

**BASİT RASTGELE ÖRNEKLEME YÖNTEMİNDE
KİTLE VARYANS TAHMİN EDİCİLERİNİN
KİTLE ORTALAMASININ GÜVEN ARALIKLARINDA
KULLANILMASI**

**USİNG THE POPULATION VARIANCE ESTIMATORS FOR
THE CONFIDENCE INTERVALS OF POPULATION MEAN
IN SIMPLE RANDOM SAMPLING METHOD**

EKİN GÖZDE ÖZKAN

PROF. DR. HÜLYA ÇİNGİ

Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim-Öğretim Sınav Yönetmeliğinin
İstatistik Anabilim Dalı İçin Öngördüğü
YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırlanmıştır.

2018

Ekin Gözde ÖZKAN' ın hazırladığı “**Basit Rastgele Örneklem Yönteminde Kitle Varyans Tahmin Edicilerinin Kitle Ortalamasının Güven Aralıklarında Kullanılması**” adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **İSTATİSTİK ANABİLİM DALI'** nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Yaprak Arzu ÖZDEMİR
Başkan



Prof. Dr. Hülya ÇINGİ
Danışman



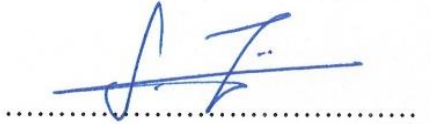
Prof. Dr. Cem KADILAR
Üye



Prof. Dr. Mehtap AKÇİL OK
Üye



Doç. Dr. Semra TÜRKAN
Üye



Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Menemşe GÜMÜŞDERELİOĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

YAYINLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI BEYANI

Enstitü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin/raporumun tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı (kağıt) ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda verilen koşullarla kullanıma açma iznini Hacettepe Üniversitesine verdiğimi bildiririm. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanım hakları bana ait olacaktır.

Tezin kendi orijinal çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanması zorunlu metinlerin yazılı izin alarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

- ☒ **Tezimin/Raporumun tamamı dünya çapında erişime açılabilir ve bir kısmı veya tamamının fotokopisi alınabilir.**

(Bu seçenekle teziniz arama motorlarında indekslenebilecek, daha sonra tezinizin erişim statüsünün değiştirilmesini talep etmeniz ve kütüphane bu talebinizi yerine getirirse bile, tezinin arama motorlarının önbelleklerinde kalmaya devam edebilecektir.)

- ☐ **Tezimin/Raporumun tarihine kadar erişime açılmasını ve fotokopi alınmasını (İç Kapak, Özet, İçindekiler ve Kaynakça hariç) istemiyorum.**

(Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım takdirde, tezimin/raporumun tamamı her yerden erişime açılabilir, kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı ve ya tamamının fotokopisi alınabilir)

- ☐ **Tezimin/Raporumun tarihine kadar erişime açılmasını istemiyorum, ancak kaynak gösterilmek şartıyla bir kısmı veya tamamının fotokopisinin alınmasını onaylıyorum.**

- ☐ **Serbest Seçenek/Yazarın Seçimi**

04. / 07. / 2018


(İmza)

Öğrencinin Adı Soyadı

ETİK

Hacettepe üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

02/07/2018



EKİN GÖZDE ÖZKAN

ÖZET

BASİT RASTGELE ÖRNEKLEME YÖNTEMİNDE KİTLE VARYANS TAHMİN EDİCİLERİNİN KİTLE ORTALAMASININ GÜVEN ARALIKLARINDA KULLANILMASI

Ekin Gözde ÖZKAN

Yüksek Lisans, İstatistik Bölümü

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hülya ÇINGİ

Haziran 2018, 143 Sayfa

Bu tez çalışmasında Basit Rastgele Örneklem yönteminde kitle varyans tahmin edicileri incelenmiş ve incelenen varyans tahmin edicilerin kitle ortalamasının güven aralıklarında kullanılması önerilmiştir. Çalışmada, birbirinden farklı varyans tahmin ediciler kullanılarak hesaplanan güven aralıkları tahminlerinin hangi değişkenlere bağlı olarak değişebileceği irdelenmiştir. Simülasyon çalışması ile en etkin tahmin edici Gupta ve Shabbir varyans tahmin edicisi, en dar güven aralığını veren tahmin edici ise Lone ve Tailor varyans tahmin edicisi olarak hesaplanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Basit Rastgele Örneklem, Varyans Tahmin Edicisi, Ortalamanın Varyans Tahmin Edicisi, Güven Aralığı Tahmini, Hata Kareler Ortalaması (HKO).

ABSTRACT

USİNG THE POPULATION VARIANCE ESTIMATORS FOR THE CONFIDENCE INTERVALS OF POPULATION MEAN IN SIMPLE RANDOM SAMPLING METHOD

Ekin Gözde ÖZKAN

Master of Science, Department of Statistics

Supervisor: Prof. Dr. Hülya ÇİNGİ

June 2018, 143 Pages

In this study, some variance estimators in simple random sampling method have been investigated. These estimators have been proposed to use in the estimation of confidence intervals of the population mean in this study. Also, how the confidence interval estimators that were calculated by using different variance estimators could change depending on different variables. As a result, it is discussed which estimators provides the best confidence interval by a simulation study. Simulation study show that while the most efficient variance estimator Gupta and Shabbir, the variance estimator with the narrowest confidence interval of population mean is Lone Tailor variance estimator.

Keywords: Simple Random Sampling, Variance Estimator, Variance Estimator of Mean, Estimation of Confidence Interval, Mean Square Error (MSE).

TEŞEKKÜR

Değerli bilgisini, gülüyüzünü ve samimiyetini çalışmalarım boyunca benden bir an olsun esirgemeyen, tecrübesi ve katkılarıyla beni yönlendiren, aynı zamanda da manevi desteğini her zaman hissettiğim tez danışmanım ve sevgili hocam Sayın Prof. Dr. Hülya ÇINGİ'ya,

Tez çalışmam boyunca bana zaman ayırdığı, yol gösterdiği, yardımlarını ve desteklerini hiç esirmediği için değerli hocam Prof. Dr. Cem KADILAR'a,

Çalışmamın tamamlanması sürecinde bana olan desteklerinden dolayı, Daire Başkanım Meral ATILGAN'a, başta Hakan COŞKUN, Süleyman Uğur GÜR ve Dr. Nimet OKAN olmak üzere tüm çalışma arkadaşlarıma,

Her zaman olduğu gibi bu süreçte de yanımda olan, beni destekleyen ve tezimin bitmesini dört gözle bekleyen sevgili eşim Serkan ÖZKAN'a, çok değerli aileme saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
ÇİZELGELER.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xii
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL BİLGİLER	4
2.1. Basit Rastgele Örnekleme Yönteminde Birim Başına Düşen Kitle Varyans Tahmin Edicileri	4
2.1.1. Klasik Varyans Tahmin Edicisi.....	4
2.1.2. Hirano Varyans Tahmin Edicisi	8
2.1.3. Das ve Tripathi Varyans Tahmin Edicileri	9
2.1.4. Isaki Varyans Tahmin Edicisi	13
2.1.5. Prasad ve Singh Varyans Tahmin Edicileri.....	15
2.1.6. Garcia ve Cebrain Varyans Tahmin Edicisi	19
2.1.7. Upadhyaya ve Singh Varyans Tahmin Edicisi	20
2.1.8. Chandra ve Singh Varyans Tahmin Edicisi	22
2.1.9. Kadılar ve Çingı Varyans Tahmin Edicisi	24
2.1.10. Gupta ve Shabbir Varyans Tahmin Edicisi	26
2.1.11. Subramani ve Kumarapandiyar Varyans Tahmin Edicisi.....	30
2.1.12. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicileri	31
2.1.13. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicileri	33
2.1.14. Lone ve Tailor Varyans Tahmin Edicisi	35
3. BASİT RASTGELE ÖRNEKLEME (BRÖ)'DE ÖNERİLEN ORTALAMANIN VARYANS TAHMİN EDİCİLERİ.....	40
3.1. Ortalamanın Varyans Tahmin Edicileri	40
3.1.1. Ortalamanın Klasik Varyans Tahmin Edicisi.....	40
3.1.2. Önerilen Ortalamanın Varyans Tahmin Edicileri	41

4. BASİT RASTGELE ÖRNEKLEME (BRÖ)' DE KİTLE ORTALAMASININ GÜVEN ARALIĞI TAHMİNLERİ	46
4.1. Kitle Ortalamasının Güven Aralığı Tahminleri	46
4.1.1. Kitle Ortalamasının Klasik Güven Aralığı Tahmini	46
4.1.2. Hirano Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığında Kullanılması.....	48
4.1.3. Das ve Tripathi Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığında Kullanılması	49
4.1.4. Isaki Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığında Kullanılması	50
4.1.5. Prasad ve Singh Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığında Kullanılması	51
4.1.6. Garcia ve Cebraın Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığında Kullanılması.....	53
4.1.7. Upadhyaya ve Singh Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığında Kullanılması ..	53
4.1.8. Chandra ve Singh Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığında Kullanılması	54
4.1.9. Kadılar ve Çıngı Varyans Tahmin Edicilerinin Güven Aralığında Kullanılması	56
4.1.10. Gupta ve Shabbir Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığında Kullanılması.....	59
4.1.11. Subramani ve Kumarapandiyan Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığında Kullanılması	60
4.1.12. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicilerinin Güven Aralığında Kullanılması....	60
4.1.13. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralıklarında Kullanılması	61
4.1.14. Lone ve Tailor Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığında Kullanılması	62
5. BASİT RASTGELE ÖRNEKLEME İÇİN SİMÜLASYON ÇALIŞMASI.....	65
5.1. Klasik Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığı.....	90
5.2. Hirano Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığı	92
5.3. Das ve Tripathi Varyans Tahmin Edicilerinin Güven Aralığı	93
5.4. Isaki Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığı	96
5.5. Prasad ve Singh Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığı.....	98
5.6. Garcia ve Cebraın Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığı	100
5.7. Upadhyaya ve Singh Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığı	101
5.8. Chandra ve Singh Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığı.....	102
5.9. Kadılar ve Çıngı Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığı.....	105
5.10. Gupta ve Shabbir Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığı	110
5.11. Subramani ve Kumarapandiyan Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığı.....	113
5.12. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığı	114

5.13. Yadav, Kadilar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığı.....	124
5.14. Lone ve Tailor Varyans Tahmin Edicisi Güven Aralığı	134
6. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME	136
KAYNAKLAR	138
EKLER	140
ÖZGEÇMİŞ.....	143



ÇİZELGELER

Çizelge 2.1. Singh ve Solanki Tahmin Edicileri.....	32
Çizelge 2.2. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Tahmin Edicileri ($\lambda_{(yd)} = 0$).....	33
Çizelge 2.3. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Tahmin Edicileri ($\lambda_{(yd)} = 1$).....	34
Çizelge 3.1. BRÖ'de Önerilen Ortalamanın Varyans Tahmin Edicileri	43
Çizelge 3.2. BRÖ'de Önerilen Ortalamanın Varyans Tahmin Edicileri (Devam)	44
Çizelge 3.3. BRÖ'de Önerilen Ortalamanın Varyans Tahmin Edicileri (Devam)	45
Çizelge 5.1. Adıyaman İli Halk Kütüphanelerinin Kitap (x) ve Kullanıcı (y) Sayılarına... İlişkin Betimsel İstatistikler.....	65
Çizelge 5.2. Klasik, Hirano, Das ve Tripathi Varyans Tahmin Edicileri.....	66
Çizelge 5.3. Klasik, Hirano, Das ve Tripathi Varyans Tahmin Edicileri (Devam).....	67
Çizelge 5.4. Klasik, Hirano, Das ve Tripathi Varyans Tahmin Edicileri (Devam).....	68
Çizelge 5.5. Isaki, Prasad ve Singh, Garcia ve Cebrain Varyans Tahmin Edicileri	68
Çizelge 5.6. Isaki, Prasad ve Singh, Garcia ve Cebrain Varyans Tahmin Edicileri (Devam)	69
Çizelge 5.7. Isaki, Prasad ve Singh, Garcia ve Cebrain Varyans Tahmin Edicileri (Devam)	70
Çizelge 5.8. Upadhyaya ve Singh, Chandra ve Singh Varyans Tahmin Edicileri	71
Çizelge 5.9. Upadhyaya ve Singh, Chandra ve Singh Varyans Tahmin Edicileri (Devam)	72
Çizelge 5.10. Upadhyaya ve Singh, Chandra ve Singh Varyans Tahmin Edicileri (Devam)	73
Çizelge 5.11. Kadılar ve Çingı Varyans Tahmin Edicileri.....	73
Çizelge 5.12. Kadılar ve Çingı Varyans Tahmin Edicileri (Devam)	74
Çizelge 5.13. Kadılar ve Çingı Varyans Tahmin Edicileri (Devam)	75
Çizelge 5.14. Gupta ve Shabbir, Subramani ve Kumarapandiyan Varyans Tahmin Edicileri	76
Çizelge 5.15. Gupta ve Shabbir, Subramani ve Kumarapandiyan Varyans Tahmin Edicileri (Devam).....	77
Çizelge 5.16. Gupta ve Shabbir, Subramani ve Kumarapandiyan Varyans Tahmin Edicileri (Devam).....	78
Çizelge 5.17. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicileri.....	78

Çizelge 5.18. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicileri (Devam)	79
Çizelge 5.19. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicileri (Devam)	80
Çizelge 5.20. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicileri (Devam)	81
Çizelge 5.21. Singh ve Solanki Diğer Varyans Tahmin Edicileri (Devam)	81
Çizelge 5.22. Singh ve Solanki Diğer Varyans Tahmin Edicileri (Devam)	82
Çizelge 5.23. Singh ve Solanki Diğer Varyans Tahmin Edicileri (Devam)	83
Çizelge 5.24. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicileri ($\lambda_{(yd)} = 0$)	84
Çizelge 5.25. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicileri($\lambda_{(yd)} = 0$) (Devam).....	85
Çizelge 5.26. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicileri($\lambda_{(yd)} = 0$) (Devam).....	86
Çizelge 5.27. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicileri ($\lambda_{(yd)} = 1$)	86
Çizelge 5.28. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicileri($\lambda_{(yd)} = 1$) (Devam).....	87
Çizelge 5.29. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicileri ($\lambda_{(yd)} = 1$) (Devam).....	88
Çizelge 5.30. Lone ve Tailor Varyans Tahmin Edicisi	89
Çizelge 5.31. Klasik Varyans Tahmin Edicisine (s_y^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu	91
Çizelge 5.32. Hirano Varyans Tahmin Edicisine (s_h^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu	92
Çizelge 5.33. Das ve Tripathi Varyans Tahmin Edicisine (s_{dt1}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu	93
Çizelge 5.34. Das ve Tripathi Varyans Tahmin Edicisine (s_{dt2}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu	94
Çizelge 5.35. Das ve Tripathi Varyans Tahmin Edicisine (s_{dt3}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu	95
Çizelge 5.36. Isaki Varyans Tahmin Edicisine (s_i^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu	96
Çizelge 5.37. Isaki Varyans Tahmin Edicisine (s_{ireg}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu.....	97
Çizelge 5.38. Prasad ve Singh Varyans Tahmin Edicisine (s_{ps1}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu	98

Çizelge 5.39. Prasad ve Singh Varyans Tahmin Edicisine (s_{ps2}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu	99
Çizelge 5.40. Garcia ve Cebrain Varyans Tahmin Edicisine (s_{gc}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu	100
Çizelge 5.41. Upadhyaya ve Singh Varyans Tahmin Edicisine (s_{us}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu	101
Çizelge 5.42. Chandra ve Singh Varyans Tahmin Edicisine (s_{cs1}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu	102
Çizelge 5.43. Chandra ve Singh Varyans Tahmin Edicisine (s_{cs2}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu	103
Çizelge 5.44. Chandra ve Singh varyans tahmin edicisine (s_{cs3}^2) ait güven aralığı uzunluğu	104
Çizelge 5.45. Kadılar ve Çıngı Varyans Tahmin Edicisine (s_{kc1}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu	105
Çizelge 5.46. Kadılar ve Çıngı Varyans Tahmin Edicisine (s_{kc2}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu	106
Çizelge 5.47. Kadılar ve Çıngı Varyans Tahmin Edicisine (s_{kc3}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu	107
Çizelge 5.48. Kadılar ve Çıngı Varyans Tahmin Edicisine (s_{kc4}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu	108
Çizelge 5.49. Kadılar ve Çıngı Varyans Tahmin Edicisine (s_{kc5}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu	109
Çizelge 5.50. Gupta ve Shabbir Varyans Tahmin Edicisine (s_{gs}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu ($\alpha_{(gs)} = 0$).....	110
Çizelge 5.51. Gupta ve Shabbir Varyans Tahmin Edicisine (s_{gs}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu ($\alpha_{(gs)} = 1$).....	111
Çizelge 5.52. Gupta ve Shabbir Varyans Tahmin Edicisine (s_{gs}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu ($\alpha_{(gs)} = -1$).....	112

Çizelge 5.53. Subramani ve Kumarapandiyan Varyans Tahmin Edicisine (s_{sk}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu	113
Çizelge 5.54. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicisine (s_{ss1}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu	114
Çizelge 5.55. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicisine (s_{ss2}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu	115
Çizelge 5.56. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicisine (s_{ss3}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu	116
Çizelge 5.57. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicisine (s_{ss4}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu	117
Çizelge 5.58. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicisine (s_{ss5}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu	118
Çizelge 5.59. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicisine (s_{ss6}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu	119
Çizelge 5.60. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicisine (s_{ss7}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu	120
Çizelge 5.61. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicisine (s_{ss8}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu	121
Çizelge 5.62. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicisine (s_{ss9}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu	122
Çizelge 5.63. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicisine (s_{ss10}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu	123
Çizelge 5.64. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicisine (s_{yd0}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu ($\lambda = 0$)	124
Çizelge 5.65. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicisine (s_{yd1}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu ($\lambda = 0$)	125
Çizelge 5.66. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicisine (s_{yd2}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu ($\lambda = 0$)	126

Çizelge 5.67. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicisine (s_{yd3}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu ($\lambda = 0$)	127
Çizelge 5.68. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicisine (s_{yd4}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu ($\lambda = 0$)	128
Çizelge 5.69. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicisine (s_{yd0}^{2*}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu ($\lambda = 1$)	129
Çizelge 5.70. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicisine (s_{yd1}^{2*}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu ($\lambda = 1$	130
Çizelge 5.71. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicisine (s_{yd2}^{2*}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu ($\lambda = 1$	131
Çizelge 5.72. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicisine (s_{yd3}^{2*}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu ($\lambda = 1$)	132
Çizelge 5.73. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicisine (s_{yd4}^{2*}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu ($\lambda = 1$)	133
Çizelge 5.74. Lone ve Tailor Varyans Tahmin Edicisine (s_{lt}^{2**}) Ait Güven Aralığı uzunluğu	134

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

N: Kitle büyüklüğü

n: Örneklem büyüklüğü

f: Örnekleme oranı

$\bar{Y}$: y değişkenin kitle ortalaması

$\bar{y}$: y değişkeninin örneklem ortalaması

C_y : y değişkeninin değişim katsayısı

$\beta_2(y)$: y değişkeninin basıklık katsayısı

$\bar{X}$: x değişkeninin birim başına düşen kitle ortalaması

$\bar{x}$: x değişkeninin birim başına düşen örneklem ortalaması

C_x : x değişkeninin değişim katsayısı

$\beta_2(x)$: x değişkeninin basıklık katsayısı

λ : Düzeltme terimi

f: Örnekleme oranı

S_x^2 : x değişkeninin kitle varyansı

S_y^2 : y değişkeninin kitle varyansı

s_y^2 : y değişkeninin klasik varyans tahmin edicisi

s_h^2 : Hirano varyans tahmin edicisi

s_{dti}^2 : Das ve Tripathi varyans tahmin edicisi, $i=1,2,3$.

s_i^2 : Isaki oransal varyans tahmin edicisi

s_{ireg}^2 : Isaki regresyon varyans tahmin edicisi

s_{psi}^2 : Prasad ve Singh varyans tahmin edicisi, $i=1,2$.

s_{gc}^2 : Garcia ve Cebrain varyans tahmin edicisi

s_{us}^2 : Upadhyaya ve Singh varyans tahmin edicisi

s_{csi}^2 : Chandra ve Singh varyans tahmin edicisi, $i=1,2,3$.

$s_{k\check{c}i}^2$: Kadılar ve Çıngı varyans tahmin edicisi, $i=1,2,3,4$.

$s_{k\check{c}reg}^2$: Kadılar ve Çıngı regresyon varyans tahmin edicisi

s_{gs}^2 : Gupta ve Shabbir varyans tahmin edicisi

s_{ssi}^2 : Singh ve Solanki varyans tahmin edicisi, $i=1,2,3,\dots,10$.

s_{sk}^2 : Subramani ve Kumarapandiyan varyans tahmin edicisi

s_{yd}^2 : Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta varyans tahmin edicisi, $i=0,1,2,3,4$.

s_{lt}^2 : Lone ve Tailor varyans tahmin edicisi.

Kısaltmalar

BRÖ: Basit Rastgele Örnekleme

HKO: Hata Kareler Ortalaması

1. GİRİŞ

İstatistiğin amaçlarından biri kitleye ait parametreler hakkında bilgi edinmektir. Kitledeki birim sayısı az ise bu birimlerden kitleye ilişkin parametre değerlerini (ortalama, varyans vb.) hesaplayabilmek çok zor olmayacaktır. Ancak kitle parametrelerinin hesaplanmasının çok zor olduğu, yani kitlenin tamamına ulaşmanın imkânsız olduğu, zaman kısıtı, sınırlı bütçe gibi durumlarda kitleyi temsil edebilecek bir miktar birimin oluşturduğu alt grup olan örneklemden yararlanılır. Bu sayede kitlenin yapısına en uygun örnekleme yöntemiyle örneklem seçilerek kitle hakkında tahminler yapılır.

Örneklem kuramında iki süreçten bahsedilir. İlki seçim sürecidir. Kitlenin yapısına en uygun örnekleme yönteminin seçiminin yapılabilmesi için öncelikle kitleyi oluşturan birimlerin bilinmesi gereklidir. 1920’li ve 1930’lu yıllarda en çok kullanılan ve bir olasılığa bağlı olmayan örnekleme yöntemi olasılıksız örnekleme yöntemidir. Bilimsel yöntemlerde bu örnekleme yöntemlerine pek başvurulmaz. 1940’lı yıllardan itibaren günümüze kadar gelişme göstermiş diğer örnekleme yöntemleri ise örnekleme yöntemlerinin belirli olasılıklarla çekildiği olasılıklı örnekleme yöntemleridir.

Bu çalışmada ilgilenilen örnekleme yöntemi olasılıklı örnekleme yöntemlerinden Basit Rastgele Örneklem (BRÖ) yöntemidir. Bu yöntem N büyüklüğünde bir kitleden bağımsız olarak seçilebilecek birbirinden farklı n büyüklüğünde örneklem kombinasyonlarına eşit seçilme şansı tanıyan örnekleme yöntemidir [1]. En temel örnekleme yöntemi olan BRÖ’de, örneklem birimi yerine konulmaksızın örneklem büyüklüğü elde edilinceye kadar çekim işlemi devam eder.

Örneklem seçiminde ikinci süreç ise tahmin sürecidir. Kitlenin özelliklerini tanımlayan sayısal ölçülere parametre denir. Sonlu kitleden çekilen örneklemden yararlanılarak kitle parametreleri tahmin edilmeye çalışılır. Bu tahminler için kullanılan matematiksel eşitlik ise tahmin edici adını almaktadır. İyi bir tahmin edicinin tutarlılık, yansızlık, etkinlik ve duyarlılık özelliklerini sağlaması istenir. Tahmin ile parametre arasındaki farkın düşünülebilen en küçük pozitif bir sayıdan küçük kalma olasılığı “bir” ise, o tahmine tutarlı denilir. Sonlu kitlelerde ise, tutarlılık örneklem büyüklüğün kitle büyüklüğüne eşit olduğu durumda, tahminin parametre değerine eşit olmasıdır. Yansız tahmin edici ise, tahmin edicinin beklenen değerinin parametre değerine eşit olma durumudur. Etkinlik ise HKO’nun

küçük olması anlamına gelmektedir. Bir tahmin edicinin, HKO'su ne kadar küçükse o derece etkindir. HKO,

$$HKO(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2 + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2$$

$$HKO(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2 = V(\hat{\theta}) + (Yan)^2 \quad (1.1)$$

olarak tanımlanır. Eş. (1.1)'den anlaşılacağı üzere, yansız tahmin ediciler için HKO varyans ile aynı anlama gelir. Yan değeri, tahmin edicinin beklenen değerinin parametreden farkı olmak üzere, kuramsal olarak bir tahmin edicinin yansızlığından söz edilirse, bir tahmin edicinin varyansı HKO'ya eşit olmaktadır. Bir tahmin edicinin varyansının tersi ise duyarlılıktır. Varyansı küçük olan tahmin ediciler yüksek duyarlılığa sahiptir denilir [2].

Kitle ortalamasından sonra en çok tahmin edilmek istenen parametre kitle varyansı olan S_y^2 'dir. Kitle varyansının tahmininde klasik yöntemin dışında yardımcı değişkene ilişkin bilgilerden faydalanılarak oransal tahminler de yapılabilmektedir. Özellikle yardımcı değişken bilgisini kullanmak tahmin edicinin etkinliğini artıran, daha küçük varyansa sahip tahminler vermeyi sağlayan bir unsur olarak karşımıza çıkmaktadır.

Parametrelerin tek bir değer olarak tahmin edilmesi nokta tahminidir. $\bar{Y}$ için $\bar{y}$, S^2 için s^2 istatistikleri nokta tahminleridir. Nokta tahmininin dışında kitle parametrelerinin güven aralık tahminleri de yapılabilir. Kitle parametresi için alt ve üst sınırlar belirlenerek kitle parametresinin o aralıklarda olması olasılığı güven aralığı olarak adlandırılır.

Bu çalışmanın amacı; BRÖ'de bazı varyans tahmin edicilerinden yola çıkarak *ortalamanın varyansını* tahmin etmek ve güven aralıklarında kullanmaktır.

İkinci bölümde, BRÖ yöntemi için genel bilgiler verilerek literatürde yer alan bazı varyans tahmin edicilerden bahsedilmiştir. Bu tahmin edicilerin etkinlik karşılaştırmalarına da yine bu bölümde yer verilmektedir.

Üçüncü bölümde varyans tahmin edicilerinden (s_y^2) yola çıkarak *ortalamanın varyans* tahmin edicilerine ilişkin genel bir çıkarım yapılmıştır. Bu çıkarımdan hareketle BRÖ için birbirinden farklı ortalama için varyans tahmin edicileri hesaplanmıştır. Bu tahmin edicilerden yola çıkarak birbirinden farklı güven aralığı tahminleri ise dördüncü bölümde

verilmiştir. Farklı güven aralığı tahminlerinin nelere bağlı olarak değiştiğinden de yine bu bölümde bahsedilmiştir.

Beşinci bölümde de BRÖ yönteminde önceki bölümlerde anlatılanlar ışığında simülasyon çalışması ile uygulama yapılmıştır. Son bölümde ise sonuç ve değerlendirmeye yer verilmiştir.



2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, BRÖ yönteminde, literatürdeki bazı varyans tahmin edicilerinden bahsedilecektir. İncelenen bu tahmin ediciler, ileriki bölümlerde önerilecek olan *ortalamanın varyans* tahmin edicilerinde ve güven aralıklarında tekrar karşımıza çıkacaktır.

2.1. Basit Rastgele Örneklem Yönteminde Birim Başına Düşen Kitle Varyans Tahmin Edicileri

Örneklem teorisi literatüründe; kitle varyansının tahmini üzerine çalışmalar yapılmış ve

birçok tahmin edici üretilmiştir. $\sigma_y^2 = \frac{\sum_{j=1}^N (y_j - \bar{Y})^2}{N}$ olmak üzere, y değişkenine ilişkin kitle varyansı $S_y^2 = \frac{N}{N-1} \sigma_y^2$ şeklinde yazılmaktadır [3]. Burada σ_y^2 'de N yerine $N-1$ bölünerek çok az büyük ancak yansız s_y^2 tahminine ulaşılabilmektedir [2].

2.1.1. Klasik Varyans Tahmin Edicisi

Örneklem kuramında, seçim sürecinden sonra tahmin süreci gelir. Seçim sürecinde kullanılan yöntemlere göre parametreler tahmin edilir. Basit rastgele örneklemede S_y^2 parametre değeri tahmin edilebilir.

S_y^2 'nin klasik yansız tahmin edicisi aşağıdaki gibi gösterilmektedir:

$$s_y^2 = \frac{\sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2}{n-1} \quad (2.1)$$

Burada $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j$, y değişkeninin örneklem ortalaması ve n örneklem büyüklüğüdür. s_y^2

yansızdır ve $E(s_y^2) = S_y^2$ 'dir.

Kitle bilgisi için genel gösterimler aşağıdaki gibidir:

$$\mu_{rs} = \frac{\sum_{j=1}^N (y_j - \bar{Y})^r (x_j - \bar{X})^s}{N} . \quad (2.2)$$

Eş. (2.2)'de

- $s=0$ iken, $\mu_r = \frac{\sum_{j=1}^N (y_j - \bar{Y})^r}{N}$.
- $\bar{X} = \bar{Y} = 0$ iken $\mu'_{rs} = \frac{\sum_{j=1}^N (y_j)^r (x_j)^s}{N}$.
- $\bar{Y} = 0$ ve $s=0$ iken, $\mu'_r = \frac{\sum_{j=1}^N (y_j)^r}{N}$.

olarak gösterilir.

➤ Örneklem için ise genel gösterim aşağıdaki gibidir:

$$m_{rs} = \frac{\sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^r (x_j - \bar{x})^s}{n} \quad (2.3)$$

Eş. (2.3)'de

- $s=0$ iken; $m_r = \frac{\sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^r}{n}$.
- $\bar{x} = \bar{y} = 0$ iken; $m'_{rs} = \frac{\sum_{j=1}^n (y_j)^r (x_j)^s}{n}$.
- $\bar{y} = 0$ ve $s=0$ iken, $m'_r = \frac{\sum_{j=1}^n (y_j)^r}{n}$.

olarak gösterilir.

Eş. (2.3)'de $s=0$ ve $r=2$ olduğunda, ortalamaya göre ikinci moment;

$$m_2 = \frac{\sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2}{n} = \hat{\sigma}^2 \cong s_y^2 \quad (2.4)$$

şeklinde bulunur.

Bu eşitliklerden yola çıkılarak $s=0$ olduğunda varyans,

$$V(m_r) = \frac{(\mu_{2r} - \mu_r^2 + r^2 \mu_2 \mu_{r-1}^2 - 2r \mu_{r-1} \mu_{r+1})}{n} \quad (2.5)$$

şeklinde yazılır. Eş. (2.4)'te bulunan örneklem varyansı, Eş. (2.5)'te yerine yazılırsa;

$$V(m_2) = V(s_y^2) = \frac{(\mu_4 - \mu_2^2 + 4\mu_2 \mu_1^2 - 4\mu_1 \mu_3)}{n} \quad (2.6)$$

elde edilir.

$$\mu_1 = \frac{\sum_{j=1}^N (y_j - \bar{Y})}{N} = 0 \quad \text{olduğuna göre üçüncü ve dördüncü terimler sıfırdır. Eşitlik artık}$$

aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$V(s_y^2) = \frac{(\mu_4 - \mu_2^2)}{n}. \quad (2.7)$$

Düzenleme yapıldığında eşitlik şöyle gösterilebilir:

$$V(s_y^2) = \frac{\mu_2^2}{n} \left(\frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 1 \right) \quad (2.8)$$

Burada $\frac{1}{n} = \lambda$ ve $\frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \beta_2(y)$ olduğundan, Eş. (2.8)'de eşitlikler yerine yazılırsa;

$$V(s_y^2) = \lambda S_y^4 (\beta_2(y) - 1) \quad (2.9)$$

sonucu elde edilir [3].

Kovaryans için genel gösterim ise

$$\text{cov}(m_{rs}, m_{uv}) = \frac{1}{n} \left(\mu_{(r+u)(s+v)} - \mu_{rs} \mu_{uv} + r \mu_{20} \mu_{(r-1)s} \mu_{(u-1)v} + s \mu_{02} \mu_{r(s-1)} \mu_{u(v-1)} + r \mu_{11} \mu_{(r-1)s} \mu_{u(v-1)} \right). \quad (2.10)$$

şeklindedir. $r=2, s=0, u=0$ ve $v=2$ olduğunda formül aşağıdaki gibi yazılır:

$$\text{cov}(m_{20}, m_{02}) = \frac{1}{n} \left(\mu_{22} - \mu_{20} \mu_{20} + 2 \times 0 \mu_{20} \mu_{10} \mu_{(0-1)2} + 0 \times 2 \mu_{02} \mu_{2(0-1)} \mu_{01} + 2 \times 2 \mu_{11} \mu_{10} \mu_{01} \right).$$

(2.11)

$$\mu_{10} = \frac{\sum_{j=1}^N (y_j - \bar{Y})^1 (x_j - \bar{X})^0}{N} = 0 \text{ ve } \mu_{01} = \frac{\sum_{j=1}^N (y_j - \bar{Y})^0 (x_j - \bar{X})^1}{N} = 0$$
 olduğuna göre formül sade biçimde,

$$\begin{aligned} \text{cov}(m_{20}, m_{02}) &= \frac{1}{n} (\mu_{22} - \mu_{20}\mu_{02}) = \frac{1}{n} \mu_{20}\mu_{02} \left(\frac{\mu_{22}}{\mu_{20}\mu_{02}} - 1 \right), \\ &= \frac{1}{n} S_y^2 S_x^2 (\theta - 1) \end{aligned} \quad (2.12)$$

olarak yazılır [3].

Varyans tahminlerinde en etkin tahmin ediciyi bulabilmek için tahmin edicilerin hata kareler ortalamalarına bakmak gerekir. HKO'su küçük olan tahmin edici, diğerine göre daha etkindir denir. Örnek olarak θ parametresinin $\hat{\theta}$ tahmin edicisi için HKO,

$$\text{HKO}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2 \quad (2.13)$$

şeklinde gösterilir. $E(\hat{\theta})$ bir kez eklenip çıkarılarak,

$$\text{HKO}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2 + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2$$

$$\text{HKO}(\hat{\theta}) = \text{Varyans}(\hat{\theta}) + (\text{Yan})^2 \quad (2.14)$$

elde edilir. Eş. (2.14)'te görüldüğü üzere yansız tahmin ediciler için HKO varyansa eşit olmaktadır.

Bu tanım ışığında, klasik varyans tahmin edicisinin HKO'su

$$\begin{aligned} \text{HKO}(s_y^2) &= V(s_y^2) = E(s_y^2 - S_y^2)^2, \\ &= E(s_y^4 - 2s_y^2 S_y^2 + S_y^4), \\ &= E(s_y^4) - 2S_y^2 E(s_y^2) + S_y^4 \\ &= E(s_y^4) - 2S_y^2 S_y^2 + S_y^4 \\ &= E(s_y^4) - S_y^4 \end{aligned}$$

olmaktadır. Eş. (2.14)'ten de HKO

$$\text{HKO}(s_y^2) = V(s_y^2) = \lambda S_y^4 (\beta_2(y) - 1) \quad (2.15)$$

şeklinde yazılabilir [3].

2.1.2. Hirano Varyans Tahmin Edicisi

Kitle varyansının bir başka tahmin edicisi, Hirano tarafından 1973 yılında aşağıdaki şekilde önerilmiştir:

$$s_h^2 = A_{(h)} s_y^2 \quad (2.16)$$

S_y^2 , Eş. (2.1)'de verilmiş olup, bu tahmin edicide $A_{(h)}$ sabit bir sayı olmak üzere HKO'sunu en küçük yapan değerdir. $A_{(h)}$ değerini bulmak için önce HKO bulunur, türev alınır ve sıfıra eşitlenir.

Bu tahmin edicinin HKO'su şöyledir:

$$\begin{aligned} \text{HKO}(s_h^2) &= E(s_h^2 - S_y^2)^2 \\ &= E(A_{(h)} s_y^2 - S_y^2)^2. \end{aligned} \quad (2.17)$$

$A_{(h)} S_y^2$ terimi bir kez eklenip çıkartılırsa,

$$\begin{aligned} &= E(A_{(h)}^2 (s_y^2 - S_y^2)^2 + 2(A_{(h)} - 1)(s_y^2 - S_y^2)A_{(h)} S_y^2 + (A_{(h)} - 1)^2 S_y^4) \\ &= S_y^4 [A_{(h)}^2 (1 + \lambda(\beta_2(y) - 1)) - 2A_{(h)} + 1]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

elde edilir. $A_{(h)}$ 'nın optimal değerini elde etmek için türev alınıp sıfıra eşitlenirse;

$$\frac{\partial \text{HKO}(s_h^2)}{\partial A_{(h)}} = 0,$$

$$A_{(h)}^* = \frac{1}{1 + \lambda(\beta_2(y) - 1)} \quad (2.19)$$

elde edilir.

$A_{(h)}^*$ değeri Eş. (2.16)'da yerine yazılırsa, Hirano'nun varyans tahmin edicisi

$$s_h^2 = \frac{1}{1 + \lambda(\beta_2(y) - 1)} s_y^2 \quad (2.20)$$

şeklinde yazılabilir.

$A_{(h)}^*$ değeri Eş. (2.18)'de yerine yazıldığında, HKO'nun minimum değeri,

$$HKO_{\min}(s_h^2) = S_y^4 \left(\frac{\lambda(\beta_2(y) - 1)}{1 + \lambda(\beta_2(y) - 1)} \right) = V(s_y^2) A_{(h)}^* \quad (2.21)$$

olarak bulunmaktadır.

Hirano varyans tahmin edicisi ile klasik varyans tahmin edicisinin HKO'ları karşılaştırılırsa,

$$HKO_{\min}(s_h^2) < HKO(s_y^2) = V(s_y^2)$$

$$\frac{\lambda S_y^4 (\beta_2(y) - 1)}{(1 + \lambda(\beta_2(y) - 1))} < \lambda S_y^4 (\beta_2(y) - 1)$$

$$\lambda(1 - \beta_2(y)) < 1 \quad (2.22)$$

koşulu elde edilir. Bu koşul altında, Hirano varyans tahmin edicisinin klasik varyans tahmin edicisine göre daha küçük HKO'ya sahip olduğu ve daha etkin olduğu söylenebilir [3].

2.1.3. Das ve Tripathi Varyans Tahmin Edicileri

Örnekleme literatüründe çoğu araştırmacı yardımcı değişkene ilişkin kitle ortalaması, varyans, çarpıklık katsayısı, basıklık katsayısı gibi bazı bilgileri kullanarak ilgilenilen değişkenin kitle ortalaması ve varyans gibi parametreler tahmin edilmektedir [4]. İlgilenilen değişken ile ilgili kitle parametreleri tahmininde yardımcı değişken bilgisi kullanmak tahmin güvenilirliğini arttıran bir unsurdur [5].

Oransal tahmin edicilerde, ilgilenilen y değişkeni ile yardımcı (x) değişken arasındaki ilişkiden yararlanılarak yardımcı değişkene ilişkin bazı bilgiler bilindiğinde ve kullanıldığında ilgilenilen değişkenin kitle varyansının tahmininde kullanılmaktadır [6]. Oransal tahmin edici, iki değişken arasındaki korelasyon katsayısı pozitif olduğu zaman

yardımcı değişkene ilişkin bilgilerin kullanılarak ilgilenilen değişkene ilişkin kitle parametrelerin tahmininde en yaygın kullanılan tahmin edicilerdendir [7].

- ❖ Kitle varyansı için 1978 yılında Das ve Tripathi tarafından oransal tahmin ediciler önerilmiştir:

$$s_{dt1}^2 = s_y^2 \left(\frac{\bar{X}}{\bar{X}} \right)^{\alpha_{(dt)}} , \quad (2.23)$$

$$s_{dt2}^2 = \frac{\bar{X} s_y^2}{\bar{X} + \alpha_{(dt)} (\bar{X} - \bar{X})} . \quad (2.24)$$

Yanlı olan bu tahmin edicilerde, yardımcı değişkene ait $\bar{X}$ kitle ortalamasının bilinmesi gereklidir [8]. Hata kareler ortalamaları ise Taylor Serisi yönteminden yararlanılarak bulunur. Bu yöntem karmaşık ve doğrusal olmayan örnekleme planlarında tahmin edicilerin HKO'larının bulunması için tercih edilen yöntemlerden birisidir [3].

Bu yöntemin amacı doğrusal olmayan bir tahmin ediciyi; formuna, değişken sayısına, örnekleme yöntemine bağlı kalmaksızın doğrusal hale yaklaştırmaktadır. Ancak bu yöntemin uygulanmasında örneklem büyüklüğünün yeterince büyük olması ($n > 30$) istenmekle birlikte, türeve ihtiyaç olduğundan tahmin edicilerin birinci ve ikinci türevlerinin alınabiliyor olması gerekmektedir [3].

$h(Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$ doğrusal olmayan çok değişkenli bir fonksiyon ve $h(\hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \dots, \hat{Y}_k)$ ise tahmin edici fonksiyon olmak üzere yöntem

$$h(\hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \dots, \hat{Y}_k) = h(Y_1, Y_2, \dots, Y_k) + \sum_{j=1}^k d_j (\hat{Y}_j - Y_j) + R_k(Y_k, \alpha) \quad (2.25)$$

$$d_j = \left. \frac{\partial h(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)}{\partial \alpha_j} \right|_{Y_1, Y_2, \dots, Y_k} \quad \text{ve}$$

$$R_k(Y_k, \alpha) = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 h(Y_1, Y_2, \dots, Y_k)}{\partial Y_j \partial Y_i} (\hat{Y}_j - Y_j)(\hat{Y}_i - Y_i) + O_k \quad (2.26)$$

şeklinde belirtilmektedir.

Örnekleme teorisinde; $R_k(Y_k, \alpha)$ değeri örneklem sayısı büyük olduğunda genellikle ihmal edilebilir. Sonuç itibariyle Taylor Serisi yöntemi,

$$h(\hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \dots, \hat{Y}_k) \cong h(Y_1, Y_2, \dots, Y_k) + \sum_{j=1}^k d_j (\hat{Y}_j - Y_j) \quad (2.27)$$

olarak yazılabilir. HKO ise,

$$E \left[h(\hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \dots, \hat{Y}_k) - h(Y_1, Y_2, \dots, Y_k) \right]^2 \cong E \left[\sum_{j=1}^k d_j (\hat{Y}_j - Y_j) \right]^2, \\ HKO \left[h(\hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \dots, \hat{Y}_k) \right] \cong E \left[\sum_{j=1}^k d_j (\hat{Y}_j - Y_j) \right]^2 \quad (2.28)$$

olarak ifade edilebilir. Taylor Serisi matris formuyla gösterilirse,

$$HKO \left[h(\hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \dots, \hat{Y}_k) \right] \cong d \Sigma d' \quad (2.29)$$

şeklinde yazılır. Bu gösterimde d ; $(1 \times k)$ boyutlu kısmi türev vektörü ve Σ ; $(k \times k)$ boyutlu varyans-kovaryans matrisidir [3].

O halde Eş (2.23) ve Eş (2.24)'deki tahmin edicilerin HKO'ları aşağıdaki şekildedir:

$$HKO(s_{dti}^2) \cong d \Sigma d' . \quad i=1,2$$

Burada d vektörü ile varyans-kovaryans matrisi,

$$d = \left[\frac{\partial h(s_y^2, \bar{x})}{\partial s_y^2} \bigg|_{s_y^2, \bar{x}} \quad \frac{\partial h(s_y^2, \bar{x})}{\partial \bar{x}} \bigg|_{s_y^2, \bar{x}} \right] \\ \Sigma = \begin{bmatrix} \text{Var}(s_y^2) & \text{cov}(\bar{x}, s_y^2) \\ \text{cov}(\bar{x}, s_y^2) & \text{Var}(\bar{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda S_y^4 (\beta_2(y) - 1) & \lambda \mu_{21} \\ \lambda \mu_{21} & \lambda S_x^2 \end{bmatrix}$$

biçiminde olup HKO

$$HKO(s_{dti}^2) \cong \lambda \left[S_y^4 (\beta_2(y) - 1) - 2\alpha_{(dt)} \frac{S_y^2 \mu_{21}}{\bar{X}} + \alpha_{(dt)}^2 \frac{S_y^4 S_x^2}{\bar{X}^2} \right]. \quad i=1,2. \quad (2.30)$$

şeklinde. Burada $\alpha_{(dt)}$ 'nın optimal değeri türev alınarak bulunur ve HKO'da yerine yazılırsa,

$$\alpha_{(dt)}^* = \frac{\bar{X}\mu_{21}}{S_y^2 S_x^2}, \quad (2.31)$$

$$HKO_{\min}(s_{dti}^2) \cong \lambda \left[S_y^4 (\beta_2(y) - 1) - \frac{\mu_{21}^2}{S_x^2} \right] \quad i=1,2. \quad (2.32)$$

şeklinde elde edilir.

❖ Das and Tripathi, başka bir kitle varyans tahmin edicisi daha önermiştir [8]. Bu tahmin edici de yardımcı değişkene ilişkin kitle ve örneklem varyansı kullanılarak geliştirilmiştir:

$$s_{dt3}^2 = \frac{s_y^2 S_x^2}{S_x^2 + \alpha_{(dt)}(s_x^2 - S_x^2)}. \quad (2.33)$$

HKO Taylor Serisi açılımından yararlanılarak,

$$HKO(s_{dt3}^2) = \lambda S_y^2 \left[(\beta_2(y) - 1) - 2\alpha_{(dt)}(\theta - 1) + \alpha_{(dt)}^2(\beta_2(x) - 1) \right] \quad (2.34)$$

biçiminde bulunmaktadır.

Burada $\alpha_{(dt)}$ 'nın optimal değeri türev alınarak bulunur ve Eş.(2.34)'teki HKO'nda yerine yazılırsa,

$$\alpha_{(dt)}^{**} = \frac{\theta - 1}{\beta_2(x) - 1}, \quad (2.35)$$

$$HKO_{\min}(s_{dt3}^2) = \lambda S_y^4 \left[(\beta_2(y) - 1) - \frac{(\theta - 1)^2}{\beta_2(x) - 1} \right] \quad (2.36)$$

şeklinde elde edilir. Eş. (2.15)'de verilen klasik varyans tahmin edicisinin HKO ile karşılaştırılırsa,

$$HKO_{\min}(s_{dt3}^2) < HKO(s_y^2)$$

$$\lambda S_y^4 \left[(\beta_2(y) - 1) - \frac{(\theta - 1)^2}{\beta_2(x) - 1} \right] < \lambda S_y^4 (\beta_2(y) - 1) \quad (2.37)$$

bulunur. $\beta_2(x) > 1$ koşulu altında Das ve Tripathi'nin s_{dt3}^2 tahmin edicisinin, klasik varyans tahmin edicisine göre daha etkin olduğu söylenir.

2.1.4. Isaki Varyans Tahmin Edicisi

❖ 1983 yılında Isaki [9], kitle varyansı için

$$s_i^2 = \frac{s_y^2}{s_x^2} S_x^2, \quad (2.38)$$

oransal tahmin ediciyi önermiştir. Bu tahmin edici yanlış bir tahmin edicidir. HKO ise

$$HKO(s_i^2) = E\left(\frac{s_y^2}{s_x^2} S_x^2 - S_y^2\right)^2, \quad (2.39)$$

biçimindedir. $V_R = \frac{S_y^2}{S_x^2}$ ve $\hat{\vartheta}_R = \frac{s_y^2}{s_x^2}$ olarak tanımlanırsa, $s_i^2 = \hat{\vartheta}_R S_x^2$ ile ifade edilir. HKO ise

$$\begin{aligned} HKO(\hat{\vartheta}_R) &= E\left(\hat{\vartheta}_R - \vartheta_R\right)^2, \\ &= \frac{1}{S_x^4} E(s_y^2 - \vartheta_R S_x^2)^2, \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada $\vartheta_R S_x^2 = S_y^2$ eşitliğinden yararlanılarak $\vartheta_R S_x^2$ eklenir, S_y^2 çıkarılır ve beklenen değer alındığında,

$$\begin{aligned} HKO(\hat{\vartheta}_R) &\cong \frac{1}{S_x^4} E\left\{\left[(s_y^2 - S_y^2) - \vartheta_R (s_x^2 - S_x^2)\right]^2\right\} \\ &\cong \frac{1}{S_x^4} \left[V(s_y^2) - 2V_R \text{Cov}(s_y^2, s_x^2) + V_R^2 V(s_x^2)\right] \end{aligned} \quad (2.40)$$

bulunur.

Varyans değeri Eş. (2.9)'dan, kovaryans değeri ise Eş. (2.12)'den yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\text{HKO}(s_i^2) &= \frac{1}{S_x^4} \left[\lambda S_y^4 (\beta_2(y) - 1) - 2 \frac{S_y^2}{S_x^2} \lambda S_y^2 S_x^2 (\theta - 1) + \frac{S_y^4}{S_x^4} \lambda S_x^4 (\beta_2(x) - 1) \right] \\
&= \lambda S_y^4 [\beta_2(y) + \beta_2(x) - 2\theta]
\end{aligned} \tag{2.41}$$

elde edilir.

Eş. (2.41)'deki Isaki'nin oransal tahmin edicisinin HKO'sı ile Eş. (2.15)'deki klasik varyans tahmin edicinin HKO'su ile karşılaştırıldığında,

$$\begin{aligned}
\text{HKO}(s_i^2) &< \text{HKO}(s_y^2) = V(s_y^2) \\
\lambda S_y^4 [\beta_2(y) + \beta_2(x) - 2\theta] &< \lambda S_y^4 (\beta_2(y) - 1) \\
\theta &> \frac{\beta_2(x) + 1}{2}
\end{aligned} \tag{2.42}$$

koşulu altında Isaki tahmin edicisinin klasik tahmin ediciden daha etkin olduğu söylenir [3].

❖ Isaki tarafından, oransal tahmin edicinin yanında bir de yardımcı değişken kullanılarak regresyon tahmin edicisi önerilmiştir:

$$s_{\text{ireg}}^2 = s_y^2 + b(S_x^2 - s_x^2). \tag{2.43}$$

Bu tahmin edicide, b sabit bir değer olmak üzere; $b = B = \frac{V_R(\theta - 1)}{\beta_2(x) - 1}$ değeri HKO'yu

minimum yapan değerdir. Burada $V_R = \frac{S_y^2}{S_x^2}$ olmak üzere, Taylor Serisi yönteminden

yararlanılarak HKO,

$$\text{HKO}(s_{\text{ireg}}^2) = \lambda S_y^4 (\beta_2(y) - 1) - 2b \lambda S_y^2 S_x^2 (\theta - 1) + b^2 \lambda S_x^4 (\beta_2(x) - 1) \tag{2.44}$$

olarak bulunur. b değeri de yerine yazılırsa,

$$\text{HKO}(s_{\text{ireg}}^2) \cong \lambda S_y^4 \left\{ [\beta_2(y) - 1] - \frac{(\theta - 1)^2}{\beta_2(x) - 1} \right\} \tag{2.45}$$

elde edilir.

Tahmin edicilerin etkinliklerini karşılaştırmak için, Eş. (2.44)'deki Isaki'nin regresyon tahmin edicisinin HKO'su ile Eş. (2.41)'deki oransal tahmin edicinin HKO karşılaştırılırsa;

$$\lambda S_y^4 \left\{ [\beta_2(y) - 1] - \frac{(\theta - 1)^2}{\beta_2(x) - 1} \right\} < \lambda S_y^4 [\beta_2(y) + \beta_2(x) - 2\theta],$$

$$\frac{-\beta_2(x) + 1 - (\theta - 1)^2 - \beta_2(x)^2 + \beta_2(x) + 2\theta\beta_2(x) - 2\theta}{\beta_2(x) - 1} < 0,$$

$$\frac{[\theta - \beta_2(x)]^2}{\beta_2(x) - 1} > 0 \quad (2.46)$$

denklemini yazılır.

Bu denklemde, $\beta_2(x) > 1$ koşulu sağlandığında Isaki'nin regresyon tahmin edicisinin, oransal tahmin ediciye göre daha etkin olduğu söylenebilir [15].

2.1.5. Prasad ve Singh Varyans Tahmin Edicileri

❖ Prasad ve Singh 1990 yılında, Hirano ve Isaki'nin oransal tahmin edicilerinden ilham alarak yeni bir oransal tahmin edici önermiştir:

$$s_{ps1}^2 = \frac{s_h^2}{s_x^2} S_x^2 \quad (2.47)$$

s_h^2 , Eş. (2.16)'da Hirano tarafından önerilen varyans tahmin edicisi olup, önerilen yeni tahmin edici,

$$s_{ps1}^2 = \frac{A_{(h)} s_y^2}{s_x^2} S_x^2 = \vartheta_R' S_x^2 \quad (2.48)$$

şeklindedir. Tahmin edicinin HKO'su ise

$$HKO(s_{ps1}^2) = S_x^4 HKO(\vartheta_R'),$$

$$HKO(\vartheta_R') \cong \frac{1}{S_x^4} [V(s_h^2) + \vartheta_R^2 V(s_x^2) - 2\vartheta_R \text{Cov}(s_h^2, s_x^2)] \quad (2.49)$$

şeklindedir. Burada;

$$V(s_y^2) = E(A_{(h)}s_y^2 - S_y^2)^2 = A_{(h)}\lambda S_y^4(\beta_2(y) - 1),$$

$$\text{Cov}(s_h^2, s_x^2) = A_{(h)}\lambda S_y^2 S_x^2(\theta - 1),$$

$$V(s_x^2) = \lambda S_x^4(\beta_2(x) - 1)$$

biçiminde olduğuna göre HKO,

$$\text{HKO}(\hat{s}_R') \cong \frac{\lambda S_y^4}{S_x^4} [A_{(h)}(\beta_2(y) - 2\theta + 1) + \beta_2(x) - 1] \quad (2.50)$$

şeklinde yazılabilir. Eş. (2.19)'daki $A_{(h)}^*$ değeri yerine yazıldığında ise eşitlik,

$$\text{HKO}(\hat{s}_R') \cong \frac{\lambda S_y^4}{S_x^4} \left[\frac{\beta_2(y) - 2\theta + 1}{1 + \lambda(\beta_2(y) - 1)} + \beta_2(x) - 1 \right] \quad (2.51)$$

biçimindedir.

$\text{HKO}(s_{ps1}^2) = S_x^2 \text{HKO}(\hat{s}_R')$ olduğuna göre tahmin edicinin HKO'su,

$$\text{HKO}(s_{ps1}^2) = \lambda S_y^4 \left[\frac{\beta_2(y) - 2\theta + 1}{1 + \lambda(\beta_2(y) - 1)} + \beta_2(x) - 1 \right] \quad (2.52)$$

gibi elde edilir.

Prasad ve Singh'nın Eş. (2.52)'deki HKO'su, Eş. (2.15)'de verilen klasik varyans tahmin edicisi ile Eş. (2.41)'de verilen Isaki'nin oransal tahmin edicisinin HKO'ları ile karşılaştırıldığında,

$$\text{HKO}(s_{ps1}^2) < \text{HKO}(s_y^2)$$

$$\lambda S_y^4 \left[\frac{\beta_2(y) - 2\theta + 1}{1 + \lambda(\beta_2(y) - 1)} + \beta_2(x) - 1 \right] < \lambda S_y^4(\beta_2(y) - 1)$$

$$\frac{\beta_2(x) + 1}{2} < \theta \quad (2.53)$$

koşulu ile,

$$\text{HKO}(s_{ps1}^2) < \text{HKO}(s_1^2)$$

$$S_y^4 \left[\frac{\beta_2(y) - 2\theta + 1}{1 + \lambda(\beta_2(y) - 1)} + \beta_2(x) - 1 \right] < \lambda S_y^4 [\beta_2(y) + \beta_2(x) - 2\theta]$$

$$\frac{\beta_2(y) + 1}{2} > \theta \quad (2.54)$$

koşulu bulunur. Bu koşullar altında Prasad ve Singh'in varyans tahmin edicisinin, klasik varyans tahmin edicisi ile Isaki'nin oransal tahmin edicisine oranla daha etkin olduğu söylenebilir [3].

❖ Prasad ve Singh tarafından 1990 yılında aşağıda verilen bir başka tahmin edici daha önerilmiştir:

$$s_{ps2}^2 = \frac{A_{(ps)} s_y^2}{s_x^2} S_x^2 \quad (2.55)$$

Önerilen tahmin edici yanlı bir tahmin edici olup $A_{(ps)}$ ise sabit bir değerdir.

$$\vartheta_R = \frac{S_y^2}{S_x^2}, \hat{\vartheta}'_R = \frac{A_{(ps)} s_y^2}{s_x^2} \text{ olarak ifade edildiğinde}$$

$$s_{ps2}^2 = \hat{\vartheta}'_R S_x^2$$

olarak yazılabilir. HKO ise,

$$\text{HKO}(s_{ps2}^2) = S_x^4 \text{HKO}(\hat{\vartheta}'_R) \quad (2.56)$$

şeklinde yazılır. s_{ps2}^2 tahmin edicinin HKO'sunun bulunması için, $\hat{\vartheta}'_R$ 'nin HKO'su bulunmalıdır.

$$\text{HKO}(\hat{\vartheta}'_R) = E(\hat{\vartheta}'_R - \vartheta_R)^2 \quad (2.57)$$

$$= E \left(\frac{A_{(ps)} s_y^2}{s_x^2} - \vartheta_R \right)^2$$

Burada $\frac{1}{S_x^4} \cong \frac{1}{S_x^4}$ olarak varsayılırsa;

$$\begin{aligned} \text{HKO}(\hat{\vartheta}'_R) &= \frac{1}{S_x^4} E \left(A_{(ps)} s_y^2 - s_x^2 \vartheta_R \right)^2, \\ &= \frac{1}{S_x^4} A_{(ps)}^2 E(s_y^4) - 2A_{(ps)} \vartheta_R E(s_y^2 s_x^2) + \vartheta_R^2 E(s_x^4) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada,

$$E(s_y^4) = V(s_y^2) + S_y^4,$$

$$E(s_x^4) = V(s_x^2) + S_x^4,$$

$$E(s_y^2, s_x^2) = \text{cov}(s_y^2, s_x^2) + S_y^2 S_x^2.$$

biçimindedir. Beklenen değerler yerlerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} \text{HKO}(\hat{\vartheta}'_R) &= \frac{1}{S_x^4} \left(A_{(ps)}^2 V(s_y^2) - 2A_{(ps)} \vartheta_R \text{cov}(s_y^2, s_x^2) + \vartheta_R^2 V(s_x^2) + A_{(ps)}^2 S_y^4 \right. \\ &\quad \left. - 2A_{(ps)} \vartheta_R S_y^2 S_x^2 + \vartheta_R^2 S_x^4 \right) \\ &= \frac{S_y^4}{S_x^4} \left\{ A_{(ps)}^2 [1 + \lambda(\beta_2(y) - 1)] - 2A_{(ps)} [1 + \lambda(\theta - 1)] + \lambda[(\beta_2(x) - 1) + 1] \right\} \quad (2.58) \end{aligned}$$

elde edilir. Eş. (2.56)'dan s_{ps2}^2 tahmin edicisinin HKO ise,

$$\text{HKO}(s_{ps2}^2) = S_y^4 \left\{ A_{(ps)}^2 [1 + \lambda(\beta_2(y) - 1)] - 2A_{(ps)} [1 + \lambda(\theta - 1)] + \lambda[\beta_2(x) - 1] + 1 \right\} \quad (2.59)$$

olarak hesaplanmaktadır. $A_{(ps)}$ değerini bulmak için türev alıp sıfıra eşitlenirse,

$$A_{(ps)} = \frac{1 + \lambda(\theta - 1)}{1 + \lambda(\beta_2(y) - 1)} \quad (2.60)$$

bulunur. Bu değer HKO'da yerine yazılırsa,

$$\text{HKO}_{\min}(s_{ps2}^2) \cong \lambda S_y^4 \left\{ \beta_2(x) - 1 + \frac{\beta_2(y) - 1 - (\theta - 1)\lambda[(\theta - 1) + 2]}{1 + \lambda[\beta_2(y) - 1]} \right\} \quad (2.61)$$

elde edilir. Eş. (2.61)'da verilen Prasad ve Singh tahmin edicisi ile Isaki'nin Eş. (2.41)'deki HKO'ları birbirleriyle karşılaştırılırsa,

$$\text{HKO}(s_{ps2}^2) < \text{HKO}(s_i)$$

$$\lambda S_y^4 \left\{ \beta_2(x) - 1 + \frac{\beta_2(y) - 1 - (\theta - 1)\lambda[(\theta - 1) + 2]}{1 + \lambda[\beta_2(y) - 1]} \right\} < \lambda S_y^4 (\beta_y + \beta_x - 2\theta)$$

$$\theta < \frac{\beta_y - 1}{2} \quad (2.62)$$

koşulu altında Prasad ve Singh'in s_{ps2}^2 tahmin edicisinin, Isaki'nin oransal tahmin edicisinden daha etkin olduğu sonucuna ulaşılmaktadır [3].

2.1.6. Garcia ve Cebrain Varyans Tahmin Edicisi

Literatürde yer alan bir diğer varyans tahmin edicisi olan Garcia ve Cebrain [11] 1996 yılında, Isaki'nin oransal tahmin edicisinden yola çıkarak aşağıdaki tahmin ediciyi önermiştir:

$$s_{gc}^2 = \frac{s_y^2}{(s_x^2)^{\alpha_{(gc)}}} (S_x^2)^{\alpha_{(gc)}}. \quad \alpha_{(gc)} \geq 0 \quad (2.63)$$

Burada $\hat{\mathfrak{S}}_R^{\alpha_{(gc)}} = \frac{s_y^2}{(s_x^2)^{\alpha_{(gc)}}}$, $\mathfrak{S}_R^{\alpha_{(gc)}}$ 'nin tahmin edicisidir. $\alpha_{(gc)} = 1$ olduğunda bu tahmin edici

Isaki'nin oransal tahmin edicisi olmaktadır.

$\hat{\mathfrak{S}}_R^{\alpha_{(gc)}}$ 'nin HKO,

$$\text{HKO}(\hat{\mathfrak{S}}_R^{\alpha_{(gc)}}) = \frac{1}{S_x^{4\alpha_{(gc)}}} \left[V(s_y^2) - 2\mathfrak{S}_R^{\alpha_{(gc)}} \text{cov}(s_y^2, s_x^{2\alpha_{(gc)}}) + \mathfrak{S}_R^{2\alpha_{(gc)}} V(s_x^{2\alpha_{(gc)}}) \right] \quad (2.64)$$

şeklinde yazılır.

Burada,

$\text{cov}(s_y^2, s_x^{2\alpha_{(gc)}}) = \lambda \alpha_{(gc)} S_y^2 S_x^{2\alpha_{(gc)}} (\theta - 1)$ ve $V(s_x^{2\alpha_{(gc)}}) = \lambda \alpha_{(gc)}^2 S_x^{4\alpha_{(gc)}} (\beta_2(x) - 1)$ olarak yazıldığında,

$$HKO(\hat{\theta}_R^{\alpha_{(gc)}}) \cong \lambda S_y^4 \left[(\beta_2(y) - 1) - 2\alpha_{(gc)}(\theta - 1) + \alpha_{(gc)}^2 (\beta_2(x) - 1) \right] \quad (2.65)$$

olur.

HKO'da α 'ya göre türev alınır sıfıra eşitlenirse optimal değer,

$$\alpha_{(gc)}^* = \frac{(\theta - 1)}{(\beta_2(x) - 1)} \quad (2.66)$$

olarak bulunur. HKO' da yerine yazılırsa

$$HKO_{\min}(s_{gc}^2) \cong \lambda S_y^4 \left[(\beta_2(y) - 1) - \frac{(\theta - 1)^2}{(\beta_2(x) - 1)} \right] \quad (2.67)$$

şeklinde elde edilir. Eş. (2.67)'deki Garcia ve Cebrain varyans tahmin edicisinin HKO ile Eş. (2.15)'deki klasik varyans tahmin edicisinin HKO'su ile karşılaştırıldığında,

$$\lambda S_y^4 \left[(\beta_2(y) - 1) - \frac{(\theta - 1)^2}{(\beta_2(x) - 1)} \right] < \lambda S_y^4 (\beta_2(y) - 1) \quad (2.68)$$

$$\frac{(\theta - 1)^2}{\beta_2(x) - 1} > 0$$

koşulu elde edilir. $\beta_2(x) > 1$ ise Garcia ve Cebrain tahmin edicisinin klasik varyans tahmin edicisinden daha etkin olduğu söylenir [3].

2.1.7. Upadhyaya ve Singh Varyans Tahmin Edicisi

Örneklem araştırmalarında, ortalama ve varyans gibi kitle parametrelerinin tahmininde yardımcı değişken bilgisini farklı formlarda kullanmak, literatürde üzerinde çalışılan bir konudur. 1999 yılında Upadhyaya ve Singh [8], yardımcı değişkenin basıklık katsayısını kullanarak yeni bir tahmin edici geliştirmiştir.

Önerilen oransal varyans tahmin edicisi;

$$s_{us}^2 = s_y^2 \left(\frac{S_x^2 + \beta_2(x)}{s_x^2 + \beta_2(x)} \right) \quad (2.69)$$

şeklindedir. HKO Taylor Serisi'nden yararlanılarak şöyle bulunur:

$$\text{HKO}(s_{us}^2) = \lambda S_y^4 \left[(\beta_2(y) - 1) - 2A_{(us)}(\theta - 1) + A_{(us)}^2(\beta_2(x) - 1) \right]. \quad (2.70)$$

Burada $A_{(us)}$ değeri;

$$A_{(us)} = \frac{S_x^2}{S_x^2 + \beta_x^2} \quad (2.71)$$

şeklinde yazılır.

Eş. (2.70)'de verilen HKO ile Eş. (2.15)'de verilen klasik varyans tahmin edicisinin HKO'su ile Isaki'nin Eş. (2.41)'de verilen klasik oransal tahmin edicisinin HKO'su ile karşılaştırılırsa,

$$\text{HKO}(s_{us}^2) < \text{HKO}(s_y^2)$$

$$\lambda S_y^4 \left[(\beta_2(y) - 1) - 2A_{(us)}(\theta - 1) + A_{(us)}^2(\beta_2(x) - 1) \right] < \lambda S_y^4(\beta_2(y) - 1)$$

$A_{(us)}$ değeri Eş. (2.71)'den yerine yazıldığında,

$$\theta > (\beta_2(x) - 1) \frac{S_x^2}{S_x^2 + \beta_2(x)} + 1 \quad (2.72)$$

ile

$$\text{HKO}(s_{us}^2) < \text{HKO}(s_{is}^2)$$

$$\lambda S_y^4 \left[(\beta_2(y) - 1) - 2A_{(us)}(\theta - 1) + A_{(us)}^2(\beta_2(x) - 1) \right] < \lambda S_y^4(\beta_2(y) + \beta_2(x) - 2\theta)$$

$$\theta < \frac{\beta_2(x)(1 - A_{(us)})(1 + A_{(us)}) + (1 - A_{(us)})^2}{(1 - A_{(us)})}$$

$$\theta < \frac{\beta_2(x)(2S_x^2 + \beta_2(x) + 1)}{2(S_x^2 + \beta_2(x))} \quad (2.73)$$

koşulları elde edilir. Bu koşullar altında Upadhyaya ve Singh tahmin edicisinin, klasik varyans tahmin edicisi ile Isaki'nin klasik oransal tahmin edicisine göre daha etkin olduğu söylenebilir.

2.1.8. Chandra ve Singh Varyans Tahmin Edicisi

2005 yılında Chandra ve Singh [14], Upadhyaya ve Singh'ın Eş. (2.69)'da gösterilen tahmin edicisinden yola çıkarak ve ağırlıklandırma yaparak yeni bir tahmin edici geliştirmiştir. Bu tahmin edici de yardımcı değişkenin kitle varyansı ile basıklık katsayısından yararlanılarak oluşturulmuştur:

$$s_{cs1}^2 = s_y^2 \frac{(\beta_2(x) + S_x^2)}{\left[\alpha_{(cs)} (\beta_2(x) + s_x^2) + (1 - \alpha_{(cs)}) (\beta_2(x) + S_x^2) \right]} \quad (2.74)$$

Bu tahmin edicide $\alpha_{(cs)}$ sabit bir katsayı olmak üzere; tahmin edici, $\alpha_{(cs)} = 0$ ise klasik varyans tahmin edicisi s_y^2 , $\alpha_{(cs)} = 1$ ise Upadhyaya ve Singh'ın Eş. (2.69)'de verilen tahmin edicisi s_{us}^2 olmaktadır.

Taylor Serisi'nden yararlanılarak tahmin edicinin HKO'su bulunursa,

$$HKO(s_{cs1}^2) = \lambda S_y^4 \left[\beta_2(y) - 1 - 2\alpha_{(cs)} K(\theta - 1) + \alpha_{(cs)}^2 K^2(\beta_2(x) - 1) \right] \quad (2.75)$$

elde edilir. Burada K değeri,

$$K = \frac{S_x^2}{\beta_2(x) + S_x^2}$$

şeklinde olup, optimal $\alpha_{(cs)}$ değeri için türev alınır ve sıfıra eşitlenirse;

$$\alpha_{(cs)}^* = \frac{\theta - 1}{K(\beta_2(x) - 1)} \quad (2.76)$$

bulunur.

Optimal değer Eş (2.75)'de yerine yazılırsa $HKO_{\min}(s_{cs1}^2)$ elde edilir. Minimum HKO,

$$HKO_{\min}(s_{cs1}^2) = \lambda S_y^4 \left(\beta_2(y) - 1 - \frac{(\theta - 1)^2}{\beta_2(x) - 1} \right). \quad (2.77)$$

şeklindedir. Bu tahmin edicinin yanında, Chandra ve Singh [14], iki tahmin edici daha geliştirmişlerdir:

$$s_{cs2}^2 = s_y^2 \left(\frac{\beta_2(x) + s_x^2}{\beta_2(x) + s_x^2} \right)^\delta. \quad (2.78)$$

$$s_{cs3}^2 = s_y^2 \left(2 - \frac{\beta_2(x) + s_x^2}{\beta_2(x) + s_x^2} \right)^\phi. \quad (2.79)$$

Bu tahmin edicilerin hata kareler ortalamaları da benzer şekilde bulunmakta olup δ, ϕ değerlerinin optimal değerleri Eş. (2.76)'daki değer ile, minimum HKO'ların ise Eş. (2.77)'de verilen HKO ile aynı olduğu görülmektedir [3].

Chandra ve Singh tahmin edicisinin HKO'su ile Eş. (2.15)'de verilen klasik varyans tahmin edici ve Isaki'nin Eş. (2.41)'de verilen HKO'lar ile karşılaştırıldığında,

$$HKO_{\min}(s_{cs1}^2) < HKO(s_y^2)$$

$$\lambda S_y^4 \left(\beta_2(y) - 1 - \frac{(\theta - 1)^2}{\beta_2(x) - 1} \right) < \lambda S_y^4 (\beta_2(y) - 1)$$

$$\frac{(\theta - 1)^2}{\beta_2(x) - 1} > 0 \quad (2.80)$$

ile

$$HKO_{\min}(s_{cs1}^2) < HKO(s_i^2)$$

$$\lambda S_y^4 \left(\beta_2(y) - 1 - \frac{(\theta - 1)^2}{\beta_2(x) - 1} \right) < \lambda S_y^4 [\beta_2(y) + \beta_2(x) - 2\theta]$$

$$\beta_2(x) < \frac{\theta^2}{2(\theta - 1)} \quad (2.81)$$

koşulları altında Chandra ve Singh tahmin edicisinin, klasik varyans ile Isaki'nin oransal tahmin edicisine göre daha etkin olduğu söylenir.

2.1.9. Kadılar ve Çıngı Varyans Tahmin Edicisi

2005 yılında Kadılar ve Çıngı [10] tarafından, Upadhyaya ve Singh'nın Eş. (2.69)'da verilen tahmin edicisinden yararlanılarak kitle varyansı için aşağıdaki oransal tahmin edicileri önerilmiştir:

$$\begin{aligned}
 s_{kc1}^2 &= \frac{s_y^2}{s_x^2 - C_x} [S_x^2 - C_x] , \\
 s_{kc2}^2 &= \frac{s_y^2}{s_x^2 - \beta_2(x)} [S_x^2 - \beta_2(x)] , \\
 s_{kc3}^2 &= \frac{s_y^2}{s_x^2 \beta_2(x) - C_x} [S_x^2 \beta_2(x) - C_x] , \\
 s_{kc4}^2 &= \frac{s_y^2}{s_x^2 C_x - \beta_2(x)} [S_x^2 C_x - \beta_2(x)] , \tag{2.82}
 \end{aligned}$$

bu tahmin edicilerde, yardımcı değişkene ait, $C_x = \frac{S_x}{\bar{X}}$ değişim katsayısı ile $\beta_2(x)$ basıklık katsayısı kullanılmaktadır. HKO Taylor Serisi'nden yararlanılarak aşağıdaki gibi bulunur:

$$\text{HKO}(s_{kci}^2) = \lambda S_y^4 (\beta_2(y) - 1) - 2 \frac{\lambda S_y^4 S_x^2 (\theta - 1)}{S_x^2 - C_x} + \frac{\lambda S_y^4 S_x^4 (\beta_2(x) - 1)}{(S_x^2 - C_x)^2} , \quad i=1,2,3,4.$$

Burada,

$$\frac{S_x^2}{S_x^2 - C_x} = A_{1(kc)} \text{ olmak üzere}$$

$$\text{HKO}(s_{kci}^2) = \lambda S_y^4 \{ (\beta_2(y) - 1) - 2A_{1(kc)}(\theta - 1) + A_{1(kc)}^2 (\beta_2(x) - 1) \} . \tag{2.83}$$

Bunun yanında, diğer tahmin ediciler için de HKO aynı yolla bulunabilir.

$$A_{2(kc)} = \frac{S_y^2}{S_x^2 - \beta_2(x)}, A_{3(kc)} = \frac{S_x^2 \beta_2(x)}{S_x^2 \beta_2(x) - C_x}, A_{4(kc)} = \frac{S_x^2 C_x}{S_x^2 C_x - \beta_2(x)} \text{ olmak üzere HKO,}$$

$$\text{HKO}(s_{kci}^2) = \lambda S_y^4 \left\{ (\beta_2(y) - 1) - 2A_{i(kc)}(\theta - 1) + A_{i(kc)}^2(\beta_2(x) - 1) \right\}, \quad i=1,2,3,4. \quad (2.84)$$

yazılabilir. Önerilen bu tahmin edicilerin Eş. (2.84)'deki HKO ile Isaki'nin Eş. (2.41)'deki HKO'su karşılaştırılırsa,

$$\lambda S_y^4 \left\{ (\beta_2(y) - 1) - 2A_{i(kc)}(\theta - 1) + A_{i(kc)}^2(\beta_2(x) - 1) \right\} < \lambda S_y^4 [\beta_2(y) + \beta_2(x) - 2\theta]$$

$$A_{i(kc)}^2 \beta_2(x) - A_{i(kc)}^2 - 2A_{i(kc)}\theta + 2A_{i(kc)} - 1 - \beta_2(x) + 2\theta < 0$$

koşulu altında $A_{i(kc)} = 1$ olduğunda HKO'lar arasında fark yoktur. Ancak $\beta_2(x) \neq 0$, $C_x \neq 0$ olduğundan $A_{i(kc)} \neq 1$ olacaktır. Bu sebeple, Kadılar ve Cıngı'nın oransal tahmin edicilerinin, Isaki'nin oransal tahmin edicisinden daha etkin olduğu söylenir.

❖ 2007 yılında Kadılar ve Cıngı [15] yeni bir regresyon tahmin edicisi önermiştir:

$$s_{kc5}^2 = w_{1(kcr)} s_y^2 + w_{2(kcr)} t_b \bar{X} \quad (2.85)$$

Bu tahmin edicide $w_{1(kcr)}$ ve $w_{2(kcr)}$; $w_{1(kcr)} + w_{2(kcr)} = 1$ eşitliğini sağlayan ağırlıklar olmak

$$\text{üzere } \psi = \frac{1-f}{n}, f = \frac{n}{N} \text{ 'dir. } t_b = \frac{\bar{y}}{\bar{X}} \left[\frac{1+\psi C_{xy}}{1+\psi C_x^2} \right] \text{ ve } C_{xy} = \rho_{xy} C_x C_y \text{ olmak üzere sabit}$$

değerlerdir. HKO, Taylor Serisi'nden faydalanılarak aşağıdaki şekilde bulunmuştur.

$$\text{HKO}(s_{kc5}^2) \cong \lambda S_y^4 \left[w_{1(kc)}^2 (\beta_y^*) - 2w_{1(kc)} w_{2(kc)} A + w_{2(kc)}^2 B \right]. \quad (2.86)$$

Burada

$$\beta_2^*(y) = \beta_2(y) - 1, \quad R = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}, \quad A = \frac{R \tau \mu_{21} - \tau \mu_{30}}{S_y^4}, \quad \tau = \frac{1+\psi C_{xy}}{1+\psi C_x^2} \text{ ve } B = \frac{R^2 \tau^2}{V_R S_y^2} + \frac{\tau^2}{S_y^2} - \frac{2R \tau^2 \rho_{xy}}{V_R S_y S_x}$$

olmak üzere minimum HKO'yu bulmak için, $w_{1(kcr)}$ ve $w_{2(kcr)}$ 'ye göre türev alınır ve sıfıra eşitlenirse $w_{1(kcr)}$ ve $w_{2(kcr)}$ değerleri

$$w_{1(kcr)}^* = \frac{A+B}{2A+B+\beta_2^*(y)} \text{ ve } w_{2(kcr)}^* = \frac{A+\beta_2^*(y)}{2A+B+\beta_2^*(y)} \quad (2.87)$$

olarak bulunmaktadır. Minimum HKO ise,

$$HKO_{\min}(s_{kc5}^2) = \lambda S_y^4 \left[w_{1(kcr)}^{*2} (\beta_y^*) - 2w_{1(kcr)}^* w_{2(kcr)}^* A + w_{2(kcr)}^{*2} B \right] \quad (2.88)$$

şeklindedir. Eş. (2.88)'de verilen HKO ile Isaki'nin Eş. (2.41)'de verilen oransal tahmin edicisinin HKO'su ile karşılaştırılırsa,

$$\lambda S_y^4 \left[w_{1(kcr)}^{*2} (\beta_y^*) - 2w_{1(kcr)}^* w_{2(kcr)}^* A + w_{2(kcr)}^{*2} B \right] < \lambda S_y^4 \left[\beta_2(y) + \beta_2(x) - 2\theta \right] \quad (2.89)$$

$$(w_{1(kcr)}^{*2} - 1)\beta_2(y) - w_{1(kcr)}^{*2} - \beta_2(x) + 2\theta - 2w_{1(kcr)}^* w_{2(kcr)}^* A + w_{2(kcr)}^{*2} B < 0$$

koşulu sağlandığında, Kadılar ve Çıngı'nın regresyon tahmin edicisi s_{kc5}^2 'in daha etkin olduğu söylenebilir.

2.1.10. Gupta ve Shabbir Varyans Tahmin Edicisi

Gupta ve Shabbir [16], 2008 yılında yeni bir tahmin edici önermiştir. Eş. (2.90)'da verilen bu tahmin edicide $d_{1(gs)}$, $d_{2(gs)}$ ve $\alpha_{(gs)}$ sabit değerlerdir.

$$s_{gs}^2 = \left[d_{1(gs)} s_y^2 + d_{2(gs)} (S_x^2 - s_x^2) \right] \left[2 - \left(\frac{s_x^2}{S_x^2} \right)^{\alpha_{(gs)}} \right]. \quad (2.90)$$

Burada Fark Yöntemi'nden yararlanılarak δ_i ($i = 0, 1$) için; $\left(\frac{s_x^2}{S_x^2} \right) = \delta_1 + 1$ ve $\left(\frac{s_y^2}{S_y^2} \right) = \delta_0 + 1$

yazılabilir. Böylece tahmin edici,

$$s_{gs}^2 = \left[d_{1(gs)} S_y^2 (1 + \delta_0) - d_{2(gs)} S_x^2 \delta_1 \right] \left[2 - (1 + \delta_1)^{\alpha_{(gs)}} \right] \quad (2.91)$$

şeklinde olmaktadır. HKO ise aşağıdaki şekildedir:

$$HKO(s_{gs}^2) \cong E \left[(d_{1(gs)} - 1) S_y^2 + d_{1(gs)} S_y^2 \left\{ \delta_0 - \alpha_{(gs)} \delta_1 - \alpha_{(gs)} \delta_0 \delta_1 - \frac{\alpha_{(gs)} (\alpha_{(gs)} - 1)}{2} \delta_1^2 \right\} \right. \\ \left. - d_{2(gs)} S_x^2 \left\{ \delta_1 - \alpha_{(gs)} \delta_1^2 \right\} \right]^2$$

$$\begin{aligned} \cong & \left[S_y^4 + d_{1(gs)} S_y^4 A_{1(gs)}^{(\alpha)} + d_{2(gs)}^2 S_x^4 A_{2(gs)} + 2d_{1(gs)} d_{2(gs)} S_y^2 S_x^4 A_{3(gs)}^{(\alpha)} - 2d_{1(gs)} S_y^4 A_{4(gs)}^{(\alpha)} \right. \\ & \left. - 2d_{2(gs)} S_y^2 S_x^2 A_{5(gs)}^{(\alpha)} \right] \end{aligned} \quad (2.92)$$

Burada, $\gamma = \frac{1}{n} - \frac{1}{N}$ olmak üzere,

$$A_{1(gs)}^{(\alpha)} = 1 + \gamma \left\{ (\beta_2(y) - 1) + \alpha_{(gs)} (\beta_2(x) - 1) - 4\alpha_{(gs)} (\lambda_{22} - 1) \right\},$$

$$A_{2(gs)} = \gamma (\beta_2(x) - 1),$$

$$A_{3(gs)}^{(\alpha)} = \gamma \left\{ 2\alpha_{(gs)} (\beta_2(x) - 1) - (\lambda_{22} - 1) \right\},$$

$$A_{4(gs)}^{(\alpha)} = 1 - \alpha_{(gs)} \gamma \left\{ (\lambda_{22} - 1) + \frac{(\alpha_{(gs)} - 1)}{2} (\beta_2(x) - 1) \right\},$$

$$A_{5(gs)}^{(\alpha)} = \alpha_{(gs)} \gamma (\beta_2(x) - 1) \quad (2.93)$$

biçimindedir. $d_{1(gs)}$ ve $d_{2(gs)}$ değerleri de türev alınıp sıfıra eşitlenirse,

$$d_{1(gs)}^* = \frac{A_{2(gs)} A_{4(gs)}^{(\alpha)} - A_{3(gs)}^{(\alpha)} A_{5(gs)}^{(\alpha)}}{A_{1(gs)}^{(\alpha)} A_{2(gs)} - A_{3(gs)}^{2(\alpha)}} \text{ ve } d_{2(gs)}^* = \frac{S_y^2}{S_x^2} \left\{ \frac{A_{1(gs)}^{(\alpha)} A_{5(gs)}^{(\alpha)} - A_{3(gs)}^{(\alpha)} A_{4(gs)}^{(\alpha)}}{A_{1(gs)}^{(\alpha)} A_{2(gs)} - A_{3(gs)}^{2(\alpha)}} \right\} \quad (2.94)$$

eşitlikleri bulunur.

HKO'nun minimum değeri için ise $d_{1(gs)}^*$ ve $d_{2(gs)}^*$ yerlerine yazılırsa;

$$HKO_{\min}(s_{sg}^2) = S_y^4 \left(1 - \frac{A_{1(gs)}^{(\alpha)} A_{5(gs)}^{2(\alpha)} + A_{2(gs)} A_{4(gs)}^{2(\alpha)} - 2A_{3(gs)}^{(\alpha)} A_{4(gs)}^{(\alpha)} A_{5(gs)}^{(\alpha)}}{A_{1(gs)}^{(\alpha)} A_{2(gs)} - A_{3(gs)}^{2(\alpha)}} \right) \quad (2.95)$$

elde edilmiş olur.

$\alpha_{(gs)} = 0$ için s_{gs}^2 tahmin edicisi aşağıdaki gibi Eş. (2.43)'deki Isaki'nin regresyon tahmin edicisi gibi olmaktadır:

$$s_{gs}^2 = \left[d_{1(gs)} s_y^2 + d_{2(gs)} (S_x^2 - s_x^2) \right]. \quad (2.96)$$

$\alpha = 0$ için optimal HKO ise,

$$\text{HKO}_{\min}(s_{gs}^2) = S_y^4 \left(1 - \frac{1}{1 + \gamma(\beta_2(y) - 1)(1 - \rho_{(s_y^2, s_x^2)}^2)} \right) = \frac{V(s_y^2)(1 - \rho_{(s_y^2, s_x^2)}^2)}{1 + \gamma(\beta_2(y) - 1)(1 - \rho_{(s_y^2, s_x^2)}^2)}. \quad (2.97)$$

Burada, $\rho_{(s_y^2, s_x^2)} = (\lambda_{22} - 1) / (\sqrt{(\beta_2(y) - 1)(\beta_2(x) - 1)})$.

Eş. (2.97)'de verilen HKO ile Eş. (2.15)'deki klasik varyans tahmin edicisinin HKO karşılaştırılırsa,

$$\text{HKO}_{\min}(s_{gs}^2) < \text{HKO}(s_y^2)$$

$A_{(gs)} = \gamma(\beta_2(y) - 1)(1 - \rho_{(s_y^2, s_x^2)}^2)$ olmak üzere

$$\frac{V(s_y^2)(A_{(gs)} + \rho_{(s_y^2, s_x^2)}^2)}{1 + A_{(gs)}} > 0 \quad (2.98)$$

bulunur. Burada, $\beta_2(y) > 1$ olduğunda $A_{(gs)} > 0$ olur ve $A_{(gs)} > 0$ olduğunda koşul her zaman sağlanır. Yani $\beta_2(y) > 1$ koşulu altında s_{gs}^2 tahmin edicisinin daha etkin olduğu anlaşılmaktadır.

$\alpha_{(gs)} = 1$ için $s_{sg}^{2(\alpha_{(gs)})}$ tahmin edicisi aşağıdaki şekilde yazılmaktadır:

$$s_{gs}^{2(1)} = \left[d_{1(gs)} s_y^2 + d_{2(gs)} (S_x^2 - s_x^2) \right] \left[2 - \frac{s_x^2}{S_x^2} \right] \quad (2.99)$$

$d_{1(gs)}$ ve $d_{2(gs)}$ değerleri ise,

$$d_{1(gs)}^* = \frac{A_{2(gs)} A_{4(gs)}^{(1)} - A_{3(gs)}^{(1)} A_{5(gs)}^{(1)}}{A_{1(gs)}^{(1)} A_{2(gs)}^{(1)} - A_{3(gs)}^{2(1)}}, \quad d_{2(gs)}^* = \frac{S_y^2}{S_x^2} \left\{ \frac{A_{1(gs)}^{(1)} A_{5(gs)}^{(1)} - A_{3(gs)}^{(1)} A_{4(gs)}^{(1)}}{A_{1(gs)}^{(1)} A_{2(gs)}^{(1)} - A_{3(gs)}^{2(1)}} \right\} \quad (2.100)$$

biçiminde yazılır. Burada,

$$A_{1(gs)}^{(1)} = 1 + \gamma \{ (\beta_2(y) - 1) + (\beta_2(x) - 1) - 4(\lambda_{22} - 1) \},$$

$$A_{2(gs)} = \gamma(\beta_2(x) - 1),$$

$$A_{3(gs)}^{(1)} = \gamma \{ 2(\beta_2(x) - 1) - (\lambda_{22} - 1) \},$$

$$A_{4(gs)}^{(1)} = 1 - \gamma(\lambda_{22} - 1),$$

$$A_{5(gs)}^{(1)} = \gamma(\beta_2(x) - 1) \quad (2.101)$$

olmak üzere, minimum HKO ise,

$$HKO_{\min}(s_{gs}^{2(1)}) \cong S_y^4 \left(1 - \frac{A_{1(gs)}^{(1)} A_{5(gs)}^{2(1)} + A_{2(gs)} A_{4(gs)}^{2(1)} - 2A_{3(gs)}^{(1)} A_{4(gs)}^{(1)} A_{5(gs)}^{(1)}}{A_{1(gs)}^{(1)} A_{2(gs)} - A_{3(gs)}^{2(1)}} \right) \quad (2.102)$$

şeklindedir.

$\alpha_{(gs)} = -1$ için $s_{gs}^{2(\alpha_{(gs)})}$ tahmin edicisi aşağıdaki şekilde yazılmaktadır:

$$s_{gs}^{2(-1)} = \left[d_1 s_y^2 + d_2 (s_x^2 - s_x^2) \right] \left[2 - \frac{s_x^2}{s_x^2} \right]. \quad (2.103)$$

$d_{1(gs)}$ ve $d_{2(gs)}$ değerleri ise,

$$d_{1(gs)}^* = \frac{A_{2(gs)} A_{4(gs)}^{(-1)} - A_{3(gs)}^{(-1)} A_{5(gs)}^{(-1)}}{A_{1(gs)}^{(-1)} A_{2(gs)} - A_{3(gs)}^{2(-1)}}, \quad d_{2(gs)}^* = \frac{S_y^2}{S_x^2} \left\{ \frac{A_{1(gs)}^{(-1)} A_{5(gs)}^{(-1)} - A_{3(gs)}^{(-1)} A_{4(gs)}^{(-1)}}{A_{1(gs)}^{(-1)} A_{2(gs)} - A_{3(gs)}^{2(-1)}} \right\}$$

biçiminde yazılır. Burada,

$$A_{1(gs)}^{(-1)} = 1 + \gamma \{ (\beta_2(y) - 1) + (\beta_2(x) - 1) - 4(\lambda_{22} - 1) \},$$

$$A_{2(gs)} = \gamma(\beta_2(x) - 1),$$

$$A_{3(gs)}^{(-1)} = -\gamma \{ 2(\beta_2(x) - 1) + (\lambda_{22} - 1) \},$$

$$A_{4(gs)}^{(-1)} = 1 - \gamma \{ (\lambda_{22} - 1) - (\beta_2(x) - 1) \},$$

$$A_{5(gs)}^{(-1)} = -\gamma(\beta_2(x) - 1)$$

olmak üzere, minimum HKO ise şöyledir:

$$HKO_{\min}(s_{gs}^{2(-)}) = S_y^4 \left(1 - \frac{A_{1(gs)}^{(-)} A_{5(gs)}^{2(-)} + A_{2(gs)} A_{4(gs)}^{2(-)} - 2A_{3(gs)}^{(-)} A_{4(gs)}^{(-)} A_{5(gs)}^{(-)}}{A_{1(gs)}^{(-)} A_{2(gs)} - A_{3(gs)}^{2(-)}} \right) \quad (2.104)$$

2.1.11. Subramani ve Kumarapandiyan Varyans Tahmin Edicisi

2012 yılında Subramani ve Kumarapandiyan [19], kitle ortalamasının tahmini için, yardımcı değişkene ilişkin kullandığı medyan ve değişim katsayısını, kitle varyansının tahmini için de kullanmış ve aşağıdaki oransal tahmin ediciyi önermiştir:

$$s_{sk}^2 = s_y^2 \left[\frac{C_x S_x^2 + M_d}{C_x s_x^2 + M_d} \right]. \quad (2.105)$$

s_{sk}^2 tahmin edicisi Kadılar ve Çingri'nin Eş. (2.82)'de önermiş olduğu tahmin edicilere benzer bir yapıdadır ve tahmin edicinin HKO'su ise,

$$A_{sk} = \frac{S_x^2}{S_x^2 + M_d} \text{ olmak üzere}$$

$$HKO(s_{sk}^2) = \gamma S_y^4 \left[(\beta_{2(y)} - 1) + A_{sk}^2 (\beta_{2(x)} - 1) - 2A_{sk} (\lambda_{22} - 1) \right] \quad (2.106)$$

olarak bulunmaktadır.

Subramani ve Kumarapandiyan oransal tahmin edicisi; Isaki'nin Eş. (2.41)'deki oransal tahmin edicisi ile Kadılar ve Çingri'nin oransal tahmin edicilerinin Eş. (2.84)'deki hata kareler ortalamaları ile karşılaştırıldığında, aşağıdaki koşullar altında s_{sk}^2 'nin daha etkin olduğu söylenebilir.

$$HKO(s_{sk}^2) < HKO(s_i^2)$$

$$\lambda > 1 + \frac{(A_{sk} + 1)(\beta_2(x) - 1)}{2}, \quad (2.107)$$

$$HKO(s_{sk}^2) < HKO(s_{kci}^2)$$

$$\lambda > 1 + \frac{(A_{sk} + A_i)(\beta_2(x) - 1)}{2}, \quad i=1,2,3,4. \quad (2.108)$$

2.1.12. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicileri

2013 yılında Singh ve Solanki [17] tarafından Gupta ve Shabbir'in [18] önerdiği oransal tahmin ediciden yola çıkarak aşağıdaki genelleştirilmiş tahmin edici önerilmiştir:

$$s_{ssi}^2 = \left[w_{1(ss)} S_y^2 - w_{2(ss)} \left(\frac{s_x^2 - S_x^2}{S_x^2} \right) \right] \left(\frac{a_{(ss)} S_x^2 + b_{(ss)}}{a_{(ss)} s_x^2 + b_{(ss)}} \right) \quad i=1,2,\dots,10 \quad (2.109)$$

Bu tahmin edicide $w_{1(ss)}$ ve $w_{2(ss)}$ sabit değerler olup, $a_{(ss)}$ ve $b_{(ss)}$ ise yardımcı değişkene ilişkin $\bar{X}$, C_x , ρ gibi bilinen kitle parametreleridir. HKO ise şöyledir:

$$HKO(s_{ssi}^2) = S_y^4 + w_{1(ss)}^2 A^* + w_{2(ss)}^2 B^* - 2w_{1(ss)} w_{2(ss)} C^* - 2w_{1(ss)} D^* - 2w_{2(ss)} E^*. \quad (2.110)$$

Burada;

$$A^* = S_y^4 \left[1 + n^{-1} \left\{ \beta_2^*(y) + \eta^* (3\eta^* \beta_2^*(x) - 4\theta^*) \right\} \right],$$

$$B^* = n^{-1} \beta_2^*(x),$$

$$C^* = n^{-1} S_y^2 \left[\theta^* - 2\eta^* \beta_2^*(x) \right],$$

$$D^* = S_y^4 \left[1 + n^{-1} \eta^* \left\{ \eta^* \beta_2^*(y) - \theta^* \right\} \right],$$

$$E^* = n^{-1} S_y^2 \eta^* \beta_2^*(x)$$

olmak üzere

$$\eta^* = \left(\frac{a_{(ss)} S_x^2}{a_{(ss)} S_x^2 + b} \right), \beta_2^*(x) = \beta_2(x) - 1, \beta_2^*(y) = \beta_2(y) - 1 \text{ ve } \theta^* = \theta - 1. \quad (2.111)$$

HKO'yu minimum yapan $w_{1(ss)}$ ve $w_{2(ss)}$ değerleri;

$$w_{1(ss)} = \left(\frac{B^* D^* + C^* E^*}{A^* B^* - C^{*2}} \right),$$

$$w_{2(ss)} = \left(\frac{A^* E^* + C^* D^*}{A^* B^* - C^{*2}} \right) \quad (2.112)$$

şeklindedir. O halde minimum HKO genel haliyle şöyle yazılabilir:

$$HKO_{\min}(s_{ssi}^2) = \left[S_y^4 - \frac{(B^* D^{*2} + 2C^* D^* E^* + A^* E^{*2})}{(A^* B^* - C^{*2})} \right]$$

$$= \frac{n^{-1}S_y^4\beta_2^*(y)(1-\rho^{*2})(1-n^{-1}\eta^{*2}\beta_2^*(x))}{1+n^{-1}\{\beta_2^*(y)(1-\rho^{*2})-\eta^{*2}\beta_2^*(x)\}} \quad (2.113)$$

Çizelge 2.1’de gösterilen $a_{(ss)}$ ve $b_{(ss)}$ ’nin farklı değerleri için oransal tahmin ediciler geliştirilmiştir [17].

Çizelge 2. 1.Singh ve Solanki Tahmin Edicileri

Tahmin Ediciler	$a_{(ss)}$	$b_{(ss)}$
$S_{ss1}^2 = \left[w_{1(ss)}S_y^2 - w_{2(ss)} \left(\frac{s_x^2 - S_x^2}{S_x^2} \right) \right] \left(\frac{S_x^2 + \beta_2(x)}{s_x^2 + \beta_2(x)} \right)$	1	$\beta_2(x)$
$S_{ss2}^2 = \left[w_{1(ss)}S_y^2 - w_{2(ss)} \left(\frac{s_x^2 - S_x^2}{S_x^2} \right) \right] \left(\frac{S_x^2 + C_x}{s_x^2 + C_x} \right)$	1	C_x
$S_{ss3}^2 = \left[w_{1(ss)}S_y^2 - w_{2(ss)} \left(\frac{s_x^2 - S_x^2}{S_x^2} \right) \right] \left(\frac{C_x S_x^2 + \beta_2(x)}{C_x s_x^2 + \beta_2(x)} \right)$	C_x	$\beta_2(x)$
$S_{ss4}^2 = \left[w_{1(ss)}S_y^2 - w_{2(ss)} \left(\frac{s_x^2 - S_x^2}{S_x^2} \right) \right] \left(\frac{\beta_2(x)S_x^2 + C_x}{\beta_2(x)s_x^2 + C_x} \right)$	$\beta_2(x)$	C_x
$S_{ss5}^2 = \left[w_{1(ss)}S_y^2 - w_{2(ss)} \left(\frac{s_x^2 - S_x^2}{S_x^2} \right) \right] \left(\frac{\bar{X}S_x^2 + \rho}{\bar{X}s_x^2 + \rho} \right)$	$\bar{X}$	ρ
$S_{ss6}^2 = \left[w_{1(ss)}S_y^2 - w_{2(ss)} \left(\frac{s_x^2 - S_x^2}{S_x^2} \right) \right] \left(\frac{\bar{X}S_x^2 + S_x^2}{\bar{X}s_x^2 + S_x^2} \right)$	$\bar{X}$	S_x^2
$S_{ss7}^2 = \left[w_{1(ss)}S_y^2 - w_{2(ss)} \left(\frac{s_x^2 - S_x^2}{S_x^2} \right) \right] \left(\frac{C_x S_x^2 + \rho}{C_x s_x^2 + \rho} \right)$	C_x^2	ρ
$S_{ss8}^2 = \left[w_{1(ss)}S_y^2 - w_{2(ss)} \left(\frac{s_x^2 - S_x^2}{S_x^2} \right) \right] \left(\frac{\bar{X}S_x^2 + \beta_2(x)}{\bar{X}s_x^2 + \beta_2(x)} \right)$	$\bar{X}$	$\beta_2(x)$
$S_{ss9}^2 = \left[w_{1(ss)}S_y^2 - w_{2(ss)} \left(\frac{s_x^2 - S_x^2}{S_x^2} \right) \right] \left(\frac{\beta_2(x)S_x^2 + \bar{X}}{\beta_2(x)s_x^2 + \bar{X}} \right)$	$\beta_2(x)$	$\bar{X}$
$S_{ss10}^2 = \left[w_{1(ss)}S_y^2 - w_{2(ss)} \left(\frac{s_x^2 - S_x^2}{S_x^2} \right) \right] \left(\frac{\beta_2(x)S_x^2 + \beta_2(x)^*}{\beta_2(x)s_x^2 + \beta_2(x)^*} \right)$	$\beta_2(x)$	$\beta_2(x)^*$

2.1.13. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicileri

2015 yılında Yadav vd. [20], kitle varyansı için aşağıdaki genelleştirilmiş tahmin ediciyi önermiştir.

$$s_{ydi}^2 = \left[w_{1(yd)} s_y^2 + w_{2(yd)} (S_x^2 - s_x^2) \right] \left[\lambda \left(\frac{\alpha_{(yd)} S_x^2 + b_{(yd)}}{\alpha_{(yd)} S_x^2 + b_{(yd)}} \right) + (1 - \lambda_{(yd)}) \exp \left(\frac{\alpha_{(yd)} (S_x^2 - s_x^2)}{\alpha_{(yd)} (S_x^2 + s_x^2) + 2b_{(yd)}} \right) \right]$$

$i=0,1,2,3,4. \quad (2.114)$

Burada $w_{1(yd)}$ ve $w_{2(yd)}$ ağırlıklar olmak üzere, $\lambda_{(yd)} = 0$ veya 1 değerini alır. $\alpha_{(yd)}$ ve $b_{(yd)}$ ise yardımcı değişkene ilişkin parametrelerdir.

$\lambda_{(yd)} = 0$ olduğunda ve $\alpha_{(yd)}$ ile $b_{(yd)}$ 'nin farklı değerleri için tahmin ediciler Çizelge 2.2'de gösterilmiştir.

Çizelge 2. 2.Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Tahmin Edicileri ($\lambda_{(yd)} = 0$)

Tahmin Ediciler	$\alpha_{(yd)}$	$b_{(yd)}$
$s_{ky0}^2 = \left[w_{1(yd)} s_y^2 + w_{2(yd)} (S_x^2 - s_x^2) \right] \exp \left(\frac{S_x^2 - s_x^2}{S_x^2 + s_x^2} \right)$	1	0
$s_{ky1}^2 = \left[w_{1(yd)} s_y^2 + w_{2(yd)} (S_x^2 - s_x^2) \right] \exp \left(\frac{S_x^2 - s_x^2}{S_x^2 + s_x^2 + 2\lambda_{04}} \right)$	1	λ_{04}
$s_{ky2}^2 = \left[w_{1(yd)} s_y^2 + w_{2(yd)} (S_x^2 - s_x^2) \right] \exp \left(\frac{S_x^2 - s_x^2}{S_x^2 + s_x^2 + 2C_x} \right)$	1	C_x
$s_{ky3}^2 = \left[w_{1(yd)} s_y^2 + w_{2(yd)} (S_x^2 - s_x^2) \right] \exp \left(\frac{\lambda_{04} (S_x^2 - s_x^2)}{\lambda_{04} (S_x^2 + s_x^2) + 2C_x} \right)$	λ_{04}	C_x
$s_{ky4}^2 = \left[w_{1(yd)} s_y^2 + w_{2(yd)} (S_x^2 - s_x^2) \right] \exp \left(\frac{C_x (S_x^2 - s_x^2)}{C_x (S_x^2 + s_x^2) + 2\lambda_{04}} \right)$	C_x	λ_{40}

$\lambda_{(yd)} = 1$ olduğunda ise $\alpha_{(yd)}$ ve $b_{(yd)}$ 'nin farklı değerleri için tahmin ediciler Çizelge 2.3'te gösterilmiştir.

Çizelge 2. 3.Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Tahmin Edicileri ($\lambda_{(yd)} = 1$)

Tahmin Ediciler	$\alpha_{(yd)}$	$b_{(yd)}$
$s_{yd0}^{2*} = \left[w_{1(yd)} s_y^2 + w_{2(yd)} (S_x^2 - s_x^2) \right] \left(\frac{S_x^2}{s_x^2} \right)$	1	0
$s_{yd1}^{2*} = \left[w_{1(yd)} s_y^2 + w_{2(yd)} (S_x^2 - s_x^2) \right] \left(\frac{S_x^2 + \lambda_{04}}{s_x^2 + \lambda_{04}} \right)$	1	λ_{04}
$s_{yd2}^{2*} = \left[w_{1(yd)} s_y^2 + w_{2(yd)} (S_x^2 - s_x^2) \right] \left(\frac{S_x^2 + C_x}{s_x^2 + C_x} \right)$	1	C_x
$s_{yd3}^{2*} = \left[w_{1(yd)} s_y^2 + w_{2(yd)} (S_x^2 - s_x^2) \right] \left(\frac{\lambda_{04} S_x^2 + C_x}{\lambda_{04} s_x^2 + C_x} \right)$	λ_{04}	C_x
$s_{yd4}^{2*} = \left[w_{1(yd)} s_y^2 + w_{2(yd)} (S_x^2 - s_x^2) \right] \left(\frac{C_x S_x^2 + \lambda_{04}}{C_x s_x^2 + \lambda_{04}} \right)$	C_x	λ_{40}

Tahmin edicilerin HKO'sunu bulmak için; $\psi_0 = \frac{s_y^2}{S_y^2} - 1$ ve $\psi_1 = \frac{s_x^2}{S_x^2} - 1$ yazılırsa, $E(\psi_i) = 0$

$i=0,1$ elde edilir ve böylece tahmin edici aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$s_{ky}^2 \cong \left[w_{1(yd)} s_y^2 (1 + \psi_0) - w_{2(yd)} S_x^2 \psi_1 \right] \left[\lambda_{(yd)} (1 + g\psi_1)^{-1} + (1 - \lambda_{(yd)}) \exp \left\{ -\frac{1}{2} g\psi_1 \left(1 + \frac{1}{2} g\psi_1 \right)^{-1} \right\} \right] \quad (2.115)$$

$g = \frac{\alpha_{(yd)} S_x^2}{\alpha_{(yd)} S_x^2 + b_{(yd)}}$ olmak üzere HKO ise,

$$\begin{aligned} \text{HKO}(s_{yd}^2) \cong & \left[S_y^4 (w_{1(yd)} - 1)^2 + w_{1(yd)}^2 \theta_{(yd)} \left\{ \lambda_{40}^* + \frac{1}{4} g^2 \lambda_{40}^* (4 + 7\lambda_{(yd)} + \lambda_{(yd)}^2) - 2g\lambda_{22}^* (1 + \lambda_{(yd)}) \right\} \right. \\ & + w_{2(yd)}^2 \frac{S_x^4}{S_y^4} \theta_{(yd)} \lambda_{04}^* - 2 w_{1(yd)} \theta_{(yd)} \left\{ \frac{1}{8} g^2 (3 + 5\lambda_{(yd)}) \lambda_{04}^* - \frac{1}{2} g(1 + \lambda_{(yd)}) \lambda_{22}^* \right\} \\ & \left. - 2 w_{2(yd)} \frac{S_x^2}{S_y^2} \frac{1}{2} g \theta_{(yd)} (1 + \lambda_{(yd)}) \lambda_{04}^* - 2 w_{1(yd)} w_{2(yd)} \frac{S_x^2}{S_y^2} \theta_{(yd)} \left\{ \lambda_{22}^* - g(1 + \lambda_{(yd)}) \lambda_{04}^* \right\} \right] \quad (2.116) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Burada; $\lambda_{40}^* = (\lambda_{40} - 1)$, $\lambda_{04}^* = (\lambda_{04} - 1)$, $\lambda_{22}^* = (\lambda_{22} - 1)$, $\theta_{(yd)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{N}$,

$\rho^* = \rho - 1$ ile $w_{1(yd)}$ ve $w_{2(yd)}$ ağırlıklarının optimal değerleri,

$$w_{1(yd)}^* = \frac{1 - \frac{1}{8} \theta_{(yd)} g^2 (1 + 3\lambda_{(yd)} + 4\lambda_{(yd)}^2) \lambda_{04}^*}{1 + \theta_{(yd)} \left\{ \lambda_{04}^* (1 - \rho^{*2}) - g^2 \frac{1}{4} \lambda_{(yd)} (1 + 3\lambda_{(yd)}) \lambda_{04}^* \right\}},$$

$$w_{2(yd)}^* = \frac{S_y^2}{S_x^2} \left\{ \frac{1}{2} g (1 + \lambda_{(yd)}) + w_{1(yd)}^* \left(\frac{\lambda_{22}^*}{\lambda_{04}^*} - g (1 + \lambda_{(yd)}) \right) \right\} \quad (2.117)$$

şeklinde olup minimum HKO,

$$HKO_{\min}(s_{yd}^2) \cong S_y^4 \left[\left(1 - \frac{1}{4} g^2 \theta_{(yd)} (1 + \lambda_{(yd)})^2 \lambda_{04}^* \right) - \frac{\left\{ 1 - \frac{1}{8} \theta_{(yd)} g^2 (1 + 3\lambda_{(yd)} + 4\lambda_{(yd)}^2) \lambda_{04}^* \right\}^2}{1 + \theta_{(yd)} \left\{ \lambda_{04}^* (1 - \rho^{*2}) - g^2 \frac{1}{4} \lambda_{(yd)} (1 + 3\lambda_{(yd)}) \lambda_{04}^* \right\}} \right] \quad (2.118)$$

olarak bulunur.

2.1.14. Lone ve Tailor Varyans Tahmin Edicisi

Kitlenin varyansını tahmin etmek için bir başka tahmin edici, Searl [21] sabit katsayısını kullanan, Lone ve Tailor [22] tarafından 2017 yılında önerilmiştir:

$$s_{lt}^2 = H \cdot \hat{\bar{Y}}. \quad (2.119)$$

Burada H sabit katsayısı olmak üzere kitle ortalamasının tahmini;

$$\hat{\bar{Y}} = s_y^2 \left[w_{1(lt)} \left(\frac{S_x^2 - C_x}{S_y^2 - C_x} \right) + (1 - w_{1(lt)}) \left(\frac{\bar{x} - \rho}{\bar{X} - \rho} \right) \right] \quad (2.120)$$

şeklindedir. Bu eşitlikte $w_{1(lt)}$ değeri HKO'yu minimum yapan sabit bir değerdir. Tahmin edicinin HKO'sunu bulmak için önce $\hat{\bar{Y}}$ değerinin HKO'sunun bulunması gerekmektedir. Bunun için aşağıdaki işlemler takip edilebilir.

Genellikle doğrusal olmayan tahmin edicilerin HKO'larını hesaplamak için fark yöntemi kullanılır. Bu yöntemde tahmin edicideki değişken sayısı kadar fark terimi eklenebilir. Burada da $s_y^2 = S_y^2(1 + e_0)$, $s_x^2 = S_x^2(1 + e_1)$, $\bar{x} = \bar{X}(1 + e_2)$ şeklinde yeni terimler tanımlanır ve $E(e_0) = E(e_1) = E(e_2) = 0$ yazılabilir.

Ayrıca $\lambda_{pq} = \frac{\mu_{pq}}{\mu_{20}^{p/2} \mu_{02}^{q/2}}$ ve $\mu_{pq} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^p (x_i - \bar{X})^q$ olmak üzere

$$E(e_0^2) = \frac{1}{n} (\lambda_{40} - 1) = n^{-1} \lambda_{40}^*,$$

$$E(e_1^2) = \frac{1}{n} (\lambda_{04} - 1) = n^{-1} \lambda_{04}^*,$$

$$E(e_2^2) = \frac{1}{n} C_x^2,$$

$$E(e_0 e_2) = \frac{1}{n} \lambda_{21} C_x,$$

$$E(e_0 e_1) = \frac{1}{n} (\lambda_{22} - 1) = n^{-1} \lambda_{22}^*,$$

$$E(e_1 e_2) = \frac{1}{n} C_x \lambda_{03},$$

değerleri ile $\hat{\bar{Y}}$ 'nin HKO'su aşağıdaki gibi bulunur.

$$HKO(\hat{\bar{Y}}) = S_y^4 \left[A_{(lt)} + W_1^2 B_{lt}^* - 2W_1 C_{lt}^* \right]. \quad (2.121)$$

Burada;

$$A_{lt} = n^{-1} \lambda_{40}^* + n^{-1} S_{lt}^2 C_x^2 + 2n^{-1} S_{lt} C_x \lambda_{21},$$

$$B_{lt}^* = n^{-1} M_{lt}^2 \lambda_{04}^* + n^{-1} S_{lt}^2 C_x^2 + 2n^{-1} S_{lt} M_{lt} C_x \lambda_{03},$$

$$C_{lt}^* = n^{-1}M_{lt}^2\lambda_{22}^* + n^{-1}S_{lt}\lambda_{21}C_x + n^{-1}S_{lt}M_{lt}C_x\lambda_{03} + n^{-1}S_{lt}^2C_x^2 \text{ ve}$$

$$M_{lt} = \frac{S_x^2}{S_x^2 - C_x}, S_{lt} = \frac{\bar{X}}{\bar{X} - \rho}, w_{1(lt)} = \frac{C}{B^*} = w_{1(lt)}^* \quad (2.122)$$

şeklinde olmakla birlikte, $w_{1(lt)}^*$ HKO'yu minimum yapan değerdir. $\hat{\bar{Y}}$ 'nin minimum HKO aşağıdaki şekilde yazılır:

$$HKO_{\min}(\hat{\bar{Y}}) = S_y^4 \left[A_{lt} - \frac{C^{*2}}{B^*} \right] = S_y^4 [A_{lt} - \rho_1^2]. \quad (2.123)$$

$$\text{Burada } \rho_1^2 = \frac{C_{lt}^{*2}}{B_{lt}^*} \text{ 'dir.}$$

s_{lt}^2 tahmin edicisinin HKO'su ise aşağıdadır:

$$HKO(s_{lt}^2) = S_y^4 \left[H^2(W_1^2B_{lt}^* + 2w_1P_{lt} + R_{lt}) - 2H(w_1F_{lt} + G_{lt}) + 1 \right]. \quad (2.124)$$

Bu eşitlikte ;

$$P_{lt} = M_{lt}^2n^{-1}\lambda_{04}^* - 2M_{lt}n^{-1}\lambda_{22}^* - 2S_{lt}n^{-1}C_x\lambda_{21} - M_{lt}S_{lt}n^{-1}C_x\lambda_{03} - S_{lt}^2n^{-1}C_x^2,$$

$$R_{lt} = 1 + n^{-1}\lambda_{04}^* + n^{-1}S_{lt}^2C_x^2 + 4n^{-1}S_{lt}\lambda_{21}C_x,$$

$$F_{lt} = M_{lt}^2n^{-1}\lambda_{04}^* - M_{lt}n^{-1}\lambda_{22}^* - S_{lt}n^{-1}C_x\lambda_{21},$$

$$G_{lt} = 1 + S_{lt}n^{-1}C_x\lambda_{21} \quad (2.125)$$

değerleri bulunmaktadır. s_{lt}^2 tahmin edicisinin HKO'sunu minimum yapan H değeri,

$$H = \frac{w_1F_{lt} + G_{lt}}{w_1^2B_{lt}^* + 2w_1P_{lt} + R_{lt}} = H^* \quad (2.126)$$

biçimindedir. Bulunan bu değer Eş. (2.119)'daki tahmin edicide yerine yazılırsa tahmin edici;

$$s_{lt}^{2*} = \frac{w_{1(lt)} F_{lt} + G_{lt}}{w_{1(lt)}^2 B_{lt}^* + 2w_{1(lt)} P_{lt} + R_{lt}} \cdot \hat{Y} \quad (2.127)$$

şeklinde elde edilir. Bu tahmin edici yalnızca λ_{04} , λ_{40} , λ_{22} , λ_{21} , λ_{03} ve C_x değerleri bilindiğinde kullanılabilir. Bu tahmin edicinin HKO'su ise şöyledir:

$$HKO(s_{lt}^2) = S_y^4 \left[1 - \frac{(w_{1(lt)} F_{lt} + G_{lt})^2}{w_{1(lt)}^2 B_{lt}^* + 2w_{1(lt)} P_{lt} + R_{lt}} \right] = S_y^4 [1 - \rho_2^2] \quad (2.128)$$

$w_{1(lt)}^*$ değerini $\hat{Y}$ 'da yerine yazarsak;

$$\hat{Y}^* = s_y^2 \left[w_{1(lt)}^* \left(\frac{S_x^2 - C_x}{s_y^2 - C_x} \right) + (1 - w_{1(lt)}^*) \left(\frac{\bar{X} - \rho}{\bar{X} - \rho} \right) \right] \quad (2.129)$$

elde edilir. $w_{1(lt)}^*$ ve $\hat{Y}^*$ değerleri Eş. (2.127)'de yerine yazılırsa tahmin edici;

$$s_{lt}^{2**} = \left(\frac{w_{1(lt)}^* F_{lt} + G_{lt}}{w_{1(lt)}^{*2} B_{lt}^* + 2w_{1(lt)}^* P_{lt} + R_{lt}} \right) \hat{Y}^* \quad (2.130)$$

şekilde yazılır. HKO'nun minimum eşitliği,

$$HKO_{\min}(s_{lt}^{2**}) = S_y^4 \left[1 - \frac{(w_{1(lt)}^* F_{lt} + G_{lt})^2}{w_{1(lt)}^{*2} B_{lt}^* + 2w_{1(lt)}^* P_{lt} + R_{lt}} \right].$$

$$\rho_3 = \frac{(w_{1(lt)}^* F_{lt} + G_{lt})^2}{w_{1(lt)}^{*2} B_{lt}^* + 2w_{1(lt)}^* P_{lt} + R_{lt}} \text{ denilirse,}$$

$$HKO_{\min}(s_{lt}^{2**}) = S_y^4 [1 - \rho_3] \quad (2.131)$$

olarak hesaplanmaktadır. Bu tahmin edici, görüldüğü üzere yalnızca λ_{40} , λ_{04} , λ_{22} , λ_{21} , C_x ve λ_{03} değerleri bilindiğinde kullanılabilir.

s_{lt}^{2**} tahmin edicisi klasik varyans tahmin edicisi ile karşılaştırıldığında;

$$HKO_{\min}(s_{lt}^{2**}) < HKO(s_y^2) = V(s_y^2)$$

$$HKO(s_y^2) = \frac{1}{n} S_y^4 \lambda_{40}^*$$

$$\rho_3 < \frac{n - \lambda_{40}^*}{n} \quad (2.132)$$

koşulu altında s_{lt}^{2**} tahmin edici daha etkin denebilir. Benzer şekilde Eş (2.84)'deki Kadılar ve Çıngı tahmin edicisi ile karşılaştırıldığında,

$$HKO_{\min}(s_{lt}^{2**}) < HKO(s_{kci}^2)$$

$$\lambda_{40}^* = \beta_2(y) - 1, \lambda_{04}^* = \beta_2(x) - 1, \lambda_{22}^* = \theta - 1 \text{ ve } K = \frac{\lambda_{22}^*}{\lambda_{40}^*} \text{ olmak üzere}$$

$$\rho_3 > \frac{n - [\lambda_{40}^* + A_i \lambda_{04}^* (A_{i(kc)} - 2K)]}{n} \quad (2.133)$$

koşulu altında s_{lt}^{2**} tahmin edicisinin daha etkin olduğu görülmektedir.

3. BASİT RASTGELE ÖRNEKLEME (BRÖ)'DE ÖNERİLEN ORTALAMANIN VARYANS TAHMİN EDİCİLERİ

İkinci bölümde, basit rastgele örnekleme yöntemindeki bazı varyans tahmin edicileri anlatılmıştır. Bu bölümde ise, varyans tahmin edicilerinden yararlanılarak basit rastgele örnekleme yöntemi için *ortalamanın varyans* tahminleri verilecektir.

3.1. Ortalamanın Varyans Tahmin Edicileri

3.1.1. Ortalamanın Klasik Varyans Tahmin Edicisi

Varyans, örneklem uzayında her bir örneklemden diğerine değişim olarak tanımlanmaktadır. N büyüklüğünde bir kitleden basit rastgele örnekleme yöntemi ile n büyüklüğünde örneklem çekildiğinde ortalama tahmin edicisinin varyansı,

$$V(\bar{y}) = E(\bar{y} - \bar{Y})^2$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlikte aşağıdaki hesaplamalar yapılırsa,

$$n(\bar{y} - \bar{Y}) = (y_1 - \bar{Y}) + (y_2 - \bar{Y}) + \dots (y_n - \bar{Y})$$

$$n^2(\bar{y} - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{Y})^2 + 2 \sum_{i<j}^n (y_i - \bar{Y})(y_j - \bar{Y})$$

$$n^2 E(\bar{y} - \bar{Y})^2 = E \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{Y})^2 + 2E \sum_{i<j}^n (y_i - \bar{Y})(y_j - \bar{Y}) \quad (3.1)$$

elde edilir. Burada,

$$E \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{Y})^2 = \frac{n}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2 \text{ ile}$$

$$E \sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^n (y_i - \bar{Y})(y_j - \bar{Y}) = \frac{n(n-1)}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=2}^N (y_i - \bar{Y})(y_j - \bar{Y})$$

yazılır ve Eş (3.1)'de yerine konulursa,

$$n^2 E(\bar{y} - \bar{Y})^2 = \frac{n}{N} \left(\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2 \right) + 2 \frac{n-1}{N-1} \sum_{i<} \sum_{j=2}^N (y_i - \bar{Y})(y_j - \bar{Y}) \quad (3.2)$$

eşitliği bulunur. $\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2$ terimi bir kez eklenip çıkartılırsa

$$n^2 V(\bar{y}) = \frac{n}{N} \left(\left(1 - \frac{n-1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2 + \frac{n-1}{N-1} \left(\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y}) \right)^2 \right) \right)$$

elde edilir. İkinci tarafta $\sum_{i=1}^N y_i = N\bar{Y}$ olduğundan

$$V(\bar{y}) = \frac{1}{nN} \frac{N-n}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2 \text{ ve } S_y^2 \text{ tanımından}$$

$$V(\bar{y}) = \frac{N-n}{N} \frac{S_y^2}{n} = (1-f) \frac{S_y^2}{n} \quad (3.3)$$

şeklinde hesaplanır.

Görüldüğü üzere basit rastgele örneklemede sonsuz bir kitleden n büyüklüğünde basit rastgele örneklem çekilecek olunursa ortalamanın varyansında düzeltme terimi adı verilen $1-f$ ihmal edilebilir ve

$$V(\bar{y}) \cong \frac{S_y^2}{n} \quad (3.4)$$

olarak yazılır [2].

3.1.2. Önerilen Ortalamanın Varyans Tahmin Edicileri

Kitle ortalamasının, y değişkeni için ortalamanın klasik varyans tahmini Eş. (3.4)'ten yararlanılarak aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$v(\bar{y}) \cong \frac{s_y^2}{n}. \quad (3.5)$$

Formülden anlaşılacağı üzere kitle ortalamasının varyans tahmini s_y^2 ve n 'e bağlı olarak değişmektedir.

Eş. (3.4)'te verilen ortalamanın varyans tahmininde s_y^2 yerine ikinci bölümde anlatılan birbirinden farklı varyans tahmin edicilerinden yararlanılarak ortalamanın varyans tahmini için genel bir çıkarım yapılabilir.

Örnek olarak, Hirano'nun kitle varyans tahmin edicisinden yola çıkılarak *ortalamanın varyans* tahmini bulunmak istenilsin. Eş. (2.16)'da verilen Hirano'nun kitle varyans tahmin edici,

$$s_h^2 = A_{(h)} s_y^2$$

şeklindedir. Burada $A_{(h)}$ sabit bir sayı s_y^2 ise y değişkeni için klasik varyans tahmin edicisidir. Eş. (3.3)'ten yararlanılarak y değişkeni için ortalamanın varyans formülü $v(\bar{y}) \cong \frac{s_y^2}{n}$ şeklinde yazılabilir. Bu formülde s_y^2 yerine, Hirano'nun varyans tahmin edicisi yazılırsa y değişkeni için, ortalamanın varyans tahmin edicisi;

$$\begin{aligned} v_h(\bar{y}) &= \frac{s_h^2}{n} \\ &= \frac{A_{(h)} s_y^2}{n} \end{aligned} \quad (3.6)$$

biçiminde olmaktadır. Burada $A_{(h)}$ sabit değerinin Eş. (2.19)'da verilen $A_{(h)}^*$ değeri yerine yazıldığında formül,

$$v_h(\bar{y}) = \frac{1}{n} \left(\frac{s_y^2}{1 + \lambda(\beta_2(y) - 1)} \right) \quad (3.7)$$

olarak elde edilir. Artık *ortalamanın varyans* tahmin edicisi; s_y^2 klasik varyans tahmin edicisinden değil, Hirano'nun varyans tahmin edicisinden yararlanılarak oluşturulmuş durumdadır.

Burada dikkat edilmesi gereken durum y değişkeni için, ortalamanın klasik varyans tahmin edicisinin yalnızca s_y^2 ile n örneklem büyüklüğüne bağlı olduğudur. Eş. (3.5)'te verilen formülde s_y^2 yerine;

- ❖ Das and Tripathi (1978),
- ❖ Isaki (1983),
- ❖ Prasad ve Singh (1990),
- ❖ Garcia ve Cebrain (1996),
- ❖ Upadhyaya ve Singh (1999),
- ❖ Chandra ve Singh (2005),
- ❖ Kadılar ve Çıngı (2005)(2007),
- ❖ Shabbir ve Gupta (2008),
- ❖ Subramani ve Kumarapandiyan (2012),
- ❖ Singh ve Solanki (2013),
- ❖ Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta (2015),
- ❖ Lone ve Tailor (2017)

farklı varyans tahmin edicileri yazılırsa, her bir tahmin edici için *ortalamanın varyans* tahmin edicileri aynı yolla hesaplanabilmektedir. Her bir varyans tahmin edicisi n ' e bölünerek *ortalamanın varyans* tahmin edicileri elde edilmektedir.

Çizelge 3.1, Çizelge 3.2 ve Çizelge 3.3'de her bir varyans tahmin edicisinden yola çıkarak oluşturulan *ortalamanın varyans* tahmin edicileri verilmektedir.

Çizelge 3. 1. BRÖ'de Önerilen Ortalamanın Varyans Tahmin Edicileri

No	Yararlanılan Varyans Tahmin Edicileri	Önerilen <i>Ortalamanın Varyans</i> Tahmin Edicileri
1	Klasik Varyans (2.1)	$v(\bar{y}) = \frac{s_y^2}{n}$
2	Hirano (2.16)	$v_h(\bar{y}) = \left(\frac{1}{n}\right) A_{(h)} s_y^2, A_{(h)}^* = \frac{1}{1 + \lambda(\beta_2(y) - 1)}$

Çizelge 3. 2. BRÖ'de Önerilen Ortalamanın Varyans Tahmin Edicileri (Devam)

No	Yararlanılan Varyans Tahmin Edicileri	Önerilen <i>Ortalamanın Varyans</i> Tahmin Edicileri
3	Das ve Tripathi (2.23), (2.24), (2,33)	$v_{dt1}(\bar{y}) = \frac{1}{n} s_y^2 \left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}} \right)^{\alpha_{(dt)}}$ $v_{dt2}(\bar{y}) = \frac{\bar{X} s_y^2}{n(\bar{X} + \alpha_{(dt)}(\bar{x} - \bar{X}))}, \alpha_{(dt)}^* = \frac{\bar{X} \mu_{21}}{S_y^2 S_x^2}$ $v_{dt3}(\bar{y}) = \frac{s_y^2 S_x^2}{n(S_x^2 + \alpha_{(dt)}(s_x^2 - S_x^2))}, \alpha_{(dt)}^{**} = \frac{\theta - 1}{\beta_2(x) - 1}$
4	Isaki (2.38),(2.43)	$v_i(\bar{y}) = \frac{1}{n} \left(\frac{s_y^2}{s_x^2} \right) S_x^2, v_{ireg}(\bar{y}) = \frac{s_y^2 + b(S_x^2 - s_x^2)}{n}.$
5	Prasad ve Singh (2.47), (2.55)	$v_{ps1}(\bar{y}) = \frac{A_{(h)} s_y^2}{n s_x^2} S_x^2, A_{(h)}^* = \frac{1}{1 + \lambda(\beta_2(y) - 1)}$ $v_{ps2}(\bar{y}) = \frac{A_{(ps)} s_y^2}{s_x^2} S_x^2, A_{(ps)} = \frac{1 + \lambda(\theta - 1)}{1 + \lambda(\beta_2(y) - 1)}$
6	Garcia ve Cebrain (2.63)	$v_{gc}(\bar{y}) = \frac{s_y^2}{n} \left(\frac{S_x^2}{s_x^2} \right)^{\alpha_{(gc)}}, \alpha_{(gc)}^* = \frac{\theta - 1}{\beta_2(x) - 1}$
7	Upadhyaya ve Singh (2.69)	$v_{us}(\bar{y}) = \frac{s_y^2}{n} \left(\frac{S_x^2 + \beta_2(x)}{s_x^2 + \beta_2(x)} \right)$
8	Chandra ve Singh (2.74), (2.78), (2.79)	$v_{cs1}(\bar{y}) = \frac{s_y^2}{n} \frac{(\beta_2(x) + S_x^2)}{[\alpha_{(cs)}(\beta_2(x) + s_x^2) + (1 - \alpha_{(cs)})(\beta_2(x) + S_x^2)]}$ $\alpha_{(cs)}^* = \frac{\theta - 1}{K(\beta_2(x) - 1)}, K = \frac{S_x^2}{\beta_2(x) + S_x^2}$ $v_{cs2}(\bar{y}) = \frac{s_y^2}{n} \left(\frac{\beta_2(x) + S_x^2}{\beta_2(x) + s_x^2} \right)^\delta,$ $v_{cs3}(\bar{y}) = \frac{s_y^2}{n} \left(2 - \frac{\beta_2(x) + s_x^2}{\beta_2(x) + S_x^2} \right)^\phi$

Çizelge 3. 3. BRÖ'de Önerilen Ortalamanın Varyans Tahmin Edicileri (Devam)

No	Yararlanılan Varyans Tahmin Edicileri	Önerilen <i>Ortalamanın Varyans</i> Tahmin Edicileri
9	Kadılar ve Çingı (2.82), (2.85)	$v_{kc1}(\bar{y}) = \frac{s_y^2}{n(s_x^2 - C_x)} [S_x^2 - C_x] ,$ $v_{kc2}(\bar{y}) = \frac{s_y^2}{n(s_x^2 - \beta_2(x))} [S_x^2 - \beta_2(x)] ,$ $v_{kc3}(\bar{y}) = \frac{s_y^2}{n(s_x^2 \beta_2(x) - C_x)} [S_x^2 \beta_2(x) - C_x] ,$ $v_{kc4}(\bar{y}) = \frac{s_y^2}{n(s_x^2 C_x - \beta_2(x))} [S_x^2 C_x - \beta_2(x)]$ $v_{kc5}(\bar{y}) = \frac{1}{n} \left\{ w_1 s_y^2 + w_2 \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \left[\frac{1 + \psi C_{xy}}{1 + \psi C_x^2} \right] \bar{X} \right\}$ $w_{1(kcr)}^* = \frac{A+B}{2A+B+\beta_2^*(y)} , w_{2(kcr)}^* = \frac{A+\beta_2^*(y)}{2A+B+\beta_2^*(y)}$
10	Gupta ve Shabbir (2.90)	$v_{gs}(\bar{y}) = \frac{1}{n} \left[d_{1(gs)} s_y^2 + d_{2(gs)} (S_x^2 - s_x^2) \right] \left[2 - \left(\frac{s_x^2}{S_x^2} \right)^{\alpha_{(gs)}} \right]$
11	Subramani ve Kumarapandiyan (2.105)	$v_{sk}(\bar{y}) = \frac{s_y^2}{n} \left[\frac{C_x S_x^2 + M_d}{C_x s_x^2 + M_d} \right]$
12	Singh ve Solanki (2.109)	$v_{ss}(\bar{y}) = \frac{1}{n} \left[w_{1(ss)} s_y^2 - w_{2(ss)} \left(\frac{s_x^2 - S_x^2}{S_x^2} \right) \right] \left(\frac{a_{(ss)} S_x^2 + b_{(ss)}}{a_{(ss)} s_x^2 + b_{(ss)}} \right)$
13	Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta (2.114)	$v_{yd}(\bar{y}) = \frac{1}{n} \left[w_{1(yd)} s_y^2 + w_{2(yd)} (S_x^2 - s_x^2) \right] \times$ $\left[\lambda \left(\frac{\alpha_{(yd)} S_x^2 + b_{(yd)}}{\alpha_{(yd)} s_x^2 + b_{(yd)}} \right) + (1 - \lambda_{(yd)}) \exp \left(\frac{\alpha_{(yd)} (S_x^2 - s_x^2)}{\alpha_{(yd)} (S_x^2 + s_x^2) + 2b_{(yd)}} \right) \right]$
14	Lone ve Tailor (2.119)	$v_{lt}^{**}(\bar{y}) = \frac{1}{n} \left(\frac{w_{1(lt)}^* F_{lt} + G_{lt}}{w_{1(lt)}^{*2} B_{lt}^* + 2w_{1(lt)}^* P_{lt} + R_{lt}} \right) \hat{\bar{Y}}^*$

4. BASİT RASTGELE ÖRNEKLEME (BRÖ)' DE KİTLE ORTALAMASININ GÜVEN ARALIĞI TAHMİNLERİ

4.1. Kitle Ortalamasının Güven Aralığı Tahminleri

Örnekleme çalışmalarında tahmin yöntemleri nokta ve aralık tahmini olarak kullanılır. Nokta tahmini kitleye ilişkin varyans, ortalama gibi tek bir tahmin değerinin verilebildiği tahminlerdir. Kitleye ilişkin parametrelerin tahmin aralığının verildiği tahmin yöntemi ise aralık tahminleridir [23].

4.1.1. Kitle Ortalamasının Klasik Güven Aralığı Tahmini

Nokta tahmininde kitle parametresi, tek bir değerle tahmin edilmeye çalışılır. Araştırmacılar kitle parametrelerinin nokta tahmini yerine aralık tahmini yapma yolunu da seçebilirler.

Olasılıksal örnekleme yöntemlerinde, kitle parametrelerinin tahminlerinde tahminlerin varyansı, standart hataları bununla birlikte de güven aralıkları da tahmin edilebilir.

Güven aralığının hesaplanması örnekleme dağılımının özelliğine dayalı olmakla birlikte, merkezi limit teoremine göre örneklem büyük ise ($n \geq 30$) standartlaştırılmış z değişkeninin

dağılımı $z = \frac{\bar{y} - \bar{Y}}{\sigma_{\bar{y}}}$, ortalaması 0, varyansı 1 olan normal dağılıma yaklaşacaktır Buna göre

%95 güvenilrlikle $\bar{Y}$ için güven aralığı,

$$P(-1,96 < z < 1,96) = 0,95,$$

$$P(-1,96 < \frac{\bar{y} - \bar{Y}}{\sigma_{\bar{y}}} < 1,96) = 0,95,$$

$$P(-1,96\sigma_{\bar{y}} < \bar{y} - \bar{Y} < 1,96\sigma_{\bar{y}}) = 0,95,$$

$$P(\bar{y} - 1,96\sigma_{\bar{y}} < \bar{Y} < \bar{y} + 1,96\sigma_{\bar{y}}) = 0,95 \quad (4.1)$$

olarak elde edilir. Bu aralığın bilinmeyen kitle ortalamasını kapsayan aralıklardan biri olması olasılığı %95'tir. Diğer bir ifadeyle oluşturulabilecek tüm mümkün güven aralıkları içinde yaklaşık %95'inin bilinmeyen kitle ortalamasını kapsamı beklenir. Kitleden kaç farklı mümkün örneklem seçebiliyorsak; mümkün örneklem sayı kadar güven aralığı oluşturulabilir [24].

Ancak örneklem küçük ise $n < 30$ ise merkezi limit teoreminden yararlanılmaz. Bu durumda örnekleme dağılımı t dağılımı olur. $t = \frac{\bar{y} - \bar{Y}}{s_{\bar{y}}}$ formülü kullanılarak aralık tahmini

yapılabilir. Burada $\bar{y}$ örneklem ortalaması, $\bar{Y}$ kitle ortalaması ve $s_{\bar{y}}$ ise ortalamanın standart hatasıdır. Burada z tablosundan farklı olarak n-1 serbestlik dereceli t tablosu kullanılır. Çünkü farklı serbestlik dereceleri için farklı t dağılımları mevcuttur. Ayrıca serbestlik derecesi arttıkça t dağılımı normal dağılıma yakınsamaktadır [25]. $s_{\bar{y}} = \sqrt{v(\bar{y})}$ olmak üzere kitle ortalamasının güven aralığı tahmini,

$$t = \frac{\bar{y} - \bar{Y}}{s_{\bar{y}}} = \frac{\bar{y} - \bar{Y}}{\sqrt{v(\bar{y})}}$$

$$\bar{y} - t\sqrt{v(\bar{y})} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t\sqrt{v(\bar{y})} \quad (4.2)$$

şeklinde yazılabilir. Eş. (3.3)'te verilen $v(\bar{y})$ değeri yerine yazıldığında güven aralığının tahmini

$$\bar{y} - t_{s_y} \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t_{s_y} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (4.3)$$

olarak bulunur.

Eş. (4.3)'deki formülden, güven aralığının örneklem büyüklüğü ile ters orantılı olup örnekleme büyüklüğü büyüdükçe güven aralığının da küçüldüğü görülmektedir [2]. Ayrıca güven aralığı tahminin formülü; örneklem ortalaması $\bar{y}$, tablo değeri t ve varyans tahmin edicisinden oluşmaktadır. O halde ikinci bölümde anlatılan birbirinden farklı varyans tahmin edicilerden yola çıkarak farklı güven aralık tahminleri oluşturulabilir.

4.1.2. Hirano Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığında Kullanılması

Kitle ortalamasının güven aralığı tahmininde; klasik varyans tahmin edicisi yerine, Eş (3.7)'de formülü verilen kitle ortalamasının Hirano varyans tahmin edicisinden yararlanılarak oluşturulan *ortalamanın varyansı* kullanılırsa güven aralığı tahmininin gösterimi,

$$\bar{y} - t\sqrt{v_h(\bar{y})} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t\sqrt{v_h(\bar{y})} \quad (4.4)$$

şeklinde olmaktadır. Çizelge 3.1'de, 2 numaralı formüldeki *ortalamanın varyans* tahmin edicisi yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} \bar{y} - t\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)A_{(h)}s_y^2} &\leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)A_{(h)}s_y^2}, \\ \bar{y} - t\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{s_y^2}{1+\lambda(\beta_2(y)-1)}\right)} &\leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{s_y^2}{1+\lambda(\beta_2(y)-1)}\right)} \end{aligned} \quad (4.5)$$

elde edilir. $\lambda = \frac{1}{n}$ olduğu göz önünde bulundurulduğunda güven aralığının tahmini

$$\begin{aligned} \bar{y} - t s_y \frac{1}{\sqrt{n(1+\lambda(\beta_2(y)-1))}} &\leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t s_y \frac{1}{\sqrt{n(1+\lambda(\beta_2(y)-1))}}, \\ \bar{y} - t s_y \frac{1}{\sqrt{n+(\beta_2(y)-1)}} &\leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t s_y \frac{1}{\sqrt{n+(\beta_2(y)-1)}} \end{aligned} \quad (4.6)$$

olarak hesaplanmaktadır.

Eş. (4.3)'te gösterilen klasik varyans tahmin edicisinden yararlanılarak hesaplanan kitle ortalamasının güven aralığı tahmini, ilgilenilen değişkenin örneklem büyüklüğüne bağlı olarak değişmekteydi. Eş. (4.6)'da verilmiş olan güven aralığı tahmininde ise aralık tahmininin, örneklem büyüklüğü ile ilgilenilen değişkenin standart sapmasının yanı sıra ilgilenilen değişkenin kitle basıklık katsayısına da bağlı olduğu sonucuna varılmaktadır.

4.1.3. Das ve Tripathi Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığında Kullanılması

Kitle ortalamasının güven aralığı tahmininde; Çizelge 3.2’de 3 numaralı formülde gösterilen ve Das ve Tripathi varyans tahmin edicisinden yararlanılarak oluşturulan *ortalamanın varyans* tahmin edicisi, $v_{dt1}(\bar{y})$ kullanılırsa güven aralığının tahmini

$$\bar{y}-t\sqrt{v_{dt1}(\bar{y})} \leq \bar{Y} \leq \bar{y}+t\sqrt{v_{dt1}(\bar{y})}, \quad (4.7)$$

$$\bar{y}-t\sqrt{\frac{s_y^2}{n}\left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}}\right)^{\alpha_{(dt)}}} \leq \bar{Y} \leq \bar{y}+t\sqrt{\frac{s_y^2}{n}\left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}}\right)^{\alpha_{(dt)}}},$$

$$\bar{y}-ts_y\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}}\right)^{\alpha_{(dt)}}} \leq \bar{Y} \leq \bar{y}+ts_y\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}}\right)^{\alpha_{(dt)}}} \quad (4.8)$$

olarak bulunur. Güven aralığı tahmininde; Das ve Tripathi’nin varyans tahmin edicisinden yararlanılarak hesaplanan *ortalamanın varyans* tahmin edicisi kullanıldığında, güven aralığının, örneklem büyüklüğü (n) ve ilgilenilen değişkenin (y) standart sapmasının yanı sıra; yardımcı değişkene (x) ilişkin kitle ve örneklem ortalaması ile $\alpha_{(dt)}$ sabit değerine bağlı olarak değiştiği anlaşılmaktadır.

Das ve Tripathi’nin, Çizelge 3.2’de 3 numaralı formülde gösterilen *ortalamanın varyans* $v_{dt2}(\bar{y})$ tahmin edicisi, güven aralığı tahmininde kullanılırsa güven aralığı tahmini,

$$\bar{y}-t\sqrt{v_{dt2}(\bar{y})} \leq \bar{Y} \leq \bar{y}+t\sqrt{v_{dt2}(\bar{y})}, \quad (4.9)$$

$$\bar{y}-t\sqrt{\frac{\bar{X}s_y^2}{n(\bar{X} + \alpha_{(dt)}(\bar{x} - \bar{X}))}} \leq \bar{Y} \leq \bar{y}+t\sqrt{\frac{\bar{X}s_y^2}{n(\bar{X} + \alpha_{(dt)}(\bar{x} - \bar{X}))}},$$

$$\bar{y}-t\frac{s_y}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\bar{X}}{(\bar{X} + \alpha_{(dt)}(\bar{x} - \bar{X}))}} \leq \bar{Y} \leq \bar{y}+t\frac{s_y}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\bar{X}}{(\bar{X} + \alpha_{(dt)}(\bar{x} - \bar{X}))}} \quad (4.10)$$

şeklinde yazılır. O halde güven aralığı tahmininde, Das ve Tripathi’nin varyans tahmin edicisinden yararlanılarak hesaplanan *ortalamanın varyans* tahmin edicisi $v_{dt2}(\bar{y})$ kullanıldığında güven aralığının, örneklem büyüklüğünün (n), yanı sıra yardımcı değişkenin

(x) kitle ve örneklem ortalamalarına ve $\alpha_{(dt)}$ sabit değerine bağlı olarak değiştiği sonucuna varılmaktadır.

Das ve Tripathi'nin bir diğer Çizelge 3.2'de 3 numaralı formülde gösterilen *ortalamanın varyans* $v_{dt3}(\bar{y})$ tahmin edicisi, güven aralığı tahmininde kullanılırsa güven aralığı tahmini,

$$\bar{y} - t\sqrt{v_{dt3}(\bar{y})} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t\sqrt{v_{dt3}(\bar{y})} \quad (4.11)$$

$$\bar{y} - t \frac{s_y}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{S_x^2}{(S_x^2 + \alpha_{(dt)}(s_x^2 - S_x^2))}} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t \frac{s_y}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{S_x^2}{(S_x^2 + \alpha_{(dt)}(s_x^2 - S_x^2))}} \quad (4.12)$$

elde edilir.

Eş. (4.12)'den anlaşılacağı üzere güven aralığı tahmininde, Das ve Tripathi'nin varyans tahmin edicisinden yararlanılarak hesaplanan *ortalamanın varyans* tahmin edicisi $v_{dt3}(\bar{y})$ kullanıldığında güven aralığının, örneklem büyüklüğü (n) ile birlikte $\alpha_{(dt)}$ sabit değerine, yardımcı değişkenin (x) kitle ve örneklem varyanslarına bağlı olarak değiştiği sonucuna varılmaktadır.

4.1.4. Isaki Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığında Kullanılması

Kitle ortalamasının güven aralığı tahmininde; bir başka varyans tahmin edicisi olan Isaki'nin oransal varyans tahmin edicisinden yararlanılarak oluşturulan ve Çizelge 3.2'de, 4. numarada formülü gösterilen *ortalamanın varyans* tahmin edicisi, $v_i(\bar{y})$ kullanılırsa, kitle ortalamasının güven aralığı tahmini

$$\bar{y} - t\sqrt{v_i(\bar{y})} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t\sqrt{v_i(\bar{y})} , \quad (4.13)$$

$$\bar{y} - t \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right) \frac{s_y^2}{s_x^2} S_x^2} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t \sqrt{\frac{1}{n} \frac{s_y^2}{s_x^2} S_x^2} ,$$

$$\bar{y} - t \frac{s_y S_x}{s_x \sqrt{n}} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t \frac{s_y S_x}{s_x \sqrt{n}} \quad (4.14)$$

olarak elde edilir.

Güven aralığı tahmininde; Isaki'nin kitle varyansının oransal tahmin edicisinden yararlanılarak hesaplanan *ortalamanın varyans* tahmin edicisi kullanıldığında güven aralığının, örneklem büyüklüğü (n) ve ilgilenilen değişkenin (y) örneklem standart sapmasının yanı sıra yardımcı değişkene ilişkin (x) kitle ve örneklem standart sapmasına bağlı olduğu söylenebilir. Ayrıca, Eş. (4.14)'deki formülde güven aralığının yardımcı değişkene (x) ilişkin örneklem standart sapması ile ters orantılı olduğu, buna karşın kitlenin standart sapması ile doğru orantılı olduğu görülmektedir.

Isaki'nin oransal varyans tahmin edicisinin yanı sıra regresyon varyans tahmin edicisinden yararlanılarak oluşturulan *ortalamanın varyans* tahmin edicisi Çizelge 3.1'de 4 numaralı formülde gösterilmiştir. Kitle ortalamasının güven aralığı tahmininde, Isaki'nin regresyon tahmin edicisinden yararlanılarak oluşturulan *ortalamanın varyans* tahmin edicisi $v_{ireg}(\bar{y})$ kullanılırsa, güven aralığı tahmini şeklinde yazılabilir:

$$\bar{y} - t \sqrt{v_{ireg}(\bar{y})} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t \sqrt{v_{ireg}(\bar{y})}, \quad (4.15)$$

$$\bar{y} - t \sqrt{\frac{s_y^2 + b(S_x^2 - s_x^2)}{n}} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t \sqrt{\frac{s_y^2 + b(S_x^2 - s_x^2)}{n}}. \quad (4.16)$$

Güven aralığı tahmininde; Isaki'nin kitle varyansının regresyon tahmin edicisinden yararlanılarak hesaplanan *ortalamanın varyans* tahmin edicisi $v_{ireg}(\bar{y})$ kullanıldığında güven aralığının, örneklem büyüklüğü (n) ile birlikte, b değerine, yardımcı değişkene (x) ilişkin kitle ve örneklem varyanslarına bağlı olduğu söylenebilir.

4.1.5. Prasad ve Singh Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığında Kullanılması

Güven aralığı tahmininde, Çizelge 3.1'de 5 numaralı formülde gösterilen, Prasad ve Singh'ın kitle varyansının oransal tahmin edicisinden faydalanılarak hesaplanan, *ortalamanın varyans* tahmin edicisi $v_{ps1}(\bar{y})$ kullanılırsa, güven aralığının tahmini

$$\bar{y} - t \sqrt{v_{ps1}(\bar{y})} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t \sqrt{v_{ps1}(\bar{y})} \quad (4.17)$$

şeklinde gösterilebilir ve $v_{ps1}(\bar{y})$ değeri yerine yazıldığında,

$$\bar{y} - t \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{s_y^2}{s_x^2 (1 + \lambda(\beta_2(y) - 1))} S_x^2 \right)} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{s_y^2}{s_x^2 (1 + \lambda(\beta_2(y) - 1))} S_x^2 \right)} \quad (4.18)$$

elde edilir. $\lambda = \frac{1}{n}$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\bar{y} - t \frac{s_y}{s_x} S_x \sqrt{\frac{1}{(n + \beta_2(y) - 1)}} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t \frac{s_y}{s_x} S_x \sqrt{\frac{1}{(n + \beta_2(y) - 1)}} \quad (4.19)$$

güven aralığı elde edilir. Güven aralığı tahmininde; Prasad ve Singh'in kitle varyansının oransal tahmin edicisinden yararlanılarak hesaplanan *ortalamanın varyans* tahmin edicisi kullanıldığında, güven aralığının örneklem büyüklüğünün yanı sıra yardımcı değişkenin (x) kitle ve örneklem standart sapması ile ilgilenilen değişkenin (y) basıklık katsayısına bağlı olduğu anlaşılmaktadır.

Güven aralığı tahmininde, Çizelge 3.2'de 5 numaralı formülde gösterilen, bir diğer Prasad ve Singh'in kitle varyansının oransal tahmin edicisinden yararlanılarak hesaplanan, *ortalamanın varyans* tahmin edicisi $v_{ps2}(\bar{y})$ kullanılırsa, güven aralığının tahmini

$$\bar{y} - t \sqrt{v_{ps2}(\bar{y})} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t \sqrt{v_{ps2}(\bar{y})} \quad (4.20)$$

olarak gösterilir ve $v_{ps2}(\bar{y})$ yerine yazılırsa,

$$\bar{y} - t \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right) \frac{A_{(ps)} s_y^2}{s_x^2} S_x^2} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right) \frac{A_{(ps)} s_y^2}{s_x^2} S_x^2},$$

$$\bar{y} - t \frac{s_y}{s_x} S_x \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{1 + \lambda(\theta - 1)}{1 + \lambda(\beta_2(y) - 1)} \right)} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t \frac{s_y}{s_x} S_x \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{1 + \lambda(\theta - 1)}{1 + \lambda(\beta_2(y) - 1)} \right)} \quad (4.21)$$

şeklinde yazılır. Eş. (4.21)'den de anlaşılabacağı üzere, güven aralığı tahmininde Prasad ve Singh'in kitle varyansının oransal tahmin edicisinden yararlanılarak hesaplanan *ortalamanın varyans* tahmin edicisi $v_{ps2}(\bar{y})$ kullanıldığında, güven aralığının örneklem büyüklüğünün yanı sıra yardımcı değişkenin (x) kitle ve örneklem standart sapması ile ilgilenilen değişkenin (y) basıklık katsayısına ve kitlenin θ değerine bağlı olduğu anlaşılmaktadır.

4.1.6. Garcia ve Cebrain Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığında Kullanılması

Güven aralığı tahmininde, bir diğer varyans tahmin edicisi olan ve Çizelge 3.2’de 6 numaralı formülde gösterilen ve Garcia ve Cebrain kitle varyansının oransal tahmin edicisinden yararlanılarak hesaplanan, *ortalamanın varyans* tahmin edicisi $v_{gc1}(\bar{y})$ kullanılırsa, güven aralığının tahmini,

$$\bar{y} - t\sqrt{v_{gc1}(\bar{y})} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t\sqrt{v_{gc1}(\bar{y})} , \quad (4.22)$$

$$\bar{y} - t\sqrt{\frac{s_y^2}{n} \left(\frac{S_x^2}{s_x^2} \right)^{\alpha_{(gc)}}} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t\sqrt{\frac{s_y^2}{n} \left(\frac{S_x^2}{s_x^2} \right)^{\alpha_{(gc)}}}$$

olarak elde edilir . Burada eğer $\alpha_{(gc)}$ ’nın optimal değeri Eş. (2.66)’dan yerine yazılırsa güven aralığının tahmini,

$$\bar{y} - ts_y \sqrt{\left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{S_x^2}{s_x^2} \right)^{\frac{(\theta-1)}{(\beta_2(x)-1)}}} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + ts_y \sqrt{\left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{S_x^2}{s_x^2} \right)^{\frac{(\theta-1)}{(\beta_2(x)-1)}}} \quad (4.23)$$

olarak yazılabilir. Güven aralığı tahmini için; Garcia ve Cebrain kitle varyans tahmin edicisinden yararlanılarak hesaplanan *ortalamanın varyans* tahmin edicisi kullanıldığında güven aralığının; örneklem büyüklüğü ve yardımcı değişkene (x) ilişkin kitle ve örneklem varyansına bağlı olduğu anlaşılmaktadır. Aynı zamanda kitle parametrelerinden θ değeri ile yardımcı değişkenin basıklık katsayısı ile de ilişkili olduğu söylenebilmektedir. Farklı $\alpha_{(gc)}$ değerleri için farklı güven aralıkları tahminleri de oluşturulabilir.

4.1.7. Upadhyaya ve Singh Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığında Kullanılması

Kitle ortalamasının güven aralığı tahmininde; Çizelge 3.2’de 7 numaralı formülde gösterilen, Upadhyaya ve Singh kitle varyansının oransal tahmin edicisinden yararlanılarak hesaplanan, *ortalamanın varyans* tahmin edicisi $v_{us}(\bar{y})$ kullanılırsa, güven aralığının tahmini

$$\bar{y} - t\sqrt{v_{us}(\bar{y})} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t\sqrt{v_{us}(\bar{y})} . \quad (4.24)$$

şeklinde yazılır.

$v_{us}(\bar{y}) = \frac{s_y^2}{n} \left(\frac{S_x^2 + \beta_2(x)}{s_x^2 + \beta_2(x)} \right)$ değeri yerine yazılırsa aralık tahmini,

$$\bar{y} - t \sqrt{\frac{s_y^2}{n} \left(\frac{S_x^2 + \beta_2(x)}{s_x^2 + \beta_2(x)} \right)} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t \sqrt{\frac{s_y^2}{n} \left(\frac{S_x^2 + \beta_2(x)}{s_x^2 + \beta_2(x)} \right)},$$

$$\bar{y} - t_{s_y} \sqrt{\left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{S_x^2 + \beta_2(x)}{s_x^2 + \beta_2(x)} \right)} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t_{s_y} \sqrt{\left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{S_x^2 + \beta_2(x)}{s_x^2 + \beta_2(x)} \right)} \quad (4.25)$$

biçiminde gösterilebilir. Eş. (4.25)'deki güven aralığı formülüne bakılarak, aralığın n örneklem büyüklüğünün yanı sıra, yardımcı değişkene (x) ait kitle ve örneklem varyansı ile kitle basıklık değerine bağlı olduğu sonucuna varılmaktadır.

4.1.8. Chandra ve Singh Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığında Kullanılması

Kitle ortalamasının güven aralığı tahmininde; Çizelge 3.2'de 8 numaralı formülde gösterilen, Chandra ve Singh kitle varyansının oransal tahmin edicisinden yararlanılarak hesaplanan, *ortalamanın varyans* tahmin edicisi $v_{cs1}(\bar{y})$ kullanılırsa, güven aralığının tahmini,

$$\bar{y} - t \sqrt{v_{cs1}(\bar{y})} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t \sqrt{v_{cs1}(\bar{y})} \quad (4.26)$$

olarak gösterilebilir ve $v_{cs1}(\bar{y})$ değeri yerine yazılırsa,

$$\bar{y} - t \sqrt{\frac{s_y^2}{n} \left[\frac{(\beta_2(x) + S_x^2)}{\alpha_{(cs)}(\beta_2(x) + s_x^2) + (1 - \alpha_{(cs)})(\beta_2(x) + S_x^2)} \right]} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t \sqrt{\frac{s_y^2}{n} \left[\frac{(\beta_2(x) + S_x^2)}{\alpha_{(cs)}(\beta_2(x) + s_x^2) + (1 - \alpha_{(cs)})(\beta_2(x) + S_x^2)} \right]},$$

$$\begin{aligned} \bar{y} - t_{s_y} \sqrt{\frac{(\beta_2(x) + S_x^2)}{n \left[\alpha_{(cs)} (\beta_2(x) + s_x^2) + (1 - \alpha_{(cs)}) (\beta_2(x) + S_x^2) \right]}} &\leq \bar{Y} \leq \\ \bar{y} + t_{s_y} \sqrt{\frac{(\beta_2(x) + S_x^2)}{n \left[\alpha_{(cs)} (\beta_2(x) + s_x^2) + (1 - \alpha_{(cs)}) (\beta_2(x) + S_x^2) \right]}} & \end{aligned} \quad (4.27)$$

elde edilir. $\alpha_{(cs)} = 0$ olduğunda güven aralığı,

$$\bar{y} - t_{s_y} \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t_{s_y} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (4.28)$$

şeklinde yazılabilir. Burada güven aralığı Eş. (4. 3)'deki klasik güven aralığı tahmini ile aynı olmaktadır. Bu durumda güven aralığı örneklem büyüklüğüne bağlı olmaktadır.

$\alpha_{(cs)} = 1$ olduğunda ise güven aralığı,

$$\bar{y} - t_{s_y} \sqrt{\left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{\beta_2(x) + S_x^2}{\beta_2(x) + s_x^2} \right)} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t_{s_y} \sqrt{\left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{\beta_2(x) + S_x^2}{\beta_2(x) + s_x^2} \right)} \quad (4.29)$$

biçiminde olur. Burada güven aralığı tahmini ise Upadhyaya ve Singh'ın Eş. (4.25)'deki güven aralığı tahminine eşit olmakta ve örneklem büyüklüğünün yanı sıra, örneklemin yardımcı değişkenine (x) ilişkin varyansı ile kitlenin basıklık katsayısına bağlı olarak değişmektedir.

Bir diğer güven aralığı tahmini için, Çizelge 3.2'de 8 numaralı formülde gösterilen, kitle varyansının Chandra ve Singh oransal tahmin edicisinden yararlanılarak hesaplanan, *ortalamanın varyans* tahmin edicisi $v_{cs2}(\bar{y})$ kullanılırsa, güven aralığının tahmini,

$$\bar{y} - t \sqrt{v_{cs2}(\bar{y})} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t \sqrt{v_{cs2}(\bar{y})} , \quad (4.30)$$

$$\bar{y} - t \sqrt{\frac{s_y^2}{n} \left(\frac{\beta_2(x) + S_x^2}{\beta_2(x) + s_x^2} \right)^\delta} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t \sqrt{\frac{s_y^2}{n} \left(\frac{\beta_2(x) + S_x^2}{\beta_2(x) + s_x^2} \right)^\delta} ,$$

$$\bar{y} - t_{s_y} \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{\beta_2(x) + S_x^2}{\beta_2(x) + s_x^2}\right)^\delta} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t_{s_y} \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{\beta_2(x) + S_x^2}{\beta_2(x) + s_x^2}\right)^\delta} \quad (4.31)$$

şeklinde yazılabilir. Burada güven aralığı tahmini için; Chandra ve Singh'ın kitle varyans tahmin edicisinden yararlanılarak hesaplanan *ortalamanın varyans* tahmin edicisi $v_{cs2}(\bar{y})$ kullanıldığında güven aralığının; örneklem büyüklüğünün yanı sıra δ sabit değerine, yardımcı değişkene (x) ilişkin kitle ve örneklem varyansına bağlı olduğu anlaşılmaktadır.

Chandra ve Singh'ın bir başka varyans tahmin edicisinden yararlanılarak oluşturulan ve Çizelge 3.2.'de 8 numaralı formülde de verilen *ortalamanın varyans* tahmin edicisi $v_{cs3}(\bar{y})$ güven aralığı tahmininde kullanılırsa güven aralığı tahmininin formülü,

$$\bar{y} - t \sqrt{v_{cs3}(\bar{y})} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t \sqrt{v_{cs3}(\bar{y})} \quad , \quad (4.32)$$

$$\bar{y} - t \sqrt{\frac{s_y^2}{n} \left(2 - \frac{\beta_2(x) + s_x^2}{\beta_2(x) + S_x^2}\right)^\phi} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t \sqrt{\frac{s_y^2}{n} \left(2 - \frac{\beta_2(x) + s_x^2}{\beta_2(x) + S_x^2}\right)^\phi} \quad (4.33)$$

şeklinde gösterilir. Burada güven aralığı tahmini için; Chandra ve Singh'ın kitle varyans tahmin edicisinden yararlanılarak hesaplanan *ortalamanın varyans* tahmin edicisi $v_{cs3}(\bar{y})$ kullanıldığında güven aralığının; örneklem büyüklüğü ile birlikte ϕ sabit değerine ve yardımcı değişkene (x) ilişkin kitle ve örneklem varyansına bağlı olduğu anlaşılmaktadır. Aynı zamanda yardımcı değişkenin basıklık katsayısı ile de ilişkili olduğu görülmektedir.

4.1.9. Kadılar ve Çıngı Varyans Tahmin Edicilerinin Güven Aralığında Kullanılması

Kitle ortalamasının güven aralığı tahmininde; Çizelge 3.3'de 9 numaralı formülde gösterilen, Kadılar ve Çıngı kitle varyansının oransal tahmin edicisinden yararlanılarak hesaplanan, *ortalamanın varyans* tahmin edicisi $v_{kcl}(\bar{y})$ kullanılırsa, güven aralığının tahmini,

$$\bar{y} - t \sqrt{v_{kcl}(\bar{y})} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t \sqrt{v_{kcl}(\bar{y})} \quad (4.34)$$

şeklinde yazılır. $v_{kcl}(\bar{y})$ yerine yazılırsa;

$$\bar{y} - t_{s_y} \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{S_x^2 - C_x}{s_x^2 - C_x}\right)} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t_{s_y} \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{S_x^2 - C_x}{s_x^2 - C_x}\right)} \quad (4.35)$$

elde edilmektedir. Güven aralığı tahmininde $v_{kc1}(\bar{y})$ tahmin edicisi kullanıldığında, güven aralığının örneklem büyüklüğünün, yardımcı değişkene (x) ilişkin kitle ve örneklem varyansları ile kitle parametrelerinden değişim katsayısına bağlı olduğu çıkarılmaktadır.

Güven aralığı tahmininde Çizelge 3.3'te 9 numaralı formülde gösterilen $v_{kc2}(\bar{y})$ tahmin edicisi kullanılırsa aralık,

$$\bar{y} - t \sqrt{v_{kc2}(\bar{y})} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t \sqrt{v_{kc2}(\bar{y})} \quad (4.36)$$

şeklinde yazılabilir. $v_{kc2}(\bar{y})$ değeri yerine yazılırsa,

$$\bar{y} - t_{s_y} \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{S_x^2 - \beta_2(x)}{s_x^2 - \beta_2(x)}\right)} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t_{s_y} \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{S_x^2 - \beta_2(x)}{s_x^2 - \beta_2(x)}\right)} \quad (4.37)$$

biçiminde olmaktadır. Burada, güven aralığının örneklem büyüklüğünün yanı sıra yardımcı değişkenin (x) örneklem ve kitle varyansları ile basıklık katsayısına bağlı olduğu sonucuna varılmaktadır.

Çizelge 3.3'te 9 numaralı formülde belirtilen $v_{kc3}(\bar{y})$ tahmin edicisi güven aralığı tahmininde kullanıldığında aralık,

$$\bar{y} - t \sqrt{v_{kc3}(\bar{y})} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t \sqrt{v_{kc3}(\bar{y})} \quad (4.38)$$

biçiminde gösterilir ve $v_{kc3}(\bar{y})$ yerine konulursa kitle ortalamasının güven aralığının tahmini

$$\bar{y} - t_{s_y} \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{S_x^2 \beta_2(x) - C_x}{s_x^2 \beta_2(x) - C_x}\right)} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t_{s_y} \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{S_x^2 \beta_2(x) - C_x}{s_x^2 \beta_2(x) - C_x}\right)} \quad (4.39)$$

şeklinde gösterilebilir.

Eş. (4.39)'daki güven aralığı formülünden, aralığın örneklem büyüklüğünün yanı sıra yardımcı değişkene ilişkin kitle ve örneklem varyansları ile kitleye ilişkin basıklık ve çarpıklık katsayılarına da bağlı olduğu sonucu çıkarılabilir.

Bir diğer güven aralığının tahmini için, Çizelge 3.3'te 9 numaralı formülde gösterilen $v_{kc4}(\bar{y})$ tahmin edicisi kullanılırsa güven aralığı,

$$\bar{y} - t\sqrt{v_{kc4}(\bar{y})} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t\sqrt{v_{kc4}(\bar{y})} \quad (4.40)$$

biçiminde yazılır. $v_{kc4}(\bar{y})$ değeri ise yerine konulursa;

$$\bar{y} - ts_y \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{S_x^2 C_x - \beta_2(x)}{s_x^2 C_x - \beta_2(x)} \right)} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + ts_y \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{S_x^2 C_x - \beta_2(x)}{s_x^2 C_x - \beta_2(x)} \right)} \quad (4.41)$$

şeklinde gösterilir. $v_{kc4}(\bar{y})$ tahmin edicisi güven aralığı tahmininde kullanıldığında; güven aralığı tahmininin örneklem büyüklüğü ile birlikte yardımcı değişkene (x) ait kitle ve örneklem varyansları ile kitle parametrelerinden basıklık ve değişim katsayısına bağlı olduğu sonucuna varılır.

Bir başka güven aralığı tahmini için; Kadılar ve Çingı'nın Çizelge 3.3'te 9 numaralı formülde gösterilen $v_{kc5}(\bar{y})$ tahmin edicisi kullanıldığında ise aralık şöyle yazılabilir:

$$\bar{y} - t\sqrt{v_{kc5}(\bar{y})} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t\sqrt{v_{kc5}(\bar{y})} . \quad (4.42)$$

$v_{kc5}(\bar{y})$ değeri yerine yazılırsa, güven aralığı tahmini,

$$\bar{y} - t\sqrt{\frac{1}{n} \left\{ w_{1(kcr)} s_y^2 + w_{2(kcr)} \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \left[\frac{1+\psi C_{xy}}{1+\psi C_x^2} \right] \bar{x} \right\}} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t\sqrt{\frac{1}{n} \left\{ w_{1(kcr)} s_y^2 + w_{2(kcr)} \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \left[\frac{1+\psi C_{xy}}{1+\psi C_x^2} \right] \bar{x} \right\}} \quad (4.43)$$

şeklinde belirtilir. Eş. (4.43)'den güven aralığı tahmininin örneklem büyüklüğü ile ilgilenilen değişken (y) ile yardımcı değişkenin(x) birlikte değişim katsayısına, yalnızca yardımcı

değişkenin (x) değişim katsayısına, $w_{1(kcr)}$ ve $w_{2(kcr)}$ sabit katsayılarına bağlı olduğu söylenebilir. Ayrıca $\psi = \frac{1-f}{n}$ olmak üzere ψ sabit değeri ile de ilişkilidir.

4.1.10. Gupta ve Shabbir Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığında Kullanılması

Güven aralığı tahmini için önerilen bir başka tahmin edicisi, Gupta ve Shabbir varyans tahmin edicisinden yararlanılarak oluşturulan ve Çizelge 3.3'deki 10 numaralı formülde gösterilen *ortalamanın varyans* tahmin edicisi kullanılırsa güven aralığı,

$$\bar{y} - t\sqrt{v_{gs}(\bar{y})} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t\sqrt{v_{gs}(\bar{y})}. \quad (4.44)$$

$v_{gs}(\bar{y})$ değeri yerine yazılırsa güven aralığının tahmini;

$$\begin{aligned} \bar{y} - t\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\left[d_{1(gs)}s_y^2 + d_{2(gs)}(S_x^2 - s_x^2)\right]\left[2 - \left(\frac{s_x^2}{S_x^2}\right)^{\alpha_{(gs)}}\right]} &\leq \bar{Y} \leq \\ \bar{y} + t\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)\left[d_{1(gs)}s_y^2 + d_{2(gs)}(S_x^2 - s_x^2)\right]\left[2 - \left(\frac{s_x^2}{S_x^2}\right)^{\alpha_{(gs)}}\right]} & \end{aligned} \quad (4.45)$$

biçiminde olmaktadır. Bu güven aralığında $d_{1(gs)}$, $d_{2(gs)}$ ve $\alpha_{(gs)}$ sabit değerler olmak üzere $\alpha_{(gs)} = 0$ iken güven aralığı;

$$\bar{y} - t\sqrt{\frac{1}{n}\left[d_{1(gs)}s_y^2 + d_{2(gs)}(S_x^2 - s_x^2)\right]} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t\sqrt{\frac{1}{n}\left[d_{1(gs)}s_y^2 + d_{2(gs)}(S_x^2 - s_x^2)\right]} \quad (4.46)$$

Gupta ve Shabbir varyans tahmin edicisinden elde edilen *ortalamanın varyans* tahmin edicisi kullanılırsa; Eş (4.47)'den görüldüğü üzere güven aralığı örneklem büyüklüğünün yanında, yardımcı değişkenin (x) örneklem ve kitle varyanslarına, bağlı olarak değişmektedir. Ayrıca sabit değerlerin aldığı değerlere göre güven aralıkları da farklılaşmaktadır.

4.1.11. Subramani ve Kumarapandiyan Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığında Kullanılması

Kitle ortalamasının güven aralığı tahmininde bir başka tahmin edici Subramani ve Kumarapandiyan varyans tahmin edicisinden yararlanılarak hesaplanan *ortalamanın varyans* tahmin edicisidir. Çizelge 3.3’de 11 numaralı formülde verilen *ortalamanın varyans* tahmin edicisi $v_{sk}(\bar{y})$, güven aralığının tahmininde kullanılırsa, güven aralığının tahmini,

$$\bar{y} - t\sqrt{v_{sk}(\bar{y})} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t\sqrt{v_{sk}(\bar{y})} . \quad (4.47)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $v_{sk}(\bar{y})$, güven aralığı tahmininde yerine yazılırsa yeni güven aralığının tahmini,

$$\bar{y} - t_{s_y} \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right) \left[\frac{C_x S_x^2 + M_d}{C_x S_x^2 + M_d} \right]} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t_{s_y} \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right) \left[\frac{C_x S_x^2 + M_d}{C_x S_x^2 + M_d} \right]} \quad (4.48)$$

biçiminde olmaktadır.

O halde güven aralığının örneklem büyüklüğünün yanı sıra, yardımcı değişkene ilişkin kitle ve örneklem varyansına, kitle değişim katsayısına ve medyan değerine bağlı olduğu sonucuna varılmaktadır.

4.1.12. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicilerinin Güven Aralığında Kullanılması

Kitle ortalamasının güven aralığı tahmininde bir diğer tahmin edici Singh ve Solanki varyans tahmin edicilerinden yararlanılarak hesaplanan *ortalamanın varyans* tahmin edicisidir. Çizelge 3.3’de 12 numaralı formülde verilen *ortalamanın varyans* tahmin edicisi $v_{ss}(\bar{y})$ güven aralığının tahmininde kullanılırsa, güven aralığının tahmini,

$$\bar{y} - t\sqrt{v_{ssi}(\bar{y})} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t\sqrt{v_{ssi}(\bar{y})} \quad (4.49)$$

şeklinde yazılabilir. $v_{ssi}(\bar{y})$ yerine yazılırsa, güven aralığının tahmini,

$$\begin{aligned} \bar{y} - t \sqrt{\frac{1}{n} \left[w_{1(ss)} S_y^2 - w_{2(ss)} \left(\frac{S_x^2 - S_x^2}{S_x^2} \right) \right] \left(\frac{a_{(ss)} S_x^2 + b_{(ss)}}{a_{(ss)} S_x^2 + b_{(ss)}} \right)} &\leq \bar{Y} \leq \\ \bar{y} + t \sqrt{\frac{1}{n} \left[w_{1(ss)} S_y^2 - w_{2(ss)} \left(\frac{S_x^2 - S_x^2}{S_x^2} \right) \right] \left(\frac{a_{(ss)} S_x^2 + b_{(ss)}}{a_{(ss)} S_x^2 + b_{(ss)}} \right)} &\end{aligned} \quad (4.50)$$

şeklini almaktadır. Eş. (4.50)'de gösterilen güven aralığı örneklem büyüklüğünün yanı sıra yardımcı değişkene ilişkin örneklem ve kitle varyanslarına, $a_{(ss)}$ ve $b_{(ss)}$ değerleri ile $w_{1(ss)}$ ve $w_{2(ss)}$ değerlerine bağlı olarak değişmektedir. Çizelge 2.1'de verilen farklı $a_{(ss)}$ ve $b_{(ss)}$ değerlerine göre güven aralıkları farklı değerler almaktadır. Örnek olarak, $a_{(ss)} = 1$ ve $b_{(ss)} = \beta_2(x)$ iken güven aralığı tahmini hesaplanırsa;

$$\begin{aligned} \bar{y} - t \sqrt{\frac{1}{n} \left[w_{1(ss)} S_y^2 - w_{2(ss)} \left(\frac{S_x^2 - S_x^2}{S_x^2} \right) \right] \left(\frac{S_x^2 + \beta_2(x)}{S_x^2 + \beta_2(x)} \right)} &\leq \bar{Y} \leq \\ \bar{y} + t \sqrt{\frac{1}{n} \left[w_{1(ss)} S_y^2 - w_{2(ss)} \left(\frac{S_x^2 - S_x^2}{S_x^2} \right) \right] \left(\frac{S_x^2 + \beta_2(x)}{S_x^2 + \beta_2(x)} \right)} &\end{aligned} \quad (4.51)$$

şeklinde yazılır. Burada güven aralığı tahminin örneklem büyüklüğünün yanında, $w_{1(ss)}$ ve $w_{2(ss)}$ sabit değerlerine, yardımcı değişkenin (x) basıklık katsayısına, kitle ve örneklem varyanslarına bağlı olarak da değiştiği anlaşılmaktadır.

4.1.13. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralıklarında Kullanılması

Yadav vd. varyans tahmin edicilerinden yararlanılarak hesaplanan ve Çizelge 3.3'de 13 numaralı formülde verilen *ortalamanın varyans* tahmin edicileri kitle ortalamasının güven aralığı tahmininde kullanılırsa, güven aralığının tahmini,

$$\bar{y} - t \sqrt{v_{yd}(\bar{y})} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t \sqrt{v_{yd}(\bar{y})} \quad (4.52)$$

şeklinde yazılabilir. $v_{kd}(\bar{y})$ yine aynı formülden yerine yazıldığında;

$$\begin{aligned} \bar{y} - t \sqrt{\left(\frac{1}{n} \right) \left[w_{1(yd)} s_y^2 + w_{2(yd)} (S_x^2 - s_x^2) \right] \times \left[\lambda \left(\frac{\alpha_{(yd)} S_x^2 + b_{(yd)}}{\alpha_{(yd)} s_x^2 + b_{(yd)}} \right) + (1-\lambda) \exp \left(\frac{\alpha_{(yd)} (S_x^2 - s_x^2)}{\alpha_{(yd)} (S_x^2 + s_x^2) + 2b_{(yd)}} \right) \right]} &\leq \bar{Y} \leq \\ \bar{y} + t \sqrt{\left(\frac{1}{n} \right) \left[w_{1(yd)} s_y^2 + w_{2(yd)} (S_x^2 - s_x^2) \right] \times \left[\lambda \left(\frac{\alpha_{(yd)} S_x^2 + b_{(yd)}}{\alpha_{(yd)} s_x^2 + b_{(yd)}} \right) + (1-\lambda) \exp \left(\frac{\alpha_{(yd)} (S_x^2 - s_x^2)}{\alpha_{(yd)} (S_x^2 + s_x^2) + 2b_{(yd)}} \right) \right]} & \end{aligned} \quad (4.53)$$

şeklindeki güven aralığı elde edilmektedir. Çizelge 2.2 ve Çizelge 2.3’de gösterildiği üzere, $\alpha_{(yd)}$ ve $b_{(yd)}$ yardımcı değişkene ait parametrelerdir. Farklı $\alpha_{(yd)}$ ve $b_{(yd)}$ değerleri için farklı güven aralıkları tahminleri yapılabilir. Örnek olarak; $\alpha_{(yd)} = 1$ ve $b_{(yd)} = 0$ ile $\lambda_{(yd)} = 0$ olduğunda güven aralığı tahmini aşağıdaki biçimi almaktadır:

$$\begin{aligned} \bar{y} - t \sqrt{\frac{1}{n} \left[w_{1(yd)} s_y^2 + w_{2(yd)} (S_x^2 - s_x^2) \right] \times \exp \left(\frac{S_x^2 - s_x^2}{S_x^2 + s_x^2} \right)} &\leq \bar{Y} \leq \\ \bar{y} + t \sqrt{\frac{1}{n} \left[w_{1(yd)} s_y^2 + w_{2(yd)} (S_x^2 - s_x^2) \right] \times \exp \left(\frac{S_x^2 - s_x^2}{S_x^2 + s_x^2} \right)} & \end{aligned} \quad (4.54)$$

Burada $w_{1(yd)}$, $w_{2(yd)}$ sabit değerler olmak üzere Eş. (4.54)’de verilen güven aralığı tahmininin örneklem büyüklüğü ile birlikte yardımcı değişkene ilişkin kitle ve örneklem varyanslarına bağlı olduğu çıkarılabilir. Farklı $w_{1(yd)}$ ve $w_{2(yd)}$ sabit değerleri için güven aralığı da farklı değerleri alabilmektedir.

4.1.14. Lone ve Tailor Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığında Kullanılması

Kitle ortalamasının bir başka güven aralığı tahmininde; Lone ve Tailor varyans tahmin edicilerinden yararlanılarak hesaplanan ve Çizelge 3.3’de 14 numaralı formülde de gösterilen *ortalamanın varyans* tahmin edicisi $v_{lt}^{**}(\bar{y})$ kullanıldığında; güven aralığı tahmini,

$$\bar{y} - t \sqrt{v_{lt}^{**}(\bar{y})} \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t \sqrt{v_{lt}^{**}(\bar{y})} \quad (4.55)$$

biçiminde gösterilir. $v_{lt}^{**}(\bar{y})$ yine aynı formülde yerine yazılırsa güven aralığı,

$$\bar{y} - t \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{w_{1(lt)}^* F_{lt} + G_{lt}}{w_{1(lt)}^{*2} B_{lt}^* + 2w_{1(lt)}^* P_{lt} + R_{lt}} \right)} \hat{\bar{Y}}^* \leq \bar{Y} \leq \bar{y} + t \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{w_{1(lt)}^* F_{lt} + G_{lt}}{w_{1(lt)}^{*2} B_{lt}^* + 2w_{1(lt)}^* P_{lt} + R_{lt}} \right)} \hat{\bar{Y}}^* \quad (4.56)$$

şeklinde elde edilmektedir. Burada $w_{1(lt)}^*$ değeri Eş. (2.122)'den ve $\hat{\bar{Y}}^*$ değeri de Eş. (2.129)'dan yerine yazılırsa güven aralığı,

$$\begin{aligned} & \bar{y} - t \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{\left(\frac{C_{lt}^*}{B_{lt}^*}\right) F_{lt} + G_{lt}}{\left(\frac{C_{lt}^*}{B_{lt}^*}\right)^2 B_{lt}^* + 2\left(\frac{C_{lt}^*}{B_{lt}^*}\right) P_{lt} + R_{lt}} \right)} \hat{\bar{Y}}^* \leq \bar{Y} \leq \\ & \bar{y} + t \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{\left(\frac{C_{lt}^*}{B_{lt}^*}\right) F_{lt} + G_{lt}}{\left(\frac{C_{lt}^*}{B_{lt}^*}\right)^2 B_{lt}^* + 2\left(\frac{C_{lt}^*}{B_{lt}^*}\right) P_{lt} + R_{lt}} \right)} \hat{\bar{Y}}^* \\ & \bar{y} - t s_y \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right) \left\{ \left(\frac{C_{lt}^* F_{lt} + G_{lt} B_{lt}^*}{C_{lt}^{*2} + 2C_{lt}^* P_{lt} + R_{lt} B_{lt}^*} \right) \left[\frac{C_{lt}^*}{B_{lt}^*} \left(\frac{S_x^2 - C_x}{s_y^2 - C_x} \right) + \left(\frac{B_{lt}^* - C_{lt}^*}{B_{lt}^*} \right) \left(\frac{\bar{x} - \rho}{\bar{X} - \rho} \right) \right] \right\}} \leq \bar{Y} \leq \\ & \bar{y} + t s_y \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right) \left\{ \left(\frac{C_{lt}^* F_{lt} + G_{lt} B_{lt}^*}{C_{lt}^{*2} + 2C_{lt}^* P_{lt} + R_{lt} B_{lt}^*} \right) \left[\frac{C_{lt}^*}{B_{lt}^*} \left(\frac{S_x^2 - C_x}{s_y^2 - C_x} \right) + \left(\frac{B_{lt}^* - C_{lt}^*}{B_{lt}^*} \right) \left(\frac{\bar{x} - \rho}{\bar{X} - \rho} \right) \right] \right\}} \end{aligned} \quad (4.57)$$

şeklinde bulunmaktadır. Burada Eş. (2.122) ve Eş. (2.125)'den

$$B_{lt}^* = n^{-1} M_{lt}^2 \lambda_{04}^* + n^{-1} S_{lt}^2 C_x^2 + 2n^{-1} S_{lt} M_{lt} C_x \lambda_{03},$$

$$C_{lt}^* = n^{-1} M_{lt}^2 \lambda_{22}^* + n^{-1} S_{lt} \lambda_{21} C_x + n^{-1} S_{lt} M_{lt} C_x \lambda_{03} + n^{-1} S_{lt}^2 C_x^2,$$

$$F_{lt} = M_{lt}^2 n^{-1} \lambda_{04}^* - M_{lt} n^{-1} \lambda_{22}^* - S_{lt} n^{-1} C_x \lambda_{21},$$

$$G_{lt} = 1 + S_{lt} n^{-1} C_x \lambda_{21},$$

$$P_{lt} = M_{lt}^2 n^{-1} \lambda_{04}^* - 2M_{lt} n^{-1} \lambda_{22}^* - 2S_{lt} n^{-1} C_x \lambda_{21} - M_{lt} S_{lt} n^{-1} C_x \lambda_{03} - S_{lt}^2 n^{-1} C_x^2,$$

$$R_{lt} = 1 + n^{-1} \lambda_{04}^* + n^{-1} S_{lt}^2 C_x^2 + 4n^{-1} S_{lt} \lambda_{21} C_x,$$

$$M_{lt} = \frac{S_x^2}{S_x^2 - C_x}, S_{lt} = \frac{\bar{X}}{\bar{X} - \rho}$$

değerleri yerine yazılırsa, Lone ve Tailor varyans tahmin edicisinden yararlanılarak hesaplanan *ortalama varyans* tahmin edicisi güven aralığı tahmininde kullanılırsa, güven aralığının örneklem büyüklüğünün yanında yardımcı değişkene (x) ilişkin kitle ile örneklem varyanslarına, değişim katsayısına, kitle ortalamasına, korelasyon katsayısına ve λ_{04} , λ_{21} , λ_{03} , λ_{22} değerlerine bağlı olarak değiştiği söylenebilir.



5. BASİT RASTGELE ÖRNEKLEME İÇİN SİMÜLASYON ÇALIŞMASI

Dördüncü bölümde, varyans tahmin edicilerinin kitle ortalamasının güven aralığı tahmininde kullanılması önerilmişti. Bu bölümde 2016 yılı, Kültür ve Turizm Bakanlığına bağlı “Adıyaman” ilindeki halk kütüphanelerinin kitap ve kullanıcı sayıları üzerinde simülasyon yapılmış; 5 farklı varyans tahmin edicisinden yararlanılarak güven aralıkları bulunmuştur.

Simülasyon için, Adıyaman ilindeki 10 kütüphaneden $n=8$ olacak şekilde, $\binom{10}{8}=45$ adet

örneklem çekilmiştir. İlgilenilen değişken (y) kullanıcı sayısı, yardımcı değişken (x) kitap

sayısı olmak üzere; M_d yardımcı değişkenin medyanı, $\beta_2(y) = \frac{\mu_{40}}{\mu_{20}^2}$, $\beta_2(x) = \frac{\mu_{04}}{\mu_{02}^2}$, $C_x = \frac{S_x}{\bar{X}}$

, $C_y = \frac{S_y}{\bar{Y}}$, $\lambda = \frac{1}{n}$, $\theta = \frac{\mu_{22}}{\mu_{20}\mu_{02}}$ şeklindedir. t tablo ise serbestlik derecesi 7 olacak şekilde

2,36 olarak alınmıştır. Aşağıdaki çizelgede kitle parametresine ilişkin değerler verilmektedir.

Örneklem değerleri ise Ek’ler bölümünde verilmektedir.

Çizelge 5. 1. Adıyaman İli Halk Kütüphanelerinin Kitap (x) ve Kullanıcı (y) Sayılarına İlişkin Betimsel İstatistikler

Kitle Parametreleri	
N=10	$\lambda = 0,125$
$\bar{X} = 14656$	$M_d = 9036,5$
$\bar{Y} = 22306$	$\theta = 4,398$
$S_x^2 = 145563101$	$\rho = 0,87$
$S_y^2 = 1129990976$	$\mu_{21} = 19056176150405,6$
$C_x = 0,82$	$\mu_{30} = 54874863054963,9$
$C_y = 1,507$	$\lambda_{03} = 1,5693$
$\beta_2(x) = 4,181$	$\lambda_{21} = 0,00001842471$
$\beta_2(y) = 4,684$	

Halk kütüphanelerinin kullanıcı sayılarına ilişkin Klasik, Hirano, Das ve Tripathi varyans tahmin edicileri ile bu varyans tahmin edicilerin beklenen değerleri ve HKO'ları aşağıdaki Çizelge 5.2- Çizelge 5.7'de verilmektedir.

Çizelge 5. 2. Klasik, Hirano, Das ve Tripathi Varyans Tahmin Edicileri

Örneklem	Klasik	Hirano	Das veTripathi		
	S_y^2	S_h^2	S_{dt1}^2	S_{dt2}^2	S_{dt3}^2
1	1318796841,3	902976269,3	1080028666,0	1088157382,0	1095389835,9
2	354898137,1	242997697,4	516050770,4	534465347,2	2380026265,3
3	353105084,0	241769999,3	564607624,6	598562581,9	2441277342,3
4	1344973908,7	920899629,4	1233622161,6	1235443267,5	1001370646,9
5	1360076237,1	931240148,7	1157404730,9	1163177531,6	1063272138,4
6	1319888604,2	903723796,1	1446663513,0	1449279829,9	1154214522,2
7	1276835299,0	874245326,2	1618915376,5	1640178329,4	1116598594,7
8	1354444274,7	927383960,8	1265841809,1	1266996464,5	1049644910,8
9	1320822968,0	904363552,2	1045719865,6	1056342246,4	1158232641,8
10	1305717101,0	894020610,1	1018443347,8	1030087891,9	1181120304,9
11	353236489,4	241859972,2	510616424,7	528196108,7	2408149373,2
12	358883423,6	245726411,3	517633255,9	535214446,2	2463425093,8
13	160624852,0	109979357,7	331501140,8	391573224,1	-810242877,3
14	251124391,0	171944122,5	430428735,4	466518596,4	2663764007,0
15	346114057,0	236983263,9	481046519,3	493919323,2	2843825065,1
16	349372877,7	239214568,8	474635454,5	485476912,0	3495413719,0
17	338471527,0	231750446,4	460760279,4	471438725,1	3314628809,8
18	1359770501,4	931030812,3	1245085243,9	1246994550,9	1014054791,5

Çizelge 5. 3. Klasik, Hirano, Das ve Tripathi Varyans Tahmin Edicileri (Devam)

Örneklem	Klasik	Hirano	Das ve Tripathi		
	S_y^2	S_h^2	S_{dt1}^2	S_{dt2}^2	S_{dt3}^2
19	1308855079,4	896169174,5	1565437805,9	1576742504,1	1115045722,9
20	1366872615,1	935893608,4	1425977248,8	1426513226,1	990966188,9
21	1329356899,1	910206709,4	1183104268,9	1186240506,1	1025398674,5
22	1336238354,5	914918421,4	1168535295,7	1172606257,3	1058961644,8
23	1314347390,6	899929743,6	1151193556,6	1155113507,1	1038885183,4
24	1349001724,0	923657462,5	1242905059,2	1244556728,6	1000163909,8
25	1309087313,4	896328184,4	1437526419,6	1440236580,5	1143078644,5
26	1367121052,6	936063712,8	1317947245,4	1318304624,2	1024509230,6
27	1329671436,6	910422072,3	1101112428,5	1108534911,7	1080335295,6
28	1336551084,9	915132547,0	1088339908,4	1096986723,6	1119582529,7
29	1314665603,1	900147622,8	1072127841,5	1080526656,9	1098003523,2
30	1378750670,0	944026477,2	1326844732,1	1327239251,6	1034821957,2
31	1344680086,0	920698449,8	1111768505,2	1119385186,2	1094778344,8
32	1351467353,1	925345671,4	1098751396,6	1107610089,4	1134531783,9
33	1329862118,5	910552631,6	1082809786,4	1091418856,7	1113091987,0
34	1364042532,2	933955859,1	1165795705,3	1171313389,1	1061175264,8
35	1297179557,0	888174979,1	1377561872,4	1378615545,9	1170924514,1
36	1302479148,0	891803593,3	1356522677,0	1356992567,3	1207421546,5
37	1285386923,0	880100597,7	1341047694,7	1341553179,9	1188468869,1
38	1312081914,8	898378579,1	1448053251,8	1451091286,6	1141436521,7

Çizelge 5. 4. Klasik, Hirano, Das ve Tripathi Varyans Tahmin Edicileri (Devam)

Örneklem	Klasik	Hirano	Das ve Tripathi		
	S_y^2	S_h^2	S_{dt1}^2	S_{dt2}^2	S_{dt3}^2
39	1360071826,0	931237128,4	1248346215,7	1250159789,0	1081679484,7
40	1341984701,7	918852928,2	1233731707,9	1235458489,2	1064608930,8
41	1370329865,3	938260777,3	1327185549,1	1327460603,8	1022887809,5
42	1298677303,7	889200481,8	1029706760,6	1040040354,8	1135212265,2
43	1333754091,3	913217453,8	1109189573,4	1116345867,7	1077962484,0
44	1340609849,1	917911570,8	1096240622,8	1104611305,0	1116769557,0
45	1349310843,6	923869115,8	1155080178,2	1160438152,6	1047740077,3
$E(s_y^2)$	1129990976	773701455,5	1081374405	1090402642	1142037532
$HKO(s_y^2)$	1,65994E+17	2,04762E+17	1,1319E+17	1,07477E+17	2,81059E+16

Halk kütüphanelerinin kullanıcı sayılarına ilişkin Isaki, Prasad ve Singh, Garcia ve Cebrain varyans tahmin edicileri ile bu varyans tahmin edicilerin beklenen değerleri ve HKO'ları aşağıdaki Çizelge 5.5, Çizelge 5.6 ve Çizelge 5.7'de verilmektedir.

Çizelge 5. 5. Isaki, Prasad ve Singh, Garcia ve Cebrain Varyans Tahmin Edicileri

Örneklem	Isaki		Prasad ve Singh		Garcia ve Cebrain
	S_i^2	S_{ireg}^2	S_{ps1}^2	S_{ps2}^2	S_{gc}^2
1	1149263154,0	1140734858,5	786897058,6	1171567966,2	1138525890,4
2	922845879,6	354898137,1	631869825,1	940756402,4	985011257,3
3	925978081,7	353105084,0	634014434,6	943949394,1	988924574,1
4	1077546021,6	1344973908,7	737792551,6	1098458953,1	1061372857,4
5	1131606213,0	1360076237,1	774807403,6	1153568340,6	1117498450,1
6	1195747406,7	1319888604,2	818724687,9	1218954381,7	1187717247,2

Çizelge 5. 6. Isaki, Prasad ve Singh, Garcia ve Cebrain Varyans Tahmin Edicileri (Devam)

Örneklem	Isaki		Prasad ve Singh		Garcia ve Cebrain
	S_i^2	S_{ireg}^2	S_{ps1}^2	S_{ps2}^2	S_{gc}^2
7	1156769278,4	1276835299,0	792036479,5	1179219768,8	1149002630,5
8	1119348234,4	1354444274,7	766414402,2	1141072460,0	1104885016,8
9	1199077042,8	1320822968,0	821004479,9	1222348639,1	1191192966,3
10	1213154154,0	1305717101,0	830643036,0	1236698957,8	1207084273,9
11	922744723,7	353236489,4	631800564,0	940653283,3	985211284,7
12	939268966,1	358883423,6	643114663,6	957498227,0	1002983427,6
13	1204707931,2	160624852,0	824859932,4	1228088811,4	1382218901,3
14	728100039,1	251124391,0	498527928,2	742230949,4	782939440,4
15	948919349,7	346114057,0	649722252,5	967335904,5	1016504422,3
16	1001039289,7	349372877,7	685408620,1	1020467384,3	1075567291,9
17	965477093,7	338471527,0	661059290,5	984214999,9	1037041061,2
18	1090796713,8	1359770501,4	746865261,1	1111966813,7	1074518545,1
19	1162686765,7	1308855079,4	796088165,5	1185252102,3	1153332102,3
20	1072590800,6	1366872615,1	734399726,6	1093407561,6	1054996871,3
21	1094659337,5	1329356899,1	749509988,0	1115904402,9	1080249256,9
22	1123471626,8	1336238354,5	769237676,7	1145275878,9	1110257815,8
23	1102844136,6	1314347390,6	755114095,6	1124248052,0	1089723289,7
24	1077247493,5	1349001724,0	737588150,3	1098154631,1	1060842333,7
25	1184649343,2	1309087313,4	811125876,9	1207640927,8	1176604820,0
26	1100850442,1	1367121052,6	753749018,9	1122215664,0	1084702164,9

Çizelge 5. 7. Isaki, Prasad ve Singh, Garcia ve Cebrain Varyans Tahmin Edicileri (Devam)

Örneklem	Isaki		Prasad ve Singh		Garcia ve Cebrain
	S_i^2	S_{ireg}^2	S_{ps1}^2	S_{ps2}^2	S_{gc}^2
27	1139460911,6	1329671436,6	780185492,4	1161575482,6	1127523994,7
28	1172240397,7	1336551084,9	802629508,8	1194991150,4	1161797418,3
29	1150469538,9	1314665603,1	787723066,7	1172797764,5	1140046558,6
30	1111548659,0	1378750670,0	761074056,2	1133121511,1	1095333153,2
31	1154131088,7	1344680086,0	790230119,0	1176530377,4	1142162671,1
32	1187268045,3	1351467353,1	812918894,5	1210310453,5	1176822816,3
33	1165669953,0	1329862118,5	798130744,9	1188293187,0	1155237938,7
34	1130643364,4	1364042532,2	774148144,0	1152586805,0	1116261004,8
35	1203333849,4	1297179557,0	823919102,7	1226688061,5	1197185061,6
36	1232308449,3	1302479148,0	843757924,9	1256224998,2	1227661685,6
37	1213793967,2	1285386923,0	831081114,1	1237351188,4	1209057943,9
38	1184049188,7	1312081914,8	810714952,9	1207029125,6	1175784801,8
39	1146625480,7	1360071826,0	785091051,5	1168879101,0	1133349670,2
40	1129192855,3	1341984701,7	773154984,8	1151108144,6	1115971769,0
41	1100069204,4	1370329865,3	753214107,8	1121419264,1	1083706565,9
42	1176179103,1	1298677303,7	805326328,7	1199006297,9	1168256507,8
43	1138375632,5	1333754091,3	779442405,0	1160469140,4	1126141321,5
44	1170867266,3	1340609849,1	801689329,9	1193591369,4	1160103753,6
45	1116810492,7	1349310843,6	764676818,0	1138485466,0	1102494944,4
$E(s_y^2)$	1107431710	1126034043	758255193,7	1128924661	1113640173
$HKO(s_y^2)$	1,0683E+16	1,65204E+17	1,42957E+17	1,0574E+16	8,03611E+15

Halk kütüphanelerinin kullanıcı sayılarına ilişkin Upadhyaya ve Singh, Chandra ve Singh varyans tahmin edicileri ile bu varyans tahmin edicilerin beklenen değerleri ve HKO'ları aşağıdaki Çizelge 5.8, Çizelge 5.9 ve Çizelge 5.10'da verilmektedir.

Çizelge 5. 8. Upadhyaya ve Singh, Chandra ve Singh Varyans Tahmin Edicileri

Örneklem	Upadhyaya ve Singh	Chandra ve Singh		
	S_{us}^2	S_{cs1}^2	S_{cs2}^2	S_{cs3}^2
1	1149263158,3	1139272320,6	1138525890,1	1109982300,4
2	922845837,2	1035938625,5	985011237,9	581926984,1
3	925978038,6	1041214769,3	988924554,1	580130580,0
4	1077546027,8	1063125746,9	1061372856,6	985594061,0
5	1131606218,5	1118785596,6	1117498449,5	1064841568,4
6	1195747409,9	1188124219,8	1187717247,1	1173008975,6
7	1156769281,5	1149396162,7	1149002630,3	1134780564,4
8	1119348239,9	1106249381,1	1104885016,2	1048517319,5
9	1199077046,0	1191584474,3	1191192966,1	1177086152,3
10	1213154156,5	1207315604,6	1207084273,8	1199024824,4
11	922744681,0	1036773481,4	985211265,0	579823982,9
12	939268922,5	1055739486,6	1002983407,4	589352647,4
13	1204707706,3	2164495295,0	1382218711,1	302583813,5
14	728099999,4	836482851,7	782939420,3	421701733,1
15	948919302,2	1076861529,6	1016504399,5	574378215,3
16	1001039236,0	1146984468,1	1075567265,1	585260144,9
17	965477042,3	1105133206,4	1037041035,6	566472040,1

Çizelge 5. 9. Upadhyaya ve Singh, Chandra ve Singh Varyans Tahmin Edicileri (Devam)

Örneklem	Upadhyaya ve Singh	Chandra ve Singh		
	S_{us}^2	S_{cs1}^2	S_{cs2}^2	S_{cs3}^2
18	1090796720,0	1076273489,3	1074518544,4	998792835,0
19	1162686769,4	1153896046,2	1153332102,1	1132360348,6
20	1072590807,3	1057065735,1	1054996870,4	962800881,2
21	1094659343,0	1081632387,9	1080249256,3	1022804534,8
22	1123471631,9	1111399438,0	1110257815,3	1064262008,4
23	1102844141,7	1090869134,3	1089723289,2	1043421638,7
24	1077247499,7	1062644301,6	1060842332,9	982568840,1
25	1184649346,5	1177016909,0	1176604819,9	1161687652,5
26	1100850448,3	1086415721,9	1084702164,2	1011170063,7
27	1139460916,3	1128448862,2	1127523994,3	1091282115,1
28	1172240401,8	1162491264,3	1161797418,0	1135511558,2
29	1150469543,0	1140750259,1	1140046558,3	1113300448,2
30	1111548665,2	1097045101,8	1095333152,5	1021998853,2
31	1154131093,4	1143081126,0	1142162670,7	1106254209,9
32	1187268049,5	1177508582,6	1176822816,1	1150904968,5
33	1165669957,1	1155934078,9	1155237938,4	1128841987,2
34	1130643369,9	1117598093,3	1116261004,3	1061259812,5
35	1203333851,9	1197424244,8	1197185061,5	1188833053,6
36	1232308451,2	1227796052,1	1227661685,5	1223102080,3
37	1213793969,1	1209199549,7	1209057943,9	1204239222,7
38	1184049192,0	1176219500,2	1175784801,6	1159985224,1
39	1146625485,8	1134479859,4	1133349669,7	1087994791,6
40	1129192860,5	1117109178,5	1115971768,5	1070198347,2
41	1100069210,6	1085465275,5	1083706565,1	1007899221,3
42	1176179106,3	1168659197,2	1168256507,6	1153696705,1

Çizelge 5. 10. Upadhyaya ve Singh, Chandra ve Singh Varyans Tahmin Edicileri (Devam)

Örneklem	Upadhyaya ve Singh	Chandra ve Singh		
	S_{us}^2	S_{cs1}^2	S_{cs2}^2	S_{cs3}^2
43	1138375637,3	1127112370,3	1126141321,1	1087866318,2
44	1170867270,6	1160840588,7	1160103753,3	1132017945,9
45	1116810498,2	1103835355,2	1102494943,8	1047240188,5
$E(s_y^2)$	1107431701	1142037532	1113640164	982816928
$HKO(s_y^2)$	1,0683E+16	2,81059E+16	8,03611E+15	7,82324E+16

Halk kütüphanelerinin kullanıcı sayılarına ilişkin Kadılar ve Çıngı varyans tahmin edicileri ile bu varyans tahmin edicilerin beklenen değerleri ve HKO'ları aşağıdaki Çizelge 5.11, Çizelge 5.12 ve Çizelge 5.13'te verilmektedir.

Çizelge 5. 11. Kadılar ve Çıngı Varyans Tahmin Edicileri

Örneklem	Kadılar ve Çıngı				
	$S_{kç1}^2$	$S_{kç2}^2$	$S_{kç3}^2$	$S_{kç4}^2$	$S_{kçreg}^2$
1	1149263153,2	1149263149,8	1149263153,8	1149263148,9	659410632,2
2	922845887,9	922845922,0	922845881,6	922845931,3	177457934,9
3	925978090,2	925978124,9	925978083,7	925978134,3	176561977,8
4	1077546020,4	1077546015,5	1077546021,3	1077546014,1	672499784,8
5	1131606212,0	1131606207,6	1131606212,8	1131606206,4	680050245
6	1195747406,1	1195747403,5	1195747406,5	1195747402,8	659955455,8
7	1156769277,7	1156769275,2	1156769278,2	1156769274,5	638427465,7
8	1119348233,3	1119348228,8	1119348234,1	1119348227,5	677233143,9
9	1199077042,2	1199077039,7	1199077042,7	1199077039,0	660423452,8
10	1213154153,5	1213154151,6	1213154153,9	1213154151,0	652870527,1

Çizelge 5. 12. Kadılar ve Çıngı Varyans Tahmin Edicileri (Devam)

Örneklem	Kadılar ve Çıngı				
	$S_{kç1}^2$	$S_{kç2}^2$	$S_{kç3}^2$	$S_{kç4}^2$	$S_{kçreg}^2$
11	922744732,1	922744766,4	922744725,7	922744775,8	176627132,3
12	939268974,7	939269009,8	939268968,2	939269019,3	179450387
13	1204707975,3	1204708156,1	1204707941,8	1204708205,5	80319145,77
14	728100046,9	728100078,8	728100041,0	728100087,5	125569008,2
15	948919359,0	948919397,2	948919351,9	948919407,6	173065895,2
16	1001039300,2	1001039343,3	1001039292,2	1001039355,1	174695110,6
17	965477103,8	965477145,1	965477096,1	965477156,4	169244678,7
18	1090796712,6	1090796707,6	1090796713,5	1090796706,2	679897914,7
19	1162686765,0	1162686762,0	1162686765,5	1162686761,1	654439465,2
20	1072590799,3	1072590794,0	1072590800,3	1072590792,6	683447899,8
21	1094659336,4	1094659331,9	1094659337,2	1094659330,7	664691194,6
22	1123471625,8	1123471621,7	1123471626,6	1123471620,5	668131732
23	1102844135,6	1102844131,5	1102844136,4	1102844130,4	657186441,4
24	1077247492,3	1077247487,2	1077247493,2	1077247485,9	674513686,7
25	1184649342,6	1184649340,0	1184649343,1	1184649339,3	654554993,8
26	1100850440,9	1100850436,0	1100850441,8	1100850434,6	683571588,7
27	1139460910,7	1139460907,0	1139460911,4	1139460905,9	664847931
28	1172240396,8	1172240393,5	1172240397,5	1172240392,6	668287577,9
29	1150469538,1	1150469534,8	1150469538,7	1150469533,9	657345020

Çizelge 5. 13. Kadılar ve Çıngı Varyans Tahmin Edicileri (Devam)

Örneklem	Kadılar ve Çıngı				
	$S_{kç1}^2$	$S_{kç2}^2$	$S_{kç3}^2$	$S_{kç4}^2$	$S_{kçreg}^2$
30	1111548657,8	1111548652,8	1111548658,7	1111548651,5	689386227,8
31	1154131087,8	1154131084,0	1154131088,5	1154131083,0	672352099,5
32	1187268044,5	1187268041,2	1187268045,2	1187268040,3	675745557,6
33	1165669952,2	1165669948,8	1165669952,8	1165669947,9	664943123
34	1130643363,3	1130643358,8	1130643364,1	1130643357,6	682033385,2
35	1203333848,9	1203333846,9	1203333849,3	1203333846,4	648601050
36	1232308448,9	1232308447,4	1232308449,2	1232308447,0	651250651,3
37	1213793966,8	1213793965,2	1213793967,1	1213793964,8	642704749,5
38	1184049188,1	1184049185,4	1184049188,5	1184049184,7	656052283,7
39	1146625479,6	1146625475,5	1146625480,4	1146625474,4	680046742,1
40	1129192854,3	1129192850,2	1129192855,1	1129192849,1	671003375,2
41	1100069203,2	1100069198,2	1100069204,1	1100069196,8	685175984,2
42	1176179102,4	1176179099,9	1176179102,9	1176179099,2	649350800,6
43	1138375631,6	1138375627,7	1138375632,3	1138375626,7	666889251,3
44	1170867265,5	1170867262,1	1170867266,1	1170867261,1	670316952,7
45	1116810491,6	1116810487,2	1116810492,4	1116810485,9	674667541,2
$E(s_y^2)$	1107431712	1107431720	1107431711	1107431722	565006604,4
$HKO(s_y^2)$	1,0683E+16	1,0683E+16	1,0683E+16	1,0683E+16	3,60706E+17

Halk kütüphanelerinin kullanıcı sayılarına ilişkin Gupta ve Shabbir, Subramani ve Kumarapandiyan varyans tahmin edicileri ile bu varyans tahmin edicilerin beklenen

değerleri ve HKO'ları aşağıdaki Çizelge 5.14, Çizelge 5.15 ve Çizelge 5.16' da verilmektedir.

Çizelge 5. 14. Gupta ve Shabbir, Subramani ve Kumarapandiyan Varyans Tahmin Edicileri

Örneklem	Gupta ve Shabbir			Subramani ve Kumarapandiyan
	$S_{gs(0)}^2$	$S_{gs(1)}^2$	$S_{gs(-1)}^2$	S_{sk}^2
1	1139191345,5	1242372235,4	1327095332,1	1149274338,2
2	1091952872,9	605730177,3	300048576,8	922734094,6
3	1094086423,9	603607537,6	314431931,5	925864370,3
4	1027568361,9	1119343978,1	1583720152,2	1077562241,1
5	1098257989,2	1200566289,3	1488878260,3	1131620603,3
6	1176845038,5	1306102107,1	1227862355,2	1195755920,5
7	1134405183,7	1263612442,3	1192371492,4	1156777512,9
8	1082901504,9	1183601099,9	1502921236,0	1119362942,5
9	1180522236,8	1310304818,7	1223409451,3	1199085409,7
10	1196038870,8	1331114080,2	1153729261,2	1213160664,4
11	1092433656,3	603353216,0	308126195,3	922632116,7
12	1098875086,6	613661346,6	308546193,9	939153991,5
13	1203167067,2	287930558,1	5274675635,7	1204115425,3
14	1037400702,2	429582010,5	564179402,4	727995365,3
15	1107184284,3	596480199,6	393905413,3	948794257,0
16	1129366972,8	607466754,1	474400066,2	1000897961,7
17	1116727853,1	587141789,0	472720278,5	965341720,6

Çizelge 5. 15. Gupta ve Shabbir, Subramani ve Kumarapandiyan Varyans Tahmin Edicileri
(Devam)

Örneklem	Gupta ve Shabbir			Subramani ve Kumarapandiyan
	$S_{gs(0)}^2$	$S_{gs(1)}^2$	$S_{gs(-1)}^2$	S_{sk}^2
18	1044090183,2	1133977415,2	1593312705,9	1090813048,0
19	1139565442,1	1264060764,0	1268742383,4	1162696595,2
20	1017607951,0	1098373931,7	1665133854,4	1072608282,2
21	1052882909,0	1155418152,1	1490937607,6	1094673967,8
22	1089830167,1	1197829831,5	1438851943,8	1123485169,0
23	1065347101,8	1174839851,4	1425298419,2	1102857571,3
24	1026617469,3	1116661775,6	1596928063,4	1077263921,6
25	1164715803,2	1293694406,0	1221758371,8	1184657868,0
26	1057015715,1	1147110683,1	1588866821,5	1100866673,4
27	1110418086,0	1224487066,5	1381147589,5	1139473251,1
28	1149464754,5	1269738064,0	1325210847,1	1172251307,1
29	1124798714,2	1245347749,4	1312580435,4	1150480416,4
30	1070283812,1	1159071669,4	1595808576,3	1111564966,7
31	1127427492,0	1240945050,6	1389812235,0	1154143469,6
32	1166430505,6	1286620204,8	1333486957,3	1187278965,3
33	1142036656,4	1262403370,8	1321145641,0	1165680848,0
34	1096708009,1	1197313098,7	1502968716,8	1130658009,9
35	1185581478,1	1320045904,4	1150666137,6	1203340439,7
36	1216178495,0	1355163472,7	1107412503,0	1232313475,1

Çizelge 5. 16. Gupta ve Shabbir, Subramani ve Kumarapandiyan Varyans Tahmin Edicileri
(Devam)

Örneklem	Gupta ve Shabbir			Subramani ve Kumarapandiyan
	$S_{gs(0)}^2$	$S_{gs(1)}^2$	$S_{gs(-1)}^2$	S_{sk}^2
37	1196858537,1	1334555397,5	1098437118,2	1213799085,0
38	1163945914,6	1292244774,9	1231270399,4	1184057935,2
39	1117235895,1	1223913531,8	1452094319,6	1146639103,1
40	1096628457,2	1204334576,2	1441684313,7	1129206409,8
41	1055601706,5	1144105638,2	1600689376,8	1100085628,7
42	1155523101,9	1284685695,5	1211154628,6	1176187501,7
43	1108781144,4	1221410047,0	1395533945,1	1138388256,4
44	1147678035,9	1266577187,8	1339736233,8	1170878489,2
45	1080064064,1	1181850067,0	1494078253,5	1116825060,7
$E(s_y^2)$	1115027623	1093083334	1290794881	1107406770
$HKO(s_y^2)$	2,78945E+15	8,15224E+16	5,49696E+17	1,06899E+16

Halk kütüphanelerinin kullanıcı sayılarına ilişkin Singh ve Solanki varyans tahmin edicileri ile beklenen değerleri ve HKO'ları aşağıdaki Çizelge 5.17, Çizelge 5.18 ve Çizelge 5.19, Çizelge 5.20, Çizelge 5.21, Çizelge 5.22, Çizelge 5.23'de verilmektedir.

Çizelge 5. 17. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicileri

Örneklem	Singh ve Solanki				
	S_{ss1}^2	S_{ss2}^2	S_{ss3}^2	S_{ss4}^2	S_{ss5}^2
1	1372564687,3	1372564695,5	1372564685,0	1372564697,0	1372564697,5
2	534310737,9	534310690,4	534310750,9	534310681,6	534310678,8

Çizelge 5. 18. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicileri (Devam)

Örneklem	Singh ve Solanki				
	S_{ss1}^2	S_{ss2}^2	S_{ss3}^2	S_{ss4}^2	S_{ss5}^2
3	534654034,8	534653986,6	534654047,9	534653977,7	534653974,8
4	1392975666,0	1392975676,4	1392975663,1	1392975678,4	1392975679,0
5	1411954830,1	1411954839,7	1411954827,5	1411954841,4	1411954842,0
6	1377192098,9	1377192106,1	1377192096,9	1377192107,4	1377192107,8
7	1331962137,3	1331962144,3	1331962135,3	1331962145,6	1331962146,0
8	1405473841,6	1405473851,3	1405473839,0	1405473853,1	1405473853,7
9	1378363416,7	1378363423,8	1378363414,8	1378363425,2	1378363425,6
10	1364640412,6	1364640419,0	1364640410,8	1364640420,2	1364640420,6
11	533770184,0	533770136,1	533770197,1	533770127,3	533770124,5
12	540201299,9	540201251,9	540201313,0	540201243,0	540201240,2
13	824542028,6	824541831,6	824542082,5	824541795,0	824541783,5
14	455456077,9	455456021,0	455456093,5	455456010,4	455456007,1
15	539340284,6	539340232,8	539340298,8	539340223,2	539340220,2
16	555234687,9	555234632,4	555234703,1	555234622,1	555234618,8
17	542491882,9	542491827,6	542491897,9	542491817,4	542491814,2
18	1408624624,9	1408624635,4	1408624622,1	1408624637,4	1408624638,0
19	1363822351,8	1363822359,5	1363822349,7	1363822360,9	1363822361,3
20	1414321851,5	1414321862,6	1414321848,5	1414321864,6	1414321865,2
21	1378816694,2	1378816703,9	1378816691,5	1378816705,7	1378816706,3
22	1387793931,4	1387793940,6	1387793928,8	1387793942,3	1387793942,8

Çizelge 5. 19. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicileri (Devam)

Örneklem	Singh ve Solanki				
	S_{ss1}^2	S_{ss2}^2	S_{ss3}^2	S_{ss4}^2	S_{ss5}^2
23	1364624609,5	1364624618,7	1364624607,0	1364624620,4	1364624620,9
24	1396943646,0	1396943656,5	1396943643,1	1396943658,5	1396943659,1
25	1365743047,1	1365743054,3	1365743045,2	1365743055,6	1365743056,0
26	1416653932,5	1416653942,9	1416653929,7	1416653944,9	1416653945,5
27	1382526806,2	1382526814,9	1382526803,8	1382526816,5	1382526817,0
28	1391783912,8	1391783920,9	1391783910,6	1391783922,4	1391783922,9
29	1368593247,5	1368593255,6	1368593245,3	1368593257,1	1368593257,6
30	1428969652,4	1428969662,8	1428969649,6	1428969664,8	1428969665,4
31	1398430652,9	1398430661,7	1398430650,6	1398430663,3	1398430663,8
32	1407600219,7	1407600227,8	1407600217,5	1407600229,3	1407600229,8
33	1384703061,0	1384703069,2	1384703058,8	1384703070,7	1384703071,1
34	1415806543,8	1415806553,4	1415806541,1	1415806555,2	1415806555,8
35	1355523990,1	1355523996,6	1355523988,4	1355523997,8	1355523998,2
36	1362955301,8	1362955307,7	1362955300,2	1362955308,8	1362955309,2
37	1344814224,0	1344814229,9	1344814222,3	1344814231,0	1344814231,3
38	1368634669,5	1368634676,7	1368634667,5	1368634678,1	1368634678,5
39	1413064579,5	1413064588,8	1413064577,0	1413064590,5	1413064591,0
40	1393897968,9	1393897978,2	1393897966,4	1393897979,9	1393897980,4
41	1419777377,1	1419777387,6	1419777374,2	1419777389,5	1419777390,2
42	1354880061,4	1354880068,5	1354880059,4	1354880069,8	1354880070,3

Çizelge 5. 20. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicileri (Devam)

Örneklem	Singh ve Solanki				
	S_{ss1}^2	S_{ss2}^2	S_{ss3}^2	S_{ss4}^2	S_{ss5}^2
43	1386469323,9	1386469332,7	1386469321,5	1386469334,4	1386469334,9
44	1395676838,6	1395676846,9	1395676836,4	1395676848,4	1395676848,9
45	1400208093,3	1400208102,9	1400208090,6	1400208104,7	1400208105,3
$E(s_y^2)$	1221484212	1221484205	1221484213	1221484204	1221484203
$HKO(s_y^2)$	1,19315E+17	1,19315E+17	1,19315E+17	1,19315E+17	1,19315E+17

Çizelge 5. 21. Singh ve Solanki Diğer Varyans Tahmin Edicileri

Örneklem	Singh ve Solanki				
	S_{ss6}^2	S_{ss7}^2	S_{ss8}^2	S_{ss9}^2	S_{ss10}^2
1	1372540378,4	1372564694,0	1372564697,5	1372556113,6	1372564695,7
2	534451004,1	534310699,3	534310678,8	534360208,1	534310689,6
3	534796300,5	534653995,6	534653974,8	534704210,2	534653985,7
4	1392944792,6	1392975674,5	1392975679,0	1392964777,0	1392975676,6
5	1411926580,9	1411954837,9	1411954842,0	1411944866,7	1411954839,8
6	1377170877,2	1377192104,7	1377192107,8	1377184614,0	1377192106,2
7	1331941334,1	1331962143,0	1331962146,0	1331954800,0	1331962144,4
8	1405445144,9	1405473849,5	1405473853,7	1405463720,4	1405473851,5
9	1378342354,8	1378363422,5	1378363425,6	1378355988,2	1378363424,0
10	1364621408,1	1364640417,8	1364640420,6	1364633709,7	1364640419,2
11	533911538,9	533770145,1	533770124,5	533820038,2	533770135,3
12	540343043,7	540201260,9	540201240,2	540251291,2	540201251,0

Çizelge 5. 22. Singh ve Solanki Diğer Varyans Tahmin Edicileri (Devam)

Örneklem	Singh ve Solanki				
	S_{ss6}^2	S_{ss7}^2	S_{ss8}^2	S_{ss9}^2	S_{ss10}^2
13	825124159,1	824541868,6	824541783,5	824747339,4	824541828,1
14	455624201,8	455456031,7	455456007,1	455515373,3	455456020,0
15	539493326,3	539340242,5	539340220,2	539394260,6	539340231,9
16	555398797,6	555234642,8	555234618,8	555292567,5	555234631,4
17	542654950,0	542491838,0	542491814,2	542549394,7	542491826,7
18	1408593700,5	1408624633,4	1408624638,0	1408613718,0	1408624635,6
19	1363799654,5	1363822358,0	1363822361,3	1363814346,5	1363822359,6
20	1414289288,0	1414321860,5	1414321865,2	1414310366,5	1414321862,8
21	1378787973,1	1378816702,1	1378816706,3	1378806564,3	1378816704,1
22	1387766699,0	1387793938,8	1387793942,8	1387784326,6	1387793940,7
23	1364597437,2	1364624617,0	1364624620,9	1364615025,9	1364624618,9
24	1396912498,9	1396943654,6	1396943659,1	1396932660,5	1396943656,7
25	1365721839,9	1365743052,9	1365743056,0	1365735567,3	1365743054,4
26	1416623210,0	1416653941,0	1416653945,5	1416643096,8	1416653943,1
27	1382501090,1	1382526813,3	1382526817,0	1382517736,2	1382526815,1
28	1391759936,3	1391783919,4	1391783922,9	1391775456,3	1391783921,1
29	1368569306,9	1368593254,1	1368593257,6	1368584803,7	1368593255,7
30	1428938904,2	1428969660,9	1428969665,4	1428958807,6	1428969663,0
31	1398404912,3	1398430660,0	1398430663,8	1398421574,3	1398430661,8

Çizelge 5. 23. Singh ve Solanki Diğer Varyans Tahmin Edicileri (Devam)

Örneklem	Singh ve Solanki				
	s_{ss6}^2	s_{ss7}^2	s_{ss8}^2	s_{ss9}^2	s_{ss10}^2
32	1407576228,1	1407600226,3	1407600229,8	1407591757,9	1407600228,0
33	1384679101,8	1384703067,6	1384703071,1	1384694610,6	1384703069,3
34	1415777975,5	1415806551,6	1415806555,8	1415796467,8	1415806553,6
35	1355504937,5	1355523995,4	1355523998,2	1355517270,3	1355523996,7
36	1362937856,6	1362955306,6	1362955309,2	1362949148,8	1362955307,8
37	1344796780,5	1344814228,8	1344814231,3	1344808071,6	1344814230,0
38	1368613206,7	1368634675,4	1368634678,5	1368627099,6	1368634676,9
39	1413037322,2	1413064587,0	1413064591,0	1413054965,9	1413064588,9
40	1393870740,5	1393897976,4	1393897980,4	1393888365,5	1393897978,3
41	1419746403,0	1419777385,6	1419777390,2	1419766452,6	1419777387,8
42	1354859020,6	1354880067,2	1354880070,3	1354872640,3	1354880068,6
43	1386443259,7	1386469331,1	1386469334,9	1386460131,1	1386469332,9
44	1395652492,4	1395676845,3	1395676848,9	1395668251,8	1395676847,0
45	1400179559,7	1400208101,1	1400208105,3	1400198029,5	1400208103,1
$E(s_y^2)$	1221503812	1221484206	1221484203	1221491124	1221484205
$HKO(s_y^2)$	1,19264E+17	1,19315E+17	1,19315E+17	1,19297E+17	1,19315E+17

Halk kütüphanelerinin kullanıcı sayılarına ilişkin Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta varyans tahmin edicileri ile bu varyans tahmin edicilerin beklenen değerleri ve HKO'ları aşağıdaki Çizelge 5.24, Çizelge 5.25, Çizelge 5.26, Çizelge 5.27, Çizelge 5.28, Çizelge 5.29'da verilmektedir.

Çizelge 5. 24. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicileri ($\lambda_{(yd)} = 0$)

Örneklem	Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta				
	S_{yd0}^2	S_{yd1}^2	S_{yd2}^2	S_{yd3}^2	S_{yd4}^2
1	1150714562,9	1150714562,1	1150714562,8	1150714562,9	1150714561,7
2	1172202504,0	1172202497,8	1172202502,8	1172202503,7	1172202495,6
3	1176596355,7	1176596349,4	1176596354,5	1176596355,4	1176596347,1
4	1069507535,7	1069507534,4	1069507535,5	1069507535,7	1069507533,9
5	1130644053,6	1130644052,5	1130644053,3	1130644053,5	1130644052,1
6	1200896095,0	1200896094,2	1200896094,8	1200896094,9	1200896094,0
7	1159680593,2	1159680592,4	1159680593,0	1159680593,1	1159680592,1
8	1116976591,4	1116976590,3	1116976591,2	1116976591,4	1116976589,9
9	1204430490,1	1204430489,4	1204430490,0	1204430490,1	1204430489,1
10	1219375977,4	1219375976,7	1219375977,3	1219375977,4	1219375976,4
11	1173505464,5	1173505458,2	1173505463,2	1173505464,2	1173505455,9
12	1183989218,6	1183989212,1	1183989217,3	1183989218,3	1183989209,8
13	1540054417,3	1540054388,1	1540054411,6	1540054416,0	1540054377,3
14	1094776335,0	1094776329,5	1094776333,9	1094776334,8	1094776327,5
15	1203182187,3	1203182180,0	1203182185,9	1203182186,9	1203182177,4
16	1245525441,5	1245525432,9	1245525439,8	1245525441,1	1245525429,7
17	1224054830,8	1224054822,7	1224054829,2	1224054830,5	1224054819,8
18	1084448541,7	1084448540,4	1084448541,4	1084448541,6	1084448539,9
19	1165497323,4	1165497322,6	1165497323,2	1165497323,4	1165497322,3
20	1063264419,8	1063264418,3	1063264419,5	1063264419,7	1063264417,8

Çizelge 5. 25. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicileri($\lambda_{(yd)} = 0$)

(Devam)

Örneklem	Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta				
	S_{yd0}^2	S_{yd1}^2	S_{yd2}^2	S_{yd3}^2	S_{yd4}^2
21	1089515111,4	1089515110,2	1089515111,2	1089515111,3	1089515109,8
22	1121884174,5	1121884173,5	1121884174,3	1121884174,5	1121884173,1
23	1099168185,7	1099168184,6	1099168185,5	1099168185,6	1099168184,2
24	1069065941,1	1069065939,7	1069065940,8	1069065941,0	1069065939,2
25	1189145642,3	1189145641,6	1189145642,2	1189145642,3	1189145641,3
26	1095830190,1	1095830188,9	1095830189,9	1095830190,1	1095830188,4
27	1139762265,7	1139762264,8	1139762265,6	1139762265,7	1139762264,5
28	1175547009,9	1175547009,1	1175547009,7	1175547009,8	1175547008,8
29	1152100131,9	1152100131,1	1152100131,8	1152100131,9	1152100130,7
30	1107854248,8	1107854247,6	1107854248,6	1107854248,8	1107854247,1
31	1155734477,1	1155734476,2	1155734476,9	1155734477,1	1155734475,9
32	1191701981,8	1191701981,0	1191701981,7	1191701981,8	1191701980,7
33	1168477069,5	1168477068,7	1168477069,3	1168477069,5	1168477068,3
34	1129526511,5	1129526510,4	1129526511,3	1129526511,4	1129526510,0
35	1209103942,5	1209103941,8	1209103942,4	1209103942,5	1209103941,5
36	1239375419,8	1239375419,1	1239375419,6	1239375419,8	1239375418,8
37	1220196233,9	1220196233,2	1220196233,8	1220196233,9	1220196232,9
38	1188473322,8	1188473322,0	1188473322,6	1188473322,7	1188473321,7
39	1147333928,9	1147333927,9	1147333928,7	1147333928,8	1147333927,6

Çizelge 5. 26. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicileri($\lambda_{(yd)} = 0$)
(Devam)

Örneklem	Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta				
	S_{yd0}^2	S_{yd1}^2	S_{yd2}^2	S_{yd3}^2	S_{yd4}^2
40	1128181267,7	1128181266,6	1128181267,5	1128181267,6	1128181266,3
41	1094889236,8	1094889235,5	1094889236,6	1094889236,8	1094889235,1
42	1180198748,5	1180198747,7	1180198748,3	1180198748,4	1180198747,4
43	1138501690,5	1138501689,6	1138501690,3	1138501690,5	1138501689,2
44	1174029492,7	1174029491,8	1174029492,5	1174029492,6	1174029491,5
45	1114197890,8	1114197889,7	1114197890,6	1114197890,8	1114197889,3
$E(s_y^2)$	1162202601	1162202599	1162202601	1162202601	1162202598
$HKO(s_y^2)$	6,52059E+15	6,52059E+15	6,52059E+15	6,52059E+15	6,52059E+15

Çizelge 5. 27. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicileri ($\lambda_{(yd)} = 1$)

Örneklem	Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta				
	S_{yd0}^{2*}	S_{yd1}^{2*}	S_{yd3}^{2*}	S_{yd3}^{2*}	S_{yd4}^{2*}
1	1134111828,7	1134111828,8	1134111828,7	1134111828,7	1134111828,8
2	1049316143,5	1049316146,7	1049316144,1	1049316143,6	1049316147,9
3	1054232041,5	1054232044,6	1054232042,1	1054232041,6	1054232045,7
4	1056967578,3	1056967578,0	1056967578,3	1056967578,3	1056967577,9
5	1113317941,5	1113317941,5	1113317941,5	1113317941,5	1113317941,5
6	1183213862,5	1183213862,7	1183213862,5	1183213862,5	1183213862,7
7	1144396430,9	1144396431,0	1144396430,9	1144396430,9	1144396431,0
8	1100655013,6	1100655013,5	1100655013,5	1100655013,6	1100655013,5
9	1186682909,8	1186682910,0	1186682909,8	1186682909,8	1186682910,0

Çizelge 5. 28. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicileri($\lambda_{(yd)} = 1$)

(Devam)

Örneklem	Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta				
	S_{yd0}^{2*}	S_{yd1}^{2*}	S_{yd3}^{2*}	S_{yd3}^{2*}	S_{yd4}^{2*}
10	1202434687,8	1202434688,0	1202434687,9	1202434687,8	1202434688,1
11	1050187558,1	1050187561,4	1050187558,7	1050187558,3	1050187562,6
12	1067046423,5	1067046426,0	1067046424,0	1067046423,6	1067046426,9
13	1728783397,3	1728783283,7	1728783375,1	1728783392,0	1728783242,1
14	879701977,3	879701990,5	879701979,9	879701978,0	879701995,3
15	1086784533,4	1086784535,1	1086784533,7	1086784533,5	1086784535,7
16	1148751249,1	1148751247,6	1148751248,8	1148751249,1	1148751247,1
17	1112293753,1	1112293753,5	1112293753,2	1112293753,1	1112293753,7
18	1070247761,6	1070247761,4	1070247761,6	1070247761,6	1070247761,3
19	1148854005,3	1148854005,4	1148854005,4	1148854005,3	1148854005,5
20	1050692978,1	1050692977,7	1050692978,0	1050692978,0	1050692977,5
21	1075824676,4	1075824676,2	1075824676,4	1075824676,4	1075824676,2
22	1105929054,4	1105929054,4	1105929054,4	1105929054,4	1105929054,4
23	1085248142,0	1085248141,9	1085248142,0	1085248142,0	1085248141,8
24	1056457586,2	1056457585,8	1056457586,1	1056457586,2	1056457585,7
25	1172079479,8	1172079479,9	1172079479,8	1172079479,8	1172079480,0
26	1080507932,9	1080507932,7	1080507932,9	1080507932,9	1080507932,6
27	1123169633,7	1123169633,8	1123169633,7	1123169633,7	1123169633,8
28	1157452308,1	1157452308,2	1157452308,1	1157452308,1	1157452308,3

Çizelge 5. 29. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicileri ($\lambda_{(yd)} = 1$)
(Devam)

Örneklem	Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta				
	S_{yd0}^{2*}	S_{yd1}^{2*}	S_{yd2}^{2*}	S_{yd3}^{2*}	S_{yd4}^{2*}
29	1135610829,9	1135610830,0	1135610830,0	1135610829,9	1135610830,1
30	1091241216,3	1091241216,2	1091241216,3	1091241216,3	1091241216,1
31	1137889403,2	1137889403,3	1137889403,2	1137889403,2	1137889403,3
32	1172535765,7	1172535765,9	1172535765,7	1172535765,7	1172535766,0
33	1150865605,0	1150865605,1	1150865605,0	1150865605,0	1150865605,2
34	1112104690,0	1112104690,0	1112104690,0	1112104690,0	1112104690,0
35	1192536007,5	1192536007,7	1192536007,5	1192536007,5	1192536007,7
36	1222895595,8	1222895596,0	1222895595,8	1222895595,8	1222895596,0
37	1204308313,9	1204308314,0	1204308313,9	1204308313,9	1204308314,1
38	1171276466,1	1171276466,2	1171276466,1	1171276466,1	1171276466,3
39	1129174839,2	1129174839,2	1129174839,2	1129174839,2	1129174839,3
40	1111680901,1	1111680901,1	1111680901,1	1111680901,1	1111680901,1
41	1079530036,7	1079530036,4	1079530036,6	1079530036,6	1079530036,4
42	1163703348,3	1163703348,4	1163703348,3	1163703348,3	1163703348,5
43	1121809087,1	1121809087,1	1121809087,1	1121809087,1	1121809087,1
44	1155785327,0	1155785327,1	1155785327,0	1155785327,0	1155785327,2
45	1098230441,1	1098230441,0	1098230441,1	1098230441,1	1098230441,0
$E(s_y^2)$	1130589306	1130589304	1130589305	1130589306	1130589303
$HKO(s_y^2)$	1,15588E+16	1,15588E+16	1,15588E+16	1,15588E+16	1,15588E+16

Halk kütüphanelerinin kullanıcı sayılarına ilişkin Lone ve Tailor varyans tahmin edicisi ile bu varyans tahmin edicinin beklenen değeri ve HKO'su aşağıdaki Çizelge 5.30'da verilmektedir.

Çizelge 5. 30. Lone ve Tailor Varyans Tahmin Edicisi

Örneklem	Lone ve Tailor	Örneklem	Lone ve Tailor	Örneklem	Lone ve Tailor
	S_{lt}^{2**}		S_{lt}^{2**}		S_{lt}^{2**}
1	141410426,1	18	64631534,9	35	142229211,3
2	64786532,1	19	138136200,1	36	126620927,1
3	63709509,8	20	121880154,6	37	127874586,8
4	137049836,2	21	131808988,1	38	126725917,1
5	142193593,7	22	137600490,1	39	125726212,8
6	126520880,0	23	139022322,8	40	138027463,3
7	117556562,1	24	137424217,1	41	136725872,9
8	136685455,6	25	137080234,8	42	135847472,3
9	143467029,5	26	125778984,6	43	141759903,8
10	143204794,0	27	135882196,8	44	141622430,0
11	64764313,3	28	141568590,2	45	143064739,8
12	65078909,8	29	143010941,0	$E(s_y^2)$	121704997,8
13	53291087,0	30	141348236,5	$HKO(s_y^2)$	1,01755E+18
14	58277282,8	31	136734227,6		
15	141410426,1	32	142730826,9		
16	64814712,9	33	144177646,8		
17	65234875,6	34	142532741,5		

Varyans tahmin ediciler ile beklenen değerleri ve HKO'ları, Çizelge 5.2 - Çizelge 5.30'da verilmiştir. Beklenen değer ve HKO'lar her bir varyans tahmin edicisi için

$$E(s_y^2) = \frac{\sum_{i=1}^{45} (s_y^2)}{45}, \text{ HKO}(s_y^2) = \frac{\sum_{i=1}^{45} (s_y^2 - S_2^2)^2}{45} \quad (5.1)$$

formülünden hesaplanmıştır. HKO değerleri küçükten büyüğe sıralandığında bu kitle için en küçük HKO'ya sahip varyans tahmin edici Gupta ve Shabbir ($s_{gs(0)}^2$) varyans tahmin edicisi olarak bulunmuştur. Klasik varyans tahmin edicisinin HKO'su ile karşılaştırıldığında, Eş. (2.98)'den

$$\rho_{(s_y^2, s_x^2)} = (4,398 - 1) / \sqrt{(3,684)(3,181)} \text{ ve } A_{gs} = 0,025(4,684 - 1)(1 - 0,99) \text{ olmak üzere,}$$

$$\frac{V(s_y^2)(A_{(gs)} + \rho_{(s_y^2, s_x^2)}^2)}{(1 + A_{(gs)})} > 0$$

$$\frac{(1,65994E+17)(0,000921+0,992617)}{(1+0,000921)} > 0$$

$1,64769E+17 > 0$ koşulu sağlandığından Gupta ve Shabbir ($s_{gs(0)}^2$) varyans tahmin edicisinin daha klasik varyansa göre daha etkin olduğu söylenebilir. Diğer tahmin edicilerle benzer karşılaştırmalar yapılabilir.

5.1. Klasik Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığı

Güven aralığının hesaplamasında klasik varyans tahmin edicisi kullanıldığında, Eş. (4.3)'deki formülden hesaplanan kitle ortalamasının güven aralığına ilişkin üst sınır değerinden alt sınır değerinin farkı olan güven aralığı uzunluğu aşağıdaki Çizelge 5.31'de verilmektedir.

Çizelge 5.31. Klasik Varyans Tahmin Edicisine (s_y^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$(\bar{y} + t\sqrt{v(\bar{y})}) - (\bar{y} - t\sqrt{v(\bar{y})})$							
Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk
1	60601,8600	15	31046,0694	29	60506,8654	43	60944,5517
2	31437,5624	16	31191,8833	30	61964,0610	44	61100,9845
3	31358,0458	17	30701,3926	31	61193,6688	45	61298,9464
4	61200,3540	18	61536,0779	32	61347,9118		
5	61542,9955	19	60373,0041	33	60855,5669		
6	60626,9394	20	61696,5708	34	61632,6670		
7	59629,9500	21	60844,0062	35	60103,1249		
8	61415,4411	22	61001,2833	36	60225,7746		
9	60648,3948	23	60499,5422	37	59829,3030		
10	60300,5885	24	61291,9244	38	60447,3797		
11	31363,8801	25	60378,3599	39	61542,8957		
12	31613,5818	26	61702,1774	40	61132,3073		
13	21149,659	27	60851,2039	41	61774,5466		
14	26444,8710	28	61008,4212	42	60137,8130		

5.2. Hirano Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığı

Güven aralığının tahmininde Eş. (4.4)'de verilen, Hirano varyans tahmin edicisinden yararlanılarak hesaplanan kütüphane kullanıcı sayılarına ilişkin kitle ortalamasının güven aralığının uzunluğu Çizelge 5.32'de verilmektedir.

Çizelge 5.32. Hirano Varyans Tahmin Edicisine (S_h^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$(\bar{y} + t\sqrt{v_h(\bar{y})}) - (\bar{y} - t\sqrt{v_h(\bar{y})})$							
Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk
1	50145,8703	15	25689,511350	29	50067,265752	43	50429,435505
2	26013,4578	16	25810,167205	30	51273,042954	44	50558,877977
3	25947,6606	17	25404,303635	31	50635,570927	45	50722,684410
4	50641,1027	18	50918,902248	32	50763,201493		
5	50924,6263	19	49956,500251	33	50355,803723		
6	50166,6226	20	51051,704386	34	50998,826226		
7	49341,6495	21	50346,237638	35	49733,184915		
8	50819,0796	22	50476,378832	36	49834,673136		
9	50184,3762	23	50061,206039	37	49506,607080		
10	49896,5789	24	50716,873934	38	50018,043416		
11	25952,4883	25	49960,932017	39	50924,543740		
12	26159,1075	26	51056,343655	40	50584,796476		
13	17500,586	27	50352,193467	41	51116,226510		
14	21882,184	28	50482,285178	42	49761,888045		

5.3. Das ve Tripathi Varyans Tahmin Edicilerinin Güven Aralığı

Güven aralığının tahmininde 45 örneklem için de Eş. (4.7), Eş. (4.9) ve Eş. (4.11)'de verilen, Das ve Tripathi varyans tahmin edicilerinden yararlanılarak hesaplanan kütüphane kullanıcı sayılarına ilişkin kitle ortalamasının güven aralıklarının uzunlukları Çizelge 5.33 - Çizelge 5.35'te verilmektedir.

Çizelge 5. 33. Das ve Tripathi Varyans Tahmin Edicisine (s_{dt1}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$(\bar{y} + t\sqrt{v_{dt1}(\bar{y})}) - (\bar{y} - t\sqrt{v_{dt1}(\bar{y})})$							
Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk
1	54842,1719	15	36600,7970	29	54641,2080	43	55577,6135
2	37909,0778	16	36356,0835	30	60786,4887	44	55252,2477
3	39652,4818	17	35820,7373	31	55642,1866	45	56715,6705
4	58612,2085	18	58883,8975	32	55315,4850		
5	56772,7108	19	66025,9888	33	54912,7370		
6	63471,7933	20	63016,3585	34	56978,1351		
7	67144,2889	21	57399,5537	35	61937,3417		
8	59372,6895	22	57045,0444	36	61462,5442		
9	53964,0684	23	56620,1714	37	61110,9615		
10	53255,6197	24	58832,3211	38	63502,2731		
11	37708,9461	25	63271,0326	39	58960,9577		

Çizelge 5. 34. Das ve Tripathi Varyans Tahmin Edicisine (S_{dt2}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$(\bar{y} + t\sqrt{v_{dt2}(\bar{y})}) - (\bar{y} - t\sqrt{v_{dt2}(\bar{y})})$							
Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk
1	55048,1668	15	37087,2826	29	54854,8141	43	55756,6137
2	38579,5165	16	36768,9557	30	60795,5250	44	55462,7943
3	40827,4059	17	36233,4453	31	55832,4624	45	56847,0594
4	58655,4550	18	58929,0287	32	55538,0282		
5	56914,1176	19	66263,9609	33	55130,6015		
6	63529,1623	20	63028,2002	34	57112,8140		
7	67583,7895	21	57475,5823	35	61961,0246		
8	59399,7622	22	57144,3252	36	61473,1884		
9	54237,4583	23	56716,4887	37	61122,4778		
10	53559,2079	24	58871,3986	38	63568,8525		
11	38352,5817	25	63330,6468	39	59003,7709		
12	38606,5433	26	60590,5497	40	58655,8164		
13	33022,0095	27	55561,2096	41	60800,5944		
14	36043,8758	28	55271,0469	42	53817,3241		

Çizelge 5. 35. Das ve Tripathi Varyans Tahmin Edicisine (S_{dt3}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$(\bar{y} + t\sqrt{v_{dt3}(\bar{y})}) - (\bar{y} - t\sqrt{v_{dt3}(\bar{y})})$							
Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk
1	56326,2422	15	54761,7018	29	56362,7654	43	56024,8385
2	53711,0965	16	56516,5670	30	55272,5176	44	56856,9158
3	53847,7009	17	55475,8952	31	56420,3183	45	55443,3107
4	54411,3277	18	54746,7480	32	57263,6525		
5	55817,5074	19	56686,5920	33	56736,6303		
6	57521,1989	20	54256,0288	34	55787,8766		
7	56575,9528	21	54882,8741	35	57745,8833		
8	55503,9033	22	55632,9503	36	58473,6389		
9	57604,8995	23	55116,7158	37	58029,1212		
10	57983,8986	24	54399,0060	38	57232,2991		
11	53732,7348	25	57251,6959	39	56207,6464		
12	54221,9819	26	55004,0953	40	55775,6725		
13	77638,1768	27	56058,0448	41	54980,0300		
14	48264,2460	28	56897,3257	42	57048,0686		

5.4. Isaki Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığı

45 örneklem için Eş. (4.13)'deki güven aralığı formülü ile hesaplanan kütüphane kullanıcı sayılarına ilişkin kitle ortalamasının güven aralığı tahmininin uzunluğu Çizelge 5.36'da çizelgede verilmektedir.

Çizelge 5. 36. Isaki Varyans Tahmin Edicisine (S_i^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$(\bar{y} + t\sqrt{v_i(\bar{y})}) - (\bar{y} - t\sqrt{v_i(\bar{y})})$							
Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk
1	56572,6792	15	51405,7449	29	56602,3637	43	56304,0714
2	50694,5875	16	52798,6194	30	55636,6849	44	57101,9366
3	50780,5451	17	51852,2961	31	56692,3651	45	55768,2155
4	54779,1033	18	55114,8863	32	57500,4700		
5	56136,4140	19	56902,1098	33	56975,0620		
6	57705,4363	20	54653,0041	34	56112,5266		
7	56757,1237	21	55212,3838	35	57888,2035		
8	55831,5409	22	55934,2810	36	58580,9915		
9	57785,7227	23	55418,4117	37	58139,2590		
10	58123,9339	24	54771,5147	38	57422,4710		
11	50691,8091	25	57437,0220	39	56507,7219		
12	51143,6821	26	55368,2970	40	56076,5215		
13	57921,2452	27	56330,9040	41	55348,6470		
14	45029,0239	28	57135,4099	42	57231,3163		

Çizelge 5. 37’de ise Eş. (4.15)’ de gösterilen ve Isaki’nin regresyon varyans tahmin edicisi kullanılarak hesaplanan kütüphane kullanıcı sayılarına ilişkin kitle ortalamasının güven aralığının uzunluğu verilmektedir.

Çizelge 5. 37. Isaki Varyans Tahmin Edicisine (s_{ireg}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y} + t\sqrt{v_{ireg}(\bar{y})}\right) - \left(\bar{y} - t\sqrt{v_{ireg}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk
1	56362,3849	15	31046,0694	29	60506,8655	43	60944,5518
2	31437,5624	16	31191,8834	30	61964,0611	44	61100,9845
3	31358,0458	17	30701,3926	31	61193,6688	45	61298,9465
4	61200,3541	18	61536,0780	32	61347,9118		
5	61542,9956	19	60373,0041	33	60855,5669		
6	60626,9394	20	61696,5709	34	61632,6670		
7	59629,9500	21	60844,0062	35	60103,1250		
8	61415,4412	22	61001,2833	36	60225,7746		
9	60648,3949	23	60499,5423	37	59829,3030		
10	60300,5886	24	61291,9244	38	60447,3797		
11	31363,8801	25	60378,3599	39	61542,8958		
12	31613,5819	26	61702,1775	40	61132,3073		
13	21149,6593	27	60851,2039	41	61774,5466		
14	26444,8710	28	61008,4212	42	60137,8130		

5.5. Prasad ve Singh Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığı

45 örneklem için Eş. (4.17) ve Eş. (4.20)'da verilen ve Prasad ve Singh varyans tahmin edicileri kullanılarak hesaplanan kütüphane kullanıcı sayılarına ilişkin kitle ortalamasının güven aralıklarının uzunlukları Çizelge 5.38 ve Çizelge 5.39'da verilmektedir.

Çizelge 5. 38. Prasad ve Singh Varyans Tahmin Edicisine (S_{ps1}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$(\bar{y} + t\sqrt{v_{ps1}(\bar{y})}) - (\bar{y} - t\sqrt{v_{ps1}(\bar{y})})$							
Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk
1	46811,8674	15	42536,4141	29	46836,4302	43	46589,6041
2	41947,9569	16	43688,9680	30	46037,3656	44	47249,8090
3	42019,0837	17	42905,9193	31	46910,9032	45	46146,2025
4	45327,7475	18	45605,5959	32	47579,5811		
5	46450,8736	19	47084,4595	33	47144,8247		
6	47749,1834	20	45223,4050	34	46431,1076		
7	46964,4886	21	45686,2716	35	47900,4167		
8	46198,6020	22	46283,6157	36	48473,6740		
9	47815,6175	23	45856,7523	37	48108,1561		
10	48095,4751	24	45321,4682	38	47515,0397		
11	41945,6578	25	47527,0801	39	46758,1176		
12	42319,5666	26	45815,2842	40	46401,3147		
13	47927,7575	27	46611,8071	41	45799,0245		
14	37259,9057	28	47277,5069	42	47356,8660		

Çizelge 5.39. Prasad ve Singh Varyans Tahmin Edicisine (S_{ps2}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$(\bar{y} + t\sqrt{v_{ps2}(\bar{y})}) - (\bar{y} - t\sqrt{v_{ps2}(\bar{y})})$							
Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk
1	57119,0202	15	51902,1871	29	57148,9914	43	56847,8184
2	51184,1619	16	53308,5131	30	56173,9867	44	57653,3888
3	51270,9496	17	52353,0508	31	57239,8619	45	56306,7876
4	55308,1232	18	55647,1489	32	58055,7710		
5	56678,5419	19	57451,6323	33	57525,2889		
6	58262,7167	20	55180,8062	34	56654,4238		
7	57305,2459	21	55745,5880	35	58447,2490		
8	56370,7246	22	56474,4568	36	59146,7275		
9	58343,7785	23	55953,6056	37	58700,7290		
10	58685,2559	24	55300,4613	38	57977,0188		
11	51181,3566	25	57991,7102	39	57053,4357		
12	51637,5935	26	55903,0069	40	56618,0710		
13	58480,6098	27	56874,9101	41	55883,1671		
14	45463,8840	28	57687,1854	42	57784,0180		

5.6. Garcia ve Cebrain Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığı

Eş. (4.22)'de gösterilen ve Garcia ve Cebrain varyans tahmin edicisi kullanılarak hesaplanan güven aralığı tahmininin uzunluğu Çizelge 5.40'da verilmektedir.

Çizelge 5.40. Garcia ve Cebrain Varyans Tahmin Edicisine (s_{gc}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y} + t\sqrt{v_{gc}(\bar{y})} \right) - \left(\bar{y} - t\sqrt{v_{gc}(\bar{y})} \right)$							
Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk
1	56307,7872	15	53204,9012	29	56345,3783	43	56000,6996
2	52374,2241	16	54728,7840	30	55229,3741	44	56838,8682
3	52478,1588	17	53739,6683	31	56397,6472	45	55409,6374
4	54366,4523	18	54702,0954	32	57246,9753		
5	55785,3895	19	56672,7381	33	56719,5435		
6	57511,3466	20	54202,9085	34	55754,4944		
7	56566,2667	21	54847,7723	35	57740,1157		
8	55469,6655	22	55604,3700	36	58470,4392		
9	57595,4353	23	55087,7610	37	58025,7233		
10	57978,3432	24	54352,8631	38	57221,7224		
11	52379,5417	25	57241,6728	39	56179,6419		
12	52849,8652	26	54960,7004	40	55747,2706		
13	62041,9471	27	56035,0678	41	54935,4716		
14	46694,0013	28	56880,3433	42	57038,2391		

5.7. Upadhyaya ve Singh Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığı

Eş. (4.24)'te verilen Upadhyaya ve Singh varyans tahmin edicisi kullanılarak hesaplanan kütüphane kullanıcı sayılarına ilişkin kitle ortalamasının güven aralığı tahmininin uzunluğu Çizelge 5.41'de verilmektedir.

Çizelge 5.41. Upadhyaya ve Singh Varyans Tahmin Edicisine (s_{gc}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y} + t\sqrt{v_{us}(\bar{y})}\right) - \left(\bar{y} - t\sqrt{v_{us}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk
1	56572,6793	15	51405,7436	29	56602,3638	43	56304,0716
2	50694,5864	16	52798,6180	30	55636,6850	44	57101,9367
3	50780,5439	17	51852,2947	31	56692,3652	45	55768,2156
4	54779,1035	18	55114,8864	32	57500,4701		
5	56136,4142	19	56902,1099	33	56975,0621		
6	57705,4364	20	54653,0043	34	56112,5267		
7	56757,1237	21	55212,3839	35	57888,2036		
8	55831,5411	22	55934,2811	36	58580,9916		
9	57785,7228	23	55418,4118	37	58139,2591		
10	58123,9339	24	54771,5148	38	57422,4711		
11	50691,8079	25	57437,0220	39	56507,7221		
12	51143,6809	26	55368,2971	40	56076,5216		
13	57921,2398	27	56330,9041	41	55348,6471		
14	45029,0226	28	57135,4100	42	57231,3164		

5.8. Chandra ve Singh Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığı

Eş. (4.26), Eş. (4.30), Eş. (4.32)'de verilen Chandra ve Singh varyans tahmin edicileri kullanılarak hesaplanan kütüphane kullanıcı sayılarına ilişkin kitle ortalamasının güven aralığı tahminlerinin uzunlukları Çizelge 5.42 - Çizelge 5.44'te verilmektedir.

Çizelge 5.42. Chandra ve Singh Varyans Tahmin Edicisine (s_{cs1}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y} + t\sqrt{v_{cs1}(\bar{y})}\right) - \left(\bar{y} - t\sqrt{v_{cs1}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk
1	56326,2422	15	54761,7018	29	56362,7654	43	56024,8385
2	53711,0965	16	56516,5670	30	55272,5176	44	56856,9158
3	53847,7009	17	55475,8952	31	56420,3183	45	55443,3107
4	54411,3277	18	54746,7480	32	57263,6525		
5	55817,5074	19	56686,5920	33	56736,6303		
6	57521,1989	20	54256,0288	34	55787,8766		
7	56575,9528	21	54882,8741	35	57745,8833		
8	55503,9033	22	55632,9503	36	58473,6389		
9	57604,8995	23	55116,7158	37	58029,1212		
10	57983,8986	24	54399,0060	38	57232,2991		
11	53732,7348	25	57251,6959	39	56207,6464		
12	54221,9819	26	55004,0953	40	55775,6725		
13	77638,1768	27	56058,0448	41	54980,0300		
14	48264,2460	28	56897,3257	42	57048,0686		

Çizelge 5.43. Chandra ve Singh Varyans Tahmin Edicisine (S_{cs2}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y} + t\sqrt{v_{cs2}(\bar{y})}\right) - \left(\bar{y} - t\sqrt{v_{cs2}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk
1	56307,7872	15	53204,9006	29	56345,3783	43	56000,6996
2	52374,2236	16	54728,7833	30	55229,3741	44	56838,8681
3	52478,1583	17	53739,6676	31	56397,6472	45	55409,6374
4	54366,4523	18	54702,0954	32	57246,9753		
5	55785,3895	19	56672,7380	33	56719,5435		
6	57511,3466	20	54202,9085	34	55754,4944		
7	56566,2667	21	54847,7723	35	57740,1157		
8	55469,6655	22	55604,3700	36	58470,4392		
9	57595,4353	23	55087,7610	37	58025,7233		
10	57978,3432	24	54352,8631	38	57221,7224		
11	52379,5411	25	57241,6728	39	56179,6419		
12	52849,8646	26	54960,7004	40	55747,2706		
13	62041,9428	27	56035,0678	41	54935,4716		
14	46694,0007	28	56880,3433	42	57038,2391		

Çizelge 5.44. Chandra ve Singh varyans tahmin edicisine (S_{cs3}^2) ait güven aralığı uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$(\bar{y} + t\sqrt{v_{cs3}(\bar{y})}) - (\bar{y} - t\sqrt{v_{cs3}(\bar{y})})$							
Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk
1	55597,4704	15	39994,1052	29	55680,5091	43	55040,8042
2	40256,0587	16	40371,1834	30	53348,4996	44	56146,6257
3	40193,8756	17	39717,8969	31	55504,0244	45	54003,2821
4	52389,7160	18	52739,3429	32	56613,0741		
5	54455,2183	19	56155,1164	33	56067,8086		
6	57154,1372	20	51780,3814	34	54363,5570		
7	56215,0951	21	53369,5238	35	57538,3549		
8	54036,2011	22	54440,3971	36	58361,7569		
9	57253,3800	23	53904,7362	37	57909,9766		
10	57784,4644	24	52309,2507	38	56835,9644		
11	40183,2531	25	56877,6562	39	55044,0541		
12	40512,0877	26	53065,1147	40	54592,0173		
13	29028,1829	27	55127,1479	41	52979,2200		
14	34268,8632	28	56233,1983	42	56681,6953		

5.9. Kadılar ve Çıngı Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığı

Eş. (4.34), Eş. (4.36), Eş. (4.38), Eş. (4.40) ve Eş.(4.42)'de verilen Kadılar ve Çıngı'nın oransal ve regresyon varyans tahmin edicilerinden yararlanılarak hesaplanan, kütüphane kullanıcı sayılarına ilişkin kitle ortalamasına ait güven aralıklarının uzunlukları Çizelge 5.45- Çizelge 5.49'da verilmektedir.

Çizelge 5.45. Kadılar ve Çıngı Varyans Tahmin Edicisine (s_{kc1}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y} + t\sqrt{v_{kc1}(\bar{y})}\right) - \left(\bar{y} - t\sqrt{v_{kc1}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk
1	56572,6792	15	51405,7451	29	56602,3636	43	56304,0714
2	50694,5878	16	52798,6197	30	55636,6849	44	57101,9366
3	50780,5453	17	51852,2964	31	56692,3650	45	55768,2155
4	54779,1033	18	55114,8862	32	57500,4700		
5	56136,4140	19	56902,1098	33	56975,0619		
6	57705,4363	20	54653,0041	34	56112,5266		
7	56757,1236	21	55212,3838	35	57888,2035		
8	55831,5409	22	55934,2809	36	58580,9915		
9	57785,7227	23	55418,4116	37	58139,2590		
10	58123,9339	24	54771,5146	38	57422,4710		
11	50691,8093	25	57437,0219	39	56507,7219		
12	51143,6823	26	55368,2970	40	56076,5215		
13	57921,2463	27	56330,9040	41	55348,6469		
14	45029,0241	28	57135,4098	42	57231,3163		

Çizelge 5.46. Kadılar ve Çıngı Varyans Tahmin Edicisine (s_{kc2}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y} + t\sqrt{v_{kc2}(\bar{y})}\right) - \left(\bar{y} - t\sqrt{v_{kc2}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk
1	56572,6791	15	51405,7462	29	56602,3636	43	56304,0713
2	50694,5887	16	52798,6208	30	55636,6847	44	57101,9365
3	50780,5463	17	51852,2975	31	56692,3649	45	55768,2154
4	54779,1032	18	55114,8861	32	57500,4699		
5	56136,4139	19	56902,1098	33	56975,0619		
6	57705,4362	20	54653,0040	34	56112,5265		
7	56757,1236	21	55212,3836	35	57888,2034		
8	55831,5408	22	55934,2808	36	58580,9915		
9	57785,7226	23	55418,4115	37	58139,2590		
10	58123,9338	24	54771,5145	38	57422,4710		
11	50691,8102	25	57437,0219	39	56507,7218		
12	51143,6833	26	55368,2968	40	56076,5214		
13	57921,2506	27	56330,9039	41	55348,6468		
14	45029,0251	28	57135,4098	42	57231,3162		

Çizelge 5.47. Kadılar ve Çıngı Varyans Tahmin Edicisine (s_{kc3}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y} + t\sqrt{v_{kc3}(\bar{y})}\right) - \left(\bar{y} - t\sqrt{v_{kc3}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk
1	56572,6792	15	51405,7449	29	56602,3637	43	56304,0714
2	50694,5876	16	52798,6195	30	55636,6849	44	57101,9366
3	50780,5452	17	51852,2962	31	56692,3651	45	55768,2155
4	54779,1033	18	55114,8863	32	57500,4700		
5	56136,4140	19	56902,1098	33	56975,0620		
6	57705,4363	20	54653,0041	34	56112,5266		
7	56757,1237	21	55212,3838	35	57888,2035		
8	55831,5409	22	55934,2810	36	58580,9915		
9	57785,7227	23	55418,4117	37	58139,2590		
10	58123,9339	24	54771,5147	38	57422,4710		
11	50691,8091	25	57437,0220	39	56507,7219		
12	51143,6821	26	55368,2970	40	56076,5215		
13	57921,2455	27	56330,9040	41	55348,6470		
14	45029,0239	28	57135,4099	42	57231,3163		

Çizelge 5.48. Kadılar ve Çıngı Varyans Tahmin Edicisine (s_{kc4}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y} + t\sqrt{v_{kc4}(\bar{y})}\right) - \left(\bar{y} - t\sqrt{v_{kc4}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk
1	56572,6791	15	51405,7464	29	56602,3635	43	56304,0713
2	50694,5890	16	52798,6212	30	55636,6847	44	57101,9365
3	50780,5466	17	51852,2978	31	56692,3649	45	55768,2153
4	54779,1031	18	55114,8861	32	57500,4699		
5	56136,4139	19	56902,1097	33	56975,0618		
6	57705,4362	20	54653,0039	34	56112,5264		
7	56757,1236	21	55212,3836	35	57888,2034		
8	55831,5408	22	55934,2808	36	58580,9915		
9	57785,7226	23	55418,4115	37	58139,2590		
10	58123,9338	24	54771,5145	38	57422,4709		
11	50691,8105	25	57437,0219	39	56507,7218		
12	51143,6835	26	55368,2968	40	56076,5213		
13	57921,2518	27	56330,9039	41	55348,6468		
14	45029,0253	28	57135,4097	42	57231,3162		

Çizelge 5.49. Kadılar ve Çıngı Varyans Tahmin Edicisine (s_{kc5}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y} + t\sqrt{v_{kc5}(\bar{y})}\right) - \left(\bar{y} - t\sqrt{v_{kc5}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk
1	42852,3830	15	21953,4486	29	42785,2125	43	43094,7002
2	22230,2689	16	22056,5397	30	43815,5539	44	43205,3081
3	22174,0794	17	21709,7347	31	43270,8462	45	43345,2900
4	43275,5982	18	43512,9833	32	43379,9058		
5	43517,8575	19	42690,5496	33	43031,7744		
6	42870,0823	20	43626,4336	34	43581,2640		
7	42165,0662	21	43023,6219	35	42499,6965		
8	43427,6278	22	43134,8264	36	42586,4158		
9	42885,2799	23	42780,0515	37	42306,0774		
10	42639,3462	24	43340,3474	38	42743,1211		
11	22178,1703	25	42694,3175	39	43517,7454		
12	22354,7185	26	43630,3812	40	43227,4242		
13	14955,6931	27	43028,6941	41	43681,5531		
14	18699,8549	28	43139,8568	42	42524,2532		

5.10. Gupta ve Shabbir Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığı

Gupta ve Shabbir varyans tahmin edicilerinin Eş. (4.45)'de verilen formülü ile $\alpha_{(gs)} = 0$, $\alpha_{(gs)} = 1$, $\alpha_{(gs)} = -1$ için hesaplanan kütüphane kullanıcı sayılarına ilişkin kitle ortalamasının güven aralıklarının uzunlukları Çizelge 5.50 - Çizelge 5.52'de verilmektedir.

Çizelge 5.50. Gupta ve Shabbir Varyans Tahmin Edicisine (S_{gs}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu ($\alpha_{(gs)} = 0$)

Güven Aralığı Uzunluğu							
$(\bar{y} + t\sqrt{v_{gs}(\bar{y})}) - (\bar{y} - t\sqrt{v_{gs}(\bar{y})})$							
Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk
1	56324,2404	15	55527,3518	29	55967,3071	43	55567,3801
2	55144,0873	16	56080,8447	30	54594,1971	44	56533,6519
3	55197,9336	17	55766,1521	31	56032,6698	45	54843,0707
4	53493,6667	18	53922,0024	32	56993,6459		
5	55303,0636	19	56333,4878	33	56394,5359		
6	57247,5158	20	53233,7733	34	55264,0250		
7	56205,7965	21	54148,5764	35	57459,6145		
8	54915,0627	22	55090,4624	36	58196,3390		
9	57336,8845	23	54468,1431	37	57732,2410		
10	57712,4687	24	53468,9099	38	56932,9130		
11	55156,2258	25	56951,7389	39	55778,8358		
12	55318,5985	26	54254,7451	40	55262,0207		
13	57884,1917	27	55608,3832	41	54218,4437		
14	53748,9858	28	56577,6409	42	56726,5435		

Çizelge 5.51. Gupta ve Shabbir Varyans Tahmin Edicisine (S_{gs}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu ($\alpha_{(gs)} = 1$)

Güven Aralığı Uzunluğu							
$(\bar{y} + t\sqrt{v_{gs}(\bar{y})}) - (\bar{y} - t\sqrt{v_{gs}(\bar{y})})$							
Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk
1	58819,7093	15	40756,3254	29	58890,1045	43	58321,3743
2	41071,1261	16	41129,9577	30	56813,5792	44	59389,9331
3	40999,1009	17	40436,0292	31	58785,9148	45	57369,1212
4	55831,4348	18	56195,1982	32	59857,9982		
5	57821,5963	19	59330,9061	33	59291,9970		
6	60309,4781	20	55305,9827	34	57743,2032		
7	59320,3838	21	56723,9673	35	60630,5520		
8	57411,6046	22	57755,6622	36	61431,7446		
9	60406,4306	23	57198,7239	37	60962,8565		
10	60884,2056	24	55764,5023	38	59988,6927		
11	40990,4627	25	60022,3307	39	58381,1134		
12	41339,1354	26	56519,6765	40	57912,2692		
13	28316,5856	27	58394,7907	41	56445,5966		
14	34587,5698	28	59463,9938	42	59812,9812		

Çizelge 5.52. Gupta ve Shabbir Varyans Tahmin Edicisine (S_{gs}^2) Ait Güven Aralığı

Uzunluğu ($\alpha_{(gs)} = -1$)

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y} + t\sqrt{v_{gs}(\bar{y})}\right) - \left(\bar{y} - t\sqrt{v_{gs}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk
1	60792,2288	15	33120,2022	29	60458,8620	43	62340,0588
2	28906,3190	16	36347,0673	30	66663,3912	44	61081,0729
3	29591,0467	17	36282,6602	31	62212,1299	45	64503,5590
4	66410,4200	18	66611,2395	32	60938,4483		
5	64391,2120	19	59440,6745	33	60655,8025		
6	58475,2177	20	68095,9966	34	64695,1875		
7	57623,9198	21	64435,7281	35	56607,1997		
8	64694,1656	22	63300,1966	36	55533,0743		
9	58369,0898	23	63001,3574	37	55307,5735		
10	56682,4951	24	66686,7698	38	58556,3131		
11	29292,8290	25	58329,6898	39	63590,8190		
12	29312,7863	26	66518,2405	40	63362,4690		
13	121197,8412	27	62017,8991	41	66765,2588		
14	39637,4419	28	60749,0508	42	58076,0141		

5.11. Subramani ve Kumarapandiyan Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığı

Subramani ve Kumarapandiyan varyans tahmin edicisi kullanılarak Eş. (4.48)'deki formül ile hesaplanan kütüphane kullanıcı sayılarına ilişkin kitle ortalamasının güven aralığının uzunluğu Çizelge 5.53'te verilmektedir.

Çizelge 5.53. Subramani ve Kumarapandiyan Varyans Tahmin Edicisine (S_{sk}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y} + t\sqrt{v_{sk}(\bar{y})}\right) - \left(\bar{y} - t\sqrt{v_{sk}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk
1	56572,9545	15	51402,3564	29	56602,6312	43	56304,3836
2	50691,5171	16	52794,8922	30	55637,0930	44	57102,2103
3	50777,4271	17	51848,6608	31	56692,6691	45	55768,5792
4	54779,5156	18	55115,2989	32	57500,7345		
5	56136,7710	19	56902,3504	33	56975,3282		
6	57705,6417	20	54653,4495	34	56112,8900		
7	56757,3257	21	55212,7527	35	57888,3620		
8	55831,9077	22	55934,6181	36	58581,1110		
9	57785,9243	23	55418,7492	37	58139,3816		
10	58124,0898	24	54771,9323	38	57422,6831		
11	50688,7159	25	57437,2286	39	56508,0576		
12	51140,5518	26	55368,7052	40	56076,8581		
13	57906,9999	27	56331,2090	41	55349,0601		
14	45025,7870	28	57135,6757	42	57231,5206		

5.12. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığı

Singh ve Solanki'nin Çizelge 2.1'de verilen $a_{(ss)}$ ve $b_{(ss)}$ 'nin farklı değerleri için Eş. (4.50)'de verilen formül ile hesaplanan, kütüphane kullanıcı sayılarına ilişkin kitle ortalamasının güven aralıklarının uzunlukları Çizelge 5.54 - Çizelge 5.63'te verilmektedir.

Çizelge 5.54. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicisine (s_{ss1}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y} + t\sqrt{v_{ss1}(\bar{y})} \right) - \left(\bar{y} - t\sqrt{v_{ss1}(\bar{y})} \right)$							
Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk
1	61824,8990	15	38755,0619	29	61735,3908	43	62137,2656
2	38573,9361	16	39321,9730	30	63082,4436	44	62343,2503
3	38586,3260	17	38868,1283	31	62404,7248	45	62444,3712
4	62282,8920	18	62631,7640	32	62608,9857		
5	62705,7558	19	61627,6925	33	62097,6737		
6	61929,0284	20	62758,2942	34	62791,2260		
7	60903,5973	21	61965,5447	35	61439,9154		
8	62561,6780	22	62166,9409	36	61608,0995		
9	61955,3585	23	61645,8159	37	61196,7209		
10	61646,1728	24	62371,5373	38	61736,3250		
11	38554,4188	25	61671,0729	39	62730,3933		
12	38785,9843	26	62810,0141	40	62303,5076		
13	47918,5209	27	62048,8570	41	62879,2179		
14	35613,9591	28	62256,2434	42	61425,3205		

Çizelge 5.55. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicisine (s_{ss2}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y} + t\sqrt{v_{ss2}(\bar{y})}\right) - \left(\bar{y} - t\sqrt{v_{ss2}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk
1	61824,8992	15	38755,0601	29	61735,3910	43	62137,2658
2	38573,9343	16	39321,9710	30	63082,4438	44	62343,2505
3	38586,3243	17	38868,1263	31	62404,7250	45	62444,3714
4	62282,8922	18	62631,7642	32	62608,9859		
5	62705,7560	19	61627,6927	33	62097,6739		
6	61929,0285	20	62758,2945	34	62791,2262		
7	60903,5974	21	61965,5449	35	61439,9156		
8	62561,6782	22	62166,9411	36	61608,0996		
9	61955,3586	23	61645,8161	37	61196,7211		
10	61646,1729	24	62371,5375	38	61736,3252		
11	38554,4171	25	61671,0731	39	62730,3935		
12	38785,9826	26	62810,0143	40	62303,5078		
13	47918,5151	27	62048,8572	41	62879,2181		
14	35613,9569	28	62256,2436	42	61425,3206		

Çizelge 5.56. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicisine (s_{ss3}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y} + t\sqrt{v_{ss3}(\bar{y})}\right) - \left(\bar{y} - t\sqrt{v_{ss3}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk
1	61824,8990	15	38755,0624	29	61735,3907	43	62137,2655
2	38573,9365	16	39321,9735	30	63082,4435	44	62343,2503
3	38586,3265	17	38868,1288	31	62404,7248	45	62444,3712
4	62282,8919	18	62631,7639	32	62608,9857		
5	62705,7557	19	61627,6925	33	62097,6737		
6	61929,0283	20	62758,2941	34	62791,2259		
7	60903,5972	21	61965,5446	35	61439,9154		
8	62561,6779	22	62166,9408	36	61608,0995		
9	61955,3584	23	61645,8158	37	61196,7209		
10	61646,1728	24	62371,5372	38	61736,3250		
11	38554,4193	25	61671,0729	39	62730,3932		
12	38785,9848	26	62810,0140	40	62303,5076		
13	47918,5224	27	62048,8569	41	62879,2178		
14	35613,9597	28	62256,2433	42	61425,3204		

Çizelge 5.57. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicisine (s_{ss4}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y} + t\sqrt{v_{ss4}(\bar{y})}\right) - \left(\bar{y} - t\sqrt{v_{ss4}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk
1	61824,8993	15	38755,0597	29	61735,3910	43	62137,2658
2	38573,9340	16	39321,9706	30	63082,4439	44	62343,2505
3	38586,3240	17	38868,1259	31	62404,7251	45	62444,3715
4	62282,8923	18	62631,7642	32	62608,9859		
5	62705,7561	19	61627,6927	33	62097,6740		
6	61929,0286	20	62758,2945	34	62791,2263		
7	60903,5975	21	61965,5450	35	61439,9156		
8	62561,6783	22	62166,9411	36	61608,0997		
9	61955,3587	23	61645,8161	37	61196,7211		
10	61646,1730	24	62371,5376	38	61736,3252		
11	38554,4167	25	61671,0731	39	62730,3935		
12	38785,9823	26	62810,0144	40	62303,5079		
13	47918,5141	27	62048,8572	41	62879,2181		
14	35613,9565	28	62256,2436	42	61425,3207		

Çizelge 5.58. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicisine (s_{ss5}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y} + t\sqrt{v_{ss5}(\bar{y})}\right) - \left(\bar{y} - t\sqrt{v_{ss5}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk
1	61824,8993	15	38755,0596	29	61735,3910	43	62137,2658
2	38573,9339	16	39321,9705	30	63082,4439	44	62343,2505
3	38586,3239	17	38868,1258	31	62404,7251	45	62444,3715
4	62282,8923	18	62631,7642	32	62608,9859		
5	62705,7561	19	61627,6927	33	62097,6740		
6	61929,0286	20	62758,2945	34	62791,2263		
7	60903,5975	21	61965,5450	35	61439,9156		
8	62561,6783	22	62166,9412	36	61608,0997		
9	61955,3587	23	61645,8161	37	61196,7211		
10	61646,1730	24	62371,5376	38	61736,3252		
11	38554,4166	25	61671,0731	39	62730,3935		
12	38785,9822	26	62810,0144	40	62303,5079		
13	47918,5137	27	62048,8572	41	62879,2182		
14	35613,9564	28	62256,2436	42	61425,3207		

Çizelge 5.59. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicisine (s_{ss6}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y} + t\sqrt{v_{ss6}(\bar{y})}\right) - \left(\bar{y} - t\sqrt{v_{ss6}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk
1	61824,3516	15	38760,5600	29	61734,8508	43	62136,6815
2	38578,9989	16	39327,7837	30	63081,7649	44	62342,7066
3	38591,4594	17	38873,9695	31	62404,1505	45	62443,7350
4	62282,2018	18	62631,0764	32	62608,4521		
5	62705,1285	19	61627,1797	33	62097,1365		
6	61928,5512	20	62757,5717	34	62790,5925		
7	60903,1217	21	61964,8993	35	61439,4836		
8	62561,0393	22	62166,3309	36	61607,7052		
9	61954,8851	23	61645,2021	37	61196,3240		
10	61645,7435	24	62370,8420	38	61735,8410		
11	38559,5235	25	61670,5941	39	62729,7883		
12	38791,0725	26	62809,3330	40	62302,8991		
13	47935,4332	27	62048,2799	41	62878,5320		
14	35620,5317	28	62255,7071	42	61424,8435		

Çizelge 5.60. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicisine (s_{ss7}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y} + t\sqrt{v_{ss7}(\bar{y})}\right) - \left(\bar{y} - t\sqrt{v_{ss7}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk
1	61824,8992	15	38755,0604	29	61735,3909	43	62137,2657
2	38573,9347	16	39321,9714	30	63082,4438	44	62343,2505
3	38586,3246	17	38868,1267	31	62404,7250	45	62444,3714
4	62282,8922	18	62631,7641	32	62608,9859		
5	62705,7560	19	61627,6927	33	62097,6739		
6	61929,0285	20	62758,2944	34	62791,2262		
7	60903,5974	21	61965,5449	35	61439,9155		
8	62561,6782	22	62166,9411	36	61608,0996		
9	61955,3586	23	61645,8160	37	61196,7210		
10	61646,1729	24	62371,5375	38	61736,3252		
11	38554,4174	25	61671,0731	39	62730,3934		
12	38785,9829	26	62810,0143	40	62303,5078		
13	47918,5162	27	62048,8571	41	62879,2181		
14	35613,9573	28	62256,2435	42	61425,3206		

Çizelge 5.61. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicisine (s_{ss8}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y} + t\sqrt{v_{ss8}(\bar{y})}\right) - \left(\bar{y} - t\sqrt{v_{ss8}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk
1	61824,8993	15	38755,0596	29	61735,3910	43	62137,2658
2	38573,9339	16	39321,9705	30	63082,4439	44	62343,2505
3	38586,3239	17	38868,1258	31	62404,7251	45	62444,3715
4	62282,8923	18	62631,7642	32	62608,9859		
5	62705,7561	19	61627,6927	33	62097,6740		
6	61929,0286	20	62758,2945	34	62791,2263		
7	60903,5975	21	61965,5450	35	61439,9156		
8	62561,6783	22	62166,9412	36	61608,0997		
9	61955,3587	23	61645,8161	37	61196,7211		
10	61646,1730	24	62371,5376	38	61736,3252		
11	38554,4166	25	61671,0731	39	62730,3935		
12	38785,9822	26	62810,0144	40	62303,5079		
13	47918,5137	27	62048,8572	41	62879,2182		
14	35613,9564	28	62256,2436	42	61425,3207		

Çizelge 5.62. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicisine (s_{ss9}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y} + t\sqrt{v_{ss9}(\bar{y})}\right) - \left(\bar{y} - t\sqrt{v_{ss9}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk
1	61824,7059	15	38757,0011	29	61735,2003	43	62137,0596
2	38575,7217	16	39324,0225	30	63082,2042	44	62343,0585
3	38588,1366	17	38870,1885	31	62404,5223	45	62444,1468
4	62282,6486	18	62631,5215	32	62608,7975		
5	62705,5346	19	61627,5116	33	62097,4843		
6	61928,8601	20	62758,0394	34	62791,0026		
7	60903,4295	21	61965,3171	35	61439,7631		
8	62561,4527	22	62166,7258	36	61607,9604		
9	61955,1915	23	61645,5994	37	61196,5809		
10	61646,0214	24	62371,2921	38	61736,1543		
11	38556,2192	25	61670,9041	39	62730,1799		
12	38787,7789	26	62809,7739	40	62303,2930		
13	47924,4863	27	62048,6534	41	62878,9760		
14	35616,2773	28	62256,0543	42	61425,1522		

Çizelge 5.63. Singh ve Solanki Varyans Tahmin Edicisine (s_{ss10}^2) Ait Güven Uralığı uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y} + t\sqrt{v_{ss10}(\bar{y})}\right) - \left(\bar{y} - t\sqrt{v_{ss10}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk
1	61824,8992	15	38755,0600	29	61735,3910	43	62137,2658
2	38573,9343	16	39321,9710	30	63082,4438	44	62343,2505
3	38586,3243	17	38868,1263	31	62404,7250	45	62444,3714
4	62282,8922	18	62631,7642	32	62608,9859		
5	62705,7560	19	61627,6927	33	62097,6739		
6	61929,0286	20	62758,2945	34	62791,2262		
7	60903,5974	21	61965,5449	35	61439,9156		
8	62561,6782	22	62166,9411	36	61608,0996		
9	61955,3586	23	61645,8161	37	61196,7211		
10	61646,1729	24	62371,5375	38	61736,3252		
11	38554,4170	25	61671,0731	39	62730,3935		
12	38785,9826	26	62810,0143	40	62303,5078		
13	47918,5150	27	62048,8572	41	62879,2181		
14	35613,9569	28	62256,2436	42	61425,3206		

5.13. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicisinin Güven Aralığı

Çizelge 2.2 ve Çizelge 2.3'deki farklı $\alpha_{(yd)}$ ve $b_{(yd)}$ değerleri için Eş. (4.53)'de verilen formül ile hesaplanan kitle ortalamasına ait güven aralıklarının uzunlukları Çizelge 5.64-Çizelge 5.73'de verilmektedir.

Çizelge 5.64. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicisine (s_{yd0}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu ($\lambda = 0$)

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y} + t\sqrt{v_{yd0}(\bar{y})} \right) - \left(\bar{y} - t\sqrt{v_{yd0}(\bar{y})} \right)$							
Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk
1	56608,3909	15	57884,5554	29	56642,4615	43	56307,1888
2	57134,4864	16	58894,3057	30	55544,1492	44	57178,9938
3	57241,4669	17	58384,4833	31	56731,7316	45	55702,9468
4	54574,3950	18	54954,2746	32	57607,7397		
5	56112,5437	19	56970,8429	33	57043,6232		
6	57829,5378	20	54414,8762	34	56084,8057		
7	56828,5009	21	55082,4989	35	58026,8271		
8	55772,3624	22	55894,7497	36	58748,7248		
9	57914,5753	23	55325,9755	37	58292,3878		
10	58272,7914	24	54563,1270	38	57529,6490		
11	57166,2314	25	57545,9189	39	56525,1760		
12	57421,0168	26	55241,9036	40	56051,3978		
13	65488,4993	27	56338,3525	41	55218,1813		
14	55215,3343	28	57215,9358	42	57329,0282		

Çizelge 5.65. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicisine (s_{yd1}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu ($\lambda = 0$)

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y} + t\sqrt{v_{yd1}(\bar{y})}\right) - \left(\bar{y} - t\sqrt{v_{yd1}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk
1	56608,3908	15	57884,5552	29	56642,4615	43	56307,1888
2	57134,4862	16	58894,3055	30	55544,1492	44	57178,9938
3	57241,4667	17	58384,4831	31	56731,7316	45	55702,9468
4	54574,3949	18	54954,2746	32	57607,7397		
5	56112,5437	19	56970,8429	33	57043,6231		
6	57829,5378	20	54414,8762	34	56084,8057		
7	56828,5009	21	55082,4988	35	58026,8270		
8	55772,3624	22	55894,7497	36	58748,7248		
9	57914,5753	23	55325,9755	37	58292,3878		
10	58272,7914	24	54563,1270	38	57529,6489		
11	57166,2313	25	57545,9189	39	56525,1760		
12	57421,0167	26	55241,9036	40	56051,3978		
13	65488,4987	27	56338,3524	41	55218,1813		
14	55215,3341	28	57215,9358	42	57329,0282		

Çizelge 5.66. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicisine (s_{yd2}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu ($\lambda = 0$)

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y} + t\sqrt{v_{yd2}(\bar{y})}\right) - \left(\bar{y} - t\sqrt{v_{yd2}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk
1	56608,3908	15	57884,5554	29	56642,4615	43	56307,1888
2	57134,4863	16	58894,3057	30	55544,1492	44	57178,9938
3	57241,4669	17	58384,4833	31	56731,7316	45	55702,9468
4	54574,3950	18	54954,2746	32	57607,7397		
5	56112,5437	19	56970,8429	33	57043,6232		
6	57829,5378	20	54414,8762	34	56084,8057		
7	56828,5009	21	55082,4989	35	58026,8271		
8	55772,3624	22	55894,7497	36	58748,7248		
9	57914,5753	23	55325,9755	37	58292,3878		
10	58272,7914	24	54563,1270	38	57529,6490		
11	57166,2314	25	57545,9189	39	56525,1760		
12	57421,0168	26	55241,9036	40	56051,3978		
13	65488,4992	27	56338,3525	41	55218,1813		
14	55215,3342	28	57215,9358	42	57329,0282		

Çizelge 5.67. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicisine (s_{yd3}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu ($\lambda = 0$)

Güven Aralığı Uzunluğu							
$(\bar{y} + t\sqrt{v_{yd3}(\bar{y})}) - (\bar{y} - t\sqrt{v_{yd3}(\bar{y})})$							
Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk
1	56608,3909	15	57884,5554	29	56642,4615	43	56307,1888
2	57134,4864	16	58894,3057	30	55544,1492	44	57178,9938
3	57241,4669	17	58384,4833	31	56731,7316	45	55702,9468
4	54574,3950	18	54954,2746	32	57607,7397		
5	56112,5437	19	56970,8429	33	57043,6232		
6	57829,5378	20	54414,8762	34	56084,8057		
7	56828,5009	21	55082,4989	35	58026,8271		
8	55772,3624	22	55894,7497	36	58748,7248		
9	57914,5753	23	55325,9755	37	58292,3878		
10	58272,7914	24	54563,1270	38	57529,6490		
11	57166,2314	25	57545,9189	39	56525,1760		
12	57421,0168	26	55241,9036	40	56051,3978		
13	65488,4993	27	56338,3525	41	55218,1813		
14	55215,3343	28	57215,9358	42	57329,0282		

Çizelge 5.68. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicisine (s_{yd4}^2) Ait Güven Aralığı Uzunluğu ($\lambda = 0$)

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y} + t\sqrt{v_{yd4}(\bar{y})}\right) - \left(\bar{y} - t\sqrt{v_{yd4}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk
1	56608,3908	15	57884,5552	29	56642,4615	43	56307,1887
2	57134,4862	16	58894,3055	30	55544,1492	44	57178,9938
3	57241,4667	17	58384,4831	31	56731,7316	45	55702,9468
4	54574,3949	18	54954,2746	32	57607,7397		
5	56112,5437	19	56970,8429	33	57043,6231		
6	57829,5378	20	54414,8762	34	56084,8057		
7	56828,5009	21	55082,4988	35	58026,8270		
8	55772,3624	22	55894,7497	36	58748,7248		
9	57914,5752	23	55325,9754	37	58292,3877		
10	58272,7914	24	54563,1270	38	57529,6489		
11	57166,2312	25	57545,9189	39	56525,1760		
12	57421,0166	26	55241,9036	40	56051,3978		
13	65488,4985	27	56338,3524	41	55218,1813		
14	55215,3341	28	57215,9358	42	57329,0282		

Çizelge 5.69. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicisine (s_{yd0}^{2*}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu ($\lambda = 1$)

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y} + t\sqrt{v_{yd0}^*(\bar{y})} \right) - \left(\bar{y} - t\sqrt{v_{yd0}^*(\bar{y})} \right)$							
Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk
1	56198,5286	15	55013,4308	29	56235,6563	43	55892,8792
2	54056,7812	16	56560,0785	30	55126,1149	44	56732,9796
3	54183,2575	17	55655,3290	31	56292,0457	45	55302,3700
4	54253,5097	18	54593,2777	32	57142,6076		
5	55680,9465	19	56562,6081	33	56612,1059		
6	57402,2122	20	54092,2342	34	55650,5987		
7	56452,7695	21	54735,3319	35	57627,8949		
8	55363,3821	22	55495,8668	36	58356,8304		
9	57486,2990	23	54974,5307	37	57911,6378		
10	57866,5717	24	54240,4193	38	57111,9138		
11	54079,2226	25	57131,4881	39	56076,0742		
12	54511,5665	26	54854,3389	40	55639,9944		
13	69385,2722	27	55926,7628	41	54829,5107		
14	49495,3944	28	56773,8777	42	56926,9803		

Çizelge 5.70. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicisine (s_{ydl}^{2*}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu ($\lambda = 1$)

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y} + t\sqrt{v_{ydl}^* (\bar{y})}\right) - \left(\bar{y} - t\sqrt{v_{ydl}^* (\bar{y})}\right)$							
Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk
1	56198,5286	15	55013,4308	29	56235,6563	43	55892,8792
2	54056,7813	16	56560,0785	30	55126,1149	44	56732,9796
3	54183,2575	17	55655,3290	31	56292,0457	45	55302,3700
4	54253,5097	18	54593,2777	32	57142,6076		
5	55680,9465	19	56562,6081	33	56612,1059		
6	57402,2122	20	54092,2342	34	55650,5987		
7	56452,7695	21	54735,3319	35	57627,8949		
8	55363,3821	22	55495,8668	36	58356,8304		
9	57486,2990	23	54974,5307	37	57911,6378		
10	57866,5717	24	54240,4193	38	57111,9138		
11	54079,2226	25	57131,4881	39	56076,0742		
12	54511,5665	26	54854,3389	40	55639,9944		
13	69385,2700	27	55926,7628	41	54829,5107		
14	49495,3948	28	56773,8777	42	56926,9803		

Çizelge 5.71. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicisine (s_{yd2}^{2*}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu ($\lambda = 1$)

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y} + t\sqrt{v_{yd2}^* (\bar{y})} \right) - \left(\bar{y} - t\sqrt{v_{yd2}^* (\bar{y})} \right)$							
Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk
1	56198,5286	15	55013,4308	29	56235,6563	43	55892,8792
2	54056,7812	16	56560,0785	30	55126,1149	44	56732,9796
3	54183,2575	17	55655,3290	31	56292,0457	45	55302,3700
4	54253,5097	18	54593,2777	32	57142,6076		
5	55680,9465	19	56562,6081	33	56612,1059		
6	57402,2122	20	54092,2342	34	55650,5987		
7	56452,7695	21	54735,3319	35	57627,8949		
8	55363,3821	22	55495,8668	36	58356,8304		
9	57486,2990	23	54974,5307	37	57911,6378		
10	57866,5717	24	54240,4193	38	57111,9138		
11	54079,2226	25	57131,4881	39	56076,0742		
12	54511,5665	26	54854,3389	40	55639,9944		
13	69385,2718	27	55926,7628	41	54829,5107		
14	49495,3945	28	56773,8777	42	56926,9803		

Çizelge 5.72. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicisine (s_{yd3}^{2*}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu ($\lambda = 1$)

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y} + t\sqrt{v_{yd3}^*(\bar{y})}\right) - \left(\bar{y} - t\sqrt{v_{yd3}^*(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk
1	56198,5286	15	55013,4308	29	56235,6563	43	55892,8792
2	54056,7812	16	56560,0785	30	55126,1149	44	56732,9796
3	54183,2575	17	55655,3290	31	56292,0457	45	55302,3700
4	54253,5097	18	54593,2777	32	57142,6076		
5	55680,9465	19	56562,6081	33	56612,1059		
6	57402,2122	20	54092,2342	34	55650,5987		
7	56452,7695	21	54735,3319	35	57627,8949		
8	55363,3821	22	55495,8668	36	58356,8304		
9	57486,2990	23	54974,5307	37	57911,6378		
10	57866,5717	24	54240,4193	38	57111,9138		
11	54079,2226	25	57131,4881	39	56076,0742		
12	54511,5665	26	54854,3389	40	55639,9944		
13	69385,2721	27	55926,7628	41	54829,5107		
14	49495,3944	28	56773,8777	42	56926,9803		

Çizelge 5.73. Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta Varyans Tahmin Edicisine (s_{yd4}^{2*}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu ($\lambda = 1$)

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y} + t\sqrt{v_{yd4}^*(\bar{y})} \right) - \left(\bar{y} - t\sqrt{v_{yd4}^*(\bar{y})} \right)$							
Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk
1	56198,5286	15	55013,4309	29	56235,6563	43	55892,8792
2	54056,7813	16	56560,0784	30	55126,1149	44	56732,9796
3	54183,2576	17	55655,3290	31	56292,0457	45	55302,3700
4	54253,5097	18	54593,2777	32	57142,6076		
5	55680,9465	19	56562,6081	33	56612,1059		
6	57402,2122	20	54092,2342	34	55650,5987		
7	56452,7695	21	54735,3319	35	57627,8949		
8	55363,3821	22	55495,8668	36	58356,8304		
9	57486,2990	23	54974,5307	37	57911,6378		
10	57866,5717	24	54240,4193	38	57111,9138		
11	54079,2227	25	57131,4881	39	56076,0742		
12	54511,5666	26	54854,3389	40	55639,9944		
13	69385,2691	27	55926,7628	41	54829,5107		
14	49495,3949	28	56773,8777	42	56926,9803		

5.14. Lone ve Tailor Varyans Tahmin Edicisi Güven Aralığı

Eş. (4.56)'da verilen Lone ve Tailor varyans tahmin edicisinden yararlanılarak hesaplanan, kütüphane kullanıcı sayılarına ilişkin kitle ortalamasına ait güven aralığının uzunluğu Çizelge 5.74'de verilmektedir.

Çizelge 5.74. Lone ve Tailor Varyans Tahmin Edicisine (S_{lt}^{2**}) Ait Güven Aralığı Uzunluğu

Güven Aralığı Uzunluğu							
$\left(\bar{y} + t\sqrt{v_{lt}^{**}(\bar{y})}\right) - \left(\bar{y} - t\sqrt{v_{lt}^{**}(\bar{y})}\right)$							
Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk	Örneklem	Uzunluk
1	19844,3885	15	13434,8804	29	19840,0244	43	19859,2584
2	13431,9595	16	13478,3560	30	19513,5204	44	19960,1274
3	13319,8440	17	13415,8823	31	19936,8204	45	19823,0045
4	19536,0278	18	19613,3039	32	20037,6124		
5	19899,2643	19	18423,1337	33	19922,9812		
6	18770,5979	20	19158,8536	34	19901,7564		
7	18093,4108	21	19575,2355	35	18778,0179		
8	19510,0399	22	19676,1115	36	18870,7485		
9	19988,1711	23	19562,6931	37	18785,8014		
10	19969,8951	24	19538,1943	38	18711,5568		
11	13429,6560	25	18715,4833	39	19605,5829		
12	13462,2341	26	19452,6281	40	19512,9242		
13	12182,1599	27	19855,4831	41	19450,1424		
14	12739,3319	28	19956,3741	42	19868,8948		

Adıyaman ili Kültür ve Turizm Bakanlığına bağlı halk kütüphanelerinin kullanıcı sayılarına ilişkin kitle ortalamasının güven aralığının tahmininde; Klasik, Hirano, Das ve Tripathi, Isaki, Prasad ve Singh, Garcia ve Singh, Upadhyaya ve Singh, Chandra ve Singh, Kadılar ve  ıngı, Shabbir ve Gupta, Subramani ve Kumarapandiyar, Singh ve Solanki, Yadav, Kadılar, Shabbir ve Gupta ile Lone ve Tailor varyans tahmin edicileri kullanılmıştır.

Kitle ortalamasının güven aralığı tahmininde, güven aralıkları arasından en dar olan güven aralığı en iyi güven aralığıdır. Her bir hesaplanan güven aralığı tahminlerinin kullanıcı sayısının kitle ortalamasını içeren aralık olma olasılığı %95 olduğu için, aralık ne kadar dar olursa tahmin o kadar iyi olacaktır. Çalışmada, olası tüm 45 örneklem için 44 farklı varyans tahmin edicisinden yararlanarak toplam 1980 (45*44) güven aralığı incelenmiştir. Kütüphane kullanıcı sayılarının kitle ortalamasının güven aralığı tahminlerinden, en dar güven aralığını veren tahmin edici Lone ve Tailor varyans tahmin edicisi ( izelge 5.74) olarak hesaplanmıştır.

 rneklemlerde en dar güven aralığını belirleyebilmek için; güven aralığının üst sınır değerinden alt sınır değerinin farkı alınmıştır. Her bir varyans tahmin edici için alınan bu fark değerleri her bir örneklem için Excel programı ile filtrelenerek küçükten b y ge sıralanmıştır.

6. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Örnekleme teorisinde bugüne kadar literatürde çok çeşitli varyans tahmin edicileri önerilmiş ve önerilen tahmin ediciler de birbirileri ile etkinlikleri açısından karşılaştırılmışlardır. Bu çalışmada, literatürde yer alan bazı varyans tahmin edicilerin, *ortalamanın varyans* tahmin edicisinin kitle ortalamasının güven aralığı tahmininde kullanımı üzerine yoğunlaşmıştır. Tahmin edicilerden yararlanılarak hesaplanan güven aralıkları tahminleri bir uygulama ile karşılaştırılmıştır.

İlk olarak, BRÖ yöntemi için literatürde yer alan yardımcı değişken bilgisini kullanarak önerilen çeşitli oransal ve regresyon tahmin edicileri ile bunların etkinlik karşılaştırmaları incelenmiştir.

Yapılan literatür incelemesi sonrasında, bu tahmin edicilerin *ortalamanın varyans* tahmininde kullanılması önerilmiş ve Eş. (3.6)'da Hirano varyans tahmin edicisi örneğinden yola çıkarak teorik olarak genel bir çıkarım yapılmıştır. Bu çıkarımdan hareketle, BRÖ'de birbirinden farklı *ortalamanın varyans* tahmin edicileri hesaplanmış ve Çizelge 3.1, Çizelge 3.2, Çizelge 3.3'te formülleri ile birlikte gösterilmiştir.

Farklı varyans tahmin edicilerin kitle ortalamasının güven aralığı tahmininde kullanımı önerilmiştir. Klasik varyans tahmin edicisi kullanılarak hesaplanan güven aralığı tahmininde güven aralığı ilgilenilen değişkenin standart sapması ile örneklem büyüklüğüne bağlı olarak değişmekteydi. Ancak diğer varyans tahmin edicileri güven aralığı tahmininde kullanıldığında, güven aralığının yalnızca ilgilenilen değişkenin standart sapmasına ve örneklem büyüklüğüne bağlı olmadığı, yardımcı değişkenin ya da ilgilenilen değişkenin kitle ve örneklem değerlerine de bağlı olarak değiştiği sonucuna ulaşılmıştır.

Uygulama kısmında ise, Kültür ve Turizm Bakanlığına bağlı ve 2016 yılına ilişkin Adıyaman ili halk kütüphanelerinin, kitap ve kullanıcı sayıları üzerinde bir simülasyon çalışması yapılmıştır. $N=10$ olmak üzere yerine koymadan ve $n=8$ olacak şekilde, BRÖ ile olası tüm 45 örneklem çekilmiş ve her örneklem için 44 adet farklı varyans tahmin edicileri hesaplanmıştır. Bu tahmin edicilerin beklenen değerleri ve HKO'ları da verilmiştir. Klasik tahmin edici yansız olduğundan $E(s_y^2) = S_y^2 = 1129990976$ olduğu görülmektedir. Diğer tahmin ediciler yanlıdır.

HKO'lar karşılaştırıldığında, tahmin edicilerden HKO'su en küçük olan ve en etkin tahmin edici Gupta ve Shabbir ($S_{gs(0)}^2$) olarak hesaplanmıştır. Her bir örneklem için 44 varyans tahmin ediciden yararlanılarak hesaplanan güven aralığı tahmin değerlerinin uzunlukları da hesaplanmıştır.

1980 güven aralığı tahmininde uzunluk değeri en küçük olan yani en dar güven aralığını Lone ve Tailor varyans tahmin edicisi (Çizelge 5.74) vermiştir.

Bu kitle için en küçük HKO'ya sahip varyans tahmin edici en dar güven aralığı sonucunu vermemiştir. Yani en etkin tahmin edici en dar güven aralığına sahip değildir. Zira burada HKO,

$$HKO(s_y^2) = \frac{\sum_{i=1}^{45} (s_y^2 - S_2^2)^2}{45}$$

ile bulunmuştur. Formülünden de anlaşılacağı üzere HKO'nun küçük olması; varyans tahmin edicinin kitle varyansından farkının toplam kare değerinin küçük olmasına bağlıdır. Yani varyans tahmin edicisinin kitle varyansına yakın olması ile ilgilidir. Güven aralığının uzunluğunda ise, her bir örneklemde ortalamalar ve n değişmemekte, varyanslar değişmektedir. Yani güven aralığının uzunluğu varyans tahmin edicilerinin değerlerine bağlı olarak değişmektedir. Lone ve Tailor varyans tahmin edicisinden yararlanılarak oluşturulan güven aralığı uzunluğu,

$$v_{lt}^{**}(\bar{y}) = \frac{S_{lt}^{2**}}{n} \text{ olmak üzere,}$$

$$\left(\bar{y} + t\sqrt{v_{lt}^{**}(\bar{y})} \right) - \left(\bar{y} - t\sqrt{v_{lt}^{**}(\bar{y})} \right)$$

formülü ile hesaplanmıştır. Formülden de anlaşılacağı üzere güven aralığının darlığı, her bir örneklemde örneklem ortalaması ve n aynı olduğundan varyans tahmin edicisinin küçük olması ile ilgilidir.

Bu tez çalışmasında BRÖ yöntemi için yapılan ve literatürde yer alan çeşitli varyans tahmin edicilerinin kullanılarak hesaplanan güven aralığı tahminlerinin, tabakalı örnekleme yöntemi gibi diğer örnekleme yöntemleri içinde yapılabileceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] Serper, M., Aytaç, Ö., *Örnekleme*, Filiz Kitabevi, Ankara, **1988**.
- [2] Çingı H., *Örnekleme Kuramı*, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Basımevi, Ankara, **2009**.
- [3] Cingi, H., Kadılar, C., *Advances in Sampling Theory-Ratio Method of Estimation*, Bentham Science Publisher, **2009**.
- [4] Sidelel E. B., Orwa, G. O. and Otieno, R. O., Variance estimation in stratified random sampling in the presence of two auxiliary random variables, *International Journal of Science and Research*, 3(9), 2453–2459, **2014**.
- [5] Satıcı E., Kadılar, C., Kayıp gözlem olduğunda kitle ortalamasının tahmini, *A.Ü. Bilim ve Teknoloji Dergisi*, 10(2), 549–556, **2009**.
- [6] Özel G., Çingı H., Oğuz, M., Separate ratio estimators for the population variance in stratified random sampling, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 43(22), 4766–4779, **2014**.
- [7] Karakülâh, Ü. H., *Basit Rastgele Örnekleme Yönteminde Oransal Tahmin Ediciler*, Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, **2006**.
- [8] Ünyazıcı, Y., *Bazı Örnekleme Tasarımlarında Varyans Tahmin Yöntemleri*, Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2008.
- [9] Isaki, C., Variance estimation using auxiliary information, *Journal of the American Statistical Association*, 78(381)117-123, **1983**.
- [10] Kadılar, C., Cingi, H., Ratio estimators for the population variance in simple and stratified random sampling, *Applied Mathematics and Computations*, 173(2), 1047–1059, **2005**.
- [11] Garcia, M. R., Cebrian, A. A., Repeated substitution method: The ratio estimator for the population variance, *Metrika*, 43(1), 101–105, **1996**.
- [12] Misra, P., On Estimation of population variance using auxiliary information, *International Journal of Mathematics and Statistics Invention(IJMSI)*, 3(8), 23–28, **2015**.
- [13] Panda, K.B., Sahoo, Improved ratio-type exponential estimator for estimating population variance using auxiliary information, *International Journal of Statistics and Systems*, 11(2), 187–195, **2016**.
- [14] Chandra, P., Singh, P. H., A family of estimators for population variance using the knowledge of kurtosis of auxiliary variable in sample surveys, *Statistics in Transition*, 7(1), 27–43, **2005**.
- [15] Kadılar, C., Cingi, H., Improvement in variance estimation in simple random

sampling, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 36(11), 2075–2081, **2007**.

- [16] Gupta, S., Shabbir, J., Variance estimation in simple random sampling using auxiliary information, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 37(1), 57–67, **2008**.
- [17] Singh, H. P., Solanki, R. S., A new procedure for variance estimation in simple random sampling using auxiliary information, *Statistical Papers*, 54(2), 479–497, **2013**.
- [18] Shabbir, J., Gupta, S., Some estimators of finite population variance of stratified sample mean, *Communication in Statistics - Theory and Methods*, 39(16), 3001–3008, **2010**.
- [19] Subramani, J., Kumarapandiyan, G., Estimation of population mean using co-efficient of variation and median of an auxiliary variable, *International Journal of Probability and Statistics*, 1(4), 111–118, **2012**.
- [20] Yadav, S. K., Kadılar, C., Shabbir, J., Gupta, S., Improved family of estimators of population variance in simple random sampling, *Journal of Statistical Theory and Practice*, 9(2), 219–226, **2015**.
- [21] Searls, D. T., The utilization of a known coefficient of variation in the estimation procedure, *Journal of the American Statistical Association*, 59(308), 1225–1226, **1964**.
- [22] Lone H. A., Tailor, R., Estimation of population variance in successive sampling, *Journal of Statistics and Management Systems*, 20(1), **2017**.
- [23] Yamane, T., *Temel Örnekleme Yöntemleri*, (çev:Esin, A., Bakır, M. A., Aydın, C., Gürbüzel, E.), Literatür Yayıncılık, Birinci Basım, İstanbul, **2001**.
- [24] Özdemir, Y. A., Şahin Tekin, S.T., Esin, A., *Çözümlü Örneklerle Örnekleme Yöntemlerine Giriş*, Seçkin Yayıncılık, **2015**.
- [25] Çakıcı, M., Oğuzhan, A., Özdil, T., *İstatistik*, Ekin Yayınevi, Bursa, **2015**.

EKLER

EK1

Adıyaman İlinden Seçilebilecek Tüm Mümkün Örneklemelere İlişkin Betimsel İstatistikler

Örneklem	Kitap Sayısı (x)				Kullanıcı Sayısı (y)			
	$\bar{x}$	$X_{\min}$	$X_{\max}$	S_x^2	$\bar{y}$	$Y_{\min}$	$Y_{\max}$	S_y^2
1	16485,50	5359	43312	167035858,6	27116,13	2579	105133	1318796841
2	11756,00	5359	26727	55979090,9	14039,63	521	48669	354898137,1
3	11116,38	5359	26727	55507870,0	14128,5	521	48669	353105084
4	15421,25	5359	43312	181689291,1	26651,13	521	105133	1344973909
5	16117,13	5359	43312	174952127,6	26325,38	521	105133	1360076237
6	13885,38	5359	43312	160675304,0	20860,75	521	105133	1319888604
7	12743,88	5359	43312	160671716,4	16849,88	521	105133	1276835299
8	15251,75	5359	43312	176135631,9	22611,13	521	105133	1354444275
9	16817,13	5476	43312	160342563,6	27111,63	521	105133	1320822968
10	16965,63	6664	43312	156669479,7	27368,88	2579	105133	1305717101
11	11796,88	5359	26727	55723102,4	14122,25	521	48669	353236489,4
12	11812,25	5359	26727	55617917,6	13802,75	521	48669	358883423,6
13	9565,13	5359	17882	19408066,4	8657,625	521	39595	160624852
14	10670,75	5359	26727	50205250,8	9791,875	521	48669	251124391
15	12073,00	5359	26727	53093485,1	14418,88	521	48669	346114057
16	12236,13	5476	26727	50803000,4	14292,38	521	48669	349372877,7
17	12221,50	5359	26727	51030692,9	14676,13	2579	48669	338471527
18	15436,63	5359	26727	181456735,4	26331,63	521	105133	1359770501

Adıyaman İlinden Seçilebilecek Tüm Mümkün Örneklemelere İlişkin Betimsel İstatistikler (Devam)

Örneklem	Kitap Sayısı (x)				Kullanıcı Sayısı (y)			
	$\bar{x}$	$X_{\min}$	$X_{\max}$	S_x^2	$\bar{y}$	$y_{\min}$	$y_{\max}$	S_y^2
19	13189,50	5359	43312	163862709,7	21186,5	521	105133	1308855079
20	14295,13	5359	43312	185500580,7	22320,75	521	105133	1366872615
21	15697,38	5359	43312	176772175,4	26947,75	521	105133	1329356899
22	15860,50	5476	43312	173130316,6	26821,25	521	105133	1336238355
23	15845,88	5359	43312	173479166,7	27205	2579	105133	1314347391
24	15380,38	5359	43312	182283899,7	26568,5	521	105133	1349001724
25	13870,00	5359	43312	160853344,3	21180,25	521	105133	1309087313
26	14975,63	5359	43312	180771494,6	22314,5	521	105133	1367121053
27	16377,88	5359	43312	169861989,6	26941,5	521	105133	1329671437
28	16541,00	5476	43312	165966401,4	26815	521	105133	1336551085
29	16526,38	5359	43312	166337999,7	27198,75	2579	105133	1314665603
30	14991,00	5359	43312	180554599,4	21995	521	105133	1378750670
31	16393,25	5359	43312	169595815,4	26622	521	105133	1344680086
32	16556,38	5476	43312	165694494,6	26495,5	521	105133	1351467353
33	16541,75	5359	43312	166066606,8	26879,25	2579	105133	1329862119
34	16076,25	5359	43312	175611750,8	26242,75	521	105133	1364042532
35	14146,13	5359	43312	156915289,0	21476,88	521	105133	1297179557
36	14309,25	5476	43312	153851824,8	21350,38	521	105133	1302479148

Adıyaman İlinden Seçilebilecek Tüm Mümkün Örneklemelere İlişkin Betimsel İstatistikler
(Devam)

Örneklem	Kitap Sayısı (x)				Kullanıcı Sayısı (y)			
	$\bar{x}$	$X_{\min}$	$X_{\max}$	S_x^2	$\bar{y}$	$y_{\min}$	$y_{\max}$	S_y^2
37	14294,63	5359	43312	154148818,8	21734,13	2579	105133	1285386923
38	13829,13	5359	43312	161303021,8	21097,63	521	105133	1312081915
39	15414,88	5476	43312	172659927,6	22484,63	521	105133	1360071826
40	15400,25	5359	43312	172993881,1	22868,38	2579	105133	1341984702
41	14934,75	5359	43312	181324469,1	22231,88	521	105133	1370329865
42	16802,50	5359	43312	160723392,3	27495,38	3591	105133	1298677304
43	16337,00	5359	43312	170545974,3	26858,88	521	105133	1333754091
44	16500,13	5476	43312	166665626,7	26732,38	521	105133	1340609849
45	16060,88	5359	43312	175866784,7	26562,25	521	105133	1349310844

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı :Ekin Gözde ÖZKAN
Doğum Yeri :Altındağ
Medeni Hali :Evli
E-posta :ekingozde86@hotmail.com
Adresi :Kültür ve Turizm Bakanlığı, Strateji Geliştirme Başkanlığı
Ulus/ANKARA

Eğitim

Lise: :Mamak Anadolu Lisesi
Lisans :Hacettepe Üniversitesi, İstatistik Bölümü
Yüksek Lisans :

Yabancı Dil ve Düzeyi

İngilizce : 85 (YDS)

İş Deneyimi

Aralık 2011-... Kültür ve Turizm Bakanlığı, Strateji Geliştirme Başkanlığı

Deneyim Alanları

-

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi

-

Tezden Üretilmiş Yayınlar

-

Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar-



HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS/DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI BAŞKANLIĞI'NA

Tarih: 03/07/2018

Tez Başlığı / Konusu: BASİT RASTGELE ÖRNEKLEME YÖNTEMİNDE KİTLE VARYANS TAHMİN EDİCİLERİNİN KİTLE ORTALAMASININ GÜVEN ARALIKLARINDA KULLANILMASI

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 143 sayfalık kısmına ilişkin, 03/07/2018 tarihinde tez danışmanım tarafından *Turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı %5 'tir.

Uygulanan filtrelemeler:

- 1- Kaynakça hariç
- 2- Alıntılar hariç/~~dahil~~
- 3- 5 kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orjinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Tarih ve İmza

Adı Soyadı: EKİN GÖZDE ÖZKAN

Öğrenci No: N14121276

Anabilim Dalı: İstatistik

Programı: İstatistik Yüksek Lisans Programı

Statüsü: ☒ Y.Lisans ☐ Doktora ☐ Bütünleşik Dr.

03.07.2018

DANIŞMAN ONAYI

UYGUNDUR.

Prof. Dr. Hülya ÇINGİ

(Unvan, Ad Soyad, İmza)