iii) den Y regülerdir. Yani Y içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ iken X içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ dır. Şimdi X içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ alalım. $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ ise $\alpha_0 \leq \alpha$ iken $|x_\alpha| \leq y_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $(y_\alpha) \subseteq X$ neti ve α_0 vardır. $A = \{y \in Y: \exists \alpha \text{ için } y_\alpha \leq y\}$ olarak tanımlayalım. Y majorizing olduğundan $A \neq \emptyset$ dir. $z \in X$, her α her $y \in A$ için,

$$\begin{aligned} 0 \leq z \leq y &\Rightarrow z \leq \{y \in Y: \exists \alpha \text{ için } y_\alpha \leq y\} \\ &\Rightarrow 0 \leq \inf_\alpha z \leq \inf_\alpha y_\alpha = 0 \\ &\Rightarrow z = 0 \end{aligned}$$

bulunur. O halde X içinde $\inf A = 0$ dır. Şimdi Y içinde $\inf A = 0$ olduğunu gösterelim. $B_1 = \{x \in X: \forall a \in A \text{ için } x \leq a\}$ ve $B_2 = \{x \in Y: \forall a \in A \text{ için } x \leq a\}$ olarak tanımlayalım. $B_2 \subseteq B_1 \Rightarrow \sup B_2 \leq \sup B_1$ olup $0 \leq \inf_Y A \leq \inf_X A = 0$ ve $\inf_Y A = 0$ bulunur.

$A = \{y \in Y : \exists \alpha \text{ için } y_\alpha \leq y\}$ için $y_1, y_2 \in A$ iken $y_{\alpha_1} \leq y_1$ ve $y_{\alpha_2} \leq y_2$ olacak şekilde en az bir $y_{\alpha_1}, y_{\alpha_2}$ vardır. $y_\alpha \downarrow$ olduğundan $y_{\alpha_3} \leq y_{\alpha_1}$ ve $y_{\alpha_3} \leq y_{\alpha_2}$ olacak şekilde en az bir α_3 vardır. $y_3 = y_1 \wedge y_2 \in Y$ alalım.

$y_{\alpha_3} \leq y_{\alpha_3} \wedge y_{\alpha_2} \leq y_1 \wedge y_2 = y_3$ olduğundan $y_3 \in A$, $y_3 \leq y_1$ ve $y_3 \leq y_2$ dir. Yani A azalandır. Ayrıca $\alpha_0 \leq \alpha$ iken $|x_\alpha| \leq y_\alpha$ olması ve A nın tanımından Y içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ dir.

[2] Sayfa 151 den her Riesz uzayının Dedekind tamlaması vardır. [2] Tanım 32.1 ve Lemma 2.1.3 den X, X^δ içinde majorizing ve sıra yoğundur.

3.1.2. Sonuç

X Riesz uzayı, X^δ, X in Dedekind tamlaması ve $(x_\alpha) \subseteq X$ bir net olsun. X içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olması için gerek ve yeter şart X^δ içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olmasıdır.

İspat

X, X^δ içinde majorizing ve sıra yoğundur. Dolayısıyla Lemma 3.1.5 den istenen elde edilir.

3.1.1. Teorem

X Riesz uzayı ve Y, X in regüler Riesz alt uzayı olsun. Bu durumda Y^δ, X^δ nın regüler Riesz alt uzayıdır.

İspat

$J: Y \rightarrow X^\delta$ gömme dönüşümü olmak üzere Y, X içinde regüler olduğundan Y içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ ise X içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ dir. Benzer şekilde X, X^δ içinde regüler olduğundan X^δ içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ dir. O halde J sıra süreklidir.

[1] Teorem 4.12 den J dönüşümünün Y^δ genişlemesi vardır ve buna T diyelim. $T: Y^\delta \rightarrow X^\delta$ sıra sürekli bir operatör ve $T|Y = J$ dir. Şimdi $a \in Y^\delta$ alalım. Y, Y^δ içinde sıra yoğun olduğundan Y^δ içinde $0 \leq y_\alpha \uparrow a^+$ ve $0 \leq z_\alpha \uparrow a^-$ olacak şekilde $(y_\alpha), (z_\alpha) \subseteq Y$ netleri

vardır. T sıra sürekli olduğundan X içinde $T(y_\alpha) = y_\alpha \xrightarrow{o} a^+ = T(a^+)$ ve $T(z_\alpha) = z_\alpha \xrightarrow{o} a^- = T(a^-)$ dir. Ayrıca X içinde $y_\alpha - z_\alpha = T(y_\alpha - z_\alpha) \xrightarrow{o} T(a) = a$ olur. $a^+ \wedge a^- = 0$ olduğundan her α için Y^δ içinde $y_\alpha \wedge z_\alpha = 0$ ve $y_\alpha = (y_\alpha \wedge z_\alpha) + (y_\alpha - z_\alpha)^+$ şeklinde yazılabildiğinden $y_\alpha = (y_\alpha - z_\alpha)^+$ dir.

Buradan X içinde $T[(y_\alpha - z_\alpha)^+] \xrightarrow{o} T(a^+)$ ve $T[(y_\alpha - z_\alpha)^+] \xrightarrow{o} [T(a)]^+$ olduğundan $T(a^+) = [T(a)]^+$ bulunur. Bu da T nin örgü homomorfizmi olması demektir. Şimdi T nin birebirliğini göstermek için $Ta = 0$ alalım. T örgü homomorfizm olduğundan $|Ta| = T|a| = 0$ olur. Ayrıca Y, Y^δ içinde sıra yoğun olduğundan $0 \leq y_\alpha \uparrow |a|$ olacak şekilde $(y_\alpha) \subseteq Y$ neti vardır. Buradan

$0 \leq y_\alpha = T(y_\alpha) \leq T|a| = 0$ elde edilir. Bu da her α için $y_\alpha = 0$ demektir. $y_\alpha \uparrow |a|$ olduğundan $|a| = 0$ ve böylece $a = 0$ bulunur. $T: Y^\delta \rightarrow X^\delta$ birebirdir.

$(y_\alpha) \subseteq T(Y^\delta)$ ve $y_\alpha \xrightarrow{o} 0$ dir. $(y_\alpha) \subseteq T(Y^\delta)$ ise görüntü tanımından $T(x_\alpha) = y_\alpha$ olacak şekilde $(x_\alpha) \subseteq Y^\delta$ vardır. $T: Y^\delta \rightarrow T(Y^\delta)$ örgü homomorfizmi olduğundan $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ dir. T sıra sürekli olduğundan X^δ içinde $T(x_\alpha) = y_\alpha \xrightarrow{o} 0$ dir.

3.1.6. Lemma

X Riesz uzayı ve Y, X in regüler sıra tam Riesz alt uzayı olsun. $(y_\alpha) \subseteq Y$ sıra sınırlı neti için X içinde $y_\alpha \xrightarrow{o} x \in X$ ise Y içinde $y_\alpha \xrightarrow{o} x \in Y$ dir.

İspat

X^δ içinde çalışabileceğimiz için X i sıra tam alalım. Önerme 3.1.1 den X içinde

$x = \inf_\alpha \sup_{\beta \geq \alpha} (y_\beta) = \sup_\alpha \inf_{\beta \geq \alpha} (y_\beta)$ dir. Hipotezden Y sıra tam olduğundan Y içinde infimum ve supremum vardır. Ayrıca Y sıra tam ve regüler olduğundan $x \in Y$ ve Y içinde $y_\alpha \xrightarrow{o} x$ dir.

3.1.3. Sonuç

X Riesz uzayı ve Y, X in regüler Riesz alt uzayı olsun. Y içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olması için gerek ve yeter koşul $(x_\alpha) \subseteq Y$ sıra sınırlı neti için X içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olmasıdır.

İspat

(x_α) sıra sınırlı net ve Y içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ ise Y, X içinde regüler olduğundan Teorem 3.1.1 den Y^δ, X^δ içinde regülerdir. Sonuç 3.1.2 den X içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ ise X^δ içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ dir. Lemma 3.1.6 dan X^δ Dedekind tam olduğundan Y^δ içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ olur. Sonuç 3.1.2 den Y^δ içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ ise Y içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ dir.

3.1.4. Tanım

X Riesz uzayı ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer her $(x_\alpha) \subseteq A$ ve $x \in A$ için $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ ve $x \in X$ ise A ya *sıra kapalı* denir.

3.1.4. Sonuç

X Riesz uzayı ve Y, X in regüler Riesz alt uzayı olsun. Y, X içinde sıra yakınsamaya göre yoğun ise Y, X içinde sıra yoğundur. Ek olarak Y sıra tam ise Y, X in idealidir.

İspat

Teorem 3.1.1 den Y^δ, X^δ nm regüler Riesz alt uzayıdır. Ayrıca Y^δ nm X^δ içinde ideal olduğunu gösterelim. Bunun için öncelikle her $a \in X^\delta, b \in Y^\delta$ için $0 \leq a \leq b$ iken $a \in Y^\delta$ olduğunu gösterelim. $[0, a] = \{z \in X^\delta : 0 \leq z \leq a\}$ olsun. X, X^δ içinde sıra yoğun olduğundan X^δ içinde $a = \sup([0, a] \cap X)$ dir. $x \in ([0, a] \cap X)$ ise X içinde $y_\alpha \xrightarrow{o} x$ olacak şekilde (y_α) neti vardır. X, X^δ içinde regüler olduğundan X^δ içinde $y_\alpha \xrightarrow{o} x$ dir. $z_\alpha = |y_\alpha| \wedge b$ olarak tanımlayalım. Her α için $0 \leq z_\alpha \leq b$ olduğundan $(z_\alpha), Y^\delta$ içinde sıra sınırlıdır ve X^δ içinde $z_\alpha \xrightarrow{o} x$ olduğundan ve Lemma 3.1.6 dan $x \in Y^\delta$ dir. Buradan $([0, a] \cap X) \subseteq ([0, a] \cap Y^\delta)$ olur. Bu da $a = \sup([0, a] \cap X) \leq \sup([0, a] \cap Y^\delta)$ demektir. Diğer yandan her

$x \in ([0, a] \cap Y^\delta)$ için $x \leq a$ olduğundan $\sup([0, a] \cap Y^\delta) \leq a$ dır. O halde X^δ içinde $a = \sup([0, a] \cap Y^\delta)$ dır. Böylece Y^δ sıra kapalı olduğundan $a \in Y^\delta$ dır. O halde Y, X in idealidir. Şimdi $0 < x \in X^+$ alalım. Y, X içinde sıra yakınsamaya göre yoğun olduğundan $y_\alpha \xrightarrow{o} x$ olacak şekilde $(y_\alpha) \subseteq Y$ neti vardır. Buradan X içinde $|y_\alpha| \wedge x \xrightarrow{o} x$ dir. $z = |y_{\alpha_0}| \wedge x > 0$ olacak şekilde en az bir α_0 vardır. Olmayana ergi yöntemiyle ilerleyelim ve $z = |y_{\alpha_0}| \wedge x > 0$ ı sağlayan hiçbir α olmasın. Yani, her α için $|y_\alpha| \wedge x = 0$ olsun. $|y_\alpha| \wedge x \xrightarrow{o} 0$ olduğundan $x = 0$ olur. Bu ise kabulümüzle çelişir. Y^δ, X^δ içinde ideal olduğundan $z \in Y^\delta$ dır. Y, Y^δ içinde sıra yoğun olduğundan $0 < y \leq z \leq x$ olacak şekilde $y \in Y$ vardır. O halde Y, X içinde sıra yoğundur.

3.2. Sınırsız Sıra Yakınsama ve Özellikleri

Bu bölümde [6] da verilen “Uo-convergence and it applications to cesaro means in Banach lattices” isimli makale baz alınarak sınırsız sıra yakınsama ve özellikleri incelenmiştir.

3.2.1. Tanım

X Riesz uzayı, $(x_\alpha) \subseteq X$ net ve $x \in X$ olsun. Her $u \in X^+$ ve her α için $\alpha_0 \leq \alpha$ iken $|x_\alpha - x| \wedge u \leq y_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $(y_\alpha) \subseteq X$ neti ve α_0 varsa $(x_\alpha), x$ e *sınırsız sıra yakınsaktır* denir ve $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ şeklinde gösterilir.

3.2.1. Lemma

X Riesz uzayı, $(x_\alpha), (y_\alpha) \subseteq X$ net, $x, y \in X$ ve $k, r \in \mathbb{R}$ olsun. Aşağıdakiler sağlanır.

- i) $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ olması için gerek ve yeter koşul $x_\alpha - x \xrightarrow{uo} 0$ olmasıdır.
- ii) $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ ve $x_\alpha \xrightarrow{uo} y$ ise $x = y$ dir.
- iii) $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ ve $y_\alpha \xrightarrow{uo} y$ olmak üzere

- $kx_\alpha + ry_\alpha \xrightarrow{uo} kx + ry$
- $x_\alpha \vee y_\alpha \xrightarrow{uo} x \vee y$
- $x_\alpha \wedge y_\alpha \xrightarrow{uo} x \wedge y$

- $x_\alpha^+ \xrightarrow{uo} x^+$
- $x_\alpha^- \xrightarrow{uo} x^-$
- $|x_\alpha| \xrightarrow{uo} |x|$

dir.

iv) $x_\alpha \uparrow (x_\alpha \downarrow)$ ve $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ ise $x_\alpha \uparrow x$ ($x_\alpha \downarrow x$) dir.

İspat

i) $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ ise her $u \in X^+$ ve her α için $\alpha_0 \leq \alpha$ iken $|x_\alpha - x| \wedge u \leq y_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $(y_\alpha) \subseteq X$ neti ve α_0 vardır. Dolayısıyla her $u \in X^+$ ve her α için $\alpha_0 \leq \alpha$ iken $|(x_\alpha - x) - 0| \wedge u \leq y_\alpha \downarrow 0$ eşitsizliği aynı $(y_\alpha) \subseteq X$ neti ve aynı α_0 sağlanır. Dolayısıyla $x_\alpha - x \xrightarrow{uo} 0$ elde edilir.

ii) $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ ise her $u \in X^+$ ve her α için $\alpha_1 \leq \alpha$ iken $|x_\alpha - x| \wedge u \leq p_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $(p_\alpha) \subseteq X$ neti ve α_1 vardır. $x_\alpha \xrightarrow{uo} y$ ise her $u \in X^+$ ve her α için $\alpha_2 \leq \alpha$ iken $|x_\alpha - y| \wedge u \leq q_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $(q_\alpha) \subseteq X$ neti ve α_2 vardır. Λ yukarı yönlendirilmiş olduğundan $\alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda$ olmak üzere $\alpha_1 \leq \alpha_3$ ve $\alpha_2 \leq \alpha_3$ olacak şekilde $\alpha_3 \in \Lambda$ vardır. Her $u \in X^+$ ve $\alpha_3 \leq \alpha$ için Teorem 2.4 i) ve Teorem 2.4 iv) göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned}
 0 &\leq |x - y| \wedge u = |x - x_\alpha + x_\alpha - y| \wedge u \\
 &\leq (|x - x_\alpha| + |x_\alpha - y|) \wedge u \\
 &\leq |x - x_\alpha| \wedge u + |x_\alpha - y| \wedge u \\
 &\leq p_\alpha + q_\alpha
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0 \leq |x - y| \wedge u \leq \inf_{\alpha} (p_\alpha + q_\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow |x - y| \wedge u = 0$$

$u = |x - y|$ alınırsa $|x - y| \wedge |x - y| = |x - y| = 0$ olacağından $x = y$ elde edilir.

iii)

• $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ ise her $u \in X^+$ ve her α için $\alpha_1 \leq \alpha$ iken $|x_\alpha - x| \wedge u \leq p_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $(p_\alpha) \subseteq X$ neti ve α_1 vardır. $y_\alpha \xrightarrow{uo} y$ ise her $u \in X^+$ ve her α için $\alpha_2 \leq \alpha$ iken $|y_\alpha - y| \wedge u \leq q_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $(q_\alpha) \subseteq X$ neti ve α_2 vardır. Λ yukarı yönlendirilmiş olduğundan $\alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda$ olmak üzere $\alpha_1 \leq \alpha_3$ ve $\alpha_2 \leq \alpha_3$ olacak şekilde $\alpha_3 \in \Lambda$ vardır. Her $u \in X^+$ ve $\alpha_3 \leq \alpha$ iken

$p_\alpha \downarrow 0$ ve $q_\alpha \downarrow 0$ ise $k, r \in \mathbb{R}$ olduğundan Lemma 3.1.1 den $|k|p_\alpha \downarrow 0$ ve $|r|q_\alpha \downarrow 0$ olur. Dolayısıyla Lemma 3.1.1 den $(|k|p_\alpha + |r|q_\alpha) \downarrow 0$ dır. Ayrıca Teorem 2.4 i) ve iv) dikate alınarak,

$$\begin{aligned} & |kx_\alpha + ry_\alpha - kx - ry| \wedge u = (|k||x_\alpha - x| + |r||y_\alpha - y|) \wedge u \\ & \leq (|k||x_\alpha - x|) \wedge u + (|r||y_\alpha - y|) \wedge u \\ & \leq (|k|p_\alpha + |r|q_\alpha) \downarrow 0 \end{aligned}$$

bulunur. O halde $kx_\alpha + ry_\alpha \xrightarrow{uo} kx + ry$ dir.

• Teorem 2.4 i) ve iv) göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} |x_\alpha \vee y_\alpha - x \vee y| \wedge u &= |x_\alpha \vee y_\alpha - x \vee y_\alpha + x \vee y_\alpha - x \vee y| \wedge u \\ &\leq (|x_\alpha \vee y_\alpha - x \vee y_\alpha| + |x \vee y_\alpha - x \vee y|) \wedge u \\ &\leq (|x_\alpha - x| + |y_\alpha - y|) \wedge u \\ &\leq |x_\alpha - x| \wedge u + |y_\alpha - y| \wedge u \\ &\leq (p_\alpha + q_\alpha) \downarrow 0 \end{aligned}$$

bulunur. O halde $x_\alpha \vee y_\alpha \xrightarrow{uo} x \vee y$ dir.

• Teorem 2.4 i) ve iv) göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} |x_\alpha \wedge y_\alpha - x \wedge y| \wedge u &= |x_\alpha \wedge y_\alpha - x \wedge y_\alpha + x \wedge y_\alpha - x \wedge y| \wedge u \\ &\leq (|x_\alpha \wedge y_\alpha - x \wedge y_\alpha| + |x \wedge y_\alpha - x \wedge y|) \wedge u \\ &\leq |x_\alpha - x| \wedge u + |y_\alpha - y| \wedge u \\ &\leq (p_\alpha + q_\alpha) \downarrow 0 \end{aligned}$$

bulunur. O halde $x_\alpha \wedge y_\alpha \xrightarrow{uo} x \wedge y$ dir.

• Tanım 2.8 i) göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned} |x_\alpha^+ - x^+| \wedge u &= |(x_\alpha \vee 0) - (x \vee 0)| \wedge u \\ &\leq |(x_\alpha - x) \vee 0| \wedge u \\ &\leq |x_\alpha - x| \wedge u \\ &\leq p_\alpha \downarrow 0 \end{aligned}$$

bulunur. O halde $x_\alpha^+ \xrightarrow{uo} x^+$ dir.

- Tanım 2.8 ii) dikkate alınarak,

$$\begin{aligned} |x_\alpha^- - x^-| \wedge u &= |(x_\alpha \wedge 0) - (x \wedge 0)| \wedge u \\ &\leq |(x_\alpha - x) \wedge 0| \wedge u \\ &\leq |x_\alpha - x| \wedge u \\ &\leq p_\alpha \downarrow 0 \end{aligned}$$

bulunur. O halde $x_\alpha^- \xrightarrow{uo} x^-$ dir.

- Teorem 2.3 ii) göz önünde bulundurularak,

$$\begin{aligned} ||x_\alpha| - |x|| \wedge u &= |(x_\alpha^+ + x_\alpha^-) - (x^+ - x^-)| \wedge u \\ &= |(x_\alpha^+ - x^+) + (x_\alpha^- - x^-)| \wedge u \\ &\leq |x_\alpha^+ - x^+| \wedge u + |x_\alpha^- - x^-| \wedge u \\ &\leq p_\alpha \downarrow 0 \end{aligned}$$

bulunur. O halde $|x_\alpha| \xrightarrow{uo} |x|$ dir.

iv) $x_\alpha \uparrow$ ve $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ olsun. O halde $x_\alpha \uparrow$ ise $(-x_\alpha) \downarrow$ olur. Dolayısıyla $(x - x_\alpha) \downarrow$ dir. Her keyfi β için Lemma 3.1.1 iv) den $(x - x_\beta)^- \leq |x - x_\alpha|$ dir.

$$\begin{aligned} \beta \leq \alpha &\Rightarrow x_\beta \leq x_\alpha \\ &\Rightarrow -x_\alpha \leq -x_\beta \\ &\Rightarrow x - x_\alpha \leq x - x_\beta \\ &\Rightarrow -(x - x_\beta) \leq -(x - x_\alpha) \\ &\Rightarrow -(x - x_\beta) \vee 0 \leq -(x - x_\alpha) \vee 0 \\ &\Rightarrow (x - x_\beta)^- \leq (x - x_\alpha)^- \end{aligned}$$

dir. Her $u \in X^+$ için $(x - x_\beta)^- \wedge u \leq (x - x_\alpha)^- \wedge u$ dir.

O halde her $u \in X^+$ için $0 \leq (x - x_\beta)^- \wedge u \leq (x - x_\alpha)^- \wedge u \leq |x - x_\alpha| \wedge u$ olur.

$x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ ise her $u \in X^+$ ve her α için $\alpha_0 \leq \alpha$ iken $|x_\alpha - x| \wedge u \leq p_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $(p_\alpha) \subseteq X$ neti ve α_0 vardır. O halde,

$$0 \leq (x - x_\beta)^- \wedge u \leq |x - x_\alpha| \wedge u \leq \inf_\alpha (p_\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow [-(x - x_\beta) \vee 0] \wedge u = 0$$

$$\Rightarrow -(x - x_\beta) \vee 0 = 0$$

$$\Rightarrow -x + x_\beta \leq 0$$

$$\Rightarrow x_\beta \leq x$$

bulunur. Böylece x_β, x için bir üst sınır olur.

Her $u \in X^+$ ve her α için $\alpha_0 \leq \alpha$ iken,

$0 \leq (x - x_\alpha) \wedge u = |x - x_\alpha| \wedge u \leq p_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $(p_\alpha) \subseteq X$ neti ve α_0 vardır. Buradan $0 \leq \inf_\alpha [(x - x_\alpha) \wedge u] \leq \inf_\alpha (p_\alpha) = 0$

$$\Rightarrow \inf_\alpha [(x - x_\alpha) \wedge u] = 0$$

$$\Rightarrow x + \inf_\alpha (-x_\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow x = \sup_\alpha (x_\alpha)$$

$$\Rightarrow x_\alpha \uparrow x$$

elde edilir.

3.2.1. Teorem

X Riesz uzayı ve Y, X in Riesz alt uzayı olsun. Aşağıdakiler denktir.

i) Y regülerdir.

ii) Her $(y_\alpha) \subseteq Y$ neti için Y içinde $y_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ ise X içinde $y_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ dir.

iii) Her $(y_\alpha) \subseteq Y$ neti için Y içinde $y_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olması için gerek ve yeter koşul X içinde $y_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olmasıdır.

İspat

ii) $\Rightarrow$ i) : Lemma 3.1.2 den Y içinde $y_\alpha \downarrow 0$ olsun. $y_\alpha \downarrow 0$ ise her α için $\alpha_0 \leq \alpha$ iken $y_\alpha \leq y_{\alpha_0}$ dir. O halde $(y_\alpha)_{\alpha \leq \alpha_0}$ neti sınırlıdır. X içinde $y_\alpha \downarrow$ dir. Hipotez (ii) den her $u \in Y^+$ ve her α için $\alpha_1 \leq \alpha$ iken $y_\alpha \wedge u \leq p_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $(p_\alpha) \subseteq X$ neti ve α_1 vardır. Her $u \in Y^+$ için sağlandığından $u = y_{\alpha_0}$ alınırsa, $y_\alpha = y_\alpha \wedge y_{\alpha_0} \leq p_\alpha \downarrow 0$ bulunur. Lemma 3.1.1 (iv) den $y_\alpha \downarrow$ ve X içinde $y_\alpha \xrightarrow{o} 0$ dir. O halde X içinde $y_\alpha \downarrow 0$ elde edilir. Dolayısıyla Y regülerdir.

i) $\Rightarrow$ iii) : Y regüler ve Y içinde $y_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olsun. X, X^δ içinde regüler olduğundan Y, X^δ içinde regülerdir. X^δ içinde Y nin ürettiği ideale I diyelim. I içinde $y_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olduğunu gösterelim. $u \in I^+$ alalım. Y regüler olduğundan $0 \leq u \leq y$ olacak şekilde $y \in Y^+$ vardır. Her $z \in Y^+$ için Y içinde $|y_\alpha| \wedge z \xrightarrow{o} 0$ olur. $z = y$ alınırsa, Y içinde $|y_\alpha| \wedge y \xrightarrow{o} 0$ olur. Y, X^δ içinde regüler olduğundan I içinde $|y_\alpha| \wedge u \xrightarrow{o} 0$ olduğunu gösterelim. Her $u \in I^+$ ve her α için $\alpha_0 \leq \alpha$ iken $0 \leq |y_\alpha| \wedge u \leq |y_\alpha| \wedge y \leq p_\alpha \downarrow 0$ bulunur. O halde $|y_\alpha| \wedge u \leq p_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde (p_α) neti vardır. [4, Lemma 3.4] den X^δ içinde $y_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ dir. Sonuç 3.1.2 den X içinde $y_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ dir.

iii) $\Rightarrow$ i) : Aşıkardır.

3.2.1. Sonuç

i) X Riesz uzayı ve Y, X in ideali olsun.

veya

ii) X normlu örgü ve Y, X in norm tam ve sıra sürekli normlu alt örgüsü

olsun.

şartlarından biri sağlanıyorsa her $(y_\alpha) \subseteq Y$ neti için Y içinde $y_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olması için gerek ve yeter koşul X içinde $y_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olmasıdır.

İspat

Sonuç 3.1.1 den Y regüler olup ispat tamamlanır.

3.2.2. Sonuç

X Riesz uzayı ve $x_0 > 0$, X in zayıf birimi olsun. $(x_\alpha) \subseteq X$ net olmak üzere $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ olması için gerek ve yeter koşul $|x_\alpha| \wedge x_0 \xrightarrow{o} 0$ olmasıdır.

İspat

$(\Rightarrow)$: $x_\alpha \xrightarrow{uo} 0$ ise her $u \in X^+$ ve her α için $\alpha_0 \leq \alpha$ iken $|x_\alpha - x| \wedge u \leq y_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $(y_\alpha) \subseteq X$ neti ve α_0 vardır. $u = x_0$ alınırsa $|x_\alpha| \wedge x_0 \leq y_\alpha \downarrow 0$ ve $|x_\alpha| \wedge x_0 \xrightarrow{o} 0$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$: x_0 in X^δ nm da zayıf birimi olduğunu gösterelim. X içinde x_0 in ürettiği band Tanım 2.13 den $B_{x_0} = \{y \in X : |y| \wedge nx_0 \uparrow |y|\}$ ve X^δ içinde x_0 in ürettiği band

$B'_{x_0} = \{y \in X^\delta : |y| \wedge nx_0 \uparrow |y|\}$ dir. $B_{x_0} = X$ olduğunu biliyoruz. $B'_{x_0} = X^\delta$ olduğunu gösterelim. $B'_{x_0} \subseteq X^\delta$ dir. $X^\delta \subseteq B'_{x_0}$ olduğunu görelim. Her $y \in X^\delta$ için $|y| \leq z$ ve $z \in X$ olacak şekilde z vardır. $X = B_{x_0}$ olduğundan $z \in B_{x_0}$ dir. $z \in B_{x_0}$ ve $|y| \leq z$ olduğundan $y \in B_{x_0}$ dir. $B_{x_0} \subseteq B'_{x_0}$ sağlandığından $y \in B'_{x_0}$ bulunur. O halde x_0 in X^δ nm da zayıf birimi olduğunu göstermiş olduk.

X^δ içinde $|x_\alpha| \wedge x_0 \xrightarrow{o} 0$ olsun. Her $u \in X^+$ için X^δ içinde $|x_\alpha| \wedge u \xrightarrow{o} 0$ olduğunu gösterelim. Bunu göstermek için $\limsup(|x_\alpha| \wedge u) = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Her $u \in X^+$ için Teorem 2.2 göz önüne alınarak,

$$0 \leq \left[\limsup(|x_\alpha| \wedge u) \right] \wedge x_0$$

$$\begin{aligned}
&\leq \lim \sup (|x_\alpha| \wedge u \wedge x_0) \\
&\leq \lim \sup (|x_\alpha| \wedge x_0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur. Buradan $\lim \sup (|x_\alpha| \wedge u) \wedge x_0 = 0$ elde edilir. x_0 zayıf birim ve [1] Sayfa 39 dan $\lim \sup (|x_\alpha| \wedge u) = 0$ olur. Benzer şekilde $\lim \inf (|x_\alpha| \wedge u) = 0$ dr. O halde $\lim \sup (|x_\alpha| \wedge u) \wedge x_0 = \lim \inf (|x_\alpha| \wedge u) = 0$ olduğundan Önerme 2.2.1 den X^δ içinde $|x_\alpha| \wedge u \xrightarrow{o} 0$ olur. Sonuç 3.1.2 den X^δ içinde $|x_\alpha| \wedge u \xrightarrow{o} 0$ olması için gerek ve yeter koşul X içinde $|x_\alpha| \wedge u \xrightarrow{o} 0$ olmasıdır.

3.2.3. Sonuç

X Riesz uzayı, $(x_n) \subseteq X$ dik dizi ise X içinde $x_n \xrightarrow{uo} 0$ dr.

İspat

X^δ, X in Dedekind tamlaması olmak üzere $(x_n) \subseteq X$ dik dizi ise (x_n) nin X^δ içinde de dik dizi olduğunu gösterelim. X içinde $n \neq m$ için $|x_n| \wedge |x_m| = 0$ alalım. X^δ içinde de $n \neq m$ için $|x_n| \wedge |x_m| = 0$ olduğunu gösterelim. $0 < |x_n| \wedge |x_m|$ ve X, X^δ içinde sıra yoğun olduğundan $0 < x \leq |x_n| \wedge |x_m|$ olacak şekilde $x \in X$ vardır. Bu ise X içinde $|x_n| \wedge |x_m| = 0$ olması ile çelişir. Dolayısıyla $(x_n), X^\delta$ içinde dik dizidir.

Keyfi $z \in X_+^\delta$ için $y_1 = V_{k=1}^\infty (|x_k| \wedge z)$, $y_2 = V_{k=2}^\infty (|x_k| \wedge z)$, $\dots$, $y_n = V_{k=n}^\infty (|x_k| \wedge z)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
y_n &= \bigvee_{k=n}^\infty (|x_k| \wedge z) = |x_n| \vee \bigvee_{k=n+1}^\infty (|x_k| \wedge z) \\
&\geq x_n \wedge y_{n+1} \\
&\geq y_{n+1}
\end{aligned}$$

olduğundan y_n azalandır.

Şimdi $y_n \downarrow 0$ olduğunu gösterelim. Her n için $0 \leq w \leq y_n$ iken $w = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Her $n \in \mathbb{N}^+$ için $w \leq y_n$ olduğundan $w \leq y_{n+1}$ dir. Buradan,

$$0 \leq w \wedge |x_n| = y_{n+1} \wedge |x_n| = \left[\sum_{k=n+1}^{\infty} (|x_k| \wedge z) \right] \wedge |x_n| = \bigvee_{k=n+1}^{\infty} (|x_k| \wedge z \wedge |x_n|) = 0$$

bulunur. O halde her n için $w \wedge y_n = 0$ olur.

Ayrıca $w \leq y_1$ olduğundan $w = w \wedge y_1 = w \wedge [\sum_{k=1}^{\infty} (|x_k| \wedge z)] = \bigvee_{k=1}^{\infty} (|x_k| \wedge z \wedge w) = 0$ olur. Dolayısıyla $y_n \downarrow 0$ dir. O halde X^δ içinde $x_n \xrightarrow{uo} 0$ ise X içinde $x_n \xrightarrow{uo} 0$ dir.

4. BANACH ÖRGÜLERİNDE SINIRSIZ NORM YAKINSAMA

Bu bölümde [7] de verilen “Unbounded norm convergence in Banach lattices” isimli makale detaylı olarak incelenmiştir. Ardından sınırsız norm yakınsamanın tanımıyla birlikte özellikleri detaylandırılmıştır.

4.1. Sınırsız Norm Yakınsamanın Temel Özellikleri

4.1.1. Tanım

X Banach örgüsü, $(x_\alpha) \subseteq X$ net ve $x \in X$ olsun. Her $u \in X^+$ için $|x_\alpha - x| \wedge u \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ ise (x_α) , x e *sınırsız norm yakınsaktır* denir ve $x_\alpha \xrightarrow{un} x$ şeklinde gösterilir.

4.1.1. Lemma

X Banach örgüsü, $(x_\alpha), (y_\alpha) \subseteq X$ net, $x, y \in X$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdakiler sağlanır.

- i) $x_\alpha \xrightarrow{un} x$ olması için gerek ve yeter koşul $x_\alpha - x \xrightarrow{un} 0$ olmasıdır.
- ii) (x_α) nm her (y_β) alt neti için $x_\alpha \xrightarrow{un} x$ ise $y_\beta \xrightarrow{un} x$ dir.
- iii) $x_\alpha \xrightarrow{un} x$ ve $y_\alpha \xrightarrow{un} y$ ise $ax_\alpha + by_\alpha \xrightarrow{un} ax + by$ dir.
- iv) $x_\alpha \xrightarrow{un} x$ ve $x_\alpha \xrightarrow{un} y$ ise $x = y$ dir.
- v) $x_\alpha \xrightarrow{un} x$ ise $|x_\alpha| \xrightarrow{un} |x|$ dir.

İspat

- i) $x_\alpha \xrightarrow{un} x$ ise her $u \in X^+$ için $|x_\alpha - x| \wedge u \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ dir. Dolayısıyla her $u \in X^+$ için $|(x_\alpha - x) - 0| \wedge u \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olacağından $x_\alpha - x \xrightarrow{un} 0$ elde edilir.
- ii) $x_\alpha \xrightarrow{un} x$ ise her $u \in X^+$ için $|x_\alpha - x| \wedge u \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ dir. Her $u \in X^+$ için $\| |x_\alpha - x| \wedge u \| \rightarrow 0$ olur. Her $u \in X^+$ ve her $\varepsilon > 0$ için $\alpha_0 \leq \alpha$ iken $\| |x_\alpha - x| \wedge u \| < \varepsilon$ olacak şekilde α_0 vardır. $(y_\beta) \subseteq (x_\alpha)$ alt net olduğundan her α için $\alpha \leq \beta$ olacak şekilde β

vardır. O halde aynı $\alpha_0 = \beta_0$ olacak şekilde β_0 vardır. Her $u \in X^+$ ve her $\varepsilon > 0$ için $\beta_0 \leq \beta$ iken $\beta \geq \beta_0 = \alpha_0$ olduğundan $\|y_\beta - x\| \wedge u < \varepsilon$ sağlanır. Buradan $y_\beta \xrightarrow{un} x$ olur.

iii) $x_\alpha \xrightarrow{un} x$ ise her $u \in X^+$ için $|x_\alpha - x| \wedge u \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ ve $y_\alpha \xrightarrow{un} y$ ise her $u \in X^+$ için $|y_\alpha - y| \wedge u \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ dir. Her $u \in X^+$ için Teorem 2.4 göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} 0 \leq |(ax_\alpha + by_\alpha) - (ax + by)| \wedge u &= |(ax_\alpha - ax) + (by_\alpha - by)| \wedge u \\ &\leq (|ax_\alpha - ax| + |by_\alpha - by|) \wedge u \\ &\leq (|ax_\alpha - ax| \wedge u) + (|by_\alpha - by| \wedge u) \\ &\leq |a| |x_\alpha - x| \wedge u + |b| |y_\alpha - y| \wedge u \end{aligned}$$

olur. $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $a = 0$ ve $b = 0$ ise aşıkardır, $a \neq 0$ ve $b \neq 0$ durumuna bakalım.

Her $u \in X^+$ için

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_\alpha [| (ax_\alpha - ax) + (by_\alpha - by) | \wedge u] \\ &\leq \lim_\alpha [(|ax_\alpha - ax| \wedge u) + (|by_\alpha - by| \wedge u)] \\ &\leq \lim_\alpha [|ax_\alpha - ax| \wedge u] + \lim_\alpha [|by_\alpha - by| \wedge u] \\ &\leq \lim_\alpha [|a| |x_\alpha - x| \wedge u] + \lim_\alpha [|b| |y_\alpha - y| \wedge u] \\ &\leq |a| \left[\lim_\alpha \left(|x_\alpha - x| \wedge \frac{1}{|a|} u \right) \right] + |b| \left[\lim_\alpha \left(|y_\alpha - y| \wedge \frac{1}{|b|} u \right) \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $ax_\alpha + by_\alpha \xrightarrow{un} ax + by$ dir.

iv) $x_\alpha \xrightarrow{un} x$ ise her $u \in X^+$ için $|x_\alpha - x| \wedge u \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ ve $x_\alpha \xrightarrow{un} y$ ise her $u \in X^+$ için $|x_\alpha - y| \wedge u \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olur. $0 \leq |x - y| = |x - x_\alpha + x_\alpha - y| \leq |x - x_\alpha| + |x_\alpha - y|$ dir. Buradan her $u \in X^+$ için

$$0 \leq |x - y| \wedge u \leq [|x - x_\alpha| + |x_\alpha - y|] \wedge u \leq [|x - x_\alpha| \wedge u] + [|x_\alpha - y| \wedge u]$$

olacağından

$$0 \leq \lim_\alpha [|x - y| \wedge u] \leq \lim_\alpha [|x - x_\alpha| \wedge u] + \lim_\alpha [|x_\alpha - y| \wedge u]$$

$$\Rightarrow 0 \leq |x - y| \wedge u \leq 0$$

$$\Rightarrow |x - y| \wedge u = 0$$

olur. $u = |x - y|$ alınırsa;

$$|x - y| \wedge |x - y| = 0$$

$$\Rightarrow |x - y| = 0$$

$$\Rightarrow x = y$$

elde edilir.

v) $x_\alpha \xrightarrow{un} x$ ise her $u \in X^+$ için $|x_\alpha - x| \wedge u \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ dir.

Her $u \in X^+$ için

$$0 \leq ||x_\alpha| - |x|| \wedge u \leq |x_\alpha - x| \wedge u$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_\alpha [||x_\alpha| - |x|| \wedge u] \leq \lim_\alpha [|x_\alpha - x| \wedge u] = 0$$

$$\Rightarrow ||x_\alpha| - |x|| \wedge u \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$$

$$\Rightarrow |x_\alpha| \xrightarrow{un} |x|$$

elde edilir.

4.1.1. Sonuç

X Banach örgüsü , $(x_\alpha) \subseteq X$ net ve $x \in X$ olsun. $x_\alpha \xrightarrow{un} x$ olması için gerek ve yeter koşul $|x_\alpha - x| \xrightarrow{un} 0$ olmasıdır.

İspat

$x_\alpha \xrightarrow{un} x$ olması için gerek ve yeter koşul Lemma 4.1.1 (i) den $x_\alpha - x \xrightarrow{un} 0$ ve Lemma 4.1.1 (v) den $|x_\alpha - x| \xrightarrow{un} 0$ olmasıdır.

4.1.1. Önerme

X Banach örgüsü, $(x_\alpha) \subseteq X$ net olmak üzere $x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ ise $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ dır. Eğer (x_α) sıra sınırlı net ise $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ ise $x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ dir.

İspat

$x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ ise her $\varepsilon > 0$ için $\alpha_0 \leq \alpha$ iken $\|x_\alpha\| < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir α_0 vardır. X Banach örgüsü olduğundan her $u \in X^+$ ve aynı α_0 için $\alpha_0 \leq \alpha$ iken

$$\begin{aligned} |x_\alpha| \wedge u \leq |x_\alpha| &\Rightarrow \| |x_\alpha| \wedge u \| \leq \| |x_\alpha| \| \\ &\Rightarrow \| |x_\alpha| \wedge u \| < \varepsilon \end{aligned}$$

olur. O halde $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ dir.

Şimdi (x_α) sıra sınırlı net olsun. (x_α) sıra sınırlı net ise her α için $|x_\alpha| \leq z$ olacak şekilde en az bir $z \in X^+$ vardır. $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ ise her $u \in X^+$ için $|x_\alpha| \wedge u \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ dır. Her $u \in X^+$ ve her $\varepsilon > 0$ için $\alpha_0 \leq \alpha$ iken $\| |x_\alpha| \wedge u \| < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir α_0 vardır. $u = z$ alınırsa $\alpha_0 \leq \alpha$ için $\| |x_\alpha| \| = \| |x_\alpha| \wedge z \| < \varepsilon$ bulunur. O halde $x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olur.

Örnek 2

$(x_\alpha) \subseteq \mathbb{R}$ bir net olmak üzere $x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olması için gerek ve yeter şart $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ olmasıdır.

İspat

($\Rightarrow$): Önerme 4.1.1 den ispat tamamlanır.

($\Leftarrow$): $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ olsun. Her $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $|x_\alpha| \wedge \lambda \xrightarrow{||\cdot||} 0$ dir. $u = 1$ alınırsa $|x_\alpha| \wedge 1 \xrightarrow{||\cdot||} 0$ olur. $0 < \varepsilon < 1$ olmak üzere her ε için $\alpha \geq \alpha_0$ iken $|x_\alpha| \wedge 1 < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $\alpha_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Her $\alpha \geq \alpha_0$ için $|x_\alpha| < \varepsilon$ olduğunu gösterelim. En az bir $\alpha' \geq \alpha_0$ için $|x_{\alpha'}| \geq \varepsilon$ olsun. O halde en az bir $\alpha' \geq \alpha_0$ için $|x_{\alpha'}| \wedge 1 \geq \varepsilon \wedge 1 = \varepsilon$ olup çelişki elde edilir. Dolayısıyla $|x_\alpha| < \varepsilon$ olup $x_\alpha \xrightarrow{||\cdot||} 0$ dir.

Örnek 3

$(x_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$ bir net olmak üzere $x_\alpha \xrightarrow{||\cdot||} 0$ olması için gerek ve yeter şart $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ olmasıdır.

İspat

$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}^+\}$ reel vektör uzayıdır.

$x, y \in \mathbb{R}^n$ için $x \leq y \Leftrightarrow 1 \leq i \leq n$ için $x_i \leq y_i$ sıralaması ve $\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$ toplam normu ile $\mathbb{R}^n$ bir Banach örgüsüdür.

($\Rightarrow$): Önerme 4.1.1 den ispat tamamlanır.

($\Leftarrow$): $(x_\alpha) = (x_1^\alpha, x_2^\alpha, \dots, x_n^\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$ net ve $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ olsun.

$x_\alpha \xrightarrow{un} 0 \Rightarrow$ Her $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_n^+$ için $|x_\alpha| \wedge \lambda \xrightarrow{||\cdot||} 0$ dir.

$\Rightarrow$ Her $\varepsilon > 0$ için $\alpha \geq \alpha_0$ iken $\| |x_\alpha| \wedge \lambda \| = \sum_{j=1}^n (|x_j^\alpha| \wedge \lambda_j) < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir α_0 vardır.

$\Rightarrow$ Her $j = 1, 2, \dots, n$ ve her $\alpha \geq \alpha_0$ için $|x_j^\alpha| \wedge \lambda_j < \varepsilon$ olur.

$\mathbb{R}$ de her $j = 1, 2, \dots, n$ için Örnek 2 den $x_j^\alpha \xrightarrow{||\cdot||} 0$ dir. O halde her $j = 1, 2, \dots, n$ ve her $\alpha \geq \alpha_{0_j}$ için $x_j^\alpha \xrightarrow{||\cdot||} 0$ olur. Dolayısıyla her $j = 1, 2, \dots, n$ için $|x_j^\alpha| \xrightarrow{||\cdot||} 0$ ise her $\alpha \geq \alpha_{0_j}$ için $|x_j^\alpha| < \frac{\varepsilon}{n}$ olacak şekilde en az bir α_{0_j} vardır. $\max\{\alpha_{0_j}; j = 1, 2, \dots, n\} = \alpha'$ denirse, $\alpha \geq \alpha'$ için $\sum_{j=1}^n |x_j^\alpha| < \varepsilon$ ve dolayısıyla $x_\alpha \xrightarrow{||\cdot||} 0$ bulunur.

Örnek 4

$c_0 = \left\{ (x_n) \subseteq \mathbb{R} : x_n \xrightarrow{||\cdot||} 0 \right\}$ dizi uzayını alalım.

$x = (x_n), y = (y_n) \in c_0$ ve $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $x + y = (x_n + y_n) \in c_0$ ve $\lambda x = (\lambda x_n) \in c_0$ işlemleri ile c_0 bir vektör uzayıdır.

Her $x = (x_n) \in c_0$ için $\|x\|_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}^+\}$ normu ile c_0 bir Banach uzayıdır.

$(x_n) \leq (y_n) \Leftrightarrow$ Her $n \in \mathbb{N}^+$ için $x_n \leq y_n$

sıralaması ile c_0 bir Banach örgüsüdür. $(x_n), (y_n) \subseteq c_0$ dizileri için,

$(x_n) \wedge (y_n) = (x_n \wedge y_n)$, $(x_n) \vee (y_n) = (x_n \vee y_n)$ ve $|x_n| = (|x_n|)$ eşitlikleri sağlanır. $(x_n) \in c_0$ bir dizi olmak üzere [9] Örnek 21 den (x_n) dizisinin sıfıra sınırsız norm yakınsak olması için gerek ve yeter koşul (x_n) dizisinin sıfıra bileşen bileşen yakınsak olmasıdır.

4.1.2. Tanım

X normlu örgü olsun. $(x_\alpha) \subseteq X$ net olmak üzere $x_\alpha \downarrow 0$ iken $\|x_\alpha\| \downarrow 0$ ise X e *sıra sürekli norma sahiptir* denir.

4.1.2. Önerme

X sıra sürekli norma sahip Banach örgüsü, $(x_\alpha) \subseteq X$ net ve $x \in X$ olmak üzere $x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ ise $x_\alpha \xrightarrow{un} x$ dir.

İspat

$x_\alpha \xrightarrow{uo} x$ ise her $u \in X^+$ ve her α için $\alpha_0 \leq \alpha$ iken $|x_\alpha - x| \wedge u \leq y_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $(y_\alpha) \subseteq X$ neti ve α_0 vardır. Her $u \in X^+$ ve her α için $\alpha_0 \leq \alpha$ iken X in sıra sürekli norma sahip Banach örgüsü olduğu göz önüne alınarak $\| |x_\alpha - x| \wedge u \| \leq \|y_\alpha\| \downarrow 0$ elde edilir. Her $u \in X^+$ ve her α için $\alpha_0 \leq \alpha$ iken ;

$$0 \leq \lim_{\alpha} [\| |x_{\alpha} - x| \wedge u \|] \leq \lim_{\alpha} [\| y_{\alpha} \|]$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{\alpha} [\| |x_{\alpha} - x| \wedge u \|] = 0$$

$$\Rightarrow |x_{\alpha} - x| \wedge u \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$$

$$\Rightarrow x_{\alpha} \xrightarrow{un} x$$

elde edilir.

4.1.3. Tanım

X Banach örgüsü , $A \subseteq X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $A \subseteq [-u, u] + \varepsilon B_X$ olacak şekilde $u \in X^+$ varsa A ya *hemen hemen sıra sınırlı* denir.

4.1.2. Lemma

X Banach örgüsü , $A \subseteq X$ olsun. A nın hemen hemen sıra sınırlı olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in A$ için $\|(|x| - u)^+\| < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $u \in X^+$ olmasıdır.

İspat

($\Rightarrow$): A hemen hemen sıra sınırlı olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $A \subseteq [-u, u] + \varepsilon B_X$ olacak şekilde $u \in X^+$ vardır. Her $\varepsilon > 0$ ve her $u \in X^+$ için $x \in A$ alalım. $x \in [-u, u] + \varepsilon B_X$ olduğundan $y \in [-u, u]$ ve $b \in \varepsilon B_X$ olmak üzere $x = y + b$ biçiminde yazılabilir.

$$\begin{aligned} |x| = |y + b| &\leq |y| + |b| \leq u + |b| \Rightarrow |x| - u \leq |b| \\ &\Rightarrow (|x| - u)^+ \leq |b| \\ &\Rightarrow \|(|x| - u)^+\| \leq \|b\| < \varepsilon \end{aligned}$$

olur.

($\Leftarrow$) : Her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in A$ için $\|(|x| - u)^+\| < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $u \in X^+$ var olsun. $\|(|x| - u)^+\| < \varepsilon$ ise $(|x| - u)^+ \in \varepsilon B_X$ dir. Her $u \in X^+$ ve $x \in A$ için

$$\begin{aligned} x \leq |x| &\Rightarrow x - u \leq |x| - u \\ &\Rightarrow (x - u)^+ \leq (|x| - u)^+ \\ &\Rightarrow \|(x - u)^+\| \leq \|(|x| - u)^+\| < \varepsilon \\ &\Rightarrow (x - u)^+ \in \varepsilon B_X \end{aligned}$$

dir. $x = x \wedge u + (x - u)^+$ sağlandığından $x \in [-u, u] + \varepsilon B_X$ ve $A \subseteq [-u, u] + \varepsilon B_X$ elde edilir.

4.1.3. Lemma

X Banach örgüsü , $A \subseteq X$ olsun. A nın hemen hemen sıra sınırlı olması için gerek ve yeter koşul her keyfi $x_0 \in X$ için $A - x_0$ nın hemen hemen sıra sınırlı olmasıdır.

İspat

($\Rightarrow$) : A hemen hemen sıra sınırlı olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $A \subseteq [-u, u] + \varepsilon B_X$ olacak şekilde en az bir $u \in X^+$ vardır. $x_0 \in X$ keyfi olmak üzere $A - x_0 \subseteq [-w, w] + \varepsilon B_X$ olacak şekilde $w \in X^+$ var olduğunu gösterelim. Her $a \in A$ için $a \in [-u, u] + \varepsilon B_X$ olduğundan $y \in [-u, u]$ ve $b \in \varepsilon B_X$ olmak üzere $a = y + b$ biçiminde yazılabilir. $x_0 \in X$ için $a - x_0 = (y + b) - x_0$ ise $a - x_0 = (y - x_0) + b$ olur. $w = u + |x_0|$ alalım. $y \leq u$ ve $-x_0 \leq |x_0|$ olduğundan $y - x_0 \leq u + |x_0| = w$ ve $-u \leq y$ ve $-|x_0| \leq -x_0$ olduğundan

$-u - |x_0| \leq y - x_0$ elde edilir. Buradan $y - x_0 \in [-w, w]$ dir. Dolayısıyla $A - x_0 \subseteq [-w, w] + \varepsilon B_X$ bulunmuş olur.

($\Leftarrow$) : $x_0 \in X$ keyfi bir eleman olmak üzere $A - x_0$ hemen hemen sıra sınırlı olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $A - x_0 \subseteq [-u, u] + \varepsilon B_X$ olacak şekilde en az bir $u \in X^+$ vardır. Her $a \in A$ için $a - x_0 \in [-u, u] + \varepsilon B_X$ dir. Her $a \in A$ için $y \in [-u, u]$ ve $b \in \varepsilon B_X$ olduğundan $a - x_0 = y + b$ biçiminde yazılabilir. Buradan $a = (y + b) + x_0 = (y + x_0) + b$ dir. $w = u + |x_0|$ alalım. $y \leq u$ ve $x_0 \leq |x_0|$ olduğundan $y + x_0 \leq u + |x_0| = w$, $-u \leq y$ ve $-|x_0| \leq x_0$

olduğundan $-u - |x_0| \leq y + x_0$ dır. O halde $A \subseteq [-w, w] + \varepsilon B_X$ dir. Dolayısıyla A hemen hemen sıra sınırlıdır.

4.1.4. Lemma

X Banach örgüsü , $(x_\alpha) \subseteq X$ net ve $x \in X$ olsun. $x_\alpha \xrightarrow{un} x$ ve (x_α) hemen hemen sıra sınırlı ise $x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ dir.

İspat

Önce $x = 0$ olsun. $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ ise her $u \in X^+$ için $|x_\alpha| \wedge u \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ dir. Yani her $\varepsilon > 0$ ve her $u \in X^+$ için $\alpha_0 \leq \alpha$ iken $\||x_\alpha| \wedge u\| < \varepsilon/2$ olacak şekilde α_0 vardır. (x_α) hemen hemen sıra sınırlı olduğundan her $\varepsilon > 0$ ve her (x_α) için Lemma 4.1.2 den $\|(|x_\alpha| - u)^+\| < \varepsilon/2$ olacak şekilde $u \in X^+$ vardır. Her α için $\alpha_0 \leq \alpha$ iken $|x_\alpha| = |x_\alpha| \wedge u + (|x_\alpha| - u)^+$ biçiminde yazılabildiğinden $\||x_\alpha|\| \leq \||x_\alpha| \wedge u\| + \|(|x_\alpha| - u)^+\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ olur.

Buradan $x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ elde edilir. $x_\alpha \xrightarrow{un} x$ ise Lemma 4.1.1 (i) den $x_\alpha - x \xrightarrow{un} 0$ dir. Ayrıca Lemma 4.1.3 den $(x_\alpha - x)$ hemen hemen sıra sınırlıdır. İspatın ilk kısmından

$(x_\alpha - x) \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olacağından $x_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ elde edilir.

4.1.4. Tanım

X Banach örgüsü , $(x_\alpha) \subseteq X$ net ve $x \in X$ olsun. Eğer her $f \in X'$ için

$f(x_\alpha) \rightarrow f(x)$ ise x_α, x e zayıf yakınsıyor denir ve $x_\alpha \xrightarrow{\sigma} x$ şeklinde gösterilir. Eğer her $f \in X'$ için $|f|(|x_\alpha|) \rightarrow |f|(|x|)$ ise x_α, x e mutlak zayıf yakınsıyor denir ve $x_\alpha \xrightarrow{|\sigma|} x$ şeklinde gösterilir.

4.1.5. Tanım

X Banach örgüsü ve $A \subseteq X$ olsun.

i) Her $(x_\alpha) \subseteq A$ neti için (x_α) nm zayıf yakınsak (mutlak zayıf yakınsak) bir alt neti varsa A ya *zayıf kompakt (mutlak zayıf kompakt)* denir.

ii) Eğer A nm norm kapanışı $(\bar{A})$ zayıf kompakt (mutlak zayıf kompakt) ise A ya *göreceli zayıf kompakt (mutlak göreceli zayıf kompakt)* denir.

4.1.3. Önerme

X Banach örgüsü, $(x_\alpha) \subseteq X$ net ve $x \in X$ olsun. (x_α) göreceli zayıf kompakt ve $x_\alpha \xrightarrow{un} x$ ise $x_\alpha \xrightarrow{|\sigma|} x$ dir.

İspat

Önce $x = 0$ alalım. $f \in X'_+$ olsun [1] Teorem 4.37 den her $\varepsilon > 0$ ve her α için $f((|x_\alpha| - u)^+) < \varepsilon/2$ olacak şekilde en az bir $u \in X^+$ vardır. $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ ise her $v \in X^+$ için $|x_\alpha| \wedge v \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ dir. f sürekli olduğundan $f(|x_\alpha| \wedge v) \xrightarrow{|\cdot|} f(0) = 0$ dir. Her $\varepsilon > 0$ için $\alpha_0 \leq \alpha$ iken $f(|x_\alpha| \wedge u) < \varepsilon/2$ olacak şekilde α_0 vardır. Her α için $\alpha_0 \leq \alpha$ iken ,

$$\begin{aligned} |x_\alpha| &= |x_\alpha \wedge u| + (|x_\alpha| - u)^+ \Rightarrow f(|x_\alpha|) = f(|x_\alpha| \wedge u) + f((|x_\alpha| - u)^+) \\ &\Rightarrow f(|x_\alpha|) < \varepsilon \end{aligned}$$

olur. O halde $f(|x_\alpha|) \rightarrow f(0) = 0$ dir.

Keyfi $f \in X'$ için $f = f^+ - f^-$ biçiminde yazılabilir. $f^+ \geq 0$ ve $f^- \geq 0$ olduğundan ve ispatın ilk kısmından $f^+(|x_\alpha|) \rightarrow 0$ ve $f^- (|x_\alpha|) \rightarrow 0$ dir.

O halde $f^+(|x_\alpha|) + f^- (|x_\alpha|) \rightarrow f^+(0) + f^-(0)$ olur. Dolayısıyla $|f|(|x_\alpha|) \rightarrow f(0) = 0$ olacağından $x_\alpha \xrightarrow{|\sigma|} x$ bulunur. Şimdi $x_\alpha \xrightarrow{un} x$ olsun. Bu durumda Lemma 4.1.1 (i) den

$x_\alpha - x \xrightarrow{un} 0$ dir. (x_α) göreceli zayıf kompakt olduğundan $(x_\alpha - x)$ de göreceli zayıf kompakt olur. İspatın ilk kısmından $(x_\alpha - x) \xrightarrow{|\sigma|} 0$ olacağından $x_\alpha \xrightarrow{|\sigma|} x$ elde edilir.

4.1.5. Lemma

X Banach örgüsü, $(x_\alpha) \subseteq X$ net ve e, X in yarı iç noktası olsun. $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ olması için gerek ve yeter koşul $|x_\alpha| \wedge e \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olmasıdır.

İspat

$(\Rightarrow)$: $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ ise her $u \in X^+$ için $|x_\alpha| \wedge u \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ dir. $u = e$ alınırsa $|x_\alpha| \wedge e \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ dir.

$(\Leftarrow)$: $|x_\alpha| \wedge e \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olsun.

Keyfi $u \in X^+$ ve $m \in \mathbb{N}^+$ için,

$$\begin{aligned} |x_\alpha| \wedge u &\leq |x_\alpha| \wedge [(u - u \wedge me) + (u \wedge me)] \\ &\leq |x_\alpha| \wedge (u - u \wedge me) + |x_\alpha| \wedge (u \wedge me) \\ &\leq (u - u \wedge me) + |x_\alpha \wedge me| \\ &\leq (u - u \wedge me) + m(|x_\alpha| \wedge e) \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\| |x_\alpha| \wedge u \| \leq \| u - u \wedge me \| + m \| |x_\alpha| \wedge e \|^m$$

olur. Keyfi $\varepsilon > 0$ için e yarı iç nokta olduğundan $\| u - u \wedge me \| < \varepsilon/2$ olacak şekilde $m \in \mathbb{N}^+$ ve ayrıca hipotezden $\alpha_0 \leq \alpha$ iken $\| |x_\alpha| \wedge e \| < \frac{\varepsilon}{2m}$ olacak şekilde α_0 vardır. $\alpha_0 \leq \alpha$ için $\| |x_\alpha| \wedge u \| \leq \| u - u \wedge me \| + m \| |x_\alpha| \wedge e \| < \frac{\varepsilon}{2} + m \frac{\varepsilon}{2m} = \varepsilon$ olur. O halde $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ dir.

4.1.6. Lemma

X sıra sürekli norma sahip Banach örgüsü olsun. e nin X in zayıf birimi olması için gerek ve yeter şart e nin X in yarı iç noktası olmasıdır.

İspat

($\Rightarrow$) : e, X in zayıf birimi ise zayıf birim tanımından $B_e = X$ dir. Yani her $x \in X^+$ için [1] Sayfa 39 dan $x \wedge ne \uparrow x$ dir. X sıra sürekli norma sahip olduğundan $\|x \wedge ne\| \uparrow \|x\|$ olur. O halde $\|x \wedge ne\| \rightarrow \|x\|$ dir. $(x_n) = x \wedge ne$ alınırsa $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ dir ve $(x_n) = x \wedge ne \subseteq I_e$ olur. Keyfi $x \in X$ için $x = x^+ - x^-$ olarak yazılması ve ispatın ilk kısmından $(x_n), (y_n) \subseteq I_e$ ve $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x^+$ ve $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x^-$ olacak şekilde $(x_n), (y_n)$ netleri vardır. Buradan $(x_n - y_n) \subseteq I_e$ ve $x_n - y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x^+ - x^- = x$ olduğundan $I_e = X$ dir.

($\Leftarrow$) : e, X in yarı iç noktası olsun. $B_e = X$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için $X \subseteq B_e$ olduğunu göstermek yeterlidir. [3] Teorem 100.2 (ii) den B_e norm kapalıdır. Ayrıca $I_e \subseteq B_e$ olduğu ve hipotez düşünülürse $X = \overline{I_e} \subseteq \overline{B_e} = B_e$ bulunur.

4.1.2. Sonuç

X sıra sürekli norma sahip Banach örgüsü ve e, X in zayıf birimi olsun. $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ olması için gerek ve yeter koşul $|x_\alpha| \wedge e \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olmasıdır.

İspat

Lemma 4.1.5 ve Lemma 4.1.6 dan ispat tamamlanır.

4.1.7. Lemma

X Banach örgüsü, $(x_\alpha) \subseteq X$ net ve e, X in yarı iç noktası olsun. $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ ise $x_{\alpha_n} \xrightarrow{un} 0$ olacak şekilde bir (α_n) artan indis dizisi vardır.

İspat

Lemma 4.1.5 den $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ ise $|x_\alpha| \wedge e \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ dır. O halde her $\varepsilon > 0$ ve her α için $\alpha \geq \alpha_0$ iken $\| |x_\alpha| \wedge e \| < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir α_0 vardır.

$\varepsilon = 1$ için $\alpha \geq \alpha_1$ iken $\| |x_{\alpha_1}| \wedge e \| < 1$ olacak şekilde en az bir α_1 vardır.

$\varepsilon = \frac{1}{2}$ için $\alpha \geq \alpha_2$ iken $\| |x_{\alpha_2}| \wedge e \| < \frac{1}{2}$ olacak şekilde en az bir α_2 vardır.

$\vdots$

$\varepsilon = \frac{1}{n}$ için $\alpha \geq \alpha_n$ iken $\| |x_{\alpha_n}| \wedge e \| < \frac{1}{n}$ olacak şekilde en az bir α_n vardır.

$\alpha_2 \geq \alpha_1$ olmayabilir. Bu durumda $\alpha' \geq \alpha_1$ ve $\alpha' \geq \alpha_2$ olacak şekilde α' var olduğundan $\alpha' = \alpha_2$ alınır. Bu şekilde oluşturulan dizi artan seçilebilir. Yani $\alpha_{n+1} \geq \alpha_n$ olduğunu varsayabiliriz. Böylece $\alpha_{n+1} \geq \alpha_n$ ve $\| |x_{\alpha_n}| \wedge e \| < \frac{1}{n}$ olacak şekilde (x_{α_n}) dizisi bulunur.

4.2. Sınırsız Sıra Yakınsama ve Dik Diziler

Banach örgüsünde her norm yakınsak dizinin aynı limite sıra yakınsayan bir alt dizisi vardır. Dik dizilerin sınırsız sıra yakınsaklığı kullanılarak söylenene benzer şekilde sınırsız norm yakınsak bir netin sınırsız sıra yakınsak bir alt netinin varlığı gösterilmiştir.

4.2.1. Lemma

X Riesz uzayı , $x \in X$, $u, v \in X^+$ için $|x| = u + v$ olsun. $x = y + z$, $|y| = u$ ve $|z| = v$ olacak şekilde $y, z \in X$ vardır.

İspat

$|x| = x^+ + x^-$ yazılabildiğinden ve $x^+ + x^- = u + v$ olduğundan [1] Teorem 1.20 den $u = a + b$, $v = c + d$, $x^+ = a + c$ ve $x^- = b + d$ olacak şekilde $a, b, c, d \in X^+$ vardır. Buradan $y = a - b$ ve $z = c - d$ alınırsa

$$y + z = (a + c) - (b + d) = x^+ - x^- = x$$

dir. Ayrıca $0 \leq a \leq x^+, 0 \leq b \leq x^-$ ve $x^+ \perp x^-$ olduğundan $a \perp b$ olur. [1] Teorem 1.7 den $|y| = |a - b| = a + b = u$ dir. Benzer şekilde $0 \leq c \leq x^+$ ve $0 \leq d \leq x^-$ olduğundan $c \perp d$ olur. Buradan da $|z| = |c - d| = c + d = v$ elde edilir.

4.2.1. Önerme

X Banach örgüsü, $(x_\alpha) \subseteq X$ net olmak üzere $x_\alpha \xrightarrow{un} x$ olsun. Bu durumda $x_{\alpha_k} - d_k \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olacak şekilde (α_k) artan indis dizisi ve (d_k) ayırık dizisi vardır.

İspat

Önce her α için $x_\alpha \geq 0$ olsun. Herhangi bir $\alpha_1 \in \Lambda$ seçelim. Her $k \geq 2$ olmak üzere $i = 1, 2, \dots, k-1$ için $x_\alpha \wedge x_{\alpha_i} \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olduğundan $\alpha_k > \alpha_{k-1}$ ve $i = 1, 2, \dots, k-1$ için

$\|x_{\alpha_k} \wedge x_{\alpha_i}\| \leq \frac{1}{2^{k+i}}$ olacak şekilde (α_k) artan indis dizisi oluşturulabilir. Burada α_1 belirlenmiştir.

$k = 2$ için $i = 1$ olup $\|x_{\alpha_1'} \wedge x_{\alpha_1}\| \leq \frac{1}{2^{2+1}}$ olacak şekilde α_1' vardır ve $x_{\alpha_2} = x_{\alpha_1'}$ dir.

$k = 3$ için $i = 1, 2$ olup $\|x_{\alpha_1'} \wedge x_{\alpha_1}\| \leq \frac{1}{2^{3+1}}$ olacak şekilde α_1' , $\|x_{\alpha_2'} \wedge x_{\alpha_2}\| \leq \frac{1}{2^{3+2}}$ olacak şekilde α_2' vardır ve $x_{\alpha_3} = x_{\alpha_1'} \wedge x_{\alpha_2'}$ dir. $\|x_{\alpha_3} \wedge x_{\alpha_1}\| \leq \|x_{\alpha_1'} \wedge x_{\alpha_1}\| \leq \frac{1}{2^{3+1}}$ ve $\|x_{\alpha_3} \wedge x_{\alpha_2}\| \leq \|x_{\alpha_2'} \wedge x_{\alpha_2}\| \leq \frac{1}{2^{3+2}}$ olduğu görülür.

Bu şekilde elde edilen (α_k) artan indis dizisidir ve $z_{i_k} = x_{\alpha_i} \wedge x_{\alpha_k}$ olmak üzere

$$\|z_{i_k}\| \leq \frac{1}{2^{i+k}} \text{ dir. Her } k \text{ için } v_k = \sum_{i=1}^{k-1} z_{i_k} + \sum_{j=k+1}^{\infty} z_{k_j} \text{ alınırsa}$$

$$\|v_k\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{k-1} z_{i_k} \right\| + \left\| \sum_{j=k+1}^{\infty} z_{k_j} \right\| \leq \sum_{i=1}^{k-1} \|z_{i_k}\| + \sum_{j=k+1}^{\infty} \|z_{k_j}\| < \frac{1}{2^k}$$

olur. Şimdi $d_k = (x_{\alpha_k} - v_k)^+$ alalım.

$$0 \leq x_{\alpha_k} \text{ ve } 0 \leq v_k \Rightarrow x_{\alpha_k} - v_k \leq x_{\alpha_k}$$

$$\Rightarrow (x_{\alpha_k} - v_k) \vee 0 \leq x_{\alpha_k}$$

$$\Rightarrow (x_{\alpha_k} - v_k)^+ \leq x_{\alpha_k}$$

$$\Rightarrow x_{\alpha_k} - (x_{\alpha_k} - v_k)^+ \geq 0$$

elde edilir.

Ayrıca

$$\begin{aligned} x_{\alpha_k} - (x_{\alpha_k} - v_k)^+ &= -[(x_{\alpha_k} - v_k) \vee 0] + x_{\alpha_k} \\ &= [(v_k - x_{\alpha_k}) \wedge 0] + x_{\alpha_k} \\ &= v_k \wedge x_{\alpha_k} \\ &\leq v_k \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla $0 \leq x_{\alpha_k} - d_k \leq x_{\alpha_k}$ elde edilir.

X Banach örgüsü olduğundan $\|x_{\alpha_k} - d_k\| \leq \|v_k\| < \frac{1}{2^k}$ olmasından $\|x_{\alpha_k} - d_k\| \rightarrow 0$ dır.

Şimdi (d_k) nın ayrık dizi olduğunu gösterelim. $k < m$ olsun.

$$0 \leq d_k = (x_{\alpha_k} - v_k)^+ \leq (x_{\alpha_k} - z_{k_m})^+ = [x_{\alpha_k} - (x_{\alpha_k} \wedge x_{\alpha_m})]^+ = x_{\alpha_k} - (x_{\alpha_k} \wedge x_{\alpha_m}) \text{ ve}$$

$$0 \leq d_m = (x_{\alpha_m} - v_k)^+ \leq (x_{\alpha_m} - z_{k_m})^+ = [x_{\alpha_m} - (x_{\alpha_k} \wedge x_{\alpha_m})]^+ = x_{\alpha_m} - (x_{\alpha_k} \wedge x_{\alpha_m})$$

olur. Her $u, v \in X^+$ için $(u - u \wedge v) \wedge (v - u \wedge v) = 0$ olduğundan $d_k \wedge d_m = 0$ olur.

Böylece $(x_{\alpha}) \geq 0$ iken ispat biter.

Şimdi (x_α) keyfi net olsun. $|x_\alpha|$ pozitif nettir ve $x_\alpha \xrightarrow{un} x$ ise her $u \in X^+$ için $|x_\alpha| \wedge u \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ dır. Dolayısıyla $|x_\alpha| \xrightarrow{un} 0$ olur. İspatın ilk kısmından (α_k) artan indis dizisi, (w_k) ayrık, (h_k) pozitif ve $h_k \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ dizileri bulunur. Lemma 4.2.1 den $|d_k| = w_k$, $|g_k| = h_k$ ve

$x_{\alpha_k} = d_k + g_k$ olacak şekilde (d_k) ve (g_k) dizileri vardır.. Buradan (d_k) ayrık dizi ve

$g_k \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ dır. O halde $x_{\alpha_k} - d_k \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ dır.

4.2.2. Önerme

Banach örgüsünde her norm yakınsak dizinin aynı limite sıra yakınsayan bir alt dizisi vardır.

İspat

X Banach örgüsü, $(x_n) \subseteq X$ bir dizi ve $x \in X$ olsun. $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ ise $\|x_{n_k} - x\| < \frac{1}{2^k}$ olacak şekilde en az bir $(x_{n_k}) \subseteq (x_n)$ alt dizisi vardır. Gerçekten,

$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{2^1}$ ve $n_{0_1} \in \mathbb{N}^+$ için $n_1 > n_{0_1}$ iken $\|x_{n_1} - x\| < \frac{1}{2^1}$ olacak şekilde

$x_{n_1} \in (x_n)$ vardır.

$\varepsilon = \frac{1}{2^2}$ ve $n_{0_2} \in \mathbb{N}^+$ için $n_2 > n_{0_2}$ iken $\|x_{n_2} - x\| < \frac{1}{2^2}$ olacak şekilde

$x_{n_2} \in (x_n)$ vardır.

$\varepsilon = \frac{1}{2^k}$ ve $n_{0_k} \in \mathbb{N}^+$ için $n_k > n_{0_k}$ iken $\|x_{n_k} - x\| < \frac{1}{2^k}$ olacak şekilde

$x_{n_k} \in (x_n)$ vardır.

Bu şekilde bulunan $(x_{n_k}) \subseteq (x_n)$ alt dizisi isteneni sağlar. $s_t = \sum_{k=1}^t |x_{n_k} - x|$ biçiminde tanımlı (s_t) dizisi bir Cauchy dizisidir. $t < p$ için,

$$\begin{aligned}
\|s_p - s_t\| &= \left\| \sum_{k=1}^p |x_{n_k} - x| - \sum_{k=1}^t |x_{n_k} - x| \right\| \\
&= \left\| (|x_{n_1} - x| + |x_{n_2} - x| + \cdots + |x_{n_t} - x| + \cdots + |x_{n_p} - x|) \right. \\
&\quad \left. - (|x_{n_1} - x| + \cdots + |x_{n_t} - x|) \right\| \\
&= \left\| |x_{n_{t+1}} - x| + |x_{n_{t+2}} - x| + \cdots + |x_{n_p} - x| \right\| \\
&\leq \|x_{n_{t+1}} - x\| + \|x_{n_{t+2}} - x\| + \cdots + \|x_{n_p} - x\| \\
&< \frac{1}{2^{t+1}} + \frac{1}{2^{t+2}} + \cdots + \frac{1}{2^p} \\
&< \frac{1}{2^{t+1}} + \frac{1}{2^{t+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{t+1}} \\
&\text{olup } \lim_{t \rightarrow \infty} \|s_p - s_t\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^{t+1}} + \frac{1}{2^{t+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{t+1}} \right) = 0 \text{ olacağından } \lim_{t \rightarrow \infty} \|s_p - s_t\| = 0 \text{ elde} \\
&\text{edilir. } X \text{ Banach örgüsü olduğundan } s = \sum_{k=1}^{\infty} |x_{n_k} - x| \text{ olacak şekilde s elemanı vardır. } (s_t) \\
&\text{artan ve } \lim_{t \rightarrow \infty} (s_t) = s \text{ ise } \sup(s_t) = s \text{ olur. } |x_{n_k} - x| \leq s - s_t \text{ ve } s_t \uparrow s \text{ olduğundan} \\
&(s - s_t) \downarrow 0 \text{ olup } x_{n_k} \xrightarrow{o} x \text{ elde edilir.}
\end{aligned}$$

4.2.1. Sonuç

X sıra sürekli norma sahip Banach örgüsü , $(x_\alpha) \subseteq X$ net ve $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ olsun.

Bu durumda $x_{\alpha_k} \xrightarrow{uo} 0$ ve $x_{\alpha_k} \xrightarrow{un} 0$ olacak şekilde bir (α_k) artan indis dizisi vardır.

İspat

(α_k) ve (d_k) Önerme 4.2.1 deki gibi seçilsin. (d_k) ayrık dizi olduğundan Sonuç 3.2.3 den $d_k \xrightarrow{uo} 0$ dir. Önerme 4.1.2 den $d_k \xrightarrow{un} 0$ olur. Ayrıca $x_{\alpha_k} - d_k \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ ve X sıra sürekli norma sahip Banach örgüsü olduğundan Önerme 4.1.1 den $x_{\alpha_k} - d_k \xrightarrow{un} 0$ olur.

$x_{\alpha_k} = (x_{\alpha_k} - d_k) + d_k$ şeklinde yazılabileceğinden $|x_{\alpha_k}| \leq |x_{\alpha_k} - d_k| + |d_k|$ olur. Her $u \in X^+$ için $0 \leq |x_{\alpha_k}| \wedge u \leq (|x_{\alpha_k} - d_k| \wedge u) + (|d_k| \wedge u)$ dir. $|x_{\alpha_k} - d_k| \wedge u \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ ve $|d_k| \wedge u \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olduğu bilindiğinden $x_{\alpha_k} \xrightarrow{un} 0$ elde edilir. $x_{\alpha_k} - d_k \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olduğundan ve Önerme 4.2.2 den (α_k) nm $x_{\alpha_{k_i}} - d_{k_i} \xrightarrow{o} 0$ olacak şekilde bir başka (α_{k_i}) alt indis dizisi vardır. O halde $x_{\alpha_{k_i}} - d_{k_i} \xrightarrow{uo} 0$ olur. Yukarıdakine benzer şekilde $x_{\alpha_{k_i}} \xrightarrow{uo} 0$ olur.

$(x_{\alpha_{k_i}}) \subseteq (x_{\alpha_k})$ olmak üzere $x_{\alpha_k} \xrightarrow{un} 0$ ve $x_{\alpha_{k_i}} \xrightarrow{uo} 0$ dir. $x_{\alpha_k} \xrightarrow{un} 0$ ise $x_{\alpha_{k_i}} \xrightarrow{un} 0$ dir. Dolayısıyla $x_{\alpha_{k_i}} \xrightarrow{uo} 0$ ve $x_{\alpha_{k_i}} \xrightarrow{un} 0$ olur. $(x_{\alpha_{k_i}}) \subseteq (x_{\alpha_k})$ alt dizisi isteneni sağlar.

4.3. Sınırsız Sıra Yakınsak Alt Diziler ve Ölçüde Yakınsama

4.3.1. Önerme

X Banach örgüsü , $(x_n) \subseteq X$ dizi olmak üzere $x_n \xrightarrow{un} 0$ ise $x_{n_k} \xrightarrow{uo} 0$ olacak şekilde en az bir $(x_{n_k}) \subseteq (x_n)$ alt dizisi vardır.

İspat

X Banach örgüsü , $(x_n) \subseteq X$ dizi ve $x_n \xrightarrow{un} 0$ olsun. $e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{\|x_n\|2^n}$ ile tanımlansın. $s_n = \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{\|x_i\|2^i}$, $s_m = \sum_{i=1}^m \frac{|x_i|}{\|x_i\|2^i}$ ve $n < m$ olsun.

$$\begin{aligned}
 |s_m - s_n| &= \left| \sum_{i=1}^m \frac{|x_i|}{\|x_i\|2^i} - \sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{\|x_i\|2^i} \right| \\
 &= \left| \left(\frac{|x_1|}{\|x_1\|2^1} + \frac{|x_2|}{\|x_2\|2^2} + \dots + \frac{|x_n|}{\|x_n\|2^n} + \dots + \frac{|x_m|}{\|x_m\|2^m} \right) - \left(\frac{|x_1|}{\|x_1\|2^1} + \dots + \frac{|x_n|}{\|x_n\|2^n} \right) \right| \\
 &= \left| \frac{|x_{n+1}|}{\|x_{n+1}\|2^{n+1}} + \frac{|x_{n+2}|}{\|x_{n+2}\|2^{n+2}} + \dots + \frac{|x_m|}{\|x_m\|2^m} \right|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{|x_{n+1}|}{\|x_{n+1}\|2^{n+1}} + \frac{|x_{n+2}|}{\|x_{n+2}\|2^{n+2}} + \dots + \frac{|x_m|}{\|x_m\|2^m} \\
&\leq \frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_{n+1}\|2^{n+1}} + \frac{\|x_{n+2}\|}{\|x_{n+2}\|2^{n+2}} + \dots + \frac{\|x_m\|}{\|x_m\|2^m} \\
&< \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots + \frac{1}{2^m} \\
&\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

dir. $\lim_{n \rightarrow \infty} |s_m - s_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} \right) = 0$ olduğundan (s_n) bir Cauchy dizisidir. X Banach örgüsü olduğundan (s_n) dizisi e ye yakınsaktır ve dolayısıyla $e \in X$ olur. B_e, e tarafından üretilen band olsun. X içinde $x_n \xrightarrow{un} 0$ olduğundan X içinde $|x_n| \wedge e \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ ve böylece B_e içinde $|x_n| \wedge e \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ dir. e, B_e nin zayıf birimi olduğundan ve Önerme 4.2.2 den $|x_{n_k}| \wedge e \xrightarrow{o} 0$ olacak şekilde $(x_{n_k}) \subseteq B_e$ vardır. e, B_e nin zayıf birimi olduğundan $x_{n_k} \xrightarrow{uo} 0$ dir. [5] Lemma 3.4 den ideal içinde sınırsız sıra yakınsayan dizi, tüm uzayda sınırsız sıra yakınsar. Her band ideal olduğundan X içinde $x_{n_k} \xrightarrow{uo} 0$ bulunur.

4.3.1. Sonuç

$(f_n), L_p(\mu)$ uzayında bir dizi $(1 \leq p < \infty)$ ve μ sonlu bir ölçü olsun. $f_n \xrightarrow{un} 0$ olması için gerek ve yeter koşul $f_n \xrightarrow{\mu} 0$ olmasıdır.

İspat

$(\Leftarrow) f_n \xrightarrow{\mu} 0$ olsun. μ sonlu ölçü olduğundan $\mathbf{1}$ sabit fonksiyonu, $L_p(\mu)$ nin zayıf birimidir. $f_n \xrightarrow{\mu} 0$ ve her $\varepsilon > 0$ için $A_n = \{x \in X : |f_n(x)| > \varepsilon\}$ olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$ dir.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X (|f_n| \wedge \mathbf{1})^p d\mu = 0$ olduğunu gösterelim.

Keyfi n için $|f_n| \wedge \mathbf{1} \leq \mathbf{1}$ ve $|f_n| \wedge \mathbf{1} \leq |f_n|$ olduğundan

$$\begin{aligned}
0 \leq \int_X (|f_n| \wedge \mathbf{1}) d\mu &= \int_{A_n} (|f_n| \wedge \mathbf{1})^p d\mu + \int_{A_n^c} (|f_n| \wedge \mathbf{1})^p d\mu \\
&\leq \int_{A_n} \mathbf{1} d\mu + \int_{A_n^c} |f_n|^p d\mu \\
&\leq \mu(A_n) + \varepsilon^p \mu(X)
\end{aligned}$$

olup $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon^p \mu(X) = 0$ olacağından $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X (|f_n| \wedge \mathbf{1})^p d\mu = 0$ elde edilir.

Dolayısıyla $|f_n| \wedge \mathbf{1} \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ ve böylece $f_n \xrightarrow{un} 0$ elde edilir.

($\Rightarrow$) $f_n \xrightarrow{un} 0$ alalım. Bu durumda (f_n) nin her (f_{n_k}) alt dizisi için $f_{n_k} \xrightarrow{un} 0$ dir. Önerme 4.3.1 den $f_{n_{k_i}} \xrightarrow{uo} 0$ olacak şekilde $(f_{n_{k_i}}) \subseteq (f_{n_k})$ alt dizisi vardır.

$$\begin{aligned}
f_{n_{k_i}} \xrightarrow{uo} 0 &\Rightarrow |f_{n_{k_i}}| \wedge \mathbf{1} \xrightarrow{o} 0 \\
&\Rightarrow \exists (g_i) \subseteq L_p(\mu), i_0 \leq i \text{ iken a.e. } |f_{n_{k_i}}| \wedge \mathbf{1} \leq g_i \downarrow 0 \\
&\Rightarrow \text{a.e. } x \in X, i_0 \leq i \text{ iken } |f_{n_{k_i}}(x)| \wedge \mathbf{1}(x) \leq g_i(x) \downarrow 0 \\
&\Rightarrow \text{a.e. } x \in X, i_0 \leq i \text{ iken } |f_{n_{k_i}}(x)| \wedge \mathbf{1} \leq g_i(x) \downarrow 0
\end{aligned}$$

olup Örnek 2 den $f_{n_{k_i}} \xrightarrow{a.e.} 0$ olur. [8] Sayfa 149 Alıştırma 6 dan $f_n \xrightarrow{\mu} 0$ dir.

4.3.2. Önerme

X sıra sürekli norma sahip Banach örgüsü ve $(x_n) \subseteq X$ bir dizi olsun. Bu durumda $x_n \xrightarrow{un} 0$ olması için gerek ve yeter koşul her $(x_{n_k}) \subseteq (x_n)$ alt dizisinin $x_{n_{k_i}} \xrightarrow{uo} 0$ olacak şekilde $(x_{n_{k_i}}) \subseteq (x_{n_k})$ alt dizisinin var olmasıdır.

İspat

($\Rightarrow$) $x_n \xrightarrow{un} 0$ olsun. O halde her $(x_{n_k}) \subseteq (x_n)$ alt dizisi için $x_{n_k} \xrightarrow{un} 0$ dir. Önerme 4.3.1 den $x_{n_{k_i}} \xrightarrow{uo} 0$ olacak şekilde en az bir $(x_{n_{k_i}}) \subseteq (x_{n_k})$ alt dizisi vardır.

($\Leftarrow$) Her $(x_n) \subseteq X$ dizisi için her $(x_{n_k}) \subseteq (x_n)$ alt dizisinin $x_{n_{k_i}} \xrightarrow{uo} 0$ olacak şekilde $(x_{n_{k_i}}) \subseteq (x_{n_k})$ alt dizisi var olsun. $x_n \xrightarrow{un} 0$ olmadığını varsayalım. Her $k \in \mathbb{N}^+$ için $|x_{n_k} \wedge u| \geq \delta$ olacak şekilde en az bir $u \in X^+$, $\delta > 0$ ve $(x_{n_{k_i}}) \subseteq (x_{n_k})$ alt dizisi vardır. Hipotezden $x_{n_{k_i}} \xrightarrow{uo} 0$ olacak şekilde en az bir $(x_{n_{k_i}}) \subseteq (x_{n_k})$ alt dizisi vardır. Önerme 4.1.2 den $x_{n_{k_i}} \xrightarrow{un} 0$ dir. $x_{n_{k_i}} \xrightarrow{un} 0$ ise her $u \in X^+$ için $|x_{n_{k_i}}| \wedge u \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olacağından oluşturulan dizi ile çelişki elde edilir. Dolayısıyla $x_n \xrightarrow{un} 0$ dir.

X sıra sürekli norma sahip, zayıf birimi $0 < e$ olan Banach örgüsü olsun. Bu durumda [10] Teorem 1.b.14 den $L_\infty(\mu) \subseteq X \subseteq L_1(\mu)$ ve $L_\infty(\mu), X$ içinde ve $X, L_1(\mu)$ içinde sıra ve norm yoğun olacak şekilde μ sonlu ölçüsü vardır. Bu $L_1(\mu)$ uzayına X in AL-temsili denir.

4.3.3. Önerme

X sıra sürekli norma sahip zayıf birimi $0 < e$ olan Banach örgüsü, X in AL-temsili $L_1(\mu)$ olsun. Her $(x_n) \subseteq X$ dizisi için X içinde $x_n \xrightarrow{un} 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul $L_1(\mu)$ içinde $x_n \xrightarrow{\mu} 0$ olmasıdır.

İspat

Önerme 4.3.2 den $x_n \xrightarrow{un} 0$ olması için gerek ve yeter koşul her $(x_{n_k}) \subseteq (x_n)$ alt dizisinin $x_{n_{k_i}} \xrightarrow{uo} 0$ olacak şekilde $(x_{n_{k_i}}) \subseteq (x_{n_k})$ alt dizisinin var olmasıdır. $L_1(\mu)$ içinde uo -yakınsama ile $a.e.$ -yakınsama denk olduğundan [6] Önerme 3.1 den $x_n \xrightarrow{un} 0$ olması için gerek ve yeter koşul her $(x_{n_k}) \subseteq (x_n)$ alt dizisinin $x_{n_{k_i}} \xrightarrow{a.e.} 0$ olacak şekilde $(x_{n_{k_i}}) \subseteq (x_{n_k})$ alt dizisinin var olmasıdır, elde edilir.

[8] Sayfa 149 Alıştırma 6 dan μ sonlu ölçü olmak üzere $x_n \xrightarrow{\mu} 0$ olması için gerek ve yeter koşul her $(x_{n_k}) \subseteq (x_n)$ alt dizisinin $x_{n_{k_i}} \xrightarrow{a.e.} 0$ olacak şekilde $(x_{n_{k_i}}) \subseteq (x_{n_k})$ alt dizisinin var olmasıdır, önermesi bilinmektedir. Buradan istenen çıkar.

4.4. Sınırsız Norm Yakınsama ile Sınırsız Sıra Yakınsamanın Aynı Olma Durumu

Bu bölümde sınırsız sıra yakınsama ile sınırsız norm yakınsamanın aynı olma durumunu inceleyeceğiz. X bir Riesz uzayı ve $0 \neq a \in X$ olsun. $0 \leq u \leq a$, $0 \leq v \leq a$ ve $u \perp v$ den $u = 0$ veya $v = 0$ oluyorsa a elemanına *atom* denir. a, X Banach örgüsünde bir atom ise a nın ürettiği ideal $I_a = \{\lambda a : \lambda \in \mathbb{R}\}$ biçiminde ve I_a projeksiyon bandıdır. I_a üzerine tanımlanan band projeksiyon P_a olmak üzere herhangi bir $x \in X$ için $P_a(x) \in I_a$ olacağından $P_a(x) = \lambda_a a$ olacak şekilde $\lambda_a \in \mathbb{R}$ vardır. X Riesz uzayının $\{e_i\}$ tam dik sistemi, X^+ nın elemanlarının ikili ayrık bir sınıfıdır. Yani $i \neq j$ ise $e_i \wedge e_j = 0$ dır öyle ki her i için $u \wedge e_i = 0$ olur. O halde $u = 0$ dır. Eğer bu tam dik sistem, atomlardan oluşuyorsa buna *atomik Riesz uzayı* denir. X atomik Banach örgüsü ve A ikişer ikişer dik atomların kümesi olmak üzere her $x \in X^+$ elemanı için $x = \bigvee_{a \in A} P_a(x) = \bigvee_{a \in A} \lambda_a a$ biçiminde yazılabilir. Eğer X sıra sürekli norma sahip ise A sayılabilir ve buradan her $x \in X^+$ elemanı $x = \bigvee_{i=1}^{\infty} \lambda_{a_i} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{a_i} a_i$ biçiminde yazılabilir. $x, y \in X^+$ olmak üzere

$x \leq y \Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}^+, P_{a_i}(x) \leq P_{a_i}(y)$ olduğunu görmek kolaydır. Bunların detayları [11], [10] Önerme 1.a.9 ve [12] Sayfa 143 den incelenebilir.

Örnek 5

$\ell_{\infty} = \{(x_n) \subseteq \mathbb{R} : \text{Her } n \in \mathbb{N}^+ \text{ için } |x_n| \leq M \text{ olacak şekilde } M > 0 \text{ vardır}\}$ dizi uzayını alalım.

$x = (x_n), y = (y_n) \in \ell_{\infty}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $x + y = (x_n + y_n) \in \ell_{\infty}$ ve $\lambda x = (\lambda x_n) \in \ell_{\infty}$ işlemleri ile ℓ_{∞} bir vektör uzayıdır.

Her $x = (x_n) \in \ell_{\infty}$ için $\|x\|_{\infty} = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}^+\}$ normu ile ℓ_{∞} bir Banach uzayıdır.

$(x_n) \leq (y_n) \Leftrightarrow \text{Her } n \in \mathbb{N}^+ \text{ için } x_n \leq y_n$

sıralaması ile ℓ_{∞} bir Banach örgüsüdür. $(x_n), (y_n) \subseteq \ell_{\infty}$ dizileri için,

$(x_n) \wedge (y_n) = (x_n \wedge y_n)$, $(x_n) \vee (y_n) = (x_n \vee y_n)$ ve $|x_n| = (|x_n|)$ eşitlikleri sağlanır.

$(e_n) = (e_1, e_2, \dots, e_n, \dots) \subseteq \ell_\infty$ standart bazını alalım. (e_n) bir dik dizi olduğundan Sonuç 3.2.3 den $e_n \xrightarrow{uo} 0$ elde edilir. Fakat (e_n) dizisi sıfıra sınırsız norm yakınsamaz. Kabul edelim ki; her $u \in \ell_\infty^+$ için $|e_n| \wedge u \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olsun. $u = (1, 1, \dots, 1, \dots) \subseteq \ell_\infty$ sabit dizisi alınırsa, $e_n \wedge u = e_n$ olur. O halde kabulümüzden $e_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ elde edilir. Oysa (e_n) dizisinin ℓ_∞ daki sup normu $\|e_n\|_\infty = 1$ dir. $(1) \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olamayacağından çelişki elde edilir. Dolayısıyla $e_n \xrightarrow{un} 0$ değildir.

Örnek 6

λ Lebesgue ölçüsü ile donatılmış $[0, 1]$ aralığını alalım. Her n için $[0, 1]$ aralığını $\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \dots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$ şeklinde alt aralıklara bölelim. Tüm bu aralıkları, $\left[0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, 1\right], \left[0, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \left[\frac{2}{3}, 1\right], \left[0, \frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right], \left[\frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right], \left[\frac{3}{4}, 1\right], \left[0, \frac{1}{5}\right], \left[\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right], \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right], \left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right], \left[\frac{4}{5}, 1\right], \dots$ şeklinde sıralayalım. Bu aralıkların her birine karşılık gelen karakteristik fonksiyonların dizisine (f_n) diyelim. [8] Örnek 19.6 dan (f_n) dizisi ölçüde yakınsaktır fakat (f_n) dizisi hemen hemen her yerde yakınsak değildir. [6] Önerme 3.1 den $(f_n) \subseteq L_0(\lambda)$ bir dizi olmak üzere $f_n \xrightarrow{a.e} 0$ olması için gerek ve yeter şart $f_n \xrightarrow{uo} 0$ olmasıdır. $L_p(\lambda), L_0(\lambda)$ içinde ideal olduğundan ve Sonuç 3.2.1 den $L_0(\lambda)$ içinde $f_n \xrightarrow{uo} 0$ olması için gerek ve yeter koşul $L_p(\lambda)$ içinde $f_n \xrightarrow{uo} 0$ olmasıdır. O halde (f_n) dizisi $L_p(\lambda)$ içinde sınırsız sıra yakınsak değildir. [8] Lemma 31.6 dan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_p = 0$ dir. Dolayısıyla $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olur. Önerme 4.1.1 den $f_n \xrightarrow{un} 0$ elde edilir.

4.4.1. Lemma

X sıra sürekli norma sahip ve atomik Banach örgüsü ve $(x_n), X$ de sıra sınırlı bir dizi olmak üzere $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ ise $x_n \xrightarrow{o} 0$ dir.

İspat

Önce her $n \in \mathbb{N}^+$ için $x_n \geq 0$ olduğunu kabul edelim. (x_n) sıra sınırlı olduğundan her $n \in \mathbb{N}^+$ için $x_n \leq u$ olacak şekilde $u \in X^+$ vardır. O halde $u = \sum_{i=1}^{\infty} P_{a_i}(u) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i$ biçiminde yazılabilir ve bu seri hem norm hem de sıra yakınsaktır. Diğer yandan her $n \in \mathbb{N}^+$ için $x_n =$

$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^n a_i$ biçiminde yazılması nedeniyle her i ve n için $0 \leq \mu_i^n a_i \leq x_n$ olur. Buradan her $i \in \mathbb{N}^+$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_i^n = 0$ bulunur. Şimdi her $k \in \mathbb{N}^+$ için $v_k = \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{k} \wedge \lambda_i\right) a_i + \sum_{i=k+1}^{\infty} \lambda_i a_i$ biçiminde tanımlayalım. Yani,

$$v_1 = (1 \wedge \lambda_1) a_1 + \sum_{i=2}^{\infty} \lambda_i a_i$$

$$v_2 = \left(\frac{1}{2} \wedge \lambda_1\right) a_1 + \left(\frac{1}{2} \wedge \lambda_2\right) a_2 + \sum_{i=3}^{\infty} \lambda_i a_i$$

$$v_k = \left(\frac{1}{k} \wedge \lambda_1\right) a_1 + \left(\frac{1}{k} \wedge \lambda_2\right) a_2 + \cdots + \left(\frac{1}{k} \wedge \lambda_k\right) a_k + \sum_{i=k+1}^{\infty} \lambda_i a_i$$

dır.

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= \sum_{i=1}^{k+1} \left(\frac{1}{k+1} \wedge \lambda_i\right) a_i + \sum_{i=k+2}^{\infty} \lambda_i a_i \\ &= \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{k+1} \wedge \lambda_i\right) a_i + \left(\frac{1}{k+1} \wedge \lambda_{k+1}\right) a_{k+1} + \sum_{i=k+2}^{\infty} \lambda_i a_i \\ &\leq \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{k} \wedge \lambda_i\right) a_i + \lambda_{k+1} a_{k+1} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \lambda_i a_i \\ &= \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{k} \wedge \lambda_i\right) a_i + \sum_{i=k+1}^{\infty} \lambda_i a_i \\ &= v_k \end{aligned}$$

olduğundan $v_k \downarrow$ dır. Her $k \in \mathbb{N}^+$ için $0 \leq v_k$ olduğundan sıfır bir alt sınırdır. Her $k \in \mathbb{N}^+$ için $0 < z \leq v_k$ olacak şekilde bir $z \in X^+$ var olsun. $z = \sum_{i=1}^{\infty} P_{a_i}(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i a_i$ biçiminde yazılabilir ve $z \leq v_k$ olduğundan her $i \in \mathbb{N}^+$ için $P_{a_i}(z) \leq P_{a_i}(v_k)$ dır. $z > 0$ olduğundan $\beta_{i_0} \neq 0$ olacak şekilde $i_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Her $k \in \mathbb{N}^+$ için $0 < \beta_{i_0} a_{i_0} = P_{a_{i_0}}(z) \leq P_{a_{i_0}}(v_k)$ olmasından her $k \geq i_0$ için $0 < \beta_{i_0} a_{i_0} \leq \left(\frac{1}{k} \wedge \lambda_k\right) a_k \leq \frac{1}{k} a_k$ yani $0 < \beta_{i_0} \leq \frac{1}{k}$ elde edilir. Bu ise çelişkidir. Dolayısıyla $v_k \downarrow 0$ olur. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}^+$ için $0 \leq x_n \leq u$ olduğundan her $i \in \mathbb{N}^+$ için $\mu_i^n a_i = P_{a_i}(x_n) \leq P_{a_i}(u) = \lambda_{a_i} a_i$ olması ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_i^n = 0$ olmasından her $k \in \mathbb{N}^+$ için $n_k \leq n$ iken $x_n \leq v_k$ olacak şekilde $n_k \in \mathbb{N}^+$ vardır. [6] dan bu da $x_n \xrightarrow{o} 0$ demektir. (x_n) keyfi sıra sınırlı dizi ise $|x_n| \geq 0$ ve $(|x_n|)$ sıra sınırlı dizidir ve $|x_n| \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ dır. İspatın ilk kısmından $|x_n| \xrightarrow{o} 0$ olur. Buradan $x_n \xrightarrow{o} 0$ elde edilir.

4.4.2. Lemma

μ atomik olmayan sonlu bir ölçü ise $L_\infty(\mu)$ içinde sıfıra μ yakınsayan ama hemen hemen yakınsamayan bir (f_n) dizisi vardır.

İspat

Önce $\mu, [0,1]$ aralığında tanımlı Lebesgue ölçüsü olsun. $[0,1]$ aralığını $k \geq 0$ ve

$2^k \leq n < 2^{k+1}$ olmak üzere $\left[\frac{n-2^k}{2^k}, \frac{n-2^k+1}{2^k}\right]$ biçiminde aralıklara bölelim. Yani,

$k = 0$ ve $1 \leq n < 2$ için $[0,1]$

$k = 1$ ve $2 \leq n < 4$ için $\left[0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

$k = 2$ ve $4 \leq n < 8$ için $\left[0, \frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right], \left[\frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right], \left[\frac{3}{4}, 1\right]$

dir. (f_n) dizisi bu aralıklara karşılık gelen karakteristik fonksiyonlar olmak üzere $f_1 = \chi_{[0,1]}$, $f_2 = \chi_{\left[0, \frac{1}{2}\right]}$, $f_3 = \chi_{\left[\frac{1}{2}, 1\right]}$, $f_4 = \chi_{\left[0, \frac{1}{4}\right]}$, $f_5 = \chi_{\left[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right]}$, $f_6 = \chi_{\left[\frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right]}$, $f_7 = \chi_{\left[\frac{3}{4}, 1\right]}$, ... dir.

$f_n = \chi_{\left[\frac{n-2^k}{2^k}, \frac{n-2^k+1}{2^k}\right]}$, $k \geq 0$ ve $2^k \leq n < 2^{k+1}$ olur. Şimdi $f_n \xrightarrow{\mu} 0$ olduğunu gösterelim.

$0 < \varepsilon \leq 1$ olmak üzere $A_n = \{x \in [0,1]: |f_n(x)| = f_n(x) \geq \varepsilon\}$ olsun. ($\varepsilon > 1$ ise f_n tanımından $A_n = \emptyset$ dir.)

$k = 0$ ve $1 \leq n < 2$ için $\mu^*(A_n) = 1$

$k = 1$ ve $2 \leq n < 4$ için $\mu^*(A_n) = \frac{1}{2}$

$k = 2$ ve $4 \leq n < 8$ için $\mu^*(A_n) = \frac{1}{4}$

Herhangi bir $k \geq 2$, $2^k \leq n < 2^{k+1}$ için $\mu^*(A_n) = \frac{1}{2^k}$ dir.

$n \rightarrow \infty$ için $k \rightarrow \infty$ olacağından $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^k} = 0$ olur. Buradan $f_n \xrightarrow{\mu} 0$ dır. Fakat (f_n) sıfıra hemen hemen yakınsak değildir. Her $x \in [0,1]$ için $f_n(x) \rightarrow 0$ değildir. Bir $x \in [0,1]$ için $f_n(x) \rightarrow 0$ olsun. $\varepsilon = \frac{1}{2}$ için $n_0 \leq n$ iken $|f_n(x)| = f_n(x) < \varepsilon$ olacak şekilde n_0 doğal sayısı vardır. $n_0 \leq 2^k \leq n < 2^{k+1}$ biçiminde k doğal sayısını seçersek

$x \in \left[\frac{n-2^k}{2^k}, \frac{n-2^k+1}{2^k}\right]$ olacak şekilde $n \in [2^k, 2^{k+1}]$ vardır ve $n_0 \leq n$ dir. Bu n için $f_n(x) = 1$ olduğundan $f_n(x) = 1 < \frac{1}{2}$ çelişkisi elde edilir. Yani $f_n(x) \rightarrow 0$ olmayan noktaların kümesi $[0,1]$ ve $\mu^*[0,1] = 1 \neq 0$ olduğundan (f_n) hemen hemen sıfıra yakınsak değildir. μ herhangi bir atomik olmayan sonlu ölçü ise [13] Alıştırma 2 den istenen çıkar.

4.4.1. Önerme

X bir Banach örgüsü olmak üzere aşağıdakiler denktir.

- i) Her $(x_n) \subseteq X$ dizisi için $x_n \xrightarrow{un} 0$ olması için gerek ve yeter koşul $x_n \xrightarrow{uo} 0$ olmasıdır.
- ii) X sıra sürekli norma sahip ve atomiktir.

İspat

i) $\Rightarrow$ ii): [1] Teorem 4.14 den X in sıra sürekli norma sahip olduğunu göstermek için X içinde sıra sınırlı her dik dizinin sıfıra norm yakınsadığını göstermek yeterlidir. $(x_n) \subseteq X$ sıra sınırlı bir dik dizi olsun. Sonuç 3.2.3 den $x_n \xrightarrow{uo} 0$ dır. Hipotezden $x_n \xrightarrow{un} 0$ olur. $x_n \xrightarrow{un} 0$ ise her $y \in X^+$ için $|x_n| \wedge y \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ dır. (x_n) sıra sınırlı olduğundan $|x_n| \leq u$ olacak şekilde $u \in X^+$ vardır ve $|x_n| \wedge u = |x_n| \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olur. Buradan da $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ elde edilir. Böylece X in sıra sürekli norma sahip olduğunu gördük. Şimdi X in atomik olduğunu gösterelim. Olmadığını varsayalım. Bu durumda X içindeki bütün atomların ürettiği band X_1 ise $X_1 \subset X$ (öz alt küme) dir. X_2, X_1 in tamlayan bandı ($X_2 = X_1^d$) olmak üzere $X_2 \neq \{0\}$ dır. $0 \neq w \in X_2^+$ ve Y, w nin X içinde ürettiği band yani $Y = B_w$ olsun. X_2 band olduğundan $Y \subseteq X_2$ ve Y sıra sürekli norma sahiptir. Ayrıca w, Y nin zayıf birimi ve Y atomik değildir. Bu durumda $L_\infty(\mu) \subseteq Y \subseteq L_1(\mu)$ olacak şekilde Y nin AL -temsili vardır Y atomik olmadığından μ atomik değildir. Lemma

4.4.2 den $f_n \xrightarrow{\mu} 0$ ve f_n sıfıra hemen hemen yakınsamayacak şekilde $(f_n) \subseteq L_\infty(\mu)$ vardır.

Önerme 4.3.3 den

$f_n \xrightarrow{un} 0$ dir. Fakat $f_n \xrightarrow{uo} 0$ değildir. $f_n \xrightarrow{uo} 0$ olsaydı f_n sıfıra hemen hemen yakınsak olurdu ki bu olamaz. Bu da hipotezle çelişir.

ii) $\Rightarrow$ i) : X sıra sürekli norma sahip ve atomik olsun.

$(x_n) \subseteq X$ için Lemma 4.4.1 düşünülürse

Şimdi $x_n \xrightarrow{un} 0$ olsun.

$$\begin{aligned} x_n \xrightarrow{un} 0 &\Rightarrow \forall y \in X^+, |x_n| \wedge y \xrightarrow{\|\cdot\|} 0 \\ &\Rightarrow \forall y \in X^+, |x_n| \wedge y \xrightarrow{o} 0 \\ &\Rightarrow x_n \xrightarrow{uo} 0 \end{aligned}$$

dir.

Şimdi $x_n \xrightarrow{uo} 0$ olsun.

$$\begin{aligned} x_n \xrightarrow{uo} 0 &\Rightarrow \forall y \in X^+, |x_n| \wedge y \xrightarrow{o} 0 \\ &\Rightarrow \forall y \in X^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n_0 \leq n, |x_n| \wedge y \leq z_n \downarrow 0 \text{ o.ş } (z_n) \text{ var.} \\ &\Rightarrow \forall y \in X^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n_0 \leq n, \| |x_n| \wedge y \| \leq \| z_n \| \downarrow 0 \\ &\Rightarrow \forall y \in X^+, |x_n| \wedge y \xrightarrow{\|\cdot\|} 0 \\ &\Rightarrow x_n \xrightarrow{un} 0 \end{aligned}$$

olur.

4.5. Sınırsız Norm Yakınsama ve Zayıf Yakınsama

Bu bölümde sınırsız norm yakınsama ve zayıf yakınsama ilişkisini inceleyeceğiz. Monoton netler için zayıf yakınsama norm yakınsamayı, norm yakınsama da sınırsız norm yakınsamayı gerektirdiğinden monoton zayıf yakınsayan netler sınırsız norm yakınsaktır. Fakat bunun karşıtı genelde doğru değildir.

4.5.1. Lemma [7, Teorem 2.2]

X sıra sürekli norma sahip atomik olmayan bir Banach örgüsü ve $x \in X^+$ olsun. Bu durumda $x_n \xrightarrow{\sigma} x$ ve her n için $|x_n| = x$ olacak şekilde (x_n) dizisi vardır.

4.5.1. Önerme

X Banach örgüsü olmak üzere aşağıdakiler denktir.

- i) Her $(x_n) \subseteq X$ dizisi için $x_n \xrightarrow{\sigma} 0$ ise $x_n \xrightarrow{un} 0$ dir.
- ii) X sıra sürekli norma sahip ve atomiktir.

İspat

i) $\Rightarrow$ ii) : X in sıra sürekli olduğunu göstermek için [1] Teorem 4.14 den (x_n) sıra sınırlı ve dik dizi iken sıfıra yakınsadığını göstermek yeterlidir. (x_n) sıra sınırlı ve dik dizi olsun. $x_n \geq 0$ alalım. $y_n = \bigvee_{i=1}^n x_i$ şeklinde tanımlansın. $u \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $0 \leq x_n \leq u$ ve $n \neq m$ için $x_n \perp x_m$ olduğundan $y_n = \bigvee_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i \leq u$ olur. Keyfi $f \in X'_+$ ve her n için $f(y_n) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \leq f(u)$ olur. $\sum_{i=1}^n f(x_i)$ serisinin genel toplamlar dizisi artan ve sınırlı olduğundan $\mathbb{R}$ de supremumu vardır ve limitine eşittir. Yakınsak her serinin genel terimi sıfıra gittiğinden $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$ olur. O halde $f(x_n) \rightarrow 0$ ve $x_n \xrightarrow{\sigma} 0$ dir. Şimdi atomik olduğunu gösterelim. Atomik olmadığını varsayalım. Bu durumda X içindeki bütün atomların ürettiği band X_1 ise $X_1 \subset X$ dir. $X_2 = X_1^d$ olarak alırsak X atomik olmadığından $X_2 \neq \{0\}$ dir. X_2 sıra sürekli norma sahip ve atomik olmadığından Lemma 4.4.1 uygulanırsa, $0 < z \in X_2$ için $z_n \xrightarrow{\sigma} 0$ ve her n için $|z_n| = z$ olacak şekilde $(z_n) \subseteq X_2$ ddizisi vardır. Her n için $|z_n| = x$ olduğundan $z_n \xrightarrow{un} 0$ olamaz, bu da hipotezle çelişir.

ii) $\Rightarrow$ i) : $(x_n) \subseteq X$ dizisi için $x_n \xrightarrow{\sigma} 0$ olsun. X atomik olduğundan [6] Lemma 6.4 den

$x_n \xrightarrow{uo} 0$ olur. Önerme 4.4.1 den $x_n \xrightarrow{un} 0$ elde edilir.

Şimdi sıra sınırlı olmayan bir net için sınırsız norm yakınsamada benzer özellik detaylandırılacaktır.

4.5.2. Önerme

X sıra sürekli norma sahip Banach örgüsü, $(x_\alpha) \subseteq X$ içinde pozitif net olmak üzere $x_\alpha \xrightarrow{\sigma} 0$ ise $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ dir.

İspat

$(x_\alpha) \subseteq X$ pozitif net ve $x_\alpha \xrightarrow{\sigma} 0$ olsun. Her $u \in X^+$ ve her α için $0 \leq x_\alpha \wedge u \leq x_\alpha$ dir. Buradan her $0 \leq f \in X'$ için $0 \leq f(x_\alpha \wedge u) \leq f(x_\alpha)$ ve $f(x_\alpha) \rightarrow 0$ olduğundan

$f(x_\alpha \wedge u) \rightarrow 0$ olur. Keyfi $f \in X'$ için $f = f^+ - f^-$ olduğu düşünülürse $f(x_\alpha \wedge u) \rightarrow 0$ elde edilir. [1] Sayfa 205 Örnek 10 dan $x_\alpha \wedge u \xrightarrow{\sigma} 0$ olur. $(x_\alpha \wedge u)$ pozitif ve sıra sınırlı olduğundan $x_\alpha \wedge u \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ elde edilir. Bu da $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ olması demektir.

Şimdi de bir (x_n) dizisinin ne zaman sınırsız norm yakınsak iken zayıf yakınsak olduğunu inceleyelim.

4.5.3. Önerme

X' sıra sürekli norma sahip Banach örgüsü ve X_+ içinde norm sınırlı bir net (x_α) olmak üzere $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ ise $x_\alpha \xrightarrow{\sigma} 0$ dir.

İspat

X' sıra sürekli norma sahip ve $(x_\alpha) \subseteq X_+$ norm sınırlı bir net olmak üzere $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ olsun. Önce her α için $\|x_\alpha\| \leq 1$ olduğunu varsayalım. X' sıra sürekli norma sahip olduğundan ve

[1] Teorem 4.18 den her $\varepsilon > 0$ ve her $f \in X'_+$ için $\|x\| \leq 1$ olmak üzere $f[(|x| - u)^+] < \varepsilon$ olacak şekilde $u \in X_+$ vardır. $|x| = |x \wedge u| + (|x| - u)^+$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ ve her $f \in X'_+$ için $\|x\| \leq 1$ olduğundan $f[|x| - (|x| \wedge u)] < \varepsilon$ olacak şekilde $u \in X_+$ vardır. Dolayısıyla her α için $f[x_\alpha - (x_\alpha \wedge u)] < \varepsilon$ dir. Ayrıca $x_\alpha \wedge u \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ olduğundan her $f \in X'_+$ için $f(x_\alpha \wedge u) \rightarrow 0$ dir. f nin lineerliğinden $f(x_\alpha) < \varepsilon + f(x_\alpha \wedge u)$ olup $f(x_\alpha \wedge u) \rightarrow 0$ olması göz önüne alınırsa yakınsamanın tanımından

$f(x_\alpha) < \varepsilon + f(x_\alpha \wedge u) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ olup $f(x_\alpha) \rightarrow 0$ elde edilir. Bu da $x_\alpha \xrightarrow{\sigma} 0$ demektir. Şimdi genel duruma bakalım. (x_α) norm sınırlı olduğundan her α için $\|x_\alpha\| \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı vardır. $(y_\alpha) = \left(\frac{x_\alpha}{M}\right)$ biçiminde tanımlarsak $y_\alpha \xrightarrow{un} 0$ ve $\|y_\alpha\| \leq \frac{\|x_\alpha\|}{M} \leq 1$ olur. İspatın ilk kısmından $y_\alpha \xrightarrow{\sigma} 0$ elde edilir. Buradan da $x_\alpha \xrightarrow{\sigma} 0$ olur.

5. SINIRSIZ NORM SÜREKLİ OPERATÖRLER

Bu bölümde ilk olarak sınırsız norm sürekli operatörler tanımlanmıştır ve bu operatörlerin reel değerli olanları yani dualeri incelenmiştir. Daha sonra genel teorisi verilmiştir.

5.1. Sınırsız Norm Sürekli Dualer

5.1.1. Tanım

X ve Y normlu örgü, $T: X \rightarrow Y$ bir operatör olsun. X içinde $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ olan her (x_α) neti için Y içinde $T(x_\alpha) \xrightarrow{un} 0$ ise T ye sınırsız norm sürekli operator (un-sürekli) denir. Sınırsız norm sürekli ve sıra sınırlı operatörlerin kümesi $L_{un}(X, Y)$ şeklinde gösterilir.

$L_{un}(X, Y)$ sınırsız norm sürekli ve sıra sınırlı operatörlerin kümesi, $Y = \mathbb{R}$ alındığında $L_{un}(X, Y) = X_{un}^\sim$ şeklinde gösterilir ve $X_{un}^\sim$ ya X in sınırsız norm sürekli duali denir.

5.1.1. Teorem

X ve Y Riesz uzayı olmak üzere $L_{un}(X, Y)$, $L_b(X, Y)$ nin alt vektör uzayıdır.

İspat

Her $S, T \in L_{un}(X, Y)$ ve $(x_\alpha) \subseteq X$ neti için Lemma 4.1.1 iii) göz önünde bulundurularak,

$$\begin{aligned} x_\alpha \xrightarrow{un} x &\Rightarrow S(x_\alpha) \xrightarrow{un} S(x) \text{ ve } T(x_\alpha) \xrightarrow{un} T(x) \\ &\Rightarrow S(x_\alpha) + T(x_\alpha) \xrightarrow{un} S(x) + T(x) \\ &\Rightarrow (S + T)(x_\alpha) \xrightarrow{un} (S + T)(x) \end{aligned}$$

dir.

$\lambda \in \mathbb{R}$ için Lemma 4.1.1 iii) dikkate alınarak,

$$\begin{aligned} x_\alpha \xrightarrow{un} x &\Rightarrow T(x_\alpha) \xrightarrow{un} T(x) \\ &\Rightarrow \lambda T(x_\alpha) \xrightarrow{un} \lambda T(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\lambda T)(x_\alpha) \xrightarrow{un} \lambda T(x)$$

dir.

Dördüncü bölümde Örnek 2 ve Örnek 3 de $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{R}^n$ de bir netin norm yakınsak olması için gerek ve yeter şartın netin sınırsız norm yakınsaması olduğunu ispatladık.

5.1.2. Teorem

X Riesz uzayı ve $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ sıra sınırlı herhangi bir f fonksiyoneli için aşağıdakiler denktir.

- i) f un-sürekli dir.
- ii) f^+ ve f^- un-sürekli dir.
- iii) $|f|$ un-sürekli dir.

İspat

i) $\Rightarrow$ ii) : $(x_\alpha) \subseteq X^+$ bir net, $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ ve f un-sürekli olsun. [1] Teorem 1.18 den $f^+ = \sup\{f(y) : 0 \leq y \leq x\}$ dir. Dolayısıyla her α için $f^+(x_\alpha) = \sup\{f(y_\alpha) : 0 \leq y_\alpha \leq x_\alpha\}$ olacaktır. $A = \{f(y) : 0 \leq y \leq x\}$ olarak tanımlayalım. $A \subseteq \mathbb{R}$ ve $\sup A = a$ ise her $\varepsilon > 0$ için $a - \varepsilon < a_\varepsilon$ olacak şekilde en az bir $a_\varepsilon \in A$ vardır. Buradan her $\varepsilon_\alpha > 0$ ve $\varepsilon_\alpha \downarrow 0$ için $f^+(x_\alpha) < f(y_\alpha) + \varepsilon_\alpha$ ve $0 \leq y_\alpha \leq x_\alpha$ olacak şekilde (y_α) neti vardır. $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ ve $0 \leq y_\alpha \leq x_\alpha$ olduğundan $y_\alpha \xrightarrow{un} 0$ olur. f un-sürekli olduğundan $f(y_\alpha) \xrightarrow{un} 0$ dir. Her $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için,

$$0 \leq f^+(x_\alpha) \wedge \lambda \leq (f(y_\alpha) + \varepsilon_\alpha) \wedge \lambda \leq (f(y_\alpha) \wedge \lambda) + (\varepsilon_\alpha \wedge \lambda)$$

$$\Rightarrow 0 \leq f^+(x_\alpha) \wedge \lambda \leq |f(y_\alpha) \wedge \lambda| + |\varepsilon_\alpha \wedge \lambda|$$

$$\Rightarrow f^+(x_\alpha) \wedge \lambda \xrightarrow{||} 0$$

dir. O halde $f^+(x_\alpha) \xrightarrow{un} 0$ elde edilir.

$(x_\alpha) \subseteq X$ keyfi bir net ve $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ olsun. Lemma 4.1.1 v) den $|x_\alpha| \xrightarrow{un} 0$ olması ve ispatın ilk kısmındaki (x_α) yerine $|x_\alpha|$ alınrsa, $f^+|x_\alpha| \xrightarrow{un} 0$ olduğu görülür. $|f^+(x_\alpha)| \leq f^+|x_\alpha|$ olmasından

$f^+(x_\alpha) \xrightarrow{un} 0$ bulunur. Yani f^+ un-sürekli dir. $f^- = (-f)^+$ olması göz önüne alınrsa f^- nin un-sürekli olduğu görülür.

ii) $\Rightarrow$ iii) : $|f| = f^+ + f^-$ şeklinde yazılabilmesi ve $X_{un}^\sim$ vektör uzayı olmasından $|f|$ un-sürekli dir.

iii) $\Rightarrow$ i) : Her $x \in X$ için $|fx| \leq |f||x|$ olması ve her $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ için $|x_\alpha| \xrightarrow{un} 0$ olması göz önüne alınrsa;

$$0 \leq |f(x_\alpha)| \leq |f||x_\alpha|$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_\alpha |f(x_\alpha)| \leq \lim_\alpha (|f||x_\alpha|)$$

$$\Rightarrow |f(x_\alpha)| \xrightarrow{un} 0$$

dir.

Dolayısıyla $f(x_\alpha) \xrightarrow{un} 0$ elde edilir.

5.1.1. Sonuç

X Riesz uzayı olmak üzere $X_{un}^\sim, X^\sim$ nin Riesz alt uzayıdır.

5.1.2. Tanım

X, Y Riesz uzayı ve $S, T: X \rightarrow Y$ pozitif operatör olsun. Her $x \in X$ için $|Sx| \leq T|x|$ iken S operatörü T tarafından domine edilmiştir denir[14].

5.1.1. Önerme

X, Y Banach örgüsü ve $T: X \rightarrow Y$ sınırsız norm sürekli operatör olsun. Eğer T operatörü $S: X \rightarrow Y$ operatörünü domine ederse, S operatörü de sınırsız norm sürekli dir.

İspat

$(x_\alpha) \subseteq X$ net ve $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ olsun. Lemma 4.1.1 v) den $|x_\alpha| \xrightarrow{un} 0$ olur. Her $T: X \rightarrow Y$ sınırsız norm sürekli operatörü $S: X \rightarrow Y$ operatörünü domine ettiğinden her α için $0 \leq |S(x_\alpha)| \leq T|x_\alpha|$ olur. Her $u \in X^+$ ve her α için,

$$\begin{aligned} 0 \leq |S(x_\alpha)| \wedge u \leq T|x_\alpha| \wedge u &\Rightarrow 0 \leq |||S(x_\alpha)| \wedge u|| \leq ||T|x_\alpha| \wedge u|| \\ &\Rightarrow 0 \leq \lim_{\alpha} |||S(x_\alpha)| \wedge u|| \leq \lim_{\alpha} ||T|x_\alpha| \wedge u|| \\ &\Rightarrow \lim_{\alpha} |||S(x_\alpha)| \wedge u|| = 0 \end{aligned}$$

olup $|S(x_\alpha)| \wedge u \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ dir. Dolayısıyla $|S(x_\alpha)| \xrightarrow{un} 0$ ve $S(x_\alpha) \xrightarrow{un} 0$ bulunur. O halde S operatörü de un-sürekli dir.

5.1.2. Sonuç

X Riesz uzayı olmak üzere $X_{un}^\sim, X^\sim$ içinde idealdir.

İspat

Her $f \in X^\sim$ için $g \in X_{un}^\sim$ ve $0 \leq |f| \leq |g|$ iken $f \in X_{un}^\sim$ olduğunu gösterelim. $X_{un}^\sim, X^\sim$ nın Riesz alt uzayı olduğundan $g \in X_{un}^\sim$ ise $|g| \in X_{un}^\sim$ dir. Önerme 5.1.1 den $|g|, f$ yi domine ettiğinden g sınırsız norm sürekli ise f de sınırsız norm sürekli dir. Dolayısıyla $f \in X_{un}^\sim$ olur. O halde $X_{un}^\sim, X^\sim$ içinde idealdir.

5.2. Sınırsız Norm Sürekli Operatörler

5.2.1. Önerme

X, Y Banach örgüsü ve $T: X \rightarrow Y$ (norm) sürekli ve örten örgü homomorfizmi ise T sınırsız norm süreklidir.

İspat

$(x_\alpha) \subseteq X$ için $x_\alpha \xrightarrow{un} 0$ olsun. T nin norm sürekli ve örgü homomorfizmi olduğun

$$\begin{aligned} x_\alpha \xrightarrow{un} 0 &\Rightarrow \text{Her } u \in X^+ \text{ için } \|x_\alpha \wedge u\| \rightarrow 0 \\ &\Rightarrow \text{Her } u \in X^+ \text{ için } \|T(x_\alpha \wedge u)\| \rightarrow 0 \\ &\Rightarrow \text{Her } u \in X^+ \text{ için } \|T(x_\alpha) \wedge T(u)\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

olur. Her $w \in Y^+$ için T örten olduğundan $T(v) = w$ olacak şekilde $v \in X$ vardır. $|T(v)| = |w| = w$ olup T örgü homomorfizmi olduğundan $T|v| = w$ bulunur. O halde $\|T(x_\alpha) \wedge T|v|\| \rightarrow 0$ dir. $|v| \in X^+$ olduğundan $T(x_\alpha) \xrightarrow{un} 0$ olur, yani T sınırsız norm süreklidir.

5.2.1. Sonuç

X, Y Banach örgüsü ve $T: X \rightarrow Y$ örten, dikliği koruyan, sürekli ve sıra sınırlı ise T sınırsız norm süreklidir.

İspat

T sıra sınırlı ve dikliği koruyan ise [1] Teorem 1.14 den $|T|$ vardır ve örgü homomorfizmdir.

Ayrıca T örten olduğundan $y \in Y^+$ için,

$$\begin{aligned} y \in Y^+ &\Rightarrow \exists x \in X \text{ için } T(x) = y \\ &\Rightarrow \exists x \in X \text{ için } |T(x)| = |y| = y \\ &\Rightarrow \exists x \in X \text{ için } |T||x| = y \end{aligned}$$

dir. Şimdi keyfi $y \in Y$ için $y = y^+ - y^-$, $y^+, y^- \in Y^+$ şeklinde yazılabildiği göz önüne alınırsa, $|T|(x_1) = y^+$ ve $|T|(x_2) = y^-$ olacak şekilde en az bir $x_1, x_2 \in X$ vardır. O halde

$|T|(x_1) - |T|(x_2) = |T|(x_1 - x_2) = y^+ - y^- = y$ olduğundan $|T|$ örtendir. T sürekli olduğundan $|T|$ sürekli ve Önerme 5.2.1 den $|T|$ sınırsız norm süreklidir. $0 \leq T^+ \leq |T|$ ve $0 \leq T^- \leq |T|$ olduğundan ve $T = T^+ - T^-$ şeklinde yazılabildiğinden T sınırsız norm süreklidir.



6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

X Riesz uzayı olmak üzere X içindeki bir (x_α) ağının sıra yakınsaması, sınırsız sıra yakınsaması ve sınırsız norm yakınsaması kavramlarının temelleri oluşturularak, bu yakınsamalar yardımıyla oluşturulan süreklilik kavramlarını çalışmak hedeflenmiştir. X ve Y Riesz uzayları olmak üzere X den Y ye sıra sürekli operatörler uzayı $L_n(X, Y)$ nin özellikleri bilinmektedir. X den Y ye sınırsız norm sürekli sıra sınırlı operatörler uzayı $L_{un}(X, Y)$ uzayı tanımlanarak $L_n(X, Y)$ nin sahip olduğu benzer özelliklere sahip olup olmadığı veya hangi koşullarda sahip olduğunu araştırmak amaçlanmıştır. Eğer $Y = \mathbb{R}$ alınırsa $L_{un}(Y, \mathbb{R}) = X_{un}^\sim$ sınırsız norm sürekli dualin $X^\sim$ içinde ideal olduğu görülmüştür. Genel durum için bazı özellikler elde edilmiş ancak bir çok soru henüz çözüme kavuşmamıştır. Örneğin;

- $X_{un}^\sim$ sınırsız norm sürekli dualin $X^\sim$ içinde band midir?
- X ve Y Riesz uzayı, $T: X \rightarrow Y$ sınırsız norm sürekli sıra sınırlı operatör ve $|T|$ var ise sınırsız norm sürekli midir?
- Y Dedekind tam Riesz uzayı iken $L_{un}(X, Y)$ uzayı $L_b(X, Y)$ içinde ideal midir? Eğer olmadığına dair bir örnek bulunabilir ise X veya Y üzerine hangi şartları koyarsak $L_{un}(X, Y)$ ideal olur?
- Benzer soru band için verilebilir, yani X ve Y üzerine hangi şartları koyarsak $L_{un}(X, Y)$ band olur?

Bu soruların olumlu yanıtları elde edilebilirse sıra sürekli operatör uzayları için önceden verilmiş diğer özellikleri araştırmak için bir ilerleme olacağını düşünmekteyiz.



KAYNAKLAR

1. Aliprantis, C. D., and Burkinshaw, O. (2006). *Positive operators*. Netherlands: Springer Science & Business Media, 1-39,181-211.
2. Luxemburg, W. A. J. and Zaanen, A. C. (1971). *Riesz space I*. Amsterdam: North Holland, 48-198.
3. Zaanen, A. C. (1983). *Riesz space II*. Amsterdam: North Holland, 279-302.
4. Gao, N. (2014). Unbounded order convergence in dual spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 419(1), 347-354.
5. Gao, N., and Xanthos, F. (2014). Unbounded order convergence and application to martingales without probability. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 415(2), 931-947.
6. Gao, N., Troitsky, V. G., and Xanthos, F. (2017). Uo-convergence and its applications to Cesàro means in Banach lattices. *Israel Journal of Mathematics*, 220(2), 649-689.
7. Deng, Y., O'Brien, M., and Troitsky, V. G. (2017). Unbounded norm convergence in Banach lattices. *Positivity*, 21(3), 963-974.
8. Aliprantis, C. D., and Burkinshaw, O. (1998). *Principles of real analysis*. Houston: Gulf Professional Publishing, 146-262.
9. Troitsky, V. G. (2004). Measures of non-compactness of operators on Banach lattices. *Positivity*, 8(2), 165–178.
10. Lindenstrauss, J., and Tzafriri, L. (1979). *Classical banach spaces II*. Berlin: Springer, 1-113.
11. Aliprantis, C. D., and Burkinshaw, O. (2003). *Locally solid Riesz spaces with applications to economics* (No. 105). Canada: American Mathematical Society, 72-79.
12. Schaefer, H.H. (1974). *Banach lattices and positive operators*. Berlin: Springer, 143.
13. Halmos, P.R. (1970). *Measure theory*. New York: Springer, 174.
14. Bahramnezhad, A., and Azar, K. H. (2018). Unbounded order continuous operators on Riesz spaces. *Positivity*, 22, 837-843.





GAZİ GELECEKTİR..