

**BAYES AĞLAR VE MARKOV AĞLARI KULLANAN
KÜMELEME YÖNTEMİNİN İNCELENMESİ VE BİR UYGULAMA**

Hülya OLMUŞ

**DOKTORA TEZİ
İSTATİSTİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KASIM 2007
ANKARA**

Hülya OLMUŞ tarafından hazırlanan BAYES AĞLAR VE MARKOV AĞLARI KULLANAN KÜMELEME YÖNTEMİNİN İNCELENMESİ VE BİR UYGULAMA adlı bu tezin Doktora tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Semra ORAL ERBAŞ

.....

Tez Danışmanı, İstatistik

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile İstatistik Anabilim Dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Öniz TOKTAMIŞ

.....

İstatistik, Hacettepe Üniversitesi

Prof. Dr. Semra ORAL ERBAŞ

.....

İstatistik, Gazi Üniversitesi

Prof. Dr. Müslim EKNİ

.....

İstatistik, Gazi Üniversitesi

Doç. Dr. Salih ÇELEBİOĞLU

.....

İstatistik, Gazi Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Cemal ATAKAN

.....

İstatistik, Ankara Üniversitesi

23/11/2007

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Doktora derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Nermin ERTAN

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Hülya OLMUŞ

**BAYES AĞLAR VE MARKOV AĞLARI KULLANAN
KÜMELEME YÖNTEMİNİN İNCELENMESİ VE BİR UYGULAMA
(Doktora Tezi)**

Hülya OLMUŞ

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Kasım 2007

ÖZET

Olasılıklı ağ modellerinin ortaya çıkışıyla, olasılık belirsizliğin kabul edilebilir ölçülerinden biri olmuştur. Belirsizliğin bir ölçüsü olarak, olasılığı kullanan uzman sistemler, olasılıklı uzman sistemlerdir. Değişkenlerin ortak olasılık fonksiyonunun tanımlanmasında ortaya çıkan zorluklardan dolayı, olasılıklı ağ modelleri kullanılır. Bayes ve Markov ağları içeren bu ağ modelleri, değişkenler arasındaki ilişkilerin grafiksel gösterimine dayanır. Olasılık teorisi ve grafik teorisinin birlikte kullanımı ile elde edilen modellere olasılıklı ağ modelleri denir. Bu modelleri oluşturma, istatistik modellerini oluşturma bir çeşidi olup, bu modelleri göstermek için grafikler kullanılır. Grafikler, ortak olasılık fonksiyonlarının gösterimini ve gözlemlerden etkili sonuç çıkarımlarını kolaylaştırmak için önemli rol oynarlar. Böyle grafiklerde, değişkenler düğümleri, kenarlar ise değişkenler arası bağımlılıkları ve nedensel etkiyi gösterir. Olasılıklı ağ modellerin en çok kullanılan çeşitlerinden biri, Markov ağ modelleri yön verilmemiş grafiklerle belirlenir. Bu modellerin diğer bir çeşidi Bayes ağlar ise, yön verilmiş döngüsel olmayan grafiklerle belirlenir. Bu çalışmada, model yapısı ve koşullu olasılıklar için uzman görüşler yerine, veriden tahmin etme işlemi yapılmıştır. Ayrıca, veri tabanının kayıp veri içermediği durum ele alınmıştır.

Bir grafiğin ortak olasılık fonksiyonunun yapısını elde etmek için değişkenleri bir araya getiren metoda kümeleme metodu denir. Bu çalışmada, olasılıklı ağ modellerinden Markov ve Bayes ağ modelleri için kümeleme metotları verilmiştir. Uygulamada, Ankara ili ve çevresinde meme kanserine yakalanmış 74 kadın üzerinde bir anket çalışması yapılmıştır. Bu çalışmada, ele alınan değişkenler için en iyi model UnBBayes programı kullanılarak elde edilmiştir. En iyi Bayes ağ modeli elde edildikten sonra, bu modele uygun Markov ağ modeli bulunmuştur. Elde edilen bu modeller için kümeleme algoritmaları uygulanmıştır. Böylelikle, ele alınan değişkenlerin kümelenmesi gösterilmiştir. Ayrıca, modele uygun düğümlerin numaralanması, küme grafikleri, moral grafik gibi bilgiler içinde HUGIN paket programından yararlanılmıştır.

Bilim Kodu : 205.1.066

Anahtar Kelimeler : Bayes ağlar, Markov ağlar, öğrenme, kümeleme metotları, yön verilmiş grafik, yön verilmemiş grafik, üçgenleştirilmiş grafik, küme grafikleri, küme ağacı

Sayfa Adedi : 130

Tez Yöneticisi : Prof. Dr. Semra ORAL ERBAŞ

**AN EXAMINATION OF CLUSTERING METHOD USING BAYESIAN AND
MARKOV NETWORKS AND AN APPLICATION**

(Ph.D. Thesis)

Hülya OLMUŞ

**GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

November 2007

ABSTRACT

Since probabilistic network models emerged, probability has become an acceptable measure for uncertainty. Expert systems which use probability as a measure of uncertainty are called probabilistic expert systems. Due to complications that arise in definition of joint probability function of variables, probabilistic network models are used. These network models that include Bayesian and Markov networks are based on the graphical representations of relationships among variables. Models obtained by the usage of probability theory and graph theory are called probabilistic network models. Formation of these models is a type of statistical model formation and graphs are used to represent these models. Graphs play an important role in displaying joint probability functions and facilitating the derivation of effective results from observations. In these graphs, variables represent nodes and the edges represent dependence between variables and causal effect. Markov network models, one of the probabilistic network models most frequently used are determined by undirected graphs. Bayesian networks, another type of these models, are determined by directed acyclic graphs. In the thesis study, estimation from data will be made instead of expert views for model structure and conditional probabilities. In addition, the case that the database does not have missing data will be considered.

The method that brings variables together to obtain the structure of joint probability function of a graph is called clustering method. In this study, clustering methods will be given for Markov and Bayesian network models which are probabilistic network models. In practice, a survey study has been made on 74 women who have breast cancer in and around Ankara province. For study, the best model for the variables in question was obtained by using UnBBayes program. After the best Bayesian network model is obtained, a Markov network model that fits the model has been found. Clustering algorithms have been applied on these obtained models. Thus, the clusters of the variables in question have been shown. In addition, HUGIN package program has been used for numbering of nodes suitable for the model and for information such as cluster graphs and moral graphs.

Science Code	: 205.1.066
Key Words	: Bayesian networks, Markov networks, learning, clustering methods, directed graphs, undirected graphs, triangulated graphs, cluster graphs, cluster tree
Page Number	: 130
Adviser	: Prof. Dr. Semra ORAL ERBAŞ

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren Hocam Prof. Dr. Semra ORAL ERBAŞ'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmam süresince manevi desteğini esirgemeyen arkadaşım Filiz KARDİYEN'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışmamın gerçekleşmesinde gösterdiği her türlü destek ve anlayıştan dolayı sevgili eşim Harun OLMUŞ'a ve aileme, benim manevi olarak güçlü olmamı sağlayan kızım Ceren'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	iv
ABSTRACT	vi
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
ÇİZELGELERİN LİSTESİ	xi
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	xiii
1. GİRİŞ	1
2. OLASILIK TEORİSİ	10
3. GRAFİK TEORİSİ	19
3.1. Temel Tanımlar ve Kavramlar	19
3.2. Yön Verilmemiş Grafikler	22
3.2.1. Yön verilmemiş grafik türleri.....	26
3.3. Yön Verilmiş Grafikler	29
3.3.1. Yön verilmiş grafik türleri	34
3.4. Üçgenleştirilmiş Grafikler.....	36
3.5. Koşullu Bağımsızlık Modelleri	47
4. OLASILIKLI AĞ MODELLERİ.....	52
4.1. Olasılıklı Ağ Modelleri	52
4.2. Markov Ağ Modelleri	55
4.3. Bayes Ağ Modelleri	60
4.3.1. Çokterimli Bayes ağlar.....	61

Sayfa

4.4. Bayes ve Markov Ağları Öğrenme	66
4.4.1. Bayes ağ modellerinde öğrenme	66
4.4.2. Bayes ağ arama algoritmaları	67
5. KÜME GRAFİKLERİ	71
5.1. Yön Verilmemiş Grafikler İçin Küme Grafiği ve Küme Ağacı	71
5.2. Yön Verilmiş Grafiklerde Küme Ağacı	76
6. KÜMELEME METOTLARI	82
6.1. Markov Ağlarda Kümeleme Metotları	82
6.2. Bayes Ağ Modellerinde Kümeleme Algoritması	90
7. UYGULAMA	92
8. SONUÇ	110
KAYNAKLAR	115
EKLER	119
EK-1 Terimler sözlüğü	120
EK-2 En iyi modelin elde edilmesinde UnBBayes program çıktısı	122
EK-3 En iyi model elde edildikten sonra küme ağacının elde edilişi için HUGIN program çıktısı	126
ÖZGEÇMİŞ	129

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 3.1. Şekil 3.27 (a) için koşullu bağımsızlıklar	51
Çizelge 4.1. (K_1, K_2, K_3, K_4) klikleri için ayıraç ve artık setleri.....	59
Çizelge 4.2. Şekil 4.5 için parametre tahminleri	64
Çizelge 7.1. Tedavi yöntemlerinden memenin tümünün alınıp alınmamasına ilişkin olasılıklar	94
Çizelge 7.2. Tedavi yöntemlerinden memenin tümünün alınıp alınmaması bilindiğinde, memenin bir kısmının alınıp alınmamasına ilişkin koşullu olasılıklar, $p(f e)$	94
Çizelge 7.3. Tedavi yöntemlerinden memenin bir kısmının alınıp alınmaması bilindiğinde, hormonal terapi alıp almamasına ilişkin koşullu olasılıklar, $p(i f)$	95
Çizelge 7.4. Tedavi yöntemlerinden memenin tümünün alınıp alınmaması bilindiğinde, protez meme kullanıp kullanmamasına ilişkin koşullu olasılıklar, $p(j e)$	95
Çizelge 7.5. Tedavi yöntemlerinden memenin tümünün alınıp alınmaması bilindiğinde, üzüntü geçirip geçirmeme durumuna ilişkin koşullu olasılıklar, $p(m e)$	95
Çizelge 7.6. Memenin tümünün alınıp alınmaması bilindiğinde, yapay meme yaptırmak isteyip istememesine ilişkin koşullu olasılıklar, $p(l e)$	95
Çizelge 7.7. Protez meme kullanıp kullanmaması bilindiğinde, memnun olup olmamasına ilişkin koşullu olasılıklar, $p(k j)$	96
Çizelge 7.8. Memesinde kanserin kendisi tarafından fark edilip edilmemesi bilindiğinde, mamografi ile tespit edilip edilmemesine ilişkin koşullu olasılıklar, $p(d c)$	96
Çizelge 7.9. Meme kanseri teşhisi öncesi kontrollerini yaptırap yaptırmaması bilindiğinde, memesinde kanserin kendisi tarafından fark edilip edilmemesine ilişkin koşullu olasılıklar, $p(c a)$	96

Çizelge	Sayfa
Çizelge 7.10. Meme kanseri teşhisi öncesi kontrollerini yaptırıp yaptırmaması bilindiğinde, lenf bezlerinde atlama olup olmama durumuna ilişkin koşullu olasılıklar, $p(b a)$	97
Çizelge 7.11. Tedavi yöntemlerinden memenin bir kısmının alınıp alınmaması, kemoterapi alıp almaması bilindiğinde, radyoterapi alıp almamasına ilişkin koşullu olasılıklar, $p(h g,f)$	97
Çizelge 7.12. Meme kanseri teşhisi öncesi kontrollerini yaptırıp yaptırmamasına ilişkin olasılıklar	97
Çizelge 7.13. Memesinde kanserin kendisi tarafından fark edilip edilmemesi bilindiğinde, tedavi yöntemlerinden kemoterapi görüp görmemesine ilişkin koşullu olasılıklar, $p(g c)$	97
Çizelge 7.14. Bayes ağ modelindeki değişkenlere ait marjinal olasılıklar	99
Çizelge 7.15. Şekil 7.1’de verilen model yapısının parametreleri için gerekli bilgiler	100
Çizelge 7.16. Model yapısına ilişkin parametreler ve olasılık dağılımları	101
Çizelge 7.17. Şekil 7.1’deki Bayes ağ modeli için elde edilen kümeler	103
Çizelge 7.18. Bağlantılı kümeler, kümelerin ayıraç setleri ve tablo büyüklükleri...	105
Çizelge 7.19. Potansiyel fonksiyonun sayısal değerleri	109

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 1.1. Beş değişkenden oluşan yön verilmemiş grafik.....	4
Şekil 1.2. Dört değişkenden oluşan yön verilmemiş grafik	5
Şekil 1.3. Yön verilmiş bir grafik ve her bir düğümün koşullu olasılıkları	5
Şekil 1.4. Beş değişkene ilişkin yön verilmiş döngüsel olmayan grafikte model yapısı ve koşullu olasılıklar.....	6
Şekil 1.5. Dört düğümden oluşan yön verilmiş bir grafik.....	7
Şekil 3.1. Dört düğümden oluşan bir grafik.....	21
Şekil 3.2. Dört düğümden oluşan bir grafik.....	22
Şekil 3.3. Dört düğümden oluşan tam grafik	23
Şekil 3.4. Tam kümeyi gösteren bir grafik.....	24
Şekil 3.5. D düğümünün komşuları	25
Şekil 3.6. $\{A,C\}$ kümesinin sınırı	26
Şekil 3.7. Yön verilmemiş grafik türleri	27
Şekil 3.8. Bağlantısız grafiklerin benzer iki gösterimi.....	27
Şekil 3.9. Bağlantılı yön verilmemiş grafik türleri	28
Şekil 3.10. On düğümden oluşan yön verilmiş grafik.....	29
Şekil 3.11. E düğümünün ataları ve torunları	30
Şekil 3.12. Yön verilmiş grafiğin ataya ilişkin farklı iki sıralaması	31
Şekil 3.13. On bir düğümden oluşan yön verilmiş bir grafik.....	33
Şekil 3.14. Şekil 3.13'den elde edilen moral grafik.....	33
Şekil 3.15. Yön verilmiş grafik türleri	34

Şekil	Sayfa
Şekil 3.16. Yön verilmiş grafik türleri	35
Şekil 3.17. E-G girişi ile bir yön verilmemiş grafik.....	37
Şekil 3.18. Üçgenleştirilmiş grafik.....	38
Şekil 3.19. Şekil 3.17'deki grafiğin üçgen hale getirilmiş iki farklı gösterimi	39
Şekil 3.20. Düğümlerin kusursuz numaralanmasının iki farklı gösterimi	40
Şekil 3.21. En büyük önemliliği arama algoritması ile elde edilen üçgenleştirilmiş grafiğin düğümlerinin kusursuz numaralanması	42
Şekil 3.22. Şekil 3.17 için En büyük önemliliği arama algoritması kullanılarak düğümlerin kusursuz sıralaması ve üçgenleştirilmiş grafik	44
Şekil 3.23. Şekil 3.17'deki grafik için iki farklı kusursuz numaralama.....	44
Şekil 3.24. En büyük önemliliği arama algoritması ile elde edilen üçgenleştirilmiş grafiğin kusursuz numaralanması	45
Şekil 3.25. Şekil 3.18 ile ilişkilendirilmiş düğümlerin kusursuz numaralaması ve klikler zinciri	46
Şekil 3.26. Dokuz düğümden oluşan yön verilmemiş grafik	50
Şekil 3.27. Beş düğüme ilişkin yön verilmiş döngüsel olmayan grafik.....	51
Şekil 4.1. Dört değişkenden oluşan bir yön verilmemiş grafik.....	56
Şekil 4.2. Altı düğümden oluşan bir yön verilmemiş grafik ve bu grafiğe ilişkin klik potansiyelleri.....	57
Şekil 4.3. Yön verilmemiş üçgenleştirilmiş grafik.....	58
Şekil 4.4. Yedi düğümden oluşan bir Bayes ağ modeli	61
Şekil 4.5. Bayes ağ için model yapısı, parametre tahminleri ve olasılık fonksiyonları.....	64
Şekil 5.1. Üçgenleştirilmiş yön verilmemiş grafik ve küme grafiği	72

Şekil	Sayfa
Şekil 5.2. Şekil 5.1 ile ilişkili küme ağacı.....	73
Şekil 5.3. $V=\{A, B, C, D, E, F\}$ üzerinde küme ağacı.....	74
Şekil 5.4. Küme ağacı olmama durumu	74
Şekil 5.5. Sekiz düğüme ilişkin Markov ağ modeli	76
Şekil 5.6. Dört düğüme ilişkin yön verilmiş grafik.....	77
Şekil 5.7. Yön verilmiş bir grafik	79
Şekil 5.8. Bir aile ağacının elde edilmesi için kullanılan üçgenleştirilmiş grafik	80
Şekil 5.9. Sekiz düğüme ilişkin Bayes ağ modeli	81
Şekil 7.1. On üç değişkenden oluşan en iyi Bayes ağ modeli.....	93
Şekil 7.2. Şekil 7.1 için moral grafik	102
Şekil 7.3. Düğümlerin numaralanması ve yön verilmemiş üçgenleştirilmiş grafik	103
Şekil 7.4. Yön verilmiş döngüsel olmayan grafik için küme grafiği	104
Şekil 7.5. Şekil 7.1 için elde edilen küme ağacı.....	105
Şekil 7.6. Bağlantılı kümeler, kümelerin ayıraç setleri ile birlikte küme ağacı.....	106

1. GİRİŞ

Yakın bir zamana kadar, model ve konuşma tanıma (model and speech recognition), oyunlar kuramı (game playing), deterministik ve stokastik sistemleri (deterministic and stochastic systems) içeren problemler elle yapılmaya çalışılıyordu. Çünkü problemlerin formülleri ve çözümleri sadece insanlarda bulunan birçok yeteneği (düşünme, gözlem, hafıza, öğrenme, görme, koklama...) kullanmayı gerektiriyordu. Bununla beraber, son 30 yıl içinde, birçok alanda yapılan araştırmalar sonucunda, bu problemlerin birçoğunun makineler tarafından formüle edilebileceği ve çözümlenebileceği görülmüştür. Yapay zeka (artificial intelligence), bu problemlerin çözümlenmesi için ortaya çıkan bir alandır. Barr ve Feigenbaum (1981), yapay zekayı aşağıdaki gibi tanımlar.

“Yapay zeka, zeki bilgisayar sistemlerinin düzenlenmesi ile ilgili Bilgisayar Biliminin bir parçasıdır. Bu sistemler, insan davranışında dil anlama, öğrenme, problem çözümü ve bunun gibi zeka ile ilişkilendirilen karakteristikleri ortaya çıkarır.”

Son zamanlarda, yapay zeka ile ilgili alanlar, uzman sistemler (expert systems), teori geliştirme (theorem proving), oyunlar kuramı, model ve konuşma tanıma, sinir ağları (neural networks) gibi birçok alt alandan oluşur. Bu çalışmada uzman sistemlerin özelliğiyle ilgilenilmiştir. Literatürde uzman sistemlerin birçok tanımı vardır [Castillo ve Alvarez, 1991; Durkin, 1994]. Bu tanımlardan genel olarak, bir uzman sistem, bilgisayar sistemi (yazılım ve donanım) olarak tanımlanır. Bu sistemlerin birçok uygulama alanı mevcuttur: imalat, tıp, mühendislik, uygulamalı bilimler, ulaşım, eğitim [Durkin, 1994].

Uzman sistemler belirsizlik (uncertainty) durumlarıyla ilgilenir. Önceleri uzman sistemlerde, stokastik veya belirsizlik durumlarıyla ilgilenmek için, olasılık ölçüsü seçilirdi [Cheeseman, 1985; Castillo ve Alvarez, 1991]. Ancak, işlem kolaylığı için, bağımsızlık varsayımlarının kullanılmasından kaynaklanan bazı problemler ortaya çıkmaktaydı. Bu nedenle, uzman sistemlerde, olasılık ölçüsünün pratik olmadığı

düşünülmüştü. Literatürde birçok alternatif belirsizlik ölçüleri önerilmiştir: kesinlik faktörleri (certainty factors), bulanık mantık (fuzzy logic), kanıt teorisi (theory of evidence). Bununla beraber, olasılıklı ağ modellerinin (Bayes ve Markov ağlar) ortaya çıkışıyla, olasılık belirsizliğinin kabul edilebilir ölçülerinden biri olmuştur. Belirsizliğin bir ölçüsü olarak olasılığı kullanan uzman sistemler, *olasılıklı uzman sistemler* (probabilistic expert systems) olarak adlandırılır [Spiegelhalter ve ark., 1993].

Daha önceleri, değişkenlerin ortak olasılık fonksiyonunun tanımlanmasında ortaya çıkan zorluklardan dolayı, olasılıklı uzman sistemlerin gelişimi yavaşlamıştır. Son 20 yıl süresince olasılıklı ağ modellerinin ortaya çıkışıyla bu zorlukların üstesinden gelinmiş ve olasılıklı uzman sistemler popüler bir konu olmuştur. Bayes ve Markov ağları içeren bu ağ modelleri, değişkenler arasındaki ilişkilerin grafiksel gösterimine dayalıdır.

Olasılıklı uzman sistemin bilgi alanı, $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ rastgele değişkenler kümesi ve bu rastgele değişkenlerin ortak olasılık fonksiyonu $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 'den oluşur. Buna göre, olasılıklı uzman sistemlerin bilgi alanını oluşturmak için değişkenlerin ortak olasılık fonksiyonunun belirlenmesi gerekir.

Olasılıklı uzman sistemler, belirsizliğin bir ölçüsü olarak olasılığı kullandığından, olasılık teorisi ile ilgili kavramlar oldukça önemlidir. Olasılık teorisi ve grafik teorisinin birlikte kullanımı ile elde edilen modellere *olasılıklı ağ modelleri* (probabilistic network models) denir. Bu modelleri oluşturma, istatistik modellerini oluşturma'nın bir çeşidi olup, bu modelleri göstermek için grafikler kullanılır. Grafikler, ortak olasılık fonksiyonlarının gösterimini ve gözlemlerden etkili sonuç çıkarımlarını kolaylaştırmak için, olasılık ve istatistiksel modellemede önemli rol oynarlar. Bu tür grafiklerde, değişkenler düğümleri, kenarlar ise değişkenler arası bağımlılıkları ve nedensel etkileri gösterir.

Birçok alanda belirsizlik söz konusu olduğundan, olasılıklı ağ modelleri en çok kullanılan yöntemlerden biridir. Olasılıklı ağ modelleri, karar destek sistemleri,

makine öğrenme, istatistik, planlama ve kontrol, hata-kontrol kodları, kusur tanıları, tıbbi tanılar, genetik, sosyal bilimler, son zamanlarda planlama ve kontrol, dinamik sistemler, zaman serileri, genel veri analizi gibi dallarda kullanılmaktadır.

Olasılıklı ağ modelleri, rastgele değişkenler arasındaki ilişkileri ve bu değişkenlere ilişkin ortak olasılık fonksiyonlarını belirlemek için kullanılır. Bu modellerin kullanımı, kolay yorumlanabilir ve kolay kullanılabilir olmaları nedeniyle son yıllarda önemli bir artış göstermiştir.

Olasılıklı ağ modellerin tanımlanması iki bileşenden oluşur. Bu bileşenlerden ilki, rastgele değişkenler arasındaki koşullu bağımsızlıkları (bağımlılıklar) gösteren model yapısı ve ikincisi ise, model yapısına ilişkin koşullu olasılık fonksiyonlarıdır.

Olasılıklı ağ modelleri, yön verilmiş ve yön verilmemiş grafik olarak iki şekilde incelenir. Bu modeller, ilk zamanlarda yön verilmemiş grafiklerle daha çok ilgilenirken, son zamanlarda yön verilmiş grafiklerde büyük önem taşımaktadır. Yön verilmiş grafiksel modeller, literatürde Bayes ağlar, tekrarlamalı modeller olarak da bilinir. Bu terim, Pearl (1986) tarafından verilmiştir [Lauritzen, 2001]. Bu grafiklerin her ikisi de geniş uygulama alanlarına sahiptir. Bu uygulama alanları şunlardır: Yapısal eşitlik modelleri için path diyagramları, belirsizlik ve uzman sistemler için Bayes ve Markov ağları, etki diyagramları (influence diagrams) ve olumsuzluk tabloları, görüntü analizi (image analysis) için bağımlılık modelleridir. Bu gelişmeler, Wermuth ve Lauritzen (1983), Pearl (1986), Whittaker (1990), Madigan ve Raftery (1994), Buntine (1994,1996), Edwards (1995), Cox ve Wermuth (1996), Lauritzen (1996), Jensen (1996) tarafından tanıtılmıştır.

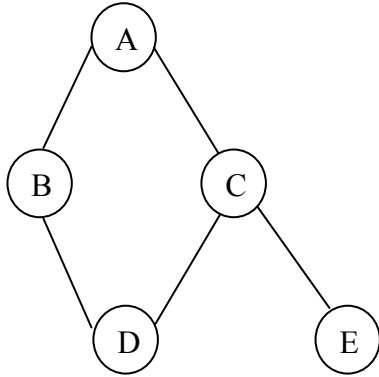
Olasılıklı ağ modellerin en çok kullanılan çeşitlerinden biri, Markov ağ (Markov networks) modelleri, diğer bir çeşidi Bayes ağ (Bayesian networks) modelleridir. Markov ağ modelleri yön verilmemiş grafikler ile Bayes ağ modelleri ise yön verilmiş döngüsel olmayan grafikler ile belirlenir. Bayes ağlar, ilgilenilen değişkenler arası olasılık ilişkilerini gösteren grafik modelleridir ve değişkenler

kümesi arasındaki ilişkileri grafik olarak göstermek ve uzman sistemlerde belirsizlik ile ilgilenmek için güçlü bir yöntemdir.

Bayes ağlarda, Markov ağlarda olduğu gibi bir yön verilmemiş grafik kullanılarak koşullu bağımsızlık varsayımları sağlanır. Bu varsayımlar aşağıda verildiği gibidir.

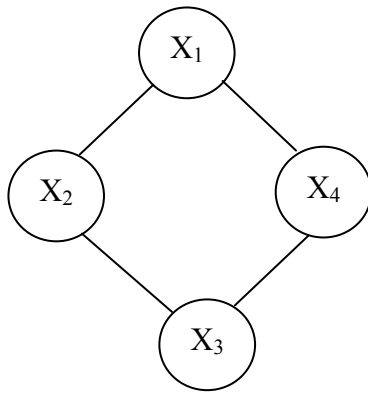
1. A ve B düğümleri arasında bir bağlantı var ise, bu düğümler arasında bağımlılık vardır.
2. Bir düğümün bitişik düğümü verildiğinde, düğüm bitişik olmayan tüm düğümlerden bağımsızdır.

Örneğin, Şekil 1.1’de C düğümü verildiğinde, E düğümü (A,B,D) düğümlerinden bağımsızdır.



Şekil 1.1. Beş değişkenden oluşan yön verilmemiş grafik

Dört değişkenden oluşan bir yön verilmemiş grafik ve bu grafiğe ilişkin ortak olasılık fonksiyonu aşağıda verilmiştir (Şekil 1.2).

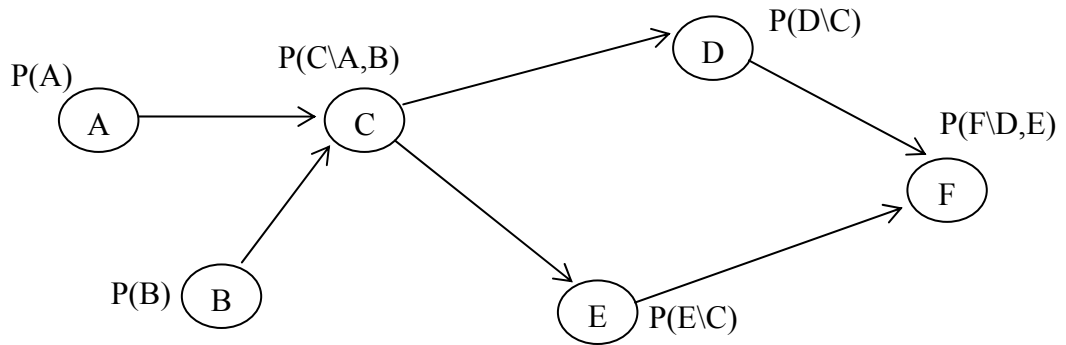


Ortak olasılık fonksiyonu

$$P(x)=f_1(x_1,x_2)f_2(x_2,x_3)f_3(x_3,x_4)f_4(x_4,x_1)$$

Şekil 1.2. Dört değişkenden oluşan yön verilmemiş grafik

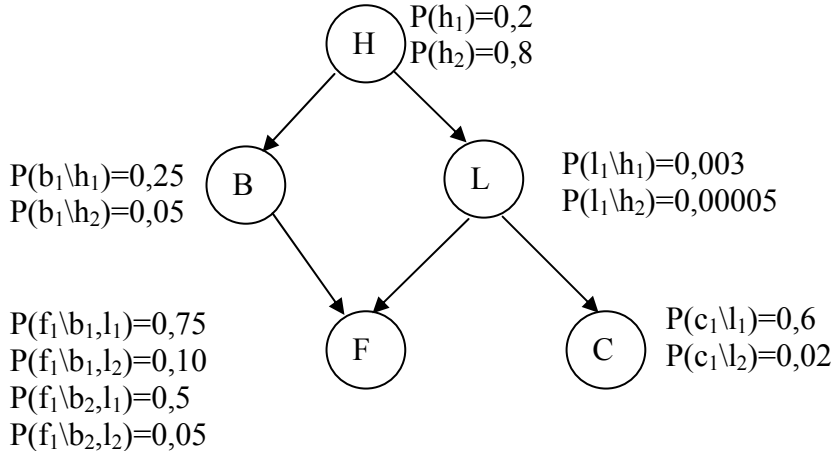
Ayrıca, bir yön verilmiş grafik ve bu grafiğe ilişkin koşullu olasılık fonksiyonları aşağıda verilmiştir (Şekil 1.3).



Şekil 1.3. Yön verilmiş bir grafik ve her bir düğümün koşullu olasılıkları

Olasılıklı ağ modellerinde, model yapısı ve bu modele ilişkin koşullu olasılıklar, bir uzman kişi tarafından oluşturulabilir ve bu koşullu olasılıklar veriden elde edilir.

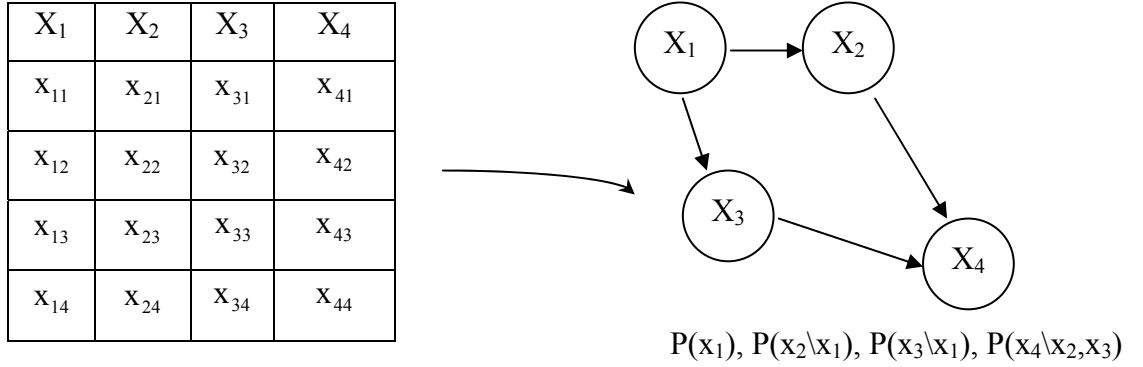
Aşağıda verilen şekilde, örnek olarak beş değişkene ilişkin model yapısı ve her bir değişkene ait koşullu olasılıklar verilmiştir (Şekil 1.4). Modelin uzman bir kişi tarafından belirlenmesi oldukça önemlidir. Farklı uzman kişiler tarafından farklı modeller ortaya çıkarılabilir ve bu da bizi farklı sonuçlara götürebilir.



Şekil 1.4. Beş değişkene ilişkin yön verilmiş grafikte model yapısı ve koşullu olasılıklar

Şekil 1.4’de $\{H, B, L, F, C\}$ değişkenlerinin meydana getirdiği model yapısı belirlenirken uzman görüşlerin fikirlerine başvurulmuştur. Uzman görüşlerin fikirleri doğrultusunda, modelde birbirini etkileyen değişkenler belirlenmiştir. Her bir değişkenin iki mümkün durumu söz konusudur. Örneğin; H değişkeninin h_1 ve h_2 olmak üzere iki mümkün değeri vardır. Burada, $P(b_1|h_1)=0,25$ H değişkeninin h_1 düzeyi bilindiğinde, B değişkeninin b_1 düzeyinde olma olasılığının 0,25 olduğunu açıklar. Farklı uzman kişiler tarafından farklı model yapıları, farklı olasılık değerleri verilebileceğinden uzman görüşlerin fikirlerine yer verilmemiştir. Literatürde uzman görüşlere başvurularak yapılan çalışmalar mevcuttur.

Bu nedenle burada uzman görüşlere başvurmak yerine, model yapısı ve koşullu olasılıklar *veriden tahmin edilecektir*. Bu, *öğrenme* (learning) olarak ifade edilir. Öğrenme, rastgele değişkenlerden oluşan bir grafik ve bu grafiğe ait koşullu olasılık fonksiyonundaki sayısal değerlerin yani parametre tahminlerinin elde edilmesinden oluşan bir süreçtir [Moral, 2003]. Şekil 1.5’de dört değişkene ait gözlem değerleri, yön verilmiş bir grafik ve öğrenme süreci gösterilmiştir.



Şekil 1.5. Dört düğümden oluşan yön verilmiş grafik

Bu şekilde veritabanı kayıp değerleri içermediğinden, bu veritabanı tamdır denir. Yani, her rastgele değişken her durumda bir değere sahipse, veritabanı, *tam veri* olarak adlandırılır.

Eğer, bir veritabanında her durumda rastgele değişken bir veya daha fazla bir değere sahip değilse, veri kayıp veya gözlenmemiştir. Bu veritabanına *tamamlanmamış veri* denir. Kayıp değer söz konusu olduğunda, yapının bilinip bilinmemesi önemlidir. Burada bazı değişkenlerin değerleri bazen gözlenebilir, bazen kayıptır. Bazı değişkenlerin değerleri ise, hiçbir zaman gözlenemez [Moral, 2003]. Bu değişkenlerin değerleri daima kayıptır. Bu çalışmada, veritabanının kayıp veri içermediği durum ele alınmıştır.

Bir grafikteki düğümlerin bir araya getirilmesi ile elde edilen düğümler grubu *küme* olarak adlandırılır. Bir grafiğin ortak olasılık fonksiyonunun yapısını elde etmek için düğümleri bir araya getiren metoda *kümeleme metodu* denir. Bu metot ilk olarak Lauritzen ve Spiegelhalter (1988) tarafından tanıtılmıştır. Bu kümeleme metodu grafikteki kümeler ile ilişkilendirilmiş koşullu olasılıkların hesaplanması temeline dayanır.

Kümeleme metotları, verilen bir grafiğin ortak olasılık fonksiyonunun yapısı ile ilgilenir. İlk olarak, orijinal grafikteki kümeler elde edilir. Daha sonra, birçok koşullu olasılık fonksiyonları hesaplanarak, her bir kümenin ortak olasılık fonksiyonları elde

edilir. Verilen bir düğümün koşullu olasılık fonksiyonu, verilen düğüme karşılık gelen kümenin ortak olasılık fonksiyonunun marjinalleştirilmesi ile elde edilir.

Kümeleme metotları, aşağıda verilen temel konuları ele almaktadır [Lauritzen ve Spiegelhalter, 1988]:

1. Bir Bayes ağ modelini, aynı koşullu bağımsızlık varsayımları altında yön verilmemiş bir grafiğe dönüştürmek
2. Sonuçlanan grafiğin ayrıştırılabilir (üçgenleştirilmiş) olmasını sağlamak
3. Bağımsız alt grafikler (kümeler) altında düğümleri kümelemek
4. Tek bir düğüm ile bu kümeleri birbirlerine bağlamak
5. Düğümlerin kusursuz numaralanmasını sağlamak
6. Verilen bir kanıtı genişletmek

Bilgi alanı tanımlandığında, uzman sistemin en önemli görevi, yeni bir bilgi veya kanıt gözlemlendiği zaman, elde edilen sonuçları ortaya çıkarmaktır. Örneğin; tıbbi tanıda uzman sistemin ana görevi, bir hastanın semptomlarına (kanıt) bakarak, hasta hakkındaki teşhislerin ortaya konulmasından oluşur.

Olasılıklı uzman sistemlerde ortaya çıkan sonuçlar *yayılma kanıtı* (evidence of propagation) veya basitçe *yayılım* olarak adlandırılır. Yayılma kanıtı, yeni elde edilebilir kanıta göre, rastgele değişkenlerin ortak olasılık fonksiyonlarının güncelleştirilmesinden oluşur. Örneğin; kanıt (yani semptomlar) verildiğinde, ilgilenilen değişkenler (yani hastalıklar) kümesinin her elemanı için koşullu olasılık fonksiyonunu hesaplamak gerekir.

Bu çalışmanın birinci bölümünü oluşturan giriş bölümünde, konuyla ilgili temel bilgiler ve bu konuyla ilgili yapılan çalışmaların tarihçesi verilmiştir.

İkinci bölümde, olasılık teorisi ile ilgili temel kavramlar tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde grafik teorisi ile ilgili temel kavramlar, teoremler ve algoritmalar verilmiştir. Ayrıca, koşullu bağımsızlık modelleri üzerinde durulmuştur.

Dördüncü bölümde, olasılıklı ağ modelleri olan Markov ağlar ve Bayes ağlar ile ilgili temel kavramlar örnekler verilerek açıklanmıştır. Ayrıca, Bayes ağlarda öğrenme anlatılmıştır. En iyi modelin belirlenmesinde kullanılan algoritmalar tanıtılmıştır.

Beşinci bölümde, yön verilmemiş ve yön verilmiş grafikler için küme grafikleri ve küme ağacı kavramları tanıtılmıştır.

Altıncı bölümde, olasılıklı ağ modelleri olan Markov ağlar ve Bayes ağlar için kümeleme metotları verilmiştir.

Yedinci bölümde, kategorik değişkenler kullanılarak yapılan uygulamada, değişkenlerin kümelenmesi ve değişkenlere ilişkin marjinal ve koşullu olasılık fonksiyonları hesaplanmıştır. Ayrıca, ele alınan değişkenlerin meydana getirdiği en iyi model belirlenmiş bu modele ilişkin parametre tahminleri yapılmıştır. Değişkenleri kümelemek amacıyla, küme grafiği ve küme ağacı elde edilmiştir. Elimizde var olan veri tabanı için, Bayes ağlarda kümeleme algoritması uygulanmış ve elde edilen sonuçların yorumlarına yer verilmiştir. Ayrıca, bu sonuçların Markov ağlar için de geçerli olacağı gösterilmiştir. Bu nedenle Markov ağlar için de potansiyel fonksiyonun sayısal değerleri elde edilmiş ve bu sonuçların yorumlamalarına değinilmiştir.

Sekizinci bölümde, elde edilen bilgi ve bulguların ışığında genel sonuçlar tartışılmıştır.

2. OLASILIK TEORİSİ

Olasılık teorisi, belirsizlik durumunda nedenselliğe ilişkin bir sistemdir. Bu sistemde kesinlik ile ilgili bilgi yoktur. Olasılık teorisi tümevarımsal mantık olarak da bilinir [Cowell,1999].

Bu bölümün amacı, olasılıklı ağ modellerinin anlamlarının matematiksel olarak yorumlanmasını sağlamaktır. Bunun için, olasılık teorisi ile ilgili bazı tanımlar ve teoremler verilmiştir.

2.1. Tanım

Bir rastgele deneyde gerçekleşebilecek tüm mümkün farklı sonuçların oluşturduğu küme *örnek uzay* olarak adlandırılır. Bu örnek uzay Ω ile gösterilecektir. Örneğin rastgele deney hilesiz bir zarın bir kez atılması ise, deney 6 farklı biçimde sonuçlanabileceği için örnek uzay $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ olacaktır. Rastgele deney bir makine parçasının kontrolü ise, iki farklı sonuç mümkündür; parça defoludur veya değildir. Öyleyse örnek uzay $\Omega = \{\text{Defolu}, \text{Defosuz}\}$ olacaktır.

Örnek uzay kesikli veya sürekli olabilir. $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ gibi sonlu veya $\Omega = \{2,4,6,8,\dots\}$ gibi sayılabilir sonsuz değerlerden oluşan örnek uzaylar *kesikli* olarak nitelendirilirken, bir doğru parçası üzerindeki veya bir düzlem içindeki noktalar gibi sayılamayan sonsuz sayıda elemandan oluşan, dolayısıyla tek tek değerler yerine $\Omega = \{X \mid a < x < b\}$ gibi bir aralıkta ifade edilen örnek uzaylar ise *sürekli* olarak düşünülecektir [Erbaş, 2007].

Örnek uzayın (Ω) herhangi bir alt kümesine *olay* denir. Örneğin bir zarın atılması deneyinin örnek uzayı $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ 'in alt kümeleri olan $S_1 = \{1,3,5\}$, $S_2 = \{2,4,6\}$, $S_3 = \{1,2\}$ kümeleri birer olayı gösterebilir.

2.2. Tanım

Ω , rastgele bir deneyin örnek uzayını gösterebilir. $\mathbf{F}$, Ω uzayı üzerinde tanımlanmış bir aile olsun. $\mathbf{F}$ ailesine rastgele bir deneyin *olaylar ailesi* denir. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanırsa, $\mathbf{F}$ ailesine Ω uzayı üzerinde bir *sigma cebiri* (σ -cebir) denir.

1. $\Omega \in \mathbf{F}$
2. $A \in \mathbf{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathbf{F}$
3. $A_1, A_2, \dots \in \mathbf{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbf{F}$

2.3. Tanım

Aşağıdaki özellikler sağlanacak şekilde bir $P: \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{R}$ fonksiyonu vardır.

1. $P(A) \geq 0$, $\forall A \in \mathbf{F}$ için
2. $P(\Omega) = 1$
3. $A_1, A_2, \dots \in \mathbf{F}$ ve $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$ ise, $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ 'dır.

Tanım 2.3'ü sağlayan bir P fonksiyonuna $\mathbf{F}$ olaylar ailesi üzerinde, bir *olasılık ölçüsü* denir [Cowell ve ark., 1999].

2.4. Tanım

Ω ve $\mathbf{F}$, sırasıyla, rastgele bir deneyin örnek uzayını ve olaylar ailesini ve P , $\mathbf{F}$ üzerinde bir olasılık ölçüsünü gösterir. $(\Omega, \mathbf{F}, P)$ üçlüsüne, bir *olasılık modeli* veya *olasılık uzayı* denir.

2.5. Tanım

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ bir olasılık uzayını gösterebilir.

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Yani, Ω üzerinde reel değerli bir fonksiyon olarak tanımlansın. Bu fonksiyona *bir boyutlu rastgele değişken* denir.

Rastgele bir deneyin sonucu bir sayı olmayabilir. Rastgele bir deneyin sonucu sayısal bir değer ile ilişkilendirildiğinde, bir boyutlu rastgele değişken bir fonksiyondur.

Bu çalışmada, bir boyutlu rastgele değişkenler büyük harfler ile ve bu değişkenlerin aldığı değerler küçük harfler ile gösterilecektir.

2.6. Tanım

X , bir boyutlu rastgele bir değişkeni gösterebilir. X 'in sonlu veya sonsuz sayılabilir sayıda farklı değerleri olduğu zaman, X 'e *bir boyutlu kesikli rastgele değişken* denir. Eğer, X sayılamayan sonsuz sayıda noktadan oluşuyorsa, X 'e *bir boyutlu sürekli rastgele değişken* denir [Pena, 2001; Pearl, 2000].

2.7. Tanım

X , bir boyutlu kesikli rastgele bir değişken olsun.

$$P(x) = P(X=x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega)=x\})$$

olmak üzere, aşağıdaki koşulları sağlayan $P(x)$ fonksiyonuna X 'in *olasılık dağılımı* veya *olasılık fonksiyonu* denir.

$$1. \quad P(x) \geq 0, \text{ tüm } x \text{ değerleri için}$$

$$2. \quad \sum_x P(x) = 1$$

2.8. Tanım

X , bir boyutlu sürekli rastgele bir değişken olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $f(x)$ fonksiyonuna X rastgele değişkeninin *olasılık yoğunluk fonksiyonu* denir [Pena, 2001; Pearl, 2000].

$$1. \quad f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ için}$$

$$2. \quad \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$$

$$3. \quad P(\alpha \leq X \leq \beta) = P(\{w \in \Omega : \alpha \leq X(w) \leq \beta\}) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx, \quad \alpha \leq \beta, \text{ tüm } \alpha, \beta \text{ için}$$

2.9. Tanım

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ bir olasılık uzayı ve $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyona, *n-boyutlu rastgele değişken* denir.

2.10. Tanım

$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$, n -boyutlu rastgele değişkeni gösterebilir. $\mathbf{X}$ 'in alabileceği farklı değerler sonlu veya sayılabilir sonsuz sayıda ise, $\mathbf{X}$ 'e *n-boyutlu kesikli rastgele değişken* denir.

$\mathbf{X}$ 'in alabileceği farklı değerler sayılamaz sonsuz sayıda ise, $\mathbf{X}$ 'e *n-boyutlu sürekli rastgele değişken* denir [Pena, 2001; Pearl, 2000].

$\mathbf{X}$ 'in iki uygun alt kümesi $\mathbf{Y}=(Y_1, \dots, Y_r)$ ve $\mathbf{Z}=(Z_1, \dots, Z_{n-r})$ ile gösterilsin. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $\mathbf{X}$ 'e *n-boyutlu karışık rastgele değişken* denir [Pena, 2001]

- $\mathbf{Y} \cup \mathbf{Z} = \mathbf{X}$ ve $\mathbf{Y} \cap \mathbf{Z} = \emptyset$ dir.
- $\mathbf{Y}$, r-boyutlu kesikli bir rastgele değişken ve $\mathbf{Z}$, n-r boyutlu sürekli bir rastgele değişkendir.

2.11. Tanım

$\mathbf{X}=(X_1, \dots, X_n)$, n-boyutlu kesikli bir rastgele değişken olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan,

$$P(\mathbf{x})=P(x_1, \dots, x_n)=P(X_1=x_1, \dots, X_n=x_n)=P(\mathbf{X}=\mathbf{x})$$

fonksiyonuna $\mathbf{X}$ 'in *ortak olasılık fonksiyonu* veya *ortak olasılık dağılımı* denir [Pena, 2001].

- $P(\mathbf{x}) \geq 0$, tüm x değerleri için
- $\sum_{\mathbf{x}} P(\mathbf{x})=1$

2.12. Tanım

$\mathbf{X}=(X_1, \dots, X_n)$, n-boyutlu sürekli bir rastgele değişken olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan, $f(\mathbf{x})=f(x_1, \dots, x_n)$ fonksiyonuna $\mathbf{X}$ rastgele değişkeninin *ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu* denir [Pena, 2001].

- $f(\mathbf{x}) \geq 0$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ için

- $\int_{\mathbf{R}} \dots \int_{\mathbf{R}} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 1$
- $P(\boldsymbol{\alpha} \leq \mathbf{X} \leq \boldsymbol{\beta}) = P(\alpha_1 \leq X_1 \leq \beta_1, \dots, \alpha_n \leq X_n \leq \beta_n)$

$$= P(\{w \in \Omega : \alpha_i \leq X_i(w) \leq \beta_i, \text{ tüm } i\text{'ler için}\})$$

$$= P(\{w \in \Omega : \boldsymbol{\alpha} \leq \mathbf{X}(w) \leq \boldsymbol{\beta}\})$$

$$= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \dots \int_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n ;$$

Burada, tüm i 'ler için, $\alpha_i \leq \beta_i$ olacak şekilde $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ve $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ dır.

2.13. Tanım

$\mathbf{X}=(X_1, \dots, X_n)$, n -boyutlu karışık bir rastgele değişkeni gösterebilir. $\mathbf{X}$ 'in iki uygun alt kümesi $\mathbf{Y}=(Y_1, \dots, Y_r)$ ve $\mathbf{Z}=(Z_1, \dots, Z_{n-r})$ olmak üzere,

- $\mathbf{Y} \cup \mathbf{Z} = \mathbf{X}$ ve $\mathbf{Y} \cap \mathbf{Z} = \emptyset$
- $\mathbf{Y}$, r -boyutlu kesikli rastgele değişken ve $\mathbf{Z}$, $n-r$ boyutlu sürekli rastgele değişkendir.

Aşağıdaki koşulları sağlayan $\rho(\mathbf{x})=\rho(x_1, \dots, x_n)$ fonksiyonuna, $\mathbf{X}$ için *genelleştirilmiş ortak olasılık fonksiyonu* denir [Pena, 2001] .

- $\rho(\mathbf{x}) \geq 0$, tüm y için ve $z \in \mathbf{R}^{n-r}$ için
- $\sum_{y_1} \dots \sum_{y_r} \int_{\mathbf{R}} \dots \int_{\mathbf{R}} \rho(z_1, \dots, z_{n-r}) dz_1 \dots dz_{n-r} = 1$

2.14. Tanım

$\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_n)$ ve $\mathbf{Y}=(Y_1,\dots,Y_r)$ çok boyutlu rastgele değişkenler olsun. $\mathbf{Y}=\mathbf{y}$ verildiğinde, $\mathbf{X}$ 'in *genelleştirilmiş koşullu ortak olasılık fonksiyonu*,

$$\rho(x/y)=\frac{\rho(x,y)}{\rho(y)} \quad , \quad \rho(y)>0$$

ile verilir [Pena, 2001].

2.1. Teorem

$\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_n)$, n-boyutlu rastgele değişken olsun.

$$P(x)=P(x_1,\dots,x_n)=\prod_{i=2}^n P(x_i/x_1,\dots,x_{i-1})$$

dır. Bu teorem, koşullu olasılıklar için *çarpım teoremi* olarak bilinir [Pearl, 2000].

2.2. Teorem

$\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_n)$ ve $\mathbf{Y}=(Y_1,\dots,Y_r)$ çok boyutlu rastgele değişkenler olsun.

$$P(x/y)=\frac{P(y/x)P(x)}{P(y)} \quad , \quad \rho(y)>0$$

dır. Bu teorem, *Bayes' teoremi* olarak bilinir [Cowell ve ark., 1999].

2.15. Tanım

$\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_n)$ ve $\mathbf{Y}=(Y_1,\dots,Y_r)$ çok boyutlu rastgele değişkenler olsun. Tüm $\mathbf{Y}=\mathbf{y}$ 'ler için,

$$P(x/y)=P(x)$$

ise, $\mathbf{X}$ ve $\mathbf{Y}$ *bağımsızdır* denir. $\mathbf{X}$ ve $\mathbf{Y}$ bağımsız değilse bağımlıdır denir [Edwards, 1995; Jensen, 1996; Lauritzen, 1996].

2.16. Tanım

$\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_n)$, $\mathbf{Y}=(Y_1,\dots,Y_r)$ ve $\mathbf{Z} = (Z_1,\dots,Z_m)$ çok boyutlu rastgele değişkenler olsun. Tüm $Y=y$ ve $Z=z$ 'ler için,

$$P(x/y,z)=P(x/z)$$

ise, $\mathbf{Z}$ verildiğinde, $\mathbf{X}$ ve $\mathbf{Y}$ *koşullu bağımsızdır* denir. $\mathbf{Z}$ verildiğinde, $\mathbf{X}$ ve $\mathbf{Y}$ koşullu bağımsız değilse koşullu bağımlıdır denir [Jensen, 1996; Lauritzen, 1996].

$\mathbf{Z}$ verildiğinde, $\mathbf{X}$ ve $\mathbf{Y}$ 'nin koşullu bağımsız olma durumu $(\mathbf{X} \perp \mathbf{Y} / \mathbf{Z})$ ile gösterilir. Koşullu bağımsızlık durumlarının bir kümesine *koşullu bağımsızlık modeli* denir [Edwards, 1995; Jensen, 1996; Lauritzen, 1996].

2.3. Teorem

$\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_n)$ ve $\mathbf{Y}=(Y_1,\dots,Y_r)$ çok boyutlu rastgele değişkenler olsun.

$$P(x,y)=P(x)P(y)$$

ise, $\mathbf{X}$ ve $\mathbf{Y}$ rastgele değişkenleri bağımsızdır denir ve $(\mathbf{X} \perp \mathbf{Y} / \emptyset)$ ile gösterilir [Edwards, 1995; Jensen, 1996; Lauritzen, 1996].

2.4. Teorem

$\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_n)$, $\mathbf{Y}=(Y_1,\dots,Y_r)$ ve $\mathbf{Z} = (Z_1,\dots,Z_l)$ çok boyutlu rastgele değişkenler olsun.

$$P(x,y/z)=P(x/z)P(y/z)$$

ise, Z rastgele değişkeni verildiğinde, X ve Y rastgele değişkenleri koşullu bağımsızdır denir ve $X \perp Y \setminus Z$ ile gösterilir [Jensen, 1996; Lauritzen, 1996; Edwards, 1995].

3. GRAFİK TEORİSİ

Olasılıklı ağ modellerinin gücü ve çekiciliği, görsel gösterimden kaynaklanır. Bu gösterimler, ele alınan bir problemdeki değişkenler arasındaki bağımlılık ve bağımsızlık yapılarını gösterir. Bundan dolayı, bu resimsel gösterimler *grafikler* olarak adlandırılır. Ayrıca, grafikler yapay zeka ve uzman sistemlerde kullanılan olasılıklı ağ modelleri ve diğer modellerin yapısı için gereklidir. Bu bölümde, çalışma süresince yararlanılacak olan grafik teorisi ile ilgili temel kavramlar verilmiştir [Lauritzen ve Spiegelhalter, 1988; Edwards, 1995; Buntine, 1996; Jensen 1996; Richardson, 1997; Cowell ve ark., 1999; Whittaker, 1990; Pearl, 2000; Stephenson, 2000].

Grafik teorisi ile ilgili temel tanımlar Bölüm 3.1’de ve grafiklerin iki çeşidi olan yön verilmemiş ve yön verilmiş grafik türleri ve bunların özellikleri sırasıyla Bölüm 3.2’de ve Bölüm 3.3’de verilmiştir. Grafiğin özel bir çeşidi olan üçgenleştirilmiş grafik ise Bölüm 3.4’de tanıtılmıştır. Ayrıca, son bölümde ise, koşullu bağımsızlık modelleri üzerinde kısaca durulmuştur.

3.1. Temel Tanımlar ve Kavramlar

$V=\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ değişkenler kümesine sahip olunduğu varsayalım. V değişkenler kümesi, düğümler veya köşelerin kümesi ile gösterilir ve bu değişkenler kümesindeki her bir değişken bir düğüme karşılık gelir. Ayrıca bu düğümler, kenarlar ve bağlantılar olarak adlandırılan yaylar veya oklar ile bağlanır. V_i ve V_j düğümleri arasında bir bağlantı olsun ve bu bağlantı E_{ij} ile gösterilsin. Tüm bağlantıların kümesi $E=\{E_{ij}: V_i \text{ ve } V_j \text{ bağlantılıdır}\}$ ile gösterilir. Yani, V ve E kümeleri, bir grafiği tanımlar.

3.1. Tanım

$G=(V,E)$ ile verilen bir grafikte, düğümlerin sonlu bir kümesi V ve bu düğümler arası kenarların sonlu kümesi E ’den oluşan bir yapı olarak tanımlanır. E kümesi, V ’den

alınan rastgele değişken çiftlerinden oluşur. Yani; $E, (V_i, V_j)$ düzenlenmiş çiftler kümesi olup, her $(V_i, V_j), V'$ 'nin elemanlarıdır.

Bir grafikte, düğümler rastgele değişkenleri ve kenarlar rastgele değişken çiftlerinde var olan ilişkiyi temsil eder [Lauritzen ve Spiegelhalter, 1988].

3.2. Tanım

$G=(V,E)$ grafiği verildiğinde, $(V_i, V_j) \in E$ ve $(V_j, V_i) \in E$ ise, V_i 'den V_j 'ye olan bir kenara *yön verilmemiş kenar* denir ve $V_i - V_j$ ile gösterilir.

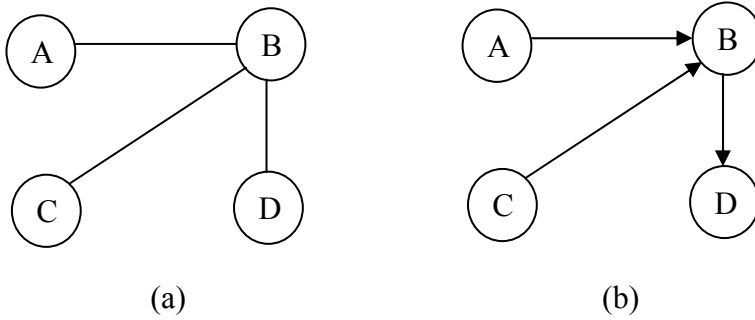
3.3. Tanım

$G=(V,E)$ grafiği verildiğinde, $(V_i, V_j) \in E$ ancak $(V_j, V_i) \notin E$ ise, V_i 'den V_j 'ye olan bir kenara *yön verilmiş kenar* denir ve $V_i \rightarrow V_j$ ile gösterilir.

3.4. Tanım

$G=(V,E)$ bir grafik olsun. E 'deki kenarlar arasında sadece yön verilmemiş kenarlar varsa, G grafiğine *yön verilmemiş grafik* denir. E 'de sadece yön verilmiş kenarlar varsa G grafiğine *yön verilmiş grafik* denir [Lauritzen ve Spiegelhalter, 1988; Edwards, 1995; Cowell ve ark., 1999].

Aşağıda verilen şekilde, yön verilmiş ve yön verilmemiş birer grafiğe örnek verilmiştir (Şekil 3.1).



Şekil 3.1. Dört düğümden oluşan bir grafik a) Yön verilmemiş grafik b) Yön verilmiş grafik

Şekil 3.1 (a) ve (b) grafikleri, aynı düğümler arası kenarlara sahiptir. Şekil 3.1 (a) grafiği, yön verilmemiş kenarlara sahiptir ve bu grafik $V=\{A,B,C,D\}$ düğümler kümesine ve $E=\{(A,B),(B,A),(B,C),(C,B),(B,D),(D,B)\}$ kenarlar kümesine sahiptir. Şekil 3.1 (b) grafiği ise, yön verilmiş kenarlara sahip, düğümler kümesi aynı ancak $E=\{(A,B),(B,D),(C,B)\}$ kenarlar kümesine sahiptir.

3.5. Tanım

$G=(V,E)$ grafiği ve herhangi bir V_i düğümü verildiğinde, bu düğümün bitişiklik kümesi (adjacency set), V_i 'den doğrudan ulaşılabilen düğümlerin kümesidir ve $\text{Bitş.}(V_i)$ ile gösterilir. Yani, $\text{Bitş.}(V_i)=\{V_j \in V: E_{ij} \in E\}$ 'dir.

V 'deki her düğüm için bitişiklik kümeleri kullanılarak $G=(V,E)$ grafiği, $G=(V, \text{Bitş.})$ olarak da gösterilebilir. $G=(V, \text{Bitş.})$ grafiğinde, düğümler kümesi $V=\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ ve bitişiklik kümeleri $\text{Bitş.}(V)=\{\text{Bitş.}(V_1), \text{Bitş.}(V_2), \dots, \text{Bitş.}(V_n)\}$ ile gösterilir [Richardson, 1997; Whittaker, 1990].

Şekil 3.1 (a)'daki yön verilmemiş grafik için bitişiklik kümeleri,

$$\text{Bitş.}(A)=\{B\}, \quad \text{Bitş.}(B)=\{A,C,D\}, \quad \text{Bitş.}(C)=\{B\}, \quad \text{Bitş.}(D)=\{B\}$$

ve Şekil 3.1 (b)'deki yön verilmiş grafik için bitişiklik kümeleri,

$\text{Bitş.}(A)=\{B\}$, $\text{Bitş.}(B)=\{D\}$, $\text{Bitş.}(C)=B$, $\text{Bitş.}(D)=\emptyset$

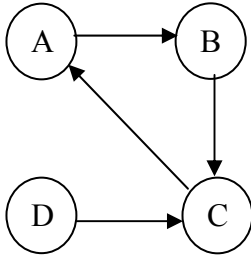
dır.

3.6. Tanım

$G=(V,E)$ bir grafik olsun. V_j 'den V_i 'ye bir *yol*, farklı düğümlerin sıralanmasından oluşan bir yapıya denir. Bir yolun uzunluğu, düğümlerin sayısının bir eksiğidir. Düğümlerin sayısı d ile gösterilirse yolun uzunluğu $d-1$ olacaktır [Stephenson, 2000].

3.7. Tanım

Aynı düğüm ile başlayan ve biten yola *kapalı yol* denir (Şekil 3.2).



Şekil 3.2. Dört düğümden oluşan bir grafik

Şekil 3.2’de, A-B-C-A-B kenarları uzunluğu 4 olan bir kapalı yoldur. A-B-C-A uzunluğu 3 olan bir kapalı yoldur. A-B-C-A-B-C-A kenarları uzunluğu 6 olan bir kapalı yoldur.

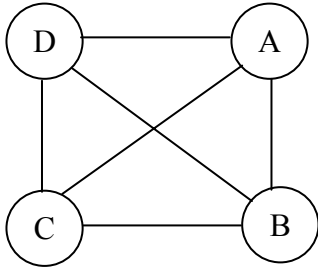
3.2. Yön Verilmemiş Grafikler

Bu bölümde, yön verilmemiş grafikler ile ilgili bazı özellikler tanıtılmıştır [Wainwright, 2005; Castillo ve ark., 1997].

3.8. Tanım

Düğümlerin her çifti arasında bir bağlantı olduğunda, yön verilmemiş bir grafiğe *tam grafik* denir.

Aşağıdaki şekilde dört düğümden oluşan tam grafik verilmiştir (Şekil 3.3).

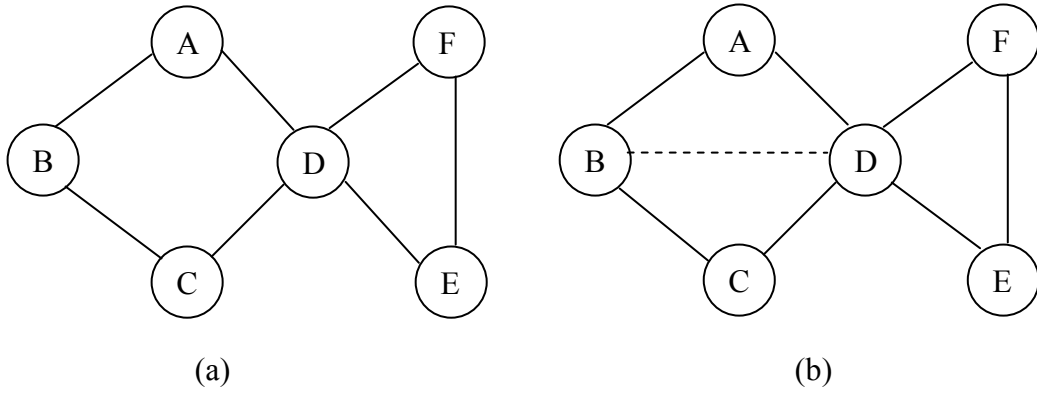


Şekil 3.3. Dört düğümden oluşan tam grafik

3.9. Tanım

Bir G grafiğinde yer alan düğümlerin bir alt kümesi X ile gösterilsin. X 'de yer alan düğümlerin her çifti arasında bağlantılar varsa, X 'e *tam küme* denir [Pearl, 2000; Castillo ve ark., 1997]. X tam kümenin büyüklüğü, tam kümede yer alan düğümlerin sayısı ile ifade edilir.

Aşağıda verilen grafik, büyüklüğü üç olan bir tane tam alt kümeyi gösterir. Bu alt küme $\{D,E,F\}$ 'dir (Şekil 3.4 (a)).



Şekil 3.4. Tam kümeyi gösteren bir grafik a) Altı düğümden oluşan yön verilmemiş grafik b) B ve D düğümleri arasına bir kenar eklenerek elde edilen grafik

3.10. Tanım

Bir G grafiğinde düğümlerin alt kümeleri arasında yer alan en büyük X tam kümesine *klik* adı verilir. Klikler K ile gösterilecektir.

Şekil 3.4 (a)'da verilen klikler,

$$K_1=\{A,B\}, K_2=\{A,D\}, K_3=\{B,C\}, K_4=\{C,D\}, K_5=\{D,E,F\}$$

dır.

Bu grafiğe başka bağlantılar eklenirse, daha önce verilen en büyük klikler artık en büyük olmayacaktır. Böylece, grafik başka klikleri içerecektir. Örneğin Şekil 3.4 (a)'daki grafiğin B ve D düğümleri arasına bir kenar eklenirse, Şekil 3.4 (b)'deki grafik elde edilir. Bu grafikteki klikler,

$$K_1=\{A,B,D\}, K_2=\{B,C,D\}, K_3=\{D,E,F\}$$

dır.

3.11. Tanım

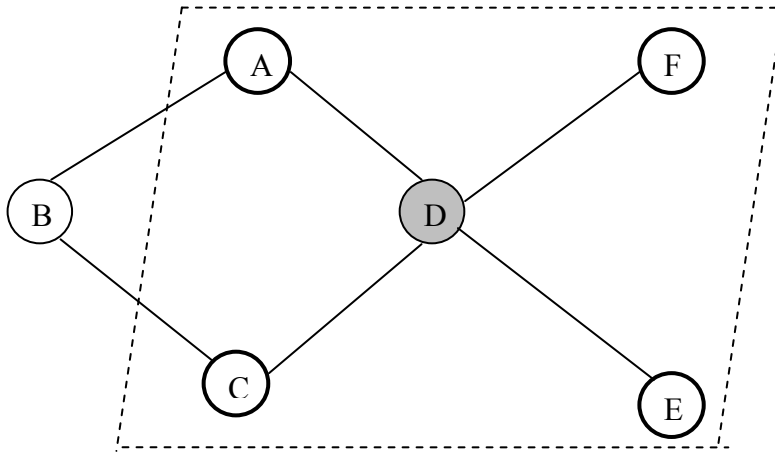
Yön verilmemiş grafikte kapalı yola *döngü* (loop) denir [Lauritzen ve Spiegelhalter, 1988; Richardson, 1997; Whittaker, 1990].

Şekil 3.4 (a) grafiğinde, A-B-C-D-A kapalı yolu, uzunluğu 4 olan bir döngüdür.

3.12. Tanım

Bir yön verilmemiş grafikte, V_i düğümüne bitişik düğümlerin kümesi, V_i 'nin *komşuları* olarak adlandırılır ve $Komş.(V_i) = \{V_i \in Bitiş.(V_i)\}$ ile gösterilir.

Aşağıda verilen şekilde, D düğümünün komşuları, {A, C, E, F}'dir (Şekil 3.5). Yön verilmemiş grafikler için, verilen bir düğümün bitişiklik kümesi ile düğümün komşuları aynıdır.



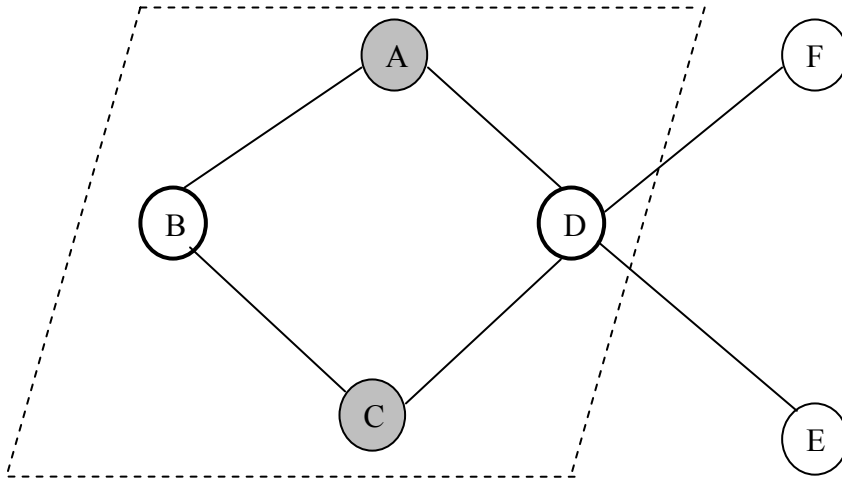
Şekil 3.5. D düğümünün komşuları

3.13. Tanım

X alt kümesinde yer alan düğümler hariç, bu alt kümede yer alan düğümlerin komşularının kümelerinin birleşimi, X'in *sınırı* olarak adlandırılır ve $Sın.(X)$ ile gösterilir.

$$\text{Sın.}(X) = \left(\bigcup_{V_i \in X} \text{Komş.}(V_i) \right) \setminus X$$

Bu eşitlikte yer alan $V \setminus X$, X 'deki düğümler hariç, V 'deki tüm düğümlerin kümesini gösterir. Aşağıdaki şekilde, $\{A,C\}$ kümesinin sınırı, $\{B,D\}$ düğümleridir (Şekil 3.6).

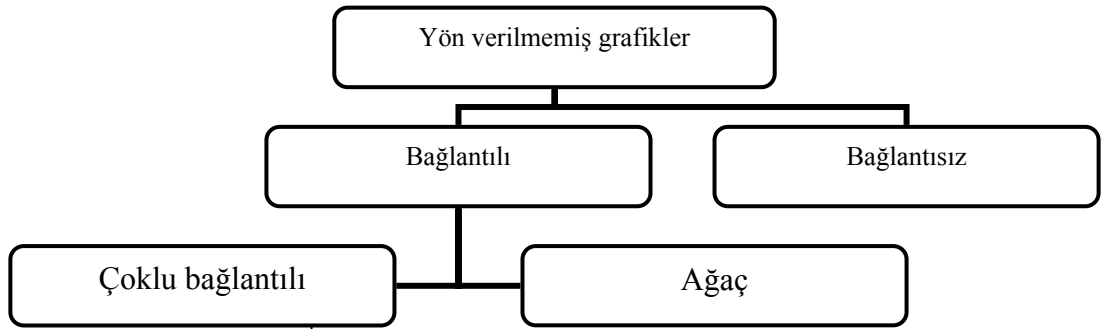


Şekil 3.6. $\{A,C\}$ kümesinin sınırı

Sonuç olarak, $\text{Komş.}(V_i) = \text{Sın.}(V_i)$ olduğu söylenir.

3.2.1. Yön verilmemiş grafik türleri

Yön verilmemiş grafik türleri Şekil 3.7'de gösterilmiştir [Castillo ve ark., 1997]. Bu grafik türleri aşağıda verilen örnekler ile incelenmiştir.

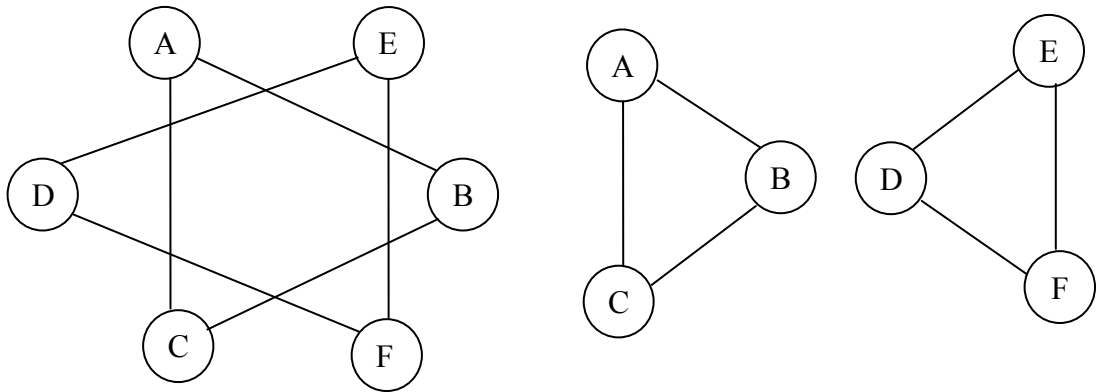


Şekil 3.7. Yön verilmemiş grafik türleri

3.14. Tanım

Bir yön verilmemiş grafikte herhangi iki düğüm arasında en az bir yol ortaya çıkıyorsa, grafiğe *bağlantılıdır* denir. Diğer durumlarda, *bağlantısız* olarak adlandırılır [Pearl, 2000; Stephenson, 2000].

Şekil 3.8’de bağlantısız grafiğe örnek verilmiştir.



Şekil 3.8. Bağlantısız grafiklerin benzer iki gösterimi

Örneğin, A ve E düğümleri arasında yol olmadığından, bu grafik bağlantılı değildir, yani bağlantısızdır.

Bir grafik bağlantısız ve bu grafik bağlantılı alt grafikler şeklinde parçalanabilirse, bu alt grafiklere *bağlantılı bileşenler* adı verilir. Şekil 3.8'in sağ tarafında yer alan grafikte, $\{A,B,C\}$ ve $\{D,E,F\}$ olmak üzere iki bağlantılı bileşen vardır.

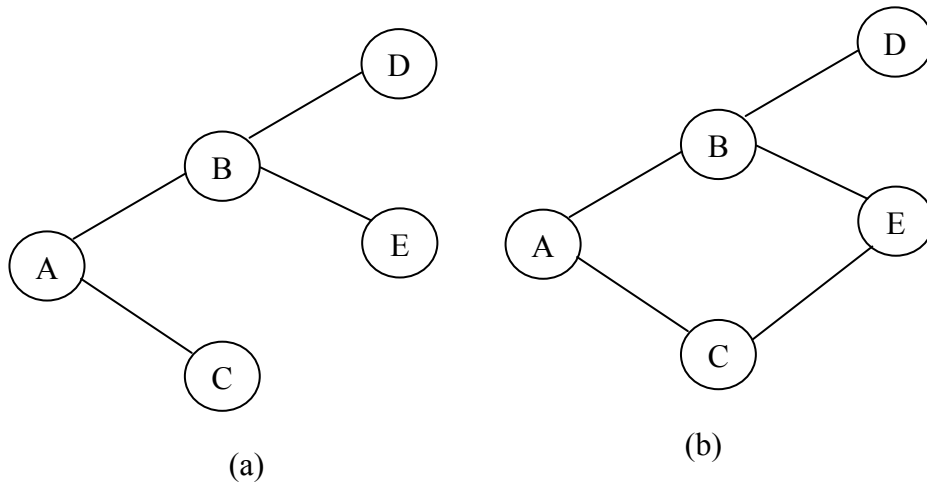
3.15. Tanım

Düğümün herhangi çifti arasında tek bir yol varsa, bağlantılı yön verilmemiş grafiğe, *ağaç* denir. Ağaç, bağlantılı bir grafikdir. Bağlantılardan herhangi biri kaldırılırsa, grafik bağlantısız olur. Aynı zamanda, ağaç, döngülere sahip değildir [Pearl, 2000; Stephenson, 2000].

3.16. Tanım

Bağlantılı yön verilmemiş bir grafik, bir yoldan daha fazla yol ile birleştirilmiş düğümlerin en az bir çiftini veya en az bir döngüyü içeriyorsa, bu grafik *çoklu bağlantılı grafik* olarak adlandırılır [Pearl, 2000; Stephenson, 2000].

Şekil 3.9'un (a) ve (b) grafiklerinde ağaç ve çoklu bağlantılı grafik yapısı verilmiştir.



Şekil 3.9. Bağlantılı yön verilmemiş bir grafik türleri a) Ağaç b) Çoklu bağlantılı grafik

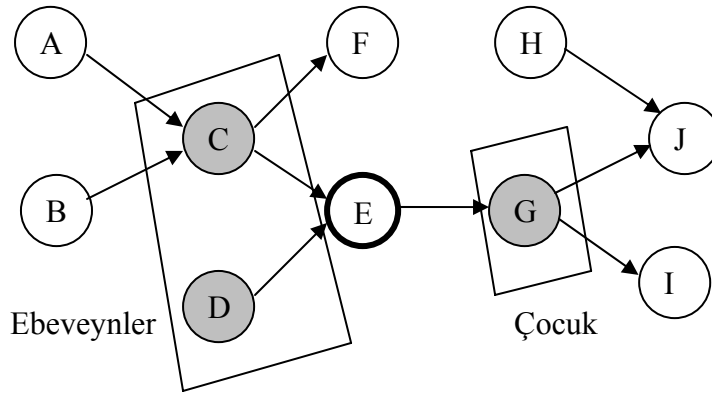
3.3. Yön Verilmiş Grafikler

Bu bölümde, yön verilmemiş grafikler ile ilgili bazı özellikler tanıtılmıştır [Ramoni, 2003].

3.17. Tanım

V_i 'den V_j 'ye yön verilmiş bir bağlantı $V_i \rightarrow V_j$ ise, tüm i ve j 'ler için, V_i 'ye V_j 'nin *ebeveyni*, V_j 'ye V_i 'nin *çocuğu* denir. Bir G grafiğinde, V_i düğümünün tüm ebeveynlerinin kümesi, tüm i 'ler için $Eb(G)$ ile gösterilir. Bir yön verilmiş grafikte, bir düğümün çocuğu ile o düğüme ait bitişik küme aynıdır.

Şekil 3.10'da, E düğümünün ebeveynleri C ve D düğümleri, çocuğu ise G düğümüdür.



Şekil 3.10. On düğümden oluşan yön verilmiş grafik

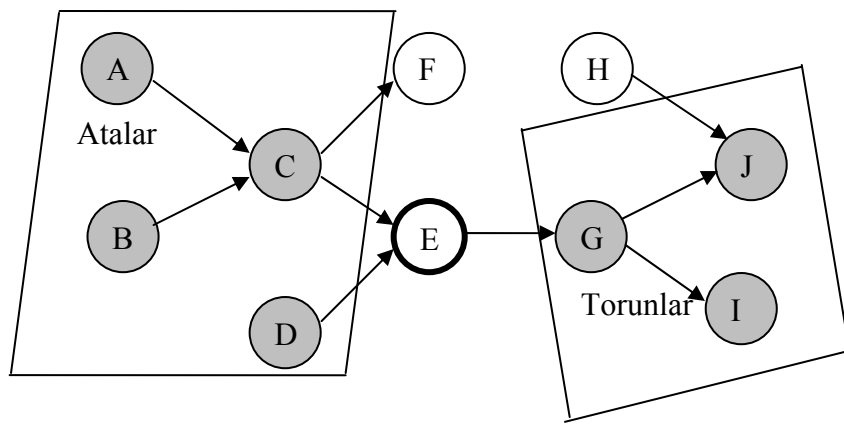
3.18. Tanım

Bir düğümün *ailesi*, düğümün kendisini ve düğümün tüm ebeveynlerini içerir.

3.19. Tanım

Bir G grafiğinde, V_i 'den V_j 'ye bir yol ortaya çıkarsa, tüm i, j 'ler için, V_i , V_j 'nin *atası* ve V_j , V_i 'nin *torunudur* denir.

Şekil 3.11'de E düğümünün ataları ve torunları gösterilmiştir.



Şekil 3.11. E düğümünün ataları ve torunları

3.20. Tanım

Düğümün bir kümesi X ($X \subseteq V$) ile gösterilsin. Eğer X , V_i ($V_i \in A$)'nin tüm atalarını içerirse, X kümesine *atalara ilişkin küme* denir. Yani, atalara ilişkin küme, bir düğüm, düğüme ilişkin ataların kümesinden oluşur [Buntine, 1996; Pearl, 2000; Stephenson, 2000].

Bir grafikte bir düğümün birçok özelliği veya parametreleri vardır: Düğümün adı, ebeveynleri, çocuğu, ailesi, torunları, atası, atalara ilişkin küme. Bu özelliklerin yanında bir düğüm ayrıca, bir *sayıya* sahip olmalıdır. Düğümlerin kümesi $V = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ 'nin numaralanması veya sıralanması her bir düğüme $\{1, 2, \dots, n\}$ sayılarının atanması ile elde edilir.

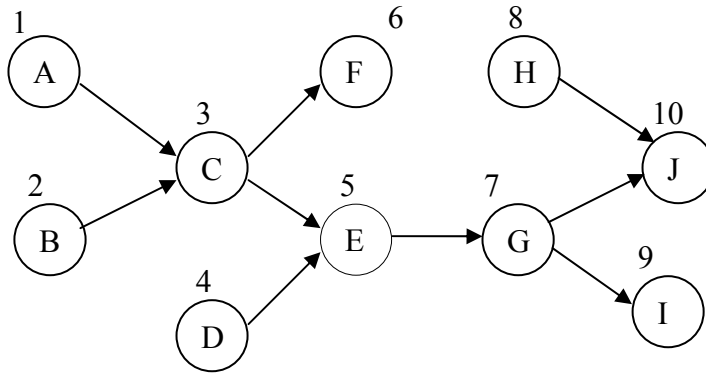
3.21. Tanım

$V=\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ düğümlerin kümesi verildiğinde, düğümlerin her birine $\{1, 2, \dots, n\}$ 'e kadar sayıların her birinin atanması *numaralanma* ($\mathbb{N}$, numbering) olarak adlandırılır [Castillo ve ark., 1997]. $N(i)$, i nci düğümün numarasını ve $(N(1), N(2), \dots, N(n))$ ise düğümlerin sıralanmış bir dizisini gösterir.

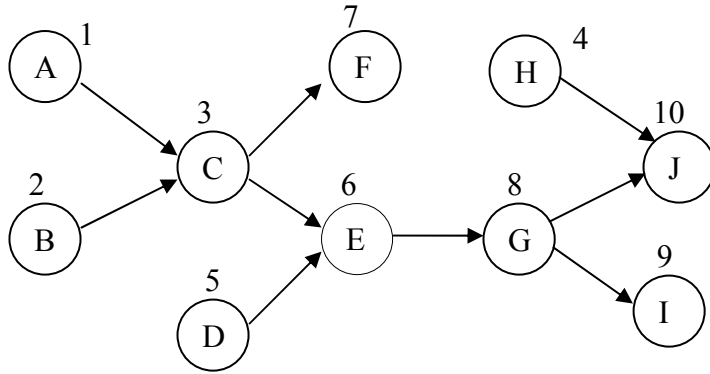
3.22. Tanım

Bir yön verilmiş grafikte herhangi bir düğüme karşılık gelen sayı, çocuklarının hepsine karşılık gelen sayıdan daha küçük bir sayı alırsa, düğümlerin sıralaması *atalara ilişkin sıralama* olarak adlandırılır [Castillo ve ark., 1997].

Şekil 3.12'de, aynı grafiğin iki farklı ataya ilişkin sıralaması gösterilmiştir.



Şekil 3.12. Yön verilmiş grafiğin ataya ilişkin farklı iki sıralaması



Şekil 3.12 (Devam). Yön verilmiş grafiğin ataya ilişkin farklı iki sıralaması

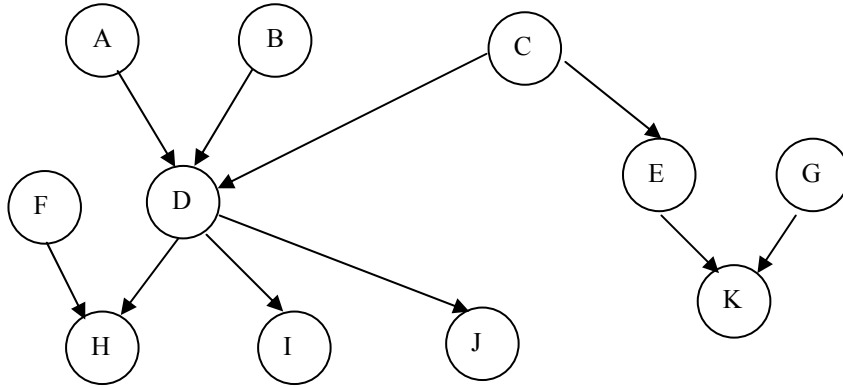
3.23. Tanım

Bir grafikte, yön verilmiş kenarlar ile yön verilmemiş kenarlar yer değiştirilerek elde edilen yön verilmemiş grafiğe, G'nin *gömülmüş (embedded) yön verilmemiş grafiği* denir.

3.24. Tanım

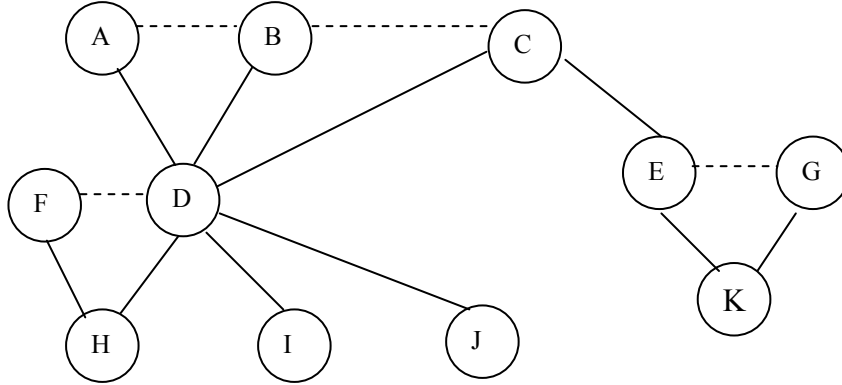
$G=(V,E)$ yön verilmiş bir grafik olsun. Düğümlerin tüm çiftleri arasında ve her düğümün ebeveynlerinin arasında yön verilmemiş kenarlar eklenerek elde edilen yön verilmemiş grafiğe *moral grafik* denir [Richardson, 1997; Stephenson, 2000].

Aşağıda, on bir düğümden oluşan bir yön verilmiş grafik verilmiştir (Şekil 3.13).



Şekil 3.13. On bir düğümden oluşan yön verilmiş bir grafik

Ayrıca, Şekil 3.13’de verilen grafiğe ilişkin moral grafik aşağıda verildiği gibidir (Şekil 3.14). Bu grafikte, $\{A,B\}$, $\{B,C\}$, $\{D,F\}$ ve $\{E,G\}$ çiftlerinin her biri ortak bir çocuğa sahiptir.



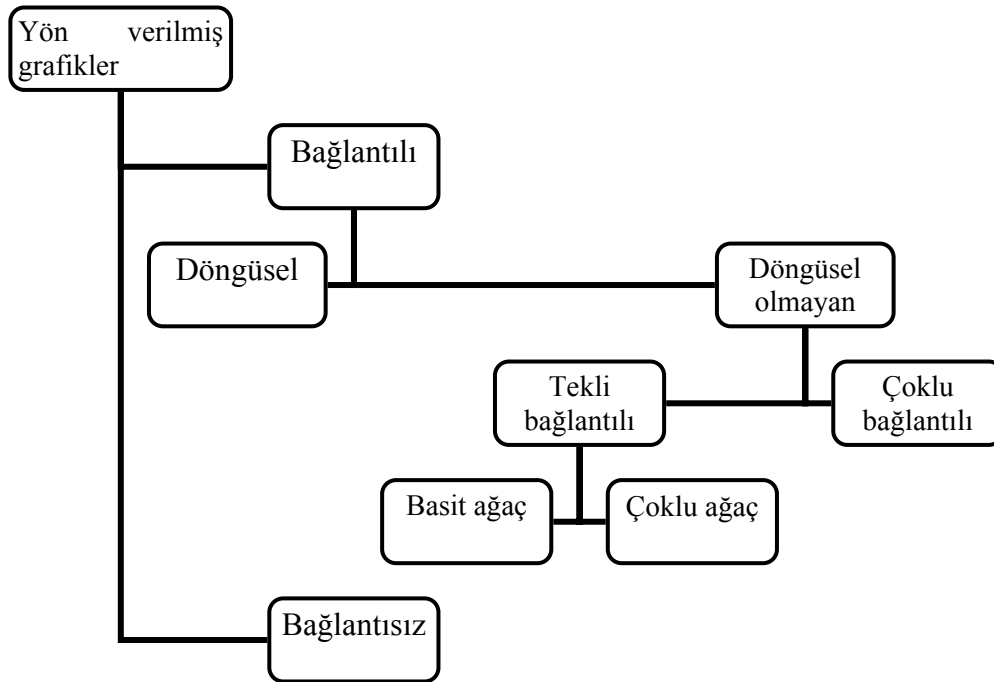
Şekil 3.14. Şekil 3.13’den elde edilen moral grafik

3.25. Tanım

Yön verilmiş bir grafikte, kapalı yön verilmiş yola *döngü* denir.

3.3.1. Yön verilmiş grafik türleri

Yön verilmiş grafik türleri Şekil 3.15’de gösterilmiştir [Ramoni, 2003]. Bu grafik türleri aşağıda verilen örnekler ile incelenmiştir.



Şekil 3.15. Yön verilmiş grafik türleri

3.26. Tanım

Bir yön verilmiş grafik ile ilişkilendirilmiş yön verilmemiş grafik bağlantılı ise, bu grafiğe *bağlantılıdır* denir. Diğer durumlarda, *bağlantısızdır* denir [Ramoni, 2003].

3.27. Tanım

Bir bağlantılı yön verilmiş grafik ile ilişkilendirilmiş yön verilmemiş grafik ağaç ise, bu grafik *ağaç* olarak adlandırılır. Diğer durumlarda, *çoklu bağlantılıdır* denir [Ramoni, 2003].

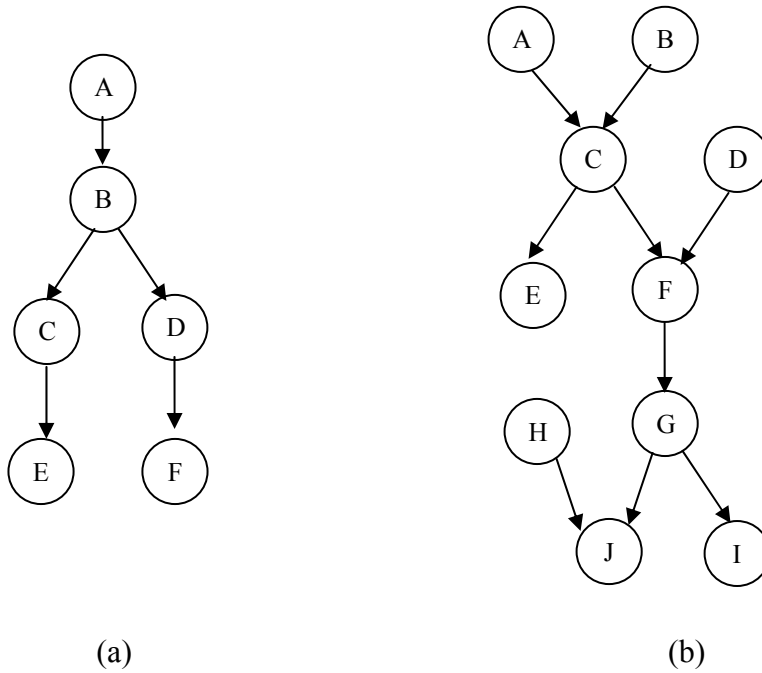
3.28. Tanım

$G=(V,E)$ bir grafik olsun. G grafiği, yön verilmiş bir grafik ve bu grafik döngüleri içermiyorsa, G grafiğine *yön verilmiş döngüsel olmayan grafik* denir [Ramoni, 2003; Jensen, 1996].

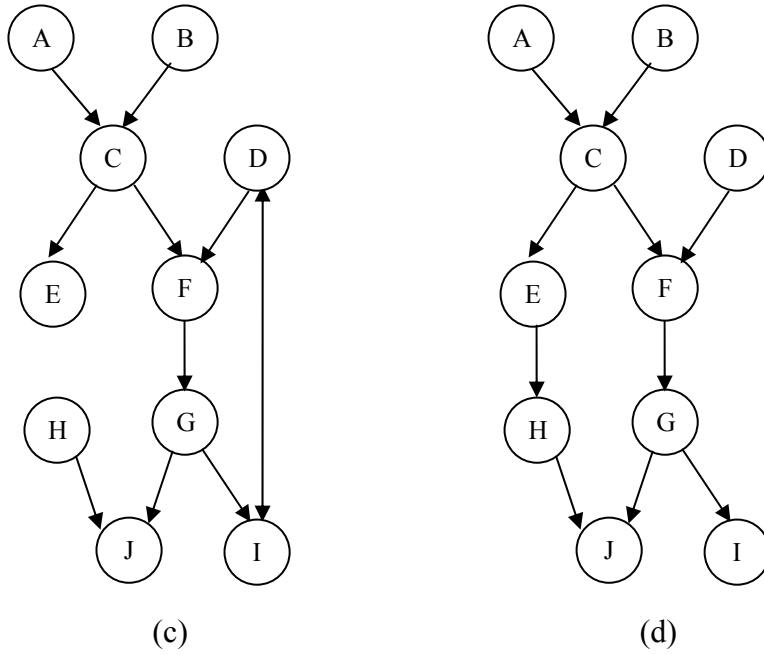
3.29. Tanım

Bir grafikte her düğüm en fazla bir ebeveyne sahip ise yön verilmiş ağaç *basit ağaç* olarak adlandırılır. Diğer durumlarda, *çoklu ağaç* olarak bilinir.

Aşağıda verilen şekillerde, basit ağaç, çoklu ağaç, döngüsel olmayan ve çoklu bağlantılı yön verilmiş döngüsel olmayan grafik türleri gösterilmiştir (Şekil 3.16).



Şekil 3.16. Yön verilmiş grafik türleri a) Basit ağaç b) Çoklu ağaç grafiği



Şekil 3.16 (Devam). Yön verilmiş grafik türleri c) Yön verilmiş döngüsel olmayan grafik d) Çoklu bağlantılı yön verilmiş döngüsel olmayan grafik

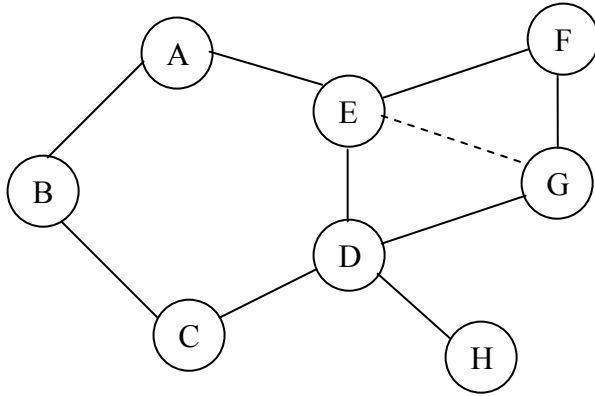
3.4. Üçgenleştirilmiş Grafikler

Üçgenleştirilmiş grafikler (Triangulated graphs), yön verilmemiş grafiklerin özel bir çeşididir. Bu bölümde, üçgenleştirilmiş grafikler tanıtılmış ve verilen bir grafiğin üçgenleştirilmiş olup olmadığının testi ve eğer grafik üçgenleştirilmiş değil ise, üçgen hale getirmekte kullanılan gerekli bağlantıları eklemek için algoritmalar verimıştır [Castillo ve ark., 1997; Schmidt-Thieme, 2003; Ramoni, 2003].

3.30. Tanım

Döngüde iki düğüm arasındaki bağlantıya *kiriş* adı verilir. Uzunluğu üç olan döngüler bir kirişi içermezler ve bu döngüler *üçgenler* olarak adlandırılır [Schmidt-Thieme, 2003].

Şekil 3.17’de, E-G bağlantısı, E-F-G-D-E döngüsünde yer alan bir kiriştir.



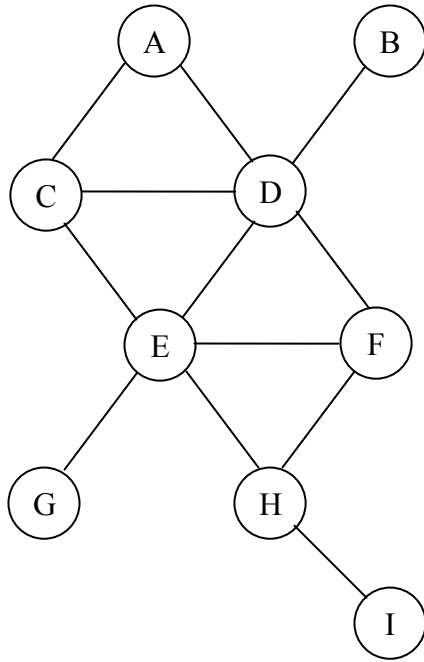
Şekil 3.17. E-G kirişi ile bir yön verilmemiş grafik

Bu şekilde, E-G kirişi, E-F-G-D-E döngüsünü, E-F-G-E ve E-G-D-E olmak üzere iki döngüye parçalamaktadır.

3.31. Tanım

Uzunluğu dört veya daha fazla olan her döngü en az bir kirişe sahip ise, yön verilmemiş grafiğe *üçgenleştirilmiş grafik* denir [Jordan, 1998].

Bir grafik üçgenleştirilmiş değil ise, döngüleri ortadan kaldırmak için kirişler eklenerek, grafik üçgenleştirilmiş hale getirilir. Bu yöntem, *doldurma* (filling-in) veya *üçgenleştirme* (triangulation) adı verilir [Castillo ve ark., 1997]. Bir grafiğin üçgenlere bölünmesi ile üçgen hale getirilmiş bir grafik elde edilemez.

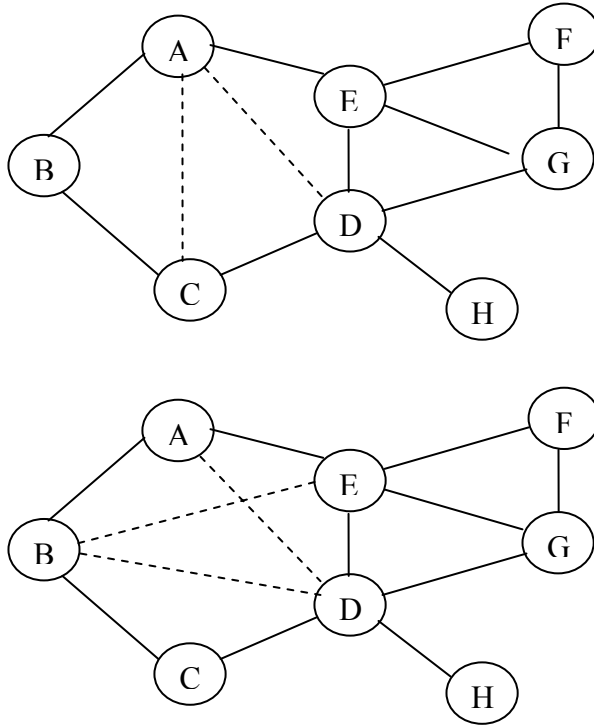


Şekil 3.18. Üçgenleştirilmiş grafik

Şekil 3.18, üçgenleştirilmiş bir grafiği gösterir. Bu grafikte, uzunluğu dört olan iki döngü A-C-E-D-A ve D-E-H-F-D ve uzunluğu beş olan döngü A-C-E-F-D-A en az bir kirişe sahiptir. Ayrıca, Şekil 3.17’de verilen grafik üçgenleştirilmiş değildir. Çünkü A-B-C-D-E-A döngüsü bir kirişe sahip değildir.

Bir döngünün ortadan kaldırılması için birçok farklı yol vardır. Bu nedenle, grafiği üçgen hale getirmek için de birçok farklı durum söz konusu olacaktır. Bir grafik doldurulduğu zaman, mümkün olduğunca az kirişler eklemek istenen bir durumdur. Bir grafik kirişlerin en az sayısını içeriyorsa, doldurulmuş grafiğe *en küçüktür* denir.

Şekil 3.19, Şekil 3.17’de verilen grafiğin üçgen hale getirilmesinde kullanılan iki farklı durumu göstermektedir. Şekil 3.19 (a)’da yer alan grafik, Şekil 3.19 (b)’ye göre daha küçüktür. Çünkü A-D veya B-E bağlantılarından biri ortadan kaldırılabilir, grafik hala üçgenleştirilmiş bir grafik olur.



Şekil 3.19. Şekil 3.17’deki grafiğin üçgen hale getirilmiş iki farklı gösterimi

3.32. Tanım

Düğümelerin alt kümesi,

$$\text{Sın.}(\mathbb{N}(i)) \cap \{\mathbb{N}(1), \dots, \mathbb{N}(i-1)\} \quad i=2,3,\dots,n$$

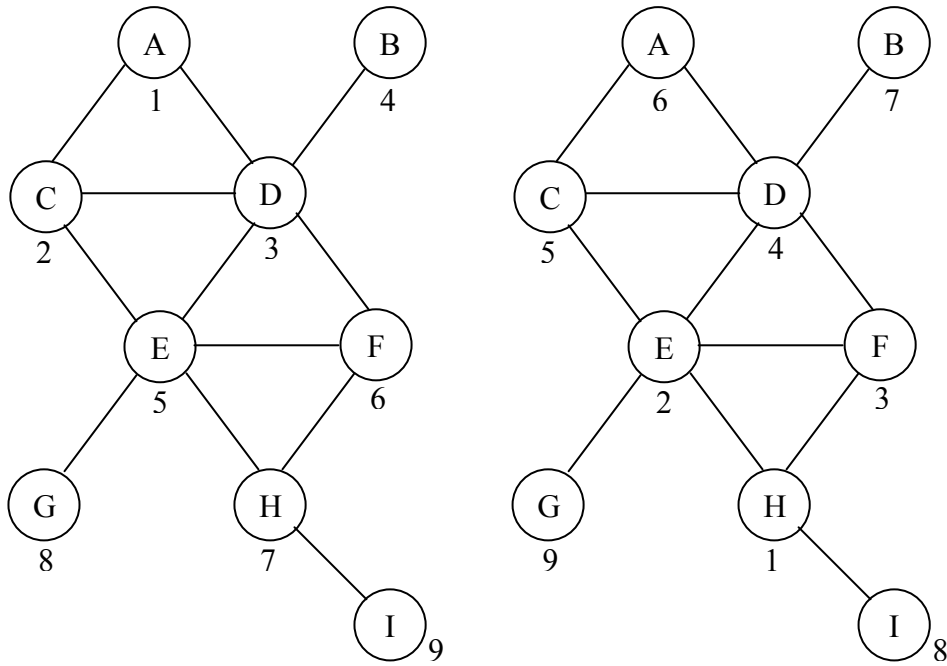
tam bir kümeysse, grafikteki düğümlerin numaralaması ($\mathbb{N}$), *kusursuz numaralama* (perfect numbering) olarak adlandırılır [Castillo ve ark., 1997; Jordan, 1998].

Şekil 3.20’de düğümlerin kusursuz numaralanmasının iki farklı gösterimi vardır. Yani, kusursuz numaralama tek değildir. Şekil 3.20 (a)’da verilen numaralama $\mathbb{N}(1)=A, \mathbb{N}(2)=C, \mathbb{N}(3)=D, \mathbb{N}(4)=B, \mathbb{N}(5)=E \dots$ ile gösterilsin. Bu verilen numaralamanın, kusursuz numaralama özelliklerini sağlayıp sağlamadığı aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.

$$\begin{aligned}
i=2, \quad \text{Sim. } \{ N(2)=C \} \cap \{ N(1)=A \} &= \{A,D,E\} \cap \{A\} = \{A\} \\
i=3, \quad \text{Sim. } \{ N(3)=D \} \cap \{ N(1), N(2) \} &= \{A,B,C,E,F\} \cap \{A, C\} = \{A, C\} \\
i=4, \quad \text{Sim. } \{ N(4)=B \} \cap \{ N(1), N(2), N(3) \} &= \{D\} \cap \{A,C,D\} = \{D\} \\
&\vdots \\
i=9, \quad \text{Sim. } \{ N(9)=I \} \cap \{ N(1), N(2), \dots, N(8) \} &= \{H\} \cap \{A,C,D,B,E,F,H,G\} = \{H\}
\end{aligned}$$

$i=2,3,\dots,9$ için $\text{Sim.}(N(i)) \cap \{N(1), \dots, N(i-1)\}$ 'lerin her biri tam küme özelliğini

sağladığından, N 'nin kusursuz numaralama olduğu söylenir. Şekil 3.20 (b)'de verilen numaralama da kusursuz bir numaralamadır.



Şekil 3.20. Düğümlerin kusursuz numaralanmasının iki farklı gösterimi

3.5. Teorem

Bir yön verilmemiş grafik üçgenleştirilmiş ise, bu grafik kusursuz numaralamaya olanak sağlar. Bir yön verilmemiş grafikte kusursuz numaralama yapmak mümkün ise, bu grafik üçgenleştirilmiştir [Castillo ve ark., 1997].

Aşağıda verilen En büyük önemliliği arama (Maximum Cardinality Search, MCS) algoritması, Teorem 3.5 ile ilgilidir. Bu algoritma, yön verilmemiş bir grafiğin düğümlerinin numaralanmasını verir. Orijinal grafik üçgenleştirilmiş bir grafik ise, yapılan bu numaralama, kusursuz bir numaralamadır [Castillo ve ark., 1997; Spiegelhalter ve ark., 1993].

En büyük önemliliği arama algoritması

Girdi : Yön verilmemiş bir grafik $G=(V,E)$ ve bir başlangıç düğümü V_i

Çıktı : V 'de yer alan düğümlerin $\mathbb{N}$ numaralaması

Başlangıç adımları

$N(1) \leftarrow V_i$

Numaralanmış $\leftarrow \{V_i\}$

İterasyon adımları

for $i=2$ to n

$V_k \leftarrow$ Numaralanmış düğüm hariç

$(V \setminus \text{Numaralanmış})$, V 'deki düğümler içerisinde

en büyük $|\text{Komş.}(V_k) \cap \text{Numaralanmış}|$ özelliğini sağlayan V_k düğümü seçilir.

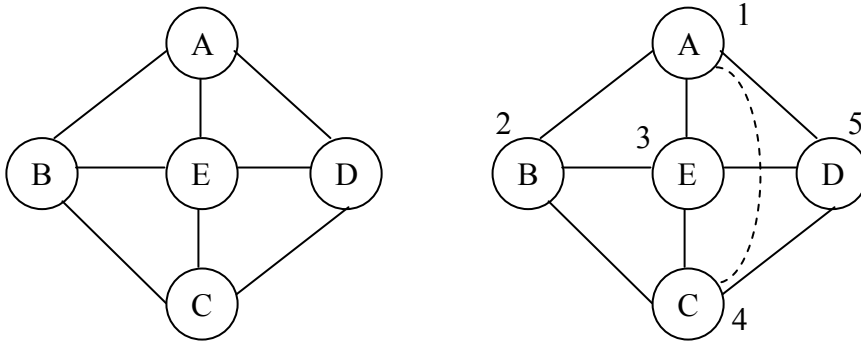
$N(i) \leftarrow V_k$

Numaralanmış düğüme V_k ekle.

3.6. Teorem

En büyük önemliliği arama algoritması ile elde edilen üçgenleştirilmiş grafiğin düğümlerinin her numaralanması kusursuz bir numaralamadır. Bu numaralama, En büyük önemliliği arama numaralaması olarak adlandırılır [Castillo ve ark., 1997].

Şekil 3.21 (a)'da üçgenleştirilmiş olmayan bir grafik verilmiştir. Bu grafiğin A-C düğümleri arasına giriş eklenerek Şekil 3.21 (b)'deki üçgenleştirilmiş bir grafik elde edilmiştir. Ayrıca, Şekil 3.21 (b)'de En büyük önemliliği arama algoritması kullanılarak düğümlerin kusursuz numaralanması verilmiştir.



Şekil 3.21. En büyük önemliliği arama algoritması ile elde edilen üçgenleştirilmiş grafiğin düğümlerinin kusursuz numaralanması a) Üçgenleştirilmiş olmayan grafik b) En büyük önemliliği arama algoritması kullanılarak düğümlerin kusursuz numaralanması ve üçgenleştirilmiş grafik

En büyük önemliliği arama algoritmasıyla elde edilen numaralama kusursuz değilse, grafik üçgenleştirilmiş değildir. Grafik üçgenleştirilmiş değil ise, grafiğin doldurulması gerekecektir. Bu doldurma işleminin tanıtılması amacı ile En büyük önemliliği arama doldurma algoritması (Maximum cardinality search fill-in) verilmiştir.

En büyük önemliliği arama doldurma algoritması

Girdi : Yön verilmemiş bir grafik $G=(V,E)$ ve bir başlangıç düğümü V_i

Çıktı : $G'=(V, V \cup V')$ üçgenleştirilmiş bir grafik olacak şekilde, V' nin doldurulması

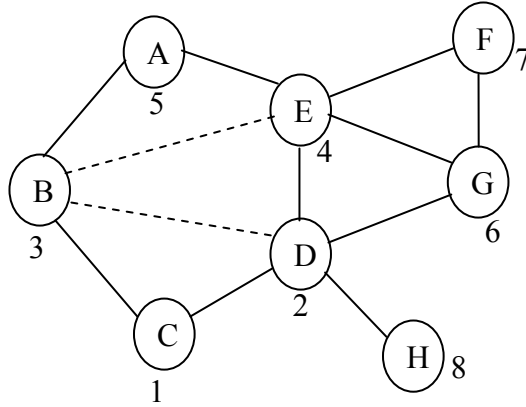
Başlangıç adımları

1. İlk olarak $V'=\emptyset$ alınır.
2. $i=1$ alınır ve başlangıç düğümü V_i 'nin numaralanmasında ilk sayı seçilir, yani $N(1)=V_1$ 'dır.

Iterasyon adımları

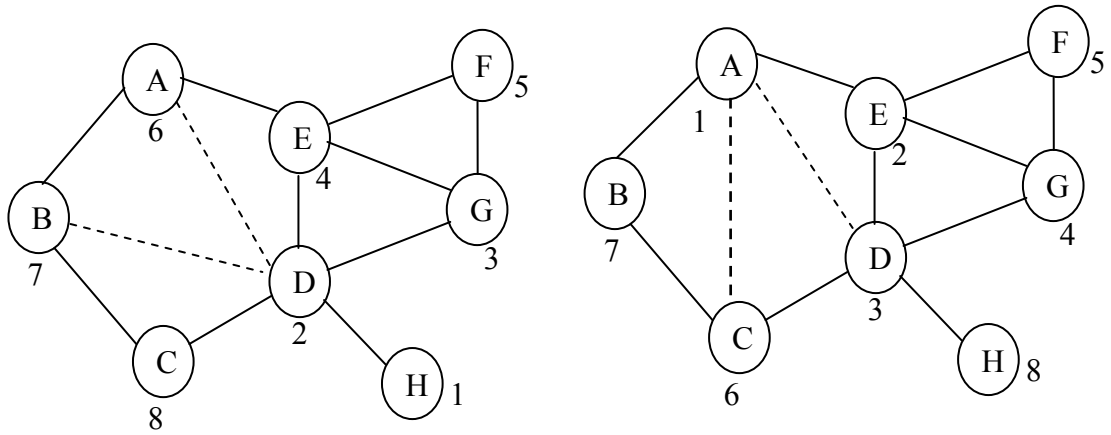
3. Numaralanmış komşuların en büyük sayısı ile numaralanmamış V_k düğümü, i etiketine atanır, yani $N(i)=V_k$ 'dır.
4. $Komş.(V_k) \cap \{N(1), \dots, N(i-1)\}$ tam küme değil ise, bu kümeyi tam yapabilmek için gerekli bağlantılar V' ne eklenir ve adım 2'ye gidilir. Diğer durumlarda adım 5'e gidilir.
5. $i=n$ ise, işleme son verilir. Diğer durumlarda, $i=i+1$ ve adım 3'e gidilir.

Bu algoritmanın kullanımını görmek için Şekil 3.17'de verilen üçgenleştirilmiş olmayan grafik ele alınmıştır. Bu grafiğin doldurulma işlemi için, En büyük önemliliği arama doldurma algoritması uygulanır. Başlangıç düğümü olarak C düğümü ele alınsın. Bu algoritmanın adımları sırasıyla uygulanırsa, elde edilen grafik üçgenleştirilmiş grafik olur ve kusursuz numaralama elde edilir (Şekil 3.22).



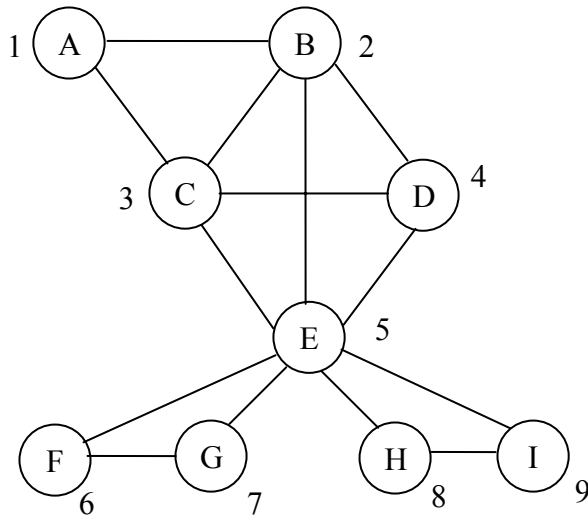
Şekil 3.22. Şekil 3.17 için En büyük önemliliği arama algoritması kullanılarak düğümlerin kusursuz sıralaması ve üçgenleştirilmiş grafik

Başlangıç düğümü farklı seçildiği takdirde, aynı grafik ile ilişkili birçok üçgen grafikler elde edilebilir. Örneğin, aşağıdaki şekilde, Şekil 3.17 için iki farklı kusursuz numaralama ve üçgenleştirilmiş grafikler gösterilmiştir (Şekil 3.23).



Şekil 3.23. Şekil 3.17'deki grafik için iki farklı kusursuz numaralama

En büyük önemliliği arama algoritması kullanılarak düğümlerin kusursuz sıralaması ve üçgenleştirilmiş grafik farklı bir örnek için aşağıda verilmiştir (Şekil 3.24).



Şekil 3.24. En büyük önemliliği arama algoritması ile edilen üçgenleştirilmiş grafiğin kusursuz numaralanması

3.33. Tanım

$K_i \cap (K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_{i-1})$, $\{K_1, K_2, \dots, K_{i-1}\}$ ($i=1, \dots, m$) kliklerinin en az birini kapsıyor ise, yön verilmemiş bir grafiğin kliklerinin $(K_1, K_2, \dots, K_m)$ sıralaması *süregelen arakesit özelliği* (running intersection property) sağladığı söylenir. Bu özellik, üçgenleştirilmiş grafiklerin önemli özelliklerinden biridir.

3.7. Teorem

Bir yön verilmemiş grafik üçgenleştirilmişse, bu grafik klikler zincirine sahiptir. Bir yön verilmemiş grafik klikler zincirine sahipse, bu grafik üçgenleştirilmiştir [Castillo ve ark., 1997].

Bir yön verilmemiş grafikten klikler zincirini elde etmek için bir algoritma verilmiştir. Bu algoritma, En büyük önemliliği arama algoritmasının temeline dayalıdır. Ayrıca, algoritma grafiğin üçgenleştirilmiş olduğunu varsayar. Grafik üçgenleştirilmiş değil ise, ilk olarak En büyük önemliliği arama doldurma algoritması kullanılarak, grafik üçgenleştirilmelidir.

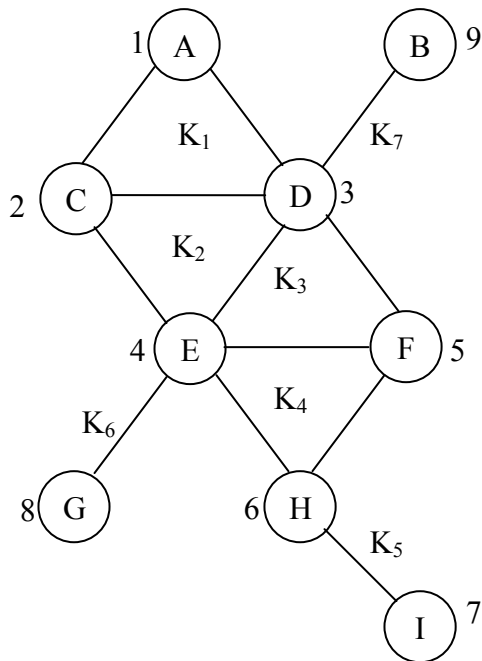
Klikler zincirinin elde edilmesi için algoritma

Girdi : Üçgenleştirilmiş yön verilmemiş bir grafik $G=(V,E)$

Çıktı : G grafiği ile ilişkilendirilmiş $(K_1, K_2, \dots, K_m)$ klikler zinciri

1. Başlangıç düğümü olarak herhangi bir düğümü seç ve düğümlerin kusursuz bir numaralamasını elde etmek için En büyük önemliliği arama algoritmasını kullan.
2. Grafikteki klikleri hesapla.
3. Düğümlerin en büyük kusursuz sayısı, her bir kliğe atanır.
4. Atanan sayılara göre, artan bir sırada $(K_1, K_2, \dots, K_m)$ klikleri sıralanır.

Şekil 3.18’de verilen üçgenleştirilmiş grafik için düğümlerin kusursuz numaralaması ve klikler zinciri gösterilmiştir (Şekil 3.25).



Şekil 3.25. Şekil 3.18 ile ilişkilendirilmiş düğümlerin kusursuz numaralaması ve klikler zinciri

Bu üçgenleştirilmiş grafik ile ilişkili klikler zincirini elde etmek için Klikler zincirinin elde edilme algoritması uygulanır. İlk olarak, En büyük önemliliği arama algoritması ile düğümlerin kusursuz numaralaması elde edilir. Bu numaralamanın

elde edilmesinde başlangıç düğümü olarak A düğümü ele alınmıştır. Grafikteki klikler,

$$K_1=\{A, C, D\}, K_2=\{C, D, E\}, K_3=\{D, E, F\}, K_4=\{E, F, H\}, K_5=\{H, I\}, \\ K_6=\{E, G\}, K_7=\{B, D\}$$

dır.

Her bir kliğe düğümlerin kusursuz en büyük sayısı atanır. $K_1 = \{A, C, D\}$ kliğindeki düğümlerin kusursuz sıralanması $\mathbb{N} = \{1, 2, 3\}$ 'dür. Burada atanan kusursuz en büyük sayı 3'tür ve bu sayıya karşılık gelen düğüm D düğümüdür. $K_2 = \{C, D, E\}$ kliğine karşı gelen kusursuz en büyük sayı 4'tür ve bu sayı E düğümüne karşılık gelir. Diğer klikler için de karşı gelen sayılar ve düğümler belirlenir. Böylece, Şekil 3.14'deki grafik için, $(K_1, K_2, \dots, K_7)$ klikler zincirini gösterir.

3.5. Koşullu Bağımsızlık Modelleri

Bir $G=(V,E)$ grafiği verilsin. Bu grafikte, E'nin her kenarı, V'deki iki düğüm arasındaki bir ilişkiyi yansıtır. Böylece, bir grafik, kenarlar arası ilişkilerin bir seti ve düğümlerin bir seti olarak tanımlanabilir. Grafiklerin kullanımı, koşullu bağımsızlık modellerini göstermek için oldukça önemlidir. Bu modelleri göstermek için, yön verilmiş döngüsel olmayan grafikler ele alınacaktır. Bu grafikler, olasılıklı ağ modellerinin önemli bir sınıfıdır. Bu bölümde, yön verilmiş döngüsel olmayan bir grafik verildiğinde, koşullu bağımsızlık modellerin elde edilmesi üzerinde durulacaktır.

3. 34. Tanım

X değişkenler kümesini ve bu değişkenler kümesi üzerinde P ortak olasılık fonksiyonunu gösterebilirsin. Tüm değişkenler veya değişkenler kümesi, X'in alt setleri

veya elemanlarıdır. Z verildiğinde, X ve Y *koşullu bağımsızdır* denir ve $I(X,Z,Y)$ şeklinde veya $\{X\} \perp \{Y\} \setminus \{Z\}$ şeklinde gösterilir.

X değişkenler kümesi üzerinde bağımsızlık modeli, bir bağımsızlık durumunun kümesidir. X değişkenler kümesi üzerinde P ortak olasılık fonksiyonunun tam bağımsızlık modeli M_1 , P 'deki tüm geçerli bağımsızlık durumlarının setidir [Neal, 2000].

$$P(X,Y|Z)=P(X|Z)P(Y|Z) \quad \text{tüm } x,y,z \text{ değerleri için}$$

Aşağıda verilen aksiyomlar bağımsızlık özellikleri olarak adlandırılır [Dawid, 1979; Pearl ve Verma, 1987].

Simetri	$I(X,Z,Y)$	$\leftrightarrow I(Y,Z,X)$
Ayrıştırma	$I(X,Z,WY)$	$\rightarrow I(X,Z,Y)$
Zayıf birleşim	$I(X,Z,WY)$	$\rightarrow I(X,ZW,Y)$
Küçülme	$I(X,ZW,Y) \wedge I(X,Z,W)$	$\rightarrow I(X,Z,WY)$
Arakesit	$I(X,ZW,Y) \wedge I(X,ZY,W)$	$\rightarrow I(X,Z,WY)$

Bu aksiyomlarla, bağımsızlık durumları, başka bağımsızlık durumlarından türetilcektir. Örneğin, $M_1, I(a,b,c) \in M_1$ olacak şekilde, verilen bir P fonksiyonu için bağımsızlık modelini gösterebilirsin. Böylece, simetri özelliği kullanılarak, $I(c,b,a)$ 'da M_1 'de olmalıdır.

3.35. Tanım

$G=(V,E)$ yön verilmemiş bir grafik ve V 'nin farklı alt setleri X,Y, Z olsun. X ve Y düğümleri arasındaki her yol, en az bir tane Z düğümünü içerirse, Z, X ve Y 'den *u-ayrılmıştır* (u-separation) denir ve $US(X,Y|Z)_G$ yada basitçe $US(X,Y|Z)$ ile gösterilir.

Bir yön verilmemiş grafik verildiğinde, u-ayrılmış ölçütü kullanılarak, bir grafikteki tüm koşullu bağımsızlık durumları elde edilebilir.

3.36. Tanım

$G=(V,E)$ bir yön verilmiş döngüsel olmayan grafik ve V 'nin farklı alt setleri X,Y, Z olsun. X, Y ve Z 'yi kapsayan en küçük ataların meydana getirdiği moral grafikte, Z, X ve Y 'den u -ayrılmış ise, Z, X ve Y 'den *d-ayrılmıştır* (d-separation) denir ve $DS(X,Y|Z)_G$ ya da basitçe $DS(X,Y|Z)$ ile gösterilir [Neal, 2000]. Burada, d (directed) yön verilmiş ve u (undirected) yön verilmemiş anlamına gelir.

Sonuç olarak, V 'nin farklı X,Y ve Z düğümleri ele alınırsa, Z, X ve Y 'den d -ayrılmıştır ise, Z verildiğinde, X ve Y *koşullu bağımsızdır* denir ve $\{X\} \perp \{Y\} \setminus \{Z\}$ ile gösterilir.

Bu tanım ile verilen bir grafiğe ilişkin koşullu bağımsızlıklar rahatça okunabilmektedir. Ayrıca, yönsel-ayırılma ile ilgili alternatif tanımlar, Jensen (1996), Geiger ve ark.(1990)'da verilmiştir. Yukarıda verilen tanıma ilişkin aşağıda bir teorem verilmiştir.

3.8. Teorem

$G=(V,E)$ bir yön verilmemiş döngüsel olmayan grafik olsun. Her $V_i \in V$ için, her rastgele değişken V_i 'nin ebeveynleri $Eb(V_i)$ verildiğinde, V_i rastgele değişkeni torunları olmayan düğümlerden $TO(V_i)$ koşullu bağımsızdır ve

$$\{V_i\} \perp \{TO(V_i)\} \setminus \{Eb(V_i)\}$$

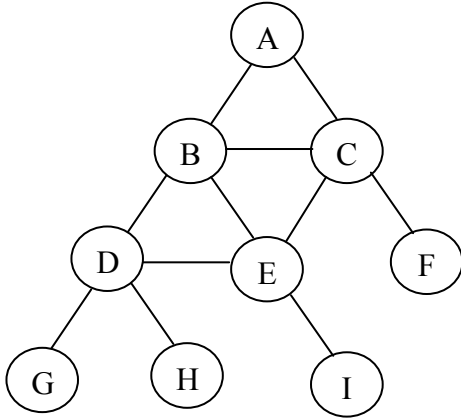
ile gösterilir [Jensen (1996); Geiger ve ark.(1990)].

3.37. Tanım

$G=(V,E)$ bir yön verilmemiş döngüsel olmayan grafik olsun. Bu grafik ile düzenlenmiş olan koşullu bağımsızlık modeli, koşullu bağımsızlık durumlarının bir

setidir. G grafiğinde koşullu bağımsızlık durumları, V'nin farklı X,Y ve Z düğümlerinin alt seti için $DS(X,Y|Z)$ ölçütünü sağlamalıdır.

Aşağıda dokuz düğüme ilişkin yön verilmemiş bir grafik verilmiştir (Şekil 3.26).



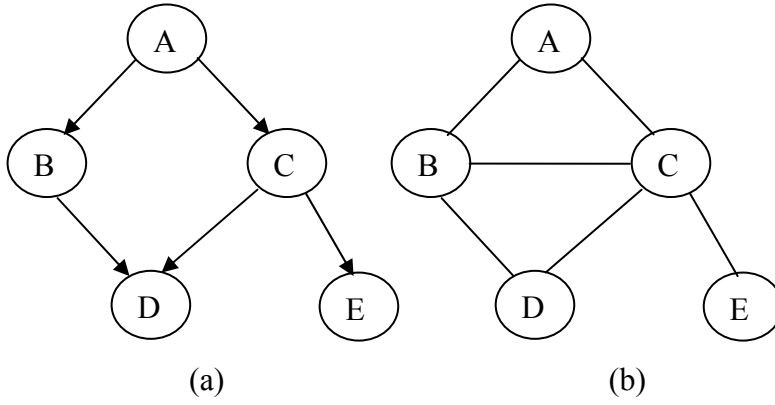
Şekil 3.26. Dokuz düğümden oluşan yön verilmemiş grafik

Bu grafiğe ilişkin koşullu bağımsızlıklar aşağıda verildiği gibidir.

A ve I düğümleri arasındaki her yol E düğümünü içerir. Bu yollardan biri, A-B-E-I, diğeri ise, A-C-E-I'dır. Bu nedenle, E düğümü verildiğinde, A ve I koşullu bağımsızdır denir ve $\{A\} \perp \{I\} \setminus \{E\}$ ile gösterilir.

$\{A,C\}$ ve $\{D,H\}$ düğümleri arasındaki her yol ya B ya da E düğümünü içermektedir. Bu bağımsızlık $\{A,C\} \perp \{D,H\} \setminus \{B,E\}$ ile gösterilir.

Aşağıda beş düğüme ilişkin yön verilmiş döngüsel olmayan bir grafik verilmiştir (Şekil 3.27).



Şekil 3.27. Beş düğüme ilişkin yön verilmiş döngüsel olmayan grafik a) Beş düğüme ilişkin yön verilmiş döngüsel olmayan grafik b) Beş düğüme karşılık gelen moral grafik

Bu grafiğe ilişkin koşullu bağımsızlıklar aşağıdaki tabloda verilmiştir (Çizelge 3.1).

Çizelge 3.1. Şekil 3.27(a) için koşullu bağımsızlıklar

Düğüm	Ebeveynler	Koşullu bağımsızlıklar
B	{A}	$\{B\} \perp \{C, E\} \setminus \{A\}$
C	{A}	$\{C\} \perp \{B\} \setminus \{A\}$
D	{B, C}	$\{D\} \perp \{A, E\} \setminus \{B, C\}$
E	{C}	$\{E\} \perp \{A, B, D\} \setminus \{C\}$

Yukarıdaki tabloda, örneğin, {A} düğümü verildiğinde, {B} ve {C, E} düğümleri koşullu olarak bağımsızdır.

4. OLASILIKLI AĞ MODELLERİ

Bir olasılıklı ağ modeli, düğümlerin rastgele değişkenler ile gösterildiği, okların (yön verilmiş veya yön verilmemiş) değişkenler arasındaki bağımlılıkları gösterdiği bir modeldir. Bu modeller, rastgele değişkenler arasındaki ilişkileri ve bu değişkenlere ilişkin ortak olasılık fonksiyonlarını göstermek için kullanılır. Bu modellerin kullanımı, kolay yorumlanabilir ve kolay kullanılabilir olmaları nedeni ile son yıllarda önemli bir artış göstermiştir. Olasılıklı ağ modelleri, değişik formlarda oluşur:

1. Bayes ağlar : Nedensel ve olasılıklı süreçleri gösterir.
2. Veri akış diyagramları : Deterministik hesaplamaları gösterir.
3. Etki diyagramları : Karar süreçlerini gösterir.
4. Markov ağlar : Saklı nedenler (hidden causes) ve görüntülerdeki (images) korelasyonu gösterir.

Bu çalışmada, yukarıda verilen modellerden sadece Markov ve Bayes ağlar üzerinde durulmuştur. Markov ağ modelleri yön verilmemiş grafikler ile belirlenir. Bayes ağlar ise, yön verilmiş döngüsel olmayan grafikler ile belirlenir. Bayes ağlar, ilgilenilen değişkenler arası olasılık ilişkilerini gösteren grafik modelleridir. Bu ağ modelleri, değişkenler kümesi arasındaki ilişkileri grafik olarak göstermek ve uzman sistemlerde belirsizlik ile ilgilenmek için güçlü bir yöntemdir [Castillo ve ark.,1997].

4.1. Olasılıklı Ağ Modelleri

$\mathbf{X}=(X_1,X_2,\dots,X_n)$, n-boyutlu bir rastgele değişkeni gösterebilir. $\mathbf{X}$ için olasılıklı ağ modeli, $\mathbf{X}$ 'in *genelleştirilmiş ortak olasılık fonksiyonunun* ($\rho(\mathbf{x})$) çarpanlarına ayrılması olarak ifade edilir. $\mathbf{X}$ için bir olasılıklı ağ modeli, aşağıda verilen iki bileşenden oluşur [Pena, 2001].

1. $\mathbf{X}$ 'deki rastgele değişkenler arasındaki koşullu bağımsızlıkları (bağımlılık) belirleyen bir model yapısı olmalıdır. $\mathbf{X}$ için model yapısı, yön verilmiş döngüsel olmayan bir grafiktir ve olasılıklı ağ modelinin nitel kısmını gösterir. Bu model yapısı çalışma süresince kısaca m ile gösterilecektir. Model yapısındaki düğümler, tek boyutlu rastgele değişkenlerdir ve bu rastgele değişkenler X_i (tüm i 'ler için) ile gösterilecektir.

2. Model yapısı için olasılık fonksiyonlarının seti belirlenmelidir. Olasılık fonksiyonlarının seti, olasılıklı ağ modelinin nicel kısmını gösterir.

Olasılığın çarpım kuralından, olasılıklı ağ modeli tarafından elde edilen $\mathbf{X}$ için genelleştirilmiş ortak olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibi çarpanlarına ayrılır.

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \rho(x_i \mid x_1, \dots, x_{i-1}) \quad (4.1)$$

Eş. 4.1'in sağ tarafında yer alan çarpım ifadeleri, olasılıklı ağ modelinin yapısına göre tekrar düzenlenecektir. Bunun için, olasılıklı ağ modelinin yapısı m 'nin atalara ilişkin bir sıralamasını sağlamalıdır. Her yön verilmiş döngüsel olmayan grafik için atalara ilişkin bir sıralama vardır. Eğer, bir yön verilmiş döngüsel olmayan grafiğin model yapısı, atalara ilişkin sıralamayı sağlamıyorsa, bu grafiğin düğümleri tekrar adlandırılmalıdır. Sonuç olarak, tüm i 'ler için, $(X_1, X_2, \dots, X_{i-1})$ seti, X_i 'nin torunlarını içermemelidir. Ayrıca, model yapısı m , bir koşullu bağımsızlık modelini ortaya koyar. Burada, tüm i 'ler için X_i rastgele değişkeni, $\mathbf{Eb}(m)_i$ verildiğinde, X_i 'nin torunları olmayan değişkenlerden koşullu bağımsızdır denir. Bu model yapısı m ,

$$X_i \perp (X_1, X_2, \dots, X_{i-1}) \setminus \mathbf{Eb}(m)_i \quad \text{tüm } i\text{'ler için} \quad (4.2)$$

koşullu bağımsızlık durumlarının seti şeklinde ifade edilir. Bu nedenle, Eş. 4.1 aşağıdaki gibi tekrar yazılacaktır.

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \rho(x_i | \mathbf{eb}(\mathbf{m})_i) \quad (4.3)$$

Eş. 4.3’de yer alan çarpım ifadeleri, koşullu olasılık fonksiyonlarını gösterir. Bu olasılık fonksiyonları, parametrelerinin sonlu bir setine $\Theta_m = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ bağlı olduğu varsayılır. Bu fonksiyonların parametreleri, *model parametreleri* olarak adlandırılır. Ayrıca, $\mathbf{X}$ ’in genelleştirilmiş ortak olasılık fonksiyonu model yapısındaki koşullu bağımsızlıklara göre çarpanlarına ayrılabilir. Bu model yapısı $\mathbf{m}$ ’de ortaya atılan koşullu bağımsızlık iddiaları *model yapısı hipotezleri* olarak adlandırılır ve bu model yapısı hipotezleri $\mathbf{m}^h$ ile gösterilir. Bu nedenle, Eş. 4.3 aşağıdaki gibi tekrar yazılacaktır.

$$\rho(\mathbf{x} | \theta_m, \mathbf{m}^h) = \rho(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta_m, \mathbf{m}^h) = \prod_{i=1}^n \rho(x_i | \mathbf{eb}(\mathbf{m})_i, \theta_i, \mathbf{m}^h) \quad (4.4)$$

4.1. Teorem

$(\mathbf{m}, \theta_m)$, $\mathbf{X}$ için bir olasılıklı ağ modelini gösterebilir. O zaman,

$$\rho(\mathbf{x} | \theta_m, \mathbf{m}^h) = \rho(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta_m, \mathbf{m}^h) = \prod_{i=1}^n \rho(x_i | \mathbf{eb}(\mathbf{m})_i, \theta_i, \mathbf{m}^h) \quad (4.5)$$

dır [Pena, 2000].

Sonuç olarak, bir olasılıklı ağ modelinin tanımlanması için verilen koşulların belirlenmesi gerekir.

1. Rastgele değişkenler arasındaki koşullu bağımsızlık durumlarını gösteren yön verilmiş döngüsel olmayan grafiğin model yapısı ($\mathbf{m}$) belirlenmelidir.
2. Model yapısı için olasılık fonksiyonlarının seti belirlenmelidir.

Burada, koşullu bağımlılık durumlarından daha çok koşullu bağımsızlık durumları ile ilgilenilir. Çünkü koşullu bağımsızlık durumları, parametrelerin sayısında bir azalma meydana getirir ve X için genelleştirilmiş ortak olasılık fonksiyonunun çarpanlarına ayrılmasına imkan sağlar. Grafiksel modeller de bağımsızlık kavramı oldukça önemlidir. Bağımsızlık teorisi Dawid (1979) ve Pearl (1988) tarafından geliştirilmiştir.

4.2. Markov Ağ Modelleri

Bir grafiksel modelde, yön verilmemiş grafik, Markov Ağ Modelleri olarak adlandırılır [Pearl, 1988; Wainwright, 2005; Wikipedia, 2006]. Ayrıca, yön verilmemiş grafik, Markov rastgele alan için bir grafiksel model olup, literatürde bu grafik, Markov ağ veya Markov rastgele alan olarak ta bilinir. Markov ağlar, Hammersley-Clifford teoreminin ortaya çıkışı ile istatistikte kullanılmaya başlanmıştır [Besag ve ark., 1991; Lecture Outline, 2003]. Bu teoremin değişik biçimi Teorem 4.2’de verilmiştir. Ayrıca, yön verilmemiş grafikler, Bayes ağların teorisini basitleştirdiğinden dolayı oldukça önemlidir [Lauritzen ve ark., 1990].

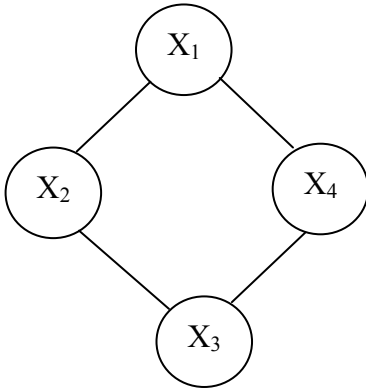
4.2. Teorem

Bir yön verilmemiş grafik G , X kümesinde yer alan değişkenlerden oluşur. G grafiğinde en büyük klikler kümesi, $Klikler(G) \subset 2^X$ ’dir. $P(x)$ ortak olasılık fonksiyonu altında, şayet ve sadece şayet $P(x)$ aşağıda verilen fonksiyonel forma sahipse,

$$P(x) = \prod_{K \in Klikler(G)} f_K(K) \quad , \quad f_K > 0 \quad (4.6)$$

$Komş.(x)$ verildiğinde, x düğümü, $X - \{x\} - Komş(x)$ ’den bağımsızdır [Frydenberg 1990].

Sonlu kesikli alanlar için bu teoremin genel formu, Hammersley-Clifford teoremi olarak adlandırılır [Besag ve ark., 1991]. Bu teorem, Markov ağın yorumlanması olarak kullanılır.



Şekil 4.1. Dört değişkenden oluşan bir yön verilmemiş grafik

Dört değişkenden oluşan bir yön verilmemiş grafik Şekil 4.1’de verilmiştir. Bu grafiğe ilişkin ortak olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$P(x)=f_1(x_1,x_2).f_2(x_2,x_3).f_3(x_3,x_4).f_4(x_4,x_1)$$

dır.

Bir yön verilmemiş grafiksel model, grafiğin klikleri ve kliklere karşılık gelen klik potansiyellerinin sayısal olarak ilişkilendirilmesi ile belirlenir. *Potansiyel*, bir kliğin düzenlerinin seti üzerinde bir fonksiyondur ve her bir düzen pozitif bir reel sayı ile ilişkilendirilir.

4.1. Tanım

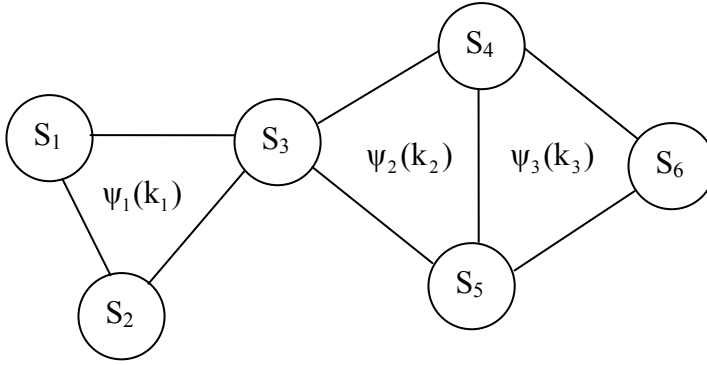
Bir Markov ağ modeli veya bir Markov ağ (G,Ψ) çiftidir. Burada, G , yön verilmemiş bir grafik ve $\Psi=\{\psi_1(k_1),\dots,\psi_m(k_m)\}$ G ’nin $(K_1,K_2,\dots,K_m)$ klikleri üzerinde tanımlanmış pozitif potansiyel fonksiyonların setidir. Örneğin, $\psi_1(k_1)$, k_1

kliği üzerinde tanımlanmış potansiyele sahiptir. Buna göre, ortak olasılık fonksiyonu $P(x)$, klik potansiyelleri üzerinde çarpım alınarak elde edilir.

$$P(x) = \prod_{i=1}^m \psi_i(k_i) \quad (4.7)$$

Eş. 4.7’de, $\psi_i(k_i)$ ($i=1,2,\dots,m$) negatif olmayan fonksiyonlardır.

Altı düğümden oluşan $S=\{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6\}$ bir yön verilmemiş grafik ve bu grafiğe ilişkin klik potansiyelleri aşağıda verilmiştir (Şekil 4.2).



Şekil 4.2. Altı düğümden oluşan bir yön verilmemiş grafik ve bu grafiğe ilişkin klik potansiyelleri

Bir yön verilmemiş grafik G üçgenleştirilmiş ise, $P=\{P(r_1 \setminus s_1), \dots, P(r_m \setminus s_m)\}$ olasılık fonksiyonları kullanılarak ortak olasılık fonksiyonu $P(x)$ çarpanlarına ayrılacaktır.

$$P(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^m P(r_i \setminus s_i) \quad (4.8)$$

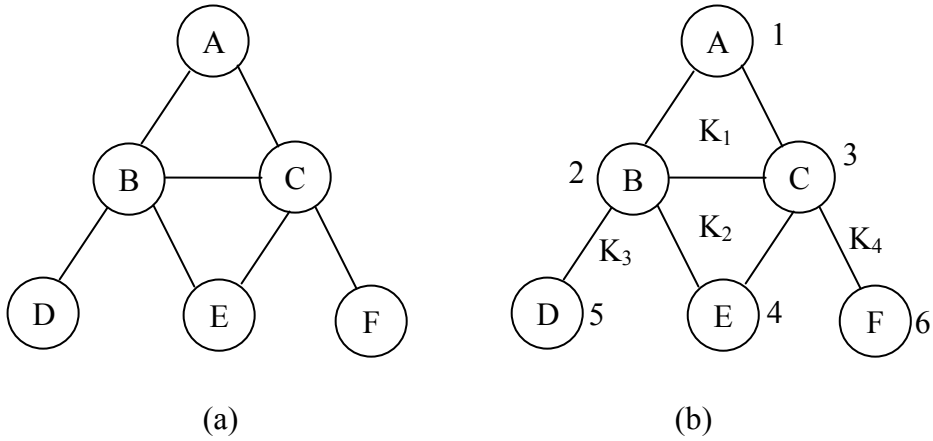
Bu eşitlikte r_i ve s_i rastgele değişken olmak üzere, sırasıyla kliklerin artığı (residual) ve ayırıcı (separator) gösterir. Bu durumda, Markov ağ modeli (G,P) olarak bilinir.

Böylece, bir Markov ağ, potansiyel fonksiyonlar veya olasılık fonksiyonların ortak olasılık fonksiyonlarının çarpanlarına ayrılması süresince olasılıklı modelin nitel yapısını tanımlamak için kullanılır. Nicel yapı ise ortak olasılık fonksiyonunu çarpanlara ayırmada ortaya çıkan fonksiyonların sayısal olarak elde edilmesidir.

4.1. Örnek

Bu örnekte, Şekil 4.3 (a)'da verilen yön verilmemiş üçgenleştirilmiş G grafiğini kullanarak bir Markov ağ modeli oluşturulmuştur. Şekil 4.3 (b) ise, bu grafiğin kliklerini gösterir.

$$K_1=\{A,B,C\}, K_2=\{B,C,E\}, K_3=\{B,D\}, K_4=\{C,F\} \quad (4.9)$$



Şekil 4.3. Yön verilmemiş üçgenleştirilmiş grafik a) Bir Markov ağ modeli
b) Grafiğin klikleri ve numaralaması

Eş. 4.8 kullanılarak, Şekil 4.3 (b)'ye ilişkin grafiğin çarpanlarına ayrılması,

$$\begin{aligned} P(x) &= \psi_1(k_1) \cdot \psi_2(k_2) \cdot \psi_3(k_3) \cdot \psi_4(k_4) \\ &= \psi_1(a,b,c) \cdot \psi_2(b,c,e) \cdot \psi_3(b,d) \cdot \psi_4(c,f) \end{aligned} \quad (4.10)$$

dır. Böylece, bir Markov ağ modeli, G grafiği ve

$$\Psi = \{\psi_1(a,b,c), \psi_2(b,c,e), \psi_3(b,d), \psi_4(c,f)\}$$

potansiyel fonksiyonların seti ile tanımlanmıştır.

Şekil 4.3 (a)'da verilen grafik üçgenleştirilmiş olduğundan, ortak olasılık fonksiyonun başka bir şekilde çarpanlarına ayrılması, Eş. 4.8 kullanılarak elde edilir. Bu çarpanlara ayırmayı elde etmek için, süregelen arakesit özelliğini sağlayan kliklerin bir sıralanması gerekir. Eş. 4.9'da verilen (K_1, K_2, K_3, K_4) klikleri süregelen arakesit özelliğini sağlar. Çizelge 4.1, (K_1, K_2, K_3, K_4) kliklerinden elde edilen ayıraç ve artık setleri gösterir.

Çizelge 4.1. (K_1, K_2, K_3, K_4) klikleri için ayıraç ve artık setleri

i	Klik, K_i	Ayıraç, s_i	Artık, r_i
1	$\{A, B, C\}$	$\emptyset$	$\{A, B, C\}$
2	$\{B, C, E\}$	$\{B, C\}$	$\{E\}$
3	$\{B, D\}$	$\{B\}$	$\{D\}$
4	$\{C, F\}$	$\{C\}$	$\{F\}$

Bu tablodan ve Eş. 4.8'den,

$$\begin{aligned}
 P(a,b,c,d,e,f) &= \prod_{i=1}^4 P(r_i \setminus s_i) \\
 &= P(a,b,c).P(e \setminus b,c).P(d \setminus b).P(f \setminus c)
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Şekil 4.3 (a)'da verilen grafik ile ilişkilendirilmiş bir Markov ağ modelini elde etmek için başka bir yol,

$$P = \{P(a,b,c), P(e \setminus b,c), P(d \setminus b), P(f \setminus c)\}$$

olasılık fonksiyonlarının belirlenmesidir. Eş. 4.7’de verilen potansiyel fonksiyonların her biri, Eş. 4.8’deki koşullu olasılık fonksiyonlara denk alınacaktır. Bundan dolayı (G, Ψ) ve (G, P) Markov ağ modelinin iki farklı gösterimidir.

4.3. Bayes Ağ Modelleri

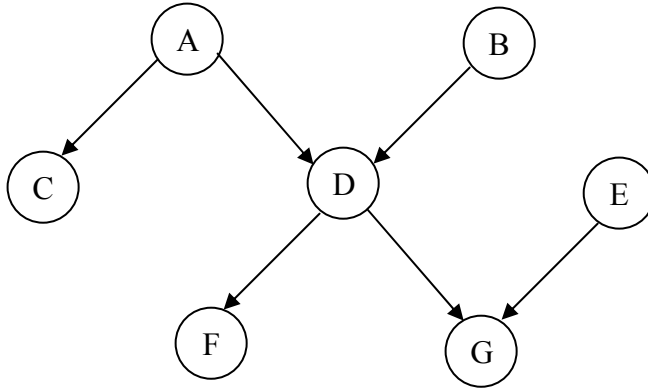
Bir Bayes ağ modeli veya Bayes ağ, $G=(V, E)$ yön verilmiş döngüsel olmayan grafik, $P=\{P(x_1 \setminus Eb(m)_1), \dots, P(x_n \setminus Eb(m)_n)\}$ n tane koşullu olasılık fonksiyonlarının setidir. Eb_i , G ’de X_i düğümünün ebeveynlerinin setini ve P değişkenlere ait ortak olasılık fonksiyonu tanımlar.

$$P(x) = \prod_{i=1}^n P(x_i \setminus Eb(m)_i) \quad (4.11)$$

Bayes ağların ortak olasılık fonksiyonlarının çarpanlarına ayrılması yön verilmiş döngüsel olmayan grafikten kolaylıkla elde edilebilir. Diğer taraftan, Markov ağlar ile ilişkilendirilmiş ortak olasılık fonksiyonlarının çarpanlarına ayrılması, birçok adımları içerir. Yani, yön verilmemiş grafikteki kliklerin bulunması, süregelen arakesit özelliğine göre kliklerin sıralanması, ayıraç ve artık setlerin bulunması...dır. Bu nedenle, olasılıklı ağ modelini kurmak için Bayes ağ kullanımı, Markov ağ kullanımından daha kolaydır. Ayrıca, bağımlılıkların gösteriminde bir Markov ağ, Bayes ağa benzerdir. Bir Markov ağ modeli döngüsel bağımlılıkları gösterirken, bir Bayes ağ modelinde bu bağımlılıklar görülmemektedir.

4.2. Örnek

Şekil 4.4’de verilen bir yön verilmiş döngüsel olmayan grafik düşünölsün. Tüm değişkenler $\{A, B, C, D, E, F, G\}$ ’nin iki sonuçlu olduğu yani her bir değişkenin iki mümkün değeri aldığını varsayalım.



Şekil 4.4. Yedi düğümden oluşan bir Bayes ağ modeli

Bu grafik verildiğinde, bir Bayes ağ modeli Eş. 4.12’de ortaya çıkan koşullu olasılık fonksiyonlarının seti ile tanımlanmıştır.

$$P(a,b,c,d,e,f,g)=P(a).P(b).P(c|a).P(d|a,b).P(e).P(f|d).P(g|d,e) \quad (4.12)$$

4.3.1. Çokterimli Bayes ağlar

Bir çokterimli Bayes ağda X ’deki tüm değişkenlerin kesikli olduğu varsayılır. Yani, her bir değişken mümkün değerlerin sonlu bir kümesine sahiptir. Ayrıca, her bir değişkenin koşullu olasılık fonksiyonunun çokterimli olduğu varsayılır. Bu koşullu olasılık fonksiyonları, olasılık tabloları kullanılarak ya sayısal olarak veya parametrik olarak belirlenecektir.

$\mathbf{X}=(X_1,X_2,\dots,X_n)$, n -boyutlu kesikli rastgele değişkeni gösterebilir. $\mathbf{X}$ ’in kesikli rastgele değişken olarak tanımlandığı durumda olasılıklı ağ modeli, $\mathbf{X}$ için bir Bayes ağ olarak adlandırılır. O zaman, $\mathbf{X}$ için ortak olasılık fonksiyonlarının çarpanlarına ayrılması

$$P(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}_m, \mathbf{m}^h)=P(x_1,x_2,\dots,x_n|\boldsymbol{\theta}_m, \mathbf{m}^h)=\prod_{i=1}^n P(x_i|\mathbf{e}_b(\mathbf{m})_i, \boldsymbol{\theta}_i, \mathbf{m}^h) \quad (4.13)$$

şeklinde olacaktır [Heckerman, 1995].

Burada $\Theta_m = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ ve $\mathbf{m}^h$, model parametreleri ve model yapısı hipotezleridir.

Bir Bayes ağda model yapısı yön verilmiş döngüsel olmayan grafikdir ve model parametreleri koşullu olasılık fonksiyonlarındaki sayısal değerlerdir. Eş. 4.13, Eş. 4.11'in özel bir durumudur. Yani, $\mathbf{X}$ 'in kesikli olduğu durum için geçerlidir.

Eş. 4.13'ün sağ tarafında yer alan olasılık fonksiyonları, tüm i 'ler için, $\mathbf{Eb}(\mathbf{m})_i$ 'nin her bir değeri verildiğinde, her X_i için olasılık fonksiyonlarını gösterir ve bu fonksiyonlar çok terimli bir dağılıma sahiptir.

Bir Bayes ağda model parametre tahminlerini elde etmek için, aşağıda verilen notasyonlar kullanılacaktır [Pena, 2001]. Bunun için, X_i 'nin r_i tane farklı değer aldığı ve $\mathbf{Eb}(\mathbf{m})_i$ 'nin q_i tane farklı değer aldığı varsayalım. X_i 'nin aldığı değerler $x_i^1, \dots, x_i^{r_i}$ ile gösterilir. $\mathbf{Eb}(\mathbf{m})_i$ 'nin aldığı farklı durumların sayısı $\mathbf{eb}(\mathbf{m})_i^1, \dots, \mathbf{eb}(\mathbf{m})_i^{q_i}$ ile gösterilir. Burada, tüm i 'ler için, q_i aşağıda verildiği gibi tanımlanır.

$$q_i = \prod_{X_e \in \mathbf{Eb}(\mathbf{m})_i} r_e, \quad \text{tüm } i\text{'ler için} \quad (4.14)$$

Tüm i ve j 'ler için, çokterimli dağılım $P(x_i \setminus \mathbf{eb}(\mathbf{m})_i^j, \theta_i, \mathbf{m}^h)$, Eş. 4.15'de verilen olasılıkların bir setinden oluşur.

$$P(x_i^k \setminus \mathbf{eb}(\mathbf{m})_i^j, \theta_i, \mathbf{m}^h) = \theta_{x_i^k / \mathbf{eb}(\mathbf{m})_i^j} = \theta_i^{jk} \quad (4.15)$$

Bu eşitlikte, θ_i^{jk} parametre tahmini, X_i rastgele değişkeninin ebeveynlerinin setinin $(\mathbf{Eb}(\mathbf{m})_i)$ j nci değerini aldığı bilindiğinde, X_i değişkeninin k ncı değerini aldığı durumdaki koşullu olasılığı gösterir ve $\theta_i^{jk} > 0$ 'dır. Ayrıca, tüm i ve j 'ler için,

$\sum_{k=1}^{r_i} \theta_i^{jk} = 1$ dir. Sonuç olarak, her X_i için olasılık fonksiyonlarının parametre tahminleri,

$$\theta_i = (\theta_i^j)_{j=1}^{q_i}, \quad \theta_i^j = (\theta_i^{jk})_{k=1}^{r_i} \quad \text{ile, tüm } i \text{ ve } j\text{'ler için} \quad (4.16)$$

veya

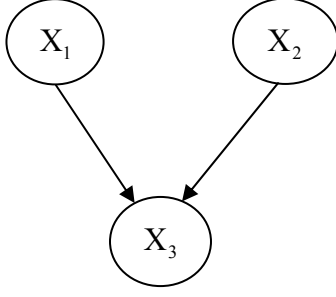
$$\theta_i = \left[(\theta_i^{jk})_{k=1}^{r_i} \right]_{j=1}^{q_i} \quad \text{tüm } i \text{ ve } j\text{'ler için} \quad (4.17)$$

ile verilmiştir.

Aşağıda verilen örnekte, üç tane tek boyutlu rastgele değişken için bir Bayes ağ örneği verilmiştir (Şekil 4.5). Burada yer alan değişkenlerin her birinin iki değer aldığı varsayılır. $\mathbf{X}=(X_1, X_2, X_3)$ için ortak olasılık fonksiyonunun çarpanlarına ayrılması aşağıdaki gibidir.

$$P(\mathbf{x} \setminus \boldsymbol{\theta}_m, \mathbf{m}^h) = P(x_1 \setminus \theta_1, \mathbf{m}^h) P(x_2 \setminus \theta_2, \mathbf{m}^h) P(x_3 \setminus x_1, x_2, \theta_3, \mathbf{m}^h) \quad (4.18)$$

$\mathbf{X}=(X_1, X_2, X_3)$ rastgele değişkenlerinin meydana getirdiği çokterimli dağılımın ortak olasılık fonksiyonundaki parametre tahminlerinin sayısı 7'den, Şekil 4.5'de verilen Bayes ağdaki koşullu bağımsızlık durumlarına göre 6'ya indirgenmiştir. Parametre tahminlerinin sayısında meydana gelen azalma, başka Bayes ağlar için de oldukça önemlidir.



$\theta_1=(\theta_1^{-1},\theta_1^{-2})$	$P(x_1^1/\theta_1,s^h), P(x_1^2/\theta_1,s^h)$
$\theta_2=(\theta_2^{-1},\theta_2^{-2})$	$P(x_2^1/\theta_2,s^h), P(x_2^2/\theta_2,s^h)$
$\theta_3=(\theta_3^1,\theta_3^2,\theta_3^3,\theta_3^4)$	
$\theta_3^1=(\theta_3^{11},\theta_3^{12})$	$P(x_3^1/x_1^1,x_2^1,\theta_3,s^h), P(x_3^2/x_1^1,x_2^1,\theta_3,s^h)$
$\theta_3^2=(\theta_3^{21},\theta_3^{22})$	$P(x_3^1/x_1^1,x_2^2,\theta_3,s^h), P(x_3^2/x_1^1,x_2^2,\theta_3,s^h)$
$\theta_3^3=(\theta_3^{31},\theta_3^{32})$	$P(x_3^1/x_1^2,x_2^1,\theta_3,s^h), P(x_3^2/x_1^2,x_2^1,\theta_3,s^h)$
$\theta_3^4=(\theta_3^{41},\theta_3^{42})$	$P(x_3^1/x_1^2,x_2^2,\theta_3,s^h), P(x_3^2/x_1^2,x_2^2,\theta_3,s^h)$

Şekil 4.5. Bayes ağ için model yapısı, parametre tahminleri ve olasılık fonksiyonları

Bu parametre tahminlerinin elde edilişi hakkında bilgi vermek amacı ile aşağıda verilen tablo oluşturulabilir (Çizelge 4.2).

Çizelge 4.2. Şekil 4.5 için parametre tahminleri

Değişken	Mümkün değerler	Ebeveyn değişkenler	Ebeveynlerin mümkün değerleri (q_i)
X_i	r_i	Eb(m)_i	
X_1	2	$\emptyset$	0
X_2	2	$\emptyset$	0
X_3	2	$\{X_1, X_2\}$	4

Şekil 4.5’de verilen parametre tahminleri ve olasılık fonksiyonlarından X_1 rastgele değişkenine karşılık gelen $\theta_1=(\theta_1^{-1},\theta_1^{-2})$ parametresi ve olasılık fonksiyonu $P(x_1^1/\theta_1,m^h), P(x_1^2/\theta_1,m^h)$ ele alınsın. Eş. 4.16 veya Eş. 4.17 ve Çizelge 4.2’de verilen değerler kullanılarak, θ_1 parametre tahmininin elde edilişi aşağıda gösterilmiştir.

$$\theta_1 = \left[(\theta_1^{jk})_{k=1}^{r_1=2} \right]_{j=1}^{q_1} = \left[(\theta_1^{j1}, \theta_1^{j2}) \right]_{j=1}^- = (\theta_1^{-1}, \theta_1^{-2})$$

Burada, θ_1^{-1} , X_1 rastgele değişkenin ilk değerini aldığı durumdaki olasılığı gösterir ve buna karşılık gelen olasılık fonksiyonu $P(x_1^1/\theta_1, \mathbf{m}^h)$ ile gösterilir. Ayrıca, X_3 rastgele değişkenine karşılık gelen θ_3 parametre tahmininin elde edilişi aşağıda gösterilmiştir. X_3 rastgele değişkeninin ebeveynlerinin setinin farklı durumlarının sayısı $q_3=4$ 'tür ve bu durumlar

$$\mathbf{eb}(\mathbf{m})_3^1 = (x_1^1, x_2^1), \quad \mathbf{eb}(\mathbf{m})_3^2 = (x_1^1, x_2^2), \quad \mathbf{eb}(\mathbf{m})_3^3 = (x_1^2, x_2^1), \quad \mathbf{eb}(\mathbf{m})_3^4 = (x_1^2, x_2^2)$$

ile gösterilir. Bu parametre tahminlerinin elde edilmesinde Eş. 4.16 veya Eş. 4.17 ve Çizelge 4.2'deki değerler kullanılarak elde edilmiştir.

$$\theta_3 = \left[\theta_3^j \right]_{j=1}^{q_3=4} = (\theta_3^1, \theta_3^2, \theta_3^3, \theta_3^4)$$

ve

$$\theta_3^1 = (\theta_3^{1k})_{k=1}^{r_3=2} = (\theta_3^{11}, \theta_3^{12})$$

dır. $\theta_3^1 = (\theta_3^{11}, \theta_3^{12})$ parametresinin tahmininde, θ_3^{12} , X_3 rastgele değişkeninin ebeveynlerinin setinin meydana getirdiği durumlardan birinci durumu (birinci değerlerini (x_1^1, x_2^1)) aldığı durumda, X_3 rastgele değişkeninin ikinci değerini (x_3^2) aldığı durumundaki koşullu olasılığı gösterir. Bu parametre tahminine karşılık gelen olasılık fonksiyonu $P(x_3^2/x_1^1, x_2^1, \theta_3, \mathbf{m}^h)$ 'dir.

Bir Bayes ağı tanımlamak için, aşağıda verilen durumların belirlenmesi gerekir.

1. Bilgi alanındaki rastgele değişkenler arasındaki koşullu bağımsızlıkların seti belirlenmelidir. Bir model yapısı m , bu bağımsızlıklardan elde edilen bir yön verilmiş döngüsel olmayan grafik olmalıdır.
2. Model yapısı için olasılık fonksiyonlarının setini (yani, tüm i, j ve k 'lar için θ_i^{jk} koşullu olasılıklar) belirlemek gerekir.

4.4. Bayes ve Markov Ağları Öğrenme

Modelin bağımlılık yapısı ve modele ait koşullu olasılık fonksiyonları uzman kişiler tarafından sağlanabilir. Birçok uygulamada, bu bilgi elde edilemeyebilir. Buna ek olarak, farklı uzman kişiler farklı görüşler verebilir. Bu da ele alınan problemde bilgi karmaşasına neden olur. Bu nedenle, bağımlılık yapısı ve koşullu olasılık fonksiyonları veriden tahmin edilir. Bağımlılık yapısı ve koşullu olasılık fonksiyonlarının veriden tahmin edilme süreci *öğrenme* olarak adlandırılır. Amaç, var olan veritabanını kullanarak, en iyi modeli elde etmektir.

Bu çalışmada, en iyi modelin elde edilmesinde öğrenme için Bayes ağ modelleri ele alınmıştır. Çünkü en iyi Bayes ağ modeli elde edildikten sonra, Markov ağ modeli elde edilebilir. Literatürde Markov ağları öğrenme için kaynaklar mevcuttur [Madigan, 1994; Dawid, 1993; Lauritzen, 1988; Jordan, 1998].

4.4.1. Bayes ağ modellerinde öğrenme

Öğrenmenin iki farklı türü vardır: Yapıyı öğrenme, parametre öğrenme

Yapıyı öğrenme: Grafikte yer alan bağlantıları belirleyen bir bağımlılık yapısı öğrenmeyi ifade eder. Bir Bayes ağda, yön verilmiş döngüsel olmayan grafik, yapı olarak adlandırılır.

Parametre öğrenme: Koşullu olasılık fonksiyonlarının parametrik yapısını öğrenmeyi ifade eder. Bir Bayes ağda, yön verilmiş döngüsel olmayan grafiğe ait koşullu olasılık değerleri parametre tahminleri olarak adlandırılır [Wikipedia, 2006].

İstatistikte parametre öğrenme, parametre tahmini olarak da bilinir.

Öğrenme metodu, kalite ölçüsü (quality measure) ve arama algoritması (search algorithm) olmak üzere iki elemandan oluşur.

Kalite ölçüsü: Mümkün Bayes ağların bir kümesinden hangisinin en iyi olduğuna karar vermek için kullanılır. Bu ölçü, Bayes ağın grafiksel yapısını ve parametre tahminlerinin niteliğini ölçen geniş çaplı bir ölçüdür. Literatürde birçok kalite ölçüleri mevcuttur [Castillo ve ark., 1997; Cano ve ark., 2004]. Bu ölçüler şunlardır:

- Bayes kalite ölçüleri (Bayesian quality measures)
 - Geiger ve Heckerman ölçüsü
 - Cooper- Herskovits ölçüsü
 - Standart Bayes ölçüsü
- En küçük tanımlı uzaklık ölçüleri (Minimum description length measures)
- Bilgi ölçüleri (Information measures)

Arama algoritması: Yüksek kaliteli Bayes ağların en iyi olanını seçmek için kullanılır. Değişkenlerin çok küçük sayıları için bile tüm mümkün ağların sayısını denemek hemen hemen imkansızdır. Bu nedenle, çalışmada arama algoritmaları üzerinde durulacaktır [Castillo ve ark., 1997; Cano ve ark., 2004].

4.4.2. Bayes ağ arama algoritmaları

Bayes ağların kalitesini veren bazı ölçüler için birçok metot mevcuttur. Bu ölçüler, yüksek kaliteli Bayes ağları bulmak için arama algoritmasını kullanmıştır. Tüm mümkün farklı ağ yapılarının sayısı çok büyük olduğu durumda, ağ yapılarının her

birini değerlendirmek imkansızdır. Bu bölümde, veri seti ve ön bir bilgi verildiğinde, en yüksek kaliteli Bayes ağı bulmak için iki arama algoritması verilecektir [Neapolitan, 2004; Castillo ve ark., 1997; Ruiz, 2006]. Bunlar: K2 algoritması ve B algoritması

K2-Algoritması

Cooper ve Herkovits (1992), yüksek kaliteli Bayes ağı bulmak için K2 algoritması olarak adlandırılan bir algoritma vermiştir. Bu algoritmada ilk olarak, bağlantıların olmadığı en basit ağ ele alınır. Ayrıca, düğümlerin sıralı olduğu varsayılır. Her bir değişken X_i için, X_i 'den daha küçük numaralı düğüm, ebeveyn kümesi olan $Eb(m)_i$ 'ye eklenir. Bu süreç, yeni düğümlerin eklenmesiyle tam ağ modeli elde edilene kadar tekrarlanacaktır [Guo, 2000].

Bu algoritmanın şeması, aşağıda verilmiştir. Burada, $q_i(Eb(m)_i)$, $Eb(m)_i$ ebeveyn seti ile X_i değişkeninin ağ kalitesine katılımıdır. Bu ağ kalitesine katılım, farklı tanımlanan kalite ölçüleri kullanılarak belirlenir. Bu ölçülerden literatürde en çok kullanılanlardan biri Geiger ve Heckerman ölçüsü, diğeri ise En küçük tanımlı uzaklık ölçüsüdür.

Bu çalışmada UnBBayes programında K2 algoritması ve En küçük tanımlı uzaklık ölçüsü kullanılmıştır. Bu nedenle kullanılan En küçük tanımlı uzaklık ölçüsü

$$q_i(\pi_i) = \sum_{j=0}^{r_i} \sum_{k=1}^{s_i} N_{ijk} \log \frac{N_{ijk}}{N_{ik}} - \frac{1}{2} s_i (r_i - 1) \log N$$

ile belirlenir [Bouckaert, 1995]. K2 algoritması, düğümlerin bir sıralanmasını gerektirir.

K2 algoritması

Başlangıç adımları

Order the variables
 for $i \leftarrow 1$ to n do
 $\Pi_i \leftarrow \emptyset$

İterasyon adımları

for $i \leftarrow 1$ to n do
 repeat
 select $Y \in \{X_1, \dots, X_{i-1}\} / \Pi_i$ that
 maximizes $g = q_i(\Pi_i \cup \{Y\})$
 $\delta \leftarrow g - q_i(\Pi_i)$
 if $\delta > 0$ then
 $\Pi_i \leftarrow \Pi_i \cup \{Y\}$
 until $\delta \leq 0$ or $\Pi_i = \{X_1, \dots, X_{i-1}\}$

B-Algorithması

Düğümelerin herhangi bir sıralanmasını gerektirmeyen diğer bir algoritma B-algoritmasıdır. Bu algoritma Buntine (1991) tarafından verilmiştir. Bu algoritma, K2-algoritmasında olduğu gibi boş ebeveyn kümesiyle başlar. Her bir adımda, döngü elde edilmeksizin yeni bağlantı eklenir. Süreç, mümkün veya tam ağ elde edilene kadar tekrar edilir. Bu algoritmanın şeması aşağıda verilmiştir.

B algoritması

Başlangıç adımları

```

for i ← 1 to n do
   $\Pi_i \leftarrow \emptyset$ 
for i ← 1 to n do ve j ← 1 to n do
  if  $i \neq j$  then
     $A[i,j] \leftarrow m_i(X_j) - m_i(\emptyset)$ 
  else
     $A[i,j] \leftarrow -\infty$ 

```

İterasyon adımları

```

repeat
  select i, j, that maximize  $A[i,j]$ 
  if  $A[i,j] > 0$  then
     $\Pi_i \leftarrow \Pi_i \cup \{X_j\}$ 
    for  $X_a \in \text{Pred}_i, X_b \in \text{Desc}_i$  do
       $A[a,b] \leftarrow -\infty$ 
      for k ← 1 to n do
        if  $A[i,k] > -\infty$  then
           $A[i,k] \leftarrow m_i(\Pi_i \cup \{X_k\}) - m_i(\Pi_i)$ 
until  $A[i,j] \leq 0$  or  $A[i,j] = -\infty, \forall i,j$ 

```

Bu algoritmada, Pred_i , X_i düğümünün önceki düğümlerinin setini, Desc_i , X_i düğümünün torunlarının setini gösterir.

Bu çalışmada, en iyi modelin elde edilmesinde ve veritabanından yapıyı öğrenmede UnBBayes API 2.2 paket programı kullanılmıştır. Bu paket program kullanılarak, K2 ve B algoritmalarının her biri için en iyi Bayes ağ modeli elde edilmiştir.

5. KÜME GRAFİKLERİ

Herhangi bir grafik verildiğinde, düğümlerin ortak özellikleri bir araya getirilerek, küme grafikleri yardımı ile birçok düğüm gruplanabilir. Bu *kümeleme* olarak adlandırılır. Kümeleme, yeni grafikler elde edilmesine imkan sağlar ve orijinal grafiğin yapısal özellikleri değişmeden aynen kalır [Castillo ve ark., 1997; Jensen, 1996; Schmidt-Thieme, 2003; Xiang, 2002].

Küme grafikleri, bağlantılı kümelerden oluştuğu için düğümlerin ok veya bağlantılarla birbirine bağlandığı durumda ortaya çıkan yön verilmiş veya yön verilmemiş grafiklere benzememektedir. İki küme arasındaki bağlantı, bu iki küme arasındaki *arakesit* ile tanımlanır [Jensen, 2001; Madsen, 1999] .

5.1. Yön Verilmemiş Grafikler İçin Küme Grafiği ve Küme Ağacı

Yön verilmemiş grafikler için, bazı tanım ve algoritmalar verilmiştir. Küme grafiği ve ağacı örnekler ile açıklanmıştır.

5.1. Tanım

Bir grafikte düğümlerin oluşturduğu grup, *küme* olarak adlandırılır.

5.2. Tanım

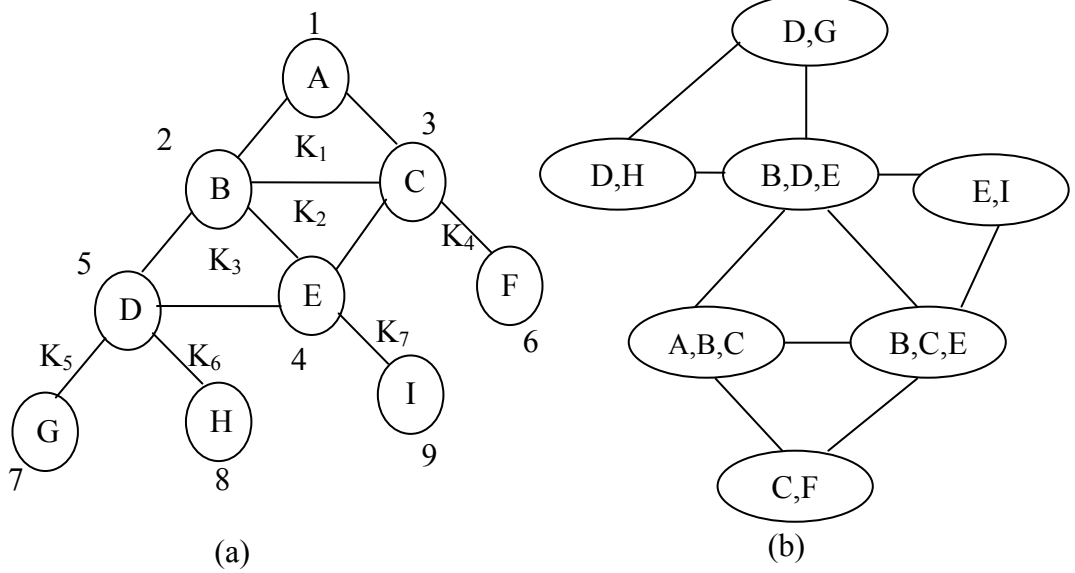
$G=(V,E)$ grafiği ve V 'deki kümelerin seti $K=\{K_1, K_2,...,K_m\}$ verildiğinde, $V=K_1 \cup K_2 \cup ... \cup K_m$ olacak şekilde, $G'=(K,E')$ grafiğine, G 'nin *küme grafiği* denir. Bu grafikte, E' , sadece ortak düğümleri içeren kümeler arasındaki bağlantıları içerir. Yani,

$$(K_i, K_j) \in E' \Rightarrow K_i \cap K_j \neq \emptyset$$

dır [Jensen, 1996; Schmidt-Thieme, 2003; Xiang, 2002].

Ayrıca, bir küme grafiğinin kümeleri, ilişkili grafiğin klikleri ise, bu grafik *klik grafiği* olarak adlandırılır. Bu çalışmanın daha sonraki bölümlerinde klik kavramı küme kavramı ile birlikte kullanılacaktır.

Aşağıda verilen şekilde, üçgenleştirilmiş yön verilmemiş bir grafik ve bu grafiğe ilişkin küme grafiği gösterilmiştir (Şekil 5.1).



Şekil 5.1. Üçgenleştirilmemiş yön verilmemiş grafik ve küme grafiği
a) Üçgenleştirilmiş yön verilmemiş grafik b) Küme grafiği

5.3. Tanım

Bir yön verilmemiş grafik, ortak bir düğüm ile iki kümeyi birleştiren tüm mümkün bağlantıları kapsıyorsa, bu grafik ile ilişkili klik grafiğine, *ortak (joint) veya birleşme (junction) grafiği* adı verilir [Jensen, 1996; Schmidt-Thieme, 2003; Xiang, 2002].

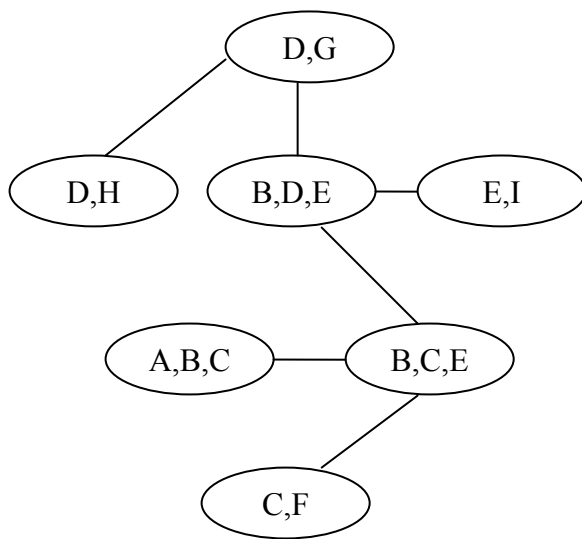
Bir grafik verildiğinde, bu grafiğin klik veya ortak grafiği tektir. Örneğin, Şekil 5.1 (b)'de verilen ortak grafik, Şekil 5.1 (a)'daki grafik ile ilişkilendirilmiş klik grafiğini gösterir.

Ortak bir düğüm ile kümelerin setinin meydana getirdiği ortak grafik, tam kümeyi meydana getirir. Bu özellik, ortak bir düğüm ile kümelerin daima bağlantılı olma özelliğini ifade eder. Amaç ilgilenilen basit bir yapı (ağaç...) ile grafiği kurmaktır. Aynı düğümlerin bulunduğu bağlantılı bir alt grafik ve bu grafikte bağlantıların en küçük sayısının olması durumunda verilen bir bağlantılı grafik, ağaçtır. Ağaçlar, en basit alt grafiklerdir. Bu grafik ile de hala ortak düğümler ile bağlanan kümeler arasında bağlantılık korunur.

5.4. Tanım

Bir klik grafik ağaç ve her düğüm iki kümeyi içeriyor ve ayrıca bu iki küme arasındaki yolda her kümeyi içeren bir düğüm var ise, *klik grafiği* ortak veya *birleşme ağacı* olarak adlandırılır. Ortak ağaç, döngüleri içeren küme grafiğinden daha etkili bir kullanıma sahiptir [Jensen, 1996; Schmidt-Thieme, 2003; Xiang, 2002].

Şekil 5.2’de verilen küme ağacı, Şekil 5.1(b)’de verilen ortak veya küme grafiğinden dört bağlantının kaldırılması ile elde edilmiştir.

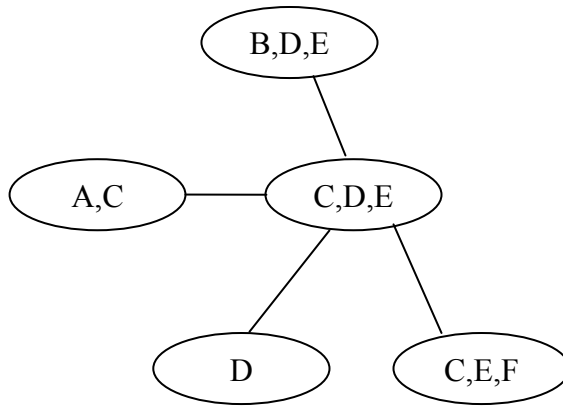


Şekil 5.2. Şekil 5.1 ile ilişkili küme ağacı

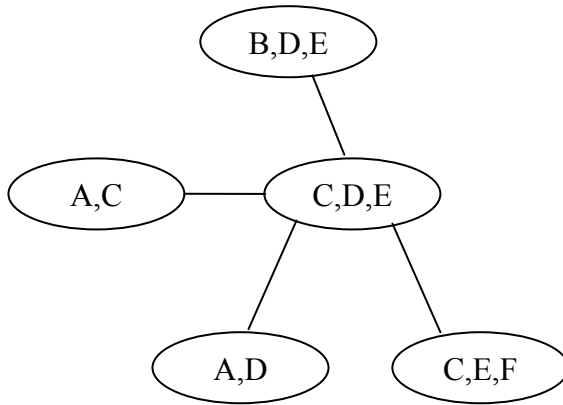
5.1. Teorem

Bir yön verilmemiş grafik üçgenleştirilmiş ise, bu grafik ortak ağaca sahiptir. Ayrıca, bir yön verilmemiş grafik ortak ağaca sahipse, bu grafik üçgenleştirilmiştir [Xiang, 2002].

Altı düğüme ilişkin küme ağacı Şekil 5.3’de ve küme ağacının olmama durumu ise Şekil 5.4’de gösterilmiştir.



Şekil 5.3. $V=\{A,B,C,D,E,F\}$ üzerinde küme ağacı



Şekil 5.4. Küme ağacı olmama durumu

Aşağıda verilen algoritma, ağaç yapısı içerisinde kliklerin zinciri düzenlenerek üçgenleştirilmiş grafiğe ilişkin küme ağacını oluşturur [Castillo ve ark., 1997; Xiang, 2002].

Ortak ağacın elde edilişi

Girdi: Üçgenleştirilmiş yön verilmemiş grafik, $G=(V,E)$

Çıktı: G ile ilişkili olan bir küme ağacı, $G'=(K,E')$

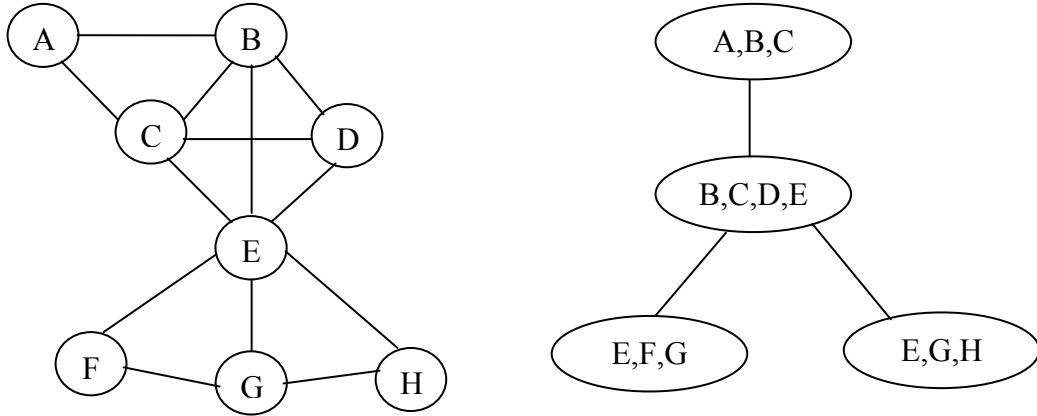
1. G grafiğinde, klikler zincirini $K=\{K_1, K_2, \dots, K_K\}$ 'yi elde etmek için Klikler zincirinin elde edilme algoritması kullanılır.
2. Her klik $K_i \in K$ için, ortak düğümlerin en büyük sayısı K_k ile, $\{K_1, K_2, \dots, K_{i-1}\}$ 'den bir klik seçilir ve E' 'ne K_i-K_k bağlantısı eklenir. Bağlar, keyfi olarak kırılır.

Şekil 5.1 (a)'da verilen grafiğin küme ağacını (ortak) elde etmek için Ortak ağacın elde edilişine ilişkin algoritma uygulansın. Daha önceden, klikler zinciri, $K_1=\{A,B,C\}$, $K_2=\{B,C,E\}$, $K_3=\{B,D,E\}$, $K_4=\{C,F\}$, $K_5=\{D,G\}$, $K_6=\{D,H\}$ ve $K_7=\{E,I\}$ 'dir. E' 'ne gerekli bağlantılar eklenerek küme ağacı aşağıdaki gibi elde edilir.

K_7 kliğine ortak olan düğümlerin en büyük sayısı K_2 ve K_3 olmak üzere iki klik vardır. Bağlantı kırılarak, K_3 kliği seçilmiş ve E' 'ne K_7-K_3 bağlantısı eklenmiştir. K_6 kliğine ortak olan düğümlerin en büyük sayısı K_3 ve K_5 olmak üzere iki klik vardır. Bağlantı kırılarak, K_5 kliği seçilmiş ve E' 'ne K_6-K_5 bağlantısı eklenmiştir. $\{K_1, K_2, K_3, K_4\}$ seti içerisinde, K_5 kliğine ortak olan elemanların en büyük sayısı K_3 kliğidir. Böylece, E' 'ne K_5-K_3 bağlantısı eklenmiştir. Benzer şekilde metoda devam edilirse, K_4-K_2 , K_3-K_2 ve K_2-K_1 bağlantıları eklenmiştir.

$G=(V,E)$ grafiğinin küme ağacı $G'=(K,E')$ ile gösterilir. Bağlantılar keyfi olarak kırıldığından, aynı yön verilmemiş grafik ile ilişkili birden fazla küme ağacı vardır.

Aşağıda verilen şekilde sekiz düğüme ilişkin Markov ağ modeli verilmiştir (Şekil 5.5 (a)). Ayrıca, Şekil 5.5 (b)'de bu modele ilişkin küme ağacı gösterilmiştir.



Şekil 5.5. Sekiz düğüme ilişkin Markov ağ modeli a) Markov ağ modeli b) Küme ağacı

Şekil 5.5 incelendiğinde, sekiz düğüme ilişkin Markov ağ modelinden $K_1=\{A,B,C\}$, $K_2=\{B,C,D,E\}$, $K_3=\{E,F,G\}$ ve $K_4=\{E,G,H\}$ olmak üzere 4 küme (klik) elde edilmiştir.

Yön verilmemiş grafiklerde küme ağacı kavramının yanında yön verilmiş grafiklerde de küme ağacı kavramı önemli bir konudur.

5.2. Yön Verilmiş Grafiklerde Küme Ağacı

Yön verilmiş grafikler için, bazı tanım ve algoritmalar verilmiştir. Verilen bir grafiğe ilişkin küme (ortak) ağacının elde edilişi örnekler ile açıklanmıştır.

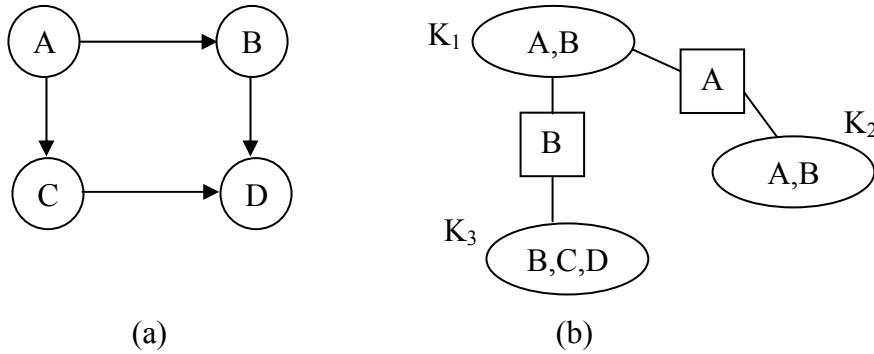
Bir yön verilmiş grafikte, düğüm bir değişkeni gösterir. Ayrıca, iki değişken arasındaki ok, nedensel bağımlılığı gösterir. Ancak, küme grafiğinde, iki küme arasındaki bağlantı, değişkenlerin iki alt seti arasındaki olasılıklı bağımlılığı verir.

Bir yön verilmiş grafik verildiğinde, küme grafiği aşağıdaki gibi kurulacaktır.

Bir yön verilmiş grafikte, her bir değişkenin en az bir grubu içermesi durumunda, değişkenlerin gruplanması *küme* olarak adlandırılır. Her bir küme bir düğüm olarak gösterilir ve her kümeye ilişkin bir grafik çizilir. İki küme birçok ortak değişkeni

içerirse, kümeler ayıraç (separator) olarak adlandırılan bir bağlantı ile birleştirilir. Eğer iki küme ortak değişken içermiyorsa, kümeler bağlantısızdır. Değişkenleri içeren grubun her bir kümesi tanımlanır. İki uygun kümenin ortak değişken içermesi durumunda ayıraçlar belirlenir. Elde edilen grafik bir küme grafiğidir.

Şekil 5.6’da dört düğüme ilişkin yön verilmiş grafik ve bu grafiğe ait olası bir küme grafiği verilmiştir. Burada, ayıraçlar kutu şeklinde gösterilmiştir ve her bir küme K_i ile verilmiştir.



Şekil 5.6. Dört düğüme ilişkin yön verilmiş grafik a) Yön verilmiş grafik
b) Küme grafiği

Kümelerin her çifti arasında tek bir yol varsa, küme grafiği, *küme ağacı* olarak adlandırılır. Küme ağaçları literatürde, ortak ağaçlar veya birleşme ağaçları olarak da bilinir. Şekil 5.6 (b)’de verilen grafik bir küme ağacıdır.

5.5. Tanım

Bir yön verilmiş grafiğin aile ağacı, bu grafik ile ilişkilendirilmiş birçok yön verilmemiş grafik G ’nin *ortak ağacıdır*. Yön verilmiş grafikte, her düğümün ailesi, en az bir kümeyi kapsamalıdır [Jensen, 1996; Schmidt-Thieme, 2003; Xiang, 2002].

Yön verilmiş bir grafiğin moral grafiği ele alınarak, her aile en az bir kliği kapsamaktadır. Moral grafiğin herhangi üçgenleştirilmiş grafiğine Ortak ağacın elde edilmesine ilişkin algoritma uygulanarak, orijinal yön verilmiş grafik için aile ağacı

elde edilir. Aşağıda, yön verilmiş grafik ile ilişkili bir aile ağacını elde etmek için algoritma verilmiştir [Castillo ve ark, 1997; Xiang, 2002].

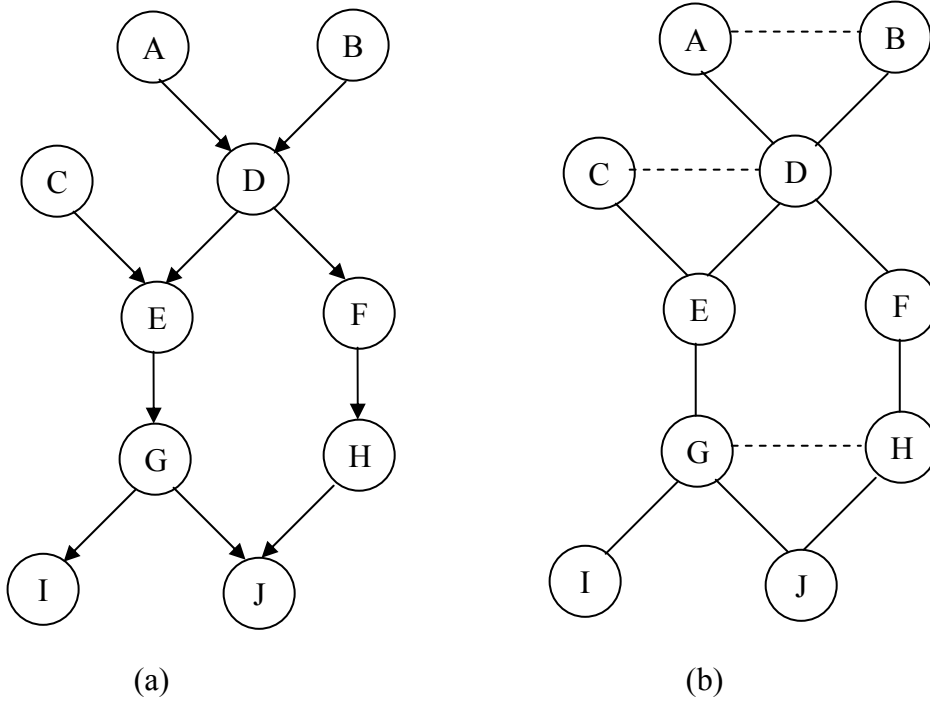
Bir aile ağacının elde edilişi

Girdi: Bir yön verilmiş grafik, $D=(V,E)$

Çıktı: D ile ilişkili bir aile ağacı, $G'=(K,E')$

1. Yön verilmiş bir grafiği moralize edilir.
2. En büyük önemliliği arama doldurma algoritması kullanılarak elde edilen yön verilmemiş grafik üçgenleştirilir.
3. Elde edilen grafiğin küme ağacının elde edilmesi için Ortak ağacın elde ediliş algoritması kullanılır.

Bir aile ağacının elde ediliş algoritmasının uygulanışını görmek için aşağıda verilen yön verilmiş grafik ele alınsın (Şekil 5.7).

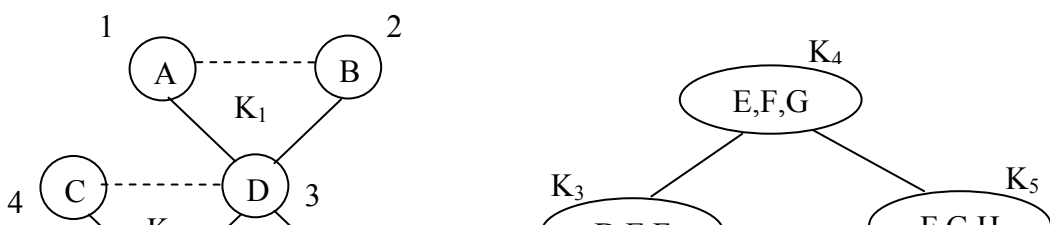


Şekil 5.7. Yön verilmiş bir grafik a) Yön verilmiş grafik b) Moral grafik

Şekil 5.7 (a)'da düğümlerin aileleri, $\{A\}$, $\{B\}$, $\{C\}$, $\{A,B,D\}$, $\{C,D,E\}$, $\{D,F\}$, $\{E,G\}$, $\{F,H\}$, $\{G,I\}$ ve $\{G,H,J\}$ 'dir. Bu grafik ile ilişkili aile ağacını elde etmek için Aile ağacının elde ediliş algoritması uygulansın.

Şekil 5.7(a) grafiğine karşı gelen moral grafik Şekil 5.7(b)'de verilmiştir. Bu grafiğin elde edilmesinde gerekli olan üç bağlantı eklenmiştir: $\{A-B\}$, $\{C-D\}$, $\{G-H\}$.

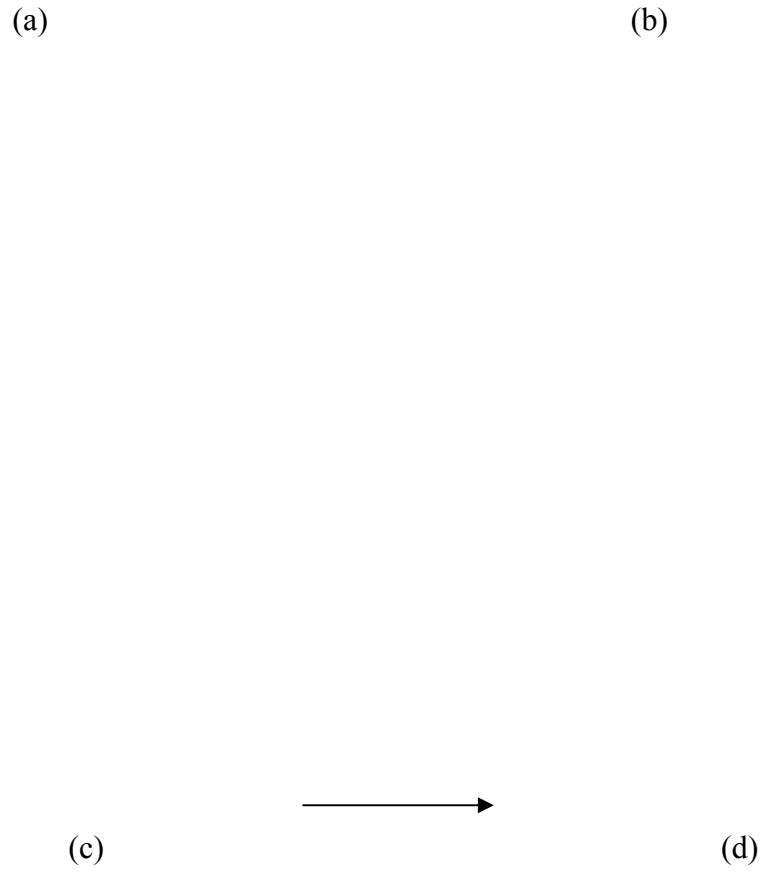
Bir aile ağacının elde ediliş algoritması kullanılarak elde edilen üçgenleştirilmiş grafik Şekil 5.8 (a)'da gösterilmiştir. Son olarak, bu grafiğe ortak ağacın elde ediliş algoritması uygulanarak, Şekil 5.8 (b)'de aile ağacı elde edilmiştir.



Şekil 5.8. Bir aile ağacının elde edilmesi için kullanılan üçgenleştirilmiş grafik
a) Şekil 5.7’de verilen grafiğin üçgenleştirilmiş grafiği b) Küme ağacı

Başka bir şekil üzerinde küme ağacının kurulumu verilecektir (Şekil 5.9 (a)). Sekiz düğüme ilişkin Bayes ağ modeli için ilk olarak moral grafik elde edilmelidir (Şekil 5.9 (b)). Bu moral grafikteki kümeler, (A,B,C), (D,C,E), (C,F), (E,G) ve (E,H)’dır. İlk olarak, (A,B,C), (D,C,E) ve (C,F) kümeleri ortak C düğümüne sahiptir. Böylece, bu kümeler, ayrı ayrı C ayıracı ile bağlanır. (D,C,E), (E,G) ve (E,H) kümeleri de ortak E düğümüne sahiptirler. Bu kümelerde, E ayıracı ile ayrı ayrı bağlanırlar. Bu düzenleme sonucunda, küme grafiği elde edilmiş olur (Şekil 5.9 (c)). Burada, küme grafiği, döngüye sahip olduğundan dolayı, döngüyü bozacak şekilde bağlantılardan biri ortadan kaldırılmalıdır. Böylece, küme ağacı elde edilecektir (Şekil 5.9 (d)).





Şekil 5.9. Sekiz düğüme ilişkin Bayes ağ modeli a) Çoklu bağlantılı yön verilmiş döngüsel olmayan grafik b) Moral grafik c) Küme grafiği d) Küme ağacı

6. KÜMELEME METOTLARI

Bir grafikteki düğümlerin bir araya getirilmesi ile elde edilen düğümler seti, *kümeler* olarak adlandırılır. Kümeleme metotları, bir grafiğin ortak olasılık fonksiyonunun yapısını elde etmek için kümeleri bir araya getirir. Bu metot, *kümeleme metodu* olarak adlandırılır. İlk olarak, Lauritzen ve Spiegelhalter (1988) tarafından tanıtılmıştır. Grafikteki klikler ile ilişkilendirilmiş koşullu olasılıkların hesaplanması temeline dayanır.

Kümeleme metotları, verilen bir grafiğin ortak olasılık fonksiyonunun yapısı ile ilgilenir. İlk olarak, orijinal grafikteki klikler elde edilir. Daha sonra, birçok koşullu olasılık fonksiyonları hesaplanarak, her bir kliğin ortak olasılık fonksiyonu elde edilir. Verilen bir düğümün koşullu olasılığı, düğümü kapsayan herhangi bir kliğin ortak olasılık fonksiyonu marjinalleştirilerek elde edilir. Bu bölümde, kümeleme metodu Markov ağ modelleri ve Bayes ağ modelleri için incelenmiştir [Castillo ve ark., 1997; Ramoni, 2003; Nicholson ve Korb, 2006].

6.1. Markov Ağlarda Kümeleme Metotları

Bir Markov ağın gösterimi, klik potansiyelleri ile verilmiştir. Bu klik potansiyelleri, $K=\{K_1, K_2, \dots, K_m\}$ klikler grafiği üzerinde tanımlanmış $\Psi=\{\psi(k_1), \psi(k_2), \dots, \psi(k_m)\}$ pozitif fonksiyonların bir setidir. Bu fonksiyonlar ile X rastgele değişkenler kümesinin ortak olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibi çarpanlarına ayrılır.

$$P(x) = \frac{1}{a} \prod_{i=1}^m \psi_i(k_i) \quad (6.1)$$

Bu eşitlikte,

$$a = \sum_x \prod_{i=1}^m \psi_i(k_i)$$

olup, sabittir.

Bir Markov ağ ayrıştırılabilir (grafik üçgenleştirilmiş) ise, ortak olasılık fonksiyonunun gösterimi $K=\{K_1, K_2, \dots, K_m\}$ kliklerin bir sıralanması düşünülerek elde edilecektir. $K=\{K_1, K_2, \dots, K_m\}$ klikleri, süregelen arakesit özelliğini sağlamalıdır. Bu klikler zinciri, koşullu olasılıklarda ortak olasılık fonksiyonunun aşağıdaki gibi çarpanlarına ayrılmasını sağlar.

$$P(x) = \prod_{i=1}^m P(r_i/s_i) \quad (6.2)$$

Bu eşitlikte $S_i = K_i \cap (K_1, \dots, K_{i-1})$, K_i kliğinin bir ayıraç setidir. $R_i = K_i \setminus S_i$ ise artık seti gösterir. Süregelen arakesit özelliğine göre, S_i , $(K_1, K_2, \dots, K_{i-1})$ kliklerinin en az birinde olmalıdır. S_i 'yi kapsayan klikler K_i 'nin komşuları olarak adlandırılır ve B_i ile gösterilir. Klikler zinciri ile verilen ortak olasılık fonksiyonlarının gösterimi, kliklerin ortak olasılık fonksiyonunun ve buradan düğümlerin marjinal olasılık fonksiyonlarının hesaplanması için kümeleme algoritmasında kullanılan bir yöntem sağlar.

Bir Markov ağ ayrıştırılabilir değil ise, ilk olarak yön verilmemiş grafik ile ilişkili grafiği üçgen hale getirmek gerekir. Daha sonra, orjinal potansiyel gösterim, yeni ayrıştırılabilir Markov ağ için potansiyel gösterim sağlar. Bundan dolayı, ayrıştırılabilir Markov ağa sahip olduğu varsayılacaktır ve potansiyel gösterim (K, Ψ) verilmiştir.

Kümeleme algoritması aşağıda verilen adımlara dayalıdır.

1. Eş. 6.2'de verildiği gibi, ortak olasılık fonksiyonlarının çarpanlarına ayrılmasını sağlamaktır.
2. Koşullu olasılık fonksiyonlarını kullanarak, kliklerin ortak olasılık fonksiyonlarını hesaplamaktır.

3. Düğümlerin marjinal olasılık fonksiyonlarını hesaplamaktır [Castillo ve ark., 1997; Ramoni, 2003; Nicholson ve Korb, 2006].

Bu adımlar sırasıyla aşağıdaki gibi açıklanacaktır.

Adım 1

Bu adımda süregelen arakesit özelliğini sağlayan kliklerin bir zinciri elde edilmelidir. Böylece K_i kliğine ait koşullu olasılık fonksiyonu $P(r_i/s_i)$, K_m üzerinde, $P(x)$ ortak olasılık fonksiyonu marjinalleştirilerek yinelemeli olarak elde edilir. Daha sonra K_{m-1} , üzerinden aynı işlemler uygulanır. Bu marjinal olasılıklar, potansiyel gösterimlerden elde edilecektir. Zincirdeki son klik K_m için,

$$\begin{aligned}
 P(k_1, k_2, \dots, k_{m-1}) &= \sum_{k_m \setminus \{k_1, k_2, \dots, k_{m-1}\}} P(x) \\
 &= \sum_{r_m} a^{-1} \prod_{i=1}^m \psi_i(k_i) \\
 &= a^{-1} \prod_{i=1}^{m-1} \psi_i(k_i) \sum_{r_m} \psi_m(k_m)
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

dır.

Böylece, K_m üzerinde $P(k_1, k_2, \dots, k_m)$ ortak olasılık fonksiyonunun marjinalleştirilmesi, $\psi_m(K_m)$ potansiyelinin marjinalleştirilmesi ile aynıdır. $P(k_1, k_2, \dots, k_{m-1})$ elde edildiğinde, $P(k_1, k_2, \dots, k_{m-2}), \dots$ elde etmek için aynı düşünce uygulanır. Bu işlem $P(k_1)$ elde edilinceye kadar devam eder. Eř. 6.3'de yer alan terim $\sum_{r_m} \psi_m(k_m)$, sadece S_m 'deki (ayır ) değişkenlere bağlıdır. Böylece, S_m 'i içeren herhangi K_j kliğinin potansiyel gösterimi, yani, K_m 'in herhangi komşuluk kliğinde bu ifadeyi kapsar ve yeni potansiyel fonksiyon,

$$\psi_j^*(k_j) = \psi_j(k_j) \sum_{r_m} \psi_m(k_m) \quad (6.4)$$

dır. Geriye kalan klikler için $\psi_k^*(k_k) = \psi_k(k_k)$ 'dır. Eş. 6.3 ve yeni potansiyel fonksiyonlar

$$P(k_1, k_2, \dots, k_{m-1}) = a^{-1} \prod_{i=1}^{m-1} \psi_i^*(k_i) \quad (6.5)$$

dır. $\{\psi_1^*(k_1), \psi_2^*(k_2), \dots, \psi_{m-1}^*(k_{m-1})\}$, $P(k_1, k_2, \dots, k_{m-1})$ ortak olasılık fonksiyonun potansiyel gösterimidir.

$P(k_1, k_2, \dots, k_{m-1})$ hesaplandıktan sonra, Eş. 6.4 kullanılarak, $P(k_1, k_2, \dots, k_{m-2})$ hesaplanır. Ortak olasılık fonksiyonunun bu ardışık marjinalleştirilmesi, Eş. 6.2'de verilen koşullu olasılık fonksiyonlarının elde edilmesine imkan sağlar. Dikkat edilecek olursa, S_m , $\{K_1, K_2, \dots, K_{m-1}\}$ verildiğinde, R_m 'den ayrılır ve

$$\begin{aligned} P(r_m | S_m) &= P(r_m | k_1, k_2, \dots, k_{m-1}) \\ &= \frac{P(k_1, k_2, \dots, k_{m-1}, r_m)}{P(k_1, k_2, \dots, k_{m-1})} \end{aligned}$$

şeklinde yazılır.

$\{K_1, K_2, \dots, K_{m-1}, R_m\} = \{K_1, K_2, \dots, K_{m-1}, K_m\} = X$ ve Eş. 6.3 kullanılarak,

$$\begin{aligned} P(r_m | S_m) &= \frac{a^{-1} \prod_{i=1}^m \psi_i(k_i)}{a^{-1} \prod_{i=1}^{m-1} \psi_i(k_i) \sum_{r_m} \psi_m(k_m)} \\ &= \frac{\psi_m(k_m)}{\sum_{r_m} \psi_m(k_m)} \end{aligned} \quad (6.6)$$

dır.

Eş. 6.5’de verilen yeni ortak olasılık fonksiyon $P(k_1, k_2, \dots, k_{m-1})$ ele alınarak, $P(k_1, k_2, \dots, k_{m-2})$ elde etmek için Eş. 6.3 tekrar uygulanır. Böylece, Eş. 6.6 kullanılarak, $P(r_{m-1} \setminus s_{m-1})$ elde edilir. Aynı süreç, $P(r_1 \setminus s_1)$ elde edilinceye kadar tekrarlanır.

Adım 2

Klikler zinciri ile verilen gösterim elde edildiğinde, kliklerin ortak olasılık fonksiyonları, ayıraç setlerinin olasılıkları hesaplanarak kolaylıkla elde edilir. $S_1 = \emptyset$ olduğundan, son koşullu olasılık fonksiyonu, ilk kliğin ortak olasılığıdır.

$$P(r_1 \setminus s_1) = P(k_1)$$

K_2 kliğinin ayıraç seti, K_1 kliğini de içerir. Böylece, $P(s_2)$, $P(s_1)$ marjinalleştirilerek elde edilir. Sonuçta, $P(k_2)$ olasılığı,

$$P(k_2) = P(r_2, s_2) = P(r_2 \setminus s_2) P(s_2)$$

ile sağlanır.

$P(k_1)$ ve $P(k_2)$ elde edildiğinde, aynı iteratif süreç, geriye kalan kliklerin ortak olasılık fonksiyonunu sağlamak için tekrarlanır.

Adım 3

Sonuç olarak, kliklerin ortak olasılık fonksiyonları elde edildiğinde, düğümü içeren herhangi bir kliğin ortak olasılık fonksiyonunu marjinalleştirilerek X_i düğümünün marjinal olasılık fonksiyonu hesaplanır. K_j , X_i düğümünü içerir ise,

$$P(x_i) = \sum_{k_j \in x_i} P(k_j) \quad (6.7)$$

ile düğümün marjinal olasılık fonksiyonu elde edilir.

X_i bir klikten daha fazla klik içerir ise, marjinalleştirme sürecinde kurulan hesaplamaların sayısını minimize etmek için en küçük büyüklüğe sahip klik seçilmelidir.

Kanıt elde edilebilir olduğu zaman, aynı algoritma küçük düzeltmeler ile aşağıdaki gibi uygulanır.

Kanıt rastgele değişkenler kümesi E 'nin $E=e$ değerlerini aldığı varsayalım. Koşullu olasılık fonksiyonu,

$$P(x|e) = \frac{P(x \setminus e, e)}{P(e)}$$

dır ve $p(x|e, e)$ ile orantılıdır. Bu olasılık, kanıt değişkenlerin gözlenmiş değerleri çıkarılarak ve orjinal potansiyel fonksiyonlar düzeltilerek elde edilir. Bu süreç, kanıt emilimi (absorption of evidence) olarak adlandırılır. Kanıt emilimi için iki alternatif durum vardır:

1. X düğümler ve K klikler kümesi aynen alınır. Bu durumda, kanıtsal düğümleri içeren potansiyel fonksiyonlar düzeltilir. Bazı kanıt düğümünü içeren her K_i kliği için yeni potansiyel fonksiyon $\psi_i^*(k_i)$ tanımlanır.

$$\psi_i^*(k_i) = \begin{cases} 0 & , k_i \text{'deki bazı değerler } e \text{ ile tutarsız ise,} \\ \psi_i(k_i) & , \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (6.8)$$

Geriye kalan klikler için, değişim söz konusu değildir. O zaman,

$$P(x \setminus e) \propto \prod_{i=1}^m \psi_i^*(k_i)$$

dır.

2. X düğümler kümesinden kanıt düğümler kaldırılır. Bu, klikler kümesi ve potansiyel gösterim değişimini de açıklar. Yeni potansiyel gösterim (K^*, Ψ^*) , X^* üzerinde tanımlanır. Burada, $X^* = X/E, K^*$ 'dır. K^* kliklerin yeni listesini ve Ψ^* yeni kanıt potansiyellerini gösterir. $K_i \cap E \neq \emptyset$ olacak şekilde, K^* 'daki her K_i kliği için, K^* 'da $K_i \setminus E$ 'yi içerir ve

$$\psi_i^*(k_i^*) = \psi_i(k_i \setminus e, E=e) \quad (6.9)$$

dır ve klikler için kanıt düğümlerini içermemelidir. Klikler veya potansiyel fonksiyonlarda değişim gerekli değildir. Bu durumda,

$$P(x^* \setminus e) \propto \prod_{i=1}^m \psi_i^*(k_i)$$

dır. Böylece her iki durumda da, birçok kanıt gözlemlendiği zaman, düğümlerin koşullu olasılıklarını hesaplamak için uygulanacaktır.

Ayrıştırılabilir Markov Ağlarda Kümeleme Yayılım Algoritması

Girdi: X değişkenler kümesi üzerinde ayrıştırılabilir Markov ağ modeli (K, Ψ) ve kanıtsal değerler $E=e$ ile kanıt değerler kümesi

Çıktı: Her kanıt olmayan düğüm X_i için $P(x_i \setminus e)$ koşullu olasılıklar

Başlangıç adımları

1. Eş. 6.8 ve Eş. 6.9 kullanılarak, Ψ potansiyel fonksiyonlarda, $E=e$ kanıtı emilime edilir.
2. Süregelen arakesit özelliğini sağlayan $(K_1, K_2, \dots, K_m)$ klikler zincirini elde etmek için Klikler zincirinin elde edilmesine ilişkin algoritma kullanılır.
3. $S_i \subset K_j$ ($j < i$) olacak şekilde, her bir K_i kliği için, herhangi K_j komşu kliği seçilir.

İterasyon adımları

4. $i=m$ alınarak 1'e kadar geriye dönük olarak işlemler uygulanır.
 - (a) $m_i(s_i) = \sum_{r_i} \psi_i(k_i)$ hesaplanır.
 - (b) $P(r_i | s_i) = \psi_i(k_i) / m_i(s_i)$ alınır.
 - (c) $\psi_j(k_j) \leftarrow \psi_j(k_j) m_i(s_i)$ ile K_i kliğinin komşu kliği K_j 'nin potansiyel fonksiyonu $\psi_j(k_j)$ yer değiştirir.
5. $P(k_i) = P(r_i | s_i) = P(r_i)$ alınır.
6. $i=2$ alınarak m 'e kadar ileriye dönük olarak işlemler uygulanır.
 - (a) K_i kliğinin komşu kliği K_j 'nin ortak olasılık fonksiyonu $P(k_j)$ marjinalleştirilerek $P(s_i)$ hesaplanır.
 - (b) $P(k_i) = P(r_i | s_i) P(s_i)$ alınır.
7. $i=1$ 'den n 'ye kadar devam edilir.
 - (a) X_i 'yi içeren en küçük büyüklükteki klik K_j seçilir.
 - (b) $P(x_i | e) \propto \sum_{k_j \setminus x_i} P(k_j)$ alınır.
 - (c) Elde edilen değer normalleştirilir.

Bu algoritma, grafikteki kliklerin birçoğunu içeren düğümler kümesinin koşullu olasılık fonksiyonlarını hesaplamak için kullanılır [Xu, 1995].

6.2. Bayes Ağ Modellerinde Kümeleme Algoritması

Bayes ağ modellerinde yayılma kanıtını kurmak için kümeleme algoritması tanıtılmıştır. $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ rastgele değişkenler kümesi üzerinde tanımlanan Bayes ağ modeli verildiğinde, ortak olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibi çarpanlarına ayrılacaktır.

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n P(x_i | Eb(m)_i) \quad (6.10)$$

Bu eşitlikte, $Eb(m)_i$, X_i düğümünün ebeveynlerinin kümesini gösterir.

Burada amaç, bir yön verilmiş döngüsel olmayan grafiği, üçgenleştirilmiş yön verilmemiş grafiğe dönüştürmek ve elde edilen grafik üzerinde kümeleme algoritması kullanmaktır. Yön verilmiş grafikler, ilk olarak bağlantıların yönleri kaldırılarak moralize edilir ve böylece sonuçlanan grafik üçgenleştirilmiş olur. Bunun için, her bir aile en az bir klikte olacak şekilde üçgenleştirilmiş yön verilmemiş grafik elde edilir. Bu özellik, yön verilmemiş grafik için potansiyel gösterimi tanımlamaya imkan sağlar. Sonuçta, Bayes ağlarda kümeleme algoritması uygulanarak Bayes ağlarda yayılma kanıtı için problem çözülür.

Bayes Ağlarda Kümeleme Algoritması

Girdi: X değişkenler kümesi üzerinde bir Bayes ağ modeli $G=(V,E)$ ve $E=e$ kanıt değerler ile E kanıt değerler kümesi

Çıktı: Her kanıt olmayan X_i düğümü için $P(x_i|e)$ koşullu olasılık fonksiyonu

1. G grafiğini üçgenleştirmek ve moralize etmek. Burada, G grafiği üçgenleştirilmiş yön verilmemiş grafik olsun
2. G grafiğinin K klikler kümesini elde etmek

3. X_i 'nin ailesini içeren sadece bir klik seçilir ve bu kliğe X 'de X_i her düğümü atanır. A_i , K_i kliğine ait düğümlerin kümesini gösterebilir.

4. K 'daki her K_i kliği için,

$$\psi_i(k_i) = \prod_{x_i \in A_i} P(x_i | \pi_i)$$

tanımlanır. $A_i = \emptyset$ ise $\psi_i(k_i) = 1$ 'dir.

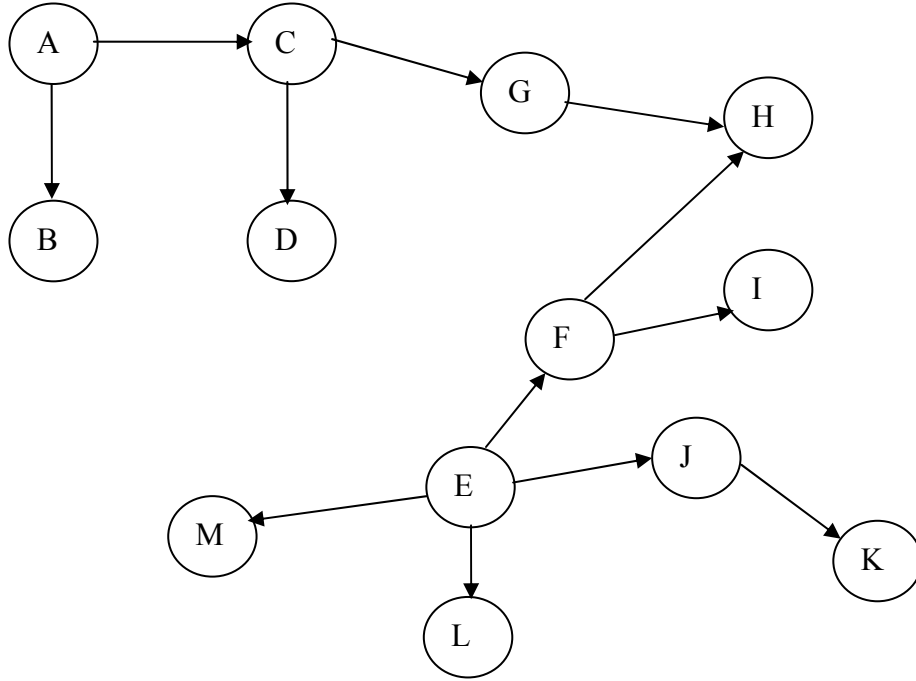
5. Markov ağ (K, ψ) ile Bayes ağlarda kümeleme algoritması ve düğümlerin olasılıklarını elde etmek için E= e kanıtı kullanılır.

7. UYGULAMA

Bu çalışmada, Ankara ili ve çevresinde meme kanseri teşhisi konmuş ve bazı tedaviler geçirmiş rastgele 74 kadın ile anket çalışması yapılmıştır. Yapılan anket çalışmasından en iyi Bayes ağ modelini belirlemek amacıyla toplam 13 değişken seçilmiştir. Seçilen bu değişkenler ve düzeyleri aşağıda verilmiştir. Her bir değişken sadece iki düzeye sahiptir ve düzeyler küçük harfler ile gösterilecektir. Ayrıca, seçilen değişkenlerin her birine karşılık gelen harfler aşağıda gösterilmiştir. Uygulama süresince bu harfler kullanılacaktır.

- A : Meme kanseri teşhisi öncesi kontrollerini yaptırap yaptırmaması
- B : Lenf bezlerinde atlama olup olmaması
- C : Memesinde kanserin kendisi tarafından fark edilip edilmemesi
- D : Memesinde kanserin mamografide tespit edilip edilmemesi
- E : Tedavi yöntemlerinden memenin tümünün alınıp alınmaması
- F : Tedavi yöntemlerinden memenin bir kısmının alınıp alınmaması
- G : Tedavi yöntemlerinden kemoterapi görüp görmemesi
- H : Tedavi yöntemlerinden radyoterapi görüp görmemesi
- I : Tedavi yöntemlerinden hormonal terapi görüp görmemesi
- J : Protez meme kullanıp kullanmaması
- K : Protez meme kullanmaktan memnun olup olmaması
- L : Yapay meme yaptırmak isteyip istememesi
- M : Meme kanserinden önceki iki yıl içinde şiddetli bir üzüntü geçirip geçirmemesi

Bu 13 değişkene ilişkin en iyi modelin belirlenmesinde UnBBayes programı kullanılmıştır. Bu program kullanılarak en iyi modelin belirlenmesinde K2 algoritması seçilmiştir. Bu algoritmaya göre en iyi elde edilen model Şekil 7.1’de gösterilmiştir.



Şekil 7.1. On üç değişkenden oluşan en iyi Bayes ağ modeli

Elde edilen Bayes ağ modeli, yön verilmiş döngüsel olmayan grafikdir. Bu grafik, aynı zamanda, çoklu bağlantılı yön verilmiş bir grafik olma özelliğini de sağlar.

Bayes ağ modelinde, neden-etki değişkenlerinin belirlenmesi önemlidir. Şekil 7.1'deki grafiğe göre aşağıda verilen yorumlar yapılabilir.

Örneğin; meme kanseri teşhisi öncesi kontrollerini yaptırıp yaptırmaması, hem lenf bezlerinde atlama olup olmasını, hem de memesinde kanserin kendisi tarafından fark edilip edilmemesini etkiler. Kısaca, A düğümü C ve B düğümlerine neden olmaktadır.

Tedavi yöntemlerinden memenin tümünün alınıp alınmaması, hem yapay meme yaptırmak isteyip istememesi, hem de meme kanserinden önceki iki yıl içinde şiddetli bir üzüntü geçirip geçirmemesini etkiler.

Bu Bayes ağ modelinde, değişkenler kümesi,

$$V=\{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M\}$$

olup, kenarlar kümesi ise,

$$E=\{\{A,B\}, \{A,C\}, \{C,D\}, \{C,G\}, \{G,H\}, \{F,H\}, \{F,I\}, \{E,F\}, \\ \{E,J\}, \{J,K\}, \{E,M\}, \{E,L\}\}$$

dır.

İlk olarak, Bayes ağ modeli için ortak olasılık fonksiyonunun çarpanlarına ayrılması aşağıda verilmiştir.

$$P(a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m)=P(a).P(e).P(b|a).P(c|a).P(d|c).P(g|c).P(h|g,f) \\ P(i|f).P(f|e).P(j|e).P(k|j).P(m|e).P(l|e) \quad (7.1)$$

Eş. 7.1’de verilen koşullu olasılık değerleri aşağıdaki çizelgelerde verilmiştir (Çizelge 7.1-Çizelge 7.13).

Çizelge 7.1. Meme kanseri teşhisi öncesi kontrollerini yaptırıp yaptırmamasına ilişkin olasılıklar

Meme kanseri teşhisi öncesi kontrollerini yaptırıp yaptırmaması (A)	P(a)
Evet	0,3247
Hayır	0,6753

Çizelge 7.2. Tedavi yöntemlerinden memenin tümünün alınıp alınmaması ilişkin olasılıklar

Memenin tümünün alınıp alınmaması (E)	P(e)
Evet	0,7532
Hayır	0,2468

Çizelge 7.3. Meme kanseri teşhisi öncesi kontrollerini yaptırıp yaptırmaması bilindiğinde, lenf bezlerinde atlama olup olmama durumuna ilişkin koşullu olasılıklar, $P(b|a)$

Meme kanseri teşhisi öncesi kontrollerini yaptırıp yaptırmaması (A)	Lenf bezlerinde atlama olup olmaması (B)	
	Evet	Hayır
Evet	0,3077	0,6923
Hayır	0,5849	0,4151

Çizelge 7.4. Meme kanseri teşhisi öncesi kontrollerini yaptırıp yaptırmaması bilindiğinde, memesinde kanserin kendisi tarafından fark edilip edilmemesine ilişkin koşullu olasılıklar, $P(c|a)$

Meme kanseri teşhisi öncesi kontrollerini yaptırıp yaptırmaması (A)	Memesinde kanserin kendisi tarafından fark edilip edilmemesi (C)	
	Evet	Hayır
Evet	0,4074	0,5926
Hayır	0,8333	0,1667

Çizelge 7.5. Memesinde kanserin kendisi tarafından fark edilip edilmemesi bilindiğinde, mamografi ile tespit edilip edilmemesine ilişkin koşullu olasılıklar, $P(d|c)$

Memesinde kanserin kendisi tarafından fark edilip edilmemesi (C)	Mamografinin yapılıp yapılmaması (D)	
	Evet	Hayır
Evet	0,8947	0,1053
Hayır	0,6087	0,3913

Çizelge 7.6. Memesinde kanserin kendisi tarafından fark edilip edilmemesi bilindiğinde, tedavi yöntemlerinden kemoterapi görüp görmemesine ilişkin koşullu olasılıklar, $P(g|c)$

Memesinde kanserin kendisi tarafından fark edilip edilmemesi (C)	Tedavi yöntemlerinden kemoterapi görüp görmemesi (G)	
	Evet	Hayır
Evet	0,8036	0,1964
Hayır	0,4091	0,5909

Çizelge 7.7. Tedavi yöntemlerinden memenin bir kısmının alınıp alınmaması, kemoterapi alıp almaması bilindiğinde, radyoterapi alıp almamasına ilişkin koşullu olasılıklar, $P(h|g,f)$

Tedavi yöntemlerinden kemoterapi alıp almaması (G)	Tedavi yöntemlerinden radyoterapi alıp almaması (H)			
	Evet		Hayır	
Tedavi yöntemlerinden memenin bir kısmının alınıp alınmaması (F)	Evet	Hayır	Evet	Hayır
Evet	0,6250	0,6000	0,375	0,4000
Hayır	0,5919	0,0477	0,4081	0,9523

Çizelge 7.8. Tedavi yöntemlerinden memenin bir kısmının alınıp alınmaması bilindiğinde hormonal terapi alıp almamasına ilişkin koşullu olasılıklar, $P(i|f)$

Memenin bir kısmının alınıp alınmaması (F)	Hormonal terapi alıp almaması (I)	
	Evet	Hayır
Evet	0,4545	0,5455
Hayır	0,1029	0,8971

Çizelge 7.9. Tedavi yöntemlerinden memenin tümünün alınıp alınmaması bilindiğinde memenin bir kısmının alınıp alınmamasına ilişkin koşullu olasılıklar, $P(f|e)$

Memenin tümünün alınıp alınmaması (E)	Memenin bir kısmının alınıp alınmaması (F)	
	Evet	Hayır
Evet	0,0339	0,9661
Hayır	0,4500	0,5500

Çizelge 7.10. Tedavi yöntemlerinden memenin tümünün alınıp alınmaması bilindiğinde, protez meme kullanıp kullanmamasına ilişkin koşullu olasılıklar, $P(j|e)$

Memenin tümünün alınıp alınmaması (E)	Protez meme kullanıp kullanmaması (J)	
	Evet	Hayır
Evet	0,6833	0,3167
Hayır	0,1429	0,8571

Çizelge 7.11. Protez meme kullanıp kullanması bilindiğinde, memnun olup olmamasına ilişkin koşullu olasılıklar, $P(k|j)$

Protez meme kullanıp kullanması (J)	Memnun olup olmaması (K)	
	Evet	Hayır
Evet	0,8444	0,1556
Hayır	0,1929	0,8071

Çizelge 7.12. Tedavi yöntemlerinden memenin tümünün alınıp alınmaması bilindiğinde, üzüntü geçirip geçirmeme durumuna ilişkin koşullu olasılıklar, $P(m|e)$

Memenin tümünün alınıp alınmaması (E)	Üzüntü geçirip geçirmeme (M)	
	Evet	Hayır
Evet	0,5667	0,4333
Hayır	0,8571	0,1429

Çizelge 7.13. Memenin tümünün alınıp alınmaması bilindiğinde, yapay meme yaptırmak isteyip istememesine ilişkin koşullu olasılıklar, $P(l|e)$

Memenin tümünün alınıp alınmaması (E)	Yapay meme isteyip istememe (L)	
	Evet	Hayır
Evet	0,5410	0,4590
Hayır	0,7727	0,2273

Yapılan çalışmada, herhangi bir ön bilgi olmadığı varsayımı altında ele alınan değişkenler (düğümler) için ilk olasılık değerleri aşağıda verilmiştir (Çizelge 7.14). Bu olasılık değerlerinin elde edilmesinde HUGIN programı kullanılmıştır.

Çizelge 7.14'e göre, örneğin; 74 kadın arasından yapılan çalışmada, hiçbir ön bilgi olmadığı varsayımı altında meme kanseri teşhisi öncesinde kontrollerini yaptıрма olasılığı 0,9386 iken, yaptırmama olasılığı 0,0614'dir.

Memesinde kanserin kendisi tarafından fark edilme olasılığı 0,3562 iken, mamografi ile tespit edilme olasılığı 0,6515'dir.

Tedavi yöntemlerinden memenin tümünün alınma olasılığı 0,7532, bir kısmının alınma olasılığı 0,2101 olarak elde edilmiştir.

Ankete katılan kadınların protez meme kullanmaktan memnun olma olasılığı 0,6115 iken, memnun olmama olasılığı 0,3885'dir.

Çizelge 7.14. Bayes ağ modelindeki değişkenlere ait hiçbir ön bilgi olmadığı varsayımı altındaki olasılık değerleri

Düğüm	Düğümün düzeyleri	Ön olasılıklar
A (Meme kanseri teşhisi)	Evet	0,9386
kontrollerini yaptırıp yaptırmaması)	Hayır	0,0614
B (Lenf bezlerinde atlama olup olmaması)	Evet	0,3619
	Hayır	0,6381
C (Memesinde kanserin kendisi tarafından tespit edilip edilmemesi)	Evet	0,3562
	Hayır	0,6438
D (Memesinde kanserin mamografi ile tespit edilip edilmemesi)	Evet	0,6515
	Hayır	0,3485
E (Tedavi yöntemlerinden memenin tümünün alınması)	Evet	0,7532
	Hayır	0,2468
F (Tedavi yöntemlerinden memenin bir kısmının alınıp alınmaması)	Evet	0,2101
	Hayır	0,7899
G (Tedavi yöntemlerinden kemoterapi görüp görmemesi)	Evet	0,3966
	Hayır	0,6034
H (Tedavi yöntemlerinden radyoterapi görüp görmemesi)	Evet	0,4544
	Hayır	0,5456
I (Tedavi yöntemlerinden hormonal terapi görüp görmemesi)	Evet	0,4700
	Hayır	0,5300
J (Protez meme kullanıp kullanmaması)	Evet	0,6895
	Hayır	0,3105
K(Protez meme kullanmaktan memnun olup olmaması)	Evet	0,6115
	Hayır	0,3885
L (Yapay meme yaptırmak isteyip istememesi)	Evet	0,4752
	Hayır	0,5248
M (Meme kanserinden önce bir üzüntü geçirip geçirmemesi)	Evet	0,4854
	Hayır	0,5146

Şekil 7.1'deki Bayes ağ modeline kümeleme algoritmasını uygulamaya geçmeden önce, bu modelin parametre tahminleri elde edilsin. İlk olarak, Eş. 7.1'de eşitlik aşağıdaki gibi yeniden düzenlenebilir.

$$P(v|\theta_m, s^h) = P(a|\theta_1, m^h) P(e|\theta_2, m^h) P(b|a, \theta_3, m^h) P(c|a, \theta_4, m^h) P(d|c, \theta_5, m^h) \\ P(g|c, \theta_6, m^h) P(h|g, f, \theta_7, m^h) P(i|f, \theta_8, m^h) P(f|e, \theta_9, m^h) P(j|e, \theta_{10}, m^h) (7.2) \\ P(k|j, \theta_{11}, m^h) P(m|e, \theta_{12}, m^h) P(l|e, \theta_{13}, m^h)$$

Şekil 7.1'de verilen model yapısının parametre tahminlerinin elde edilişi için aşağıdaki çizelge düzenlenmiştir (Çizelge 7.15).

Çizelge 7.15. Şekil 7.1'de verilen model yapısının parametre tahminleri için gerekli bilgiler

Değişkenler	Mümkün değerler (r_i)	Ebeveyn değişkenler	Ebeveynlerin mümkün değerleri (q_i)
A	2	$\emptyset$	0
B	2	{A}	2
C	2	{A}	2
D	2	{C}	2
E	2	$\emptyset$	0
F	2	{E}	2
G	2	{C}	2
H	2	{G, F}	4
I	2	{F}	2
J	2	{E}	2
K	2	{J}	2
L	2	{E}	2
M	2	{E}	2

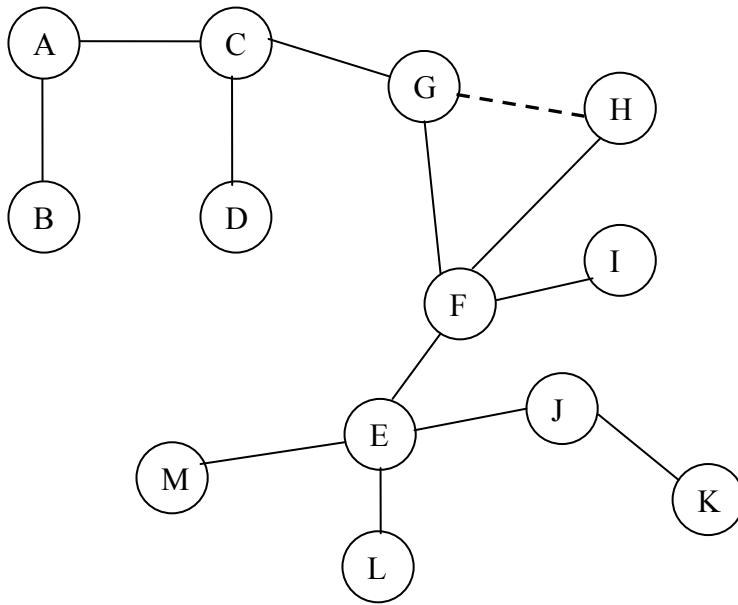
Çizelge 7.15'deki ve Bölüm 4'deki bilgiler kullanılarak, model yapısına ilişkin parametre tahminleri ve olasılık fonksiyonları Çizelge 7.16'da gösterilmiştir.

Çizelge 7.16. Model yapısına ilişkin parametre tahminleri ve olasılık fonksiyonları

Parametre Tahminleri	Olasılık fonksiyonları
$\theta_1=(\theta_1^{-1},\theta_1^{-2})$	$P(a_1/\theta_1,m^h), P(a_2/\theta_1,m^h)$
$\theta_2=(\theta_2^{11},\theta_2^{12},\theta_2^{21},\theta_2^{22})$	$P(b_1/a_1,\theta_2,m^h), P(b_2/a_1,\theta_2,m^h), P(b_1/a_2,\theta_2,m^h), P(b_2/a_2,\theta_2,m^h)$
$\theta_3=(\theta_3^{11},\theta_3^{12},\theta_3^{21},\theta_3^{22})$	$P(c_1/a_1,\theta_3,m^h), P(c_2/a_1,\theta_3,m^h), P(c_1/a_2,\theta_3,m^h), P(c_2/a_2,\theta_3,m^h)$
$\theta_4=(\theta_4^{11},\theta_4^{12},\theta_4^{21},\theta_4^{22})$	$P(d_1/c_1,\theta_4,m^h), P(d_2/c_1,\theta_4,m^h), P(d_1/c_2,\theta_4,m^h), P(d_2/c_2,\theta_4,m^h)$
$\theta_5=(\theta_5^{-1},\theta_5^{-2})$	$P(e_1/\theta_5,m^h), P(e_2/\theta_5,m^h)$
$\theta_6=(\theta_6^{11},\theta_6^{12},\theta_6^{21},\theta_6^{22})$	$P(f_1/e_1,\theta_6,m^h), P(f_2/e_1,\theta_6,m^h), P(f_1/e_2,\theta_6,m^h), P(f_2/e_2,\theta_6,m^h)$
$\theta_7=(\theta_7^{11},\theta_7^{12},\theta_7^{21},\theta_7^{22})$	$P(g_1/c_1,\theta_7,m^h), P(g_2/c_1,\theta_7,m^h), P(g_1/c_2,\theta_7,m^h), P(g_2/c_2,\theta_7,m^h)$
$\theta_8=(\theta_8^1,\theta_8^2,\theta_8^3,\theta_8^4)$	
$\theta_8^1=(\theta_8^{11},\theta_8^{12})$	$P(h_1\backslash g_1,f_1,\theta_8,m^h), P(h_2\backslash g_1,f_1,\theta_8,m^h)$
$\theta_8^2=(\theta_8^{21},\theta_8^{22})$	$P(h_1\backslash g_1,f_2,\theta_8,m^h), P(h_2\backslash g_1,f_2,\theta_8,m^h)$
$\theta_8^3=(\theta_8^{31},\theta_8^{32})$	$P(h_1\backslash g_2,f_1,\theta_8,m^h), P(h_2\backslash g_2,f_1,\theta_8,m^h)$
$\theta_8^4=(\theta_8^{41},\theta_8^{42})$	$P(h_1\backslash g_2,f_2,\theta_8,m^h), P(h_2\backslash g_2,f_2,\theta_8,m^h)$
$\theta_9=(\theta_9^{11},\theta_9^{12},\theta_9^{21},\theta_9^{22})$	$P(i_1/f_1,\theta_9,m^h), P(i_2/f_1,\theta_9,m^h), P(i_1/f_2,\theta_9,m^h), P(i_2/f_2,\theta_9,m^h)$
$\theta_{10}=(\theta_{10}^{11},\theta_{10}^{12},\theta_{10}^{21},\theta_{10}^{22})$	$P(j_1/e_1,\theta_{10},m^h), P(j_2/e_1,\theta_{10},m^h), P(j_1/e_2,\theta_{10},m^h), P(j_2/e_2,\theta_{10},m^h)$
$\theta_{11}=(\theta_{11}^{11},\theta_{11}^{12},\theta_{11}^{21},\theta_{11}^{22})$	$P(k_1/j_1,\theta_{11},m^h), P(k_2/j_1,\theta_{11},m^h), P(k_1/j_2,\theta_{11},m^h), P(k_2/j_2,\theta_{11},m^h)$
$\theta_{12}=(\theta_{12}^{11},\theta_{12}^{12},\theta_{12}^{21},\theta_{12}^{22})$	$P(l_1/e_1,\theta_{12},m^h), P(l_2/e_1,\theta_{12},m^h), P(l_1/e_2,\theta_{12},m^h), P(l_2/e_2,\theta_{12},m^h)$
$\theta_{13}=(\theta_{13}^{11},\theta_{13}^{12},\theta_{13}^{21},\theta_{13}^{22})$	$P(m_1/e_1,\theta_{13},m^h), P(m_2/e_1,\theta_{13},m^h), P(m_1/e_2,\theta_{13},m^h), P(m_2/e_2,\theta_{13},m^h)$

Elde edilen Bayes ağ modeli için Bölüm 6’da tanıtılan Bayes ağlarda kümeleme algoritması uygulanmıştır. Bu algoritma ile eşit bir Markov ağ elde edilir. Ayrıca, bu algoritma uygulandığında, denk bir Markov ağ modeli için de aynı sonuçlar elde edilir.

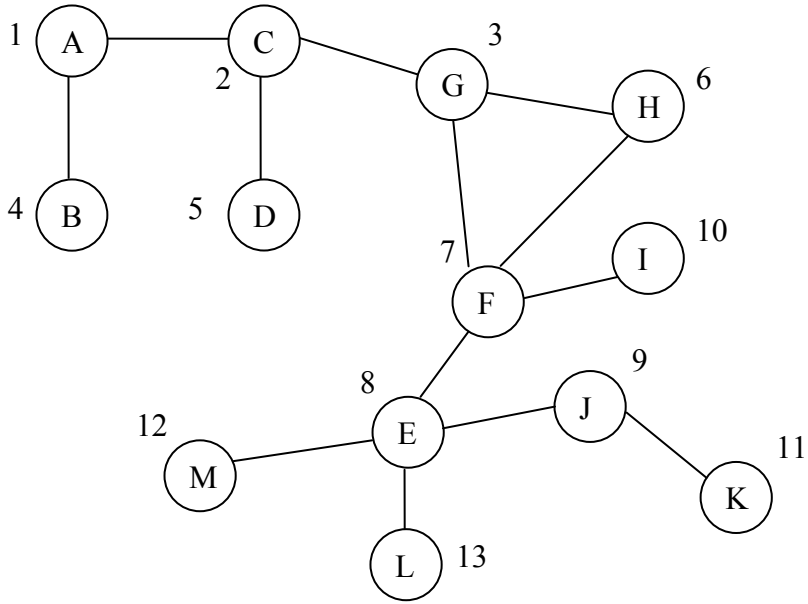
Bayes ağlarda kümeleme algoritmasının ilk adımı gereğince, Şekil 7.1'deki grafik moral grafik ve üçgenleştirilmiş grafik haline getirilmelidir. Bu grafiği, moral grafik haline getirmek için, G-F düğümleri arasına bir bağlantı eklenir ve tüm yön verilmiş kenarlar, yön verilmemiş kenarlar ile yer değiştirir (Şekil 7.2). Çünkü G ve F düğümleri ortak H düğümüne sahiptir. Bu grafik yön verilmemiş üçgenleştirilmiş bir grafiktir. Bundan dolayı, grafiğe daha fazla bağlantı eklemek gerekmemektedir.



Şekil 7.2. Şekil 7.1 için moral grafik

Ayrıca, grafiğin üçgenleştirilmiş bir grafik olup olmadığını test etmek için Bölüm 3'de verilen en büyük önemliliği arama doldurma algoritması kullanılmıştır. Bunun için HUGIN paket programından yararlanılmıştır.

Şekil 7.1'de verilen Bayes ağ modelindeki değişkenlerin numaralanması gösterilmiştir (Şekil 7.3).



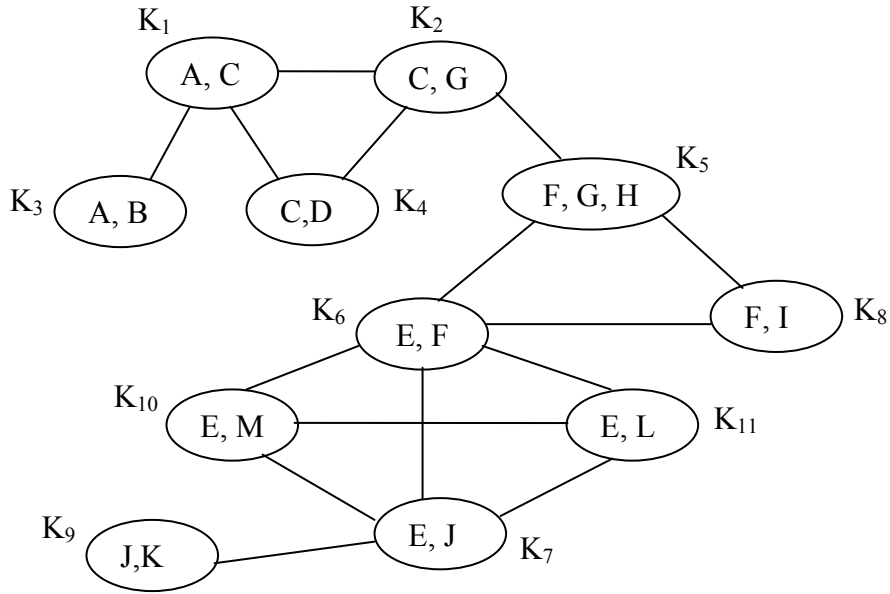
Şekil 7.3. Düğümlerin numaralanması ve yön verilmemiş üçgenleştirilmiş grafik

HUGIN paket programı kullanılarak, Şekil 7.3’de verilen yön verilmemiş üçgenleştirilmiş grafik için elde edilen kümeler aşağıda verilmiştir (Çizelge 7.17).

Çizelge 7.17. Şekil 7.1’deki Bayes ağ modeli için elde edilen kümeler

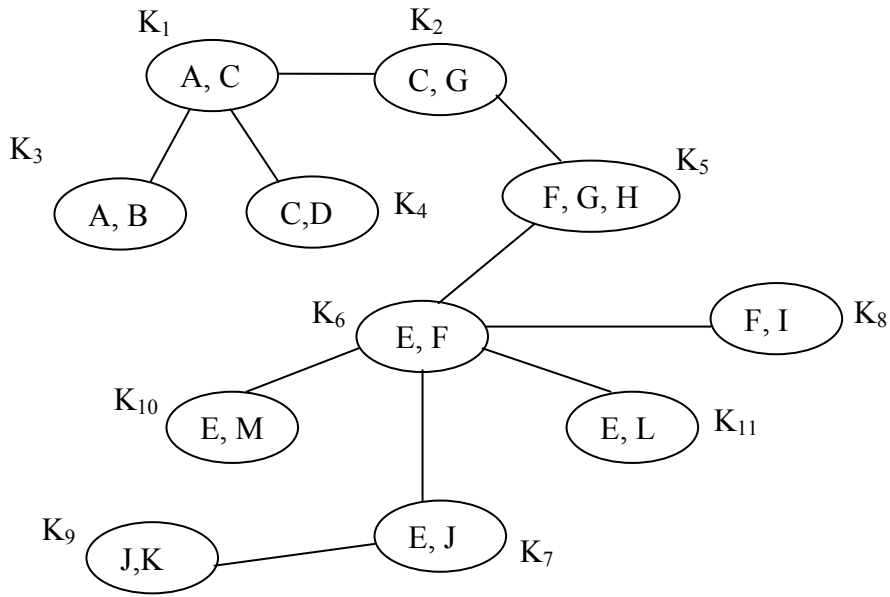
Kümeler (K)	Kümeyle ait olan düğüm sayısı	Kümeyle ait olan düğümler	Tablo büyüklüğü
K ₁	2	(A, C)	4
K ₂	2	(C, G)	4
K ₃	2	(A, B)	4
K ₄	2	(C, D)	4
K ₅	3	(F, G, H)	8
K ₆	2	(E, F)	4
K ₇	2	(E, J)	4
K ₈	2	(F, I)	4
K ₉	2	(J, K)	4
K ₁₀	2	(E, M)	4
K ₁₁	2	(E, L)	4
Toplam küme tablo büyüklüğü			48

Şekil 7.3 için elde edilen küme grafiği aşağıda gösterilmiştir (Şekil 7.4). Bu küme grafiği elde edilirken Bölüm 5’de tanıtılan Küme ağacının elde edilmesine ilişkin algoritma kullanılmıştır.



Şekil 7.4. Yön verilmiş döngüsel olmayan grafik için küme grafiği

Küme grafiğinden bağlantılar keyfi olarak kırıldığından dolayı, aynı yön verilmemiş grafik ile ilişkili birden fazla küme ağacı elde edilebilir. Bu küme ağaçlarından biri Şekil 7.5’de verilmiştir.



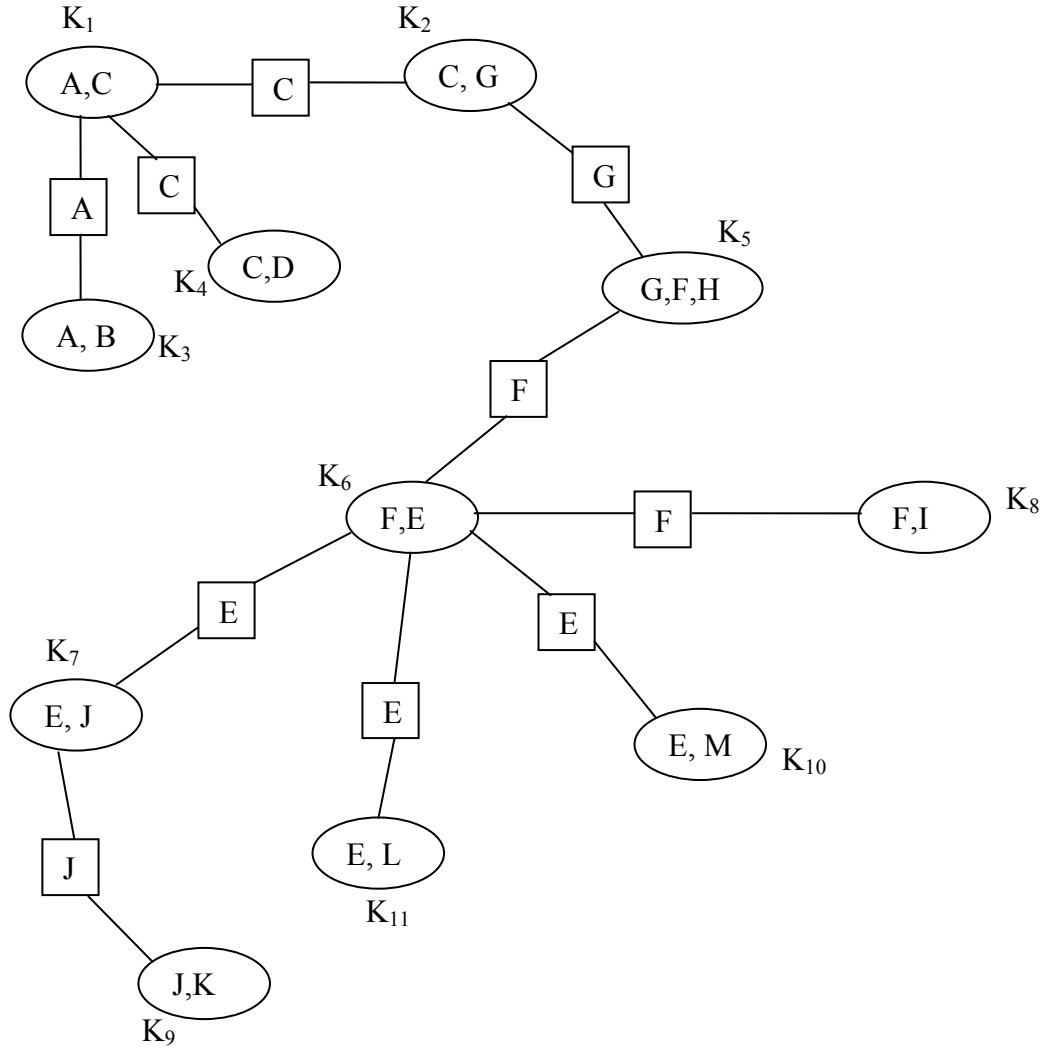
Şekil 7.5. Şekil 7.1 için elde edilen küme ağacı

Ayrıca elde edilen bağlantılı kümeler, kümelerin ayıraç setleri ve tablo büyüklükleri Çizelge 7.18’de verilmiştir.

Çizelge 7.18. Bağlantılı kümeler, kümelerin ayıraç setleri ve tablo büyüklükleri

Bağlantılı kümeler	Ayıraç düğümleri	Tablo büyüklüğü
K ₁ ve K ₂	{C}	2
K ₁ ve K ₃	{A}	2
K ₁ ve K ₄	{C}	2
K ₂ ve K ₅	{G}	2
K ₅ ve K ₆	{F}	2
K ₆ ve K ₇	{E}	2
K ₆ ve K ₈	{F}	2
K ₇ ve K ₉	{J}	2
K ₆ ve K ₁₀	{E}	2
K ₆ ve K ₁₁	{E}	2

Küme ağacını ayıraç setleri kullanarak grafiksel olarak Şekil 7.6’da gösterilmiştir.



Şekil 7.6. Bağlantılı kümeler, kümelerin ayıraç setleri ile birlikte küme ağacı

Kümeleme algoritmasının tüm adımları sırasıyla uygulandığında elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Meme kanseri teşhisi öncesi kontrollerini yaptırıp yaptırmaması (A) ve memesinde kanserin kendisi tarafından fark edilip edilmeme (C) düğümleri K_1 kümesine atanmıştır.

Tedavi yöntemlerinden kemoterapi (kimyasal tedavi) alıp almaması (G) düğümü K_2 kümesine atanmıştır.

Lenf bezlerinde atlama olup olmama (B) düğümü K_3 kümesine atanmıştır.

Memenizde kanserin mamografi ile tespit edilip edilememe (D) düğümü K_4 kümesine atanmıştır.

Tedavi yöntemlerinden radyoterapi (ışın tedavisi) alıp almama düğümü (H) K_5 kümesine atanmıştır.

Tedavi yöntemlerinden memenin tümünün alınması (E) ve memenin bir kısmının alınması (F) düğümü K_6 kümesine atanmıştır.

Protez meme kullanıp kullanmama (J) düğümü K_7 kümesine atanmıştır.

Tedavi yöntemlerinden hormonsal terapi alıp almama (I) düğümü K_8 düğümüne atanmıştır.

Protez meme kullanmaktan memnun olup olmama (K) düğümü K_9 kümesine atanmıştır.

Meme kanserinden önceki iki yıl içinde şiddetli bir üzüntü geçirip geçirmeme (M) düğümü K_{10} kümesine atanmıştır.

Yapay meme yaptırmak isteyip istememe (L) düğümü K_{11} kümesine atanmıştır.

Böylece, Şekil 7.3’de verilen Markov ağ için aşağıda verilen potansiyel gösterim yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\psi_1(a,b) &= P(a)P(b|a) \\
\psi_2(a,c) &= P(c|a) \\
\psi_3(c,g) &= P(g|c) \\
\psi_4(g,f,h) &= P(h|g,f) \\
\psi_5(e,f) &= P(e)P(f|e) \\
\psi_6(e,m) &= P(m|e) \\
\psi_7(e,l) &= P(l|e) \\
\psi_8(e,j) &= P(j|e) \\
\psi_9(j,k) &= P(k|j) \\
\psi_{10}(f,i) &= P(i|f) \\
\psi_{11}(c,d) &= P(d|c)
\end{aligned} \tag{7.4}$$

Eş.7.4'ün sağ tarafındaki olasılık değerleri kullanılarak her bir potansiyel fonksiyonun sayısal değerleri aşağıdaki çizelgelerde verilmiştir (Çizelge 7.19). Bu çizelgelerde “0” her bir düğümün hayır cevabına, “1” her bir düğümün evet cevabına karşılık kullanılmıştır.

Çizelge 7.19. Potansiyel fonksiyonun sayısal değerleri

a	b	$\psi_1(a,b)$	a	c	$\psi_2(a,c)$	c	g	$\psi_3(c,g)$	e	f	$\psi_4(e,f)$	e	m	$\psi_5(e,m)$
0	0	0,2803	0	0	0,5926	0	0	0,5909	0	0	0,1357	0	0	0,1428
0	1	0,4675	0	1	0,1667	0	1	0,1964	0	1	0,1111	0	1	0,4333
1	0	0,1899	1	0	0,4077	1	0	0,4091	1	0	0,7277	1	0	0,8571
1	1	0,099	1	1	0,8333	1	1	0,8036	1	1	0,0256	1	1	0,5667

e	l	$\psi_6(e,l)$	e	j	$\psi_7(e,j)$	j	k	$\psi_8(j,k)$	f	l	$\psi_9(f,l)$	c	d	$\psi_{10}(c,d)$
0	0	0,2273	0	0	0,8971	0	0	0,8071	0	0	0,8971	0	0	0,3913
0	1	0,4590	0	1	0,5455	0	1	0,1555	0	1	0,5455	0	1	0,8947
1	0	0,7727	1	0	0,1029	1	0	0,1929	1	0	0,1029	1	0	0,6087
1	1	0,5410	1	1	0,4545	1	1	0,8444	1	1	0,4545	1	1	0,1053

g	f	h	$\psi_1(g,f,h)$
0	0	0	0,9524
0	0	1	0,0476
0	1	0	0,4000
0	1	1	0,6000
1	0	0	0,4082
1	0	1	0,5918
1	1	0	0,6250
1	1	1	0,3750

Ayrıştırılabilir Markov ağ için potansiyel gösterim aşağıda verilmiştir.

$$P(a,b,c,d,e,f,g,h,l,j,k,l,m)=\psi_1(a,b)\psi_2(a,c)\psi_3(c,g)\psi_4(g,f,h)\psi_5(e,f) \\ \psi_6(e,m)\psi_7(e,l)\psi_8(e,j)\psi_9(j,k)\psi_{10}(f,l)\psi_{11}(c,d) \quad (7.3)$$

Sonuç olarak, tanımlanan her iki potansiyel gösterim aynı Markov ağ modelini tanımlar. Elde edilen sonuçlar hem Bayes ağlar hem de Markov ağlar için de geçerli olacaktır.

8. SONUÇ

Bu çalışmada, olasılıklı ağ modellerinden Markov ağlar ve Bayes ağlar ele alınmıştır. Bu ağ modelleri kullanılarak, yapılan anket çalışmasındaki veriler değerlendirilmiştir. Burada ele alınan varsayımlar şunlardır:

1. Değişkenler kesikli olmalıdır.
2. Elde edilen en iyi modelin çoklu bağlantılı yön verilmiş grafik olması gerekir. Bu grafik yön verilmiş döngüsel olmayan grafik olmalıdır.
3. Veritabanı eksik gözlem içermemelidir.

Bu varsayımlar altında, en iyi model elde edilmiş ve bu model ele alınarak Bayes ağlarda kümeleme algoritması kullanılmıştır. Bayes ağ modelleri ile ilgilenilmesinin nedeni, Bayes ağ modellerinin Markov ağ modellerine dönüştürülebilmesidir. Bu nedenle, Bayes ağlarda kümeleme algoritmasından elde edilen sonuçlar Markov ağlar ile de aynı olacaktır.

Bayes ağlarda kümeleme algoritmasına geçmeden önce, küme grafikleri oldukça önemli bir kavramdır. Bu nedenle, Bayes ağlar ve Markov ağlar için ayrı ayrı küme grafikleri, küme ağacı kavramları tanıtılmıştır.

Kümeleme algoritmasını kullanmanın amacı, ele alınan değişkenin hangi kümeye ait olduğunu belirlemektir. Seçilen modele göre küme sayısı seçilebilecek her bir model için değişecektir. Bu çalışmada toplam 13 değişken ele alınmıştır. Elde edilen modelde toplam 13 değişken, neden etki değişkenlerini belirleyen toplam 12 kenar vardır.

Veritabanına uygun olan en iyi model belirlendikten sonra, bu grafiğin kusursuz numaralaması, moral grafik, üçgenleştirilmiş grafik olup olmaması, küme grafiği, küme ağacı... gibi kavramlar incelenmiştir. Bayes ağ modelinin moral grafik haline getirilmiş hali Markov ağ modeli olarak bilinir. Bu model, yön verilmemiş bir grafiktir.

Çizelge 7-1 ve 7-13'den elde edilen sonuçlardan bazıları aşağıda verilmiştir:

Tedavi yöntemlerinden memenin tümünün alınması olasılığı yaklaşık %75 iken alınmama olasılığı yaklaşık %25'dir. Tedavi yöntemlerinden memenin bir kısmının alındığı bilindiğinde, hormonal terapi alma olasılığı %45'dir. Protez meme kullandığı bilindiğinde, memnun olma olasılığı yaklaşık %84'dür. Meme kanseri teşhisi öncesi kontrollerini yaptıрма olasılığı yaklaşık %32 iken yaptırmama olasılığı yaklaşık %67'dir.

Bu çalışmada, elde edilen küme grafiğine göre, 11 tane küme elde edilmiştir. Bu kümeler için gerekli bilgiler uygulama bölümünde ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Sonuç olarak, her bir değişkenin hangi kümeye ait olduğu belirlenmiş ve elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Meme kanseri teşhisi öncesi kontrollerini yaptırap yaptırmaması (A) ve memesinde kanserin kendisi tarafından fark edilip edilmeme (C) düğümleri K_1 kümesine atanmıştır.

Tedavi yöntemlerinden kemoterapi (kimyasal tedavi) alıp almaması (G) düğümü K_2 kümesine atanmıştır.

Lenf bezlerinde atlama olup olmama (B) düğümü K_3 kümesine atanmıştır.

Kanserin mamografi ile tespit edilip edilememe (D) düğümü K_4 kümesine atanmıştır.

Tedavi yöntemlerinden radyoterapi (ışın tedavisi) alıp almama düğümü (H) K_5 kümesine atanmıştır.

Tedavi yöntemlerinden memenin tümünün alınıp alınmaması (E) ve memenin bir kısmının alınıp alınmaması (F) düğümü K_6 kümesine atanmıştır.

Protez meme kullanıp kullanmama (J) düğümü K_7 kümesine atanmıştır.

Tedavi yöntemlerinden hormonal terapi alıp almama (I) düğümü K_8 düğümüne atanmıştır.

Protez meme kullanmaktan memnun olup olmama (K) düğümü K_9 kümesine atanmıştır.

Meme kanserinden önceki iki yıl içinde şiddetli bir üzüntü geçirip geçirmeme (M) düğümü K_{10} kümesine atanmıştır.

Yapay meme yaptırmak isteyip istememe (L) düğümü K_{11} kümesine atanmıştır.

Ayrıca, her bir kümede yer alan değişken düzeylerinin bulunma olasılıkları Çizelge 7.19'da verilmiştir. Bu çizelgede, her bir kümenin ortak olasılık fonksiyonlarının sayısal değerleri elde edilmiştir. Değişkenlerin her bir düzeyleri için bu sonuçlar verilmiştir.

Örneğin; meme kanseri teşhisi kontrollerini yaptırap yaptırmama ve lenf bezlerinde atlama olup olmaması değişkenleri K_1 kümesine atanmıştır. Bu kümeye göre, meme kanseri teşhisi öncesi kontrollerini yaptırmamış kadınlarda kanserin lenf bezlerine atlama olasılığı 0,4675 olarak elde edilmiştir. Ayrıca, meme kanseri teşhisi kontrollerini yaptırmış kadınlarda ise kanserin lenf bezlerine atlama olasılığı 0,099 bulunmuştur. Sonuç olarak, rastgele seçilen 74 kadın üzerinde yapılan anket çalışmasına göre meme kanseri öncesi kontrollerini yaptıran kadınlarda, lenf bezlerinde atlama olasılığı düşüktür.

Son iki yıl içinde şiddetli bir üzüntü geçirmemeyen kadınlarda memenin tümünün alınmama olasılığı 0,1428 iken; son iki yıl içinde şiddetli bir üzüntü geçiren kadınlarda memenin tümünün alınma olasılığı 0,5667 olarak elde edilmiştir. Sonuç olarak, rastgele seçilen 74 kadın üzerinde yapılan anket çalışmasına göre belli bir

zaman aralığında geçirilmiş bir üzüntü kanserin ilerlemesine ve böylece memenin tümünün alınmasına neden olabilmektedir.

Memenin tümü alındığında, yapay meme yaptırmak istemeyen kadınların olasılığı 0,7727 iken, memenin tümü alındığında yapay meme yaptırmak isteyen kadınların olasılığı 0,5410 olarak elde edilmiştir.

Ayrıca, memenin tümü alındığında protez meme kullanmak isteyen kadınların olasılığı 0,4545'dir. Ancak, memenin tümü alındığında protez meme kullanmak istemeyen kadınların olasılığı (0,1029) oldukça düşüktür. Protez meme kullanan kadınların protez memeden memnun olma olasılığı (0,8444) oldukça yüksek elde edilmiştir. Sonuç olarak, rastgele seçilen 74 kadın üzerinde yapılan anket çalışmasına göre memenin tümü alındığında kadınlar protez meme kullanmaktan ise yapay meme yaptırmayı tercih etmektedirler.

Memenin bir kısmı alınmayan kadınlarda, hormonal terapi görmeme olasılığı 0,8971 olarak elde edilmiştir. Ayrıca, memenin bir kısmı alınmayan kadınlarda kemoterapi ve radyoterapi görmeme olasılığı 0,9524 olarak elde edilmiştir. Sonuç olarak, 74 kadın üzerinde yapılan anket çalışmasına göre memenin bir kısmı alınmayan kadınlar herhangi bir tedavi yöntemine ihtiyaç duymadan iyileşme göstermişlerdir.

Elde edilen sonuçlara göre, meme kanserinin önceden teşhis edilmesi, ortaya çıkacak bazı sonuçları azaltmaktadır. Meme kanseri teşhisi kontrollerini önceden yaptıran kadınlarda, memenin tümünün alınması, tedavi yöntemlerinden kemoterapi, radyoterapi veya hormonal terapi almama olasılıkları düşmektedir. Meme kanserine yakalanmadan önceki 2 yıl içinde şiddetli bir üzüntü geçirmeleri de oldukça önemli bulunmuştur. Tedavi yöntemlerinden memesinin tümü alınan kadınlarda, protez meme kullanmama olasılığı yüksek iken, yapay meme kullanmak isteyen kadınların olasılığı daha yüksek bulunmuştur.

Araştırmacıların yapacakları çalışmalarda değişkenlerin birbirleri ile nedensel bir etki içinde olma durumları ele alınması gereken önemli bir noktadır. Olasılıklı ağ modelleri (Bayes ve Markov ağlar) kullanılarak, kümeleme metotlarının uygulanması tıp ve diğer alanlarda oldukça önem taşımaktadır. Örneğin; tıbbi tanıda uzman sistemin görevi, bir hastanın semptomlarına bakarak, hasta hakkındaki teşhislerin ortaya konulmasıdır. Bu çalışmada, meme kanserini etkileyebilecek değişkenler ele alınarak, bu değişkenler ile hastalığın ortaya çıkması değişkeninin ortak olasılık fonksiyon değerleri elde edilmiştir. Çalışmanın sonuçları araştırmacıya meme kanserinin ortaya çıkması hakkında ön bilgiler vermesi, araştırmacının bu konuda yapacağı çalışmaları yönlendirmesini bakımından önem taşımaktadır. Sonuç olarak, Bayes ve Markov ağların kümeleme metotlarında kullanılması sayesinde tıbbi konular öncelikli olmak üzere hem araştırmacının mevcut durumu sebep sonuç ilişkisi çerçevesinde değerlendirebilmesine hem de araştırma sonuçlarına bakarak önceden alınması gereken tedbir ve önlemleri belirleyebilmesine olanak sağlar.

KAYNAKLAR

Barr, A., Feigenbaum, E.A., "The Handbook of Artificial Intelligence", **HeurisTech Press and William Kaufmann**, Los Altos, Ca, 85-96 (1981).

Besag, J., York, J., Mollie, A., "Bayesian image with two applications spatial statistics", **Annals of the Institute of Statistical Mathematics**, 43: 1-59 (1991).

Bouckaert, R.R., "Bayesian belief networks: From construction to inference", Ph.D.Thesis, **Utrecht University**, Department of Computer Science, Netherlands, 10-80 (1995).

Buntine, W., "Theory refinement on Bayesian Networks", **In Proceedings of the Seventh Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence**, Morgan Kaufmann Publishers, San Mateo, CA, 52-60 (1991).

Buntine, W., "Operations for learning with graphical models", **Journal of Artificial Intelligence Research**, 2: 159-225 (1994).

Buntine, W., "A guide to the literature on learning probabilistic networks from data", **IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering**, 8(2): 195-210 (1996).

Castillo, E., Alvarez, E., "Expert systems: Uncertainty and learning", **Computational Mechanics Publications and Elsevier Applied Science**, London, U.K, 100-120 (1991).

Castillo, E., Gutierrez, J.M., Hadi, A.S., "Expert Systems and Probabilistic Network Models", **Springer-Verlag**, New York, 113-366 (1997).

Cheeseman, P., "In defense of probability", **In Proceedings of the 9th International Joint Conference on Artificial Intelligence**, Morgan Kaufmann Publishers, 1002-1009 (1985).

Cooper, F., Herskovits, E., "A Bayesian method for the induction of probabilistic networks from data", **Machine Learning**, 9 (1992).

Cowell, R.G., "Introduction to Inference in Bayesian Networks", **in Learning in Graphical Models**, 9-26 (1999).

Cowell, R.G., Dawid, A.P., Lauritzen, S.F., Spiegelhalter, D.J., "Probabilistic Networks and Expert Systems", **Springer-Verlag**, New York, 1-123 (1999).

Cox, D.R., Wermuth, N., "Multivariate Dependencies", **Chapman and Hall**, London, 28-44 (1996).

Dawid, A.P., "Conditional independence in statistical theory", *Journal of the Royal Statistical Society B*, 41: 1-31 (1979).

Dawid, A.P., Lauritzen, S.L., "Hyper Markov Laws in the statistical analysis of decomposable graphical models", *The Annals of Statistics*, 21 (3): 1272-1317 (1993).

Durkin, J., "Expert Systems: Design and Development", *Maxwell Macmillan*, New York, 32-38 (1994).

Edwards, D., "Introduction to Graphical Modelling", *Springer Verlag*, New York, 1-6 (1995).

Erbaş, S., "Olasılık ve İstatistik", *Gazi Kitabevi*, Ankara, 46-80 (2007).

Frydenberg, M., "The chain graph Markov property", *Scandinavian Journal of Statistics*, 17: 333-353 (1990).

Geiger, D., Verma, T., Pearl, J., "Identifying independence in Bayesian Networks", *Networks*, 20: 507-534 (1990).

Heckerman, D., Geiger, D., Chickering, D.M., "Learning Bayesian Networks: The combination of knowledge and statistical data", *Machine Learning*, 20:197-243 (1995).

İnternet: Cano, R., Sordo, C., Gutierrez, J.M., "Applications of Bayesian networks in meteorology", <http://grupos.unican.es/ai/meteo/articulos/abn03.pdf> (2004).

İnternet: Guo, H., "K2 algorithm presentation: Learning Bayes Networks from data", www.kddresearch.org/Groups/Probabilistic-Reasoning/Papers/k2.ppt (2000).

İnternet: Lecture Outline, "Quick review of basics for conditional independence relations, Semantics for directed and undirected graphical models, Hammersley-Clifford Theorem for Markov Networks and undirected graphs, d-separation for graphical models, and the related Bayes Ball and PC algorithms", http://www.cs.cmu.edu/~tom/10-702/GraphicalModelsFeb19_2003.pdf (2003).

İnternet: Moral, S., "Learning Bayesian networks", <http://www.dina.dk/phd/s/s6/learning1.pdf> (2003).

İnternet: Nicholson, A.E., Korb, K.B., "Lecture 3: Inference in Bayesian networks", <http://citeseer.ist.psu.edu/cache/papers/cs/14217/http:zSzzSzwww.csse.monash.edu.au:uzSz~annnzSz443zSzL3-4.pdf/lecture-inference-in-bayesian.pdf> (2006).

İnternet: Ramoni, M., "Bayesian networks representation and reasoning", <http://dsg.harvard.edu/courses/hst951/Spring02/951-3P.pdf> (2003).

Internet: Richardson, T., "Introduction and d-separation", UW Department of Statistics, <http://www.stat.washington.edu/tsr/s538/lec1> (1997).

Internet: Ruiz, C., "Illustration of the K2 algorithm for learning Bayes net structures", http://web.cs.wpi.edu/~cs539/s05/Projects/k2_algorithm.pdf (2006).

Internet: Schmidt-Thieme, L., "Bayes Networks, III. Exact inference", Institute for Computer Science, Albert-Ludwigs-University of Freiburg, Germany, <http://www.informatik.uni-freiburg.de/cgmn> course on Bayesian networks (2003).

Internet: Wainwright, M., "Undirected graphical models", <http://inst.eecs.berkeley.edu/~cs281a/fa05/lectures/lec-9-13.pdf> (2005).

Internet: Wikipedia, the free encyclopedia, "Markov network", http://en.wikipedia.org/wiki/Markov_network (2006).

Internet: Wikipedia, the free encyclopedia, "Bayesian network", http://en.wikipedia.org/wiki/Bayesian_network (2006).

Jensen, F.V., "An Introduction to Bayesian Networks", *UCL Press Ltd.*, London, 1-93 (1996).

Jensen, F.V., "Bayesian Networks and Decision Graphs", *Springer Verlag*, New York, 169-177 (2001).

Jordan, M.I., "Learning in Graphical Models", *Kluwer Academic Publishers*, Netherlands, 21- 52 (1998).

Lauritzen, S.L., "Graphical Models", *Oxford University Press*, Oxford, 28-60 (1996).

Lauritzen, S.L., "Some modern applications of graphical models", *Research report R-01-2015*, Department of Mathematical Sciences, Aalborg University, 1-28 (2001).

Lauritzen, S.L., Spiegelhalter, D.J., "Local computations with probabilities on graphical structures and their application to expert systems", *Journal of the Royal Statistical Society B*, 50(2): 157-224 (1988).

Lauritzen, S.L., Dawid, A.P., Larsen, B.N., Leimer, H.G., "Independence properties of directed Markov fields", *Networks*, 20: 491-505 (1990).

Madigan, D., Raftery, A.E., "Model selection and accounting for model uncertainty in graphical models using Occam's window", *Journal of the American Statistical Association*, 89: 1535-1546 (1994).

Madsen, A.L., Jensen, F.V., "LAZY propagation: A junction tree inference algorithm based on lazy evaluation", *Artificial Intelligence*, 113: 203-245 (1999).

Neapolitan, R.E., "Learning Bayesian Networks", *Prentice Hall*, London, 1-443 (2004).

Neal, R.M., "On deducing conditional independence from d-separation in causal graphs with feedback", *Journal of Artificial Intelligence Research*, 12: 87-91 (2000).

Pena, J.M., "On unsupervised learning of Bayesian networks and Conditional Gaussian Networks", PhD. Thesis, *University of the Basque Country*, Department of Computer Science and Artificial Intelligence, Spain, 1-128 (2001).

Pearl, J., "Fusion, propagation and structuring in Belief Networks", *Artificial Intelligence*, 29: 241-288 (1986).

Pearl, J., "Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems", *Morgan Kaufmann*, San Mateo, CA, 40-48 (1988).

Pearl, J., "Causality: Models, Reasoning, and Inference", *Cambridge University Press*, England, 25-32 (2000).

Pearl, J., Verma, T., "The logic of representing dependencies by directed graphs", *In Proceedings of the National Conference on Artificial Intelligence*, AAAI Press/MIT Press, Menlo Park, CA, 347-379 (1987).

Spiegelhalter, D.J., Dawid, A.P, Lauritzen, S.L., Cowell, R.G., "Bayesian analysis in Expert systems", *Statistical Science*, 8 (3): 219-283 (1993).

Stephenson, T.A., "An introduction to Bayesian network theory and usage", *IDIAP Research Report 00-03*, 12-18 (2000).

Wermuth, N., Lauritzen, S.L., "Graphical and recursive models for contingency tables", *Biometrika*, 70: 537-552 (1983).

Whittaker, J., "Graphical Models in Applied Multivariate Statistics", *John Wiley and Sons*, New York, 8-12 (1990).

Xiang, Y., "Probabilistic Reasoning in multiagent systems: A graphical models approach", *Cambridge University Press*, Cambridge, 58-72 (2002).

Xu, H., "Computing marginals for arbitrary subsets from marginal representation in Markov Trees", *Artificial Intelligence*, 74: 177-189 (1995).

EKLER

EK-1 Terimler sözlüğü

Absorption of evidence	: Kanıt emilimi
Acyclic	: Döngüsel olmayan
Adjacency set	: Bitişiklik kümesi
Ancestors	: Atalar
Artificial Intelligence	: Yapay zeka
Bayesian Networks	: Bayes ağlar
Chain of Cliques	: Klikler zinciri
Children	: Çocuklar
Clique	: Klik
Cluster	: Küme
Clustering	: Kümeleme
Clustering methods	: Kümeleme yöntemleri
Connected	: Bağlantılı
Cycle	: Döngü
D-separation	: d-ayırılma
Decomposable	: Ayrıştırılabilir
Descendants	: Torunlar
Directed graphs	: Yön verilmiş grafik
Directed acyclic graphs	: Yön verilmiş döngüsel olmayan grafikler
Edge	: Kenar
Evidence	: Kanıt
Evidence of propagation	: Yayılma kanıtı
Expert systems	: Uzman sistemler
Factorization	: Çarpanlarına ayırma
Family	: Aile
Family tree	: Aile ağacı
Filling-in	: Doldurma
Graph	: Grafik
Join graph	: Ortak grafik
Junction graph	: Birleşme grafiği
Join tree	: Aile ağacı
Learning	: Öğrenme
Loop	: Döngü
Markov Networks	: Markov ağlar
Maximum cardinality search	: En büyük önemliliği arama
Moral graph	: Moral grafik
Multiple connected	: Çoklu bağlantılı
Multiple tree	: Çoklu ağaç
Neighbours	: Komşular
Node	: Düğüm
Numbering	: Numaralama
Uncertainty	: Belirsizlik
Undirected graphs	: Yön verilmemiş grafik
Parents	: Ebeveyn
EK-1 (Devam). Terimler sözlüğü	

Perfect numbering	: Kusursuz numaralama
Probabilistic expert systems	: Olasılıklı uzman sistemler
Probabilistic network models	: Olasılıklı ağ modelleri
Propagation	: Yayılım
Residual	: Artık
Running intersection property	: Süregelen arakesit özelliği
Search algorithm	: Arama algoritması
Tree	: Ağaç
Triangulated	: Üçgenleştirilmiş
Triangulation	: Üçgenleştirme
Separator	: Ayıraç
U-separation	: u-ayırma
Quality measure	: Kalite ölçüsü

EK-2 En iyi modelin elde edilmesinde UnBBayes program çıktısı

```

net
{
    node_size = (0 0);
    name = "learned net";
    tree = "(A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M)";
    UnBBayes_Color_Probabilistic_Description = "-256";
    UnBBayes_Color_Probabilistic_Explanation = "-16711936";
    UnBBayes_Color_Utility = "-16711681";
    UnBBayes_Color_Decision = "-14336";
}

node kontrol
{
    label = "A";
    position = (18 254);
    states = ("1.0" "2.0");
}

node yontem1
{
    label = "C";
    position = (18 162);
    states = ("1.0" "2.0");
}

node yontem3
{
    label = "D";
    position = (20 89);
    states = ("1.0" "2.0");
}

node tedyon1
{
    label = "E";
    position = (18 375);
    states = ("1.0" "2.0");
}

node tedyon2
{
    label = "F";
    position = (29 300);
    states = ("1.0" "2.0");
}

```

EK-2 (Devam) En iyi modelin elde edilmesinde UnBBayes program çıktısı

```

}

node tedyon3
{
    label = "G";
    position = (105 136);
    states = ("1.0" "2.0");
}

node tedyon4
{
    label = "H";
    position = (162 172);
    states = ("1.0" "2.0");
}

node tedyon5
{
    label = "I";
    position = (110 264);
    states = ("1.0" "2.0");
}

node protez
{
    label = "J";
    position = (174 247);
    states = ("1.0" "2.0");
}

node memnuniyet
{
    label = "K";
    position = (260 212);
    states = ("1.0" "2.0");
}

node yapaymeme
{
    label = "L";
    position = (281 329);
    states = ("1.0" "2.0");
}

```

EK-2 (Devam) En iyi modelin elde edilmesinde UnBBayes program çıktısı

```

node uzuntu
{
    label = "M";
    position = (230 291);

    states = ("1.0" "2.0");
}

node lenf
{
    label = "lenf";
    position = (75 195);
    states = ("1.0" "2.0");
}

potential (kontrol)
{
    data = ( 0,32467532 0,6753247 );
}

potential (yontem1 | kontrol)
{
    data = (( 0,8333333 0,166666669 )
( 0,4074074 0,592592575 ));
}

potential (yontem3 | yontem1)
{
    data = (( 0,10526316 0,8947368 )
( 0,60869566 0,39130434 ));
}

potential (tedyon1)
{
    data = ( 0,7532467 0,24675325 );
}

potential (tedyon2 | tedyon1)
{
    data = (( 0,033898305 0,9661017 )
( 0,45 0,55 ));
}

```

EK-2 (Devam) En iyi modelin elde edilmesinde UnBBayes program çıktısı

```

potential (tedyon3 | yontem1)
{
  data = (( 0,8035714 0,19642857 )
( 0,4090909 0,59090906 ));
}
potential (tedyon4 | tedyon3 tedyon2)
{
  data = ((( 0,625 0,375 )
( 0,6 0,4 ))
(( 0,59183675 0,40816328 )
( 0,04761905 0,95238096 )));
}
potential (tedyon5 | tedyon2)
{
  data = (( 0,45454547 0,54545456 )
( 0,10294118 0,89705884 ));
}
potential (protez | tedyon1)
{
  data = (( 0,68333334 0,316666668 )
( 0,14285715 0,8571429 ));
}
potential (memnuniyet | protez)
{
  data = (( 0,84444445 0,155555556 )
( 0,19293478 0,80706522));
}
potential (yapame | tedyon1)
{
  data = (( 0,540983572 0,45901638 )
( 0,77272729 0,22727273 ));
}
potential (uzuntu | tedyon1)
{
  data = (( 0,56666666 0,43333333 )
( 0,85714287 0,14284715 ));
}
potential (lenf | kontrol)
{
  data = (( 0,30769232 0,6923077 )
( 0,5849057 0,41509435 ));
}

```

EK-3 En iyi model elde edildikten sonra küme ağacının elde edilişi için HUGIN program çıktısı

Marriages (bigamy allowed):

Marrying F and G

Triangulation by minimum fill-in weight heuristic:

Fill-in links and node numbering:

13 L
12 M
11 K
10 I
9 J
8 E
7 F
6 H
5 D
4 B
3 G
2 C
1 A

Cliques:

Clique 1, 2 members (A, C), table size = 4
Clique 2, 2 members (C, G), table size = 4
Clique 3, 2 members (A, B), table size = 4
Clique 4, 2 members (C, D), table size = 4
Clique 5, 3 members (G, H, F), table size = 8
Clique 6, 2 members (F, E), table size = 4
Clique 7, 2 members (E, J), table size = 4
Clique 8, 2 members (F, I), table size = 4
Clique 9, 2 members (J, K), table size = 4
Clique 10, 2 members (E, M), table size = 4
Clique 11, 2 members (E, L), table size = 4
Total clique table size: 48

The junction forest:

Creating junction tree with clique 1 as root ...

Cliques 2 and 1 linked, separated by {C} (table size = 2)

EK-3 (Devam) En iyi model elde edildikten sonra küme ağacının elde edilişi için
HUGIN program çıktısı

Cliques 3 and 1 linked, separated by {A} (table size = 2)
 Cliques 4 and 1 linked, separated by {C} (table size = 2)
 Cliques 5 and 2 linked, separated by {G} (table size = 2)
 Cliques 6 and 5 linked, separated by {F} (table size = 2)
 Cliques 7 and 6 linked, separated by {E} (table size = 2)
 Cliques 8 and 6 linked, separated by {F} (table size = 2)
 Cliques 9 and 7 linked, separated by {J} (table size = 2)
 Cliques 10 and 6 linked, separated by {E} (table size = 2)
 Cliques 11 and 6 linked, separated by {E} (table size = 2)

Checking tables for all nodes ...

Assignment of potentials to cliques:

Node L assigned to clique 11
 Node M assigned to clique 10
 Node K assigned to clique 9
 Node I assigned to clique 8
 Node E assigned to clique 6
 Node J assigned to clique 7
 Node F assigned to clique 6
 Node H assigned to clique 5
 Node D assigned to clique 4
 Node B assigned to clique 3
 Node G assigned to clique 2
 Node C assigned to clique 1
 Node A assigned to clique 1

Checking tables for all nodes ...

Beliefs for chance nodes:

L --
 evet 0,475239
 hayir 0,524761
 M --
 evet 0,485381
 hayir 0,514619
 K --
 evet 0,611473
 hayir 0,388527
 I --
 evet 0,469975

EK-3 (Devam) En iyi model elde edildikten sonra küme ağacının elde edilişi için
HUGIN program çıktısı

```

    hayir    0,530025

E --
    evet     0,753200
    hayir    0,246800
J --
    evet     0,689515
    hayir    0,310485
F --
    evet     0,210034
    hayir    0,789966
H --
    evet     0,454373
    hayir    0,545628
D --
    evet     0,348462
    hayir    0,651538
B --
    evet     0.361939
    hayir    0.638061
G --
    evet     0,396606
    hayir    0,603395
C --
    evet     0,356117
    hayir    0,643883
A --
    evet     0,938609
    hayir    0,061391

```

Aproximated with epsilon: 1e-005, giving mass: 1

Compressed, with factor: 0,111372

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : OLMUŞ, Hülya
 Uyuğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 20.09.1977 Ankara
 Medeni hali : Evli
 Telefon : 0 (312) 202 14 84
 Faks : 0 (312) 212 22 79
 e-mail : hulya@gazi.edu.tr

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi /İstatistik Bölümü	2001
Lisans	Gazi Üniversitesi/ İstatistik Bölümü	1998
Lise	Sümer Lisesi	1994

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
1999-2007	Gazi Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Erbaş, O.S., Olmuş, H., “Deney Düzenleri”, Gazi Kitabevi, Ekim 2005.
2. Olmuş, H., “Çok Yönlü Frekans Tablolarının Analizi”, *İTÜ Fen Bilimleri Dergisi*, 4, 1, 17-27, 2006.
3. Coşkun, Ş., Karataş, F., Acartürk, F., Olmuş, H., Selvi, M., Erbaş, D., “The effect of L-NAME administrations after oral mucosal incision on wound NO level in rabbit”, *Molecular and Cellular Biochemistry*, 278, 65-69, 2005.
4. Olmuş, H., Erbaş, S.O., “Olasılıklı Etki Diyagramlarını Kullanarak Kadınlarda Kemik Erimesine Menapozun Etkisinin Araştırılması Üzerine Bir Çalışma”, *Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 18, 3, 2005.

5. Olmuş, H., Erbaş, S.O., “Determining The Conditional Probabilities in Bayesian Networks”, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, Volume 33, 69-76, 2004.
6. Olmuş, H., Erbaş, S.O., “Bayes Ağlarda Koşullu Bağımsızlıkların İncelenmesi Üzerine Bir Çalışma”, *DİE İstatistik Araştırma Dergisi*, 2,1, Ankara, 2003.
7. Erbaş, S.O., Öktem, H., “Türkiye’de İllerin Sağlık Hizmetleri Bakımından İncelenmesi Üzerine Bir Çalışma”, *Akademik Yorum Dergisi*, 1,1, Ankara, 1999.
8. Çelebioğlu, S., Olmuş, H., Örkücü, H.H., Gökpinar, F., "Ankara'nın Başkent Oluşunun 80. yılında Nüfus İstatistikleri Üzerine Bir Çalışma", *Cumhuriyetin 80. yılı Sempozyumu*, Ankara, 2003.
9. Olmuş H., Erbaş O. Semra, “Tıbbi Teşhislerde Etki Diyagramlarının Kullanılması”, *DİE İstatistik Araştırma Sempozyumu*, Ankara, 2002.
10. Olmuş H., Erbaş O. Semra , “Bayes Ağlarda Koşullu Bağımsızlıkların İncelenmesi Üzerine Bir Çalışma”, *İstatistik Günleri 2002 Sempozyum*, Ankara, 2002.