



**α -BASKAKOV-DURRMEYER TİP OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM
ÖZELLİKLERİ**

Kübra BAŞOL

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

NİSAN 2021

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Kübra BAŞOL

09/04/2021

α -BASKAKOV-DURRMEYER TİP OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ
(Yüksek Lisans Tezi)

Kübra BAŞOL

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Nisan 2021

ÖZET

Bu çalışmada, bir Baskakov-Durrmeyer tip operatörler dizisinin yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Bu tez birinci bölüm giriş olmak üzere üç bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde lineer operatör dizilerinin temel kavramları ve yaklaşıma dair temel teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde α -Baskakov-Durrmeyer tip operatörler dizisinin yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Korovkin tip teorem yardımıyla düzgün yakınsaklığı gösterilmiştir. Ayrıca süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım derecesine ait bir oran verilmiştir.

Bilim Kodu : 20404
Anahtar Kelimeler : α -Baskakov tip operatörler, süreklilik modülü, yaklaşım hızı
Sayfa Adedi : 55
Danışman : Prof. Dr. İsmet YÜKSEL

APPROXIMATION PROPERTIES OF α -BASKAKOV-DURRMEYER TYPE
OPERATORS

(M. Sc. Thesis)

Kübra BAŞOL

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

April 2021

ABSTRACT

In this work, the approximation properties of Baskakov-Durrmeyer type operator sequences were investigated. This thesis consists of three chapters, the first chapter is the introduction. In the second chapter, basic concepts of linear operator sequences and basic theorems about the approach are given. In the third chapter, the approximation properties of α -Baskakov-Durrmeyer type operators have been examined. The uniform convergence of these operators in the sense of Korovkin type theorem is proven. Also with the help of the continuity module, a rate of approximation degree is given.

Science Code : 20404

Key Words : α -Baskakov type operators, modulus of continuity, rate of convergence

Page Number : 55

Supervisor : Prof. Dr. İsmet YÜKSEL

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmalarım süresince bilgi ve tecrübesiyle yardımcı olan, desteğini asla esirgemeyen ve iyi bir çalışma ortamı sağlayan danışmanım Sayın Prof. Dr. İsmet YÜKSEL'e en içten teşekkürlerimi sunarım. Her zaman destek olan aileme teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. TANIM VE TEOREMLER.....	3
2.1. Lineer Pozitif Operatörler	3
2.2. Lineer Pozitif Operatörlerin Yaklaşım Hızı	5
2.3. $C[a,b]$ Uzayında Korovkin Teoremi	7
2.3.1. Weierstrass yaklaşım teoremi	7
2.3.2. Korovkin teoremi	8
2.4. Ağırlıklı Uzaylarda Yaklaşım.....	8
2.5. Steklov Fonksiyonu	10
3. α -BASKAKOV-DURRMEYER TİP OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ.....	13
3.1. α -Baskakov Tip Operatörler	13
3.2. α –Baskakov-Durrmeyer Tip Operatörlerin Yaklaşımı	27
3.3. Ağırlıklı Uzaylarda Korovkin Teoremi.....	36
3.4. L_n, α * Operatörünün Noktasal Yaklaşımı	40
4. SONUÇ VE ÖNERİLER	51
KAYNAKLAR	53
ÖZGEÇMİŞ	55

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
$\ f\ _{\rho}$	$B_p[0, \infty)$ uzayında tanımlanan norm
$\ \cdot\ _{C_B}$	$C_B[0, \infty)$ uzayındaki $\ \cdot\ _{C_B} = \sup_{x \geq 0} \cdot $ ile tanımlı olan norm
$\ \cdot\ _{C_B^2}$	$\ f\ _{C_B^2} = \ f\ _{C_B} + \ f'\ _{C_B} + \ f''\ _{C_B}$ ile tanımlı olan norm
$\ \cdot\ _{C[a,b]}$	$C[a, b]$ uzayındaki $\ \cdot\ _{C[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} \cdot $ ile tanımlı olan norm
$B_{\rho}[0, \infty)$	$ f(x) \leq M_f \rho(x)$ şartını sağlayan fonksiyonlar uzayı
$C_B[0, \infty)$	$[0, \infty)$ aralığında sınırlı ve sürekli reel değerli fonksiyonların uzayı
$C_B^2[0, \infty)$	$f, f', f'' \in C_B[0, \infty)$ olan fonksiyon uzayı
$C_{\rho}[0, \infty)$	$B_{\rho}[0, \infty)$ uzayındaki sürekli fonksiyonlar uzayı
$C_{\rho}^*[0, \infty)$	$\left\{f \in C_{\rho}: \lim_{ x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} \in \mathbb{R}\right\}$ alt uzayı
$L_{n,\alpha}(f, x)$	α –Baskakov Operatörü
$L_{n,\alpha}^*(f, x)$	α –Baskakov-Durrmeyer Tip Operatörler
$f_n \rightrightarrows f$	(f_n) fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaması
$C[a, b]$	$[a, b]$ aralığındaki sürekli fonksiyonların uzayı
$\omega(f; \delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$C[0, \infty)$	$[0, \infty)$ aralığında sürekli fonksiyonların uzayı
$L(f, x)$	L operatörünün f fonksiyonuna uygulanması
$\rho(x)$	Ağırlık fonksiyon

1. GİRİŞ

Gerçel değerli sürekli fonksiyonlara daha basit fonksiyonlar yardımıyla yaklaşılması, son iki yüzyıl içinde çok sayıda araştırmacının dikkatini çekmiştir. Cebirsel polinomlar ile sürekli fonksiyonlara yaklaşım teorisi ilk olarak 1854 yılında, P. L. Chebyshev'in buhar makinesi ile ilgili ortaya koyduğu aşağıdaki problemi ifade etmesi ile başlamıştır; "Bir $[a, b]$, kapalı aralığında tanımlı sürekli bir f fonksiyonu ve pozitif bir n sayısı verilsin. Acaba f fonksiyonunun, $[a, b]$ aralığında herhangi bir noktada maksimum hatasını kontrol edebilecek şekilde, derecesi n 'yi geçmeyen bir p polinomu ile gösterebilir miyiz?"[1].

Fonksiyon uzaylarında "sürekli fonksiyonlara yaklaşım" problemi ilk defa Weierstrass tarafından ele alınmıştır. Bundan dolayı yaklaşım teorisinde en önemli teoremlerden biri Weierstrass yaklaşım teoremidir. 1885 yılında Weierstrass $[a, b]$ aralığında sürekli her f fonksiyonuna bir polinomla yaklaşabileceğini ifade etmiştir [2]. Ancak Weierstrass bu polinomların ne tür polinomlar olduğu ve bu polinomların bulunma koşulları hakkında herhangi bir bilgi vermemiştir. Daha sonra birçok matematikçi bu teoremden ifade edilen polinomları açık bir şekilde elde etmek için çalışmışlardır. Bu polinomların açık bir formu 1912 yılında Bernstein tarafından;

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (n = 1, 2, 3 \dots) \quad (1.1)$$

biçiminde verilmiştir [3].

1951 yılında Bohman toplam biçimindeki lineer pozitif bir operatörler dizisinin $[0,1]$ kapalı aralığında sürekli bir fonksiyona düzgün yakınsaması için yalnızca üç koşulu gerçeklemesi gerektiğini ifade ve ispat etmiştir [4]. Daha sonra 1953 yılında Korovkin, Bohman tarafından elde edilen bu ifadeyi lineer pozitif operatör dizisine genelleştirmiştir [5]. Bohman ve Korovkin teoremleri lineer pozitif operatörler teorisinin gelişmesine büyük katkı sağlamıştır. Lineer pozitif operatörler dizisinin yaklaşım koşulları, Korovkin tarafından verilmiştir. Bohman (1952) ve Korovkin (1953), Bernstein polinomlarından yola çıkarak, lineer pozitif operatörler dizisinin sürekli fonksiyonlara düzgün yakınsaması ile ilgili çok önemli bir teorem vermişlerdir. Sonlu aralıkta düzgün yakınsamanın gerçekleşmesi için sadece üç koşulun incelenmesinin yeterli olduğu bu teoremden ifade

edilmiştir. Bu teorem doğrultusunda birçok yeni lineer pozitif operatörler dizisi tanımlanarak yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Sınırsız aralıklarda yaklaşım problemi de ağırlıklı uzaylarda araştırılmıştır. Ağırlıklı uzaylarda yaklaşım koşulları ve Korovkin tip teorem Gadjiev tarafından verilmiştir [6,7].

Bu tezde bir α –Baskakov-Durrmeyer tip operatörler dizisinin yaklaşım özellikleri incelenecektir [8]. Bu operatörler;

$$P_{n,k}^{\alpha}(x) = \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}} \left\{ \frac{\alpha x}{1+x} \binom{n+k-1}{k} + (\alpha - 1)(1+x) \binom{n+k-3}{k-2} + (1-\alpha)x \binom{n+k-1}{k} \right\} \quad (1.2)$$

$$P_{n,k}(t) = \frac{1}{B(k+1,n)} \frac{t^k}{(1+t)^{(n+k+1)}} \quad (1.3)$$

Baz fonksiyonları ve $[0, \infty)$ aralığı üzerinde $P_{n,k}f$ çarpım fonksiyonu integrallenebilir olan bir f fonksiyonu yardımıyla,

$$L_{n,\alpha}^*(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \int_0^{\infty} P_{n,k}(t) f(t) dt \quad (1.4)$$

biçiminde tanımlanmıştır.

Verilen operatör dizisi için $\alpha = 1$ alınırsa operatör Baskakov-Durrmeyer Operatörüne dönüşür [9,10].

Bu tez birinci bölüm giriş olmak üzere üç bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde lineer operatör dizilerinin temel kavramları ve yaklaşıma dair temel teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde α –Baskakov-Durrmeyer tip operatörler dizisinin yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

2. TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, lineer pozitif operatörlerin tanımı, özellikleri ve yaklaşım hızı ile ilgili tanım ve lemmalara yer verilmiştir.

2.1. Lineer Pozitif Operatörler

Bu tanım ve lemmalar [11,12] de verilmiştir.

2.1.1. Tanım

X ve Y normlu lineer fonksiyon uzayları olsun. Eğer X uzayından alınmış herhangi f fonksiyonuna Y uzayında bir g fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralı varsa bu L kuralına X uzayından Y uzayına bir operatör denir. $f \in X$, $g \in Y$ ve x elemanı g fonksiyonunun tanım kümesine ait olmak üzere;

$$L(f)(x) = g(x) \quad (2.1)$$

ya da daha açık bir şekilde ifade edecek olursak; t değişkeni f fonksiyonunun x değişkeni de, g fonksiyonunun tanım kümesine ait olmak üzere;

$$L(f(t); x) = L(f; x) = g(x) \quad (2.2)$$

şeklinde gösterilir.

2.1.2. Tanım

$L : X \rightarrow Y$ bir operatör olsun. Eğer L operatörü her $f_1, f_2 \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için;

$$L(\alpha f_1 + \beta f_2) = L(\alpha f_1; x) + L(\beta f_2; x) \quad (2.3)$$

koşulunu sağlıyorsa, L operatörüne lineer operatör denir.

2.1.3. Tanım

$$X^+ = \{f: f(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}\} \text{ ve } Y^+ = \{g: g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}\} \quad (2.4)$$

iki fonksiyon uzayı olsun. $L: X \rightarrow Y$ operatörü için $L(X^+) \subset Y^+$ koşulu sağlanıyorsa, L operatörüne pozitif operatör denir.

2.1.4. Tanım

Lineerlik ve pozitiflik koşullarını sağlayan L operatörüne, lineer pozitif operatör denir.

2.1.5. Önerme

$L: X \rightarrow Y$ lineer pozitif bir operatör olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

i. $f, g \in X$ olmak üzere $\forall t$ için

$$f(t) \leq g(t) \text{ ise } L(f(t); x) \leq L(g(t); x) \quad (2.5)$$

Buna L lineer pozitif operatörünün ‘monotonluk özelliği’ denir.

$$\text{ii. } |L(f; x)| \leq L(|f|; x) \quad (2.6)$$

Şimdi daha sonra kullanacağımız temel tanımları verelim.

2.1.6. Tanım

$A \subset \mathbb{R}$ ve $F(A)$, A üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların kümesi olsun. $s: \mathbb{N} \rightarrow F(A)$ şeklinde tanımlanan s fonksiyonuna bir fonksiyon dizisi denir ve $s = (f_n)$ ile gösterilir.

2.1.7. Tanım

(f_n) , $A \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. (f_n) dizisinin f fonksiyonuna A üzerinde noktasal yakınsak olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ ve her bir $n > n_0$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak biçimde en az bir n_0 sayısının var olmasıdır [10]. Burada bulunan n_0 sayısı sadece ε sayısına bağlı olması durumunda (f_n) dizisi f ye A üzerinde düzgün yakınsaktır denir ve $f_n \Rightarrow f$ ile gösterilir.

2.1.8. Tanım

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $L_n(f; x)$, L_n operatörünün f ' ye uygulandığını ve sonucun x 'e bağlı olduğunu gösterir. $L_n(f; x)$ 'e bir operatör dizisi denir ve (L_n) ile gösterilir.

2.1.9. Tanım

Kapalı bir $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli tüm reel değerli fonksiyonlardan oluşan lineer uzayına $C[a, b]$ fonksiyon uzayı denir. Bu uzaydaki norm:

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlanır. Bu normla birlikte $C[a, b]$, lineer normlu bir uzaydır.

2.2. Lineer Pozitif Operatörlerin Yaklaşım Hızı

Yaklaşım teorisinin bir diğer önemli problemi yaklaşım hızıdır. Yaklaşım hızı, C sabiti n doğal sayısından bağımsız bir sabit, $n \rightarrow \infty$ iken $\varepsilon_n \rightarrow 0$ olmak üzere;

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq C\varepsilon_n \quad (2.8)$$

eşitsizliğini gerçekleyen ε_n dizisinin bulunması ile belirlenir.

Şimdi yaklaşım hızı kavramıyla ilgili hesaplamalar yapmak için süreklilik modülü kavramını tanıyalım.

2.2.1. Tanım

$f \in C[a, b]$ olsun. $\delta > 0$ reel sayısı için,

$$\omega(f; \delta) = \sup_{\substack{t, x \in [a, b] \\ |t-x| \leq \delta}} |f(t) - f(x)| \quad (2.9)$$

biçiminde tanımlanan $\omega(f, \delta)$ fonksiyonuna, f fonksiyonunun süreklilik modülü denir. Süreklilik modülü aşağıdaki özellikleri gerçekler.

$$\text{i. } \omega(f; \delta) \geq 0 \quad (2.10)$$

$$\text{ii. } \delta_1 \leq \delta_2 \text{ ise } \omega(f; \delta_1) \leq \omega(f; \delta_2) \quad (2.11)$$

$$\text{iii. } \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f, \delta) = 0 \quad (2.12)$$

$$\text{iv. Her } m \in \mathbb{N} \text{ için } \omega(f; m\delta) \leq m\omega(f; \delta) \quad (2.13)$$

$$\text{v. Her } \lambda \in \mathbb{R}^+ \text{ için } \omega(f; \lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(f; \delta) \quad (2.14)$$

$$\text{vi. } |f(t) - f(x)| \leq \omega(f; |t - x|) \quad (2.15)$$

$$\text{vii. } |f(t) - f(x)| \leq \left(\frac{|t-x|}{\delta} + 1 \right) \omega(f; \delta) \quad (2.16)$$

2.2.2. Tanım

$f \in [0, \infty)$ ve $\delta \in [0, \infty)$ olmak üzere f fonksiyonunun ikinci süreklilik modülü;

$$\omega_2(f; \sqrt{\delta}) = \sup_{0 < h < \sqrt{\delta}} \sup_{x \in R} |f(x) - 2f(x+h) + f(x+2h)| \quad (2.17)$$

şeklindedir.

2.3. $C[a,b]$ Uzayında Korovkin Teoremi

1885 yılında Weierstrass $[a,b]$ aralığında sürekli her f fonksiyonuna bir polinomla yaklaşılabileceğini aşağıdaki gibi vermiştir.

2.3.1. Weierstrass yaklaşım teoremi

Her $\varepsilon > 0$ ve $f \in C[a,b]$ için öyle bir P polinomu vardır öyle ki her $x \in [a,b]$ için $|p(x) - f(x)| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır. Başka bir ifadeyle kapalı ve sonlu $[a,b]$ aralığında sürekli her f fonksiyonu için $[a,b]$ aralığında f fonksiyonuna düzgün yakınsayan bir (P_n) polinom dizisi vardır [2].

1951 yılında H. Bohmann, toplam şeklinde lineer pozitif operatör dizisinin $[0,1]$ aralığında sürekli fonksiyonlarına yaklaşım problemini incelemiştir.

H. Bohmann [4] göstermiştir ki $x \in [0,1]$, $0 \leq a_{n,k} \leq 1$ ve $k < r$ için $a_{n,k} < a_{n,r}$ ve $P_{n,k}(x)$ bir polinom dizisi;

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f(a_{n,k}) P_{n,k}(x); \quad P_{n,k}(x) \geq 0 \quad (2.18)$$

Lineer pozitif operatör dizisinin, $n \rightarrow \infty$ için $[0,1]$ aralığında sürekli f fonksiyonuna düzgün yakınsak olabilmesi için gerekli ve yeter koşul üç tanedir. Bunlar;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(1; x) - 1\|_{C[0,1]} = 0 \quad (2.19)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(t; x) - x\|_{C[0,1]} = 0 \quad (2.20)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(t^2; x) - x^2\|_{C[0,1]} = 0 \quad (2.21)$$

şeklinde ifade edilir.

H. Bohmann'ın araştırdığı operatörlerin değeri, f fonksiyonunun $[0,1]$ aralığının dışındaki değerlerden bağımsızdır. 1953 yılında P. P. Korovkin, H. Bohmann'ın teoremini daha genel bir halde vermiştir.

2.3.2. Korovkin teoremi

$\{L_n\}$ lineer pozitif operatörler dizisi olsun. $\alpha_n(x)$, $\beta_n(x)$ ve $\gamma_n(x)$, $[a, b]$ 'de düzgün olarak sifıra yakınsak olmak üzere $\forall x \in [a, b]$ için;

$$L_n(1; x) = 1 + \alpha_n(x) \quad (2.22)$$

$$L_n(t; x) = x + \beta_n(x) \quad (2.23)$$

$$L_n(t^2; x) = x^2 + \gamma_n(x) \quad (2.24)$$

koşulları sağlanıyorsa bu durumda $L_n(f; x)$, $[a, b]$ aralığı üzerinde $f(x)$ e düzgün olarak yakınsar. Burada f , $[a, b]$ de sürekli, a da soldan, b de sağdan sürekli ve $\mathbb{R}$ de sınırlı ve sürekli fonksiyondur [13].

2.4. Ağırlıklı Uzaylarda Yaklaşım

Korovkin teoremi sınırsız aralıklarda geçersizdir. Aralık sınırsız alındığında yaklaşım problemini çözmek için ağırlıklı uzaylar tanımlanmıştır. Bu yüzden sınırsız aralıklarda Korovkin teoremi ağırlıklı uzaylarda incelenmiştir. Bu bölümde ağırlıklı uzayların tanım ve teoremleri verilmiştir.

Korovkin teoremi reel eksenin sınırlı ve kapalı alt aralıklarında verilmiştir. Reel eksenin tamamında veya sınırsız alt aralıklarında yaklaşım koşullarını 1976 yılında A.D. Gadjiev vermiştir [6,7].

Pozitif reel eksen üzerinde tanımlı fonksiyon uzayları için Gadjiev' in tanım ve teoremleri aşağıdaki gibidir [6,7,11].

2.4.1. Tanım

$\varphi(x)$ pozitif reel ekseninde sürekli, monoton artan bir fonksiyon olmak üzere $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon ve $\rho(x) = 1 + [\varphi(x)]^2$ olsun. M_f , f fonksiyonuna bağlı bir sabit olmak üzere,

$$|f(x)| \leq M_f \rho(x) \quad (2.25)$$

eşitsizliğini sağlayan pozitif reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonların uzayı $B_\rho[0, \infty)$ ve $B_\rho[0, \infty)$ uzayındaki sürekli fonksiyonların uzayı ise $C_\rho[0, \infty)$ ile gösterilir. ρ ya ağırlık fonksiyonu $B_\rho[0, \infty)$ ve $C_\rho[0, \infty)$ uzaylarına da ağırlıklı uzay denir. Bu uzaylar;

$$\|f\|_\rho = \sup \left\{ \frac{|f(x)|}{\rho(x)} : x \in [0, \infty) \right\} \quad (2.26)$$

normu ile birer normlu uzaydır. $C_\rho[0, \infty)$ uzayının;

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{\rho(x)} \in \mathbb{R} \quad (2.27)$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların kümesi $C_\rho^*[0, \infty)$ ile gösterilir.

$C_\rho^*[0, \infty)$ ve $C_\rho[0, \infty)$ uzayları $B_\rho[0, \infty)$ uzayının alt uzaylarıdır.

2.4.2. Önerme

$C_\rho[0, \infty)$ uzayında tanımlı L_n lineer pozitif bir operatörün $C_\rho[0, \infty)$ uzayından $B_\rho[0, \infty)$ uzayına dönüşüm yapması için gerek ve yeter şart;

$$\|L_n\|_\rho \leq M \quad (2.28)$$

olacak şekilde $M > 0$ sayısının bulunmasıdır.

2.4.3. Önerme

$L: C_\rho[0, \infty) \rightarrow B_\rho[0, \infty)$ lineer pozitif bir operatör olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlik;

$$\|L\|_{C_\rho \rightarrow B_\rho} = \|L(\rho)\|_\rho \quad (2.29)$$

gerçeklenir.

2.4.4. Teorem

Her $n \in \mathbb{N}$ için $L: C_\rho[0, \infty) \rightarrow B_\rho[0, \infty)$ lineer pozitif bir operatör olmak üzere,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(\varphi^v) - \varphi^v\|_\rho = 0; \quad v = 0, 1, 2 \quad (2.30)$$

koşulunu sağlamasına rağmen,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f^*) - f^*\|_\rho \geq 1 \quad (2.31)$$

olacak şekilde bir $f^* \in C_\rho[0, \infty)$ bulunabilir.

2.5. Steklov Fonksiyonu

2.5.1. Tanım

$[a, b]$ kapalı ve sınırlı aralığındaki f integrallenebilir fonksiyonu için;

$$f_h(t) = \frac{1}{h} \int_{t-\frac{h}{2}}^{t+\frac{h}{2}} f(u) du = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(t+v) dv \quad (2.32)$$

biçimindeki f_h fonksiyonuna Steklov fonksiyonu denir [14]. Buna ilaveten, f_h fonksiyonunun hemen her noktada bu türevi;

$$f'_h(t) = \frac{1}{h} \left\{ f\left(t + \frac{h}{2}\right) - f\left(t - \frac{h}{2}\right) \right\} \quad (2.33)$$

Eğer f türevi reel ekseninde düzgün sürekli ise;

$$\sup_{t \in (-\infty, \infty)} |f(t) - f_h(t)| \leq \omega\left(\frac{h}{2}, f\right) \quad (2.34)$$

$$\sup_{t \in (-\infty, \infty)} |f'_h(t)| \leq \frac{1}{2} \omega(h, f) \quad (2.35)$$





3. α -BASKAKOV-DURRMEYER TİP OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

3.1. α -Baskakov Tip Operatörler

3.1.1. Tanım

$f \in C_B[0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, \infty)$ ve $\binom{n-3}{-2} = \binom{n-2}{-1} = 0$ olsun, α -Baskakov baz fonksiyonu;

$$P_{n,k}^\alpha(x) = \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}} \left\{ \frac{\alpha x}{1+x} \binom{n+k-1}{k} + (\alpha - 1)(1+x) \binom{n+k-3}{k-2} + (1-\alpha)x \binom{n+k-1}{k} \right\} \quad (3.1)$$

olmak üzere,

$$L_{n,\alpha}(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \quad (3.2)$$

biçiminde tanımlanan operatörlere α -Baskakov tip operatörler denir [15]. Eş. 3.2 ifadesinde $\alpha = 1$ seçilirse bu operatörler Baskakov tip operatörlere indirgenir [16].

$L_{n,\alpha}$ operatörlerinin test fonksiyonlarını hesaplanmak için aşağıdaki üç lemmaya ihtiyaç vardır.

3.1.2. Lemma

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^m \binom{n+k-1}{k} \frac{\alpha x^k}{(1+x)^{n+k}} \quad (3.3)$$

ifadesinde $m = 0, 1, 2, 3, 4$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\text{i. } \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^0 \binom{n+k-1}{k} \frac{\alpha x^k}{(1+x)^{n+k}} = \alpha \quad (3.4)$$

$$\text{ii. } \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^1 \binom{n+k-1}{k} \frac{\alpha x^k}{(1+x)^{n+k}} = \alpha x \quad (3.5)$$

$$\text{iii. } \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n+k-1}{k} \frac{\alpha x^k}{(1+x)^{n+k}} = \alpha \left(\frac{n+1}{n} x^2 + \frac{1}{n} x \right) \quad (3.6)$$

$$\text{iv. } \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^3 \binom{n+k-1}{k} \frac{\alpha x^k}{(1+x)^{n+k}} = \alpha \left(\frac{(n+1)(n+2)}{n^2} x^3 + \frac{3(n+1)}{n^2} x^2 + \frac{1}{n^2} x \right) \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \text{v. } & \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^4 \binom{n+k-1}{k} \frac{\alpha x^k}{(1+x)^{n+k}} \\ &= \alpha \left(\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3} x^4 + \frac{6(n+1)(n+2)}{n^3} x^3 + \frac{7(n+1)}{n^3} x^2 + \frac{1}{n^3} x \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

İspat

i. $m = 0$ için,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^0 \binom{n+k-1}{k} \frac{\alpha x^k}{(1+x)^{n+k}} = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} = \alpha \quad (3.9)$$

olur.

ii. $m = 1$ için;

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^1 \binom{n+k-1}{k} \frac{\alpha x^k}{(1+x)^{n+k}} &= \frac{\alpha}{n} \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} \\ &= \frac{\alpha}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!(n-1)!} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} \end{aligned} \quad (3.10)$$

ifadesinde $k \rightarrow k + 1$ yazılırsa ve ifade n ile çarpılıp bölünürse;

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!(n-1)!} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} &= \frac{\alpha}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!(n-1)!} \frac{x^{k+1}}{(1+x)^{n+k+1}} \frac{n}{n} \\
&= \alpha x \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k+1}} = \alpha x
\end{aligned} \tag{3.11}$$

olur.

iii. $m = 2$ için;

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n+k-1}{k} \frac{\alpha x^k}{(1+x)^{n+k}} \tag{3.12}$$

ifadesi $k^2 = k(k-1) + k$ eşitliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} \binom{n+k-1}{k} \frac{\alpha x^k}{(1+x)^{n+k}} \\
&= \frac{\alpha}{n^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(n+k+1)!}{(k-2)!(n-1)!} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} \binom{n+k-1}{k} \frac{\alpha x^k}{(1+x)^{n+k}}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

biçiminde yazılır. Bu ifadenin ilk kısmı için $k \rightarrow k+2$ ve $\frac{n(n+1)}{n(n+1)}$ ile çarpılır. İkinci kısımda ise Lemma 3.1.2 (ii) ise uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k+1)!}{k!(n-1)!} \frac{x^{k+2}}{(1+x)^{n+k+2}} \frac{n(n+1)}{n(n+1)} + \frac{1}{n} (\alpha x) \\
&= \frac{\alpha n(n+1)}{n^2} x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k+2}} + \frac{1}{n} (\alpha x) = \alpha \left(\frac{n+1}{n} x^2 + \frac{1}{n} x \right)
\end{aligned} \tag{3.14}$$

olur.

iv. $m = 3$ için;

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^3 \binom{n+k-1}{k} \frac{\alpha x^k}{(1+x)^{n+k}} \tag{3.15}$$

ifadesi $k^3 = k(k-1)(k-2) + 3k^2 - 2k$ eşitliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha}{n^3} \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2) \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} \\
& + \frac{3}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n+k-1}{k} \frac{\alpha x^k}{(1+x)^{n+k}} - \frac{2}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} \binom{n+k-1}{k} \frac{\alpha x^k}{(1+x)^{n+k}} \\
& = \frac{\alpha}{n^3} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{(k-3)!(n-1)!} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} + \frac{3}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n+k-1}{k} \frac{\alpha x^k}{(1+x)^{n+k}} \\
& - \frac{2}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} \binom{n+k-1}{k} \frac{\alpha x^k}{(1+x)^{n+k}} \tag{3.16}
\end{aligned}$$

biçiminde yazılır. Bu ifadesinin ilk kısmı için $k \rightarrow k+3$ yazılıp, $\frac{n(n+1)(n+2)}{n(n+1)(n+2)}$ çarpılsın.

İkinci ve üçüncü kısımda ise sırasıyla Lemma 3.1.2 (ii) ve (iii) şıkları uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha}{n^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k+2)!}{k!(n-1)!} \frac{x^{k+3}}{(1+x)^{n+k+3}} \frac{n(n+1)(n+2)}{n(n+1)(n+2)} + \frac{3}{n} \alpha \left(\frac{n+1}{n} x^2 + \frac{1}{n} x \right) - \frac{2}{n^2} (\alpha x) \\
& = \frac{\alpha n(n+1)(n+2)}{n^3} x^3 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k+2}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k+3}} + \frac{3}{n} \alpha \left(\frac{n+1}{n} x^2 + \frac{1}{n} x \right) - \frac{2}{n^2} (\alpha x) \\
& = \alpha \left(\frac{(n+1)(n+2)}{n^2} x^3 + \frac{3(n+1)}{n^2} x^2 + \frac{1}{n^2} x \right) \tag{3.17}
\end{aligned}$$

olur.

v. $m = 4$ için;

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^4 \binom{n+k-1}{k} \frac{\alpha x^k}{(1+x)^{n+k}} \tag{3.18}$$

ifadesi $k^4 = k(k-1)(k-2)(k-3) + 6k^3 - 11k^2 + 6k$ eşitliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha}{n^4} \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)(k-3) \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}} \\
& + \frac{6}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^3 \binom{n+k-1}{k} \frac{\alpha x^k}{(1+x)^{n+k}} - \frac{11}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n+k-1}{k} \frac{\alpha x^k}{(1+x)^{n+k}} \\
& + \frac{6}{n^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} \binom{n+k-1}{k} \frac{\alpha x^k}{(1+x)^{n+k}} = \frac{\alpha}{n^4} \sum_{k=4}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{(k-4)!(n-1)!} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{6}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{n}^3 \binom{n+k-1}{k} \frac{\alpha x^k}{(1+x)^{n+k}} - \frac{11}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{n}^2 \binom{n+k-1}{k} \frac{\alpha x^k}{(1+x)^{n+k}} \\
& + \frac{6}{n^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} \binom{n+k-1}{k} \frac{\alpha x^k}{(1+x)^{n+k}}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

biçiminde yazılır. Bu ifadesinin ilk kısmı $k \rightarrow k+4$ yazılıp $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$ ile çarpılır, İkinci, üçüncü ve dördüncü kısmında ise sırasıyla Lemma 3.1.2 (ii), (iii) ve (iv) şıkları uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha}{n^4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k+3)!}{k!(n-1)!} \frac{x^{k+4}}{(1+x)^{n+k+4}} \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \\
& + \frac{6}{n} \alpha \left(\frac{(n+1)(n+2)}{n^2} x^3 + \frac{3(n+1)}{n^2} x^2 + \frac{1}{n^2} x \right) - \frac{11}{n^2} \alpha \left(\frac{n+1}{n} x^2 + \frac{1}{n} x \right) + \frac{6}{n^3} (\alpha x) \\
& = \alpha \left(\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3} x^4 + \frac{6(n+1)(n+2)}{n^3} x^3 + \frac{7(n+1)}{n^3} x^2 + \frac{1}{n^3} x \right)
\end{aligned} \tag{3.20}$$

olur.

3.1.3. Lemma

$$(\alpha - 1)(1 + x) \sum_{k=2}^{\infty} \binom{k}{n}^m \binom{n+k-3}{k-2} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}} \tag{3.21}$$

ifadesinde $m = 0, 1, 2, 3, 4$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\text{i. } (\alpha - 1)(1 + x) \sum_{k=2}^{\infty} \binom{k}{n}^0 \binom{n+k-3}{k-2} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}} = (\alpha - 1)x \tag{3.22}$$

$$\text{ii. } (\alpha - 1)(1 + x) \sum_{k=2}^{\infty} \binom{k}{n}^1 \binom{n+k-3}{k-2} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}} = (\alpha - 1) \left(x^2 + \frac{2}{n} x \right) \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}
& \text{iii. } (\alpha - 1)(1 + x) \sum_{k=2}^{\infty} \binom{k}{n}^2 \binom{n+k-3}{k-2} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}} \\
& = (\alpha - 1) \left(\frac{n+1}{n} x^3 + \frac{5}{n} x^2 + \frac{4}{n^2} x \right)
\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}
& \text{iv. } (\alpha - 1)(1 + x) \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^3 \binom{n+k-3}{k-2} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}} \\
& = (\alpha - 1) \left(\frac{(n+1)(n+2)}{n^2} x^4 + \frac{9(n+1)}{n^2} x^3 + \frac{19}{n^2} x^2 + \frac{8}{n^3} x \right)
\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
& \text{v. } (\alpha - 1)(1 + x) \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^4 \binom{n+k-3}{k-2} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}} \\
& = (\alpha - 1) \left(\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3} x^5 + \frac{14(n+1)(n+2)}{n^3} x^4 + \frac{55(n+1)}{n^3} x^3 + \frac{65}{n^3} x^2 + \frac{16}{n^4} x \right)
\end{aligned} \tag{3.26}$$

İspat

i. $m = 0$ için, ifade düzenlenir ve $k \rightarrow k + 2$ yazılırsa;

$$(\alpha - 1)(1 + x) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^{k+1}}{(1+x)^{n+k+1}} = (\alpha - 1)(1 + x) \frac{x}{1+x} = (\alpha - 1)x \tag{3.27}$$

olur.

ii. $m = 1$ için,

$$(\alpha - 1)(1 + x) \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^1 \binom{n+k-3}{k-2} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}} \tag{3.28}$$

ifadesinde $\left(\frac{k}{n}\right)^1 = \frac{k-2}{n} + \frac{2}{n}$ eşitliği kullanırsa;

$$\begin{aligned}
& (\alpha - 1)(1 + x) \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^1 \binom{n+k-3}{k-2} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}} \\
& = \frac{(\alpha-1)(1+x)}{n} \sum_{k=3}^{\infty} (k-2) \frac{(n+k-3)!}{(k-2)!(n-1)!} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}} \\
& + \frac{2}{n} \left\{ (\alpha - 1)(1 + x) \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^0 \binom{n+k-3}{k-2} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}} \right\} \\
& = \frac{(\alpha-1)(1+x)}{n} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(n+k-3)!}{(k-3)!(n-1)!} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}} \\
& + \frac{2}{n} \left\{ (\alpha - 1)(1 + x) \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^0 \binom{n+k-3}{k-2} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}} \right\}
\end{aligned} \tag{3.29}$$

olur. Birinci ifade de $k \rightarrow k + 3$ yazılır ve $\frac{n}{n}$ ile çarpılır. İkinci ifadede Lemma 3.1.3 (i) kullanılarak,

$$\begin{aligned}
 (\alpha - 1)(1 + x) \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^1 \binom{n+k-3}{k-2} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}} &= \frac{(\alpha-1)(1+x)}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!(n-1)!} \frac{x^{k+2}}{(1+x)^{n+k+2}} \frac{n}{n} + \\
 \frac{2}{n}(\alpha - 1)x &= \frac{(\alpha-1)(1+x)}{n} \frac{nx^2}{(1+x)} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+1+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k+1}} + \frac{2}{n}(\alpha - 1)x \\
 &= (\alpha - 1) \left(x^2 + \frac{2}{n}x\right)
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

olur.

iii. $m = 2$ için,

$$(\alpha - 1)(1 + x) \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n+k-3}{k-2} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}} \tag{3.31}$$

ifadesi $k^2 = (k - 2)(k - 3) + 5k - 6$ eşitliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
 &\frac{(\alpha-1)(1+x)}{n^2} \sum_{k=4}^{\infty} (k-2)(k-3) \frac{(n+k-3)!}{(k-2)!(n-1)!} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}} \\
 &+ \frac{5}{n} ((\alpha - 1)(1 + x)) \sum_{k=4}^{\infty} (\alpha - 1) \left(x^2 + \frac{2}{n}x\right) \binom{n+k-3}{k-2} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}} \\
 &- \frac{6}{n^2} \left((\alpha - 1)(1 + x) \sum_{k=4}^{\infty} \binom{n+k-3}{k-2} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}} \right) \\
 &= \frac{(\alpha-1)(1+x)}{n^2} \sum_{k=4}^{\infty} \frac{(n+k-3)!}{(k-4)!(n-1)!} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}} \\
 &+ \frac{5}{n} ((\alpha - 1)(1 + x)) \sum_{k=4}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right) \binom{n+k-3}{k-2} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}} \\
 &- \frac{6}{n^2} \left((\alpha - 1)(1 + x) \sum_{k=4}^{\infty} \binom{n+k-3}{k-2} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}} \right)
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Birinci ifade $k \rightarrow k + 4$ yazılır ve $\frac{n(n+1)}{n(n+1)}$ çarpılır, ikinci ifadede Lemma 3.1.3 (ii) üçüncü ifadede Lemma 3.1.3 (i) kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
& \frac{(\alpha-1)(1+x)}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k+1)!}{k!(n-1)!} \frac{x^{k+3}}{(1+x)^{n+k+3}} \frac{n(n+1)}{n(n+1)} + \frac{5}{n} \left((\alpha-1) \left(x^2 + \frac{2}{n}x \right) \right) - \frac{6}{n^2} (\alpha-1)x \\
&= \frac{(\alpha-1)(1+x)}{n^2} \frac{n(n+1)x^3}{1+x} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+2+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+2+k}} + \frac{5}{n} \left((\alpha-1) \left(x^2 + \frac{2}{n}x \right) \right) \\
&- \frac{6}{n^2} (\alpha-1) = \frac{(\alpha-1)(n+1)x^3}{n} + \frac{5}{n} \left((\alpha-1) \left(x^2 + \frac{2}{n}x \right) \right) - \frac{6}{n^2} (\alpha-1) \\
&= (\alpha-1) \left(\frac{n+1}{n} x^3 + \frac{5}{n} x^2 + \frac{4}{n^2} x \right) \tag{3.33}
\end{aligned}$$

olur.

iv. $m = 3$ için,

$$(\alpha-1)(1+x) \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k}{n} \right)^3 \binom{n+k-3}{k-2} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}} \tag{3.34}$$

ifadesi $k^3 = (k-2)(k-3)(k-4) + 9k^2 - 26k + 24$ eşitliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
& \frac{(\alpha-1)(1+x)}{n^3} \sum_{k=5}^{\infty} (k-2)(k-3)(k-4) \frac{(n+k-3)!}{(k-2)!(n-1)!} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}} \\
&+ \frac{9}{n} (\alpha-1)(1+x) \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k}{n} \right)^2 \binom{n+k-3}{k-2} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}} \\
&- \frac{26}{n^2} (\alpha-1)(1+x) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{n} \binom{n+k-3}{k-2} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}} \\
&+ \frac{24}{n^3} (\alpha-1)(1+x) \sum_{k=2}^{\infty} \binom{n+k-3}{k-2} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}} \\
&= \frac{(\alpha-1)(1+x)}{n^3} \sum_{k=5}^{\infty} \frac{(n+k-3)!}{(k-5)!(n-1)!} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}} \\
&+ \frac{9}{n} (\alpha-1)(1+x) \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k}{n} \right)^2 \binom{n+k-3}{k-2} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}} \\
&- \frac{26}{n^2} (\alpha-1)(1+x) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{n} \binom{n+k-3}{k-2} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}} \\
&+ \frac{24}{n^3} (\alpha-1)(1+x) \sum_{k=2}^{\infty} \binom{n+k-3}{k-2} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}} \tag{3.35}
\end{aligned}$$

biçiminde yazılır. Son kısmı da, birinci ifade de $k \rightarrow k+5$ yazılıp $\frac{n(n+1)(n+2)}{n(n+1)(n+2)}$ ile çarpılsın. İkinci, üçüncü ve dördüncü kısımda ise sırasıyla Lemma 3.1.3 (iii), (ii) ve (i) şıkları uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\alpha-1)(1+x)}{n^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k+2)!}{k!(n-1)!} \frac{x^{k+4}}{(1+x)^{n+k+4}} \frac{n(n+1)(n+2)}{n(n+1)(n+2)} \\
&+ \frac{9}{n}(\alpha-1) \left(\frac{n+1}{n}x^3 + \frac{5}{n}x^2 + \frac{4}{n^2}x \right) - \frac{26}{n^2}(\alpha-1) \left(x^2 + \frac{2}{n}x \right) + \frac{24}{n^3}(\alpha-1)x \\
&= \frac{(\alpha-1)(1+x)}{n^3} \frac{n(n+1)(n+2)x^4}{1+x} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+3+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+3+k}} \\
&+ \frac{9}{n}(\alpha-1) \left(\frac{n+1}{n}x^3 + \frac{5}{n}x^2 + \frac{4}{n^2}x \right) - \frac{26}{n^2}(\alpha-1) \left(x^2 + \frac{2}{n}x \right) + \frac{24}{n^3}(\alpha-1)x \\
&= (\alpha-1) \left(\frac{(n+1)(n+2)}{n^2}x^4 + \frac{9(n+1)}{n^2}x^3 + \frac{19}{n^2}x^2 + \frac{8}{n^3}x \right) \tag{3.36}
\end{aligned}$$

olur.

v. $m = 4$ için,

$$(\alpha-1)(1+x) \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k}{n} \right)^4 \binom{n+k-3}{k-2} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}} \tag{3.37}$$

ifadesi $k^4 = (k-2)(k-3)(k-4)(k-5) + 14k^3 - 71k^2 + 154k - 120$ eşitliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&\frac{(\alpha-1)(1+x)}{n^4} \sum_{k=6}^{\infty} (k-2)(k-3)(k-4)(k-5) \frac{(n+k-3)!}{(k-2)!(n-1)!} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}} \\
&+ \frac{14}{n}(\alpha-1)(1+x) \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k}{n} \right)^3 \binom{n+k-3}{k-2} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}} \\
&- \frac{71}{n^2}(\alpha-1)(1+x) \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k}{n} \right)^2 \binom{n+k-3}{k-2} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}} \\
&+ \frac{154}{n^3}(\alpha-1)(1+x) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{n} \binom{n+k-3}{k-2} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}} \\
&- \frac{120}{n^4}(\alpha-1)(1+x) \sum_{k=2}^{\infty} \binom{n+k-3}{k-2} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}} \\
&= \frac{(\alpha-1)(1+x)}{n^4} \sum_{k=6}^{\infty} \frac{(n+k+3)!}{(k-6)!(n-1)!} \frac{x^{k+5}}{(1+x)^{n+k+5}} \\
&+ \frac{14}{n}(\alpha-1)(1+x) \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k}{n} \right)^3 \binom{n+k-3}{k-2} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}} \\
&- \frac{71}{n^2}(\alpha-1)(1+x) \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k}{n} \right)^2 \binom{n+k-3}{k-2} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{154}{n^3} (\alpha - 1)(1+x) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{n} \binom{n+k-3}{k-2} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}} \\
& - \frac{120}{n^4} (\alpha - 1)(1+x) \sum_{k=2}^{\infty} \binom{n+k-3}{k-2} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}}
\end{aligned} \tag{3.38}$$

biçiminde yazılır. Son kısımda, birinci ifade de $k \rightarrow k+6$ yazılıp $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$ ile çarpılsın. Diğer terimlerde ise sırasıyla Lemma 3.1.3 (iv), (iii), (ii) ve (i) şıkları uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
& \frac{(\alpha-1)(1+x)}{n^4} \sum_{k=6}^{\infty} \frac{(n+k+3)!}{(k-6)!(n-1)!} \frac{x^{k+5}}{(1+x)^{n+k+5}} \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \\
& + \frac{14}{n} (\alpha - 1) \left(\frac{(n+1)(n+2)}{n^2} x^4 + \frac{9(n+1)}{n^2} x^3 + \frac{19}{n^2} x^2 + \frac{8}{n^3} x \right) \\
& - \frac{71}{n^2} (\alpha - 1) \left(\frac{n+1}{n} x^3 + \frac{5}{n} x^2 + \frac{4}{n^2} x \right) + \frac{154}{n^3} (\alpha - 1) \left(x^2 + \frac{2}{n} x \right) - \frac{120}{n^4} (\alpha - 1)x \\
& = \frac{(\alpha-1)(1+x)}{n^3} \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)x^5}{1+x} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+4+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+4+k}} \\
& + \frac{14}{n} (\alpha - 1) \left(\frac{(n+1)(n+2)}{n^2} x^4 + \frac{9(n+1)}{n^2} x^3 + \frac{19}{n^2} x^2 + \frac{8}{n^3} x \right) \\
& - \frac{71}{n^2} (\alpha - 1) \left(\frac{n+1}{n} x^3 + \frac{5}{n} x^2 + \frac{4}{n^2} x \right) + \frac{154}{n^3} (\alpha - 1) \left(x^2 + \frac{2}{n} x \right) - \frac{120}{n^4} (\alpha - 1)x \\
& = (\alpha - 1) \left(\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3} x^5 + \frac{14(n+1)(n+2)}{n^3} x^4 + \frac{55(n+1)}{n^3} x^3 + \frac{65}{n^3} x^2 + \frac{16}{n^4} x \right) \tag{3.39}
\end{aligned}$$

olur.

3.1.4. Lemma

$$(1 - \alpha) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} \right)^m \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k-1}} \tag{3.40}$$

ifadesinde $m = 0, 1, 2, 3, 4$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\text{i. } (1 - \alpha) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} \right)^0 \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k-1}} = (1 - \alpha)(1+x) \tag{3.41}$$

$$\text{ii. } (1 - \alpha) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} \right)^1 \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k-1}} = (1 - \alpha)(1+x)x \tag{3.42}$$

$$\text{iii. } (1 - \alpha) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k-1}} = (1 - \alpha)(1 + x) \left(\frac{n+1}{n} x^2 + \frac{1}{n} x\right) \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \text{iv. } & (1 - \alpha) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^3 \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k-1}} \\ &= (1 - \alpha)(1 + x) \left(\frac{(n+1)(n+2)}{n^2} x^3 + \frac{3(n+1)}{n^2} x^2 + \frac{1}{n^2} x\right) \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \text{v. } & (1 - \alpha) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^4 \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k-1}} \\ &= (1 - \alpha)(1 + x) \left(\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3} x^4 + \frac{6(n+1)(n+2)}{n^3} x^3 + \frac{7(n+1)}{n^3} x^2 + \frac{1}{n^3} x\right) \end{aligned} \quad (3.45)$$

İspat

$$\beta \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^m \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k-1}} = (1 + x) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^m \binom{n+k-1}{k} \frac{\beta x^k}{(1+x)^{n+k}} \quad (3.46)$$

eşitliğinde β yerine $1 - \alpha$ alınırsa Lemma 3.1.2 ile istenen sonuçlar elde edilir.

3.1.5. Lemma

Eş. 3.2’de verilen $L_{n,\alpha}$, α –Baskakov tip operatörler $e_m(t) = t^m$, ($m = 1, 2, 3, 4$), Korovkin test fonksiyonları için aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

$$\text{i. } L_{n,\alpha}(e_0, x) = 1 \quad (3.47)$$

$$\text{ii. } L_{n,\alpha}(e_1; x) = \frac{n+2\alpha-2}{n} x \quad (3.48)$$

$$\text{iii. } L_{n,\alpha}(e_2; x) = \frac{n^2+n(4\alpha-3)}{n^2} x^2 + \frac{n+4\alpha-4}{n^2} x \quad (3.49)$$

$$\text{iv. } L_{n,\alpha}(e_3; x) = \frac{n^3+n^2(6\alpha-3)+n(6\alpha-4)}{n^3} x^3 + \frac{3n^2+n(18\alpha-15)}{n^3} x^2 + \frac{n+8\alpha-8}{n^3} x \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} \text{v. } L_{n,\alpha}(e_4; x) &= \frac{n^4 + n^3(8\alpha - 2) + n^2(24\alpha - 13) + n(16\alpha - 10)}{n^4} x^4 + \frac{6n^3 + n^2(48\alpha - 30) + n(48\alpha - 36)}{n^4} x^3 \\ &+ \frac{7n^2 + n(64\alpha - 57)}{n^4} x^2 + \frac{n + 16\alpha - 16}{n^4} x \end{aligned} \quad (3.51)$$

İspat

i. $e_0(t) = 1$ için,

$$L_{n,\alpha}(e_0; x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}} \left\{ \frac{\alpha x}{1+x} \binom{n+k-1}{k} + (\alpha - 1)(1+x) \binom{n+k-3}{k-2} + (1-\alpha)x \binom{n+k-1}{k} \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\binom{n+k-1}{k} \frac{\alpha x^k}{(1+x)^{n+k}} \right. \\ &\quad \left. + (\alpha - 1)(1+x) \sum_{k=2}^{\infty} \binom{n+k-3}{k-2} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}} \right. \\ &\quad \left. + (1-\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k-1}} \right) \end{aligned} \quad (3.53)$$

Yukarıdaki ifadenin birinci teriminde Lemma 3.1.2 (i), ikinci teriminde Lemma 3.1.3 (i) ve üçüncü teriminde Lemma 3.1.4 (i) sırasıyla yerlerine yazılırsa;

$$L_{n,\alpha}(e_0; x) = \alpha + (\alpha - 1)x + (1 - \alpha)(1 + x) = 1 \quad (3.54)$$

olur.

ii. $e_1(t) = t$ için,

$$\begin{aligned} L_{n,\alpha}(e_1; x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} \right) P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} \right) \binom{n+k-1}{k} \frac{\alpha x^k}{(1+x)^{n+k}} \\ &\quad + (\alpha - 1)(1+x) \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k}{n} \right) \binom{n+k-3}{k-2} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}} \\ &\quad + (1-\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} \right) \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k-1}}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Yukarıdaki ifadenin birinci teriminde Lemma 3.1.2 (ii), ikinci teriminde Lemma 3.1.3 (ii) ve üçüncü teriminde Lemma 3.1.4 (ii) sırasıyla yerlerine yazılırsa;

$$L_{n,\alpha}(e_1; x) = \alpha x + (\alpha - 1) \left(x^2 + \frac{2}{n} x \right) + (1 - \alpha)(1 + x)x \quad (3.56)$$

eşitliğinden

$$L_{n,\alpha}(e_1; x) = \frac{n+2\alpha-2}{n} x \quad (3.57)$$

olur.

iii. $e_2(t) = t^2$ için,

$$\begin{aligned} L_{n,\alpha}(e_2; x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} \right)^2 P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \\ &= L_{n,\alpha}(e_2; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} \right)^2 \binom{n+k-1}{k} \frac{\alpha x^k}{(1+x)^{n+k}} \\ &\quad + (\alpha - 1)(1 + x) \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k}{n} \right)^2 \binom{n+k-3}{k-2} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}} \\ &\quad + (1 - \alpha) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n} \right)^2 \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k-1}} \end{aligned} \quad (3.58)$$

Yukarıdaki ifadenin birinci teriminde Lemma 3.1.2 (iii), ikinci teriminde Lemma 3.1.3 (iii) ve üçüncü teriminde Lemma 3.1.4 (iii) sırasıyla yerlerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} L_{n,\alpha}(e_2; x) &= \alpha \left(\frac{n+1}{n} x^2 + \frac{1}{n} x \right) + (\alpha - 1) \left(\frac{n+1}{n} x^3 + \frac{5}{n} x^2 + \frac{4}{n^2} x \right) \\ &\quad + (1 - \alpha)(1 + x) \left(\frac{n+1}{n} x^2 + \frac{1}{n} x \right) \end{aligned} \quad (3.59)$$

eşitliğinden

$$L_{n,\alpha}(e_2; x) = \frac{n^2+n(4\alpha-3)}{n^2} x^2 + \frac{n+4\alpha-4}{n^2} x \quad (3.60)$$

olur.

iv. $e_3(t) = t^3$ için,

$$\begin{aligned}
L_{n,\alpha}(e_3; x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^3 P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^3 \binom{n+k-1}{k} \frac{\alpha x^k}{(1+x)^{n+k}} \\
&\quad + (\alpha - 1)(1+x) \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^3 \binom{n+k-3}{k-2} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}} \\
&\quad + (1-\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^3 \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k-1}}.
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Yukarıdaki ifadenin birinci teriminde Lemma 3.1.2 (iv), ikinci teriminde Lemma 3.1.3 (iv) ve üçüncü teriminde Lemma 3.1.4 (iv) sırasıyla yerlerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
L_{n,\alpha}(e_3; x) &= \alpha \left(\frac{(n+1)(n+2)}{n^2} x^3 + \frac{3(n+1)}{n^2} x^2 + \frac{1}{n^2} x \right) \\
&\quad + (\alpha - 1) \left(\frac{(n+1)(n+2)}{n^2} x^4 + \frac{9(n+1)}{n^2} x^3 + \frac{19}{n^2} x^2 + \frac{8}{n^3} x \right) \\
&\quad + (1-\alpha)(1+x) \left(\frac{(n+1)(n+2)}{n^2} x^3 + \frac{3(n+1)}{n^2} x^2 + \frac{1}{n^2} x \right)
\end{aligned} \tag{3.62}$$

eşitliğinden

$$L_{n,\alpha}(e_3; x) = \frac{n^3 + n^2(6\alpha - 3) + n(6\alpha - 4)}{n^3} x^3 + \frac{3n^2 + n(18\alpha - 15)}{n^3} x^2 + \frac{n + 8\alpha - 8}{n^3} x \tag{3.63}$$

olur.

v. $e_4(t) = t^4$ için,

$$\begin{aligned}
L_{n,\alpha}(e_4; x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^4 P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^4 \binom{n+k-1}{k} \frac{\alpha x^k}{(1+x)^{n+k}} \\
&\quad + (\alpha - 1)(1+x) \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^4 \binom{n+k-3}{k-2} \frac{x^{k-1}}{(1+x)^{n+k-1}} \\
&\quad + (1-\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^4 \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k-1}}.
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Yukarıdaki ifadenin birinci teriminde Lemma 3.1.2 (v), ikinci teriminde Lemma 3.1.3 (v) ve üçüncü teriminde Lemma 3.1.4 (v) sırasıyla yerlerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
L_{n,\alpha}(e_4; x) &= \alpha \left(\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3} x^4 + \frac{6(n+1)(n+2)}{n^3} x^3 + \frac{7(n+1)}{n^3} x^2 + \frac{1}{n^3} x \right) \\
&+ (\alpha - 1) \left(\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3} x^5 + \frac{14(n+1)(n+2)}{n^3} x^4 + \frac{55(n+1)}{n^3} x^3 + \frac{65}{n^3} x^2 + \frac{16}{n^4} x \right) \\
&+ (1 - \alpha)(1 + x) \left(\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3} x^4 + \frac{6(n+1)(n+2)}{n^3} x^3 + \frac{7(n+1)}{n^3} x^2 + \frac{1}{n^3} x \right)
\end{aligned} \quad (3.65)$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned}
L_{n,\alpha}(e_4; x) &= \frac{n^4 + n^3(8\alpha - 2) + n^2(24\alpha - 13) + n(16\alpha - 10)}{n^4} x^4 + \frac{6n^3 + n^2(48\alpha - 30) + n(48\alpha - 36)}{n^4} x^3 \\
&+ \frac{7n^2 + n(64\alpha - 57)}{n^4} x^2 + \frac{n + 16\alpha - 16}{n^4} x
\end{aligned} \quad (3.66)$$

sonucu elde edilir.

İspat tamamlanmış olur.

3.2. α –Baskakov-Durrmeyer Tip Operatörlerin Yaklaşımı

3.2.1. Tanım

$P_{n,k}^\alpha(x)$ Eş. 3.1’de tanımlanan baz fonksiyonu, ve f fonksiyonu ise $\int_0^\infty P_{n,k}(t)f(t)dt$ genelleştirilmiş integralini yakınsak kılacak şekilde bir $f \in C_B[0, \infty)$ osun.

$$P_{n,k}(t) = \frac{1}{B(k+1, n)} \frac{t^k}{(1+t)^{(n+k+1)}} \quad (3.67)$$

olmak üzere,

$$L_{n,\alpha}^*(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \int_0^\infty P_{n,k}(t)f(t)dt \quad (3.68)$$

biçiminde tanımlanan operatörlere α -Baskakov-Durrmeyer tip operatörler denir. Eş. 3.68'de verilen operatörler dizisi için $\alpha = 1$ alınırsa operatör Baskakov-Durrmeyer operatörüne dönüşür [9,10].

3.2.2. Tanım

$$B(x, y) = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du \quad x, y > 0 \quad (3.69)$$

Genelleştirilmiş integral yardımıyla verilen fonksiyonlara beta fonksiyonu denir.

3.2.3. Lemma

$L_{n,\alpha}^*(f; x)$ operatörleri , $e_i(t) = t^i$ fonksiyonları için aşağıdaki eşitlikleri sağlar. ($i = 0, 1, 2, 3, 4$)

$$i. \quad L_{n,\alpha}^*(e_0; x) = 1 \quad (3.70)$$

$$ii. \quad L_{n,\alpha}^*(e_1; x) = \frac{n+2(\alpha-1)}{n-1}x + \frac{1}{n-1} \quad (3.71)$$

$$iii. \quad L_{n,\alpha}^*(e_2; x) = \frac{n^2+n(4\alpha-3)}{(n-2)(n-1)}x^2 + \frac{(4n+10\alpha-10)}{(n-2)(n-1)}x + \frac{2}{(n-2)(n-1)} \quad (3.72)$$

$$iv. \quad L_{n,\alpha}^*(e_3; x) = \frac{n^3+n^2(6\alpha-3)+n(6\alpha-4)}{(n-3)(n-2)(n-1)}x^3 + \frac{9n^2+n(42\alpha-33)}{(n-3)(n-2)(n-1)}x^2 + \frac{18n+54\alpha-54}{(n-3)(n-2)(n-1)}x + \frac{6}{(n-3)(n-2)(n-1)} \quad (3.73)$$

$$v. \quad L_{n,\alpha}^*(e_4; x) = \frac{n^4+n^3(8\alpha-2)+n^2(24\alpha-13)+n(16\alpha-10)}{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)}x^4 + \frac{16n^3+n^2(108\alpha-60)+n(108\alpha-76)}{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)}x^3 + \frac{72n^2+n(384\alpha-312)}{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)}x^2 + \frac{96n+336\alpha-336}{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)}x + \frac{24}{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)} \quad (3.74)$$

İspat

i. $i = 0$, için $e_0(t) = 1$ dir. $e_0(t)$ fonksiyonuna $L_{n,\alpha}^*$ operatörü uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
L_{n,\alpha}^*(e_0; x) &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \frac{1}{B(k+1,n)} \int_0^{\infty} \frac{t^k}{(1+t)^{(n+k+1)}} dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \frac{B(k+1,n)}{B(k+1,n)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{(\alpha)}(x)
\end{aligned} \tag{3.75}$$

olup,

$$L_{n,\alpha}^*(e_0; x) = L_{n,\alpha}(e_0; x) \tag{3.76}$$

eşitliği yazılır. Lemma 3.1.5 (i) den dolayı,

$$L_{n,\alpha}^*(e_0; x) = 1 \tag{3.77}$$

olur.

ii. $i = 1$, için

$$e_1(t) = t \tag{3.78}$$

dir. $e_1(t)$ fonksiyonuna $L_{n,\alpha}^*$ operatörü uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
L_{n,\alpha}^*(e_1; x) &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \frac{1}{B(k+1,n)} \int_0^{\infty} \frac{t^{k+1}}{(1+t)^{(n+k+1)}} dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \frac{B(k+2,n-1)}{B(k+1,n)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \frac{(k+1)B(k+1,n)}{(n-1)B(k+1,n)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \frac{k+1}{n-1} \\
&= \frac{n}{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} P_{n,k}^{(\alpha)}(x) + \frac{1}{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{(\alpha)}(x)
\end{aligned} \tag{3.79}$$

olup,

$$L_{n,\alpha}^*(e_1; x) = \frac{n}{n-1} L_{n,\alpha}(e_1; x) + \frac{1}{n-1} L_{n,\alpha}(e_0; x) \tag{3.80}$$

eşitliği yazılır. Bu eşitliğin sağ tarafının birinci teriminde, Lemma 3.1.5 (ii) ve ikinci teriminde Lemma 3.1.5 (i) yerine yazılırsa,

$$L_{n,\alpha}^*(e_1; x) = \frac{n+2(\alpha-1)}{n-1}x + \frac{1}{n-1} \quad (3.81)$$

sonucu bulunur.

iii. $i = 2$, için

$$e_2(t) = t^2 \quad (3.82)$$

dir. $e_2(t)$ fonksiyonuna $L_{n,\alpha}^*$ operatörü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} L_{n,\alpha}^*(e_2; x) &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \frac{1}{B(k+1,n)} \int_0^{\infty} \frac{t^{k+2}}{(1+t)^{(n+k+1)}} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \frac{B(k+3,n-2)}{B(k+1,n)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \frac{(k+2)(k+1)B(k+1,n)}{(n-2)(n-1)B(k+1,n)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \frac{(k+2)(k+1)}{(n-2)(n-1)} \\ &= \frac{n^2}{(n-2)(n-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^2 P_{n,k}^{(\alpha)}(x) + \frac{3n}{(n-2)(n-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \\ &\quad + \frac{2}{(n-2)(n-1)} \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \end{aligned} \quad (3.83)$$

olup,

$$\begin{aligned} L_{n,\alpha}^*(e_2; x) &= \frac{n^2}{(n-2)(n-1)} L_{n,\alpha}(e_2; x) + \frac{3n}{(n-2)(n-1)} L_{n,\alpha}(e_1; x) \\ &\quad + \frac{2}{(n-2)(n-1)} L_{n,\alpha}(e_0; x) \end{aligned} \quad (3.84)$$

eşitliği yazılır. Bu eşitliğin sağ tarafının birinci teriminde Lemma 3.1.5 (iii), ikinci teriminde Lemma 3.1.5 (ii) ve üçüncü teriminde Lemma 3.1.5 (i) yerine yazılırsa,

$$L_{n,\alpha}^*(e_2; x) = \frac{n^2+n(4\alpha-3)}{(n-2)(n-1)}x^2 + \frac{(4n+10\alpha-10)}{(n-2)(n-1)}x + \frac{2}{(n-2)(n-1)} \quad (3.85)$$

sonucu elde edilir.

iv. $i = 3$, için

$$e_3(t) = t^3 \quad (3.86)$$

dir. $e_3(t)$ fonksiyonuna $L_{n,\alpha}^*$ operatörü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} L_{n,\alpha}^*(e_3; x) &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \frac{1}{B(k+1,n)} \int_0^{\infty} \frac{t^{k+3}}{(1+t)^{(n+k+1)}} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \frac{B(k+4,n-3)}{B(k+1,n)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \frac{(k+3)(k+2)(k+1)B(k+1,n)}{(n-3)(n-2)(n-1)B(k+1,n)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \frac{(k+3)(k+2)(k+1)}{(n-3)(n-2)(n-1)} \\ &= \frac{n^3}{(n-3)(n-2)(n-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^3 P_{n,k}^{(\alpha)}(x) + \frac{6n^2}{(n-3)(n-2)(n-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^2 P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \\ &\quad + \frac{11n}{(n-3)(n-2)(n-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} P_{n,k}^{(\alpha)}(x) + \frac{6}{(n-3)(n-2)(n-1)} \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \end{aligned} \quad (3.87)$$

olup,

$$\begin{aligned} L_{n,\alpha}^*(e_3; x) &= \frac{n^3}{(n-3)(n-2)(n-1)} L_{n,\alpha}(e_3; x) + \frac{6n^2}{(n-3)(n-2)(n-1)} L_{n,\alpha}(e_2; x) \\ &\quad + \frac{11n}{(n-3)(n-2)(n-1)} L_{n,\alpha}(e_1; x) + \frac{6}{(n-3)(n-2)(n-1)} L_{n,\alpha}(e_0; x) \end{aligned} \quad (3.88)$$

eşitliği yazılır. Bu eşitliğin sağ tarafının birinci teriminde Lemma 3.1.5 (iv), ikinci teriminde Lemma 3.1.5 (iii), üçüncü teriminde Lemma 3.1.5 (ii) ve dördüncü teriminde Lemma 3.1.5 (i) yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} L_{n,\alpha}^*(e_3; x) &= \frac{n^3+n^2(6\alpha-3)+n(6\alpha-4)}{(n-3)(n-2)(n-1)}x^3 + \frac{9n^2+n(42\alpha-33)}{(n-3)(n-2)(n-1)}x^2 \\ &\quad + \frac{18n+54\alpha-54}{(n-3)(n-2)(n-1)}x + \frac{6}{(n-3)(n-2)(n-1)} \end{aligned} \quad (3.89)$$

sonucu elde edilir.

v. $i = 4$,

$$e_4(t) = t^4 \quad (3.90)$$

dir. $e_4(t)$ fonksiyonuna $L_{n,\alpha}^*$ operatörü uygulanırsa ;

$$\begin{aligned} L_{n,\alpha}^*(e_4; x) &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \frac{1}{B(k+1,n)} \int_0^{\infty} \frac{t^{k+4}}{(1+t)^{(n+k+1)}} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \frac{B(k+5,n-4)}{B(k+1,n)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \frac{(k+4)(k+3)(k+2)(k+1)B(k+1,n)}{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)B(k+1,n)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \frac{(k+4)(k+3)(k+2)(k+1)}{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)} \\ &= \frac{n^4}{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^4 P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \\ &\quad + \frac{10n^3}{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^3 P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \\ &\quad + \frac{35n^2}{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^2 P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \\ &\quad + \frac{50n}{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \\ &\quad + \frac{24}{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)} \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \end{aligned} \quad (3.91)$$

olup,

$$\begin{aligned} L_{n,\alpha}^*(e_4; x) &= \frac{n^4}{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)} L_{n,\alpha}(e_4; x) + \frac{10n^3}{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)} L_{n,\alpha}(e_3; x) \\ &\quad + \frac{35n^2}{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)} L_{n,\alpha}(e_2; x) + \frac{50n}{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)} L_{n,\alpha}(e_1; x) \\ &\quad + \frac{24}{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)} L_{n,\alpha}(e_0; x) \end{aligned} \quad (3.92)$$

eşitliği yazılır. Bu eşitliğin sağ tarafının birinci teriminde Lemma 3.1.5 (v), ikinci teriminde Lemma 3.1.5 (iv), üçüncü teriminde Lemma 3.1.5 (iii), dördüncü teriminde Lemma 3.1.5 (ii) ve beşinci teriminde Lemma 3.1.5 (i) yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
L_{n,\alpha}^*(e_4; x) &= \frac{n^4 + n^3(8\alpha - 2) + n^2(24\alpha - 13) + n(16\alpha - 10)}{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)} x^4 + \frac{16n^3 + n^2(108\alpha - 60) + n(108\alpha - 76)}{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)} x^3 \\
&+ \frac{72n^2 + n(384\alpha - 312)}{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)} x^2 + \frac{96n + 336\alpha - 336}{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)} x + \frac{24}{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)}
\end{aligned} \quad (3.93)$$

olur.

3.2.4. Lemma

$\varphi_x^r(t) = (t - x)^r$, $L_{n,\alpha}^*(f; x)$ operatörü merkezi moment fonksiyonu için aşağıdaki eşitlikler sağlanır ($r \in \{0, 1, 2, 4\}$).

$$i. \quad L_{n,\alpha}^*(\varphi_x^0; x) = 1 \quad (3.94)$$

$$ii. \quad L_{n,\alpha}^*(\varphi_x^1; x) = \frac{1}{n-1} [x(2\alpha - 1) + 1] \quad (3.95)$$

$$iii. \quad L_{n,\alpha}^*(\varphi_x^2; x) = \frac{2}{(n-2)(n-1)} [(n + 4\alpha - 3)x^2 + (n + 5\alpha - 3)x + 1] \quad (3.96)$$

$$iv. \quad L_{n,\alpha}^*(\varphi_x^4; x) = \frac{12(x+1)}{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)} \left[\begin{aligned} &\{n^2 + n(16\alpha - 3) + 16\alpha - 14\}x^3 \\ &+ \{n^2 + n(14\alpha + 3) + 44\alpha - 38\}x^2 \\ &+ (6n + 28\alpha - 22)x + 2 \end{aligned} \right] \quad (3.97)$$

İspat

$$i. \quad \varphi_x^r(t), r = 0 \text{ için,}$$

$$\varphi_x^0(t) = (t - x)^0 = e_0(t) = 1 \quad (3.98)$$

olduğundan,

$$L_{n,\alpha}^*(\varphi_x^0; x) = L_{n,\alpha}^*(e_0; x) \quad (3.99)$$

eşitliği yazılır. Lemma 3.2.3 (i) den

$$L_{n,\alpha}^* (\varphi_x^0; x) = 1 \quad (3.100)$$

olur.

ii. $\varphi_x^r(t)$, $r = 1$ için,

$$\varphi_x^1(t) = (t - x) = e_1(t) - x e_0(t) \quad (3.101)$$

$L_{n,\alpha}^*$ operatörünün linerlik özelliğinden

$$L_{n,\alpha}^* (\varphi_x^1; x) = L_{n,\alpha}^* ((t - x); x) = L_{n,\alpha}^* (e_1; x) - x L_{n,\alpha}^* (e_0; x) \quad (3.102)$$

dir. Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafının birinci teriminde Lemma 3.2.3 (ii) ve ikinci terimde Lemma 3.2.3 (i) yazılırsa;

$$\begin{aligned} L_{n,\alpha}^* (\varphi_x^1; x) &= \frac{n+2(\alpha-1)}{n-1} x + \frac{1}{n-1} - x = \left(\frac{n+2(\alpha-1)}{n-1} - 1 \right) x + \frac{1}{n-1} \\ &= \frac{1}{n-1} [x(2\alpha - 1) + 1] \end{aligned} \quad (3.103)$$

eşitliğinden

$$L_{n,\alpha}^* (\varphi_x^1; x) = \frac{1}{n-1} [x(2\alpha - 1) + 1] \quad (3.104)$$

olur.

iii. $\varphi_x^r(t)$, $r = 2$ için

$$\varphi_x^2(t) = (t - x)^2 = t^2 - 2xt + x^2 = e_2(t) - 2x e_1(t) + x^2 e_0(t) \quad (3.105)$$

$L_{n,\alpha}^*$ operatörünün linerlik özelliğinden

$$\begin{aligned} L_{n,\alpha}^* (\varphi_x^2; x) &= L_{n,\alpha}^* ((t - x)^2; x) = L_{n,\alpha}^* (e_2; x) - 2x L_{n,\alpha}^* (e_1; x) \\ &\quad + x^2 L_{n,\alpha}^* (e_0; x) \end{aligned} \quad (3.106)$$

Yukarıdaki eşitlikte birinci terimde Lemma 3.2.3 (iii), ikinci terimde Lemma 3.2.3 (ii) ve üçüncü terimde Lemma 3.2.3 (i) yazılırsa;

$$\begin{aligned}
L_{n,\alpha}^* (\varphi_x^2; x) &= \frac{n^2+n(4\alpha-3)}{(n-2)(n-1)} x^2 + \frac{(4n+10\alpha-10)}{(n-2)(n-1)} x + \frac{2}{(n-2)(n-1)} - 2x \left(\frac{n+2(\alpha-1)}{n-1} x + \frac{1}{n-1} \right) + x^2 \\
&= \left(\frac{n^2+n(4\alpha-3)}{(n-2)(n-1)} - 2 \frac{n+2(\alpha-1)}{n-1} + 1 \right) x^2 + \left(\frac{(4n+10\alpha-10)}{(n-2)(n-1)} - \frac{2}{n-1} \right) x \\
&+ \frac{2}{(n-2)(n-1)} = \frac{2}{(n-2)(n-1)} [(n+4\alpha-3)x^2 + (n+5\alpha-3)x + 1]
\end{aligned} \tag{3.107}$$

eşitliğinden,

$$L_{n,\alpha}^* (\varphi_x^2; x) = \frac{2}{(n-2)(n-1)} [(n+4\alpha-3)x^2 + (n+5\alpha-3)x + 1] \tag{3.108}$$

olur.

iv. $\varphi_x^r(t)$, $r = 4$ için,

$$\begin{aligned}
\varphi_x^4(t) &= (t-x)^4 = t^4 - 4t^3x + 6t^2x^2 - 4tx^3 + x^4 \\
&= e_4(t) - 4xe_3(t) + 6x^2e_2(t) - 4x^3e_1(t) + x^4e_0(t)
\end{aligned} \tag{3.109}$$

$L_{n,\alpha}^*$ operatörünün linerlik özelliğinden

$$\begin{aligned}
L_{n,\alpha}^* (\varphi_x^4; x) &= L_{n,\alpha}^* (e_4(t), x) - 4xL_{n,\alpha}^* (e_3; x) + 6x^2L_{n,\alpha}^* (e_2; x) \\
&- 4x^3L_{n,\alpha}^* (e_1; x) + x^4L_{n,\alpha}^* (e_0; x)
\end{aligned} \tag{3.110}$$

yazılır. Yukarıdaki eşitlikte birinci terimde Lemma 3.2.3 (v), ikinci terimde Lemma 3.2.3 (iv), üçüncü terimde Lemma 3.2.3 (iii), dördüncü terimde Lemma 3.2.3 (ii) ve beşinci terimde Lemma 3.2.3 (i) yazılırsa;

$$\begin{aligned}
L_{n,\alpha}^* (\varphi_x^4; x) &= \frac{n^4+n^3(8\alpha-2)+n^2(24\alpha-13)+n(16\alpha-10)}{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)} x^4 \\
&+ \frac{16n^3+n^2(108\alpha-60)+n(108\alpha-76)}{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)} x^3 + \frac{72n^2+n(384\alpha-312)}{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)} x^2 \\
&+ \frac{96n+336\alpha-336}{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)} x + \frac{24}{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -4x \left(\frac{n^3 + n^2(6\alpha - 3) + n(6\alpha - 4)}{(n-3)(n-2)(n-1)} x^3 + \frac{9n^2 + n(42\alpha - 33)}{(n-3)(n-2)(n-1)} x^2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{18n + 54\alpha - 54}{(n-3)(n-2)(n-1)} x + \frac{6}{(n-3)(n-2)(n-1)} \right) \\
& + 6x^2 \left(\frac{n^2 + n(4\alpha - 3)}{(n-2)(n-1)} x^2 + \frac{(4n + 10\alpha - 10)}{(n-2)(n-1)} x + \frac{2}{(n-2)(n-1)} \right) \\
& - 4x^3 \left(\frac{n + 2(\alpha - 1)}{n-1} x + \frac{1}{n-1} \right) + x^4 \\
& = \frac{12(x+1)}{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)} \left[\begin{aligned} & \{n^2 + n(16\alpha - 3) + 16\alpha - 14\}x^3 \\ & + \left\{ \begin{aligned} & n^2 + n(14\alpha + 3) \\ & + 44\alpha - 38 \end{aligned} \right\} x^2 \\ & + (6n + 28\alpha - 22)x + 2 \end{aligned} \right] \tag{3.111}
\end{aligned}$$

Eşitliğinden

$$L_{n,\alpha}^* (\varphi_x^4; x) = \frac{12(x+1)}{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)} \left[\begin{aligned} & \{n^2 + n(16\alpha - 3) + 16\alpha - 14\}x^3 \\ & + \left\{ \begin{aligned} & n^2 + n(14\alpha + 3) + 44\alpha - 38 \\ & + (6n + 28\alpha - 22)x + 2 \end{aligned} \right\} x^2 \end{aligned} \right] \tag{3.112}$$

olur.

Lemmanın ispatı tamamlanır.

3.3. Ağırlıklı Uzaylarda Korovkin Teoremi

3.3.1. Tanım

$C_B[0, \infty)$ sınırlı ve sürekli fonksiyon uzaylarının normu;

$$\|f\|_{C_B} = \sup_{x \geq 0} |f(x)| \tag{3.113}$$

biçimindedir. $[0, \infty)$ aralığı üzerinde tanımlı ve $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{1+x^2} < \infty$ koşulunu sağlayan fonksiyonlar kümesi E olsun.

3.3.2. Lemma

$L_{n,\alpha}^*(x)$ operatör dizisi, $[0, A]$ aralığı üzerinde $C_B[0, \infty) \cap E$ uzayının her bir elemanına düzgün yakınsar. Yani $L_{n,\alpha}^* \Rightarrow f$ dır ($\forall A \in [0, \infty)$).

İspat

$L_{n,\alpha}^*(e_i; x) \rightarrow e_i(x)$, $i = 0, 1, 2$ olduğunu göstermek yeterlidir. Lemma 3.2.3'e göre;

i. $i = 0$ için,

$$L_{n,\alpha}^*(e_0; x) = 1 \quad (3.114)$$

olduğundan;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_{n,\alpha}^*(e_0; x) = e_0(x) \quad (3.115)$$

olur.

ii. $i = 1$ için,

$$L_{n,\alpha}^*(e_1; x) = \frac{n+2(\alpha-1)}{n-1}x + \frac{1}{n-1} \quad (3.116)$$

olduğundan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_{n,\alpha}^*(e_1; x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{n+2(\alpha-1)}{n-1} \right) x + \frac{1}{n-1} \right) = e_1(x) \quad (3.117)$$

olur.

iii. $i = 2$ için,

$$L_{n,\alpha}^*(e_2; x) = \left(\frac{n^2+n(4\alpha-3)}{(n-2)(n-1)} \right) x^2 + \left(\frac{4n+10\alpha-10}{(n-2)(n-1)} \right) x + \frac{2}{(n-2)(n-1)} \quad (3.118)$$

olduğundan,

$$L_{n,\alpha}^*(e_2; x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{n^2 + n(4\alpha - 3)}{(n-2)(n-1)} \right) x^2 + \left(\frac{4n + 10\alpha - 10}{(n-2)(n-1)} \right) x + \frac{2}{(n-2)(n-1)} \right) = e_2(x) \quad (3.119)$$

olur.

O halde Korovkin tip teorem sağlanır. $[0, A]$ aralığında düzgün yakınsama vardır.

Şimdi ağırlıklı uzaylarda yaklaşım özelliklerini inceleyelim.

3.3.3. Teorem

Her $f \in C_\rho^*[0, \infty)$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_{n,\alpha}^*(f; x) - f\|_\rho = 0 \quad (3.120)$$

sağlanır.

İspat

$f \in C_\rho^*[0, \infty)$ ve $x \in [0, \infty)$ olsun. Lemma 3.3.2 den $L_{n,\alpha}^*(e_i; x) \rightarrow x^i$, $n \rightarrow \infty$ eşitliği sağlanmaktadır.

i. $i = 0$ için Lemma 3.2.3 (i) den

$$|L_{n,\alpha}^*(e_0; x) - e_0(x)| = 0 \quad (3.121)$$

olduğundan

$$\|L_{n,\alpha}^*(e_0) - e_0\|_\rho = 0 \quad (3.122)$$

bulunur.

ii. $i = 1$ için Lemma 3.2.3 (ii) den

$$|L_{n,\alpha}^*(e_1; x) - e_1(x)| = \left| \left(\frac{n+2(\alpha-1)}{n-1} x + \frac{1}{n-1} \right) - x \right| \quad (3.123)$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \|L_{n,\alpha}^*(e_1) - e_1\|_\rho &= \sup_{x \geq 0} \frac{|L_{n,\alpha}^*(e_1; x) - e_1(x)|}{1+x^2} \\ &\leq \left(\frac{n+2(\alpha-1)}{n-1} - 1 \right) \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{n-1} \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{1}{1+x^2} \end{aligned} \quad (3.124)$$

eşitsizliği yazılır.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|L_{n,\alpha}^*(e_1) - e_1\|_\rho \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{n+2(\alpha-1)}{n-1} - 1 \right) \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{n-1} \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{1}{1+x^2} \right) \end{aligned} \quad (3.125)$$

olup,

$$\|L_{n,\alpha}^*(e_1) - e_1\|_\rho = 0 \quad (3.126)$$

bulunur.

iii. $i = 2$ için Lemma 3.2.3 (iii) den

$$|L_{n,\alpha}^*(e_2; x) - e_2(x)| = \left| \frac{n^2+n(4\alpha-3)}{(n-2)(n-1)} x^2 + \frac{(4n+10\alpha-10)}{(n-2)(n-1)} x + \frac{2}{(n-2)(n-1)} - x^2 \right| \quad (3.127)$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \|L_{n,\alpha}^*(e_2) - e_2\|_\rho &= \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{|L_{n,\alpha}^*(e_2; x) - e_2(x)|}{1+x^2} \\ &\leq \left(\frac{n^2+n(4\alpha-3)}{(n-1)(n-2)} - 1 \right) \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{4n+10\alpha-10}{(n-1)(n-2)} \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{x}{1+x^2} + \frac{2}{(n-1)(n-2)} \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_{n,\alpha}^*(e_2) - e_2\|_\rho \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{n^2 + n(4\alpha - 3)}{(n-1)(n-2)} - 1 \right) \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{4n+10\alpha-10}{(n-1)(n-2)} \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{x}{1+x^2} + \frac{2}{(n-1)(n-2)} \sup_{x \in [0, \infty)} \frac{1}{1+x^2} \right)$$

$$\|L_{n,\alpha}^*(e_2; x) - x^2\|_\rho = 0 \quad (3.128)$$

bulunur.

Böylece ispat tamamlanmıştır.

3.4. $L_{n,\alpha}^*$ Operatörünün Noktasal Yaklaşımı

α –Baskakov-Durrmeyer tip operatörler için bir yaklaşım derecesi, süreklilik modülleri ve Petree-K fonksiyoneli yardımıyla elde edilmiştir.

3.4.1. Tanım

$C_B^2[0, \infty) = \{g \in C_B[0, \infty): g', g'' \in C_B[0, \infty)\}$ uzayı, sınırlı ve sürekli fonksiyon uzayı $C_B[0, \infty)$ nin bir alt uzayı olup üzerindeki norm,

$$\|g\|_{C_B^2} = \|g\|_{C_B} + \|g'\|_{C_B} + \|g''\|_{C_B} \quad (3.129)$$

biçimindedir.

3.4.2. Lemma

$g \in C_B^2[0, \infty)$ ve (P_n) operatörler dizisi, $P_n(1; x) = 1$ özelliğini sağlayan bir pozitif lineer operatör dizisi,

$$|P_n(g; x) - g(x)| \leq \|g'\|_{C_B} \sqrt{(P_n(t-x)^2; x)} + \frac{1}{2} \|g''\|_{C_B} (P_n(t-x)^2; x) \quad (3.130)$$

eşitsizliğini sağlar.

3.4.3. Lemma

$f \in C[a, b]$ ve $h \in \left(0, \frac{b-a}{2}\right)$. f_h , ikinci mertebeden steklov fonksiyon olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır [14].

$$i. \|f - f_h\|_{C[0,a]} \leq \frac{3}{4} \omega_2(f; h) \quad (3.131)$$

$$ii. \|f_h''\|_{C[0,a]} \leq \frac{3}{2h^2} \omega_2(f; h) \quad (3.132)$$

3.4.4. Teorem

Her $f \in C_B[0, \infty)$ ve $0 \leq x \leq a$, $a > 0$ için $\delta_n(x) = L_{n,\alpha}^*(\varphi_x^2; x)$ olmak üzere,

$$|L_{n,\alpha}^*(f; x) - f(x)| \leq 2\omega(f; \sqrt{\delta_n(x)}) \quad (3.133)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

$f \in C_B[0, \infty)$ olsun. Herhangi bir $0 \leq x \leq a$, $a > 0$, için Tanım 2.2 iv' den,

$$|f(t) - f(x)| \leq \left(\frac{|t-x|}{\delta} + 1\right) \omega(f; \delta) \quad (3.134)$$

yazılır. Bu eşitsizliğe $L_{n,\alpha}^*$ operatörleri uygulanırsa

$$\begin{aligned} |L_{n,\alpha}^*(f; x) - f(x)| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \int_0^{\infty} P_{n,k}(t) \left(\frac{|t-x|}{\delta} + 1\right) \omega(f; \delta) dt \\ &\leq \left\{1 + \frac{1}{\delta} \left(\sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \int_0^{\infty} P_{n,k}(t) |t-x| dt\right)\right\} \omega(f; \delta) \end{aligned} \quad (3.135)$$

olur. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden;

$$\begin{aligned}
|L_{n,\alpha}^*(f; x) - f(x)| &\leq \left\{ 1 + \frac{1}{\delta} \left(\sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \int_0^{\infty} P_{n,k}(t) |t - x|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \omega(f; \delta) \\
&= \left\{ 1 + \frac{1}{\delta} (L_{n,\alpha}^*(\varphi_x^2; x))^{\frac{1}{2}} \right\} \omega(f; \delta)
\end{aligned} \tag{3.136}$$

olup,

$$\delta = \sqrt{\delta_n(x)} = \sqrt{L_{n,\alpha}^*(\varphi_x^2; x)} \tag{3.137}$$

alınırsa ispat tamamlanır.

3.4.5. Teorem

$f \in C[0, a]$, $\delta = \sqrt{\delta_n(x)} = \sqrt{L_{n,\alpha}^*(\varphi_x^2; x)}$ ve $\omega_2(f; \delta)$ ikinci süreklilik modülü olmak üzere $L_{n,\alpha}^*(f; x)$ operatörü için,

$$|L_{n,\alpha}^*(f; x) - f(x)| \leq \frac{2}{a} \|f\|_{C[0,a]} \delta^2 + \frac{3}{4} (a + 2 + h^2) \omega_2(f; \delta) \tag{3.138}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

f_h Steklov fonksiyonu ve Lemma 3.2.3 ve $L_{n,\alpha}^*$ operatörlerinin lineerliğinden;

$$\begin{aligned}
|L_{n,\alpha}^*(f; x) - f(x)| &= |L_{n,\alpha}^*(f - f_h + f_h; x) - (f - f_h + f_h)(x)| \\
&= |L_{n,\alpha}^*(f - f_h + f_h; x) - (f - f_h + f_h)(x)| \\
&= |L_{n,\alpha}^*(f - f_h; x) - (f - f_h)(x) + L_{n,\alpha}^*(f_h; x) - f_h(x)| \\
&\leq |L_{n,\alpha}^*(f - f_h; x)| + |(f - f_h)(x)| + |L_{n,\alpha}^*(f_h; x) - f_h(x)| \\
&\leq |L_{n,\alpha}^*(\|f - f_h\|_{C[0,a]}; x)| + \|f - f_h\|_{C[0,a]} + |L_{n,\alpha}^*(f_h; x) - f_h(x)| \\
&\leq 2\|f - f_h\|_{C[0,a]} + |L_{n,\alpha}^*(f_h; x) - f_h(x)| \text{ olup,} \\
|L_{n,\alpha}^*(f; x) - f(x)| &\leq 2\|f - f_h\|_{C[0,a]} + |L_{n,\alpha}^*(f_h; x) - f_h(x)|
\end{aligned} \tag{3.139}$$

$f_h \in C^2[0, a]$ olmak üzere ve Lemma 3.4.2 den;

$$\begin{aligned} |L_{n,\alpha}^*(f; x) - f(x)| &\leq \|f_h'\|_{C[0,a]} \sqrt{L_{n,\alpha}^*((e_1 - x)^2; x)} \\ &+ \frac{1}{2} \|f_h''\|_{C[0,a]} L_{n,\alpha}^*((e_1 - x)^2; x) \end{aligned} \quad (3.140)$$

Landau eşitsizliği ve ikinci süreklilik modülünden;

$$\|f_h\|_{C[0,a]} \leq \frac{2}{a} \|f_h\| + \frac{a}{2} \|f_h''\|_{C[0,a]} \leq \frac{2}{a} \|f_h\|_{C[0,a]} + \frac{3a}{4} \frac{1}{h^2} \omega_2(f; h) \quad (3.141)$$

olur. $\delta = L_{n,\alpha}^*(\varphi_x^2; x)^{\frac{1}{4}}$ seçilirse,

$$|L_{n,\alpha}^*(f_h; x) - f_h(x)| \leq \frac{2}{a} \|f_h\|_{C[0,a]} h^2 + \frac{3a}{4} \omega_2(f; h) + \frac{3}{4} h^2 \omega_2(f; h) \quad (3.142)$$

Eş, 3.139, Eş, 3.140, Eş, 3.141 ve Eş, 3.142 yerlerine yazılır ve ikinci süreklilik modülü kullanılırsa,

$$|L_{n,\alpha}^*(f; x) - f(x)| \leq \frac{2}{a} \|f_h\|_{C[0,a]} \delta^2 + \frac{3}{4} (a + 2 + h^2) \omega_2(f; \delta) \quad (3.143)$$

elde edilir.

3.4.6. Teorem

Her $f \in C_B^2[0, \infty)$ ve $0 \leq x \leq a, a > 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n-1)(L_{n,\alpha}^*(f; x) - f(x)) = (1 + 2ax - x^2)f'(x) + 2(x + x^2)f''(x) \quad (3.144)$$

limiti gerçekleşir.

İspat

$x \in [0, \infty)$ için sabit bir sayı; $\forall t \in [0, \infty)$. Taylor serisinden;

$$f(t) - f(x) = (t - x)f'(x) + \frac{1}{2}(t - x)^2 f''(x) + \varphi(t, x)(t - x)^2 \quad (3.145)$$

Burada $\varphi(t, x) \in C_B^2[0, \infty)$ ve $\lim_{t \rightarrow x} \varphi(t, x) = 0$ 'dır.

3.149 eşitsizliğine $L_{n,\alpha}^*$ operatörüne uygulanırsa;

$$\begin{aligned} L_{n,\alpha}^*(f; x) - f(x) &= f'(x)L_{n,\alpha}^*(t - x; x) + \frac{1}{2}L_{n,\alpha}^*((t - x)^2; x)f''(x) \\ &+ L_{n,\alpha}^*(\varphi(t, x)(t - x)^2) \end{aligned} \quad (3.146)$$

Eşitsizliğin her iki tarafı n'' ile çarpılıp $n \rightarrow \infty$ için limit alınır,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(L_{n,\alpha}^*(f; x) - f(x) \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n f'(x) L_{n,\alpha}^*(t - x; x) \\ &+ \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} n L_{n,\alpha}^*((t - x)^2; x) f''(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} n L_{n,\alpha}^*(\varphi(t, x)(t - x)^2) \end{aligned} \quad (3.147)$$

yazılır. Lemma 3.2.3 ü kullanarak,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(L_{n,\alpha}^*(f; x) - f(x) \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n-1} [x(2\alpha - 1) + 1] \right) f'(x) \\ &+ \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{2}{(n-2)(n-1)} [(n + 4\alpha - 3)x^2 + (n + 5\alpha - 3)x + 1] \right) f''(x) \\ &+ \lim_{n \rightarrow \infty} (n - 1) L_{n,\alpha}^*(\varphi(t, x)(t - x)^2) = ((2\alpha - 1)x + 1)f'(x) + (x^2 + x)f''(x) \\ &+ \lim_{n \rightarrow \infty} n L_{n,\alpha}^*(\varphi(t, x)(t - x)^2) \end{aligned} \quad (3.148)$$

olur.

Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki üçüncü terime Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa,

$$n L_{n,\alpha}^*(\varphi(t, x)(t - x)^2) \leq \sqrt{n^2 L_{n,\alpha}^*((e_1 - x)^4) L_{n,\alpha}^*(\varphi^2(t, x))} \quad (3.149)$$

olup

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 L_{n,\alpha}^*((e_1 - x)^4) = \\
& \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{12(x+1)}{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)} \right. \\
& \quad \left. \left[\{n^2 + n(16\alpha - 3) + 16\alpha - 14\}x^3 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \{n^2 + n(14\alpha + 3) + 44\alpha - 38\}x^2 + (6n + 28\alpha - 22)x + 2 \right] \right) \\
& = 12(x+1)(x^3 + x^2)
\end{aligned} \tag{3.150}$$

olduğu için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n-1) L_{n,\alpha}^*(\varphi(t, x)(t-x)^2) = 0 \tag{3.151}$$

bulunur. Böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n-1) \left(L_{n,\alpha}^*(f; x) - f(x) \right) = ((2\alpha - 1)x + 1)f'(x) + (x^2 + x)f''(x) \tag{3.152}$$

elde edilir.

Şimdi yakınsama oranını Lipschitz yardımıyla hesaplayalım.

3.4.7. Tanım

$f \in C[0, a)$, $a > 0$ ve M_f pozitif bir sabit. Herhangi bir $\gamma \in (0, 1]$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq M_f |t - x|^\gamma \tag{3.153}$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonlarının sınıfına Lipschitz sınıfı denir ve $Lip_M \gamma$ ile gösterilir. Burada M_f Lipschitz sabiti olarak adlandırılır.

3.4.8. Teorem

$\gamma \in (0, 1]$ ve $M_f > 0$ olmak üzere $f \in Lip_M \gamma$ fonksiyonu için,

$$|L_{n,\alpha}^*(f; x) - f(x)| \leq M_f L_{n,\alpha}^*(\varphi_x^2; x)^{\frac{\gamma}{2}} \tag{3.154}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

$f \in Lip_M \gamma$ olduğu için

$$|f(t) - f(x)| \leq M_f |t - x|^\gamma \quad (3.155)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik yardımıyla,

$$\begin{aligned} |L_{n,\alpha}^*(f; x) - f(x)| &\leq L_{n,\alpha}^*(|f(t) - f(x)|; x) \\ &\leq M_f L_{n,\alpha}^*(|t - x|^\gamma; x) \\ &\leq M_f \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \int_0^\infty P_{n,k}(t) |t - x|^\gamma dt \end{aligned} \quad (3.156)$$

eşitsizliği yazılır. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki integral,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty P_{n,k}(t) |t - x|^\gamma dt &= \int_0^\infty \left(P_{n,k}(t) \right)^{\frac{2-\gamma}{2}} \left(P_{n,k}(t) \right)^{\frac{\gamma}{2}} (|t - x|^2)^{\frac{\gamma}{2}} dt \\ &= \int_0^\infty \left(P_{n,k}(t) \right)^{\frac{2-\gamma}{2}} (P_{n,k}(t) |t - x|^2)^{\frac{\gamma}{2}} dt. \end{aligned} \quad (3.157)$$

biçiminde düzenlenir.

Hölder eşitsizliğinden, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, ve $\frac{1}{p} = \frac{2-\gamma}{2}, \frac{1}{q} = \frac{\gamma}{2}$ için,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty P_{n,k}(t) |t - x|^\gamma dt &\leq \left(\int_0^\infty \left(\left(P_{n,k}(t) \right)^{\frac{2-\gamma}{2}} \right)^{\frac{2}{2-\gamma}} dt \right)^{\frac{2-\gamma}{2}} \\ &\left(\int_0^\infty \left(\left(P_{n,k}(t) |t - x|^2 \right)^{\frac{\gamma}{2}} \right)^{\frac{2}{\gamma}} dt \right)^{\frac{\gamma}{2}} \leq \left(\int_0^\infty P_{n,k}(t) dt \right)^{\frac{2-\gamma}{2}} \left(\int_0^\infty (P_{n,k}(t) |t - x|^2) dt \right)^{\frac{\gamma}{2}} \end{aligned} \quad (3.158)$$

eşitsizliği yazılır. O halde,

$$\begin{aligned}
|L_{n,\alpha}^*(f; x) - f(x)| &\leq M_f \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \int_0^{\infty} P_{n,k}(t) |t - x|^\gamma dt \\
&\leq M_f \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \left(\int_0^{\infty} P_{n,k}(t) dt \right)^{\frac{2-\gamma}{2}} \left(\int_0^{\infty} P_{n,k}(t) |t - x|^2 dt \right)^{\frac{\gamma}{2}} \right\} \\
&= M_f \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left(P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \right)^{\frac{2-\gamma}{2}} \left(P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \right)^{\frac{\gamma}{2}} \left(\int_0^{\infty} P_{n,k}(t) dt \right)^{\frac{2-\gamma}{2}} \times \left(\int_0^{\infty} P_{n,k}(t) |t - \right. \right. \\
&x|^2 dt \left. \left. \right)^{\frac{\gamma}{2}} \right\} = M_f \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left(P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \int_0^{\infty} P_{n,k}(t) dt \right)^{\frac{2-\gamma}{2}} \left(P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \int_0^{\infty} P_{n,k}(t) |t - \right. \right. \\
&x|^2 dt \left. \left. \right)^{\frac{\gamma}{2}} \right\} \tag{3.159}
\end{aligned}$$

toplam ifadesine Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
|L_{n,\alpha}^*(f; x) - f(x)| &\leq M_f \left(\sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \int_0^{\infty} P_{n,k}(t) dt \right)^{\frac{2-\gamma}{2}} \\
&\left(\sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}^{(\alpha)}(x) \int_0^{\infty} P_{n,k}(t) |t - x|^2 dt \right)^{\frac{\gamma}{2}} \leq M_f L_{n,\alpha}^*(\varphi_x^2; x)^{\frac{\gamma}{2}} \tag{3.160}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

3.4.9. Teorem

Her $g \in C_B^2[0, \infty)$ ve $\Delta_n(x) = \frac{2\alpha-1}{n-1}x + \frac{1}{n-1}$ için $n > 2$

$$|L_{n,\alpha}^*(g; x) - g(x)| \leq \left(\Delta_n(x) - \frac{L_{n,\alpha}^*(\varphi_x^2; x)}{2} \right) \|g\|_{C_B^2} \tag{3.162}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

c, x ile t arasında bir sayı olmak üzere ve $g \in C_B^2[0, \infty)$ için Taylor seri açılımı,

$$g(t) = \frac{(t-x)^2}{2} g''(c) + g'(x)(t-x) + g(x) \quad (3.163)$$

biçiminde yazılır ve $L_{n,\alpha}^*$ operatörünü uygulanırsa;

$$L_{n,\alpha}^*(g; x) - g(x) = \frac{g''(c)}{2} L_{n,\alpha}^*((t-x)^2; x) + g'(x) L_{n,\alpha}^*((t-x); x) \quad (3.164)$$

olur.

$$\begin{aligned} |L_{n,\alpha}^*(g; x) - g(x)| &\leq \left(\frac{2\alpha-1}{n-1} x + \frac{1}{n-1} \right) \|g'\|_{C_B} \\ &+ \left(\frac{2n+2(4\alpha-3)}{(n-2)(n-1)} x^2 + \frac{2n+2(5\alpha-3)}{(n-2)(n-1)} x + \frac{2}{(n-2)(n-1)} \right) \frac{\|g''\|_{C_B}}{2} \end{aligned} \quad (3.165)$$

eşitsizliğinden

$$\|g'\|_{C_B} \leq \|g\|_{C_B^2} \text{ ve } \|g''\|_{C_B} \leq \|g\|_{C_B^2} \quad (3.166)$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} |L_{n,\alpha}^*(g; x) - g(x)| &\leq \left(\frac{2\alpha-1}{n-1} x + \frac{1}{n-1} \right) \|g\|_{C_B^2} \\ &+ \left(\frac{\frac{2n+2(4\alpha-3)}{(n-2)(n-1)} x^2}{+ \frac{2n+2(5\alpha-3)}{(n-2)(n-1)} x + \frac{2}{(n-2)(n-1)}} \right) \frac{\|g\|_{C_B^2}}{2} \end{aligned} \quad (3.167)$$

olur.

1968 yılında iki Banach uzayı arası genel ilişkiyi araştırmak için Petree-K fonksiyonu,

$$K_2(f; \delta) = \inf \left\{ \|f - g\|_{C_B} + \delta \|g\|_{C_B^2} : g \in C_B^2 \right\} \quad (3.168)$$

biçiminde tanımlandı [18].

Bu fonksiyonel ile ikinci süreklilik modülü arasında

$$K_2(f; \delta) \leq \mathcal{D}\omega_2(f; \sqrt{\delta}) \quad (3.169)$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde bir pozitif $\mathcal{D}$ sayısı vardır.

3.4.10. Teorem

Her $f \in C_B[0, \infty)$ için

$$k_n(x) = \frac{2\Delta_n(x) + L_{n,\alpha}^*(\varphi_x^2; x)}{4} \quad (3.170)$$

olmak üzere,

$$|L_{n,\alpha}^*(f; x) - f(x)| \leq 2 \mathcal{D}\omega_2(f; \sqrt{k_n(x)}) + \min(1, k_n(x)) \|f\|_{C_B} \quad (3.171)$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde bir pozitif $\mathcal{D}$ sayısı vardır.

İspat

Teorem 3.4.8 ile elde edilen sonuçlar yardımıyla, istenen teoremi ispatlıyoruz; dolayısıyla

$$\begin{aligned} |L_{n,\alpha}^*(f; x) - f(x)| &\leq |L_{n,\alpha}^*(f - g; x)| + |f(x) - g(x)| + |L_{n,\alpha}^*(g; x) - g(x)| \\ &\leq 2\|f - g\|_{C_B} + \left(\frac{2\Delta_n(x) + L_{n,\alpha}^*(\varphi_x^2; x)}{4} \right) \|g\|_{C_B^2} \\ &= 2\left(\|f - g\|_{C_B} + \left(\frac{L_{n,\alpha}^*(\varphi_x^2; x)}{4} + \frac{\Delta_n(x)}{2} \right) \|g\|_{C_B^2} \right) \end{aligned} \quad (3.172)$$

olur.

Şimdi infimumunu alır ve Eş. 3.169 kullanılırsa,

$$|L_{n,\alpha}^*(f; x) - f(x)| \leq 2K_2 \left(f; \left(\frac{L_{n,\alpha}^*(\varphi_x^2; x)}{4} + \frac{\Delta_n(x)}{2} \right) \right) \quad (3.173)$$

K- fonksiyonelin tanımından

$$K_2(f; \delta) \leq \mathcal{D}\{\omega_2(f; \sqrt{\delta}) + \min(1, \delta)\|f\|_{C_B}\} \quad (3.174)$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde bir pozitif $\mathcal{D}$ sayısı vardır.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez birinci bölüm giriş olmak üzere üç bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde lineer operatör dizilerinin temel kavramları ve yaklaşıma dair temel teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde Baskakov-Durrmeyer tip operatörler dizisinin yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Yaklaşım teorisi, dünyadaki birçok matematikçi tarafından çalışılan Matematiksel Analiz'in önemli araştırma konularından biridir. Bu teori, matematikte analizin harmonik analiz, fonksiyonel analiz, nümerik analizi, Fourier analizi gibi birçok dalıyla ilişkili olmasının yanı sıra; operatör teori, olasılık teorisi, sayılar teorisi, istatistik teorisi gibi diğer bilim dallarıyla da ilişkilidir. Gerçekte sadece matematikte değil, temel bilimler ve mühendislik bilimleri başta olmak üzere, diğer alanlardaki birçok bilimsel probleme ışık tutması, yaklaşım teorisinin günden güne öneminin artmasına neden olmuştur. Günümüz teknolojisinde etkili olan bu teorinin, matematik dünyasında ortaya çıkan gelişmelerinin takibi ile çağımıza çok büyük katkıları olacağı açıktır. İşte bu nedenle ortaya konan yeni lineer pozitif operatörler ve onların günümüze uyarlanması oldukça önemlidir. Bu tezde tanımlanan klasik operatörlerden daha iyi sonuçlar veren genelleştirilmiş operatör dizilerinin matematikte ve onunla ilişkili diğer bilimlerde meydana gelen gelişmelere katkı sağlayacağı düşünülmektedir.



KAYNAKLAR

1. Şimşek, E. (2019). *Yaklaşım Teorisinde Q-Pozitif Lineer Operatör Dizilerinin Genelleştirilmesi*. Doktora Tezi, Mersin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Mersin, 11.
2. Weierstrass, K. (1885). Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 2, 633-639.
3. Bernstein, S. (1912). Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités. *Сообщения Харьковскаго математическаго общества*, 13(1), 1-2.
4. Bohman, H. (1952). On approximation of continuous and of analytic functions. *Arkiv för Matematik*, 2(1), 43-56.
5. Korovkin, P. P. (1953). On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. In *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 90(953), 961-964.
6. Gadjiev, A. D. (1976). On Korovkin Type Theorems. *Mathematical Notes of The Academy of Sciences of The Ussr*, 20(5), 995-998.
7. Gadzhiev, A. D. O. (1974). The convergence problem for a sequence of positive linear operators on unbounded sets, and theorems analogous to that of PP Korovkin. In *Doklady Akademii Nauk* (218(5), 1001-1004). Russian Academy of Sciences.
8. Nasiruzzaman, M., Rao, N., Wazir, S., and Kumar, R. (2019). Approximation on parametric extension of Baskakov–Durrmeyer operators on weighted spaces. *Journal of Inequalities and Applications*, (1), 1-11.
9. Gupta, V. (1994). A note on modified Baskakov type operators. *Approximation Theory and Its Applications*, 10(3), 74-78.
10. Erençin, A. (2011). Durrmeyer type modification of generalized Baskakov operators. *Applied mathematics and computation*, 218(8), 4384-4390.
11. Hacısalihlioğlu, H. H., ve Hacıyev, A. (1995). *Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı* (Birinci Baskı). Ankara: Ankara Üniversitesi Basımevi, 1-100.
12. Rudin, W. (1953). *Principles of Mathematical Analysis*. Newyork: Mcgraw-Hill, 15-20.
13. Altomare, F. and Campiti, M. (1994). *Korovkin Type Approximation Theory And Its Applications*. Berlin-New York: Walter De Gruyter, 195-352.
14. Steklov, V. A. (1957). *On The Asymptotic Representation of Certain Functions Defined By a Linear Differentialequation of These Condorder and Their Application to The Problem of Expanding an Arbitrary Function in to a Series of These Functions*. Russian: Kharkow, 97-199.

15. Aral, A., and Erbay, H. (2019). Parametric generalization of Baskakov operators. *Mathematical Communications*, 24(1), 119-131.
16. Baskakov, V. A. (1957). An instance of a sequence of linear positive operators in the space of continuous functions. In *Doklady Akademii Nauk*, 113(2), 249-251. Russian Academy of Sciences.
17. Cai, Q. B., Lian, B. Y., and Zhou, G. (2018). Approximation properties of λ -Bernstein operators. *Journal of inequalities and applications*, (1), 1-11.
18. Peetre, J. (1968). *A Theory of Interpolation of Normed Spaces*, Notas Mat. 39. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.
19. Ciupa, A. (1995). A class of integral Favard-Szász type operators. *Studia Universitatis Babes-Bolyai Mathematica*, 40(1), 39-47.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : BAŞOL, Kübra
Uyruğu : T.C.



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik	Devam ediyor
Lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik	2016
Lise	Malatya Anadolu Lisesi	2012

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2016-Halen	Ankara BİLTEM Koleji	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Altay, K. and Yüksel, İ. (2019, May). *Approximation by parametric extension of Baskakov-Durrmeyer type operators*. International Workshop on Dynamical Systems and Applications (IWDSA 2019): In Memory of Prof. Dr. Aydın Tiryaki, Gazi University, Ankara.

Hobiler

Yüzme, Gitar, Dans



GAZİ GELECEKTİR..