



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**



BANACH UZAYLARDA OPERATÖRLERİN WEYL TİPİ EŞİTSİZLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ünal Kemal ALKAN

**TEMMUZ 2021
GÜMÜŞHANE**

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

BANACH UZAYLARDA OPERATÖRLERİN WEYL TİPİ EŞİTSİZLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ünal Kemal ALKAN

Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
“Matematik Mühendisliği”
Yüksek Lisans Programında Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 28/06/2021
Tezin Sözlü Savunma Tarihi : 28/07/2021

TEMMUZ 2021

TEZ BEYANNAMESİ

Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlamış olduğum “Banach Uzaylarda Operatörlerin Weyl Tipi Eşitsizlikleri” isimli tez çalışmada; bütün bilgi ve belgeleri genel akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, görsel ve yazılı bütün bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak hazırlayıp sunduğumu, başka kaynaklardan yararlandığım bilgileri metin ve kaynaklarda eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma süresince bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksi durumda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 28/06/2021

Ünal Kemal ALKAN

ÖZET
YÜKSEK LİSANS TEZİ

BANACH UZAYLARDA OPERATÖRLERİN WEYL TİPİ EŞİTSİZLİKLERİ

Ünal Kemal ALKAN

Gümüşhane Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Lale CONA

2021, 64 sayfa

Bu tez çalışmasında Banach uzaylardaki lineer sınırlı operatörlerin Weyl tipi eşitsizlikleri üzerine çalışılmıştır. Birinci bölümde gerekli temel kavramlar verilerek, ikinci bölümde s -sayılarının aksiyomatik yapısı aktarılmıştır. Üçüncü bölümde ise Weyl tipi eşitsizlikler hakkında genel bir araştırma yapılmıştır. Böylece bir bütün olarak s -sayılarının aksiyomatik teorisi sunulacaktır.

Anahtar Kelimeler: Banach Uzaylar, Özdeğerler, s -Numbers, Weyl Tipi Eşitsizlikler

ABSTRACT
MS THESIS

WEYL TYPE INEQUALITIES OF OPERATORS IN BANACH SPACES

Ünal Kemal ALKAN

Gümüşhane University
The Graduate Education Institute
Department of Mathematical Engineering

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Lale CONA

2021, 64 pages

In this thesis, Weyl type inequalities of linear bounded operators in Banach spaces have been studied. In the first chapter, the necessary basic concepts are given, and in the second chapter, the axiomatic structure of s-numbers is given. In the third part, a general research has been done on Weyl type inequalities. Thus, the axiomatic theory of s-numbers as a whole will be presented.

Keywords: Banach Spaces, Eigenvalues, s-Numbers, Weyl Type Inequality

TEŞEKKÜR

Bu çalışma, Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlanmıştır. Tez konusunun belirlenmesinde bana yardımcı olan bu çalışmanın yürütülmesinde değerli bilgilerini benimle paylaşan, kıymetli zamanını bana ayırıp desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, edindiği tecrübe ile bana büyük katkısı olan değerli danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Lale CONA ve emeği geçen tüm hocalarıma en içten teşekkürlerimi sunarım. Yüksek Lisans öğrenimi boyunca, maddi ve manevi anlamda bana desteklerini esirgemeyen aileme sonsuz teşekkür ederim.

Ünal Kemal ALKAN
Gümüşhane, 2021

İÇİNDEKİLER

ÖZET	IV
ABSTRACT	V
TEŞEKKÜR	VI
İÇİNDEKİLER.....	VII
SİMGELER VE KISALTMALAR	VIII
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Temel Kavramlar	2
2. s-SAYILARININ AKSİYOMATİK ÖZELLİKLERİ	17
2.1. Yaklaşım ve İzomorfizm Sayıları	20
2.2. İnjektif s-Sayıları.....	24
2.3. Surjektif s-Sayıları.....	31
2.4. İnjektif ve Surjektif s-Sayıları.....	36
2.5. Dual s-Sayıları.....	37
2.6. Hilbert Sayıları.....	39
2.7. s-Weyl Sayıları.....	40
2.8. Bazı s-Sayıları Arasındaki Bağıntılar	42
3. WEYL-TİPİ EŞİTSİZLİKLER ve ÖZDEĞER DAĞILIMLARI.....	47
3.1. Özdeğer Dizileri ve Klasik Sonuçlar	47
3.2. s-Sayıları ve Öz Değerler Arasındaki Eşitsizlikler	49
3.3. Banach Uzaylarda Weyl Tipi Eşitsizlikler	51
4. BULGULAR.....	57
5. İRDELEME	58
6. SONUÇLAR	59
7. ÖNERİLER.....	60
8. KAYNAKLAR.....	61
ÖZGEÇMİŞ	

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel(gerçek) Sayılar Kümesi
$<$	: küçüktür
$>$	: büyüktür
$=$	: eşittir
$\neq$	: eşit değildir
$\leq$	: küçük eşit
$\in$	: eleman
ε	: epsilon
δ	: delta
$\exists$	: öyle ki
$\forall$	: herhangi
$\Rightarrow$	: ise
$\Leftrightarrow$	: ancak ve ancak
$\mathfrak{S}$	: Kompakt operatörler kümesi
S^*	: S operatörünün adjointi
S'	: S operatörünün duali
$S A$	: S operatörü A üzerinde tanımlıdır
$a_n(S)$	: Yaklaşım Sayısı
$i_n(S)$	: İzomorfizm Sayısı
$c_n(S)$	: Gelfand Sayısı
$u_n(S)$	: Bernstein Sayısı
$d_n(S)$	: Kolmogorov Sayısı
$v_n(S)$	: Mitiagin Sayısı
$h_n(S)$	: Hilbert Sayısı
$x_n(S)$	: Weyl Sayısı

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Yapılan literatür taramasında s-sayıları veya singüler sayılar (singuläre zahlen) kavramının ilk olarak E. Schmidt' in non-selfadjoint integral operatör teorisi alanındaki (Schmidt, E., 1907) çalışmasında yer verildiği ve kullanılmaya başlandığı görülmektedir. J. von Neumann ve R. Schatten' in (Von Neumann, J. ve Schatten, R., 1948) çalışmasında bu kavramın Hilbert uzayındaki lineer sınırlı operatörlere ilişkilendirilmesine yer verildiği anlaşılmıştır. İ.Z. Gohberg ve M. G. Krein' nin (Gohberg, İ.Z. ve Krein, M.G.,1971) kitabında Hilbert uzayında operatörlerin s-sayılarının mükemmel teorisine yer verilmiştir. Banach uzayında s-sayılarının birden fazla tanım seçeneği olduğu bilgisine erişilmiştir. Bu kapsamda yapılan ilk çalışmalar A. N. Kolmogorov (Kolmogorov, A.N., 1936) ve İ.M. Gelfand' a ait olduğu bilinmektedir.

A.Pietsch' in (Pietsch, A., 1963) bu çalışmasında öncelikli olarak yaklaşım sayılarına yer verildiği görülmüştür.

s-sayılarının Banach uzaylarındaki aksiyomatik teorisi ve incelenmesine ilk olarak A.Pietsch' in (Pietsch, A., 1974) makalesinde ve yazarın (Pietsch, A., 1980) ile (Pietsch, A., 1987) kitaplarında kapsamlı ve sistematik olarak yer verildiği anlaşılmıştır.

Tarihsel süreç içerisinde konu hakkında birçok bilimsel çalışmanın yapıldığı; dizilerin ve fonksiyonların Hilbert uzayında bazı operatörlerin s-sayılarının hesaplanmasına kaynak oluşturduğu tespit edilmiştir. Yapılan kapsamlı literatür taramasında özellikle 1980'li yıllardan sonra yapılan bilimsel çalışmalarda Banach uzaylarındaki lineer sınırlı operatörlerin s-sayıları, pseudo-s-sayıları, quasi-s-sayıları, yaklaşım sayıları, Gelfand sayıları, Kolmogorov sayıları, entropi sayıları vs. ile özdeğeri arasındaki bağlantının araştırıldığı; Hilbert uzaylarındaki meşhur Weyl eşitsizliğinin benzerlerinin Banach uzaylarında, yeni tanımlanan s-sayılar için genellemesi bu alanda çalışma yapan bilim insanlarının ortak çalışma alanları olmuştur. ((Pajor, A. ve Tomczak-Jaegermann, N., 1989), (Hinrichs, A., 2002)).

Bütün bu bilgiler değerlendirildiğinde Banach uzaylar da tanımlı her bir operatör için; yaklaşım sayıları, Kolmogorov sayıları, Gelfand sayıları gibi bir s-sayı dizisi tanımlanır.

Sürekli gelişen literatürde yapılan çalışmalarda, çok noktalı diferensiyel operatörler teorisinin birçok problemleri, katıhal cisim fiziğinin birçok problemlerinde araştırılan sorular ancak Hilbert veya Banach uzaylarının direkt toplamı üzerinde kolay çözümlenebileceği sonucuna varılmıştır. ((Kochubei, A.N., 1979), (Barramov, E., Öztürk Mert, R. ve Ismailov, Z.I., 2012)). Bu bağlamda alana katkı sağlayabilecek Banach uzaylarının direkt toplamı üzerinde tanımlanan direkt toplam operatörünün bazı s-sayı fonksiyonları ile koordinat operatörlerinin aynı tipteki s-sayı fonksiyonları arasındaki bağıntılar üzerine araştırmalar yapılmıştır. ((Ismailov, Z.I., Cona, L., Otkun Çevik, E., Güler, B.O., 2014), (Ismailov, Z.I., Cona, L. ve Otkun Çevik, E., 2015), (İpek Al, P. 2020.))

1.2. Temel Kavramlar

Bu kısımda çalışmanın konusu dahilinde yer alan önemli kavram ve sonuçlara verildi.

Tanım 1.2.1. (Metrik Uzay, (Rynne, B.P. ve Youngson, M.A., 2008)) : $X \neq \emptyset$ ve

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow d(x, y)$$

bir fonksiyon olsun. Eğer d fonksiyonu $\forall x, y, z \in X$ için

- (i) $d(x, y) \geq 0$;
- (ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (özdeşlik aksiyomu) ;
- (iii) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetriklik aksiyomu) ;
- (iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (üçgen eşitsizliği) ;

özelliklerini sağlıyorsa d fonksiyonuna X üzerinde bir uzaklık fonksiyonu veya bir metrik, bu durumda (X, d) ikilisine de metrik uzay adı verilir. Yukarıda verilen (i)-(iv) özelliklerine ise metrik aksiyomları denir.

Örnek 1.2.1. (Bayraktar, M., 2006) : $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ olarak tanımlanan d fonksiyonu bir metriktir. Gösteriniz.

Çözüm: Öncelikle $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) < +\infty$ olduğu gösterilsin.
 $\forall x, y \in X$ için

$$d(x, y) = |x - y| \leq |x + y| \leq |x| + |y| < +\infty$$

$\forall x, y, z \in X$ için

- (i) $d(x, y) \geq 0$
- (ii) $d(x, y) = |x - y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y,$
- (iii) $d(x, y) = |x - y| = |-(y - x)| = |-1||y - x| = d(y, x),$
- (iv) $d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y|$
 $\leq |x - z| + |z - y|$
 $= d(x, z) + d(z, y).$

dir. O halde $(\mathbb{R}, d)$ bir metrik uzaydır. Bu metriğe $\mathbb{R}$ nin alışılmış metriği veya mutlak değer metriği denir.

Örnek 1.2.2. (Kreyszig, E., 1978): $X \neq \emptyset$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & , \quad x = y \\ 1 & , \quad x \neq y \end{cases}$$

ile tanımlanan d fonksiyonu X üzerinde bir metriktir.

Çözüm: d nin tanımından (i),(ii) ve (iii) açıktır. (iv) için x, y ve $z \in X$ olsun.

Eğer $x = y$ ise $d(x, y) = 0$ olacağından

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Eğer $x \neq y$ ise $d(x, y) = 1$. Fakat $x = y = z$ olamayacağından

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Bu metriğe diskret ya da ayrık metrik denir.

Tanım 1.2.2. (Bayraktar, M., 2006) : (X, d) bir metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $r > 0$ bir reel sayı olsun.

$$B_r(x_0) = B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\} \text{ (açık yuvar)}$$

$$B_r[x_0] = B[x_0, r] = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\} \text{ (kapalı yuvar)}$$

$$S(x_0) = S(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) = r\} \text{ (yuvar yüzeyi)}$$

olarak tanımlanır. Bu üç durum da her birinde x_0 noktasına merkez, r ye ise yarıçap denir.

Örnek 1.2.3. (Bayraktar, M., 2006): (X, d) ayrık (diskret) metrik uzay ve $x \in X$ olsun. $B(x, r)$ bulunuz.

Çözüm: $\forall x, y \in X$ için

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

ayrık (diskret) metriğin tanımından

$$r > 1 \text{ için } B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\} = X$$

$$r \leq 1 \text{ için } B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\} = \{y\}$$

olup

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\} = \begin{cases} \{y\}, & r \leq 1 \\ X, & r > 1 \end{cases}$$

dir.

Tanım 1.2.3. (Lineer Uzay(Vektör Uzayı), (Bayraktar, M., 2006): $X \neq \emptyset$ ve $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) bir cisim olsun.

$$+ : X \times X \rightarrow X, \quad (x, y) \rightarrow x + y,$$

$$\cdot : \mathbb{F} \times X \rightarrow X, \quad (\alpha, x) \rightarrow \alpha x,$$

dönüşümleri ile toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayalım. Her $x, y, z \in X$ ve her $\alpha, \gamma \in \mathbb{F}$ için aşağıdaki koşullar sağlansın:

1. $x + y = y + x$;
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$;
3. $\forall x \in X$ için $x + 0 = 0$ eşitliğini sağlayan bir tek $0 \in X$ vardır ;
4. $\forall x \in X$ için $x + (-x) = 0$ eşitliğini sağlayan bir tek $-x \in X$ vardır ;
5. $\forall x \in X$ için $1x = x$;
6. $(\alpha\gamma)x = \alpha(\gamma x)$;
7. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;
8. $(\alpha + \gamma)x = \alpha x + \gamma x$.

Bu durumda X e $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir lineer uzay (vektör uzayı) adı verilir. $\mathbb{F}$ in elemanlarına skaler X in elemanlarına ise vektör adı verilir. $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ alınırsa X e reel vektör uzayı ve $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ alınırsa X e kompleks vektör uzayı adı verilir.

Örnek 1.2.4. (Rynne, B.P. ve Youngson, M.A., 2008): S bir küme ve X , $\mathbb{F}(\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C})$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Bu takdirde $F(S, X) := \{f \mid f: S \rightarrow X \text{ bir fonksiyon}\}$ olmak üzere F ailesi

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad f, g \in F(S, X),$$

$$(\beta f)(x) := \beta f(x), \quad \beta \in \mathbb{F}, \quad f \in F(S, X),$$

işlemleri altında bir lineer uzaydır.

Tanım 1.2.4. (Lineer Alt uzay, (Rynne, B.P. ve Youngson, M.A., 2008)): X bir lineer uzay ve $Y \subset X, Y \neq \emptyset$ olsun. Eğer Y kümesi X lineer uzayı üzerinde tanımlanan cebirsel işlemler altında kendi başına bir lineer uzay oluşturuyorsa Y ye, X de bir lineer alt uzay denir.

Tanım 1.2.5. (Normlu Lineer Uzay, Bayraktar, M., 2006): X , $\mathbb{F}$ cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun.

Eğer $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow \|x\|$ dönüşümü her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{F}$ için

- (i) $\|x\| \geq 0$;
- (ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;
- (iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;
- (iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği) ;

özelliklerini sağlıyorsa $\|\cdot\|$ dönüşümüne X lineer uzayı üzerinde bir norm ve bu durumda $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu lineer uzay veya normlu uzay adı verilir. Yukarıda verilen (i)-(iv) özelliklerine ise norm aksiyomları adı verilir.

Örnek 1.2.5. (Bayraktar, M., 2006): Eğer X normlu uzay ise

$$\begin{aligned} d: X \times X &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\rightarrow d(x, y) = \|x - y\| \end{aligned}$$

şeklinde tanımlarsa bu fonksiyonun bir metriktir.

Çözüm: $\forall x, y, z \in X$ için

- (i) $\|x - y\| \geq 0$ olduğundan $d(x, y) \geq 0$ dır.
- (ii) $d(x, y) = \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$
- (iii) $d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1| \|y - x\| = d(y, x)$
- (iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ eşitsizliği sağlanır mı?

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \|x - z\| \\ &= \|x - y + y - z\| \\ &\leq \|x - y\| + \|y - z\| \\ d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

olup d bir metrik uzaydır. Bu yolla elde edilen d metriğine $\|\cdot\|$ normunun indirgediği (doğurduğu, ürettiği) metrik denir.

Tanım 1.2.6. (Yakınsak Dizi, (Rynne, B.P. ve Youngson, M.A., 2008)): $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzay, $(x_n) \subset X$ bir dizi olsun. Eğer $x \in X$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_X = 0$ ise, $(x_n) \subset X$ dizisi $x \in X$ elemanına $\|\cdot\|_X$ normuna göre yakınsıyor denir. $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|_X} x$ veya $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ notasyonlarından biriyle gösterilir.

Örnek 1.2.6. (Rynne, B.P. ve Youngson, M.A., 2008): $(f_n) \subset C([0,1], \mathbb{R})$ dizisi her $t \in [0,1]$ için

$$f_n(t) = t^n, \quad n \geq 1$$

şeklinde tanımlanıyor. (f_n) dizisi $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$, $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$, $f \in C([0,1], \mathbb{R})$ normlu uzayında $f(t) = 0$ noktasına yakınsaktır. Gösteriniz.

Çözüm: $(f_n) \subset C([0,1], \mathbb{R})$ dizisi ve her $t \in [0,1]$ için

$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^1 |f_n(t) - f(t)| dt = \int_0^1 (t^n - 0) dt = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(C, \|\cdot\|_1)} 0$$

olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_1 = 0.$$

Bu ise $f_n(t) = t^n$, $n \geq 1$ dizisinin $\|\cdot\|_1$ normuna göre $f(t) = 0$ noktasına yakınsadığını gösterir.

Tanım 1.2.7. (Cauchy Dizisi, (Rynne, B.P. ve Youngson, M.A., 2008)): $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu bir uzay olsun.

$(x_n) \subset X$ dizisi bir Cauchy dizisidir $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}: \forall m, n > n_\varepsilon$ için $\|x_n - x_m\|_X < \varepsilon$.

Örnek 1.2.7. (Rynne, B.P. ve Youngson, M.A., 2008): $(f_n) \subset C([0,1], \mathbb{R})$ dizisi her $t \in [0,1]$ için $f_n(t) = t^n$ şeklinde tanımlanıyor. (f_n) dizisi $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$, $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$, $f \in C([0,1], \mathbb{R})$ normlu uzayında bir Cauchy dizisi olup $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|: t \in [0,1]\}$, $f \in C([0,1], \mathbb{R})$ normlu uzayında bir Cauchy dizisi değildir. Gösteriniz.

Çözüm: İlk olarak (f_n) dizisinin $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ normlu uzayında Cauchy dizisi olduğu gösterilsin. $n, m \in \mathbb{N}$ ve $n > m$ olsun. Şu halde $n > m$ olduğu için

$$\int_0^1 |t^n - t^m| dt = \int_0^1 (t^m - t^n) dt = \frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{m}$$

olduğu elde edilir. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $n_\varepsilon := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ alırsak her $m, n > n_\varepsilon$ için $\|f_n - f_m\|_1 < \frac{1}{m} < \varepsilon$ olduğundan $\|f_n - f_m\|_1 < \varepsilon$ olduğu bilinir. Öyleyse (f_n) dizisi $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ normlu uzayında bir Cauchy dizisidir.

Şimdi (f_n) dizisinin $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ normlu uzayında bir Cauchy dizisi olmadığı gösterilsin. Aksine (f_n) dizisinin $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ normlu uzayında bir Cauchy dizisi olduğu varsayalım. $n, m \in \mathbb{N}$ ve $n > m$ olsun. Bu halde $n > m$ olduğu için

$$\|f_n - f_m\|_\infty = \sup\{|t^n - t^m|: 0 \leq t \leq 1\} = \sup\{t^m - t^n: 0 \leq t \leq 1\}$$

eşitliği elde edilir. Kolay hesaplamalar sonucu

$$\sup\{t^m - t^n: 0 \leq t \leq 1\} = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n-m}} \left(1 - \frac{m}{n}\right)$$

eşitliği bulunur. Buradan

$$\|f_n - f_m\|_\infty = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n-m}} \left(1 - \frac{m}{n}\right)$$

eşitliğine ulaşılır. Burada $m = k \in \mathbb{N}$ ve $n = 2k \in \mathbb{N}$ alınırsa

$$\|f_n - f_m\|_\infty = \left(\frac{k}{2k}\right)^{\frac{k}{2k-k}} \left(1 - \frac{k}{2k}\right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

olur ki bu durumda $\varepsilon := \frac{1}{8}$ için $\frac{1}{4} < \frac{1}{8}$ eşitsizliğine ulaşılır. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla (f_n) dizisi $(C([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ normlu uzayında bir Cauchy dizisi değildir.

Tanım 1.2.8. (Banach Uzay (Rynne, B.P. ve Youngson, M.A., 2008)): Eğer bir normlu uzayda her Cauchy dizisi bu normlu uzayda yakınsak ise bu uzaya tam normlu uzay veya Banach uzay denir.

Tanım 1.2.9. ($l_p = l_p(\mathbb{F})$ Uzayı (Rynne, B.P. ve Youngson, M.A., 2008)) : $p > 0$ için

$$l_p = \left\{ x = (x_n) \in \mathbb{F}^\infty : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$$

dizi uzayında

$$(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right) = \begin{cases} p = 1 & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \text{ ıraksak} \\ p = 2 & \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n}\right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Burada

- $p \geq 1$ için,

$$d: l_p \times l_p \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(x, y) = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p)^{\frac{1}{p}};$$

- $0 < p < 1$ için,

$$d: l_p \times l_p \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p;$$

olup p nin durumuna göre her iki durumda da (l_p, d) metrik uzaydır.

Tanım 1.2.10. (l_1, l_2 Uzayları (Rynne, B.P. ve Youngson, M.A., 2008)): l_p uzayında $p = 1$ ve $p = 2$ için özel halleridir.

$$l_1 = \left\{ x = (x_n) \in \mathbb{F}^\infty : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}$$

olup $x, y \in l_1$ için

$$d: l_1 \times l_1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|,$$

şeklinde tanımlı d dönüşümü bir metrik olup (l_1, d) aynı zamanda bir Banach uzaydır.

$$l_2 = \left\{ x = (x_n) \in \mathbb{F}^\infty : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

olup $x, y \in l_2$ için

$$d: l_2 \times l_2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(x, y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

şeklinde tanımlı d dönüşümü bir metrik olup (l_2, d) de bir Banach uzaydır.

Örnek 1.2.8. (Kreyszig, E., 1978): $l_p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < \infty$ lineer uzayı

$$\|x\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad x = (x_n) \in l_p(\mathbb{N})$$

normuna göre bir Banach uzayıdır.

Örnek 1.2.9. $(C([-1,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ lineer uzayı $\|\cdot\|_1: C([-1,1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $f \in C([-1,1], \mathbb{R})$

$$\|f\|_1 := \int_{-1}^1 |f(x)| dx$$

normuna göre bir Banach uzay değildir.

Tanım 1.2.11. (İç Çarpım Uzayı, (Rynne, B.P. ve Youngson, M.A., 2008)): $X, \mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer $(\cdot, \cdot): X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ dönüşümü

- (i) $\forall x \in X$ için $(x, x) \geq 0$ ve $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;
- (ii) $\forall x, y \in X$ için $(x, y) = \overline{(y, x)}$ (kompleks eşlenik) ;
- (iii) $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{F}$ için $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$;
- (iv) $\forall x, y, z \in X$ için $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;

özelliklerini sağlıyorsa $(\cdot, \cdot)$ dönüşümüne X vektör uzayı üzerinde bir kompleks iç çarpım ve bu durumda $(X, (\cdot, \cdot))$ ikilisine de bir kompleks iç çarpım uzayı (veya ön Hilbert uzayı) adı verilir.

Eğer yukarıda tanımlanmış olan dönüşümde $\mathbb{C}$, kompleks sayılar cismi yerine $\mathbb{R}$, reel sayılar cismi alınırsa $(X, (\cdot, \cdot))$ ikilisine bir reel iç çarpım uzayı adı verilir. Bu durumda her $x, y \in X$ için $(x, y) = (y, x)$ eşitliği doğrudur.

Ayrıca her $x, y \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{F}(\mathbb{C}$ veya $\mathbb{R})$ için

- (1) $(\alpha x + \beta y, z) = (\alpha x, z) + (\beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$;
- (2) $(x, \alpha y) = \overline{(\alpha y, x)} = \overline{\alpha(y, x)} = \bar{\alpha} \overline{(y, x)} = \bar{\alpha}(x, y)$;
- (3) $(x, \alpha y + \beta z) = \overline{(\alpha y + \beta z, x)} = \overline{\alpha(y, x) + \beta(z, x)} = \bar{\alpha} \overline{(y, x)} + \bar{\beta} \overline{(z, x)}$
 $= \bar{\alpha}(x, y) + \bar{\beta}(x, z)$

bağıntılarının doğruluğu elde edilir.

Örnek 1.2.10. (Kreyszig, E., 1978): $\mathbb{F}(\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C})$ cisim olmak üzere $(C[a, b], \mathbb{F})$ sürekli fonksiyonların kümesi

$$\begin{aligned} +: C[a, b] \times C[a, b] &\rightarrow C[a, b], & (f, g) &\rightarrow f + g, \\ \cdot: \mathbb{F} \times C[a, b] &\rightarrow C[a, b], & (\alpha, f) &\rightarrow \alpha f, \end{aligned}$$

olarak tanımlanan cebirsel işlemlere göre bir lineer uzaydır.

Ayrıca bu lineer uzay üzerinde

$$(f, g)_{C[a,b]} = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm ise bir iç çarpım fonksiyonudur.

Tanım 1.2.12. (İç Çarpımın Ürettiği Norm, (Rynne, B.P. ve Youngson, M.A., 2008)):

$(X, (\cdot, \cdot))$ bir iç çarpım uzayı ve $x \in X$ ise

$$\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon X üzerinde bir norm olup bu norma iç çarpımın ürettiği norm denir.

Tanım 1.2.13. (Hilbert Uzayı, (Rynne, B.P. ve Youngson, M.A., 2008)):

Eğer bir iç çarpım uzayı iç çarpımın ürettiği norma göre tam ise bu iç çarpım uzayına Hilbert uzayı adı verilir.

Örnek 1.2.11.(Rynne, B.P. ve Youngson, M.A., 2008): $(\cdot, \cdot) = l_2 \times l_2 \rightarrow \mathbb{F} (= \mathbb{R} \text{ veya } \mathbb{C}), (x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$ dönüşümü l_2 üzerinde bir iç çarpım uzayıdır ve bu iç çarpıma göre l_2 bir Hilbert uzayıdır.

Tanım 1.2.14. (Kreyszig, E., 1978): X ve Y iki normlu lineer uzay olsun. $S: D(S) \subset X \rightarrow Y$ olan her dönüşüme bir operatör adı verilir. Bu durumda

$D(S) := \{x \in X: Sx \text{ tanımlı}\} \subset X$ kümesine S operatörünün tanım kümesi,

$R(S) := SD(S) = \{y = Sx: x \in D(S)\} \subset Y$ kümesine ise S operatörünün değer kümesi,

$Ker S := \{x \in X: Sx = 0\} \subset X$ kümesine de S operatörünün sıfır kümesi veya çekirdeği denir.

Tanım 1.2.15. (Pietsch, A., 1974): X ve Y iki Banach uzay ve $S: D(S) \subset X \rightarrow Y$ bir operatör olsun. S operatörünün görüntü kümesinin boyutuna S operatörünün boyutu denir ve $rank(S)$ veya $r(S)$ ile gösterilir. Yani $r(S) = rank S = \dim(Im(S))$.

Tanım 1.2.16. (Lineer Operatör, (Kreyszig, E., 1978)): X ve Y aynı bir $\mathbb{F}$ cismi üzerinde iki lineer uzay, $D(S)$, X de bir lineer alt uzay ve $S: D(S) \subset X \rightarrow Y$ bir operatör olsun. Eğer her $x, y \in D(S)$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ için

$$S(\alpha x + \beta y) = \alpha S(x) + \beta S(y)$$

ise, S operatörüne bir lineer operatör denir.

Örnek 1.2.12. (Rynne, B.P. ve Youngson, M.A., 2008): $S: C_{\mathbb{R}}[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $S(f) = \int_0^1 f(x) dx$ şeklinde tanımlı dönüşüm lineerdir. Her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in C_{\mathbb{R}}[0,1]$ için

$$\begin{aligned} S(\alpha f + \beta g) &= \int_0^1 (\alpha f + \beta g)(x) dx \\ &= \int_0^1 [(\alpha f)(x) + (\beta g)(x)] dx \\ &= \int_0^1 (\alpha f)(x) dx + \int_0^1 (\beta g)(x) dx \\ &= \alpha \int_0^1 f(x) dx + \beta \int_0^1 g(x) dx \\ &= \alpha S(f) + \beta S(g), \end{aligned}$$

olduğundan S lineerdir.

Örnek 1.2.13. $S: C_{\mathbb{R}}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $Sf(t) = \max\{f(t): t \in [a, b]\}$ şeklinde tanımlanan operatör lineer değildir. Gösteriniz.

Çözüm:

$$f: [1,5] \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = t \text{ ve } g: [1,5] \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = -t$$

şeklinde tanımlanacak olursa $f, g \in C_{\mathbb{R}}[1,5]$ için

$$S(f + g)(t) = \max\{(f + g)(t): t \in [1,5]\} = \max\{f(t) + g(t): t \in [1,5]\} = 0$$

$$Sf(t) + Sg(t) = \max\{f(t): t \in [1,5]\} + \max\{g(t): t \in [1,5]\} = 5 + (-1) = 4$$

olup

$$S(f + g)(t) \neq Sf(t) + Sg(t)$$

olduğundan S operatörü lineer değildir.

Tanım 1.2.17. (Birim Operatör, (Kreyszig, E., 1978)): $S: X \rightarrow X$ operatörü verilsin. $\forall x \in X$ için $S(x) = x$ ise S operatörüne özdeşlik veya birim operatör adı verilir. I veya I_X şeklinde gösterilir. (Bu tez çalışmasında aksi bir durum belirtilmedikçe birim operatör kısalık adına sadece I ile gösterilecektir.)

Tanım 1.2.18. (Süreklilik Operatör, (Kreyszig, E., 1978)): X ve Y iki normlu uzay, $S: X \rightarrow Y$ bir operatör ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $\|x - x_0\| < \delta$ koşulunu sağlayan her $x \in X$ için $\|Sx - Sx_0\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ sayısı bulunabiliyor ise S operatörüne x_0 noktasında süreklidir denir. S operatörü her $x \in X$ noktasında sürekli ise S ye sürekli operatör denir.

Tanım 1.2.19. (Sınırlı Operatör, (Kreyszig, E., 1978)): X ve Y iki normlu uzay ve $S: X \rightarrow Y$ bir operatör olsun. Eğer her $x \in X$ için $\|Sx\|_Y \leq M\|x\|_X$ olacak şekilde sabit bir $M > 0$ sayısı varsa S operatörüne sınırlı operatör denir. X den Y ye tüm sınırlı lineer operatörlerin oluşturduğu aile $L(X, Y)$, özel olarak $X = Y$ ise bu aile $L(X)$ ile gösterilecektir.

Tanım 1.2.20. (Kompakt Operatör, (Kreyszig, E., 1978)): X ve Y iki Banach uzayı ve $S \in L(X, Y)$ olsun. Eğer X deki her sınırlı kümenin S altında görüntüsünün kapanışı Y de kompakt ise S ye kompakt operatör denir. Ayrıca tüm kompakt operatörler kümesi $\mathfrak{S}(X, Y) = \{S \in L(X, Y): S \text{ kompakttır}\}$ şeklinde gösterilecektir.

Teorem 1.2.1. (Rynne, B.P. ve Youngson, M.A., 2008) : X ve Y iki Banach uzayı ve $S \in \mathfrak{S}(X, Y)$ olsun. Bu takdirde S sınırlıdır. Yani $\mathfrak{S}(X, Y) \subset L(X, Y)$.

Tanım 1.2.21. (İteratif Kompakt Operatör, (Pietsch, A., 1987) : $S \in L(X)$ olsun. X Banach uzayının kapalı birim yuvarı U olmak üzere $\varepsilon > 0$ için bir n üstü ve $u_1, \dots, u_k \in X$ elemanları vardır öyle ki eğer S operatörü

$$S^n(U) \subseteq \bigcup_{h=1}^k \{u_h + \varepsilon U\},$$

şartını sağlıyorsa S ye iteratif kompakt operatör denir.

Tanım 1.2.22. (Riesz Operatörü, (Pietsch, A., 1987) : $S \in L(X)$ olsun. X Banach uzayının kapalı birim yuvarı U olmak üzere $\varepsilon > 0$ için bir n üstü ve $u_1, \dots, u_k \in X$ elemanları vardır öyle ki eğer S operatörü

$$S^n(U) \subseteq \bigcup_{h=1}^k \{u_h + \varepsilon^n U\},$$

şartı sağlanıyorsa S ye Riesz operatörü denir.

Önerme 1.2.1. (Pietsch, A., 1987): Bir $S \in L(X)$ Riesz operatörüdür ancak ve ancak her $\xi \in \mathbb{C}$ için ξS iteratif kompakt operatördür.

Önerme 1.2.2. (Pietsch, A., 1987): Her kompakt operatör bir Riesz operatörüdür.

Tanım 1.2.23. (Adjoint Operatör, (Rynne, B.P. ve Youngson, M.A., 2008)): H ve K kompleks Hilbert uzayları ve $S \in L(H, K)$ olsun. Her $x \in H$ ve her $y \in K$ için

$$(Sx, y)_K = (x, S^*y)_H$$

olacak şekilde bir tek $S^* \in L(K, H)$ operatörü mevcuttur.

Tanım 1.2.24. (Selfadjoint Operatör, (Rynne, B.P. ve Youngson, M.A., 2008)): H kompleks Hilbert uzayı ve $S \in L(H)$ olsun. Eğer

$$S^* = S$$

ise bu takdirde S operatörüne selfadjoint(özeşlenik) operatör denir.

Tanım 1.2.25. (Pozitif Operatör], (Rynne, B.P. ve Youngson, M.A., 2008)): H bir Hilbert uzayı ve $S: D(S) \subset H \rightarrow H$ bir lineer selfadjoint operatör olsun. Eğer her $x \in D(S)$ için $(Sx, x)_H \geq 0$ ise S operatörüne pozitif operatör denir ve $S \geq 0$ sembolü ile gösterilir. Eğer S pozitif operatörü için $T^2 = S$ olacak şekilde bir T pozitif lineer operatörü varsa, T operatörüne S nın karekökü denir ve $T = \sqrt{S}$ veya $T = S^{\frac{1}{2}}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.2.26. (Operatör Normu (Soykan, Y., 2008)): X ve Y normlu uzaylar olsun. $\|\cdot\|: L(X, Y) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\|S\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Sx\|$$

ile tanımlı ise $\|\cdot\|$, $L(X, Y)$ üzerinde bir norm tanımlar ve norma S nin operatör normu denir.

Tanım 1.2.27. (Dual Uzayı (Soykan, Y., 2008)): X normlu bir uzay olsun. X üzerinde ki tüm sınırlı lineer fonksiyonlardan oluşan küme

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |f(x)|$$

ile tanımlanan norma sahip olan, normlu bir uzay oluşturur. Bu uzaya, X in dual uzayı adı verilir ve X' sembolüyle gösterilir.

Tanım 1.2.28. (Bidual Uzay (Soykan, Y., 2008)): X' nün dual Banach uzayına bidual Banach uzay denir ve X'' ile gösterilir.

Teorem 1.2.2. (Soykan, Y., 2008) X ve Y normlu uzaylar ve $S \in L(X, Y)$ olsun.

$$S'(f)(x) = f(Sx), \quad x \in X, \quad f \in Y'$$

olacak şekilde bir tek $S' \in L(Y', X')$ operatörü vardır.

Tanım 1.2.29. (Dual Operatör (Soykan, Y., 2008)) : X ve Y normlu uzaylar ve $S \in L(X, Y)$ olsun. Teorem 1.2.2 içinde oluşturulan $S' \in L(Y', X')$ operatörüne S operatörünün duali denir.

2. s-SAYILARININ AKSİYOMATİK ÖZELLİKLERİ

Yapılan çalışmalar incelendiğinde s-sayılarının I.Z Gochberg ve M.G.Krejn'in kitaplarında (Schmidt, E., 1907), Hilbert uzaylarının spektral teorisinde önemli bir kaynak oluşturduğu görülmektedir. Sonsuz boyutlu bir Hilbert uzayında kendisine tanımlı kompakt bir S operatörünün s-sayısı olan $s_n(S)$, S operatörünün n .özdeğeri olarak tanımlanır.

Öte yandan s-sayıları operatörlerin $L(H, H)$ halkalarındaki ideallerin tanımlanmasında kullanılabilir. $S_\infty(H, H)$ kompakt operatörlerin kapalı ideali olsun. Bu takdirde J.V Neumann ve R.Schatten tarafından

$$S_p(H, H) = \left\{ S \in S_\infty(H, H) : \sum_{n=1}^{\infty} s_n(S)^p < \infty \right\}, \quad 0 < p < \infty,$$

gibi idealler ispatlandı. $p = 1$ için biz operatörlerin bir iz sınıfını elde ederiz. $p = 2$ için (e_i) ve (f_k) keyfi tam ortonormal sistemleri için

$$\sum_{i,k} |(Se_i, f_k)|^2 < \infty$$

eşitsizliği ile Hilbert-Schmidt' in bir ideali $S_2(H, H)$, karakterizasyonunu elde edilir.

İlk olarak Hilbert uzaylarında ki operatörlerin s-sayılarını karakterize eden teoremi verilsin.

Teorem 2.1. (Pietsch, A., 1974).: $S \in L(H, H)$ ve $|S| = \sqrt{S^*S}$ pozitif operatörünün spektral ölçümü $P(\cdot)$ olsun. Bu takdirde her s-sayı fonksiyonu için

$$s_n(S) = \inf_n \{ \sigma \geq 0 : \dim(P(\sigma, \infty)) < n \}$$

dir.

Uyarı 2.1. Hilbert uzaylarında bütün operatörler sınıfı üzerinde yalnız bir tek s-sayı fonksiyonu vardır. (Pietsch, A., 1980, König, H., 1986).

Banach uzaylarındaki operatörler için Hilbert uzayı olması durumundaki s-sayıları ile örtüşen sayı dizilerinin tanımlanmasında birkaç olasılık vardır. 1996 da Moscow Kongresinde B.S Mitragin ve A.Pelczynski (Aksoy, Asuman G. ve Lewicki, G., 1997) bu sayılar hakkında bir rapor verildi. Neticede s-sayılarının aksiyomatik teorisi A. Pietsch in tanımladığı manada kullanılacaktır.

Tanım 2.1. (Pietsch, A., 1980b) : Bir Banach uzaydan diğer bir Banach uzayına lineer sınırlı operatörlerin L uzayından negatif olmayan sayıların dizileri kümesine

$$s: L \rightarrow \{ s_n(S): s_n(S) \geq 0, n \geq 1 \}$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa, “s-sayısı fonksiyonu” veya “s-fonksiyonu” denir.

1. $S \in L$ için $\|S\| = s_1(S) \geq s_2(S) \geq \dots \geq 0$
2. $S, T \in L$ için $s_n(S + T) \leq s_n(S) + \|T\|$
3. $T \in L(E_0, E)$, $S \in L(E, F)$, $R \in L(F, F_0)$ için $s_n(RST) \leq \|R\|s_n(S)\|T\|$
4. Eğer $\text{rank}(S) < n$ ise $s_n(S) = 0$
5. Eğer $\dim(E) \geq n$ ise $s_n(I_E) = 1$

Burada $s_n(S)$ sayısına S operatörünün ***n. s-sayısı*** adı verilir.

Teorem 2.2. (Pietsch, A., 1974): $S, T \in L(E, F)$ için

$$|s_n(S) - s_n(T)| \leq \|S - T\|$$

olduğundan s-sayıları sürekli fonksiyonlardır.

İspat: s-sayılarının (2) özelliğinden ;

$$s_n(S) = s_n(S + T - T) \leq s_n(T) + \|S - T\| \Rightarrow s_n(S) - s_n(T) \leq \|S - T\|$$

$$s_n(T) = s_n(T + S - S) \leq s_n(S) + \|S - T\| \Rightarrow s_n(T) - s_n(S) \leq \|S - T\|$$

olup buradan

$$|s_n(S) - s_n(T)| \leq \|S - T\|$$

dir.

Teorem 2.3. (Pietsch, A., 1974): Eğer $s_n(S) = 0$ ise bu takdirde $\text{rank}(S) < n$ dir.

İspat: $T \in L(E, E_0)$, $S \in L(E_0, F)$, $R \in L(F, E)$ için (3) den

$$s_n(RST) \leq \|R\|s_n(S)\|T\|$$

olup

$$s_n(RST) = 0$$

dır. Ayrıca $s_n(RST) = s_n(I_E)$ olup $s_n(I_E) = 0$ olacağından ((5) de $p \Rightarrow q \cong q' \Rightarrow p'$ önermesi göz önüne alınırsa) $\dim(I_E) < n$ dir. O halde $\text{rank}(RST) < n$ dir.

İleriki kısımlarda bazı önemli ispatlar için aşağıdaki lemmalar kullanılmaktadır.

Lemma 2.1. (Lokal refleksiflik prensibi , Lindenstrauss, J. ve Rosenthal, H.P., 1969) : M, E'' nin sonlu boyutlu bir alt uzayı olsun. Eğer $\varepsilon > 0$ ise bu takdirde J_E, E'' içine tanımlı E nin kanonikal dönüşümü olmak üzere $\forall x \in E \cap J_E^{-1}(M)$ için

$$\|R\| \leq 1 + \varepsilon \text{ ve } RJ_E x = x$$

olacak şekilde $R \in L(M, E)$ vardır.

Lemma 2.2. (Kato, T., 1966) : M ve N , $\dim(M) > \dim(N)$ olacak şekilde E nin alt uzayları olsun. Bu takdirde $x \in M$ vardır öyle ki, $\|Q_N^E x\| = \|x\| = 1$. Burada Q_N^E , E den E/N ye kanonikal dönüşüm.

Lemma 2.3. (Kadec, M.I. ve Snobar, M.G., 1971): M , $\dim(M) = n$ olmak üzere, E nin bir alt uzayı olsun. Bu takdirde bir $P \in L(E, E)$ projeksiyon vardır öyle ki,

$$M = P(E) \text{ ve } \|P\| \leq \sqrt{n}$$

dir.

2.1. Yaklaşım ve İzomorfizm Sayıları

Bu kısımda s-sayı fonksiyonlarının iki önemli örneği verilsin.

Tanım 2.1.1. (Pietsch, A., 1980b): $\forall S \in L(E, F)$ operatörleri için yaklaşım sayıları

$$a_n(S) = \inf\{\|S - A\| : A \in L(E, F), \text{rank}(A) < n\}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.1.1. (Pietsch, A., 1974.):

$$app : S \rightarrow (a_n(S))$$

dönüşümü bir s-sayı fonksiyonudur.

İspat: s-sayılarının (3) ve (4). özellikleri aşıkard olduğundan biz diğer şartları ispatlayalım.

(1) $S \in L(E, F)$ olsun.

$$a_1(S) = \inf\{\|S - A\| : A \in L(E, F), \text{rank}(A) < 1\} = \|S\|$$

$$a_2(S) = \inf\{\|S - A\| : A \in L(E, F), \text{rank}(A) < 2\}$$

$$= \inf\{\|S\|, \inf\{\|S - A\| : A \in L(E, F), \text{rank}(A) = 1\}\}$$

$$= \inf\{\|S - A\| : A \in L(E, F), \text{rank}(A) = 1\}$$

$$\leq a_1(S)$$

Benzer şekilde incelemeler devam ederse;

$$\|S\| = a_1(S) \geq a_2(S) \geq a_3(S) \dots \geq 0$$

olduğu görülür.

(2) $S, T \in L(E, F)$ olsun.

$$\begin{aligned} a_n(S + T) &= \inf\{\|S + T - A\| : A \in L(E, F), \text{rank}(A) < n\} \\ &\leq \inf\{\|S - A\| : A \in L(E, F), \text{rank}(A) < n\} \\ &\quad + \inf\{\|T\| : A \in L(E, F), \text{rank}(A) < n\} \\ &= a_n(S) + \|T\| \end{aligned}$$

(5) $a_n(I_E) < 1$ olduğu kabul edilsin. Bu takdirde yaklaşım sayılarının tanımından $\|I_E - A\| < 1$ ve $\text{rank}(A) < n$ olacak şekilde $A \in L(E, E)$ vardır. Sonuç olarak, Neumann serisi vasıtasıyla $A = I_E - (I_E - A)$ yani A terslenebilir ve böylece $\text{rank}(A) \geq n$ dir. Bu ise bir çelişkidir. O halde kabul yanlış olup s-sayılarının (5) şartı sağlanır.

Teorem 2.1.2. (Pietsch, A., 1980b, Pietsch, A., 1974.): Yaklaşım sayıları en geniş s-sayılarıdır.

İspat: $S \in L(E, F)$ olsun. Bu takdirde her bir s-sayısı fonksiyonu ve $\text{rank}(A) < n$ ile verilen $A \in L(E, F)$ için

$$\begin{aligned} s_n(S) &= s_n(S + A - A) \\ &\leq s_n(A) + \|S - A\| = \|S - A\| \end{aligned}$$

olup

$$s_n(S) \leq \|S - A\|$$

dır. Böylece $\forall S \in L$ için

$$s_n(S) \leq a_n(S)$$

bulunur. (Yukarıdaki eşitsizlikte her iki tarafın infimumu alınır sağ taraf yaklaşım sayısını verir).

Tanım 2.1.2. (Pietsch, A., 1980b): Herhangi bir $S \in L(E, F)$ operatörü eğer $\text{rank}(S) < n$ ise bu takdirde Lemma 2.3 den $X \in L(G, E)$ ve $B \in L(F, G)$ operatörleri için bir G Banach uzayı vardır öyle ki

$$I_G = BSX \text{ ve } \dim(G) \geq n$$

dir. Bu durumda bütün olasılıkların üzerinden supremum alınır,

$$i_n(S) := \sup\{\|B\|^{-1}\|X\|^{-1}\}$$

bulunur. Bu şekilde elde edilen $i_n(S)$ e izomorfizm sayısı denir.

Teorem 2.1.3. (Pietsch, A., 1980b, Pietsch, A., 1974):

$$iso : S \rightarrow (i_n(S))$$

dönüşümü bir s-sayı fonksiyonudur.

İspat: s-sayılarının diğer özellikleri aşıkard olduğundan (2). özellik ispatlansın. Kabul edelim ki $i_n(S + T) > \|T\|$. Eğer $0 < \varepsilon < i_n(S + T) - \|T\|$ ise bu takdirde $X \in L(G, E)$ ve $B \in L(F, G)$ gibi bir Banach uzay vardır öyle ki

$$I_G = B(S + T)X, \dim(G) \geq n$$

ve

$$\|B\|^{-1}\|X\|^{-1} \geq i_n(S + T) - \varepsilon > \|T\|.$$

$\|BTX\| < 1$ olduğundan BSX operatörü

$$BSX = B(S + T)X - BTX = I_G - BTX$$

terslenebilirdir. $I_G = (I_G - BTX)^{-1}BSX$ ve $\|(I_G - BTX)^{-1}\| \leq (1 - \|BTX\|)^{-1}$ olduğundan

$$\begin{aligned} i_n(S) &\geq \|(I_G - BTX)^{-1}B\|^{-1}\|X\|^{-1} \\ &\geq (1 - \|BTX\|)\|B\|^{-1}\|X\|^{-1} \\ &\geq \|B\|^{-1}\|X\|^{-1} - \|T\| \\ &\geq i_n(S + T) - \varepsilon - \|T\| \end{aligned}$$

olduğu görülür. Sonuç olarak,

$$i_n(S + T) \leq i_n(S) + \|T\| + \varepsilon$$

bulunur.

Teorem 2.1.4. (Pietsch, A., 1980b, Pietsch, A., 1974.): İzomorfizm sayıları en küçük s-sayılarıdır.

İspat: $I_G = BSX$ ve $\dim(G) \geq n$ olacak şekilde $S \in L(E, F), X \in L(G, E)$ olsun. Bu takdirde her bir s-sayısı fonksiyonu için

$$1 = s_n(I_G) \leq \|B\|s_n(S)\|X\|$$

yazılabilir. Böylece $\forall S \in L$ için

$$i_n(S) \leq s_n(S)$$

dir.

2.2. İnjektiv s-Sayıları

Tanım 2.2.1. (Pietsch, A., 1980b, Pietsch, A., 1974.): Bir s-sayı fonksiyonu eğer M, F nin bir alt uzayı olmak üzere her $S \in L(E, M)$ için

$$s_n(J_M^F S) = s_n(S)$$

özellikli sağlıyorsa injektiv adını alır. Burada J_M^F , M den F nin içine gömme dönüşümüdür.

Başka bir ifadeyle $s_n(S)$, s-sayı fonksiyonunun injektivliği, S nin tanım kümesinin tümleyeni üzerine bağlı değildir.

Tanım 2.2.2. (Pietsch, A., 1980b, Pietsch, A., 1974.): $\forall S \in L(E, F)$ operatörü için

$$c_n(S) := \inf\{\|SJ_M^E\| : \text{codim}(M) < n\}$$

olarak tanımlanan s-sayı fonksiyonuna Gelfand sayısı adı verilir. Başka bir ifadeyle

$$c_n(S) := \inf\{\|S\|_Z : Z \subset E, \text{codim}(Z) < n\}$$

dir.

Teorem 2.2.1.

$$gel: S \rightarrow c_n(S)$$

bir injektive s-sayı fonksiyonudur.

İspat:

(1). $S \in L(E, F)$ için

$$c_1(S) = \inf\{\|S\|_M : M \subset E, \text{codim}(M) < 1\} = \|S\|$$

$$c_2(S) = \inf\{\|S\|_M : M \subset E, \text{codim}(M) < 2\}$$

$$\begin{aligned}
&= \inf\{\|S\|, \inf\{\|S\|_M: M \subset E, \text{codim}(M) = 1\}\} \\
&= \inf\{\|S\|_M: M \subset E, \text{codim}(M) = 1\}
\end{aligned}$$

olup buradan

$$\|S\| = c_1(S) \geq c_2(S)$$

bulunur. Benzer şekilde devam edilirse

$$\|S\| = c_1(S) \geq c_2(S) \geq c_3(S) \geq \dots \geq 0$$

olduğu kolayca görülür.

(2). $S, T \in L(E, F)$ için

$$\begin{aligned}
c_n(S + T) &= \inf\{\|S + T\|_M: M \subset E, \text{codim}(M) < n\} \\
&\leq \inf\{\|S\|_M + \|T\|_M: M \subset E, \text{codim}(M) < n\} \\
&\leq \inf\{\|S\|_M: M \subset E, \text{codim}(M) < n\} \\
&\quad + \inf\{\|T\|_M: M \subset E, \text{codim}(M) < n\} \\
&\leq c_n(S) + \inf\{\|T\|_M: M \subset E, \text{codim}(M) < n\} \\
&= c_n(S) + \|T\|
\end{aligned}$$

(3). $T \in L(E_0, E), S \in L(E, F), R \in L(F, F_0)$ için

$$\begin{aligned}
c_n(RST) &= \inf\{\|RST\|_M: M \subset E, \text{codim}(M) < n\} \\
&\leq \inf\{\|R\|_M \|S\|_M \|T\|_M: M \subset E, \text{codim}(M) < n\} \\
&\leq \inf\{\|R\| \|S\|_M \|T\|: M \subset E, \text{codim}(M) < n\} \\
&= \|R\| c_n(S) \|T\|
\end{aligned}$$

(4). $\text{rank}(S) < n$ olsun.

$$c_n(S) = \inf\{\|S\|_M: M \subset E, \text{codim}(M) < n\}$$

olduğu açıktır.

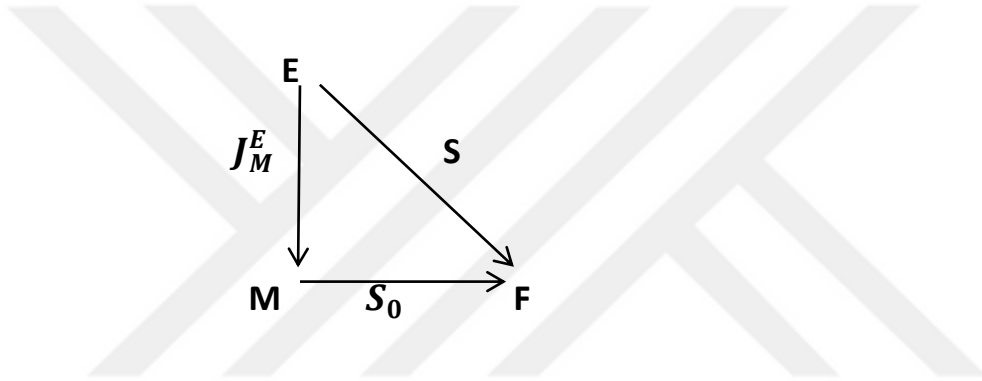
(5). $\dim(E) \geq n$ olsun.

$$c_n(I_E) = \inf\{\|I_E\|_M : M \subset E, \text{codim}(M) < n\} = 1$$

olduğu açıktır.

Yukarıdaki maddelerden Gelfand sayılarının bir s-sayı fonksiyonu olduğu görülür. Gelfand sayılarının injektivliği aşağıdaki açıklamalardan sonra ifade edilecektir.

Not 2.2.1. Eğer bir keyfi E Banach uzayının bir M alt uzayından F nin içine tanımlı her S_0 dönüşümü için $\|S\| = \|S_0\|$ olacak şekilde E den F nin içine bir S genişlemesi varsa F Banach uzayına genişleme özelliğine sahiptir denir.



Teorem 2.2.2. (Pietsch, A., 1980b, Pietsch, A., 1974.): Eğer F genişleme özelliğine sahip ise bu taktirde $\forall S \in L(E, F)$ için

$$c_n(S) = a_n(S)$$

elde edilir.

İspat: $S \in L(E, F)$ olsun. Kısım 2.1 de ki Teorem 2.1.2 den biliniyor ki $a_n(S)$ en geniş s-sayı fonksiyonu o halde

$$c_n(S) \leq a_n(S)$$

dir. Eğer $\varepsilon > 0$ için E nin bir M alt uzayını seçelim öyle ki

$$\|SJ_M^E\| \leq c_n(S) + \varepsilon \text{ ve } \text{codim}(M) < n$$

bulunur. Bu taktirde SJ_M^E nin bir $T \in L(E, F)$ genişlemesi vardır öyle ki $\|T\| = \|SJ_M^E\|$.

$A = S - T$ olarak alınsın. Dolayısıyla $\forall x \in M$ için $Ax = 0$ olduğundan $\text{rank}(A) < n$ dir. Böylece,

$$a_n(S) \leq \|S - A\| = \|T\| = \|SJ_M^E\| \leq c_n(S) + \varepsilon$$

bulunur.

Not 2.2.1. Her F Banach uzayı bir F^∞ genişleme özelliğine sahip bir Banach uzayın alt uzayıdır. J_F^∞ , F den F^∞ içine gömme dönüşümü olarak tanımlanır.

Not 2.2.2. Gelfand sayıları injektive s-sayıdır.

$$\begin{aligned} c_n(J_M^F S) &= \inf\{\|J_M^F SJ_Z^E\|: Z \subset E, \text{codim}(Z) < n\} \\ &= \inf\{\|J_M^F\| \|SJ_Z^E\|: Z \subset E, \text{codim}(Z) < n\} \\ &= \|J_M^F\| \inf\{\|SJ_Z^E\|: Z \subset E, \text{codim}(Z) < n\} \\ &= \|J_M^F\| c_n(S) \\ &= c_n(S) \end{aligned}$$

Teorem 2.2.3. (Pietsch, A., 1980b, Pietsch, A., 1974.): $\forall S \in L(E, F)$ olsun. Bu taktirde,

$$c_n(S) = a_n(J_F^\infty S)$$

dir.

İspat: Gelfand sayılarının injektivliğinden ve Teorem 2.2.2 den

$$c_n(S) = c_n(J_F^\infty S) = a_n(J_F^\infty S)$$

olduğu görülür.

Teorem 2.2.4. (Pietsch, A., 1980b, Pietsch, A., 1974): Gelfand sayıları en geniş injektiv s-sayılarıdır.

İspat: $S \in L(E, F)$ olsun. Bu taktirde her bir injektive s-sayı fonksiyonu için aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$s_n(S) = s_n(J_F^\infty S) \leq a_n(J_F^\infty S) = c_n(S)$$

dir. $S \in L(E, F)$ olsun. Bu taktirde injektivliğin modülü

$$j(S) = \sup\{\varrho \geq 0 : \|SX\| \geq \varrho\|X\|\}$$

olarak tanımlanır.

Lemma 2.2.1. (Pietsch, A., 1980b, Pietsch, A., 1974): $S, T \in L(E, F)$ olsun. Bu taktirde

$$j(S + T) \leq j(S) + \|T\|.$$

Lemma 2.2.2. (Pietsch, A., 1980b, Pietsch, A., 1974): $T \in L(E, F)$ ve $S \in L(F, G)$ olsun. Bu taktirde

$$j(ST) \leq \|S\|j(T)$$

dır. Dahası, eğer T üzerine ise bu taktirde

$$j(ST) \leq j(S)\|T\|$$

dir.

Tanım 2.2.3. (Pietsch, A., 1980b, Pietsch, A., 1974): $\forall S \in L(E, F)$ operatörü için Bernstein sayıları

$$u_n(S) := \sup\{j(SJ_M^E) : \dim(M) \geq n\}$$

olarak tanımlanır.

Uyarı 2.2.1. Yukarıda ki tanımda $\dim(M) = n$ olan tüm M alt uzayların üzerinden supremum almak yeterlidir.

Teorem 2.2.5. (Pietsch, A., 1980b, Pietsch, A., 1974):

$$bern : S \rightarrow (u_n(S))$$

bir injektive s-sayı fonksiyonudur.

İspat: s-sayılarının diğer şartları açık olup sadece (3). özelliği incelenecektir. $T \in L(E_0, E)$, $S \in L(E, F)$, $R \in L(F, F_0)$ için

$$u_n(RST) \leq \|R\|u_n(S)\|T\|$$

olduğunu gösterilsin. $0 < \varepsilon < u_n(RST)$ olsun. Bu taktirde E_0 ın

$$u_n(RST) - \varepsilon \leq j(RSJ_{M_0}^{E_0})$$

ve $\dim(M_0) \geq n$ olacak şekilde bir M_0 alt uzayı vardır. $M = T(M_0)$ içine bir dönüşüm ve T_0 da T nin M_0 a kısıtlaması olsun. Bu taktirde

$$RSJ_{M_0}^{E_0} = RSJ_M^E T_0 \text{ ve } \|T_0\| \leq \|T\|.$$

dir. Lemma 2.2.2. den

$$0 < u_n(RST) - \varepsilon \leq j(RSJ_M^E T_0) \leq \|RSJ_M^E T_0\|j(T_0)$$

olup

$$j(T_0) > 0$$

dır. Böylece T_0 bire bir ve $\dim(M) \geq n$ olduğu elde edilir. Sonuç olarak T_0 üzerine olduğundan Lemma 2.2.2. den

$$u_n(RST) - \varepsilon \leq j(RSTJ_M^E T_0) \leq \|R\|j(SJ_M^E)\|T_0\| \leq \|R\|u_n(S)\|T\|$$

sağlanır.

Teorem 2.2.6. (Pietsch, A., 1980b, Pietsch, A., 1974): Bernstein sayıları en küçük injektif s-sayılarıdır.

İspat: $S \in L(E, F)$ olsun. Her bir injektif s-sayı fonksiyonu ve $\dim(M) \geq n$ için $j(SJ_M^E) \leq s_n(S)$ sağlanır bu ise $\forall S \in L$ için

$$u_n(S) \leq s_n(S)$$

olduğunu ispat eder.

Öte yandan $j(SJ_M^E) > 0$ olduğu kabul edilsin. $M_0 := S(M)$ olsun. Bu taktirde M_0 içine bir dönüşüm olarak göz önüne alınırsa S nin M ye kısıtlanması S_0 terslenebilirdir ve

$$\|S_0^{-1}\| = j(SJ_M^E)^{-1}$$

dir. Böylece aşağıdaki sonuçtan

$$\begin{aligned} 1 &= s_n(I_M) \leq s_n(S_0)\|S_0^{-1}\| \\ &= s_n(J_{M_0}^F S_0)\|S_0^{-1}\| \\ &\leq s_n(SJ_M^E)\|S_0^{-1}\| \\ &\leq s_n(S)j(SJ_M^E)^{-1} \end{aligned}$$

ispat tamamlanır.

2.3. Surjektiv s-Sayıları

Tanım 2.3.1. (Pietsch, A., 1980b, Pietsch, A., 1974): Bir s-sayı fonksiyonu eğer E nin bir bölüm uzayı E/N olmak üzere her $S \in L(E/N, F)$ için

$$s_n(SQ_N^E) = s_n(S)$$

şartı sağlanıyorsa surjektiv adını alır. Burada Q_N^E , E den E/N nin içine kanonikal dönüşümdür.

Başka bir ifadeyle surjektivliğin anlamı $s_n(S)$ s-sayıları S nin tanım kümesi üzerinden bağımsızdır.

Tanım 2.3.2. (Pietsch, A., 1980b, Pietsch, A., 1974): $\forall S \in L(E, F)$ operatörü için Kolmogorov sayıları

$$d_n(S) := \inf\{\|Q_N^F S\| : \dim(N) < n\}$$

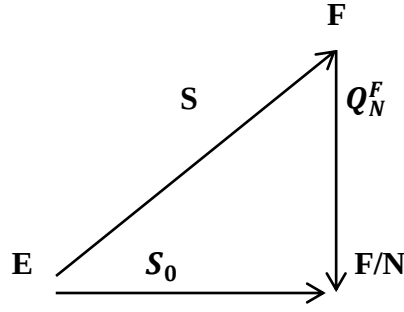
olarak tanımlanır.

Teorem 2.3.1. (Pietsch, A., 1980b, Pietsch, A., 1974):

$$kol : S \rightarrow d_n(S)$$

bir surjektiv s-sayı fonksiyonudur.

Not. Eğer E Banach uzayından bir keyfi F Banach uzayının bir F/N bölüm uzayı içine tanımlı her S_0 dönüşümü ve $\varepsilon > 0$ için E den F ye $\|S\| \leq (H\varepsilon)\|S_0\|$ olacak şekilde S operatörü varsa E Banach uzayına bağlantılık özelliğine sahiptir denir.



Not 2.3.1. Kolmogorov sayıları surjektif s-sayılarıdır. Gerçekten;

$$\begin{aligned}
 d_n(SQ_N^E) &:= \inf\{\|Q_M^F S Q_N^E\| : \dim(M) < n\} \\
 &\leq \inf\{\|Q_M^F S\| \|Q_N^E\| : \dim(M) < n\} \\
 &\leq \inf\{\|Q_M^F S\| : \dim(M) < n\} \\
 &= d_n(S)
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.3.2. (Pietsch, A., 1980b, Pietsch, A., 1974): Eğer E bağlantılık özelliğini sağlıyorsa $\forall S \in L(E, F)$ için

$$d_n(S) = a_n(S)$$

dir.

İspat: $S \in L(E, F)$ olsun. $a_n(S)$ en geniş s-sayısı olduğundan $d_n(S) \leq a_n(S)$ dir. Eğer $\varepsilon > 0$ ise F nin bir N alt uzayı seçilebilir öyle ki Kolmogorov sayılarının tanımından

$$\|Q_N^F S\| \leq d_n(S) + \varepsilon \text{ ve } \dim(N) < n$$

dir. Bu taktirde E bağlantılık özelliğine sahip olduğundan $Q_N^F S$ in $\|T\| \leq (1 + \varepsilon) \|Q_N^F S\|$ şeklinde $T \in L(E, F)$ ile bir bağlantısı vardır. $A := S - T$ alınsın. Dolayısı ile her $x \in E$ için $Ax \in n$ den $\text{rank}(A) < n$ dir. Böylece

$$a_n(S) \leq \|S - A\| = \|T\| \leq (1 + \varepsilon)(d_n(S) + \varepsilon)$$

olup bu ise ispatı tamamlar.

Her E Banach uzayı bağlantılılık özelliğine sahip bir E^1 Banach uzayının bir bölüm uzayıdır. E^1 den E nin üzerine tanımlı bu kanonikal dönüşüm Q_E^1 olarak tanımlanır.

Teorem 2.3.3. (Pietsch, A., 1980b, Pietsch, A., 1974): $\forall S \in L(E, F)$ olsun. Bu taktirde,

$$d_n(S) = a_n(SQ_E^1)$$

dir.

İspat: Kolmogorov sayılarının surjektifliğinden ve Teorem 2.3.2 den

$$d_n(S) = d_n(SQ_E^1) = a_n(SQ_E^1)$$

olduğu görülür.

Teorem 2.3.4. (Pietsch, A., 1980b, Pietsch, A., 1974): Kolmogorov sayıları en geniş surjektif s-sayılarıdır.

İspat: $S \in L(E, F)$ olsun. Bu taktirde her bir surjektif s-sayı fonksiyonu için

$$s_n(S) = s_n(SQ_E^1) \leq a_n(SQ_E^1) = d_n(S)$$

dir. $S \in L(E, F)$ olsun. Bu taktirde surjektifliğin modülü,

$$q(S) := \sup\{q \geq 0 : S(U_F) \supset qU_F\}$$

olarak tanımlıdır.

Lemma 2.3.1. (Pietsch, A., 1980b, Pietsch, A., 1974): $\forall S, T \in L(E, F)$ olsun. Bu takdirde,

$$q(S + T) \leq q(S) + \|T\|.$$

İspat: $q(S + T) > \|T\|$ olduğu kabul edilsin. Eğer $0 < \varepsilon < q(S + T) - \|T\|$ ise $\varrho := q(S + T) - \varepsilon$ alınabilir. $y \in U_F$ olsun bu takdirde

$$Sx_1 + Tx_1 = (\varrho - \|T\|)y \text{ ve } \|x_1\| \leq \frac{\varrho - \|T\|}{\varrho}$$

$$Sx_2 + Tx_2 = Tx_1 \text{ ve } \|x_2\| \leq \frac{\|Tx_1\|}{\varrho}$$

...

$$Sx_{n+1} + Tx_{n+1} = Tx_n \text{ ve } \|x_{n+1}\| \leq \frac{\|Tx_n\|}{\varrho}$$

elde edilir. Şu halde $n = 1, 2, \dots$ için

$$\|x_n\| \leq \left(\frac{\|T\|}{\varrho} \right)^{n-1} \frac{\varrho - \|T\|}{\varrho}$$

dir. $\|T\| < \varrho$ den

$$x := \sum_{n=1}^{\infty} x_n,$$

olarak tanımlamak mümkün ve

$$Sx = (\varrho - \|T\|)y \text{ ve } \|x\| < 1$$

dir. Bu ise $S(U_E) \supset (\varrho - \|T\|)U_F$ olduğunu ispatlar. Sonuç olarak,

$$q(S) \geq \varrho - \|T\| = q(S + T) - \|T\| - \varepsilon$$

olduğu görülür.

Lemma 2.3.2. (Pietsch, A., 1980b, Pietsch, A., 1974): $T \in L(E, F)$ ve $S \in L(F, G)$ olsun. Bu takdirde

$$q(ST) \leq q(S)\|T\|$$

dir. Ayrıca eğer S bire bir ise bu takdirde

$$q(ST) \leq \|S\|q(T)$$

dir.

Tanım 2.3.3. (Pietsch, A., 1980b, Pietsch, A., 1974): $\forall S \in L(E, F)$ operatörü için Mitiagin sayıları

$$v_n(S) := \sup\{q(Q_N^F S) : \text{codim}(N) \geq n\}$$

olarak tanımlıdır.

Uyarı 2.3.1. Yukarıdaki tanımda $\text{codim}(N) = n$ olan bütün N alt dizilerin üzerinden supremum almak yeterlidir.

Teorem 2.3.5. (Pietsch, A., 1980b, Pietsch, A., 1974):

$$mit : S \rightarrow v_n(S)$$

dönüşümü bir surjektif s-sayı fonksiyonudur.

İspat: $S, T \in L(E, F)$ için $v_n(S + T) \leq v_n(S) + \|T\|$ olduğu gösterilsin. $\varepsilon > 0$ olsun. F nin

$$q(Q_N^F(S + T)) \geq v_n(S + T) - \varepsilon \text{ ve } \text{codim}(N) \geq n$$

olacak şekilde bir N alt uzayı vardır. Lemma 2.3.1 i kullanarak

$$\begin{aligned}
v_n(S + T) &\leq q(Q_N^F(S + T)) + \varepsilon \\
&\leq q(Q_N^F S) + \|Q_N^F T\| + \varepsilon \\
&\leq v_n(S) + \|T\| + \varepsilon
\end{aligned}$$

olduğu elde edilir.

Teorem 2.3.6. (Pietsch, A., 1980b, Pietsch, A., 1974): Mitiagin sayıları en küçük surjektif s-sayılarıdır.

2.4. İnjektiv ve Surjektif s-Sayıları.

$s = (s_n)$ bir injektiv ve surjektif s-sayı dizisi olsun. Yukarıda ki sonuçlardan, aşağıdaki mixing çarpımsallığın sağlandığı açıkça görülür. $R \in L(X_0, X_1), S \in L(X_1, X_2)$ ve $T \in L(X_2, X_3)$ için

$$s_{n+m+l-2}(TSR) \leq c_n(T)s_m(S)d_l(R).$$

Gerçekten;

$$\begin{aligned}
s_{n+m+l-2}(TSR) &= s_{n+m+l-1-1}(TSR) \\
&\leq s_{n+m-1}(TS) s_{1-1+l-1}(IR) \\
&\leq c_n(T) \cdot s_m(T) s_0(I) d_l(R) \\
&= c_n(T)s_m(S)d_l(R).
\end{aligned}$$

Tanım 2.4.1. (Carl, B., 2009): Bir $S \in L(X, Y)$ operatörünün simetrik yaklaşım sayıları

$$t_n(S) := a_n(J_\infty S Q_1), \quad n \in \mathbb{N}$$

olarak tanımlanır.

Simetrik yaklaşım sayıları en geniş surjektif ve injektiv s-sayı dizisidir.(Pietsch, A., 1980b., Carl, B. ve Stephani, J., 1990)

2.5. Dual s-Sayıları

Tanım 2.5.1. (Pietsch, A., 1980b, Pietsch, A., 1974): Her s-sayısı fonksiyonun her $S \in L$ için dual s-sayısı fonksiyonu s^D

$$s_n^D(S) := s_n(S'),$$

şeklinde tanımlanabilir.

Teorem 2.5.1. (Pietsch, A., 1980b, Pietsch, A., 1974): $S \in L$ olsun bu taktirde

$$a_n(S) \geq a_n(S')$$

dir.

Uyarı 2.5.1. C.V. Hutton yerel refleksiflik ilkesini kullanarak her S kompakt operatörü için

$$a_n(S) = a_n(S')$$

ispatlamıştır. Diğer yandan C.V. Hutton $I: l_1 \rightarrow c_0$ özdeşlik dönüşümünün ve dualinin yaklaşım sayılarını $n = 2, 3, \dots$ için tam olarak

$$a_n(I) = 1 \text{ ve } a_n(I') = \frac{1}{2}$$

hesaplamıştır.

Teorem 2.5.2. (Pietsch, A., 1980b, Pietsch, A., 1974): $S \in L$ olsun bu taktirde

$$c_n(S) = d_n(S')$$

dir.

İspat: $S \in L(E, F)$ olsun. Duallikten $\text{codim}(M) < n$ olan E nin altuzayları M ve $\dim(N) < n$ olan E' dualinin alt uzayları N alt uzaylar arasında

$$M \rightarrow N := \{a \in E' : \langle x, a \rangle = 0 \ \forall x \in M\},$$

$$N \rightarrow M := \{x \in E : \langle x, a \rangle = 0 \ \forall a \in N\}$$

birebir bir eşleşme vardır. Dolayısıyla

$$\|SJ_M^E\| = \|Q_N^{E'} S'\|,$$

olup aşıkarak Gelfand ve Kolmogorov sayılarının tanımından iddianın doğruluğunu ispatlar.

Teorem 2.5.3. (Pietsch, A., 1980b, Pietsch, A., 1974): $S \in L$ ve S kompakt olsun bu taktirde

$$d_n(S) = c_n(S').$$

Lemma 2.5.1. (Pietsch, A., 1980b, Pietsch, A., 1974): $S \in L$ olsun bu taktirde

$$j(S) = q(S') \text{ ve } q(S) = j(S').$$

Teorem 2.5.4. (Pietsch, A., 1980b, Pietsch, A., 1974): $S \in L$ olsun bu taktirde

$$v_n(S) = u_n(S').$$

Uyarı 2.5.2. Burada her $S \in L$ için

$$u_n(S) = v_n(S')$$

sağlanıp sağlanmadığı bilinmiyor. Sonuç olarak aşağıdaki teorem aşıkarak ifade edilebilir.

Teorem 2.5.5. (Pietsch, A., 1980b, Pietsch, A., 1974): $S \in L$ olsun

$$i_n(S) \leq i_n(S').$$

2.6. Hilbert Sayıları

Tanım 2.6.1. (Bauhardt, W., 1977): $\forall S \in L(X, Y)$ operatörü için Hilbert sayıları $A \in L(l_2, X)$ ve $B \in L(Y, l_2)$ olmak üzere

$$h_n(S) := \sup\{a_n(BSA) : \|A: l_2 \rightarrow X\| \leq 1, \|B: Y \rightarrow l_2\| \leq 1\}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.6.1. (Pietsch, A., 2007) : Hilbert sayıları en küçük s-sayılarıdır.

İspat: $\forall S \in L(X, Y)$ için $A \in L(l_2, X)$ ve $B \in L(Y, l_2)$ olmak üzere

$$a_n(BSA) = s_n(BSA) \leq \|B\|s_n(S)\|A\|$$

böylece

$$h_n(S) \leq s_n(S)$$

olduğu görülür.

Not 2.6.1. Şu halde $\forall S \in L(X, Y)$ için Kısım 2.6 dan Teorem 2.6.1 ve Kısım 2.1 den Teorem 2.1.2 ye bakılırsa

$$h_n(S) \leq s_n(S) \leq a_n(S)$$

olduğu görülür. Ayrıca Bauhardt, (Bauhardt, W., 1977) h_n nin bir toplamsal s-sayısı ve $h_n(S') = h_n(S)$ olduğunu gösterdi.

2.7. s-Weyl Sayıları

Tanım 2.7.1. (s-Weyl Sayıları) (Pietsch, A., 1980a, Pietsch, A., 2007) : $s = (s_n)$ bir s-sayı dizisi ve $S \in L(X, Y)$ olsun. Burada l_2 klasik Hilbert dizi uzayı olmak üzere **n . s-Weyl sayıları**

$$s_n(S, l_2) := \sup\{s_n(SA) : \|A: l_2 \rightarrow X\| \leq 1\}$$

olarak tanımlanır. Bunlar bir s-sayı dizisi formundadır. Bu durumda $s = a = (a_n)$ yaklaşım sayıları alınacak olursa Pietsch (Pietsch, A., 1980a) tarafından ifade edilen meşhur **Weyl sayıları**

$$x_n(S) = a_n(S, l_2)$$

elde edilir. Yani Weyl sayılarını açık olarak ifade edecek olursak;

$$x_n(S) = \sup\{a_n(SA) : \|A: l_2 \rightarrow X\| \leq 1\},$$

dir. Açık bir şekilde onlar en geniş s-Weyl sayılarıdır. Dahası, bir s-Weyl sayı dizisi için aşağıda verilen **mixing çarpımsallık** mevcuttur. Yani $S \in L(X, Y)$ ve $T \in L(Y, Z)$ için

$$s_{n+m-1}(TS, l_2) \leq s_n(T, l_2)x_n(S)$$

dir. Gerçekten;

$$\begin{aligned} s_{n+m-1}(TS, l_2) &:= \sup\{s_{n+m-1}(TSA) : \|A: l_2 \rightarrow X\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{s_n(T) s_m(SA) : \|A: l_2 \rightarrow X\| \leq 1\} \\ &= \sup\{s_n(TB) : \|B: l_2 \rightarrow Y\| \leq 1\} \\ &\quad \sup\{s_m(SA) : \|A: l_2 \rightarrow X\| \leq 1\} \\ &= s_n(T, l_2)x_m(S) \end{aligned}$$

dir. Aslında, eğer $A \in L(l_2, X)$ ise bu taktirde, mixing çarpımsallığından önceki eşitsizliği s-Weyl sayılarının tanımını kullanarak;

$$s_{n+m-1}(TSA) = s_{n+m-1}(TSA, l_2) \leq s_n(T, l_2) a_m(SA)$$

olarak hesaplanabilir. Sonuç olarak, $(s_n) = (h_n)$ olması halinde Hilbert sayılarının mixing çarpımsallığı $S \in L(X, Y), T \in L(Y, Z)$ için

$$h_{n+m-1}(TS) \leq h_n(T) x_m(S)$$

olarak ve aşağıdaki formda

$$h_{n+m-1}(TS) = h_{n+m-1}(TS, l_2) \leq h_n(T, l_2) x_m(S) = h_n(T) x_m(S)$$

elde edilir.

Tanım 2.7.2. (Pietsch, A., 2007) : $s = (s_n)$ bir s-sayı dizisi ve $S \in L(X, Y)$ olsun. Burada l_2 klasik Hilbert dizi uzayını olmak üzere ***n. Chang sayıları***

$$y_n(S) := \sup\{s_n(BS) : \|B: Y \rightarrow l_2\| \leq 1\}$$

olarak tanımlanır.

Ayrıca Kısım 2.5 de ki tanımlar dikkatle incelenirse Weyl sayıları ve Chang sayılarının birbirinin dual çifti olduğu görülür. Yani her S operatörü için

$$x_n(S') = y_n(S) \text{ ve } y_n(S') = x_n(S)$$

dir. Aslında, $x_n(S)$ injektif, $y_n(S)$ ise surjektiftir.

Weyl sayıları ve Chang sayıları hakkında ayrıntılı bilgi için (Pietsch, A., 1980b, Pietsch, A., 1987) bakılabilir. Weyl ve Chang Hilbert uzaylarda çalışmalarını yürütmüş olmalarına rağmen ileriki tüm gelişmelerin yolunu açmışlardır.

Not 2.7.1. Chang ve Weyl sayılarının tanımına bakılacak olursa Hilbert sayılarının tanımının ikiye bölünmüş olduğu görülür.

2.8. Bazı s-Sayıları Arasındaki Bağıntılar

Yukarıda açıklanan bölümlerden aşağıda ifade edilen teoremler elde edilir.

Teorem 2.8.1. (Pietsch, A., 1980b, Pietsch, A., 1974): $S \in L$ olsun. Bu taktirde

$$a_n(S) \geq c_n(S) \geq u_n(S) \geq i_n(S)$$

ve

$$a_n(S) \geq d_n(S) \geq v_n(S) \geq i_n(S)$$

dir.

Teorem 2.8.2. (Pietsch, A., 1980b, Pietsch, A., 1974): $S \in L$ olsun. Bu taktirde

$$d_n(S) \geq u_n(S).$$

İspat: $S \in L(E, F)$ olsun.

$$d_n(S) := \inf\{\|Q_N^F S\| : \dim(N) < n\}$$

ve

$$u_n(S) := \sup\{j(SJ_M^E) : \dim(M) \geq n\}$$

olduğu için

$$\|Q_N^F S\| \geq j(SJ_M^E)$$

eşitsizliğini görmek yeterlidir. $j(SJ_M^E) > 0$ olduğu kabul edilsin. Eğer $M_0 := S(M)$ ise bu taktirde $\dim(M_0) \geq n$ dir. Sonuç olarak bölüm 2 de ki Lemma 2.2 den

$$\|Q_N^F S\| = \|Sx\| = 1$$

olacak şekilde bir $x \in M$ vardır. Şu halde

$$1 = \|Sx\| \geq j(Sf_M^E)\|x\| \quad \text{ve} \quad 1 = \|Q_N^F Sx\| \leq \|Q_N^F S\|\|x\|$$

eşitsizliklerinden ispat tamamlanır.

Teorem 2.8.3. (Pietsch, A., 1980b, Pietsch, A., 1974): $S \in L$ olsun. Bu taktirde

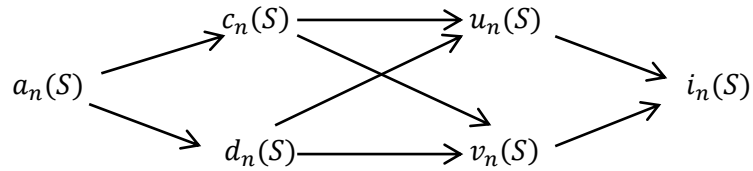
$$c_n(S) \geq v_n(S).$$

İspat: Teorem 2.8.2 ve Teorem 2.5.4 den

$$c_n(S) = d_n(S') = v_n(S)$$

olduğu kolayca görülür.

Şu halde şuana kadarki tanımlanmış olan s-sayı fonksiyonları için aşağıdaki diyagram verilebilir.



Teorem 2.8.4. (Pietsch, A., 1980b, Pietsch, A., 1974): $S \in L$ olsun. Bu taktirde e pozitif bir sabit olmak üzere

$$a_n(S) \leq e^{n^{1/2}} d_n(S) \quad \text{ve} \quad a_n(S) \leq e^{n^{1/2}} c_n(S).$$

İspat: $S \in L(E, F)$ olsun. $\varepsilon > 0$ için

$$\|Q_N^F\| \geq d_n(S) + \varepsilon \quad \text{ve} \quad \dim(N) < n$$

olacak şekilde F nin bir N alt uzayını seçilebilir. Bu taktirde Lemma 2.3 den $P \in L(F, F)$, $N = P(F)$ olan bir porjeksiyon vardır ve $\|P\| \leq (n-1)^{1/2}$ dir. Ayrıca

$$J(y + N) := y - P_y$$

den bir $J \in L(F/N, F)$ operatörü tanımlanabilir. Bu taktirde

$$\|J\| \leq \|I_F - P\| \leq 1 + (n-1)^{1/2} \leq e^{n^{1/2}},$$

burada $e = \sqrt{2}$ dir.

$$S - PS = (I_F - P)S = JQ_N^F S$$

den

$$a_n(S) \leq \|S - PS\| \leq \|J\| \|Q_N^F\| \leq e^{n^{1/2}} (d_n(S) + \varepsilon)$$

elde edilir.

Uyarı 2.8.1.

$$a_n(S) \leq e_\alpha n^\alpha d_n(S)$$

eşitsizliğinin $\alpha < \frac{1}{2}$ için sağlanıp sağlanmadığı bilinmemektedir.

Teorem 2.8.5. (Pietsch, A., 1980b, Pietsch, A., 1974): $S \in L$ olsun. Bu taktirde

$$u_n(S) \leq n^{1/2} e_n(S) \text{ ve } v_n(S) \leq n^{1/2} i_n(S).$$

İspat: $S \in L(E, F)$ olsun. Eğer $0 < \varepsilon < u_n(S)$ ise

$$u_n(S) - \varepsilon < j(SJ_M^E) \text{ ve } \dim(M) = n$$

olacak şekilde E nin bir M alt uzayını seçilsin ve $N := S(M)$ olsun. Bu taktirde $j(SJ_M^E) > 0$ olduğundan S nin S_0 kısıtlaması M den N ye üzerine dönüşümü göz önüne alınacak olursa terslenebilir ve

$$j(SJ_M^E) = \|S_0^{-1}\|^{-1}$$

dir. $PJ_N^F = I_N$ ve $\|P\| \leq n^{1/2}$ olacak şekilde $P \in L(E, F)$ olsun. Bu durumda

$$I_M = S_0^{-1}PSJ_M^E$$

dir. Sonuç olarak,

$$i_n(S) \geq \|S_0^{-1}P\|^{-1} \|J_M^E\|^{-1} \geq n^{-1/2} \|S_0^{-1}\|^{-1} = n^{-1/2}(u_n(S) - \varepsilon)$$

elde edilir.

Teorem 2.8.6. (Pietsch, A., 1980b, Pietsch, A., 1974): $S \in L$ olsun. Bu taktirde

$$c_n(S) \leq n^2 v_n(S) \text{ ve } d_n(S) \leq n^2 v_n(S).$$

Uyarı 2.8.2. Muhtemelen

$$c_n(S) \leq n v_n(S) \text{ ve } d_n(S) \leq n u_n(S).$$

eşitsizlikleri de sağlanır. l_1 den l_∞ üzerine I özdeşlik dönüşümü için

$$u_n(I) = v_n(I) = \frac{1}{n} \text{ ve } c_n(I) = d_n(I) \geq \frac{1}{2},$$

dir. Fakat n nin en küçük üssü $\alpha = 1$ için bu imkansızdır.

Teorem 2.8.7. (Pietsch, A., 1980b, Pietsch, A., 1974): $S \in L$ olsun. Bu takdirde

$$a_n(S) \leq en^3 i_n(S)$$

burada e pozitif bir sabittir.



3. WEYL-TİPİ EŞİTSİZLİKLER ve ÖZDEĞER DAĞILIMLARI

Bu bölümde ilk olarak kompleks Banach uzaylarda ki kompleks özdeğerler hakkında bilgi verilecektir.

3.1. Özdeğer Dizileri ve Klasik Sonuçlar

$S \in L(X)$ bir Riesz operatörü olsun. Bu taktirde

$$m(\lambda) := \dim \bigcup_{k=0}^{\infty} \{x \in X : (\lambda I - S)^k x = 0\}$$

sonlu cebirsel çokluklarla elde edilen $\sigma(S)$ spektrum da ki bütün $\lambda \neq 0$ noktalar özdeğerlerdir. Aşağıdaki şartlar uygulanılarak $(\lambda_n(S))$ öz değerlerinin dizisi elde edilir:

(1). Her $\lambda \neq 0$ öz değerler $m(\lambda)$ kez oluşur. Bu durum özdeğerlerin cebirsel çokluklarına göre sayıldığı söylenerek açıklanır.

$$(2). |\lambda_1(S)| \geq \dots \geq |\lambda_n(S)| \geq \dots \geq 0.$$

Sonucu tek kılmak için, aynı mutlak değere sahip λ ve μ özdeğerleri,

$$0 \leq \arg(\lambda) < \arg(\mu) < 2\pi$$

olduğunda λ, μ den önce gelecek şekilde düzenlenir.

(3). Sadece sınırlı sayıda sıfır olmayan özdeğerlere sahip operatörler için dizi sıfırlar eklenerek tamamlanır. Riesz teorisi $n \rightarrow \infty$ iken $\lambda_n(S) \rightarrow 0$ söyler. Özdeğerlerin dağılımı teorisinde “ $\lambda_n(S)$ hangi hızda sıfıra yakınsar? ” sorusu ele alınır. En uygun ölçümler bazı $p > 0$ için

$$\sup n^{1/p} |\lambda_n(S)| < \infty$$

veya

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n(S)|^p < \infty$$

olarak ifade edilir. Çok daha genel olarak biz $U, l_{p,q}$ özdeğer tipinin bir ideali olmak üzere, eğer her X Banach uzayı için bütün $S \in U(X)$ operatörleri Riesz ise

$$\|\lambda_n(S)|_{l_{p,q}}\| := \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{q/p-1} |\lambda_n(S)|^q \right)^{1/q} < \infty$$

olduğunu söyleyebiliriz.

Optimalliğin başlangıcı olarak $l_{p,q}$ tipi özdeğerlerden anlaşılan $l_{p,q}$ da ki p ve q parametrelerinin seçilebilecek en küçük parametreler olmasıdır.

Eğer $U, l_{p,q}$ tipi özdeğerlerin bir quasi-Banach ideali ise bu taktirde bir $c \geq 1$ (X üzerinden bağımsız) sabiti vardır öyle ki $S \in U(X)$ için

$$\|\lambda_n(S)|_{l_{p,q}}\| \leq c \|S|U\|.$$

Özdeğer dağılımlarında klasik yaklaşım sonsuz determinantalara dayanmaktadır. Şöyle ki sürpriz olmayan ilk sonuçlar Fredholm'un (Fredholm, I., 1903) makalesinde detaylı olarak içermektedir.

Bu alandaki söz sahibi matematikçilerden A. Pietsch ye göre ikinci bir zarif sonuç için (Weyl, H., 1949) kadar geriye gidilebilir. (Daha sonraları Weyl nin fikri geliştirildi Kısım 3.2 de gelişmelere yer verilecek.)

Schur' un eşitsizliği (Schur, I., 1909)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n(K)|^2 \leq \int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 ds dt$$

ile serbest determinant devri başladı. Burada $\lambda_n(K)$

$$K_{op}: f(t) \rightarrow \int_a^b K(s,t) f(t) dt$$

integral operatörünün n . özdeğeri olarak tanımlanır. Bir sonraki adımda, (Lalesco, T., 1915) iki çekirdeğin bileşimi

$$K(s, t) = \int_a^b A(s, \xi)B(\xi, t)d\xi$$

operatörü göz önüne aldı. Lalesco iddia ediyor ki A ve B (sürekli mi ?) nin özellikleri sipesifik olmaksızın K nın özdeğerlerin dizisi toplanabilmeli.

3.2. s-Sayıları ve Öz Değerler Arasındaki Eşitsizlikler

Bu kısımda $0 < p < \infty$ olarak alınacak. Her $S \in \mathfrak{S}(H)$ kompakt operatörünün özdeğerlerini Schmidt anlamında yani operatörün singüler değerlerinin dizisi olarak tanımlanacaktır (Schmidt, E., 1907). Her $S \in L(H)$ için Sichmidt S operatörünün n . singüler değerini $N \subset H$ alt uzayı olmak üzere

$$s_n(S) := \inf_{\text{rank } A < n} \|S - A\| = \lim_{\dim(N) < n} \{ \sup \{ \|Sx\| : x \in N^\perp, \|x\| = 1 \} \}$$

olarak tanımlar. Schmidt ortaya koydu ki:

“Şimdiye kadar çekirdek simetrik olmadığında özdeğerlerin ve singüler değerlerin büyüklük sıraları arasında doğrudan bir bağlantı kuramadım.”

Bu konuda ilk geniş sonuç Schmidt’ in doktora öğrencisi Chang tarafından elde edildi. O (Chang, S-H., 1949) da ispatladı ki her S Hilbert-Schmidt(integral) operatörü için $(s_n(S)) \in l_p$ ise $(\lambda_n(S)) \in l_p$ dir.

Daha sonra bu durum Weyl bir lineer dönüşümün özdeğerler üzerine (Weyl, H., 1949) kısa bir not yayınladığında dramatik olarak değişti. (Bir lineer dönüşümün özdeğeri ve s-sayıları için iki tür eşitsizlik vardır.) Weyl’ nin asıl sonucu litarütürde çarpımsal Weyl eşitsizliği olarak bilinen aşağıda ki eşitsizliktir.

$$\prod_{k=1}^n |\lambda_k(S)| \leq \prod_{k=1}^n s_k(S) \quad (1)$$

Bu eşitsizliğin toplamsal versiyonu ise aşağıda ki gibi

$$\sum_{k=1}^n |\lambda_k(S)|^p \leq \sum_{k=1}^n s_k(S)^p, \quad 0 < p < \infty$$

toplamsal Weyl eşitsizliği olarak bilinir.

Weyl eşitsizliğinin Banach uzaylar üzerinde Riesz operatörlerine genişlemesi hemen hemen 30 yılı aldı. Markus/Matsaev (Markus, A.S. ve Matsaev, V.I., 1971) de bir ön sonuç ortaya koydu

$$\left(\sum_{k=1}^n |\lambda_k(S)|^p \right)^{1/p} \leq c_p \left(\sum_{k=1}^n a_k(S)^p \log \left(1 + \frac{\|S\|}{a_k(S)} \right) \right)^{1/p}.$$

Daha sonra König (Konig, H., 1978) da ispatladı ki

$$(\sum_{k=1}^n |\lambda_k(S)|^p)^{1/p} \leq c_p (\sum_{k=1}^n a_k(S)^p)^{1/p} \quad (2)$$

Ayrıca König yukarıdaki sonuçta en iyi ihtimalle c_p sabitinin 1 den geniş olduğunu ispatladı. Fakat $p \rightarrow 0$ iken c_p nin asimptotik davranışı hala bilinmiyor.

Daha sonra, Johnson/König/Maurey/Rethford (Johnson, W.B, Konig, H, Maurey, B, Retherford, J.R., 1979) yukarıdaki (2) sonucunu Gelfand ve Kolmogorov sayıları için doğruladılar.

John'un teoreminde (1) eşitsizliğinin

$$\prod_{k=1}^n |\lambda_k(S)| \leq n^{n/2} \prod_{k=1}^n a_k(S)$$

olarak sağlandığı görülür.

Yakın zamanda, Hinrichs (Hincichs, A., 2005) de l_∞^n üzerindeki operatörler için $n^{n/2}$ faktörünün gerekli olduğunu ispatladı. Şu ana kadarki gelişmeler de keyfi Banach uzayları üzerindeki operatörler için faydalı bir Weyl eşitsizliği ortaya konamadı. Pietsch ise (Pietsch, A., 1980) bu teoremin aşağıda ki en güçlü sonucunu elde etti

$$|\lambda_{2n-1}(S)| \leq e \left(\prod_{k=1}^n x_k(S) \right)^{1/n}.$$

Ayrıca bu sonuç Pietsch (Pietsch, A., 1987) görülür. Burada e nin yerine daha büyük bir faktör ihtimali ile birlikte $|\lambda_{2n-1}(S)|$ nin $|\lambda_n(S)|$ ile yer değiştirip değiştirmeyeceği bilinmiyor.

Özdeğerler ve entropi sayıları arasındaki bağıntı Carl tarafından (Carl, B., 1981)

$$|\lambda_n(S)| \leq 2e_{n+1}(S)$$

ispatlandı. Farklı ispatlar Carl/Triebel (Carl, B. ve Triebel, H., 1980) ve Carl (Carl, B., 1982) da verildi.

3.3. Banach Uzaylarda Weyl Tipi Eşitsizlikler

Banach uzayında operatör teorisinin temel problemlerinden biri operatörlerin asimptotik özdeğer dağılımlarını belirlemektir. Weyl tipi eşitsizlikler bu problemlerin çözümüne büyük katkı sağlar. Özellikle bu eşitsizlikler, ergodik teoride (Bandtlow O. F. ve Güven A., 2015) yapılan son çalışmalarda geniş bir kullanım alanına sahiptir. Dolayısıyla Weyl sayıları özdeğerlerin asimptotik yaklaşımlarının araştırılması için çok iyi bir araç haline gelmiştir. Daha kapsamlı uygulama alanları için bkz. (Pietsch, A., 1987, König, H., 1986a).

Klasik çarpımsal Weyl eşitsizlikleri Kısım 3.2 içinde verilmiştir. Kolmogorov sayıları için H. König (König, H., 1986a, König, H., 2001) tarafından güçlü bir şekilde başlatılan ve daha sonra (Pietsch, A., 1980a, Pietsch, A., 1987, König, H., 1986b, König, H., Retherford, J.R. ve Tomczak-Jaegermann, N., 1980) de Weyl sayılarına A. Pietsch tarafından geliştirilen aşağıda ki eşitsizlik kompleks Banach uzayları üzerinde kompakt $S \in L(X)$ operatörleri için Weyl tipi eşitsizlikleri ifade eder:

$$\prod_{k=1}^{2n-1} |\lambda_k(S)| \leq \sqrt{2e} \prod_{k=1}^n x_k(S).$$

Pietsch tarafından tanıtılan Weyl sayıları ve Weyl eşitsizliği özdeğerler bağlamında çok önemlidir. Çünkü özdeğerlerin optimal asimptotik davranışını araştırmak için Weyl sayılarının uygun s-sayıları olduğu kabul edilmektedir. Bu gerçek, fonksiyon uzaylarında hareket eden integral operatörlerin özdeğer dağılımları üzerine yapılan kapsamlı çalışmaların bir sonucu olarak doğrulanmıştır. Araştırmacılar, Weyl sayıları yerine farklı s-sayılarını alarak benzer eşitsizlikleri elde ettiler. Fakat Weyl sayıları bazı anlamlarda bir minimal çarpımsal s-sayı dizisidir (Carl, B. ve Hinrichs, A., 2007). Bu nedenle Weyl tipi eşitsizliklerde Weyl sayıları en çok tercih edilen s-sayıdır. Bu eşitsizlikler literatürde genel olarak Weyl tipi eşitsizlikler olarak geçmektedir. (Pietsch, A.,1987. König, H., 1986a, Weyl, H., 1949) çalışmalarında birkaç Weyl tipi eşitsizlik görebiliriz. Weyl tipi eşitsizliklerde sabitlerin optimallliği çok önemlidir. Sonra H. Köning bu eşitsizlikte daha iyi bir sabit elde etti (König, H.,1984. , König, H., 1986a. , König, H.,1986b.)Ayrıca, bu eşitsizlikler, tek özdeğerleri tahmin etmek için oldukça faydalıdır. Örneğin, Banach uzayındaki herhangi bir operatörün ikinci, üçüncü veya dördüncü özdeğerlerini hesaplarken kullanılırlar.

Öte yandan, Banach uzaylarında Weyl tipi eşitsizlikler geliştirmek için mutlak p -toplanabilmeye ihtiyaç vardır. Örneğin nükleer operatörlerin özdeğerlerinin asimptotik davranışının belirlenmesi mutlak p -toplanabilen operatörlerinin özdeğerlerinin bir uygulamasıdır. Özellikle, 2-toplanabilen operatörler ile nükleer operatörler arasında önemli korelasyonlar vardır (König, H., 2001). Hilbert uzaylarındaki Weyl eşitsizliklerini 2-toplanabilen operatörler teorisi ile birleştiren Pietsch (Pietsch, A., 1987), Weyl' in eşitsizliklerini Banach uzaylarına genişletti.

$$\left(\sum_{k=1}^n |\lambda_k(T)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}} \sqrt{2e} \left(\sum_{k=1}^n x_k(T)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

p -toplanabilen operatörlerinin özdeğerleri $p \geq 2$ için p nci kuvvetten mutlak toplanabilir. Ayrıca (König, H.,1986) de, p nci kuvvetten toplanabilir Weyl sayılarına sahip operatörler, kompakt olmaları koşuluyla kesinlikle p nci kuvvetten toplanabilir özdeğerlerine sahip olacaktır. Bu nedenle, $S \in L(X)$ operatörünün özdeğerlerinin asimptotik davranışını araştırmak için $s_n(S)$ s-sayılarının p -inci kuvvetten toplanabilir olması oldukça önemlidir.

Şimdi Banach uzaylarda ki çeşitli Weyl tipi eşitsizlikler ifade edilsin.

Özellikle Carl tarafından keyfi injektif ve surjektif s-sayı dizisi için çeşitli Weyl tipi eşitsizlikler elde edildi (Carl, B., 2009).

Teorem 3.3.1. $0 \leq \delta \leq 1$ herhangi bir parametre ve bir X Banach uzayı üzerinde herhangi bir $S \in L(X)$ Riesz operatörü için ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left(\prod_{i=1}^n |\lambda_i(S)| \right)^{\frac{1}{n}} \leq c \left(1 + \frac{1}{8} \ln \left(\frac{1}{8} \right) \right) \left(\prod_{i=1}^{n_\delta} s_i(S) \right)^{\frac{1}{n_\delta}}$$

eşitsizliği sağlanır, burada $c \geq 1$ bir mutlak sabit, $n_{\delta i} = \left\lfloor \frac{n}{1+\delta} \right\rfloor$ ($[x]$ ile $1 \leq x \leq \infty$ için x in tam kısmı tanımlanır ve eğer $0 < x \leq 1$ ise $[x] := 1$ alırsınız).

Weyl eşitsizliklerini detaylı incelemeye başlamadan önce bizim bazı ön hazırlığa ihtiyacımız var. Bu yüzden açıkça s-sayıları ile bağlı olan bir X Banach uzayından bir Y Banach uzayına tanımlı olan $S \in L(X, Y)$ operatörü için dyadic entrops sayısı $e_n(S)$

$$e_n(S) := \inf \left\{ \varepsilon \geq 0 : \exists y_1, \dots, y_{2^n-1} \in Y : S(B_X) \subseteq \bigcup_{i=1}^{2^n-1} (\{y_i\} + \varepsilon B_Y) \right\}$$

olarak tanımlanır.

(Defant, M., ve Junge, M., 1993) de ve ayrıca (Carl, B., 1985, Gordon, Y., König, H., Schütt, C., 1987) de aşağıdaki sonuç görülür.

Lemma 3.3.1. (Pisier, G., 1989b) : X weak cotype2 nin bir Banach uzayı ve $S \in L(l_2, X)$ olsun. Bu taktirde $k \in \mathbb{N}$ ve $wC_2(S)$ (X in weak cotype2) sabiti için $c \geq 1$ bir mutlak sabiti vardır öyle ki

$$a_k(S) \leq cwC_2(X)(1 + \ln wC_2(X))e_k(S).$$

Dahası biz G. Pisier (Pisier, G., 1989a, Pisier G., 1989b) in aşağıdaki kullanışlı sonucunu verelim.

Lemma 3.3.2. Herhangi bir $\alpha > \frac{1}{2}$ için a ve $b(\alpha)$ sabitleri vardır. Öyleki herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için ve herhangi bir n -boyutlu (reel veya kompleks) E , Banach uzayı için $1 \leq k \leq n$ için

$$\max\{d_k(u), c_k(u^{-1}), e_k(u), e_k(u^{-1})\} \leq b(\alpha) \left(\frac{n}{k}\right)^\alpha$$

olacak şekilde bir $U : l_2^n \rightarrow E$ izomorfizmi vardır, burada $b(\alpha) \leq b_0 \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ ve $b_0 > 0$ bir mutlak sabittir.

Teorem 3.3.2. (Carl, B., 2009): $s = (s_n)$ bir injektif s -sayı dizisi olsun. Bu taktirde herhangi bir $0 < \delta \leq 1$ için bir $c(\delta) \geq 1$ sabiti vardır. Öyleki weak cotype2 nin bütün(kompleks) Banach uzayları, $\forall S \in L(X)$ Riesz operatörleri ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\left(\prod_{i=1}^n |\lambda_i(S)|\right)^{\frac{1}{n}} \leq c(\delta) wC_2(X) (1 + \ln wC_2(X)) \left(\prod_{i=1}^n s_i(S)\right)^{\frac{1}{n_\delta}}$$

eşitsizliği sağlanır, burada $wC_2(X)$, X in weak cotype2 sabitini, $n_\delta = \left\lceil \frac{n}{1+\delta} \right\rceil$ ve $c_0 \geq 1$ bir mutlak sabit olmak üzere $c(\delta) \leq c_0 \left(1 + \frac{1}{\delta} \ln \left(\frac{1}{\delta}\right)\right)$ olarak tanımlanır.

Teorem 3.3.3. (Carl, B., 2009): $s = (s_n)$ bir surjektif s -sayı dizisi olsun. Bu taktirde herhangi bir $0 < \delta \leq 1$ için bir $c(\delta) \geq 1$ sabiti vardır öyle ki weak cotype2 nin dual uzayı olan bütün (kompleks) X refleksiftlik Banach uzayı ve bütün $S \in L(X)$ Riesz operatörleri, $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\left(\prod_{i=1}^n |\lambda_i(S)|\right)^{\frac{1}{n}} \leq c(\delta) wC_2(X')(1 + \ln wC_2(X')) \left(\prod_{i=1}^{n_\delta} s_i(S)\right)^{\frac{1}{n_\delta}}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $wC_2(X')$, X' nin weak cotype2 sabitini tanımlar. $n_\delta := \left\lfloor \frac{n}{1+\delta} \right\rfloor$ ve $c_0 \geq 1$ bir mutlak sabit olmak üzere $c_\delta \leq c_0 \left(1 + \frac{1}{\delta} \ln \left(\frac{1}{\delta}\right)\right)$ dır.

Teorem 3.3.4. (Carl, B., 2009): $0 < \delta \leq 1$ olsun. Bu taktirde her (kompleks) Banach uzay X , $\forall S \in L(X)$ Riesz operatörleri ve $n \in \mathbb{N}$ için özdeğerler ve Weyl sayıları arasında

$$\left(\prod_{i=1}^{2n} |\lambda_i(S)|\right)^{\frac{1}{2n}} \leq 2\sqrt{2}e\delta^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{i=1}^{n_\delta} x_i(S)\right)^{\frac{1}{n_\delta}}$$

eşitsizliği sağlanır, burada $n_\delta := \left\lfloor \frac{1}{1+\delta} \right\rfloor$ dır.

Uyarılar 3.3.1.

(i). Eğer $\delta = 1$ ve n yerine de $2n$ alınırsa $n \in \mathbb{N}$ için Teorem 3.3.4 de ki Weyl eşitsizliği aşağıda ki gibi

$$\left(\prod_{i=1}^{2n} |\lambda_i(S)|\right)^{\frac{1}{2n}} \leq 2\sqrt{2}e \left(\prod_{i=1}^n x_i(S)\right)^{\frac{1}{n}}$$

Pietsch'in Weyl eşitsizliğine dönüşür.

(ii). Eğer $n \in \mathbb{N}$ için $\delta_n = \frac{1}{n}$ alınırsa, bu taktirde $n \geq 2$ için $\left\lfloor \frac{n}{1+\frac{1}{n}} \right\rfloor = n - 1$ olmak üzere Teorem 3.3.4 de ki Weyl eşitsizliği

$$\left(\prod_{i=1}^n |\lambda_i(S)|\right)^{\frac{1}{n}} \leq 2\sqrt{2}en^{\frac{1}{2}} \left(\prod_{i=1}^{n-1} x_i(S)\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

olarak ifade edilebilir.



4. BULGULAR

Bu tez çalışması kapsamında, Banach uzaylardaki operatörlerin s-sayı fonksiyonları ve Weyl tipi eşitsizlikleri ele alınmıştır. Bu araştırmalar sonucunda

- Diziler ve fonksiyonların Hilbert uzayında bazı operatörlerin s-sayılarının hesaplanmasına kaynak oluşturduğu,
- Banach uzaylardaki operatörlerin birden fazla tanım seçeneğinin olduğu,
- Banach uzaylarda tanımlı operatörler için; Yaklaşım sayıları, Kolmogorov sayıları, Gelfand sayıları gibi bir çok s-sayısı dizisi tanımlandığı,
- Operatörlerin özdeğerlerinin optimal asimptotik davranışları için Weyl tipi eşitsizliklerin kullanışlı araçlar olduğu,

bilgilerine erişilmiştir.

5. İRDELEME

Yapılan çalışmalarda s-sayılarının literatürdeki yeri ve önemi araştırıldı. Öncelikli olarak Banach uzaylarda s-sayılarının literatürdeki gelişimi verilerek, aksiyomatik yapısı türkçeye kazandırıldı. s-sayı örnekleri ve birbirleri arasındaki ağılantılar literatürdeki gelişime göre sıralandı. Ayrıca uygulamalı matematikte önemli bir yere sahip olan Weyl tipi eşitsizlikler ifade edildi. Bu Weyl tipi eşitsizliklerin optimalliğı hakkında bilgi verildi.



6. SONUÇLAR

- s -sayı fonksiyonunun güncel notasyonlarla genel aksiyomatik yapısı verildi.
- Banach uzaylarda birçok farklı s -sayı örneği ifade edildi.
- Banach uzaylar ve s -sayıları arasında önemli bağıntılar olduğu ortaya kondu.
- Temel Weyl tipi eşitsizliği ve farklı operatörler için çeşitli Weyl tipi eşitsizlikleri verildi.



7. ÖNERİLER

- Farklı operatörler ve s -sayıları alınarak Weyl tipi eşitsizlikler elde edilebilir.
- Weyl tipi eşitsizliklerin optimalliği üzerine çalışılabilir.
- Weyl tipi eşitsizlikler yardımıyla Banach uzaylarda operatör teorisinin asimtotik özdeğer dağılımları belirlenebilir.



8. KAYNAKLAR

- Abramovich, Y.A., ve Aliprantis, C.D., 2002. An Invitation to Operator Theory, American Mathematical Society, 530 p.
- Aksoy Güven, A. ve Lewicki, G., 1997. Diagonal Operators, s-Numbers and Bernstein Pairs, Note di Mathematica, 17, 209-216.
- Bandtlow O. F. ve Güven A., 2015. Explicit Upper Bounds for the Spectral Distance of Two Trace Class Operators, Linear Algebra and its Applications, 466, 329-342.
- Barramov, E., Öztürk Mert, R. ve Ismailov, Z.I., 2012. Selfadjoint Extensions of a Singular Differential Operators, Journal of Mathematical Chemistry, 50, 1100-1110.
- Bauhardt, W., 1977. Hilbert Zahlen Von Operatoren in Banachraumen. Math. Nachr., 79, 181-187.
- Bayraktar, M., 2006. Fonsiyonel Analiz, Gazi Kitap Evi, 320 s.
- Carl, B. ve Kühn, T., 1985. Local Entropy Moduli and Eigenvalues of Operators in Banach Spaces, Rev. Math. İberoamericana, 1, 127-148.
- Carl, B. ve Hinrichs, A., 2007. Optimal Weyl-type Inequalities for Operators in Banach Spaces, Positivity, 11, 41-55.
- Carl, B., 2009. On a Weyl Inequality of Operators on Banach Spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 137, 155-159.
- Carl, B., 2010. On s-Numbers, Quasi s-Numbers, s-Moduli and Weyl Inequalities of Operators in Banach Spaces, Revista Math. Comp., 23, 467-487.
- Carl, B., 2009. On the Weyl Inequality of Operators in Banach Spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 137, 115-159.
- Carl, B., 1981. Entropy Numbers, s-Numbers, and Eigenvalue Problems, Journal of Functional Analysis, 41, 290-306.
- Carl, B. ve Hinrichs, A., 2009. On s-Numbers and Weyl Inequalities of Operators in Banach Spaces, Bull. Lon. Math Soc., 41, 332-340.
- Carl, B., 1982. Inequalities Between Geometric Quantities of Operators in Banach Spaces, Integral Equations Operator Theory, 5, 759-773.
- Carl, B. ve Triebel, H., 1980. Inequalities Between Eigenvalues, Entropy Numbers and Related Quantities of Compact Operators in Banach Spaces, Math. Ann., 251, 129-133.

- Chang, S-H, 1949. On the Distribution of the Characteristic Values and Singular Values of Linear Integral Equations, Trans. Amer. Math. Soc., 67, 351–367.
- Defant, M., ve Junge, M., 1993. Some Estimates on Entropy Numbers. Israel J. Math., 84, 417-433.
- Dunford, N., ve Schwartz, J.T., 1958. Linear Operators, Part I. General Theory, Interscience, New York, 238 p.
- Fredholm, I., 1903. Sur une Classe D'equations Fonctionnelles, Acta Math., 27, 365–390.
- Gohberg, İ.Z. ve Krein, 1969. M. G., Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators in Hilbert Space, 378 p.
- Gordon, Y., König, H., Schütt, C., 1987. Geometric and Probabilistic Estimates for Entropy and Approximation Numbers, J. Approx. Theory, 49, 219-239.
- Hinrichs, A., 2002. Approximation Numbers of Identity Operators Between Symmetric Sequence Space, Journal of Approximation Theory, 118, 305-315.
- Hincichs, A., 2005. Optimal Weyl Inequalities in Banach Spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 134, 731-735.
- Ismailov, Z.I, Cona L., Cevik E.O. and Guler, B.O., 2014. Weyl Numbers of Diagonal Matrices, AIP Conference Proceedings, 1611, 296-299.
- Ismailov, Z.I, Cona L., Cevik, E.O., 2015. Gelfand Numbers of Diagonal Matrices, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 44,1, 75-81.
- İpek Al, P. 2020. Lorentz-Schatten Classes of Direct Sum of Operators, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 49, 835-842.
- İpek Al, P. ve Ismailov, Z.I, 2018 Singular Numbers of Lower Triangular One-Band Block Operator Matrices, International Conference on Mathematics “An Istanbul Meeting for World Mathematicians” Minisymposium on Approximation Theory Minisymposium on Math Education, ICOM 2018, 03 - 06 Temmuz, pp.293.
- Johnson, W.B, König, H, Maurey, B, Retherford, J.R., 1979. Eigenvalues of p-summing and lp-type Operators in Banach spaces, J. Funct. Anal. 32, 353–380.
- Kadec, M.I. ve Snobar, M.G., 1971. Some Functionals on Minkowski's Compactums, Mat. Zametki, 10, 453-458.
- Kato, T., 1966. Perturbation Theory of Linear Operators, Berlin-Heidelberg-New York, 643 p.
- Kochubei, A.N., 1979. Symmetric Operators and Nonclassical Spectral Problems, Mat. Zametki, 25, 425-434.

- König, H., 1978. Interpolation of Operator Ideals with an Application to Eigenvalue Distribution Problems, Math. Ann., 233, 35–48.
- Kolmogorov., 1936. A. N., Über die Beste Annäherung von Funktionen Einer Gegebenen Funktionenklasse., Ann. Math., 37, 107-110.
- König, H., 1980. s-Numbers, Eigenvalues and the Trace Theorem in Banach Spaces, Studia Math., 67, 157-172.
- König, H., 1986a. ., Eigenvalues of Operators and Application, Handbook of Geometry of Banach Spaces, North-Holland, Amsterdam, 1, 941-974.
- König, H., 1986b. Eigenvalues Distribution of Compact Operators. Operators Theory: Advances and Applications, 16, Birkhäuser, Basel 262 p.
- König, H., 2001. Eigenvalues of Operators and Application, Handbook of Geometry of Banach Spaces, North-Holland, Amsterdam, 1, 941-974.
- König, H., 2008. Eigenvalues of Operators and Applications, Mathematisches Seminar ,Universität Kiel, Germany, 1-40 p.
- König, H., Retherford, J.R. ve Tomczak-Jaegermann, N., 1980. On the Eigenvalues of $(p,2)$ -Summing Operators and Constants Associated to Normed Spaces, J. Funct. Anal., 37, 88-126.
- Kreyszig, E., 1978. Introductory Functional Analysis with Applications, John and Sons, 703 p.
- Lalesco, T., 1915. Un Theor ' Eme sur les Noyaux Compos ' es ' , Bull. Sect. Sci. Acad. Roumaine, 3, 271–272.
- Lindenstrauss, J. ve Rosenthal, H.P., 1969. The L_p -Spaces, Israel J. Math., 7, 325-349.
- Lindenstrauss, J. ve Tzafriri, L., 1977. Classical Banach Spaces, I, Springer-Verlag, 190 p.
- Markus, A.S. ve Matsaev, V.I, 1971. Engl. Transl.: Analogs of the Weyl Inequality and Trace Theorems in a Banach Space, Math. USSR-Sbornik, 15, 299–312.
- Öztürk Mert, R., İpek Al, P. ve Ismailov, Z.I, 2019. Lorentz-Schatten Property of the Inverses of Second Order Differential Operators with Dirichlet Conditions, Current Academic Studies in Natural Science and Mathematics Sciences, Mehmet Ali Kandemir, Fatma Erdoğan, Editör, IVPE, ss.155-161.
- Pajor, A. ve Tomczak-Jaegermann, N., 1989. Volume Ratio and Other s-Numbers of Operators Related to Local Properties of Banach Spaces, Journal of Functional Analysis, 87, 273-293.

- Pietsch, A., 1963. Einige Neue Klassen von Kompakten Linearen Abbildungen, Rev. Roumaine Math. Pures and Appl., 8, 427-447.
- Pietsch, A., 1974. s-Numbers of Operators in Banach Spaces, Studia Math., 51, 123-132.
- Pietsch, A., 1980b. Operator Ideals, North-Holland Publishing Company, 438 p.
- Pietsch, A., 1980a. Weyl Numbers and Eigenvalues of Operators in Banach Spaces, Math. Ann., 247, 149-168.
- Pietsch, A., 1980. Weyl Numbers and Eigenvalues of Operators in Banach Spaces, Math. Ann., 247, 149-168.
- Pietsch, A., 1987. Eigenvalues and s-Numbers, Cambridge University Press, 360 p.
- Pietsch, A., 2007. History of Banach Spaces and Linear Operators, Birkhauser Boston, 855 p.
- Pisier, G., 1989a. A new Approach to Several Results of V. Milman, J. Reine Angew. Math., 393, 115-131.
- Pisier, G., 1989b. Volume Inequalities in the Geometry of Banach Spaces, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 250 p.
- Rudin, W., 1953. Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill, Inc., 353 p.
- Rynne, B.P., ve Youngson, M.A., 2008. Linear Functional Analysis, Springer, 3p-210p.
- Schur, I., 1909. Über die Charakteristischen Wurzeln Einer Linearen Substitution mit Einer Anwendung auf die Theorie der Integralgleichungen, Math. Ann., 66, 488-510.
- Schmidt, E., 1907. Zur Theorie der Linearen und Nichtlinearen Integralgleichungen, Math. Ann., 63, 433-476.
- Soykan, Y., 2008. Fonksiyonel Analiz, Nobel Dağıtım, Ankara, 504 s.
- Von Neumann, J. ve Schatten, 1948. R., The Cross-Space of Linear Transformations, Ann. of Math., 49, 557-582.
- Weyl, H., 1949. Inequalities Between Two Kinds of Eigenvalues of a Linear Transformation, Proc. Nat. Sci. U.S.A., 35, 408-411.

ÖZGEÇMİŞ

Ünal Kemal ALKAN, yılında doğdu. İlk ve orta öğrenimini Gazipaşa İlkokulu'nda 2006 yılında tamamladı, lise öğrenimini ise 2010 yılında Gümüşhane Mareşal Çakmak Anadolu Öğretmen Lisesinde tamamladı. 2012 yılında Gümüşhane Üniversitesi Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi Matematik Mühendisliği'nde başladığı lisans eğitimini 2016 yılında tamamladı. Aynı fakültenin İnşaat Mühendisliği dalında 2017 yılında öğrenimine başladı 2020 yılında bu alanda öğrenimini tamamladı.

2018 yılında Gümüşhane Üniversitesi Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında yüksek lisansa başladı.