BAZI BULAŞICI HASTALIKLARIN MATEMATİKSEL MODELLERİNİN AĞSIZ YÖNTEMLERLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Ebru YILMAZ

Doktora Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Uygulamalı Matematik

Danışman: Prof. Dr. Yılmaz DERELİ

(İkinci Danışman: Doç. Dr. Bahar KARAMAN)

Eskişehir

Eskişehir Teknik Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Ağustos 2024

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Ebru YILMAZ'ın BAZI BULAŞICI HASTALIKLARIN MATEMATİKSEL MODELLERİNİN AĞSIZ YÖNTEMLERLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ başlıklı çalışması 15/08/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Eskişehir Teknik Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği"nin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik Anabilim dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**Unvan Adı Soyadı**	**İmza**
Üye	: Prof. Dr. Yılmaz DERELİ	
Üye	: Prof. Dr. Dursun IRK	
Üye	: Doç. Dr. Mustafa SALTAN	
Üye	: Doç. Dr. Emrah KARAMAN	
Üye	: Doç. Dr. Özlem ERSOY HEPSON	

Prof. Dr. Semra KURAMA
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

15/08/2024

DANIŞMAN ONAYI

Danışmanlığını yürüttüğüm Doktora öğrencisi Ebru YILMAZ, BAZI BULAŞICI HASTALIKLARIN MATEMATİKSEL MODELLERİNİN AĞSIZ YÖNTEMLERLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ başlıklı tez çalışmasını tamamlamıştır. Hazırlamış olduğu tez tarafımca incelenmiş ve öğrencinin tez savunma sınavına alınması bilimsel ve etik açıdan uygun görülmüştür.

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Yılmaz DERELİ

ÖZET

BAZI BULAŞICI HASTALIKLARIN MATEMATİKSEL MODELLERİNİN AĞSIZ YÖNTEMLERLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Ebru YILMAZ

Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı
Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Ağustos 2024

Danışman: Prof. Dr. Yılmaz DERELİ

(İkinci Danışman: Doç. Dr. Bahar KARAMAN)

Bu tezde verem ve influenza bulaşıcı hastalıklarının matematiksel modellerinin Radyal tabanlı fonksiyonlarla kolokasyon yöntemiyle sayısal çözümleri hesaplanmıştır. Verem hastalığı için kesir mertebeli difüzyon etkili ve etkisiz SIR matematiksel modeli, influenza hastalığı için kesir mertebeli difüzyon etkili ve etkisiz SEIR matematiksel modeli ele alınmıştır. Kesir türev operatörü olarak Caputo türev seçilmiştir. Difüzyon etkisiz SIR matematiksel modelinin Euler ve dördüncü dereceden Runge-Kutta (RK4) ile sayısal sonuçları elde edilmiştir. Difüzyon etkili matematiksel modellerin çözümünde kullanılan Radyal tabanlı fonksiyonlarla kolokasyon yönteminde Gaussian ve Multiquadric taban fonksiyonları kullanılmıştır. Her iki modelde dört farklı kesir türev mertebesi için sayısal çözümler elde edilmiştir. SIR ve SEIR matematiksel modelleri difüzyon etkili ve difüzyon etkisiz olarak araştırılmıştır. Difüzyon etkili modellerde üç farklı konum için hem türev mertebelerinin hem de difüzyon etkisinin hesaplamaları ayrı ayrı yapılmıştır. Türkiye'deki verem hastalığı için elde edilen sayısal değerler, Türkiye'de Verem Savaşı 2021 Raporu'nda yer alan hasta sayıları ile karşılaştırmalı olarak tablo ve grafikler ile verilmiştir. Elde edilen tüm sayısal sonuçlar taban fonksiyonları, türev mertebeleri, difüzyon katsayıları ve konumları açısından karşılaştırılmıştır.

Anahtar Sözcükler: Bulaşıcı Hastalıklar, Matematiksel Modelleme, Difüzyon Etkisi, Kesirli Analiz

ABSTRACT

NUMERICAL SOLUTION OF MATHEMATICAL MODELS OF SOME INFECTIOUS DISEASES WITH MESHLESS METHODS

Ebru YILMAZ

Department of Mathematics
Programme in Applied Mathematics
Eskişehir Technical University, Institute of Graduate Programs, August 2024
Supervisor: Prof. Dr. Yılmaz DERELİ
(Co-Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Bahar KARAMAN)

In this thesis, numerical solutions of mathematical models of tuberculosis and influenza infectious diseases were calculated using the collocation method with radial basis functions. Fractional diffusion effective and ineffective SIR mathematical model for tuberculosis disease, fractional diffusion effective and ineffective SEIR mathematical model for influenza disease are discussed. Caputo derivative was chosen as the fraction derivative operator. Numerical results of the diffusion-ineffective SIR mathematical model were obtained using Euler and fourth-order Runge-Kutta (RK4). In the method discussed, Gaussian and Multiquadric basis functions were used in collocation method with radial basis functions used in solving diffusion-effective mathematical models. Numerical solutions were obtained for four different orders of fraction derivatives in both models. SIR and SEIR mathematical models have been investigated with and without diffusion effect. In diffusion effect models, calculations of both derivative orders and diffusion effects were made separately for three different positions. The numerical values obtained for tuberculosis in Turkey are given in tables and graphs in comparison with the number of patients in the 2021 Report of Tuberculosis War in Turkey. All numerical results obtained were compared in terms of basis functions, derivative orders, diffusion coefficients and positions.

Keywords: Infectious Diseases, Mathematical Modeling, Diffusion Effect, Fractional Analysis

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında bilgi ve tecrübesiyle bana rehberlik eden, yönlendiren, yardım ve anlayışını esirgemeyen değerli danışmanlarım Prof. Dr. Yılmaz DERELİ ve Doç. Dr. Bahar KARAMAN'a, doktora çalışmam boyunca her zaman yanımda olan varlıklarıyla bana güç veren aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ebru YILMAZ

15/08/2024

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Eskişehir Teknik Üniversitesi tarafından kullanılan "bilimsel intihal tespit programı"yla tarandığını ve hiçbir şekilde "intihal içermediğini" beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Ebru YILMAZ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

BAŞLIK SAYFASI I

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI II

DANIŞMAN ONAYI III

ÖZET IV

ABSTRACT V

TEŞEKKÜR VI

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ VII

İÇİNDEKİLER VIII

TABLOLAR DİZİNİ X

ŞEKİLLER DİZİNİ XV

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ XVII

1. GİRİŞ 1

2. TEMEL KAVRAMLAR 10

2.1. Kesirli Analiz 10

2.2. Kesir Mertebeli Türev Operatörleri 11

2.2.1. Grünwald-Letnikow kesir mertebeli türev operatörü 11

2.2.2. Riemann-Liouville kesir mertebeli türev operatörü 11

2.2.3. Caputo kesir mertebeli türev operatörü 12

2.2.4. Yardımcı Teorem 13

2.3. Radyal Tabanlı Fonksiyonlar 13

2.4. Radyal Tabanlı Fonksiyonlarla Kolokasyon (RBFC) Metodu 14

3. BULAŞICI HASTALIKLARIN MATEMATİKSEL MODELLERİ 16

3.1. SIR Matematiksel Model 16

3.2. SEIR Matematiksel Modeli 18

4. VEREM HASTALIĞI KESİR MERTEBELİ SIR MATEMATİKSEL MODELİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ 21

4.1. Kesir Mertebeli SIR Matematiksel Modelinin Caputo Kesir Mertebeli Türev Yaklaşımı ile Sayısal Çözümü 22
4.2. Difüzyon Etkili ve Etkisiz Kesir Mertebeli SIR Matematiksel Modelinin Caputo Kesir Mertebeli Türev Yaklaşımı 28
4.2.1. RBFC metodunun difüzyon etkili ve etkisiz kesir mertebeli SIR matematiksel modeline uygulanması 29
5. İNFLUENZA HASTALIĞININ KESİR MERTEBELİ SEIR MATEMATİKSEL MODELİNİN RBFC METODUYLA SAYISAL ÇÖZÜMÜ 48
5.1. Difüzyon Etkili SEIR Model Caputo Kesir Mertebeli Türev Yaklaşımı 49
5.1.1. RBFC Metodunun difüzyon etkili ve etkisiz SEIR matematiksel modeline uygulanması 50
6. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER 85
KAYNAKÇA 88
ÖZGEÇMİŞ

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa

Tablo 1.1. Temel SIR matematiksel model parametreleri ve tanımları 5
Tablo 2.1. Radyal Tabanlı Fonksiyonlar 14
Tablo 3.1. SIR Matematiksel Modeli Parametreleri 17
Tablo 3.2. SEIR Matematiksel Modeli Parametreleri 19
Tablo 4.1. SIR matematiksel modelinin verem hastalığı için parametreleri ve başlangıç değerleri (Uçakan, 2021) 22
Tablo 4.2. α=1 mertebesinde Euler ve RK4 yöntemiyle elde edilen hasta sayıları ve hatalar 24
Tablo 4.3. α=0,96; 0,92 ve 0,88 kesir mertebelerinde Euler yöntemiyle elde edilen hasta sayıları ve hatalar 24
Tablo 4.4. Euler yöntemiyle elde edilen hasta birey sayılarının hata değerleri 25
Tablo 4.5. α=0,96; 0,92 ve 0,88 kesir mertebelerinde RK4 yöntemiyle elde edilen hasta ve hatalar 25
Tablo 4.6. RK4 yöntemiyle elde edilen hasta birey sayılarının hata değerleri 26
Tablo 4.7. α=1 mertebesi için Euler yöntemi ve G taban fonksiyonuyla elde edilen hasta sayıları ve hatalar 31
Tablo 4.8. α=0,96; 0,92 ve 0,88 kesir mertebeleri için G taban fonksiyonuyla elde edilen hasta sayıları ve hatalar 32
Tablo 4.9. G taban fonksiyonuyla elde edilen hasta birey sayılarının hata değerleri 32
Tablo 4.10. Tam mertebe ve x=0,0 konumu için G ve MQ taban fonksiyonlarıyla elde edilen hasta sayıları ve hatalar 36
Tablo 4.11. Tam mertebe ve x=0,6 konumu için G ve MQ taban fonksiyonlarıyla elde edilen hasta sayıları ve hatalar 36
Tablo 4.12. Tam mertebe ve x=1,0 konumu için G ve MQ taban fonksiyonlarıyla elde edilen hasta sayıları ve hatalar 37
Tablo 4.13. α=0,96 kesir mertebesi ve x=0,0 konumu için G ve MQ taban fonksiyonlarıyla elde edilen hasta sayıları ve hatalar 38
Tablo 4.14. α=0,96 kesir mertebesi ve x=0,6 konumu için G ve MQ taban fonksiyonlarıyla elde edilen hasta sayıları ve hatalar 38
Tablo 4.15. α=0,96 kesir mertebesi ve x=1,0 konumu için G ve MQ taban fonksiyonlarıyla elde edilen hasta sayıları ve hatalar 39

Tablo 4.16. α=0,92 kesir mertebesi ve x=0,0 konumu için G ve MQ taban fonksiyonlarıyla elde edilen hasta sayıları ve hatalar 40
Tablo 4.17. α=0,92 kesir mertebesi ve x=0,6 konumu için G ve MQ taban fonksiyonlarıyla elde edilen hasta sayıları ve hatalar 40
Tablo 4.18. α=0,92 kesir mertebesi ve x=1,0 konumu için G ve MQ taban fonksiyonlarıyla elde edilen hasta sayıları ve hatalar 41
Tablo 4.19. α=0,88 kesir mertebesi ve x=0,0 konumu için G ve MQ taban fonksiyonlarıyla elde edilen hasta sayıları ve hatalar 42
Tablo 4.20. α=0,88 kesir mertebesi ve x=0,6 konumu için G ve MQ taban fonksiyonlarıyla elde edilen hasta sayıları ve hatalar 42
Tablo 4.21. α=0,88 kesir mertebesi ve x=1,0 konumu için G ve MQ taban fonksiyonlarıyla elde edilen hasta sayıları ve hatalar 43
Tablo 5.1. Difüzyon etkili kesir mertebeli SEIR matematiksel modeli parametreleri ve değerleri (Samsuzzoha, 2012)..... 48
Tablo 5.2. G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=1 mertebesi için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,0 konumundaki 1. pik noktalarının değerleri 55
Tablo 5.3. G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=0,98; 0,96 ve 0,94 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,0 konumundaki 1. pik noktalarının değerleri 55
Tablo 5.4. G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=1 mertebesi için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,0 konumundaki 2. pik noktalarının değerleri 55
Tablo 5.5. G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=0,98; 0,96 ve 0,94 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,0 konumundaki 2. pik noktalarının değerleri 56
Tablo 5.6. G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=1 mertebesi için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,6 konumundaki 1. pik noktalarının değerleri 56
Tablo 5.7. G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=0,98; 0,96 ve 0,94 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,6 konumundaki 1. pik noktalarının değerleri 57

Tablo 5.8. G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=1 mertebesi için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,6 konumundaki 2. pik noktalarının değerleri 57
Tablo 5.9. G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=0,98; 0,96 ve 0,94 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,6 konumundaki 2. pik noktalarının değerleri 58
Tablo 5.10. G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=1 mertebesi için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=1,0 konumundaki 1. pik noktalarının değerleri 58
Tablo 5.11. G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=0,98; 0,96 ve 0,94 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=1,0 konumundaki 1. pik noktalarının değerleri 59
Tablo 5.12. G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=1 mertebesi için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=1,0 konumundaki 2. pik noktalarının değerleri 59
Tablo 5.13. G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=0,98; 0,96 ve 0,94 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=1,0 konumundaki 2. pik noktalarının değerleri 59
Tablo 5.14. G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=1 ve 0,98 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,0 konumundaki 1. pik noktalarının değerleri 65
Tablo 5.15. G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=0,9 ve 0,94 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,0 konumundaki 1. pik noktalarının değerleri 66
Tablo 5.16. G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=1 ve 0,98 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,0 konumundaki 2. pik noktalarının değerleri 66
Tablo 5.17. G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=0,96 ve 0,94 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,0 konumundaki 2. pik noktalarının değerleri 66
Tablo 5.18. G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=1 ve 0,98 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,6 konumundaki 1. pik noktalarının değerleri 67

Tablo 5.19. G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=0,96 ve 0,94 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,6 konumundaki 1. pik noktalarının değerleri 67
Tablo 5.20. G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=1 ve 0,98 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,6 konumundaki 2. pik noktalarının değerleri 67
Tablo 5.21. G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=0,96 ve 0,94 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,6 konumundaki 2. pik noktalarının değerleri 68
Tablo 5.22. G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=1 ve 0,98 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=1,0 konumundaki 1. pik noktalarının değerleri 68
Tablo 5.23. G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=0,96 ve 0,94 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=1,0 konumundaki 1. pik noktalarının değerleri 68
Tablo 5.24. G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=1 ve 0,98 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=1,0 konumundaki 2. pik noktalarının değerleri 69
Tablo 5.25. G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=0,96 ve 0,94 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=1,0 konumundaki 2. pik noktalarının değerleri 69
Tablo 5.26. G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=1 ve 0,98 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,0 konumundaki 1. pik noktalarının değerleri 74
Tablo 5.27. G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=0,96 ve 0,94 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,0 konumundaki 1. pik noktalarının değerleri 75
Tablo 5.28. G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=1 ve 0,98 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,0 konumundaki 2. pik noktalarının değerleri 75
Tablo 5.29. G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=0,96 ve 0,94 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,0 konumundaki 2. pik noktalarının değerleri 76

Tablo 5.30. G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=1 ve 0,98 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,6 konumundaki 1. pik noktalarının değerleri 76
Tablo 5.31. G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=0,96 ve 0,94 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,6 konumundaki 1. pik noktalarının değerleri 76
Tablo 5.32. G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=1 ve 0,98 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,6 konumundaki 2. pik noktalarının değerleri 77
Tablo 5.33. G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=0,96 ve 0,94 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,6 konumundaki 2. pik noktalarının değerleri 77
Tablo 5.34. G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=1 ve 0,98 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=1,0 konumundaki 1. pik noktalarının değerleri 77
Tablo 5.35. G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=0,96 ve 0,94 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=1,0 konumundaki 1. pik noktalarının değerleri 78
Tablo 5.36. G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=1 ve 0,98 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=1,0 konumundaki 2. pik noktalarının değerleri 78
Tablo 5.37. G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=0,96 ve 0,94 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=1,0 konumundaki 2. pik noktalarının değerleri 78

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 4.1. Sırasıyla Euler ve RK4 yöntemleriyle elde edilen duyarlı, hasta ve iyileşen birey sayılarının grafikleri 27
Şekil 4.2. Sırasıyla 1; 0,96; 0,92 ve 0,88 kesir mertebeleri için elde edilen duyarlı birey sayılarının grafikleri..... 33
Şekil 4.3. Sırasıyla 1; 0,96, 0,92 ve 0,88 kesir mertebeleri için elde edilen hasta birey sayılarının grafikleri..... 34
Şekil 4.4. Sırasıyla 1; 0,96; 0,92 ve 0,88 kesir mertebeleri için elde edilen iyileşen birey sayılarının grafikleri..... 35
Şekil 4.5. Sırasıyla G ve MQ taban fonksiyonlarıyla 1; 0,96; 0,92 ve 0,88 kesir mertebeleri için elde edilen duyarlı birey sayılarının grafikleri..... 44
Şekil 4.6. Sırasıyla G ve MQ taban fonksiyonlarıyla 1; 0,96; 0,92 ve 0,88 kesir mertebeleri için elde edilen hasta birey sayılarının grafikleri..... 45
Şekil 4.7. Sırasıyla G ve MQ taban fonksiyonlarıyla 1; 0,96; 0,92 ve 0,88 kesir mertebeleri için elde edilen iyileşen birey sayılarının grafikleri 46
Şekil 5.1. Difüzyon etkisiz tam mertebeden SEIR matematiksel modelinin duyarlı birey oranı grafikleri (Samsuzzoha, 2012)..... 52
Şekil 5.2. Difüzyon etkisiz tam mertebeden SEIR matematiksel modelinin temaslı birey oranı grafikleri (Samsuzzoha, 2012)..... 53
Şekil 5.3. Difüzyon etkisiz tam mertebeden SEIR matematiksel modelinin hasta birey oranı grafikleri (Samsuzzoha, 2012)..... 53
Şekil 5.4. Difüzyon etkisiz tam mertebeden SEIR matematiksel modelinin iyileşen birey oranı grafikleri (Samsuzzoha, 2012) 54
Şekil 5.5. Sırasıyla G ve MQ taban fonksiyonları ve $\alpha = 1;\ 0{,}98;\ 0{,}96\ ve\ 0{,}94$ kesir mertebeleri için duyarlı birey oranı grafikleri..... 61
Şekil 5.6. Sırasıyla G ve MQ taban fonksiyonları ve $\alpha = 1;\ 0{,}98;\ 0{,}96\ ve\ 0{,}94$ kesir mertebeleri için temaslı birey oranı grafikleri..... 62
Şekil 5.7. Sırasıyla G ve MQ taban fonksiyonları ve $\alpha = 1;\ 0{,}98;\ 0{,}96\ ve\ 0{,}94$ kesir mertebeleri için hasta birey oranı grafikleri..... 63
Şekil 5.8. Sırasıyla G ve MQ taban fonksiyonları ve $\alpha = 1;\ 0{,}98;\ 0{,}96\ ve\ 0{,}94$ kesir mertebeleri için iyileşen birey oranı grafikleri..... 64

Şekil 5.9. Sırasıyla G ve MQ taban fonksiyonları ve $\alpha = 1;\ 0{,}98;\ 0{,}96\ ve\ 0{,}94$ kesir mertebeleri için duyarlı birey oranı grafikleri 70
Şekil 5.10. Sırasıyla G ve MQ taban fonksiyonları ve $\alpha = 1;\ 0{,}98;\ 0{,}96\ ve\ 0{,}94$ kesir mertebeleri için temaslı birey oranı grafikleri 71
Şekil 5.11. Sırasıyla G ve MQ taban fonksiyonları ve $\alpha = 1;\ 0{,}98;\ 0{,}96\ ve\ 0{,}94$ kesir mertebeleri için hasta birey oranı grafikleri 72
Şekil 5.12. Sırasıyla G ve MQ taban fonksiyonları ve $\alpha = 1;\ 0{,}98;\ 0{,}96\ ve\ 0{,}94$ kesir mertebeleri için iyileşen birey oranı grafikleri 73
Şekil 5.13. Sırasıyla G ve MQ taban fonksiyonları ve $\alpha = 1;\ 0{,}98;\ 0{,}96\ ve\ 0{,}94$ kesir mertebeleri için duyarlı birey oranı grafikleri 80
Şekil 5.14. Sırasıyla G ve MQ taban fonksiyonları ve $\alpha = 1;\ 0{,}98;\ 0{,}96\ ve\ 0{,}94$ kesir mertebeleri için temaslı birey oranı grafikleri 81
Şekil 5.15. Sırasıyla G ve MQ taban fonksiyonları ve $\alpha = 1;\ 0{,}98;\ 0{,}96\ ve\ 0{,}94$ kesir mertebeleri için hasta birey oranı grafikleri 82
Şekil 5.16. Sırasıyla G ve MQ taban fonksiyonları ve $\alpha = 1;\ 0{,}98;\ 0{,}96\ ve\ 0{,}94$ kesir mertebeleri için iyileşen birey oranı grafikleri 83

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

RK4	:	Runge-Kutta 4
G	:	Gaussian
MQ	:	Multiquadric
VSR	:	Türkiye'de Verem Savaşı 2021 Raporu hasta verileri
SB	:	Sağlık Bakanlığı hasta verileri
RBFC	:	Radyal Tabanlı Fonksiyonlarla Kolokasyon
RBF	:	Radyal Tabanlı Fonksiyon
SIR	:	Susceptible-Infectious-Removed
SEIR	:	Susceptible-Exposed-Infectious-Removed
Δt	:	Zaman adımı uzunluğu
Δx	:	Konum adımı uzunluğu

1. GİRİŞ

İnsanoğlu yüzyıllardır bulaşıcı hastalıklarla mücadele etmektedir. Bulaşıcı hastalıkların yaygınlaşması ve birçok kişiye bulaşması salgın olarak ifade edilir. Salgın anlamına gelen epidemi kelimesi Yunanca epi (üzerine) ve dēmos (insanlar) kelimelerinden meydana gelmiştir. Epidemiyoloji Sözlüğü'nde yer alan epidemic kelimesi de bir toplumda ya da bölgede bir hastalık vakasının, sağlıkla ilgili belirli bir davranışın veya sağlıkla ilgili diğer olayların normal beklentinin açıkça üzerinde ortaya çıkması olarak verilmiştir (Porta, 2014).

Bulaşıcı hastalıklar, hastalığa neden olan mikroorganizmaların bulaşması yoluyla ortaya çıkmaktadır. Mikroorganizmalar, havada veya suda olduğu gibi hemen her yerde bulunabilen küçük canlılardır. Bu mikroorganizmaların varlığı ilk mikroskobun yardımıyla Van Leeuwenhoek tarafından kanıtlanmıştır (Brauer, 2017).

Bulaşıcı hastalıklar hem doğrudan hem de dolaylı temas yoluyla yayılır. Doğrudan temas yoluyla bulaşma, hasta olan bir birey veya hayvan ile hasta olmayan birey arasında temas olduğunda gerçekleşir. Doğrudan temasa; fiziksel temas, öksürme, kan nakli ve cinsel temas sonucu vücut sıvılarının değişimi örnek verilebilir. Hasta olan birey ile bu hastalığın bulaştığı birey arasında doğrudan temas olmadan dolaylı temas yoluyla bulaşma gerçekleşebilir. Dolaylı temas yoluyla bulaşmaya; mikroorganizmaların hava yoluyla yayılması, cansız nesnelerin üzerinde bulunan mikroorganizmaların bu nesnelere temas eden canlılara bulaşması örnek verilebilir.

İnsanların hayatında oldukça önemli değişimlere neden olan bulaşıcı hastalıklar görülme sıklığına göre endemik ve pandemik olarak sınıflandırılır. Endemik bir hastalık, bir coğrafi bölgede veya nüfus grubunda sürekli ortaya çıkan bulaşıcı hastalıktır. Pandemik bir hastalık, çok geniş bir alanda meydana gelen, uluslararası sınırları aşan ve genellikle çok sayıda insanı etkileyen bir salgındır. Bir hastalığın pandemi olması için; patojenin insanlara bulaşması, insanlarda hastalığa neden olması ve insandan insana kolayca geçebilmesi gerekmektedir (Porta, 2014). Bu çalışmada araştırılan; Verem hastalığı Türkiye için endemik hastalığa, influenza (H1N1) ise 1918-1919 yıllarında yaşanan İspanyol gribi pandemiye örnek verilebilir (Killingray and Phillips, 2003). Bu örneklerin yanı sıra 2019 yılının sonlarına doğru Çin merkezli olarak ortaya çıkarak tüm dünyayı etkileyen yeni bir koronavirüs tipi olan COVID-19 (SARS-CoV-2) hastalığı da yakın zamanda yaşanmış bir pandemi örneğidir (Işık, 2021).

Endemik veya pandemik olmasına bakılmaksızın bulaşıcı hastalıkların ortak özellikleri vardır. Bu özellikler; hasta olan bireyin hastalığı temas hâlinde olduğu sağlıklı bireylere kısa sürede bulaştırması; hastalıkların hızlı, kısa süreli, şiddetli seyretmeleri ve iyileşen bireylerin hastalığa karşı antikor üreterek bağışıklık geliştirmesidir (Ataç ve Uçar, 2006).

Bilinen insanlık tarihinin başlangıcından bu yana, toplumlara yayılan ve birçok ölüme neden olan, toplumlar bağışıklık kazandıkça şiddeti azalan bulaşıcı ve salgın hastalıklar olmuştur. Örneğin; Kara Ölüm olarak adlandırılan hastalığın, 1346'dan itibaren çeşitli dalgalar halinde Asya'dan Avrupa'ya yayıldığı ve 1346 ile 1350 yılları arasında Avrupa nüfusunun üçte birinin ölümüne neden olduğu tahmin edilmektedir. Bu hastalık, Avrupa'nın çeşitli yerlerinde 300 yıldan fazla bir süre boyunca tekrarlanmış ve daha sonra yavaş yavaş Avrupa'dan çekilmiştir (Brauer, 2017). Orta çağda bulaşıcı hastalıklar, dünya tarihini şekillendirmenin yanı sıra dünya nüfusunun azalmasına neden olmuştur (Akpınar, 2012). Geçmişten bu yana hastalıklar; imparatorlukları çökertmiş, orduları kırmış ve insanların yaşam biçimlerinde değişikliklere yol açmıştır. Hâlâ bu değişimler devam etmektedir (Parıldar, 2020).

Bulaşıcı hastalıkların insanlar arasında yayılmasını önlemek ve azaltmak halk sağlığının temel bir işlevidir. Bu işleve hizmet eden epidemiyoloji, genellikle insan popülasyonlarındaki hastalık riskinin dağılımını ve belirleyicilerini inceleyen bir bilim dalı olarak adlandırılır (Kretzschmar and Wallinga, 2010). Epidemiyologların amacı ise, önce bir hastalığın nedenlerini anlamak, farklı olası durumlarını ele alarak hastalığı kontrol etmenin yollarını geliştirmek ve hastalıkla ilgili tahminlerde bulunmaktır. Bu süreçlerin ilk adımı, gözlemlenen verilerin elde edilmesi ve analiz edilmesidir. Bulaşıcı hastalık verilerinin incelenmesi John Graunt'un 1662 tarihli "Ölüm Bildirileri Üzerine Yapılan Doğal ve Siyasi Gözlemler" adlı kitabıyla başlamıştır. Ölüm Bildirgeleri, Londra mahallelerindeki ölüm sayılarının ve ölüm nedenlerinin haftalık kayıtlarıdır. 1592'den başlayarak 1603'ten itibaren sürekli olarak tutulan kayıtlar, Graunt'un kullandığı verileri sağlamıştır. Graunt çeşitli ölüm nedenlerini analiz etmiş ve çeşitli hastalıklardan ölmenin karşılaştırmalı risklerini tahmin etmeye çalışmıştır (Brauer, 2017).

Matematiksel modelleme; gerçek dünyadaki bir olayı, olguyu, olaylar arasındaki ilişkileri matematiksel olarak ifade ederek, bu olaylar ve olgular içerisinde matematiksel örüntüler ortaya çıkarma sürecidir (Verschaffel vd., 2002). Matematiksel model, tipik

olarak bir denklem sistemi biçiminde, durumun matematiksel bir açıklamasıdır. Sistemler çözüm elde etmek için çözülür ve daha sonra deneysel sonuçlarla karşılaştırılır. Bu tanımlamalardan yola çıkılarak matematiksel modelleme; epidemiyolojide bulaşıcı bir hastalığın tespit edilme, bulaşma ve bulaşmanın önlenmesi, kontrol altına alınması süreçlerine yardımcı olur.

Bir bulaşıcı hastalığın matematiksel modellemesi için bu hastalığın yayılma şeklinin anlaşılması gerekir. Hastalıkla ilgili tahminlerde bulunmak ve hastalığın yayılmasını önlemek için hastalığın davranışı doğru bir şekilde tanımlanmalıdır. Dolayısıyla bulaşıcı bir hastalığı incelemek için birçok faktör göz önünde bulundurulmalıdır. Bu faktörlerden bazıları; yaş, cinsiyet, genetik ve bağışıklık durumu gibi popülasyonla ilgili ve hastalığın türü şeklinde daha çok hastalığın kendisiyle ilgilidir. Her bir faktör bir hastalığın hızını ve yayılmasını farklı şekilde etkileyebilir. Tüm faktörleri modele dâhil etmek zordur. Çünkü tüm faktörler bilinmeyebilir, bilinen faktörler de modeli daha karmaşık ve çözümü daha zor hâle getirebilir. Bu nedenle bulaşıcı hastalıkların matematiksel modellemesi basitleştirici varsayımlar gerektirir. Diğer taraftan model çok basit olursa, hipotezleri test etmek için uygun bir ortam sağlamak mümkün olmayabilir.

Bulaşıcı hastalıkların dinamiklerini popülasyon düzeyinde incelemek için matematiksel modeller kullanılmıştır. Çoğu model, basitlikleri ve geçmişte mevcut olan sınırlı hesaplama araçları nedeniyle adi diferansiyel denklem biçimindedir (Brauer vd., 2008).

Bulaşıcı hastalıkların matematiksel modellemesinde çoğu ayrıntıyı atlayan ve yalnızca genel niteliksel davranışı vurgulamak için tasarlanan basit modeller ile kısa vadeli niceliksel tahminler de dâhil olmak üzere belirli durumlar için tasarlanan ayrıntılı modeller arasında her zaman bir denge vardır. Detaylı modellerin analitik olarak çözülmesi genellikle zor veya imkânsızdır.

Matematiksel epidemiyolojide bilinen ilk matematiksel model, doktor olarak eğitim almış ünlü bir matematikçi ailesinin (üç kuşaktan sekiz kişiye yayılmış) bir üyesi olan Daniel Bernoulli tarafından 1760 yılında çiçek hastalığı için aşı uygulamasının işe yaradığını ispatlamak için oluşturulmuştur. Modern matematiksel epidemiyolojide kompartıman modellerine dayalı tüm yaklaşımın temelleri 1900-1935 yılları arasında Ross, Hamer, McKendrick ve W.O. Kermack gibi doktorlar tarafından atılmıştır. Özellikle Ross'un, sivrisinekler ve insanlar arasında sıtmanın bulaşma dinamiklerini

ortaya koyduğu için ikinci Nobel Tıp Ödülü'ne layık görülen çalışmaları öğretici bir örnektir (Brauer vd., 2008).

Günümüzde bulaşıcı ve salgın hastalıkların yayılımının tahmininde kullanılan temel kompartıman modelleri Kermack and McKendrick (1927, 1932 ve 1933) tarafından yayımlanan üç makale dizisinde yer almaktadır.

Hamer ve Ross tarafından geliştirilen kavramlar; Kermack, McKendrick ve Soper tarafından genişletilmiştir. Kermack ve McKendrick, salgının neden tüm duyarlı kişilere bulaşmadan sona erdiğini açıklamışlardır. Ayrıca eşik teorisini oluşturarak, bir popülasyondaki hasta bireyin sayısının, duyarlı birey sayısı veya yoğunluğunun belirli bir kritik değerin üzerinde olmadığı sürece hastalığın bir salgına yol açmayacağını açıklamışlardır. Soper, sıklıkla gözlemlenen salgınların periyodikliğinden sorumlu olan nedenleri araştırmıştır. Bu modellerin tümü daha sonra Ross, Kermack, McKendrick ve Soper tarafından kitle eylemi ilkesine dayandırılmıştır (Hethcote, 1989).

Kretzschmar vd. (2010) çalışmasında; 19. yüzyılın ortalarından itibaren bulaşıcı hastalık epidemiyolojisinde, bulaşıcı hastalıkları incelemek için epidemiyolojinin temellerinin uygulandığı, hastalığın ortaya çıkışı, yayılması ve kalıcılığı ile ilgili sorular üzerine çalışıldığı, dünyanın farklı bölgelerinin epidemiyolojik eğilimlerinin karakterize edildiği, bulaşıcı hastalıkların yaygınlığının ve görülme sıklığının araştırıldığı ifade edilmiştir. Bulaşıcı hastalık epidemiyolojisinde, bulaşıcı ve salgın hastalık matematiksel modellerinin önemi şu şekilde özetlenebilir:

- Hastalığın doğal seyrinin daha iyi anlaşılmasını sağlar.
- Bulaşma dinamiklerini anlamak için önemli olan parametreleri hesaplamak ve tahmin etmek için önemli bir rol oynar.
- Belirli bir hastalığın ilerlemesi ve bulaşmasının ana özelliklerini yakalayan bir model formüle edildikten sonra, hastalık kontrolüne yönelik farklı stratejilerin etkinliğini tahmin etmek için kullanılır.
- Eşik özellikleri hakkında bilgi verir.
- Kararlı durumların (endemik veya hastalıksız durumlar) tam sayısını hesaplar ve bunların kararlılığını analiz eder. Ayrıca popülasyon dinamiklerinde niteliksel bir değişimin olduğu durumlarda çatallanma değerlerini de belirler.
- Salgınların simülasyonunu oluşturarak, farklı hastalıkları önleme ve hastalıkların kontrol stratejilerinin etkinliğini bulmak için kullanılır.

- Herhangi bir bulaşıcı hastalık için mevcut kontrol ve takip sisteminin doğruluğu hakkında bilgi sağlar ve daha etkili kontrol yöntemleri önerir.
- Küresel ölçekte bulaşıcı hastalıkların bulaşma dinamikleriyle çevresel olaylar arasında bağlantı kurar (Samsuzzoha, 2012).

Kermack and McKendrick (1927) o dönemde genelleştirilmiş bir model olarak kabul edilen matematiksel modeli sunmuşlardır. Bu modelde, toplam nüfusun sabit olduğu ve üç sınıfa ayrıldığı varsayılmaktadır. Bu sınıflar; duyarlı bireyler, hasta bireyler ve iyileşen bireyler şeklindedir. Duyarlı bireyler sınıfı; bulaşıcı hastalığa karşı bağışıklığı olmayan bireyleri içerir, duyarlı sınıfın herhangi bir üyesi hastalığa yakalanabilir. Hasta bireyler sınıfı, hâlihazırda hasta olan ve hastalığı temas ettikleri duyarlı bireylere bulaştırabilen bireyleri içerir. İyileşen bireyler sınıfı, hasta olduktan sonra normal sağlık durumuna dönmüş ve kalıcı bağışıklık kazanmış bireyleri içerir. Bu model; *Duyarlı bireyler* (*Susceptible), Hasta bireyler (Infectious) ve İyileşen bireyler (Removed /Recovered)* kelimelerinin baş harflerinin birleştirilmesiyle SIR model olarak adlandırılmaktadır. Bu modelde aşağıdaki varsayımlar kabul edilmektedir:

- Toplam nüfus sabittir.
- Hastalık yenidir, bu nedenle aşı mevcut değildir.
- Bir bireyin duyarlı gruptan ayrılabilmesinin yolu hasta olmaktır.
- Bir bireyin hasta gruptan ayrılabilmesinin yolu hastalıktan kurtulmaktır.
- İyileşme oranı ve bulaşma oranı tüm bireyler için aynıdır ve pozitiftir.
- Homojen karışım vardır, yani popülasyondaki bireyler rastgele temas eder ve çoğunlukla daha küçük bir alt grupta karışmazlar.
- İyileşen herhangi bir birey kalıcı bağışıklığa sahiptir (Elkadry, 2013).

Bu varsayımlar göz önüne alınarak; Kermack ve McKendrick modelinde yer alan parametrelerle tanımlar Tablo 1.1'de, temel SIR matematiksel modeli (1.1) denkleminde verilmiştir.

Tablo 1.1. *Temel SIR matematiksel model parametreleri ve tanımları*

Parametreler	Tanımlar
$S(t)$	t zamanındaki duyarlı bireylerin sayısı
$I(t)$	t zamanındaki hasta bireylerin sayısı
$R(t)$	t zamanındaki iyileşen bireylerin sayısı
N	Toplam nüfus
β	Bulaşma oranı
r	İyileşme oranı
t	Zaman

Tablo 1.1'deki parametrelere bağlı yazılan SIR matematiksel modeli;

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \left(-\frac{\beta}{N}\right) S(t)I(t) \\ \frac{dI}{dt} &= \left(\frac{\beta}{N}\right) S(t)I(t) - rI(t) \\ \frac{dR}{dt} &= rI(t)\end{aligned} \tag{1.1}$$

ve başlangıç koşulları,

$$\begin{aligned}S(0) &= S_0 > 0 \\ I(0) &= I_0 > 0 \\ R(0) &= 0\end{aligned} \tag{1.2}$$

şeklinde ele alınmıştır.

Bu temel model, hızlı bir şekilde birçok kişiyi hasta eden ve ardından azalan bir salgını temsil etmektedir. Bu nedenle, duyarlı bireyler sınıfı olan $S(t)$'nin, doğumlardan gelen yeni kişileri veya hastalığa karşı bağışıklıklarını kaybeden iyileşmiş bireyleri içermediğini varsaymaktadır. $\beta S(t)I(t)$ terimi, yeni hastalıkların görülme sıklığı veya oranıdır. Kentsel ortamlarda hastalığın yayılması için iyi bir model olarak kabul edilen çift doğrusal bir orandır (Elkadry, 2013).

Denklem (1.1)'de verilen temel SIR matematiksel modeli yaş, cinsiyet, mekân ya da konum gibi diğer faktörleri dikkate almayan basit bir modeldir. Ancak çeşitli salgın türlerini tanımlayan diğer genişletilmiş modellerin geliştirilmesine kapı açmıştır.

Son yıllarda hasta bireylerin genellikle hafif belirtilere sahip oldukları veya hiç belirti göstermedikleri fark edilmiştir. Böylece hasta bireyler fark edilmeden uzak mesafeler boyunca seyahat edebilmektedir. Dolayısıyla hastalığın bulaşması ve yayılması sadece bireyden bireye değil, geniş mesafeler boyunca gerçekleşmektedir (Skwara vd., 2012).

Doğumun, ölümün ihmal edildiği, kapalı ve sabit bir nüfus varsayımı ile bir salgında; bireyler, duyarlı birey sınıfından hasta birey sınıfına ve ardından da iyileşen birey sınıfına geçerler. Bu sınıftan sonra bir daha salgında yer almazlar. Bu matematiksel modellemede nüfusun homojen olarak karıştığı varsayılarak mekânsal (konumsal) yapı hesaba katılmamaktadır. Ancak gerçek salgınlara ilişkin veriler hastalıkların kıtalar boyunca dalgalar halinde yayıldığını gösterdiği için homojen bir nüfus varsayımı gerçekçi değildir (Britton, 2003). Nüfusun homojen olması, bir yerdeki

bireyler ile diğer yerdeki bireyler arasında hastalığın bulaşması ile ilgili hiçbir fark olmadığı anlamına gelmektedir. Gerçekçi olmayan bu durum için hastalığın bazı bölgelerde diğerlerine göre daha hızlı yayıldığını ve değişkenlerin zamana olduğu kadar mekâna da bağlı olduğunu kabul etmek gerekmektedir (Jones vd., 2009). Dolayısıyla hastalıkların yayılmasında mekân etkisini de tanımlamak için matematiksel modellere, reaksiyon difüzyon denklemlerine dayanan bir yaklaşım uygulanmaktadır (Brauer vd., 2008).

Bir bulaşıcı hastalığın mekânsal yayılımı problemine difüzyon yaklaşımını uygulamak için kısmi diferansiyel denklemlerden yararlanılır. Webb (1981) çalışmasında bulaşıcı hastalıklar için difüzyon etkili matematiksel model oluştururken yalnızca bir uzay değişkeninin dâhil olduğunu varsayarak, tek uzay değişkeni olarak x'i almıştır. Bu modelde, Kermack-McKendrick modelinin S, I ve R kompartımanları, t zamanında ve x konumunda sırasıyla duyarlı, hasta ve iyileşen bireylerin dağılımlarını veren fonksiyonlardır.

Bu çalışmada da tek uzay değişkenine bağlı olarak oluşturulan kesir mertebeli difüzyon etkili SIR ve SEIR matematiksel modelleri ele alınmıştır. Bulaşıcı hastalıklarda mekân etkisi göz önünde bulundurularak, adi diferansiyel denklemlerden oluşan matematiksel modellerden daha yakın ve daha gerçekçi sonuçların elde edilmesi amaçlanmıştır. Aynı sebeple, son yıllarda kesirli analiz alanında yapılan çalışmalar göz önünde bulundurularak tam sayı mertebeli kısmi diferansiyel denklemler yerine kesir mertebeli kısmi diferansiyel denklemler tercih edilmiştir.

Günümüzde gerçek dünya problemlerinin modellenmesinde kesir mertebeli diferansiyel denklemlerin kullanımına yönelik ilgi artmıştır. Tam sayı mertebeli diferansiyel denklemlerin yerel olması, kesir mertebeli diferansiyel denklemlerin yerel olmaması ve tam sayı mertebeli diferansiyel denklemlerden daha büyük bellek etkilerine sahip olması artan ilginin nedenlerindendir. Birçok durumda matematiksel modelin gelecek durumu sadece mevcut duruma değil, aynı zamanda daha geçmişe de bağlıdır (Podlubny, 1999). Tam sayı mertebeli diferansiyel denklemlerin bu tür kısıtlamalarının üstesinden gelmek için mevcut çalışmalarda çok sayıda kesir mertebeli türev operatörü vardır. Kesir türev operatörlerinin uygulama alanlarından biri olan epidemik matematiksel modelleri, günümüzün en ilgi çekici araştırma alanlarındandır. Matematiksel modellemeden yararlanılarak her salgının bulaşma dinamikleri ve hastalığın diğer bireyleri nasıl etkilediği anlaşılmaktadır (Ullah vd., 2021). Tam sayı

mertebeli diferansiyel denklemlerin kısıtlamalarından dolayı, bu çalışmada araştırılan verem ve influenza bulaşıcı hastalıkları için caputo kesir türev yaklaşımının uygulandığı kesir mertebeli difüzyon etkili SIR ve SEIR matematiksel modelleri ele alınmıştır.

İnsanlık tarihi kadar eski olan verem hastalığı, tüberküloz ve ince hastalık olarak da bilinmektedir. Eski Mısır mumyaları incelenirken verem hastalığına neden olan bakteriye benzer bakteri bulunmuştur. MÖ. 5. yüzyılda yazılmış Hipokrat'a ait bir belgede veremin çok sayıda ölüme neden olduğu ifade edilmiştir. Aristo, veremin bulaşıcı olduğunu söylemiştir (Parıldar ve Dikici, 2020). Ancak veremin uzun yıllar genetik geçişli bir hastalık olduğu düşünülmüştür. 16. yüzyılın ortalarında veremin bulaşıcı olduğu görüşü ortaya çıkmıştır. Bu görüşten dolayı hastaların toplumdan izolasyonu başlamıştır. 1843 yılında insandan alınan kazeöz materyalin tavşanlara enjeksiyonu ile veremin bulaşıcı olduğu gösterilmiştir. Robert Koch 1882 yılında tüberküloz basilini (Mycobacterium tuberculosis) bulduğu çalışmasıyla 1905 yılında Nobel Tıp Ödülü'nü kazanmıştır. Flügge, 1897 yılında veremin damlacıklar yoluyla bulaştığını ifade etmiştir. Hasta bir bireyin konuşması, öksürmesi ve hapşırması gibi solunum hareketleri ile basil yüklü damlacıklar havaya dağılır. Havaya dağılan bu damlacıklar, buharlaşarak daha küçük parçacıklar hâline gelir. Bu parçacıkların olduğu ortamdaki sağlıklı bireylerin, solunum yoluyla parçacıkları alması ile hastalık bulaşır (Hacıevliyagil, 2003). Bulaşıcı olan bu hastalığa yakalanan insan sayısı günümüzde azalmış olmasına rağmen, dünyada yılda 1 milyon 400 bin kişi veremden ölmektedir. Verem, ölüme en çok neden olan hastalıklar sıralamasında ilk 10'a girmektedir (Parıldar ve Dikici, 2020). Dolayısıyla veremin, matematiksel modellerle analiz edilmesi ve bu analizlerden elde edilen verilere göre önlemler alınması, hastalığa yakalanan insan sayısının azalmasına yardımcı olabilir. Literatürde, Türkiye'deki verem hastalığının matematiksel modellemesi ile ilgili Ergen vd. (2015), Çilli ve Ergen (2019) ve Uçakan (2021) çalışmaları bulunmaktadır. Uçakan'ın (2021) çalışmasında incelenen adi diferansiyel denklemlerden oluşan üç kompartımanlı SIR matematiksel modeli; bu çalışmada kesir mertebeli ve kesir mertebeli difüzyon etkili modeller olarak iki farklı biçimde ele alınmıştır.

İnfluenza, RNA virüslerinin neden olduğu, yaygın olarak grip olarak bilinen bir solunum yolu enfeksiyonudur. Virüsler, öksüren ve hapşıran hasta bir bireyin solunum salgılarının temasıyla yayılır. Hasta bireylerin hastalığı bulaştırma dönemleri; belirtilerin başlamasından 1-2 gün önce başlar ve belirtilerin başlamasından 3-10 gün

sonraya kadar devam eder. Bazı kişilerde, özellikle çocuklarda ve bağışıklık sistemi zayıf olan kişilerde bu süre daha uzun olabilir. İnfluenza yılın herhangi bir zamanında ortaya çıkabilir, ancak hızlı yayılma için en uygun koşullar kış mevsiminde oluşmaktadır (Kretzschmar vd., 2007). Kolay bulaşan ve yayılan bir hastalık olan influenzanın matematiksel modellerle yapılan analizi; hastalığın seyrini, ne kadar insanın etkilenebileceğini ve toplumun bağışıklık kazanma süresini tahmin etmeyi sağlamaktadır. Literatürde Massad vd. (2007) çalışmasında, 1918 yılında São Paulo şehrinde yaşanan influenza salgını araştırılmış ve dört kompartımanlı adi diferansiyel denklemlerden oluşan SEIR matematiksel modeli ele alınmıştır. Aynı matematiksel model, Samsuzzoha (2012) çalışmasında difüzyon etkili model olarak analiz edilmiştir.

Bu çalışmada Türkiye'deki verem hastalığı için; kesir mertebeli SIR matematiksel modelinin Euler ve RK4 yöntemleriyle, difüzyon etkili SIR matematiksel modelinin ağsız yöntemlerle sayısal çözümleri araştırılmıştır. İnfluenza hastalığı için kesir mertebeli difüzyon etkili SEIR matematiksel modelinin ağsız yöntemlerle sayısal çözümleri araştırılmıştır. Tez yedi bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde Temel kavramlar başlığı altında Kesirli Analiz ile ilgili bilgiler verilerek Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville ve Caputo kesir mertebeli türev operatörleri tanıtılmıştır. Devamında Radyal tabanlı fonksiyonlar ve RBFC metodu verilmiştir. Üçüncü bölümde, bulaşıcı hastalıkların SIR ve SEIR matematiksel modelleri hakkında bilgi verilmiştir. Dördüncü ve beşinci bölümlerde ise sırasıyla SIR ve SEIR matematiksel modellerinin RBFC metodu ile sayısal çözümleri elde edilmiştir. Matematiksel modellerde sadece zamana göre türev Caputo türev yaklaşımıyla ele alınmıştır. SIR ve SEIR matematiksel modellerinin literatürde analitik çözümlerinin olmaması nedeniyle belirli bir zaman ve konum adımı için RBFC metodu ile yaklaşık çözümleri bulunmuştur. Bu çözümler difüzyon etkisiz ve difüzyon etkili olmak üzere iki farklı durum olarak araştırılmıştır. Elde edilen SIR matematiksel modelinin verileri Türkiye'de Verem Savaşı 2021 Raporu verileri ile karşılaştırılmıştır. SEIR matematiksel modelinin verileri ise ve Samsuzzoha'nın (2012) çalışmasındaki verilerle karşılaştırılmıştır. İki matematiksel modelin her bir durumu için elde edilen sayısal veriler tablo ve grafiklerle gösterilmiştir.

Bu çalışmada yapılan tüm sayısal hesaplamalar için MATLAB programı kullanılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Kesirli Analiz

Kesirli analizin kökeni, anlamın genişletilmesi sorusuna dayanmaktadır. Anlamın genişletilmesi sorusu; mertebesi n olan $\frac{d^n y}{dx^n}$ türevinde, n sayısının kesirli, kompleks ya da irrasyonel herhangi bir sayı olup olmadığıdır. $\frac{d^n y}{dx^n}$ gösterimini bulan Leibnitz'e, L'Hospital "Eğer n $1/2$ ise ne olur?" sorusunu sorarak n'in kesir olma ihtimalini sorgulamıştır. 1695 yılında Leibnitz, "Bu bir paradoksa yol açacak." cevabına ek olarak "Bu bariz paradokstan bir gün yararlı sonuçlar çıkarılacaktır." demiştir (Ross, 1975).

Keyfi mertebeden bir türevden ilk kez 1819 yılında Fransız matematikçi Sylvestre François Lacroix tarafından bahsedilmiştir. Lacroix, diferansiyel ve integral hesap üzerine 700 sayfalık bir metin yayınlamış ve bu konuya iki sayfadan az yer ayırmıştır. Sonraki yıllarda Euler ve Fourier keyfi mertebeli türevlerden bahsetmişler ancak hiçbir uygulama veya örnek vermemişlerdir (Ross, 1975). Dolayısıyla ilk uygulamayı yapan 1823 yılında Niels Henrik Abel'dir. Abel, bir integral denklemin çözümünde kesirli hesabı uygulamıştır (Miller and Ross, 1993). Abel'in bu çalışmasından sonra Liouville 1832'de üç çalışma ve 1855'e kadar birkaç tane daha çalışma yayımlamıştır.

1835 ve 1850 yılları arasında kesirli türevin iki tanımı üzerine odaklanan bir tartışmada; George Peacock, Lacroix'in integral mertebesi durumunun genelleştirilmesini tercih ederken, diğer matematikçiler Liouville'in tanımını tercih etmişlerdir. Augustus De Morgan iki tanımın da daha genel bir sistemin parçaları olduğunu kanıtlamıştır. 1850 yılında William Center, kesirli türevin iki tanımı arasındaki uyuşmazlığın bir sabitin kesirli türevine odaklandığını gözlemlemiştir. Peacock-Lacroix tanımına göre bir sabitin kesirli türevi sıfırdan farklı bir sonuç verirken, Liouville'in tanımına göre bir sabitin kesirli türevi sıfıra eşittir. Daha sonra sırasıyla Liouville ile Riemann kesirli integral çalışmaları yapmışlar ve tanımlarını birleştirmişlerdir (Ross, 1975). Bu çalışmada ele alınan Caputo kesir türev tanımı ise Caputo tarafından 1967 yılında yayımlanan çalışmada yer almaktadır (Caputo, 1967).

Kesirli analiz konusunda ilk kitap Oldham ve Spainer tarafından 1974 yılında yayımlanmıştır. Bu kitabın ardından Miller and Ross (1993), Podlubny (1999) ve Kilbas vd. (2006) tarafından yayımlanan kitaplar gibi bu alanda referans gösterilen kitaplar yayımlanmaya devam etmektedir. Bu kitaplarda kesir mertebeli türevler için Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo gibi farklı tanımlar bulunmaktadır. Farklı türev

tanımlarının olması, problemin en iyi çözümünü elde etmek için en uygun kesir mertebeli türevin seçilebilmesine imkân sağlamaktadır. Caputo kesir mertebeli türevde, diferansiyel denklemler için tanımlanan başlangıç koşulları ile tam sayı mertebeli diferansiyel denklemler için tanımlanan başlangıç koşulları aynıdır. Bu nedenle, kesirli diferansiyel denklemlerin analitik ve nümerik çözümlerinde Caputo kesir mertebeli türev daha çok tercih edilmektedir. Bu çalışmada Caputo kesir mertebeli türevin, ele alınan problemlerin nümerik çözümlerinde daha iyi sonuç vereceği düşünülerek matematiksel modellere kesir mertebeli türev yaklaşımı uygulanmıştır.

Bazı kesir mertebeli türev operatörlerinin tanımları aşağıdaki şekildedir.

2.2. Kesir Mertebeli Türev Operatörleri

2.2.1. Grünwald-Letnikow kesir mertebeli türev operatörü

Tanım: f sürekli bir fonksiyon; $m \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(t)$, $(n = 1, 2, \dots, m+1)$ türevleri var ve $[a,t] \subset \mathbb{R}$ aralığında sürekli olsun. $p > 0 \; ve \; m < p < m+1$ olmak üzere f fonksiyonunun p. mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli türevi,

$$ {}_aD_t^p f(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(n)}(a)(t-a)^{-p+n}}{\Gamma(-p+n+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \tag{2.1} $$

şeklinde tanımlanmaktadır (Podlubny, 1999).

2.2.2. Riemann-Liouville kesir mertebeli türev operatörü

Tanım: Her sonlu $[a,t] \subset \mathbb{R}$ aralığında f sürekli ve integrallenebilir bir fonksiyon olsun. $n \in \mathbb{N}^+$, $p > 0$ ve $n-1 \leq p < n$ olmak üzere f fonksiyonunun p. mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi

$$ {}_aD_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(v)dv}{(t-v)^{p-n+1}} \tag{2.2} $$

şeklinde tanımlanmaktadır (Podlubny, 1999).

2.2.3. Caputo kesir mertebeli türev operatörü

Tanım: $f, [a,t] \subset \mathbb{R}$ aralığında sürekli ve $n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere f, n defa türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $p, a, t \in \mathbb{R}, p > 0 \; ve \; t > a$ için f fonksiyonunun p. mertebeden Caputo kesir mertebeli türevi

$$ {}_a^C D_t^p f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(n-p)} \displaystyle\int_a^t \frac{f^{(n)}(v)dv}{(t-v)^{p-n+1}} & , \quad n-1 < p < n, n \in \mathrm{N} \\ \dfrac{d^n f(t)}{dt^n} & , \qquad p = n \in \mathrm{N} \end{cases} \tag{2.3} $$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Caputo kesir mertebeli türev operatörünün bazı özellikleri aşağıda verilmiştir.

- Lineerlik Özelliği

  $\lambda_1, \; \lambda_2$ birer sabit sayı ve $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonlarının Caputo kesir mertebeli türevleri var,

$$ {}_a^C D_t^p \big(\lambda_1 f(t) + \lambda_2 g(t)\big) = \lambda_1 \, {}_a^C D_t^p f(t) + \lambda_2 \, {}_a^C D_t^p g(t) $$

eşitliğinde görüldüğü gibi Caputo kesir mertebeli türevin lineerlik özelliği vardır.

- Birleşme Özelliği

$f^{(s)}(0) = 0, \;\; k = n, n+1, \dots, m$ ve $m \in \mathbb{N}, n-1 < p < n$ olmak üzere,

$$ {}_a^C D_t^p \big({}_a^C D_t^m f(t)\big) = {}_a^C D_t^m \left({}_a^C D_t^p f(t)\right) = {}_a^C D_t^{p+m} f(t) $$

biçiminde türev operatörü yer değiştirebilir.

- $p \in \mathbb{R}$ ve $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$ {}_a^C D_t^p f(t) = {}_a^C D_t^{-(m-\alpha)} \big(D^m f(t)\big), \quad m-1 < p < m $$

şeklinde yazılabilir (Podlubny, 1999).

2.2.4. Yardımcı Teorem

Kabul edelim ki $f(t) \in C^2[0, t_k]$ olsun.

$$R\big(f(t_k)\big) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_k} \frac{f'(s)}{(t_k - s)^{\alpha}} ds - \frac{(\Delta t)^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left[b_0 f(t_k) - \sum_{j=1}^{k-1} \big(b_{k-j-1} - b_{k-j}\big) f\big(t_j\big) - b_{k-1} f(t_0) \right] \tag{2.4}$$

olarak tanımlansın.

Bu durumda,

$$\big|R\big(f(t)\big)\big| \leq \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[\frac{1-\alpha}{12} + \frac{2^{2-\alpha}}{2-\alpha} - (1 + 2^{-\alpha}) \right] \max_{0 \leq t \leq t_k} |f''(t)| \, (\Delta t)^{2-\alpha} \tag{2.5}$$

biçiminde olur. Burada $\alpha \in (0,1)$ ve $b_j = (j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}$'dır. Rezidü 0'a yakınsar ve bunun sonucu olarak; t değişkenine göre Caputo kesir mertebeli türevi olan bir $U(x,t)$ fonksiyonunun 2.2.4. Yardımcı Teoremi kullanılarak yaklaşık hesaplanışı,

$$\begin{aligned} &{}_a^C D_t^p U_t\big(x_j, t_{n+1}\big) \\ &\qquad = a_0 \left[b_0 U_j^{n+1} - \sum_{k=1}^{n} (b_{n-k} - b_{n-k+1}) U_j^k - b_n U_j^0 \right] + \mathcal{O}\big((\Delta t)^{2-\alpha}\big) \end{aligned} \tag{2.6}$$

şeklinde yazılır. Burada,

$$b_k = (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha} \tag{2.7}$$

ve

$$a_0 = \frac{(\Delta t)^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \tag{2.8}$$

denklemlerinde verildiği gibidir (Sun and Wu, 2006).

2.3. Radyal Tabanlı Fonksiyonlar

Tanım: $\phi: \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon olsun. Tek değişkenli $\phi: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu var ve

$$\phi(x) = \phi(r), \qquad r = \|x\| \tag{2.9}$$

koşulu sağlanıyorsa ϕ fonksiyonuna Radyal tabanlı fonksiyon denir. Burada $\|.\|, \mathbb{R}^s$ üzerinde Öklidyen normdur.

Yukarıda verilen tanım, bir RBF'un seçilecek bir x_i noktasının merkez noktaya olan uzaklık fonksiyonu olduğunu söylemektedir. RBF'lar bir c şekil parametresi içerebilir. Eğer bir RBF şekil parametresi içeriyorsa sonsuz düzgün RBF, sadece uzaklığa bağlı ise parçalı düzgün RBF olarak adlandırılır. Sayısal sonuçların değerlerinin doğruluğunu etkileyen şekil parametresi c'nin seçilimi büyük önem taşımaktadır. c şekil parametresinin belirlenmesi; rastgele seçilen aralığın sayısal çözümlerin gerçek değerlere yakın olmasını sağlayacak şekilde deneme yoluyla yapılır (Dereli, 2010).

Literatürde tanımlanmış pek çok Radyal tabanlı fonksiyon vardır. Bunlardan biri olan çoklu kuadratik (MQ) metodu 1971 yılında ilk kez Hardy tarafından geliştirilmiştir. Bazı radyal tabanlı fonksiyonlar aşağıdaki tabloda verilmiştir (Dereli, 2010; Karaman, 2019).

Tablo 2.1. *Radyal Tabanlı Fonksiyonlar*

RBF	$\boldsymbol{\phi(r)}$
Sonsuz Düzgün RBF	
Gaussian (G)	$e^{-c^2r^2}$
Multiquadric (MQ)	$\sqrt{r^2+c^2}$
Ters Multiquadric (IMQ)	$\frac{1}{\sqrt{r^2+c^2}}$
Ters Quadric (IMQ)	$\frac{1}{(r^2+c^2)}$
Parçalı Düzgün RBF	
Lineer	r
Kübik	r^3
Thin Plate Spline	$r^2 \log r$

2.4. Radyal Tabanlı Fonksiyonlarla Kolokasyon (RBFC) Metodu

Kolokasyon metodundaki ana fikir, bilinmeyen $u(x,t)$ fonksiyonuna şekil fonksiyonları ve değerleri daha sonra hesaplanacak olan katsayıların cebirsel birleşimi olarak yaklaşılmasıdır.

$D^{\alpha}u(x,t)$ kesir mertebeli kısmi diferansiyel operatörü olmak üzere,

$$\begin{aligned} &D^{\alpha}u(x,t) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad t \in [0,T], \quad 0 \le n-1 < \alpha \le n, n \in \mathbb{N}^{+} \\ &Bu(x,t) = g(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in [0,T] \end{aligned} \tag{2.10}$$

biçimindeki bir kesir mertebeli kısmi diferansiyel denklem ele alınsın. Burada B, sınır noktalarındaki fonksiyon değerleridir. (2.10) denkleminin genel çözümü $u(x,t)$ ve çözüm bölgesi $[a,b]$ olmak üzere, $[a,b]$ aralığı $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b$ şeklinde $N-1$ eşit parçaya bölünsün. $\{x_k\}_{k=1}^{N} \Omega \cup \partial\Omega$'da kolokasyon noktaları olmak üzere $\{x_k\}_{k=1}^{N_1}$ iç bölgelerdeki noktalar, $\{x_k\}_{k=N_1+1}^{N}$ ise sınırdaki noktalardır. Bu durumda $u(x,t)$ fonksiyonuna,

$$u(x,t) \approx \sum_{i=1}^{N} \phi_i(x)\lambda_i \tag{2.11}$$

şeklinde bir yaklaşım yapılır. Burada $\phi_i(x)$'ler şekil fonksiyonları, λ_i'ler de her bir zaman adımında hesaplanması gereken sabitlerdir. (2.11) eşitliği (2.10) denkleminde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} (D^{\alpha}\phi_i)(x_k)\lambda_i &= f(x_k), \quad k = 1, 2, \dots, N_1 \\ \sum_{i=1}^{N} (B\phi_i)(x_k)\lambda_i &= g(x_k), \quad k = N_1 + 1, \dots, N \end{aligned} \tag{2.12}$$

sistemi elde edilir. Bu sistem çözülerek λ_i değerleri hesaplanır. Elde edilen λ_i değerleri, (2.11)'de yerine yazılarak istenilen t anındaki $u(x,t)$ çözümleri bulunur (Kansa, 1990).

3. BULAŞICI HASTALIKLARIN MATEMATİKSEL MODELLERİ

Kermack and McKendrick (1927) tarafından geliştirilen temel modelden çalışmanın giriş bölümünde bahsedilmiştir. Burada temel modeldeki varsayımlar ayrıntılı olarak açıklanmıştır.

Temel SIR model dış çevreye kapalı kabul edilmiştir. Bu kabulde; doğum, doğal veya başka hastalıklardan kaynaklanan ölümler, dışarıdan göç ile dışarıya göç yok sayılmıştır. Ayrıca bireylerin yaşlarının, coğrafi ve sosyal konumlarının homojen, toplam nüfusun da sabit olduğu düşünülmüştür. Hastalığa neden olan mikroorganizmaların kuluçka (Incubation) süresinin anlık olduğu ve hastalığın sadece insandan insana geçtiği kabul edilerek, bir popülasyondaki bulaşıcı hastalığın evreleri basit diferansiyel denklemlerle modellenmiştir.

Varsayımlarda yapılan değişikliklerle ve üç kompartımanlı olan bu temel modele başka kompartımanların eklenmesiyle ya da çıkarılmasıyla farklı modeller oluşturulmuştur. Bu çalışmada verem hastalığı için SIR, influenza hastalığı için SEIR matematiksel modelleri ele alınmıştır. Bu nedenle bulaşıcı hastalıkların matematiksel modellerine örnek olarak SIR ve SEIR modelleri tanıtılmıştır.

3.1. SIR Matematiksel Model

Temel model olarak kabul edilen SIR matematiksel modeli (1.1) denkleminde verilmiştir. Bu modelde; doğum, doğal veya başka hastalıklardan ölümlerin olması, dışarıdan göç ile dışarıya göçün olması gibi değişkenlerin sistemde yer alma durumlarına göre farklı modeller oluşturulmuştur. Burada temel SIR modelin varsayımlarında değişiklik yapılarak elde edilen farklı modeller verilmiştir.

Birinci modelde; doğum ve doğal ölümlere yer verilmiş, ancak göç değişkeninin ve başka hastalıklardan ölümlerin olmadığı varsayılmıştır. Literatürde bu model birçok araştırmada kullanılmıştır. Ma and Zhou'nun (2009) kitabı ve verem hastalığı için ele alan Side vd. (2018) çalışması örnek verilebilir. Modelin adi diferansiyel denklemlerden oluşan sistemi aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= b - \beta SI - \mu S \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - (\gamma + \mu)I \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R$$

Denklemin parametrelerinin tanımları Tablo 3.1'de verilmiştir.

Tablo 3.1. *SIR Matematiksel Modeli Parametreleri*

Parametreler	Tanımlar
$S(t)$	t zamanındaki duyarlı bireylerin sayısı
$I(t)$	t zamanındaki hasta bireylerin sayısı
$R(t)$	t zamanındaki iyileşen bireylerin sayısı
N	Toplam nüfus
β	Bulaşma oranı
r	İyileşme oranı
μ	Doğal ölüm oranı
b	Doğum oranı
t	Zaman

İkinci model; adi diferansiyel denklemlerin tam mertebe türev sınırlılıklarından dolayı kesir mertebeli türev yaklaşımıyla oluşturulmuştur. Literatürde Santos vd. (2017) ve Meena and Kumar (2022) çalışmaları bu model ile ilgili yapılan araştırmalara örnek verilebilir. Modelin denklem sistemi,

$$\begin{aligned} D^{\alpha}S(t) &= b - \beta SI - \mu S \\ D^{\alpha}I(t) &= \beta SI - (\gamma + \mu)I \\ D^{\alpha}R(t) &= \gamma I - \mu R \end{aligned} \tag{3.2}$$

şeklinde yazılmıştır. Burada α kesir mertebesi olmak üzere, $\frac{d^{\alpha}S}{dt^{\alpha}}$ kesir türevi gösterimi yerine $D^{\alpha}S(t)$ kesir türev operatörü kullanılmıştır. Çalışmanın sonraki bölümlerinde de kesir türev için $D^{\alpha}S(t)$ kesir türev operatörü kullanılmıştır.

Bulaşıcı hastalıkların yayıldığı popülasyonun homojen ve sabit kabul edilmesi gerçek problemlerle örtüşmediği için temel SIR modele difüzyon etkisi dâhil edilmiştir. Difüzyon etkisinin bir boyutlu olarak ele alındığı çalışmalara Li vd. (2015) örnek gösterilebilir. Üçüncü model,

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} &= b - \beta SI - \mu S + d_1 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \\ \frac{\partial I}{\partial t} &= \beta SI - (\gamma + \mu)I + d_2 \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \\ \frac{\partial R}{\partial t} &= \gamma I - \mu R + d_3 \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} \end{aligned} \tag{3.3}$$

biçiminde kısmi diferansiyel denklemlerden oluşturulmuştur. d_1, d_2 ve d_3 difüzyon katsayılarıdır.

Çalışmada (3.2) denkleminin araştırılmasının yanı sıra bir varsayımın daha sınırlılığı ortadan kaldırılarak gerçek verilere daha yakın sayısal sonuçlar elde edilmek istenmiştir. Bu amaçla kesir mertebeli difüzyon etkili SIR matematiksel modeli oluşturulmuştur. Dördüncü model olarak verilen bu modelin denklem sistemi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha S}{\partial t^\alpha} &= b - \beta SI - \mu S + d_1 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^\alpha I}{\partial t^\alpha} &= \beta SI - (\gamma + \mu) I + d_2 \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^\alpha R}{\partial t^\alpha} &= \gamma I - \mu R + d_3 \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} \end{aligned} \tag{3.4}$$

şeklinde yazılmıştır. Benzer model, Ammi vd. (2022) çalışmasında modele aşı etkisi dâhil edilerek oluşturulmuştur.

Literatürde; doğum, doğal veya hastalıktan ölümlerin olduğu, popülasyonun göç alıp ve göç vermesi nedeniyle nüfusun değişken kabul edildiği farklı modeller de çalışılmıştır. Bu modellerde bireylerin her birinin birbiri ile temas olasılıklarının eşit olduğu varsayılarak popülasyon homojen olduğu kabul edilmiştir.

3.2. SEIR Matematiksel Modeli

Temel SIR modelde S ve I kompartımanları arasına yeni bir E (Exposed) kompartıman eklenerek SEIR model oluşturulmuştur. Bu kompartımanda; bulaşıcı hastalığı yayan patojene maruz kalan, ancak henüz hastalığı bulaştırma durumu olmayan bireyler yer almıştır (Akpınar, 2012). Ayrıca modelde yeni parametrelere yer verilerek daha ayrıntılı bir model elde edilmiştir. Modelin denklem sistemi aşağıda verilmiştir (Massad vd., 2007).

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= (\alpha - \beta) SI - rS + \delta R + r \\ \frac{dE}{dt} &= \beta SI - (\sigma + \kappa + r) E + \alpha IE \\ \frac{dI}{dt} &= \sigma E - (\alpha + \gamma + r) I + \alpha (I^2) \\ \frac{dR}{dt} &= \kappa E + \gamma I - (\delta + r) R + \alpha IR \end{aligned} \tag{3.5}$$

Modelin parametrelerinin tanımları Tablo 1.1'de verilmiştir.

Tablo 3.2. *SEIR Matematiksel Modeli Parametreleri*

Parametreler	Tanımlar
β	Temas oranı
α	Grip kaynaklı ölüm oranı
r	Yeni doğan oranı
δ	Bağışıklık kaybının süresi
σ	Ortalama gecikme süresi
γ	Ortalama iyileşme süresi
κ	Günlük temaslı iyileşme oranı
S	Duyarlı birey sayısı / Toplam nüfus
E	Temaslı birey sayısı / Toplam nüfus
I	Hasta birey sayısı / Toplam nüfus
R	İyileşen birey sayısı / Toplam nüfus

Literatürdeki Massad vd. (2007) çalışmasında influenza hastalığı (3.5) denkleminde verilen model ile araştırılmıştır. Temel SIR modelde olduğu gibi bu modele de kesir mertebeli türev yaklaşımı uygulandığında,

$$\begin{aligned} D^{\alpha}S(t) &= (\alpha-\beta)SI - rS + \delta R + r \\ D^{\alpha}E(t) &= \beta SI - (\sigma+\kappa+r)E + \alpha IE \\ D^{\alpha}I(t) &= \sigma E - (\alpha+\gamma+r)I + \alpha(I^2) \\ D^{\alpha}R(t) &= \kappa E + \gamma I - (\delta+r)R + \alpha IR \end{aligned} \tag{3.6}$$

denklem sistemi elde edilmiştir.

Samsuzzoha'nın (2012) çalışmasında (3.5) denklemindeki modele difüzyon etkisi dâhil edilerek,

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} &= (\alpha-\beta)SI - rS + \delta R + r + d_1\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \\ \frac{\partial E}{\partial t} &= \beta SI - (\sigma+\kappa+r)E + \alpha IE + d_2\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \\ \frac{\partial I}{\partial t} &= \sigma E - (\alpha+\gamma+r)I + \alpha(I^2) + d_3\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \\ \frac{\partial R}{\partial t} &= \kappa E + \gamma I - (\delta+r)R + \alpha IR + d_4\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} \end{aligned} \tag{3.7}$$

kısmi diferansiyel denklemlerden oluşan denklem sistemi oluşturulmuştur. Burada d_1, d_2, d_3 ve d_4 difüzyon katsayılarıdır. Asif vd. (2020) çalışmasında (3.7) denkleminde verilen modelinin sayısal çözümleri araştırılmıştır.

Bu çalışmada (3.6) ve (3.7) denklemlerinin sınırlılıklarını ortadan kaldırarak gerçek verilere daha yakın sayısal sonuçlar elde etmek amacıyla model, kesir mertebeli

difüzyon etkili SEIR matematiksel modeli olarak ele alınmıştır. Modelin denklem sistemi,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^\alpha S}{\partial t^\alpha} &= (\alpha-\beta)SI - rS + \delta R + r + d_1\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \\
\frac{\partial^\alpha E}{\partial t^\alpha} &= \beta SI - (\sigma+\kappa+r)E + \alpha IE + d_2\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \\
\frac{\partial^\alpha I}{\partial t^\alpha} &= \sigma E - (\alpha+\gamma+r)I + \alpha(I^2) + d_3\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \\
\frac{\partial^\alpha R}{\partial t^\alpha} &= \kappa E + \gamma I - (\delta+r)R + \alpha IR + d_4\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

şeklinde verilmiştir.

4. VEREM HASTALIĞI KESİR MERTEBELİ SIR MATEMATİKSEL MODELİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Verem hastalığı için (3.2) ve (3.4) denklemlerinde verilen SIR matematiksel modelleri ele alınmıştır. Bu modelde nüfus sabit kabul edildiği için toplam nüfus; duyarlı birey sayısı, hasta birey sayısı ve iyileşen birey sayısının toplamı olarak alınmıştır.

Bu çalışmada verem hastalığı için ele alınan SIR matematiksel modelinin parametre ve başlangıç değerleri Uçakan'ın (2021) çalışmasından alınmıştır. Uçakan'ın (2021) çalışmasında SIR, SEIR ve BSEIR olmak üzere adi diferansiyel denklem sistemlerinden oluşan üç farklı matematiksel model analiz edilmiştir. SEIR matematiksel modelinde temaslı bireyler, BSEIR matematiksel modelinde hem temaslı bireyler hem de aşı olan bireyler farklı kompartımanlarda ele alınmıştır. Bununla birlikte modellerde farklı değişkenler göz önünde bulundurulmuştur. Uçakan'ın (2021) çalışması sayesinde farklı değişkenlerin ve kompartımanların dâhil edildiği modeller ile yapılan tahminlerin gerçek hasta sayısına daha yakın olduğu görülmüştür. Verem hasta verileri için Sağlık Bakanlığı tarafından yayımlanan Türkiye'de Verem Savaşı 2020 Raporu'na kadar yayımlanmış olan raporlar esas alınmıştır. Çalışmanın matematiksel modellerinde yer alan temas oranı (β) ve iyileşme oranı (γ) parametreleri, esas alınan raporlardaki 2005-2015 yılları arasındaki hasta sayısı verilerine uyarlanarak hesaplanmıştır. Matematiksel modelleri oluşturan kompartımanlardaki birey sayılarının başlangıç değerleri ise 2005 yılı ve öncesinin verileri kullanılarak elde edilmiştir. 2005 yılındaki toplam nüfus $N(0) = 68860540$ ve hasta sayısı $I(0) = 20535$ olarak alınmıştır (Gümüşlü vd., 2007). Bağışıklığa sahip birey sayısı; 2005 yılı öncesindeki toplam nüfusun ortalama yaşam süresi, doğal ölüm oranı ve verem hastalığının tedavi başarı oranı göz önüne alınarak $R(0) = 1230000$ olarak tahmin edilmiştir. Doğal ölüm oranı (μ), 2010 yılında Türkiye'de vefat edenlerin sayısı ve aynı yılın toplam nüfusunun oranlanmasıyla elde edilmiştir. Çalışmada ele alınan matematiksel modeller MATLAB'da katı diferansiyel denklem sistemler için kullanılan "ode15s" komutuyla çözdürülmüştür.

Çalışmanın bu bölümünde Tablo 4.1'de verilen parametre ve başlangıç değerleri kullanılmıştır.

Tablo 4.1. *SIR matematiksel modelinin verem hastalığı için parametreleri ve başlangıç değerleri (Uçakan, 2021)*

Parametreler ve Başlangıç Değerleri	Tanım	Değer
β	Temas oranı	0,872
γ	İyileşme oranı	0,897
μ	Doğal ölüm oranı	0,0049
$S(0)$	Başlangıçtaki duyarlı birey sayısı	67610005
$I(0)$	Başlangıçtaki hasta birey sayısı	20535
$R(0)$	Başlangıçtaki bağışıklığa sahip birey sayısı	1230000

Kesir mertebeli SIR matematiksel modeli ile 2006-2020 yılları arası duyarlı birey sayısı, hasta birey sayısı ve iyileşen birey sayısı tahminleri yapılmıştır. İlk olarak Çin'in Vuhan Eyaleti'nde 2019 yılı Aralık ayının sonlarında solunum yolu belirtileri (ateş, öksürük, nefes darlığı) gelişen bir grup hastada yapılan araştırmalar sonucunda 13 Ocak 2020'de tanımlanan bir virüs olan Yeni Koronavirüs Hastalığı (COVID-19) pandemisinden dolayı çalışmanın tamamında Türkiye'deki verem hastalığı tahminleri 2020 yılı ile sınırlandırılmıştır.

Bu çalışma, Sağlık Bakanlığı tarafından yayımlanan Türkiye'de Verem Savaşı 2020 Raporu'nda yer alan 2005-2018 arasındaki hasta birey sayıları esas alınarak yapılmıştır. Ancak çalışmanın devam ettiği süreç içinde 13 Şubat 2024 tarihinde yayımlanan Türkiye'de Verem Savaşı 2021 Raporu'nda yer alan 2019 ve 2020 yılları hasta birey sayıları da çalışmaya dâhil edilerek elde edilen sonuçlar güncellenmiştir.

4.1. Kesir Mertebeli SIR Matematiksel Modelinin Caputo Kesir Mertebeli Türev Yaklaşımı ile Sayısal Çözümü

Çalışmanın bu bölümünde (3.2) denkleminde verilen kesir mertebeli SIR matematiksel modeline, Caputo kesir mertebeli türev yaklaşımı uygulanmıştır.

(3.2) denklem sistemi $S(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının t değişkenine göre Caputo kesir mertebe türevleri olarak ele alınmıştır. Bu denklem sistemindeki Caputo kesir mertebeli türev yaklaşımını yaklaşık olarak hesaplamak için Sun and Wu (2006) tarafından önerilen, 2.2.4. Yardımcı Teoremi kullanılmıştır. Yardımcı teorem (3.2) denklemine uygulandığında,

$$
\begin{aligned}
S^{n+1} &= S^n + \sum_{k=1}^{n} b_k \left(S^{n-k} - S^{n+1-k}\right) + \frac{1}{a_0}\left(b - \beta S^n I^n - \mu S^n\right) \\
I^{n+1} &= I^n + \sum_{k=1}^{n} b_k \left(I^{n-k} - I^{n+1-k}\right) + \frac{1}{a_0}\left(\beta S^n I^n - (\gamma + \mu) I^n\right) \\
R^{n+1} &= R^n + \sum_{k=1}^{n} b_k \left(R^{n-k} - R^{n+1-k}\right) + \frac{1}{a_0}\left(\gamma I^n - \mu R^n\right)
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

elde edilir.

(4.1) denklemleri Euler ve Runge Kutta-4 (RK4) yöntemleri kullanılarak MATLAB yardımıyla çözdürülmüştür. Bu çözümlerden 2006-2020 yılları arasındaki her yıl için, ele alınan kesir mertebeli SIR matematiksel modelinin Euler ve RK4 yöntemleriyle $\alpha = 1;\ 0{,}96;\ 0{,}92$ ve $0{,}88$ kesir mertebeleri için *Duyarlı birey sayısı, Hasta birey sayısı ve İyileşen birey sayısı* elde edilmiştir. 2024 yılında Sağlık Bakanlığı tarafından yayımlanan Türkiye'de Verem Savaşı 2021 Raporu'nda yer alan 2005-2020 yılları arasındaki hasta birey sayıları ile Uçakan'ın (2021) çalışmasında elde edilen hasta birey sayıları Tablo 4.2'de verilmiştir. Gerçek hasta birey sayıları ile uygulanan nümerik çözüm yöntemleriyle elde edilen hasta birey sayılarını karşılaştırmak için (4.1)'deki denklem sisteminin Euler ve Runge Kutta-4 yöntemleriyle $\alpha = 1$ mertebesinde elde edilen hasta birey sayıları Tablo 4.2'de verilmiştir. Ayrıca Tablo 4.2'de "Hata" başlıklı sütunlarda; sütunların solunda yer alan hasta birey sayılarının, Türkiye'de Verem Savaşı 2021 Raporu'nun hasta birey sayıları ile arasındaki bağıl hatalar gösterilmiştir. Çalışmanın bu bölümünde yer alan tablolardaki hata sütunlarında yer alan verilerin hesaplaması Tablo 4.2'deki hata sütunlarına benzer şekilde yapılmıştır.

Tablo 4.2. *α=1 mertebesinde Euler ve RK4 yöntemiyle elde edilen hasta sayıları ve hatalar*

Yıl	VSR	Uçakan	Hata	α=1(Euler)	Hata	α=1 (RK4)	Hata
2005	20535	20535	-	20535	-	20535	-
2006	20526	19621	0,0441	19594	0,0454	19614	0,0444
2007	19694	18743	0,0483	18693	0,0508	18731	0,0489
2008	18452	17896	0,0301	17831	0,0337	17886	0,0307
2009	17402	17084	0,0183	17006	0,0228	17077	0,0187
2010	16551	16306	0,0148	16218	0,0201	16303	0,0150
2011	15679	15561	0,0075	15465	0,0136	15563	0,0074
2012	14691	14848	0,0107	14745	0,0037	14855	0,0112
2013	13409	14167	0,0566	14058	0,0484	14178	0,0573
2014	13378	13516	0,0103	13401	0,0017	13531	0,0114
2015	12772	12894	0,0096	12774	0,0002	12913	0,0110
2016	12417	12300	0,0094	12176	0,0194	12322	0,0077
2017	12046	11733	0,0260	11605	0,0366	11758	0,0239
2018	11786	11192	0,0504	11061	0,0615	11219	0,0481
2019	11401	10675	0,0636	10541	0,0754	10704	0,0611
2020	8925	10182	0,1408	10045	0,1254	10213	0,1443

2006-2020 yılları arasında Euler yöntemiyle hesaplanan hasta birey sayılarının minimum hata değeri 0,0002; maksimum hata değeri ise 0,1254'tür. Aynı yıllar için RK4 yöntemiyle hesaplanan hasta birey sayılarının minimum hata değeri 0,0074; maksimum hata değeri ise 0,1443'tür. Euler ve RK4 yöntemlerinin toplam hataları sırasıyla 0,5587 ve 0,5411'dir. RK4 yöntemiyle 2006-2011 ve 2016-2019 yılları arası elde edilen hasta sayıları gerçek verilere daha yakındır. Toplam hatalar ve yıllara göre hasta sayıları karşılaştırması birlikte değerlendirildiğinde, RK4 yöntemiyle elde edilen sonuçların gerçek verilere daha yakın olduğu görülmektedir.

(4.1)'deki denklem sisteminin Euler yöntemiyle 0,96; 0,92 ve 0,88 kesir mertebeleri için elde edilen hasta birey sayıları ile hata verileri Tablo 4.3'te verilmiştir.

Tablo 4.3. *α=0,96; 0,92 ve 0,88 kesir mertebelerinde Euler yöntemiyle elde edilen hasta sayıları ve hatalar*

Yıl	VSR	α=0,96	Hata	α=0,92	Hata	α=0,88	Hata
2005	20535	20535	-	20535	-	20535	-
2006	20526	19614	0,0444	19632	0,0436	19647	0,0428
2007	19694	18758	0,0475	18817	0,0445	18872	0,0417
2008	18452	17936	0,0280	18031	0,0228	18118	0,0181
2009	17402	17148	0,0146	17276	0,0072	17394	0,0005
2010	16551	16392	0,0096	16551	0,0	16697	0,0088
2011	15679	15669	0,0006	15856	0,0113	16027	0,0222
2012	14691	14976	0,0194	15188	0,0338	15382	0,0470
2013	13409	14313	0,0674	14547	0,0849	14762	0,1009
2014	13378	13678	0,0224	13932	0,0414	14167	0,0590
2015	12772	13070	0,0233	13343	0,0447	13594	0,0644
2016	12417	12489	0,0058	12778	0,0291	13044	0,0505
2017	12046	11933	0,0094	12235	0,0157	12516	0,0390
2018	11786	11401	0,0327	11716	0,0059	12008	0,0188
2019	11401	10892	0,0446	11218	0,0160	11521	0,0105
2020	8925	10405	0,1658	10741	0,2034	11053	0,2384

Tabloda, 2006-2020 yılları arasındaki üç farklı kesir mertebe için Euler yöntemiyle hesaplanan hasta birey sayılarının hata değerleri verilmiştir. Her kesir mertebe için minimum ve maksimum hata değerlerinin daha kolay karşılaştırılabilmesi için tablo hâlinde Tablo 4.4'te verilmiştir.

Tablo 4.4. *Euler yöntemiyle elde edilen hasta birey sayılarının hata değerleri*

Hata	**α=1**	**α=0,96**	**α=0,92**	**α=0,88**
Minimum	0,0017	0,0006	0,0	0,0005
Maksimum	0,1254	0,1658	0,2034	0,2384
Toplam	0,5587	0,5355	0,6043	0,7626

Tablodaki minimum ve maksimum hata değerleri karşılaştırıldığında; 0,92 kesir mertebesi için 0 hata ile tahmin elde edilen yıl olduğu görülmektedir. Ancak kesir mertebeleri için toplam hatalar değerlendirildiğinde 0,96 kesir mertebede toplam hatanın daha az olduğu görülmektedir.

(4.1)'deki denklem sisteminin RK4 yöntemiyle 0,96; 0,92 ve 0,88 kesir mertebeleri için elde edilen hasta birey sayıları ile hata verileri Tablo 4.5'te verilmiştir.

Tablo 4.5. *α=0,96; 0,92 ve 0,88 kesir mertebelerinde RK4 yöntemiyle elde edilen hasta ve hatalar*

Yıl	**VSR**	**α=0,96**	**Hata**	**α=0,92**	**Hata**	**α=0,88**	**Hata**
2005	20535	20535	-	20535	-	20535	-
2006	20526	19633	0,0435	19650	0,0427	19665	0,0419
2007	19694	18793	0,0457	18850	0,0429	18903	0,0402
2008	18452	17987	0,0252	18078	0,0203	18162	0,0157
2009	17402	17213	0,0109	17337	0,0037	17450	0,0028
2010	16551	16471	0,0048	16624	0,0044	16764	0,0129
2011	15679	15759	0,0051	15939	0,0166	16104	0,0271
2012	14691	15078	0,0263	15281	0,0402	15469	0,0530
2013	13409	14424	0,0757	14650	0,0925	14858	0,1081
2014	13378	13798	0,0314	14044	0,0498	14270	0,0667
2015	12772	13198	0,0334	13462	0,0540	13705	0,0731
2016	12417	12624	0,0167	12903	0,0391	13162	0,0600
2017	12046	12074	0,0023	12368	0,0267	12639	0,0492
2018	11786	11548	0,0202	11853	0,0057	12137	0,0298
2019	11401	11044	0,0313	11360	0,0035	11654	0,0221
2020	8925	10562	0,1834	10887	0,2198	11191	0,2538

Tabloda, 2006-2020 yılları arasındaki üç farklı kesir mertebe için RK4 yöntemiyle hesaplanan hasta birey sayılarının hata değerleri verilmiştir. Her kesir mertebe için minimum ve maksimum hata değerlerinin daha kolay karşılaştırılabilmesi için tablo hâlinde Tablo 4.6'da verilmiştir.

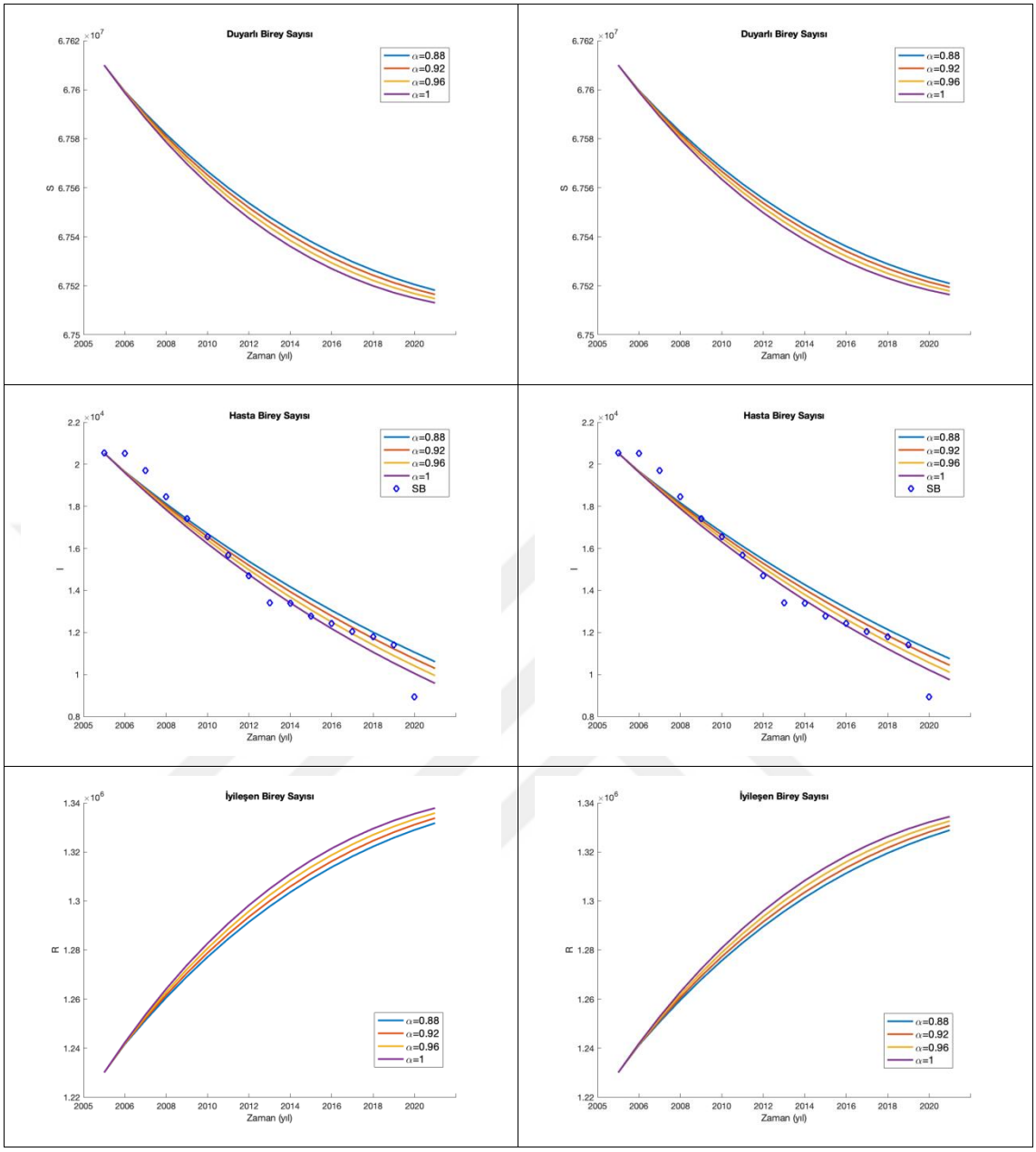
Tablo 4.6. *RK4 yöntemiyle elde edilen hasta birey sayılarının hata değerleri*

Hata	**α=1**	**α=0,96**	**α=0,92**	**α=0,88**
Minimum	0,0074	0,0023	0,0035	0,0028
Maksimum	0,1443	0,1834	0,2198	0,2538
Toplam	0,5587	0,5559	0,6619	0,8564

Tablodaki minimum ve maksimum hata değerleri karşılaştırıldığında; 0,0023 değeriyle 0,96 kesir mertebesinde en düşük hata ile tahmin yapıldığı görülmektedir. Ancak kesir mertebeleri için toplam hatalar değerlendirildiğinde 0,96 kesir mertebede toplam hatanın daha az olduğu görülmektedir.

Tablo 4.4 ve Tablo 4.6 birlikte değerlendirildiğinde, her mertebe için Euler yöntemiyle elde hasta sayılarının minimum hata değerlerinin daha düşük, maksimum hata değerlerinin daha yüksektir. Toplam hata değerlerine bakılarak, RK4 yönteminin Euler yöntemine göre gerçek hasta sayılarına daha yakın sonuçlar verdiği söylenebilir.

Duyarlı bireyler (S), Hasta bireyler (I) ve İyileşen bireyler (R) olmak üzere üç kompartımandan oluşan Kesir Mertebeli SIR Matematiksel Modeli'nin her kompartımanındaki birey sayılarının Euler ve RK4 yöntemiyle 1, 0,96; 0,92 ve 0,88 mertebelerinde elde edilen verilerinin 2005 yılından itibaren değişimleri Şekil 4.1'deki grafiklerde gösterilmiştir.



Şekil 4.1. *Sırasıyla Euler ve RK4 yöntemleriyle elde edilen duyarlı, hasta ve iyileşen birey sayılarının grafikleri*

Her iki yöntemle, dört farklı kesir mertebe için elde edilen duyarlı birey sayıları grafiği azalan fonksiyon grafiğidir. Tablo 4.2, Tablo 4.3 ve Tablo 4.5'te verilen hasta sayılarında görüldüğü gibi hasta birey sayılarının değişimini veren grafikler azalan fonksiyon şeklindedir. Duyarlı ve hasta birey sayıları grafiklerindeki azalmaya karşılık iyileşen birey sayılarında artış görülmektedir. İyileşen birey sayıları, hastalığa karşı bağışıklığı olan ve hastalığa yakalanıp iyileşen bireyleri kapsamaktadır.

Grafikler gerçek verilerle birlikte değerlendirildiğinde duyarlı ve hasta birey sayılarındaki azalma bireylerin hastalığa karşı kalıcı bağışıklık kazandığı, uygulanan

tedavilerin başarılı olduğu ve alınan tedbirlerin olumlu sonuçlar verdiği şeklinde yorumlanabilir.

4.2. Difüzyon Etkili ve Etkisiz Kesir Mertebeli SIR Matematiksel Modelinin Caputo Kesir Mertebeli Türev Yaklaşımı

Çalışmanın bu bölümünde kısmi diferansiyel denklemlerden oluşan (3.4) denkleminde difüzyon etkili kesir mertebeli SIR matematiksel modeli ele alınmıştır. Modelde; $S(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının t değişkenine göre Caputo kesir mertebe türevi ve x değişkenine göre difüzyon etkisi yer almaktadır.

Denklem sistemindeki difüzyon etkisine ortalama yaklaşımı uygulanarak Caputo kesir mertebeden türev yaklaşımına 2.2.4. Yardımcı Teoremi uygulandığında

$$\begin{aligned}
&S^{n+1} - \frac{d_1}{2a_0} S_{xx}^{n+1} \\
&\qquad = S^n + \sum_{k=1}^{n} b_k \left(S^{n-k} - S^{n+1-k}\right) \\
&\qquad + \frac{1}{a_0}\left(b - \beta S^n I^n - \mu S^n + d_1 \frac{S_{xx}^n}{2}\right) \\
&I^{n+1} - \frac{d_2}{2a_0} I_{xx}^{n+1} \\
&\qquad = I^n + \sum_{k=1}^{n} b_k \left(I^{n-k} - I^{n+1-k}\right) \\
&\qquad + \frac{1}{a_0}\left(\beta S^n I^n - (\gamma + \mu) I^n + d_2 \frac{I_{xx}^n}{2}\right) \\
&R^{n+1} - \frac{d_3}{2a_0} R_{xx}^{n+1} \\
&\qquad = R^n + \sum_{k=1}^{n} b_k \left(R^{n-k} - R^{n+1-k}\right) \\
&\qquad + \frac{1}{a_0}\left(\gamma I^n - \mu R^n + d_3 \frac{R_{xx}^n}{2}\right)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

elde edilir.

(4.2) denklemine RBFC metodu uygulanarak farklı difüzyon katsayılar için sayısal sonuçlar elde edilmiştir.

4.2.1. RBFC metodunun difüzyon etkili ve etkisiz kesir mertebeli SIR matematiksel modeline uygulanması

Problemin çözüm bölgesi olan $[a,b]$ aralığı $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b$ olacak şekilde N eşit uzunluklu alt aralığa parçalanırsa $x_i, i = 1,2,\dots,N$ kolokasyon noktalarından $x_i, i = 2,\dots,N-1$ iç bölgedeki noktalar, $a = x_1$ ve $b = x_N$ sınırdaki noktalardır. RBFC metodunda, U fonksiyonunun $n.$ ve $(n+1).$ adımdaki çözümlerine (2.11) eşitliğinden

$$U_i^n = \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\,\lambda_j^n, \qquad U_i^{n+1} = \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\,\lambda_j^{n+1} \tag{4.3}$$

yaklaşımları yapılır. Bu yaklaşımların x'e göre türevleri

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_i^n &= \sum_{j=1}^{N} \phi_j'(x_i)\,\lambda_j^n, \\ \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_i^n &= \sum_{j=1}^{N} \phi_j''(x_i)\,\lambda_j^n \end{aligned} \tag{4.4}$$

biçimindedir. (4.3) ve (4.4) denklemlerinde yapılan yaklaşımlar (4.2) denkleminde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\,\lambda_j^{n+1} - \frac{d_1}{2a_0}\sum_{j=1}^{N} \phi_j''(x_i)\,\lambda_j^{n+1} \\ &= \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\,\lambda_j^n + \sum_{k=1}^{n} b_k \left(\sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\,\lambda_j^{n-k} - \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\,\lambda_j^{n+1-k} \right) \\ &+ \frac{1}{a_0}\left(b - \beta \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\,\lambda_j^n \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\,\lambda_j^n - \mu \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\,\lambda_j^n \right. \\ &\left. + d_1 \frac{\sum_{j=1}^{N} \phi_j''(x_i)\,\lambda_j^n}{2} \right) \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\,\lambda_j^{n+1} - \frac{d_2}{2a_0}\sum_{j=1}^{N} \phi_j''(x_i)\,\lambda_j^{n+1}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\,\lambda_j^{n} + \sum_{k=1}^{n} b_k \left(\sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\,\lambda_j^{n-k} - \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\,\lambda_j^{n+1-k} \right)$$

$$+ \frac{1}{a_0}\left(\beta \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\,\lambda_j^{n} \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\,\lambda_j^{n} - (\gamma+\mu) \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\,\lambda_j^{n} \right.$$

$$\left. + d_2 \frac{\sum_{j=1}^{N} \phi_j''(x_i)\,\lambda_j^{n}}{2} \right)$$

$$\sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\,\lambda_j^{n+1} - \frac{d_3}{2a_0}\sum_{j=1}^{N} \phi_j''(x_i)\,\lambda_j^{n+1}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\,\lambda_j^{n} + \sum_{k=1}^{n} b_k \left(\sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\,\lambda_j^{n-k} - \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\,\lambda_j^{n+1-k} \right)$$

$$+ \frac{1}{a_0}\left(\gamma \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\,\lambda_j^{n} - \mu \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\,\lambda_j^{n} + d_3 \frac{\sum_{j=1}^{N} \phi_j''(x_i)\,\lambda_j^{n}}{2} \right)$$

$i = 1, 2, 3, \dots, N$ olmak üzere, her biri N bilinmeyenli 3 denklemden oluşan bir denklem sistemi elde edilmiştir.

Difüzyon etkili SIR matematiksel modeline Caputo kesir mertebeli türev yaklaşımının uygulandığı bu denklem sisteminin çözümünde ilk olarak; Caputo kesir mertebeli türev yaklaşımı ile fark denklemi elde edilmiş ve ardından RBFC metodu uygulanmıştır. RBF fonksiyonu olarak Gaussian (G) ve Multiquadric (MQ) fonksiyonları seçilmiştir.

(4.5) denklem sistemi, verem hastalığı için Tablo 4.1'de verilen parametreler ve başlangıç değerleri kullanılarak MATLAB programıyla G ve MQ taban fonksiyonları için ayrı ayrı çözülmüştür. Bu çözümlerde konum adımı $\Delta x = 0{,}2$ ve zaman adımı $\Delta t = 1$ alınarak 1; 0,96; 0,92 ve 0,88 mertebeleri ile farklı difüzyon katsayıları için sayısal sonuçlar ve grafikler elde edilmiştir. Ayrıca hasta birey sayılarını veren sayısal sonuçların gerçek hasta birey sayıları ile karşılaştırmaları ve hatalar, tablolar hâlinde verilmiştir.

G ve MQ taban fonksiyonlarıyla difüzyon etkili kesir mertebeli SIR matematiksel modelinin, $d_1 = d_2 = d_3 = 0{,}0$ ve $d_1 = 0{,}001$; $d_2 = 0{,}025$; $d_3 = 0{,}0$ olmak üzere iki farklı difüzyon katsayısı için *Duyarlı birey oranı (S(t)), Hasta birey oranı (I(t)) ve İyileşen birey oranı (R(t))* sayısal sonuçları elde edilmiş ve $x = 0{,}0;\ 0{,}6$ ve $1{,}0$ konumlarındaki grafikleri çizdirilmiştir. Elde edilen bu sonuçlar I. ve II. durum başlıkları altında verilmiştir.

I. Durum

Difüzyon katsayıları $d_1 = d_2 = d_3 = 0{,}0$ alınarak difüzyon etkisiz kesir mertebeli SIR matematiksel modelinin sayısal sonuçları elde edilmiştir. Elde edilen $S(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının, $x = 0{,}0;\ 0{,}6$ ve $1{,}0$ konumlarındaki grafikleri çizdirilmiştir. Fonksiyonların bu üç konum için hesaplanan sayısal sonuçlarının, difüzyon katsayıları 0 ve başlangıç koşulları sabit fonksiyon olarak alındığı için birbirleriyle aynı oldukları görülmüştür. Ayrıca G ve MQ taban fonksiyonları için elde edilen $S(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının sayısal sonuçları arasında anlamlı bir fark olmadığı için sadece G taban fonksiyonunun sayısal sonuçları ve grafikleri verilmiştir. Tablo 4.7'de G taban fonksiyonunun tam mertebe için elde edilen hasta birey sayıları, Tablo 4.2'de verilen aynı koşullar altında Euler yöntemiyle elde edilen hasta birey sayıları ve Türkiye'de Verem Savaşı 2021 Raporu'ndaki hasta sayıları ile karşılaştırılmıştır.

Tablo 4.7. *α=1 mertebesi için Euler yöntemi ve G taban fonksiyonuyla elde edilen hasta sayıları ve hatalar*

Yıl	VSR	α=1 (Euler)	Hata	α=1 (G)	Hata
2005	20535	20535	-	20535	-
2006	20526	19594	0,0454	19596	0,0453
2007	19694	18693	0,0508	18697	0,0506
2008	18452	17831	0,0337	17836	0,0334
2009	17402	17006	0,0228	17013	0,0224
2010	16551	16218	0,0201	16227	0,0196
2011	15679	15465	0,0136	15474	0,0131
2012	14691	14745	0,0037	14756	0,0044
2013	13409	14058	0,0484	14069	0,0492
2014	13378	13401	0,0017	13413	0,0026
2015	12772	12774	0,0002	12787	0,0012
2016	12417	12176	0,0194	12189	0,0184
2017	12046	11605	0,0366	11618	0,0355
2018	11786	11061	0,0615	11074	0,0604
2019	11401	10541	0,0754	10555	0,0742
2020	8925	10045	0,1254	10059	0,1271

Tabloda, 2006-2020 yılları arasındaki G taban fonksiyonuyla elde edilen hasta sayılarının minimum hata değeri 0,0012; maksimum hata değeri ise 0,1271'dir. Euler yöntemiyle ve G taban fonksiyonu ile elde edilen toplam hatalar sırasıyla 0,5587 ve 0,5574'tür. 2006-2011 ve 2016-2019 yılları arası G taban fonksiyonu ile elde edilen hasta sayıları Euler yöntemiyle elde edilen hasta sayılarına göre gerçek verilere daha yakındır. Toplam hatalar ve yıllara göre hasta sayıları karşılaştırması birlikte değerlendirildiğinde, G taban fonksiyonu ile elde edilen sonuçların gerçek verilere daha yakın olduğu görülmektedir.

Tablo 4.8'de G taban fonksiyonunun 0,96; 0,92 ve 0,88 kesir mertebeleri için elde edilen hasta birey sayıları ve hataları verilmiştir.

Tablo 4.8. *α=0,96; 0,92 ve 0,88 kesir mertebeleri için G taban fonksiyonuyla elde edilen hasta sayıları ve hatalar*

Yıl	VSR	α=0,96	Hata	α=0,92	Hata	α=0,88	Hata
2005	20535	20535	-	20535	-	20535	-
2006	20526	19616	0,0443	19634	0,0435	19649	0,0427
2007	19694	18761	0,0474	18821	0,0443	18875	0,0416
2008	18452	17956	0,0269	18068	0,0208	18171	0,0152
2009	17402	17194	0,0120	17362	0,0023	17519	0,0067
2010	16551	16470	0,0049	16698	0,0089	16910	0,0217
2011	15679	15782	0,0066	16069	0,0249	16337	0,0420
2012	14691	15127	0,0297	15472	0,0532	15795	0,0751
2013	13409	14502	0,0815	14905	0,1116	15282	0,1397
2014	13378	13906	0,0395	14365	0,0738	14794	0,1058
2015	12772	13337	0,0442	13850	0,0844	14330	0,1220
2016	12417	12794	0,0304	13359	0,0759	13886	0,1183
2017	12046	12276	0,0191	12890	0,0701	13463	0,1176
2018	11786	11780	0,0005	12441	0,0556	13058	0,1079
2019	11401	11307	0,0082	12011	0,0535	12671	0,1114
2020	8925	10854	0,2161	11601	0,2998	12300	0,3782

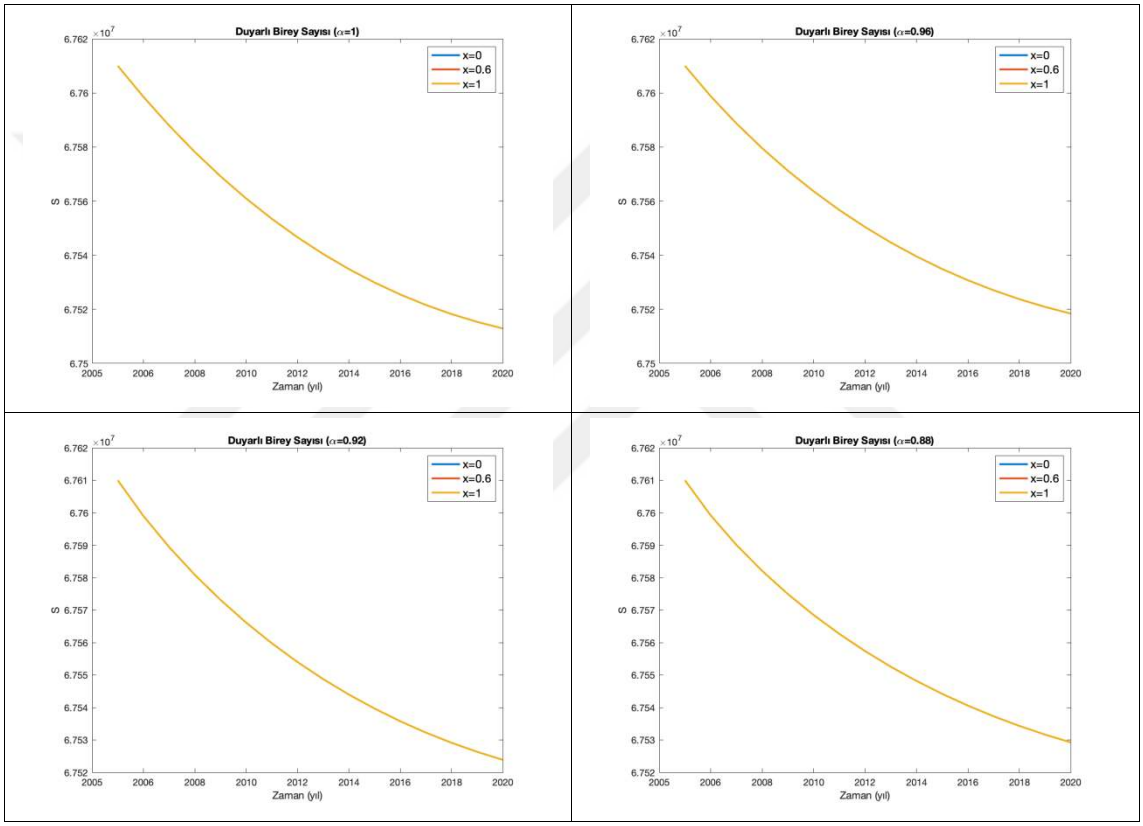
Tabloda, 2006-2020 yılları arasındaki üç farklı kesir mertebe için G taban fonksiyonuyla hesaplanan hasta birey sayılarının hata değerleri verilmiştir. Her kesir mertebe için minimum ve maksimum hata değerlerinin daha kolay karşılaştırılabilmesi için tablo hâlinde verilmiştir.

Tablo 4.9. *G taban fonksiyonuyla elde edilen hasta birey sayılarının hata değerleri*

Hata	α=1	α=0,96	α=0,92	α=0,88
Minimum	0,0012	0,0005	0,0023	0,0067
Maksimum	0,1271	0,2161	0,2998	0,3782
Toplam	0,5574	0,6113	1,0226	1,4459

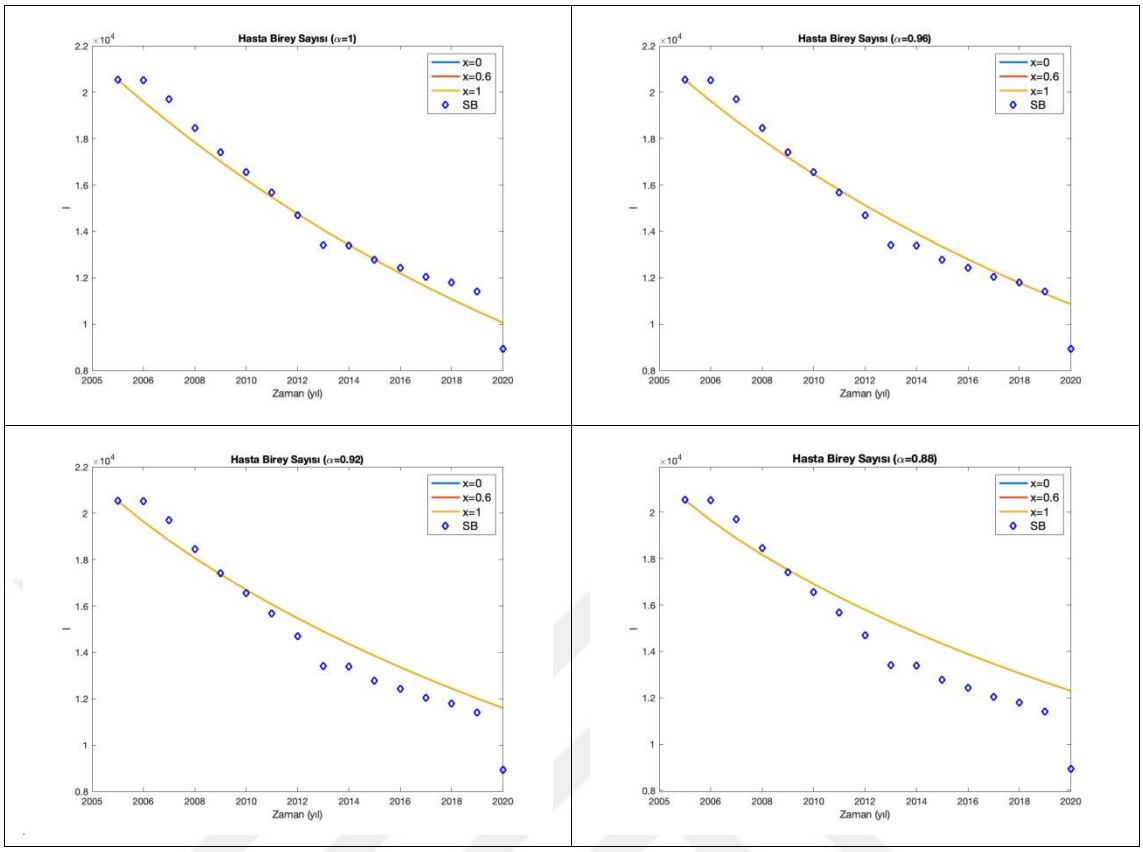
Tablodaki minimum ve maksimum hata değerleri karşılaştırıldığında; 0,0005 değeriyle 0,96 kesir mertebesinde en düşük hata ile tahmin yapıldığı görülmektedir. Ancak kesir mertebeleri için toplam hatalar değerlendirildiğinde tam mertebede toplam hatanın daha az olduğu görülmektedir.

1; 0,96; 0,92 ve 0,88 kesir mertebeleri için G taban fonksiyonuyla elde edilen $S(t)$ fonksiyonunun grafikleri Şekil 4.2'de, $I(t)$ fonksiyonunun ve Türkiye'de Verem Savaşı 2021 Raporu'nun hasta birey sayılarının gösterildiği grafikler Şekil 4.3'te, $R(t)$ fonksiyonunun grafikleri Şekil 4.4'te gösterilmiştir.



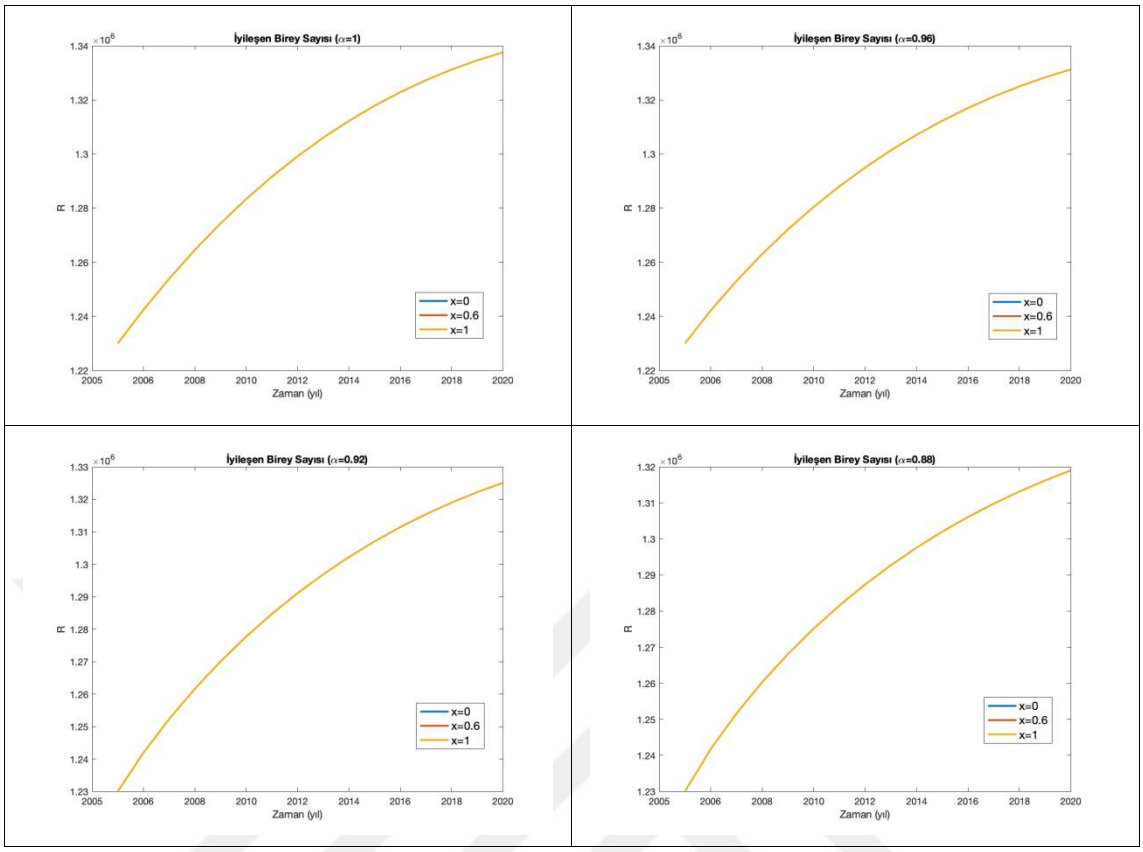
Şekil 4.2. *Sırasıyla 1; 0,96; 0,92 ve 0,88 kesir mertebeleri için elde edilen duyarlı birey sayılarının grafikleri*

Dört farklı kesir mertebe için elde edilen duyarlı birey sayıları grafiği azalan bir fonksiyon grafiğidir. Adi diferansiyel denklemlerinden oluşan SIR matematiksel modeline Euler ve RK4 yöntemlerini uygulayarak elde edilen grafiklerle benzer oldukları görülmektedir. Grafiklerde kesir mertebelere göre duyarlı birey sayıları arasında farklılıklar olduğu görülmektedir.



Şekil 4.3. *Sırasıyla 1; 0,96, 0,92 ve 0,88 kesir mertebeleri için elde edilen hasta birey sayılarının grafikleri*

Grafiklerde mavi noktalarla gösterilmiş olan gerçek hasta birey sayılarıdır. Bu sayıların değişimi azalan biçimde, kesir mertebeler için elde edilen sonuçların da benzer şekilde azalan fonksiyon olduğu görülmektedir. Tablo 4.7 ve Tablo 4.8'da verilen hasta sayılarında görüldüğü gibi kesir mertebeler için elde edilen hasta birey sayılarının gerçek hasta sayılarına yakınlığının değişim gösterdiği grafiklerden de anlaşılmaktadır.



Şekil 4.4. *Sırasıyla 1; 0,96; 0,92 ve 0,88 kesir mertebeleri için elde edilen iyileşen birey sayılarının grafikleri*

Çalışmada ele alınan SIR matematiksel modelde duyarlı birey sayısı, hasta birey sayısı ve iyileşen birey sayısı toplamının toplam nüfusa eşit olması nedeniyle; duyarlı birey sayısı, hasta birey sayısı grafikleri azalan, iyileşen birey sayısı grafiği artan fonksiyon şeklindedir. Grafiklerde kesir mertebelere göre iyikeşen birey sayıları arasında farklılıklar olduğu görülmektedir.

II. Durum

Difüzyon katsayıları $d_1 = 0{,}001$; $d_2 = 0{,}025$ ve $d_3 = 0{,}0$ alınarak difüzyon etkili kesir mertebeli SIR matematiksel modelinin sayısal sonuçları elde edilmiştir. Hasta birey sayılarını veren sayısal sonuçların Türkiye'de Verem Savaşı 2021 Raporu'ndaki gerçek hasta sayıları ile karşılaştırmaları ve Tablo 4.2'deki hata hesaplamalarına benzer şekilde hesaplanan hatalar tablolar hâlinde verilmiştir.

Tablo 4.10'da $x = 0{,}0$; Tablo 4.11'de $x = 0{,}6$ ve Tablo 4.12'de $x = 1{,}0$ konumları ve tam mertebe için elde edilen hasta birey sayıları ve hatalar verilmiştir.

Tablo 4.10. *Tam mertebe ve x=0,0 konumu için G ve MQ taban fonksiyonlarıyla elde edilen hasta sayıları ve hatalar*

Yıl	VSR	α=1 (G)	Hata	α=1 (MQ)	Hata
2005	20535	20535	-	20535	-
2006	20526	19596	0,0453	19596	0,0453
2007	19694	18697	0,0506	18697	0,0506
2008	18452	17836	0,0334	17836	0,0334
2009	17402	17013	0,0224	17013	0,0224
2010	16551	16226	0,0196	16227	0,0196
2011	15679	15473	0,0131	15475	0,0130
2012	14691	14753	0,0042	14756	0,0044
2013	13409	14063	0,0488	14070	0,0493
2014	13378	13401	0,0017	13415	0,0028
2015	12772	12766	0,0005	12791	0,0015
2016	12417	12156	0,0210	12196	0,0178
2017	12046	11570	0,0395	11629	0,0346
2018	11786	11006	0,0662	11089	0,0591
2019	11401	10465	0,0821	10576	0,0724
2020	8925	9944	0,1142	10087	0,1302

Tablo 4.10'da $x = 0{,}0$ konumu için 2006-2020 yılları arasındaki; G taban fonksiyonuyla elde edilen hasta sayılarının minimum hata değeri 0,0005; maksimum hata değeri ise 0,1142'dir. MQ taban fonksiyonuyla elde edilen hasta sayılarının minimum hata değeri 0,0015; maksimum hata değeri ise 0,1302'dir. G ve MQ taban fonksiyonları ile elde edilen toplam hatalar sırasıyla 0,5626 ve 0,5564'tür. Toplam hatalara göre, MQ taban fonksiyonu ile elde edilen sonuçların gerçek verilere daha yakın olduğu görülmektedir.

Tablo 4.11. *Tam mertebe ve x=0,6 konumu için G ve MQ taban fonksiyonlarıyla elde edilen hasta sayıları ve hatalar*

Yıl	VSR	α=1 (G)	Hata	α=1 (MQ)	Hata
2005	20535	20535	-	20535	-
2006	20526	19596	0,0453	19596	0,0453
2007	19694	18696	0,0507	18697	0,0506
2008	18452	17836	0,0334	17836	0,0334
2009	17402	17011	0,0225	17014	0,0223
2010	16551	16218	0,0201	16228	0,0195
2011	15679	15454	0,0144	15478	0,0128
2012	14691	14716	0,0017	14764	0,0050
2013	13409	14002	0,0442	14083	0,0503
2014	13378	13312	0,0049	13435	0,0043
2015	12772	12645	0,0099	12818	0,0036
2016	12417	12003	0,0333	12232	0,0149
2017	12046	11385	0,0549	11674	0,0309
2018	11786	10792	0,0843	11144	0,0545
2019	11401	10223	0,1033	10640	0,0667
2020	8925	9680	0,0846	10161	0,1385

Tablo 4.11'de $x = 0{,}6$ konumu için 2006-2020 yılları arasındaki; G taban fonksiyonuyla elde edilen hasta sayılarının minimum hata değeri 0,0017; maksimum

hata değeri ise 0,1033'tür. MQ taban fonksiyonuyla elde edilen hasta sayılarının minimum hata değeri 0,0036, maksimum hata değeri ise 0,1385'tir. G ve MQ taban fonksiyonları ile elde edilen toplam hatalar sırasıyla 0,6075 ve 0,5526'dır. Toplam hatalara göre, MQ taban fonksiyonu ile elde edilen sonuçların gerçek verilere daha yakın olduğu görülmektedir.

Tablo 4.12. *Tam mertebe ve x=1,0 konumu için G ve MQ taban fonksiyonlarıyla elde edilen hasta sayıları ve hatalar*

Yıl	VSR	α=1 (G)	Hata	α=1 (MQ)	Hata
2005	20535	20535	-	20535	-
2006	20526	19596	0,0453	19596	0,0453
2007	19694	18694	0,0508	18697	0,0506
2008	18452	17824	0,0340	17839	0,0332
2009	17402	16971	0,0248	17022	0,0218
2010	16551	16131	0,0254	16245	0,0185
2011	15679	15302	0,0240	15509	0,0108
2012	14691	14488	0,0138	14812	0,0082
2013	13409	13696	0,0214	14151	0,0553
2014	13378	12931	0,0334	13523	0,0108
2015	12772	12196	0,0451	12928	0,0122
2016	12417	11492	0,0745	12363	0,0043
2017	12046	10823	0,1015	11826	0,0183
2018	11786	10186	0,1358	11316	0,0399
2019	11401	9584	0,1594	10831	0,0500
2020	8925	9014	0,0100	10370	0,1619

Tablo 4.12'de $x = 1{,}0$ konumu için 2006-2020 yılları arasındaki; G taban fonksiyonuyla elde edilen hasta sayılarının minimum hata değeri 0,0100; maksimum hata değeri ise 0,1594'tür. MQ taban fonksiyonuyla elde edilen hasta sayılarının minimum hata değeri 0,0043; maksimum hata değeri ise 0,1619'dur. G ve MQ taban fonksiyonları ile elde edilen toplam hatalar sırasıyla 0,7992 ve 0,5411'dir. Toplam hatalara göre, MQ taban fonksiyonu ile elde edilen sonuçların gerçek verilere daha yakın olduğu görülmektedir.

Tablo 4.13'te $x = 0{,}0$; Tablo 4.14'te $x = 0{,}6$ ve Tablo 4.15'te $x = 1{,}0$ konumları ve 0,92 kesir mertebe için elde edilen hasta birey sayıları ve hatalar verilmiştir.

Tablo 4.13. *α=0,96 kesir mertebesi ve x=0,0 konumu için G ve MQ taban fonksiyonlarıyla elde edilen hasta sayıları ve hatalar*

Yıl	VSR	α=0,96 (G)	Hata	α=0,96 (MQ)	Hata
2005	20535	20535	-	20535	-
2006	20526	19616	0,0443	19616	0,0443
2007	19694	18761	0,0474	18761	0,0474
2008	18452	17956	0,0269	17956	0,0269
2009	17402	17194	0,0120	17194	0,0120
2010	16551	16470	0,0049	16471	0,0048
2011	15679	15781	0,0065	15782	0,0066
2012	14691	15124	0,0295	15127	0,0297
2013	13409	14497	0,0811	14503	0,0816
2014	13378	13897	0,0388	13908	0,0396
2015	12772	13321	0,0430	13340	0,0445
2016	12417	12769	0,0283	12800	0,0308
2017	12046	12238	0,0159	12284	0,0198
2018	11786	11728	0,0049	11792	0,0005
2019	11401	11237	0,0144	11323	0,0068
2020	8925	10765	0,2062	10876	0,2186

Tablo 4.13'te $x = 0{,}0$ konumu için 2006-2020 yılları arasındaki; G taban fonksiyonuyla elde edilen hasta sayılarının minimum hata değeri 0,0049; maksimum hata değeri ise 0,2062'dir. MQ taban fonksiyonuyla elde edilen hasta sayılarının minimum hata değeri 0,0005; maksimum hata değeri ise 0,2186'dır. G ve MQ taban fonksiyonları ile elde edilen toplam hatalar sırasıyla 0,6041 ve 0,6139'dur. Toplam hatalara göre, G taban fonksiyonu ile elde edilen sonuçların gerçek verilere daha yakın olduğu görülmektedir.

Tablo 4.14. *α=0,96 kesir mertebesi ve x=0,6 konumu için G ve MQ taban fonksiyonlarıyla elde edilen hasta sayıları ve hatalar*

Yıl	VSR	α=0,96 (G)	Hata	α=0,96 (MQ)	Hata
2005	20535	20535	-	20535	-
2006	20526	19616	0,0443	19616	0,0443
2007	19694	18761	0,0474	18761	0,0474
2008	18452	17956	0,0269	17956	0,0269
2009	17402	17192	0,0121	17195	0,0119
2010	16551	16463	0,0053	16472	0,0048
2011	15679	15765	0,0055	15785	0,0068
2012	14691	15094	0,0274	15133	0,0301
2013	13409	14446	0,0773	14513	0,0823
2014	13378	13822	0,0332	13924	0,0408
2015	12772	13220	0,0351	13363	0,0463
2016	12417	12640	0,0180	12829	0,0332
2017	12046	12082	0,0030	12321	0,0228
2018	11786	11545	0,0204	11837	0,0043
2019	11401	11030	0,0325	11377	0,0021
2020	8925	10536	0,1805	10937	0,2254

Tablo 4.14'te $x = 0{,}6$ konumu için 2006-2020 yılları arasındaki; G taban fonksiyonuyla elde edilen hasta sayılarının minimum hata değeri 0,0030; maksimum

hata değeri ise 0,1805'tir. MQ taban fonksiyonuyla elde edilen hasta sayılarının minimum hata değeri 0,0021; maksimum hata değeri ise 0,2254'tür. G ve MQ taban fonksiyonları ile elde edilen toplam hatalar sırasıyla 0,5689 ve 0,6294'tür. Toplam hatalara göre, G taban fonksiyonu ile elde edilen sonuçların gerçek verilere daha yakın olduğu görülmektedir.

Tablo 4.15. *α=0,96 kesir mertebesi ve x=1,0 konumu için G ve MQ taban fonksiyonlarıyla elde edilen hasta sayıları ve hatalar*

Yıl	VSR	α=0,96 (G)	Hata	α=0,96 (MQ)	Hata
2005	20535	20535	-	20535	-
2006	20526	19617	0,0443	19616	0,0443
2007	19694	18759	0,0475	18762	0,0473
2008	18452	17945	0,0275	17958	0,0268
2009	17402	17157	0,0141	17201	0,0116
2010	16551	16388	0,0098	16487	0,0039
2011	15679	15632	0,0030	15812	0,0085
2012	14691	14895	0,0139	15175	0,0329
2013	13409	14180	0,0575	14572	0,0867
2014	13378	13489	0,0083	14000	0,0465
2015	12772	12825	0,0041	13458	0,0537
2016	12417	12188	0,0184	12943	0,0424
2017	12046	11581	0,0386	12453	0,0338
2018	11786	11002	0,0665	11987	0,0171
2019	11401	10451	0,0833	11543	0,0125
2020	8925	9928	0,1124	11120	0,2459

Tablo 4.15'te $x = 1{,}0$ konumu için 2006-2020 yılları arasındaki; G taban fonksiyonuyla elde edilen hasta sayılarının minimum hata değeri 0,0030; maksimum hata değeri ise 0,1124'tür. MQ taban fonksiyonuyla elde edilen hasta sayılarının minimum hata değeri 0,0039; maksimum hata değeri ise 0,2459'dur. G ve MQ taban fonksiyonları ile elde edilen toplam hatalar sırasıyla 0,5492 ve 0,7139'dur. Toplam hatalara göre, MQ taban fonksiyonu ile elde edilen sonuçların gerçek verilere daha yakın olduğu görülmektedir.

Tablo 4.16'da $x = 0{,}0$, Tablo 4.17'de $x = 0{,}6$ ve Tablo 4.18'de $x = 1{,}0$ konumlarının ve 0,92 kesir mertebesinin hasta birey sayıları ve hatalar verilmiştir.

Tablo 4.16. *α=0,92 kesir mertebesi ve x=0,0 konumu için G ve MQ taban fonksiyonlarıyla elde edilen hasta sayıları ve hatalar*

Yıl	VSR	α=0,92 (G)	Hata	α=0,92 (MQ)	Hata
2005	20535	20535	-	20535	-
2006	20526	19633	0,0435	19634	0,0435
2007	19694	18821	0,0443	18821	0,0443
2008	18452	18067	0,0209	18068	0,0208
2009	17402	17362	0,0023	17362	0,0023
2010	16551	16697	0,0088	16698	0,0089
2011	15679	16068	0,0248	16069	0,0249
2012	14691	15471	0,0531	15473	0,0532
2013	13409	14902	0,1113	14906	0,1116
2014	13378	14358	0,0733	14367	0,0739
2015	12772	13838	0,0835	13853	0,0846
2016	12417	13339	0,0743	13363	0,0762
2017	12046	12860	0,0676	12896	0,0706
2018	11786	12400	0,0521	12450	0,0563
2019	11401	11957	0,0488	12024	0,0546
2020	8925	11531	0,2920	11617	0,3016

Tablo 4.16'da $x = 0{,}0$ konumu için 2006-2020 yılları arasındaki; G taban fonksiyonuyla elde edilen hasta sayılarının minimum hata değeri 0,0023; maksimum hata değeri ise 0,2920'dir. MQ taban fonksiyonuyla elde edilen hasta sayılarının minimum hata değeri 0,0023; maksimum hata değeri ise 0,3016'dır. G ve MQ taban fonksiyonları ile elde edilen toplam hatalar sırasıyla 1,0006 ve 1,0273'tür. Toplam hatalara göre, G taban fonksiyonu ile elde edilen sonuçların gerçek verilere daha yakın olduğu görülmektedir.

Tablo 4.17. *α=0,92 kesir mertebesi ve x=0,6 konumu için G ve MQ taban fonksiyonlarıyla elde edilen hasta sayıları ve hatalar*

Yıl	VSR	α=0,92 (G)	Hata	α=0,92 (MQ)	Hata
2005	20535	20535	-	20535	-
2006	20526	19634	0,0435	19634	0,0435
2007	19694	18820	0,0444	18821	0,0443
2008	18452	18067	0,0209	18068	0,0208
2009	17402	17360	0,0024	17363	0,0022
2010	16551	16692	0,0085	16699	0,0089
2011	15679	16055	0,0240	16072	0,0251
2012	14691	15445	0,0513	15478	0,0536
2013	13409	14859	0,1081	14915	0,1123
2014	13378	14296	0,0686	14380	0,0749
2015	12772	13753	0,0768	13871	0,0860
2016	12417	13231	0,0656	13388	0,0782
2017	12046	12729	0,0567	12927	0,0731
2018	11786	12246	0,0390	12487	0,0595
2019	11401	11781	0,0333	12068	0,0585
2020	8925	11335	0,2700	11668	0,3073

Tablo 4.17'de $x = 0{,}6$ konumu için 2006-2020 yılları arasındaki; G taban fonksiyonuyla elde edilen hasta sayılarının minimum hata değeri 0,0024; maksimum

hata değeri ise 0,2700'dir. MQ taban fonksiyonuyla elde edilen hasta sayılarının minimum hata değeri 0,0022; maksimum hata değeri ise 0,3073'dır. G ve MQ taban fonksiyonları ile elde edilen toplam hatalar sırasıyla 0,9131 ve 1,0482'dir. Toplam hatalara göre, G taban fonksiyonu ile elde edilen sonuçların gerçek verilere daha yakın olduğu görülmektedir.

Tablo 4.18. *α=0,92 kesir mertebesi ve x=1,0 konumu için G ve MQ taban fonksiyonlarıyla elde edilen hasta sayıları ve hatalar*

Yıl	VSR	α=0,92 (G)	Hata	α=0,92 (MQ)	Hata
2005	20535	20535	-	20535	-
2006	20526	19634	0,0435	19634	0,0435
2007	19694	18818	0,0445	18821	0,0443
2008	18452	18058	0,0214	18069	0,0208
2009	17402	17330	0,0041	17369	0,0019
2010	16551	16625	0,0045	16712	0,0097
2011	15679	15939	0,0166	16095	0,0265
2012	14691	15272	0,0395	15514	0,0560
2013	13409	14627	0,0908	14965	0,1160
2014	13378	14005	0,0469	14446	0,0798
2015	12772	13407	0,0497	13953	0,0925
2016	12417	12834	0,0336	13486	0,0861
2017	12046	12286	0,0199	13041	0,0826
2018	11786	11762	0,0020	12617	0,0705
2019	11401	11263	0,0121	12213	0,0712
2020	8925	10786	0,2085	11827	0,3252

Tablo 4.18'de $x = 1{,}0$ konumu için 2006-2020 yılları arasındaki; G taban fonksiyonuyla elde edilen hasta sayılarının minimum hata değeri 0,0020; maksimum hata değeri ise 0,2085'tir. MQ taban fonksiyonuyla elde edilen hasta sayılarının minimum hata değeri 0,0019; maksimum hata değeri ise 0,3252'dir. G ve MQ taban fonksiyonları ile elde edilen toplam hatalar sırasıyla 0,6376 ve 1,1266'dır. Toplam hatalara göre, G taban fonksiyonu ile elde edilen sonuçların gerçek verilere daha yakın olduğu görülmektedir.

Tablo 4.19'da $x = 0{,}0$; Tablo 4.20'de $x = 0{,}6$ ve Tablo 4.21'de $x = 1{,}0$ konumlarının ve 0,88 kesir mertebesinin hasta birey sayıları ve hatalar verilmiştir.

Tablo 4.19. *α=0,88 kesir mertebesi ve x=0,0 konumu için G ve MQ taban fonksiyonlarıyla elde edilen hasta sayıları ve hatalar*

Yıl	VSR	α=0,88 (G)	Hata	α=0,88 (MQ)	Hata
2005	20535	20535	-	20535	-
2006	20526	19648	0,0428	19649	0,0427
2007	19694	18875	0,0416	18875	0,0416
2008	18452	18171	0,0152	18171	0,0152
2009	17402	17519	0,0067	17519	0,0067
2010	16551	16910	0,0217	16910	0,0217
2011	15679	16336	0,0419	16337	0,0420
2012	14691	15794	0,0751	15796	0,0752
2013	13409	15279	0,1395	15283	0,1398
2014	13378	14788	0,1054	14795	0,1059
2015	12772	14320	0,1212	14332	0,1221
2016	12417	13871	0,1171	13890	0,1186
2017	12046	13440	0,1157	13468	0,1180
2018	11786	13027	0,1053	13065	0,1085
2019	11401	12629	0,1077	12680	0,1122
2020	8925	12245	0,3720	12312	0,3795

Tablo 4.19'da $x = 0{,}0$ konumu için 2006-2020 yılları arasındaki; G taban fonksiyonuyla elde edilen hasta sayılarının minimum hata değeri 0,0067; maksimum hata değeri ise 0,3720'dir. MQ taban fonksiyonuyla elde edilen hasta sayılarının minimum hata değeri 0,0067; maksimum hata değeri ise 0,3795'tir. G ve MQ taban fonksiyonları ile elde edilen toplam hatalar sırasıyla 1,4289 ve 1,4497'dir. Toplam hatalara göre, G taban fonksiyonu ile elde edilen sonuçların gerçek verilere daha yakın olduğu görülmektedir.

Tablo 4.20. *α=0,88 kesir mertebesi ve x=0,6 konumu için G ve MQ taban fonksiyonlarıyla elde edilen hasta sayıları ve hatalar*

Yıl	VSR	α=0,88 (G)	Hata	α=0,88 (MQ)	Hata
2005	20535	20535	-	20535	-
2006	20526	19649	0,0427	19649	0,0427
2007	19694	18875	0,0416	18875	0,0416
2008	18452	18171	0,0152	18171	0,0152
2009	17402	17518	0,0067	17520	0,0068
2010	16551	16905	0,0214	16911	0,0218
2011	15679	16325	0,0412	16339	0,0421
2012	14691	15772	0,0736	15800	0,0755
2013	13409	15244	0,1368	15290	0,1403
2014	13378	14736	0,1015	14806	0,1067
2015	12772	14249	0,1156	14347	0,1233
2016	12417	13781	0,1098	13910	0,1202
2017	12046	13331	0,1067	13493	0,1201
2018	11786	12897	0,0943	13096	0,1111
2019	11401	12481	0,0947	12717	0,1154
2020	8925	12080	0,3535	12354	0,3842

Tablo 4.20'de $x = 0{,}6$ konumu için 2006-2020 yılları arasındaki; G taban fonksiyonuyla elde edilen hasta sayılarının minimum hata değeri 0,0067; maksimum

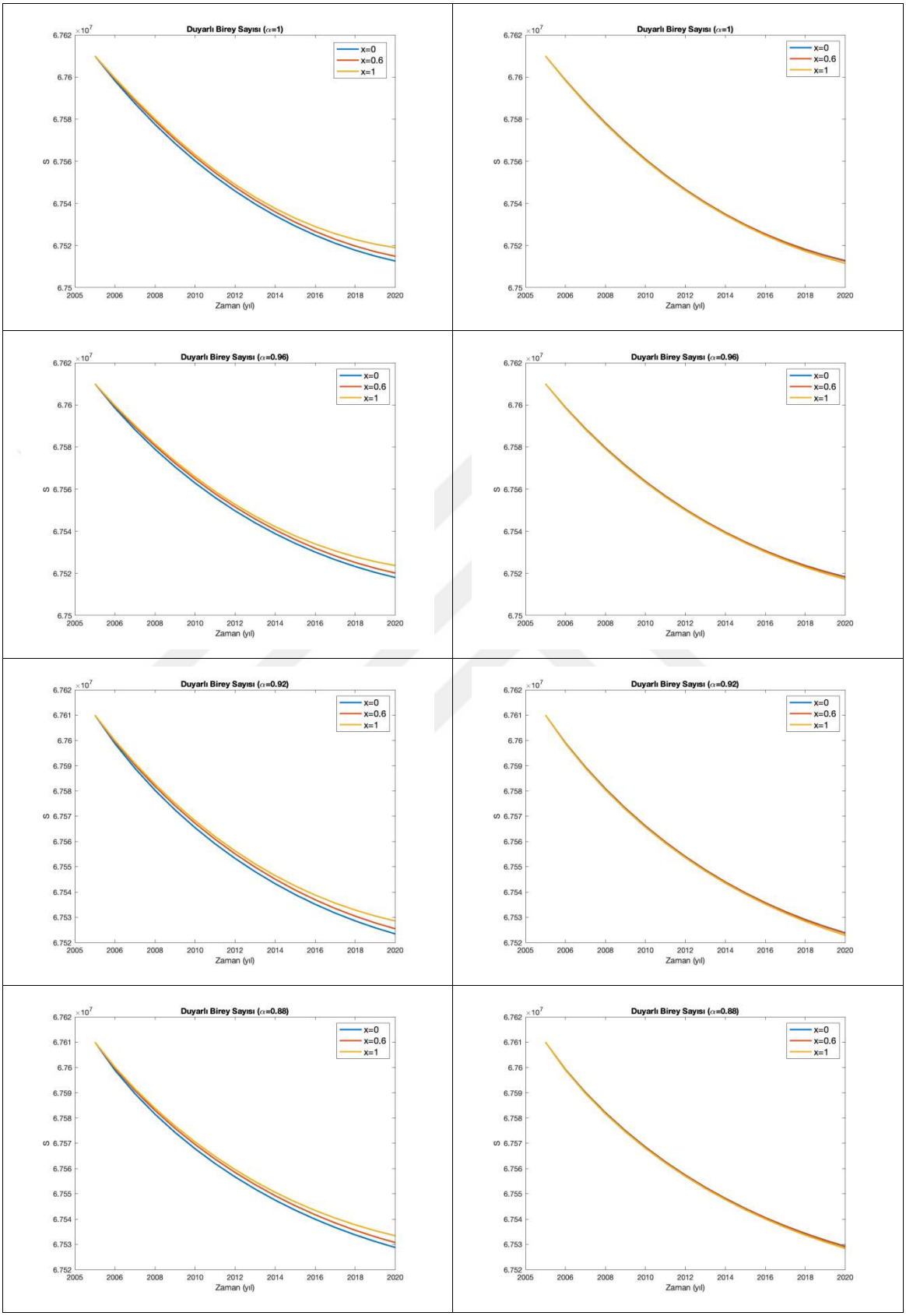
hata değeri ise 0,3535'tir. MQ taban fonksiyonuyla elde edilen hasta sayılarının minimum hata değeri 0,0068; maksimum hata değeri ise 0,3842'dir. G ve MQ taban fonksiyonları ile elde edilen toplam hatalar sırasıyla 1,3553 ve 1,4670'dir. Toplam hatalara göre, G taban fonksiyonu ile elde edilen sonuçların gerçek verilere daha yakın olduğu görülmektedir.

Tablo 4.21. *α=0,88 kesir mertebesi ve x=1,0 konumu için G ve MQ taban fonksiyonlarıyla elde edilen hasta sayıları ve hatalar*

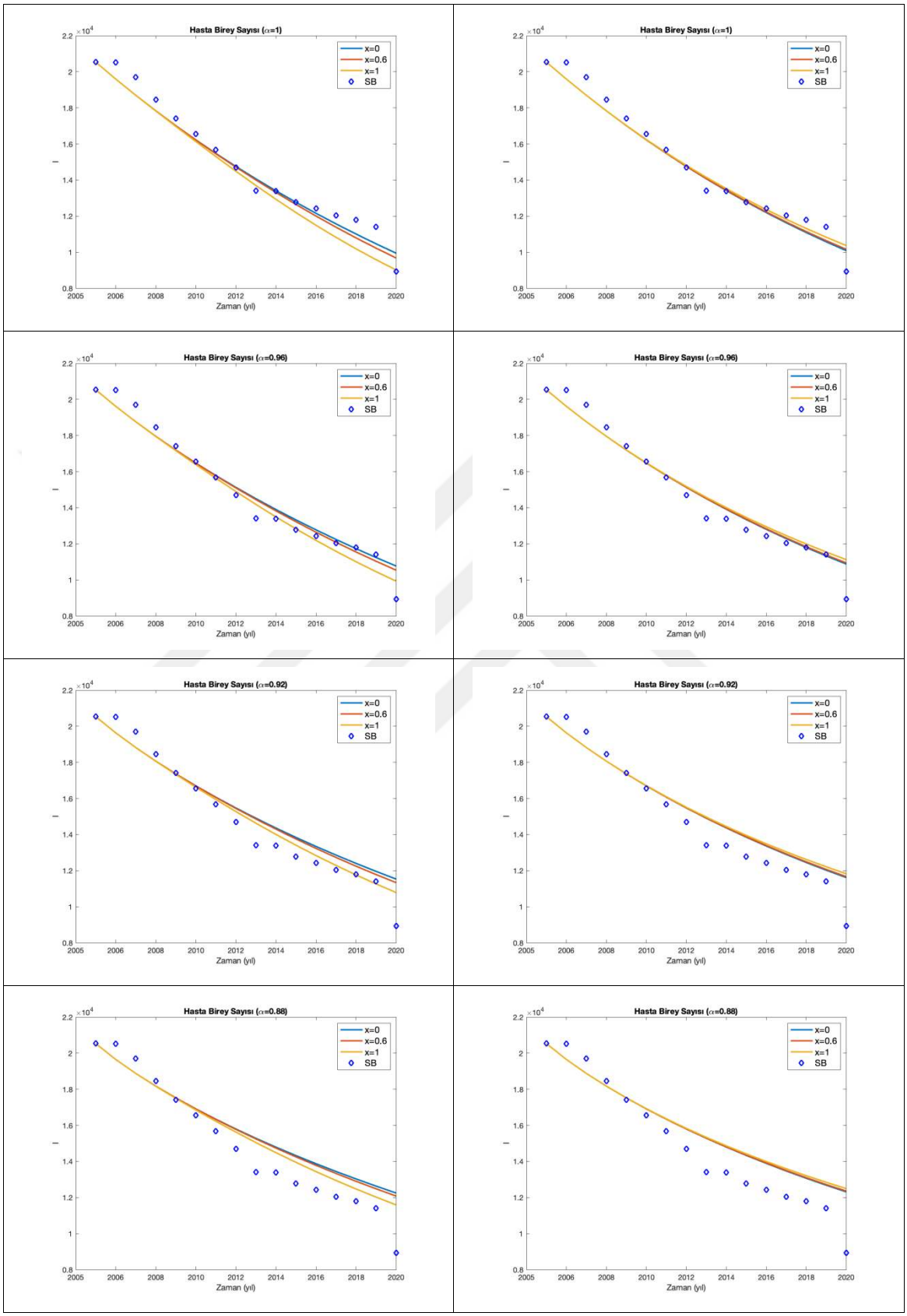
Yıl	VSR	α=0,88 (G)	Hata	α=0,88 (MQ)	Hata
2005	20535	20535	-	20535	-
2006	20526	19649	0,0427	19649	0,0427
2007	19694	18873	0,0417	18876	0,0415
2008	18452	18162	0,0157	18173	0,0151
2009	17402	17491	0,0051	17525	0,0071
2010	16551	16847	0,0179	16923	0,0225
2011	15679	16223	0,0347	16360	0,0434
2012	14691	15622	0,0634	15831	0,0776
2013	13409	15042	0,1218	15333	0,1435
2014	13378	14483	0,0826	14863	0,1110
2015	12772	13947	0,0920	14417	0,1288
2016	12417	13433	0,0818	13994	0,1270
2017	12046	12941	0,0743	13591	0,1283
2018	11786	12470	0,0580	13208	0,1207
2019	11401	12020	0,0543	12842	0,1264
2020	8925	11589	0,2985	12492	0,3997

Tablo 4.21'de $x = 1{,}0$ konumu için 2006-2020 yılları arasındaki; G taban fonksiyonuyla elde edilen hasta sayılarının minimum hata değeri 0,0051; maksimum hata değeri ise 0,2985'tir. MQ taban fonksiyonuyla elde edilen hasta sayılarının minimum hata değeri 0,0071; maksimum hata değeri ise 0,3997'dir. G ve MQ taban fonksiyonları ile elde edilen toplam hatalar sırasıyla 1,0845 ve 1,5353'tür. Toplam hatalara göre, G taban fonksiyonu ile elde edilen sonuçların gerçek verilere daha yakın olduğu görülmektedir.

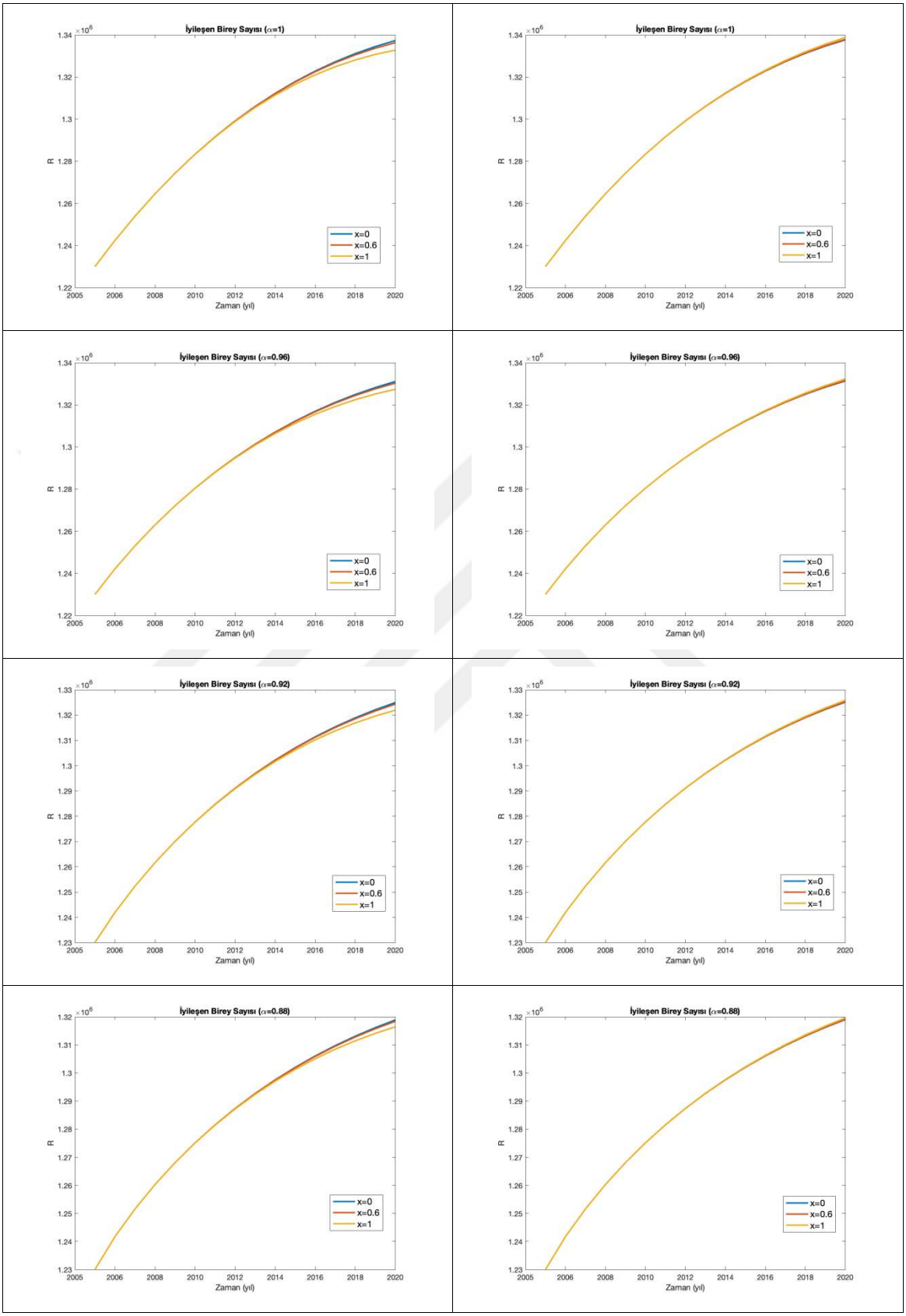
G ve MQ taban fonksiyonlarıyla 1, 0,96; 0,92 ve 0,88 kesir mertebeleri için $x = 0{,}0;\ 0{,}6$ ve $1{,}0$ konumlarındaki $S(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının grafikleri Şekil 4.5, Şekil 4.6 ve Şekil 4.7'de verilmiştir,



Şekil 4.5. *Sırasıyla G ve MQ taban fonksiyonlarıyla 1; 0,96; 0,92 ve 0,88 kesir mertebeleri için elde edilen duyarlı birey sayılarının grafikleri*



Şekil 4.6. *Sırasıyla G ve MQ taban fonksiyonlarıyla 1; 0,96; 0,92 ve 0,88 kesir mertebeleri için elde edilen hasta birey sayılarının grafikleri*



Şekil 4.7. *Sırasıyla G ve MQ taban fonksiyonlarıyla 1; 0,96; 0,92 ve 0,88 kesir mertebeleri için elde edilen iyileşen birey sayılarının grafikleri*

Şekil 4.5'teki grafiklerde, G taban fonksiyonuyla elde edilen duyarlı birey sayıları konuma göre değişirken, MQ taban fonksiyonuyla üç konum için elde edilen sonuçlar birbirlerine oldukça yakındır.

Şekil 4.6'daki grafiklerde Türkiye'de Verem Savaşındaki gerçek hasta sayıları da gösterilmektedir. G taban fonksiyonuyla elde edilen hasta birey sayılarının konuma göre değişkenlik göstermesi özellikle 0,96 kesir mertebesinin grafiğinde görüldüğü gibi gerçek hasta sayılarına daha yakın değerler elde etmeyi sağlamıştır. MQ taban fonksiyonuyla üç konum için elde edilen sonuçlar ise birbirlerine oldukça yakındır.

Şekil 4.7'deki iyileşen birey sayılarının grafiklerinde MQ taban fonksiyonuyla üç konum için elde edilen iyileşen birey sayılarının birbirlerine yakın oldukları görülmektedir.

Grafiklerdeki konum değerinin sonuçlara etkisi ile kesir mertebenin sonuçlara etkisi karşılaştırıldığında, kesir mertebedeki değişikliğin sonuçlarda daha etkili olduğu görülmektedir.

5. İNFLUENZA HASTALIĞININ KESİR MERTEBELİ SEIR MATEMATİKSEL MODELİNİN RBFC METODUYLA SAYISAL ÇÖZÜMÜ

İnfluenza hastalığı için (3.8)'de verilen kesir mertebeli difüzyon etkili SEIR matematiksel modeli ele alınmıştır.

Bu çalışmada influenza hastalığı için ele alınan SEIR matematiksel modelinin parametre ve başlangıç değerleri Samsuzzoha'nın (2012) çalışmasından alınmıştır. Samsuzzoha'nın (2012) çalışmasında difüzyon etkili epidemik modeller araştırılmıştır. Bu modeller kısmi diferansiyel denklem sistemlerinden oluşan; SEIR, SEIRS ve aşı etkisinin de göz önünde bulundurulduğu SVEIRS matematiksel modelleridir. Farklı başlangıç koşulları, farklı parametrelerle difüzyon etkisi üç ayrı konum için araştırılmıştır.

Çalışmada kesir mertebeli difüzyon etkisiz SEIR matematiksel modeliyle elde edilen sayısal sonuçların grafikleri ile bu grafiklerden alınan 1. ve 2. pik noktalarının gün ve oran değerleri; Samsuzzoha'nın (2012) çalışmasındaki grafiklerle ve pik noktalarının gün ve oran değerleriyle karşılaştırılmıştır. Böylece çalışmada elde edilen sayısal sonuçların; aynı matematiksel model ile aynı parametre ve başlangıç değerleri için ileri Euler yöntemiyle elde edilen sonuçlarla aynı doğrultuda olması, yapılan hesaplamaların kabul edilebilirliğini göstermiştir.

Çalışmanın bu bölümünde kullanılan parametreler Tablo 5.1'de ve başlangıç değerleri (5.1) denkleminde verilmiştir.

Tablo 5.1. *Difüzyon etkili kesir mertebeli SEIR matematiksel modeli parametreleri ve değerleri (Samsuzzoha, 2012)*

Parametreler	Tanımlar	Değerler
β	Temas oranı	0,514
α	Grip kaynaklı ölüm oranı	$9{,}3\times10^{-6}$
r	Yeni doğan oranı	$7{,}14\times10^{-5}$
δ	Bağışıklık kaybının süresi	365^{-1}
σ	Ortalama gecikme süresi	0,5
γ	Ortalama iyileşme süresi	0,2
κ	Günlük temaslı iyileşme oranı	$1{,}857\times10^{-4}$

S, E, I ve R parametrelerinin başlangıç değerleri aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} S_0 &= 0{,}96exp\left(-\left(\frac{x}{1{,}4}\right)^2\right), \quad -2 \le x \le 2 \\ E_0 &= 0, \quad -2 \le x \le 2 \\ I_0 &= 0{,}04exp(-x^2), \quad -2 \le x \le 2 \\ R_0 &= 0, \quad -2 \le x \le 2 \end{aligned} \tag{5.1}$$

d_1, d_2, d_3 ve d_4 difüzyon katsayılarının değerleri, Samsuzzoha'nın (2012) çalışmasındaki difüzyon katsayıları göz önünde bulundurularak en uygun değerlendirilmiştir. Çalışmada farklı difüzyon katsayıları için araştırma yapılmıştır.

5.1. Difüzyon Etkili SEIR Model Caputo Kesir Mertebeli Türev Yaklaşımı

Kesir mertebeli difüzyon etkili SEIR matematiksel modelinin (3.8) denkleminde verilen denklem sistemindeki ikinci mertebeden kısmi türevli difüzyon etkilerine ortalama yaklaşımı uygulanarak Caputo kesir mertebeden türev yaklaşımına 2.2.4. Yardımcı Teoremi uygulandığında, aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\begin{aligned} &S^{n+1} - \frac{d_1}{2a_0}S_{xx}^{n+1} \\ &\quad = S^n + \sum_{k=1}^{n} b_k(S^{n-k} - S^{n+1-k}) \\ &\quad + \frac{1}{a_0}\left((\alpha-\beta)S^nI^n - rS^n + \delta R^n + r\right) + d_1\frac{S_{xx}^n}{2} \\ &E^{n+1} - \frac{d_2}{2a_0}E_{xx}^{n+1} \\ &\quad = E^n + \sum_{k=1}^{n} b_k(E^{n-k} - E^{n+1-k}) \\ &\quad + \frac{1}{a_0}(\beta S^nI^n - (\sigma+\kappa+r)E^n + \alpha I^nE^n) + d_2\frac{E_{xx}^n}{2} \\ &I^{n+1} - \frac{d_3}{2a_0}I_{xx}^{n+1} \\ &\quad = I^n + \sum_{k=1}^{n} b_k(I^{n-k} - I^{n+1-k}) \\ &\quad + \frac{1}{a_0}(\sigma E^n - (\alpha+\gamma+r)I^n + \alpha(I^n)^2) + d_3\frac{I_{xx}^n}{2} \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$R^{n+1} - \frac{d_4}{2a_0} R_{xx}^{n+1} = R^n + \sum_{k=1}^{n} b_k (R^{n-k} - R^{n+1-k}) + \frac{1}{a_0}(\kappa E^n + \gamma I^n - (\delta + r)R^n + \alpha I^n R^n) + d_4 \frac{R_{xx}^n}{2}$$

5.1.1. RBFC Metodunun difüzyon etkili ve etkisiz SEIR matematiksel modeline uygulanması

SEIR matematiksel modeline RBFC metodunu uygulamak için (4.3) ve (4.4) denklemlerinde yapılan yaklaşımlar (5.2) denkleminde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\, \lambda_j^{n+1} - \frac{d_1}{2a_0} \sum_{j=1}^{N} \phi_j''(x_i)\, \lambda_j^{n+1} \\
&\quad = \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\, \lambda_j^{n} + \sum_{k=1}^{n} b_k \left(\sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\, \lambda_j^{n-k} - \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\, \lambda_j^{n+1-k} \right) \\
&\quad + \frac{1}{a_0} \Bigg((\alpha - \beta) \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\, \lambda_j^{n} \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\, \lambda_j^{n} - r \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\, \lambda_j^{n} \\
&\quad + \delta \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\, \lambda_j^{n} + r \Bigg) + d_1 \frac{\sum_{j=1}^{N} \phi_j''(x_i)\, \lambda_j^{n}}{2}
\end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\, \lambda_j^{n+1} - \frac{d_2}{2a_0} \sum_{j=1}^{N} \phi_j''(x_i)\, \lambda_j^{n+1} \\
&\quad = \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\, \lambda_j^{n} + \sum_{k=1}^{n} b_k \left(\sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\, \lambda_j^{n-k} - \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\, \lambda_j^{n+1-k} \right) \\
&\quad + \frac{1}{a_0} \Bigg(\beta \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\, \lambda_j^{n} \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\, \lambda_j^{n} - (\sigma + \kappa + r) \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\, \lambda_j^{n} \\
&\quad + \alpha \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\, \lambda_j^{n} \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\, \lambda_j^{n} \Bigg) + d_2 \frac{\sum_{j=1}^{N} \phi_j''(x_i)\, \lambda_j^{n}}{2}
\end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\,\lambda_j^{n+1} - \frac{d_3}{2a_0}\sum_{j=1}^{N} \phi_j''(x_i)\,\lambda_j^{n+1}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\,\lambda_j^{n} + \sum_{k=1}^{n} b_k \left(\sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\,\lambda_j^{n-k} - \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\,\lambda_j^{n+1-k} \right)$$

$$+ \frac{1}{a_0}\left(\sigma \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\,\lambda_j^{n} - (\alpha+\gamma+r) \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\,\lambda_j^{n} \right.$$

$$\left. + \alpha \left(\sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\,\lambda_j^{n} \right)^2 \right) + d_3 \frac{\sum_{j=1}^{N} \phi_j''(x_i)\,\lambda_j^{n}}{2}$$

$$\sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\,\lambda_j^{n+1} - \frac{d_4}{2a_0}\sum_{j=1}^{N} \phi_j''(x_i)\,\lambda_j^{n+1}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\,\lambda_j^{n} + \sum_{k=1}^{n} b_k \left(\sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\,\lambda_j^{n-k} - \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\,\lambda_j^{n+1-k} \right)$$

$$+ \frac{1}{a_0}\left(\kappa \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\,\lambda_j^{n} + \gamma \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\,\lambda_j^{n} - (\delta+r) \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\,\lambda_j^{n} \right.$$

$$\left. + \alpha \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\,\lambda_j^{n} \sum_{j=1}^{N} \phi_j(x_i)\,\lambda_j^{n} \right) + d_4 \frac{\sum_{j=1}^{N} \phi_j''(x_i)\,\lambda_j^{n}}{2}$$

$i = 1, 2, 3, \ldots, N$ olmak üzere, her biri N bilinmeyenli 4 denklemden oluşan bir denklem sistemi elde edilir. Difüzyon etkili kesir mertebeli SEIR Matematiksel Modeline Caputo kesir mertebeli türev yaklaşımının uygulandığı bu denklem sisteminin çözümünde; Caputo kesir mertebeli türev yaklaşımı ile fark denklemi elde edildikten sonra RBFC metodu uygulanmıştır. Bu metodun uygulanmasında taban fonksiyon olarak G ve MQ fonksiyonları seçilmiştir.

Çalışmanın bu bölümünde difüzyon etkili kesir mertebeli SEIR matematiksel modeli,

$$d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 0{,}0$$

$$d_1 = 0{,}001;\ d_2 = 0{,}025;\ d_3 = 0{,}001;\ d_4 = 0{,}0$$

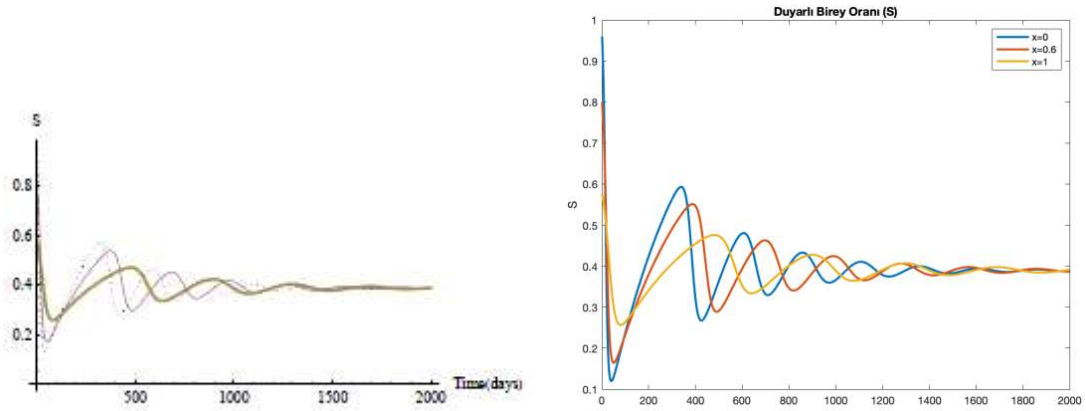
ve

$$d_1 = 0{,}0005;\ d_2 = 0{,}025;\ d_3 = 0{,}001;\ d_4 = 0{,}0$$

olmak üzere üç farklı difüzyon katsayı ile ele alınmıştır. Üç difüzyon katsayısı için de G ve MQ taban fonksiyonlarıyla difüzyon etkili kesir mertebeli SEIR matematiksel modelinin 1; 0,98; 0,96 ve 0,94 kesir mertebelerindeki *Duyarlı birey oranı (S(t)), Temaslı birey oranı (E(t)), Hasta birey oranı (I(t)) ve İyileşen birey oranı (R(t))* sayısal sonuçları elde edilmiş ve $x = 0{,}0;\ 0{,}6$ ve $1{,}0$ konumlarındaki grafikleri çizdirilmiştir. Elde edilen bu sonuçlar I., II. ve III. durum başlıkları altında verilmiştir.

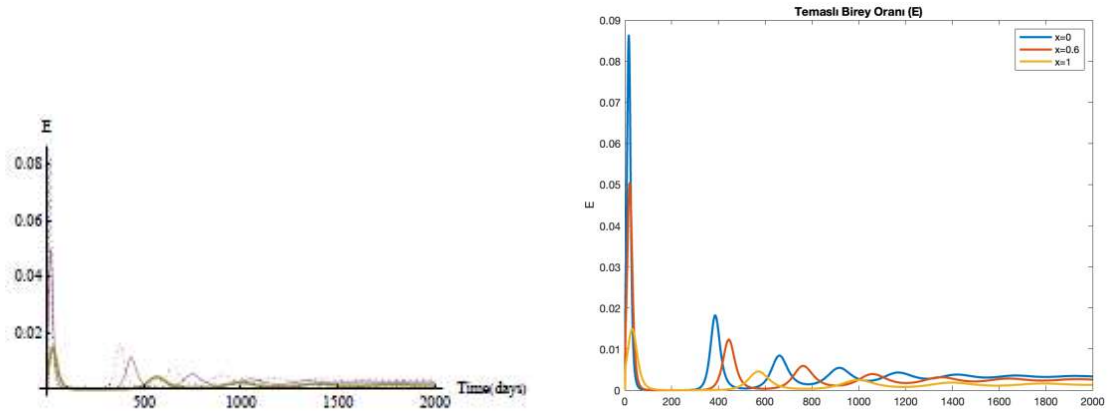
I. Durum

Difüzyon katsayıları $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 0{,}0$ alınarak difüzyon etkisiz sonuçlar elde edilmiş ve grafikleri çizdirilmiştir. Bu grafiklerden kesir mertebesi 1 olanlar, difüzyon etkisiz tam mertebeden SEIR matematiksel modeli şeklinde ayrıca ele alınarak, literatürde yer alan Samsuzzoha'nın (2012) çalışmasındaki difüzyon etkisiz $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının grafikleriyle karşılaştırmaları sırasıyla Şekil 5.1, Şekil 5.2, Şekil 5.3 ve Şekil 5.4'te gösterilmiştir. G ve MQ taban fonksiyonları için elde edilen sonuçlar birbirine çok yakın olduğu için sadece G taban fonksiyonu ile edilen sonuçların grafikleri verilmiştir.



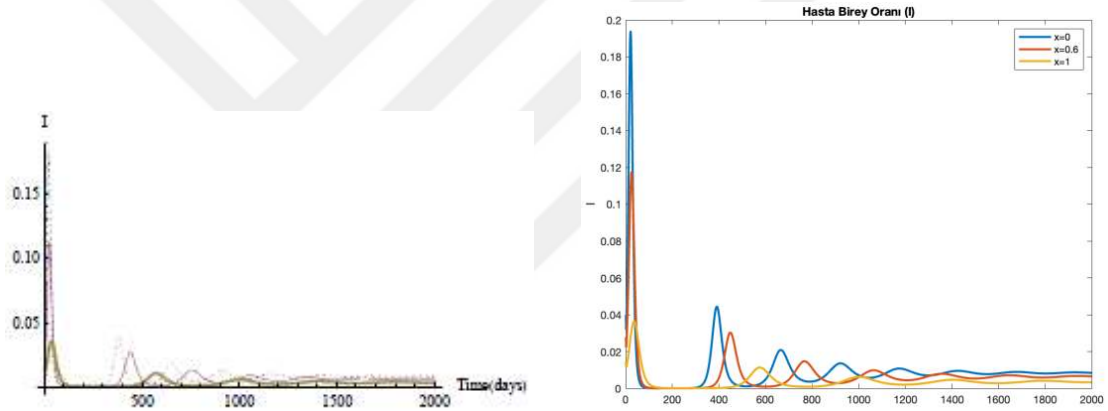
Şekil 5.1. *Difüzyon etkisiz tam mertebeden SEIR matematiksel modelinin duyarlı birey oranı grafikleri (Samsuzzoha, 2012)*

Duyarlı birey oranı grafiklerinin salınımları yaklaşık 1500 gün kadar devam etmiş ve grafikler 0,4'e yakın bir değerde sabitlenmiştir.



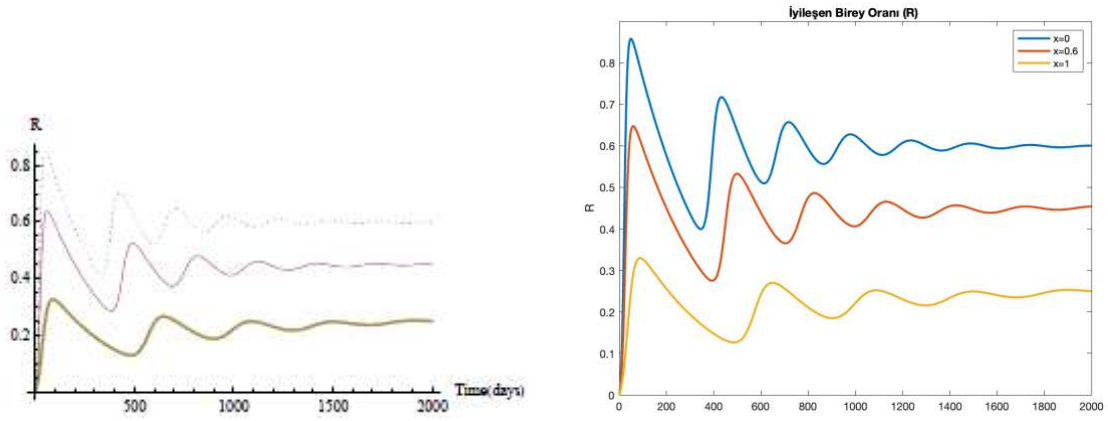
Şekil 5.2. *Difüzyon etkisiz tam mertebeden SEIR matematiksel modelinin temaslı birey oranı grafikleri (Samsuzzoha, 2012)*

Temaslı birey oranı grafiklerinin salınımları yaklaşık 1500 gün kadar devam etmiş ve grafikler 0'a yakın bir değerde sabitlenmiştir.



Şekil 5.3. *Difüzyon etkisiz tam mertebeden SEIR matematiksel modelinin hasta birey oranı grafikleri (Samsuzzoha, 2012)*

Hasta birey oranı grafiklerinin de Temaslı birey oranı grafiklerine benzer şekilde salınımları yaklaşık 1500 gün kadar devam etmiş ve grafikler 0'a yakın bir değerde sabitlenmiştir.



Şekil 5.4. *Difüzyon etkisiz tam mertebeden SEIR matematiksel modelinin iyileşen birey oranı grafikleri (Samsuzzoha, 2012)*

İyileşen birey oranı grafiklerinin salınımları yaklaşık 1500 gün kadar devam etmiş ve $x = 0{,}0;\ 0{,}6$ ve $1{,}0$ konumlarının grafikleri sırasıyla 0,6; 0,45 ve 0,25'e yakın değerlerde sabitlenmiştir.

Grafikler karşılaştırıldığında; iki çalışmada da influenza hastalığının SEIR matematiksel modelinin her kompartımanı için yaklaşık 1500 gün boyunca devam ettikleri, sonrasında sabit bir değerde kararlı hâle geldikleri görülmektedir. Grafiklerdeki salınımların 1. ve 2. pik noktalarına karşılık gelen gün ve oran değerlerinin karşılaştırmaları ayrıntılı olarak aşağıdaki tablolarda verilmiştir.

Difüzyon etkisiz 1; 0,98; 0,96 ve 0,94'üncü mertebeden G ve MQ taban fonksiyonları ile elde edilen $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonların $x = 0{,}0;\ 0{,}6$ ve $1{,}0$ konumlarındaki grafiklerinin 1. ve 2. pik noktalarının gün ve oran değerleri tablolarda verilmiştir.

Difüzyon etkisiz tam mertebeden SEIR matematiksel modeli şeklinde ele alınarak elde edilen $x = 0{,}0$ konumundaki 1. ve 2. pik noktalarının gün ve oran değerleri Tablo 5.2 ve Tablo 5.4'te Samsuzzoha'nın (2012) çalışmasındaki sonuçlarla birlikte verilmiştir. Çalışmanın devamında da grafiklerde olduğu gibi karşılaştırma yapmak amacıyla tam mertebenin sonuçları ayrı tablolar hâlinde oluşturulmuştur.

Tablo 5.3 ve Tablo 5.5'te 0,98; 0,96 ve 0,94'üncü mertebeden G ve MQ taban fonksiyonları ile elde edilen $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonların $x = 0{,}0$ konumundaki 1. ve 2. pik noktalarının gün ve oran değerleri verilmiştir.

Tablo 5.2. *G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=1 mertebesi için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,0 konumundaki 1. pik noktalarının değerleri*

	Samsuzzoha		**G (α=1)**		**MQ (α=1)**	
	Gün	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**
S	300	0,58	340	0,593	339	0,593
E	40	0,085	17	0,086	17	0,086
I	40	0,18	21	0,194	21	0,194
R	100	0,84	50	0,857	49	0,858

Tablo 5.2'deki Samsuzzoha'nın çalışmasındaki veriler ile RBFC metoduyla elde edilen veriler karşılaştırıldığında; $S(t)$ fonksiyonunun ilk pik yaptığı gün G taban fonksiyonuyla elde edilen sonuçlarda 40 gün, MQ taban fonksiyonuyla elde edilen sonuçlarda ise 39 gün daha geç meydana gelirken; $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının ilk pik yaptıkları günler daha erken meydana gelmiştir. Oranların değerlerine bakıldığında birbirlerine yakın oldukları görülmüştür.

Tablo 5.3. *G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=0,98; 0,96 ve 0,94 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,0 konumundaki 1. pik noktalarının değerleri*

	G (α=0,98)		**MQ (α=0,98)**		**G (α=0,96)**		**MQ (α=0,96)**		**G (α=0,94)**		**MQ (α=0,94)**	
	Gün	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**
S	277	0,486	277	0,486	271	0,457	277	0,486	272	0,436	272	0,436
E	17	0,086	17	0,085	18	0,085	18	0,085	19	0,084	19	0,084
I	22	0,190	22	0,190	22	0,188	22	0,188	23	0,185	23	0,185
R	52	0,837	52	0,837	55	0,816	55	0,817	57	0,797	58	0,797

G ve MQ taban fonksiyonlarıyla elde edilen 1. pik noktalarının gün ve oran değerleri karşılaştırıldığında; 0,98 kesir mertebe için dört fonksiyonun da gün ve oran değerlerinin aynı olduğu; 0,96 kesir mertebe için $S(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarında farklılık olduğu; 0,94 kesir mertebe için $R(t)$ fonksiyonun sadece gününde farklılık olduğu görülmektedir.

Tablo 5.4. *G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=1 mertebesi için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,0 konumundaki 2. pik noktalarının değerleri*

	Samsuzzoha		**G (α=1)**		**MQ (α=1)**	
	Gün	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**
S	600	0,45	608	0,481	606	0,481
E	380	0,015	387	0,018	386	0,018
I	380	0,04	390	0,044	391	0,044
R	450	0,68	433	0,717	433	0,717

Tablo 5.4'teki Samsuzzoha'nın çalışmasındaki veriler ile RBFC metoduyla elde edilen veriler karşılaştırıldığında; $S(t)$, $E(t)$ ve $I(t)$ fonksiyonlarının 2. pik yaptığı günler G taban fonksiyonuyla elde edilen sonuçlarda sırasıyla 8, 7 ve 10 gün, MQ taban fonksiyonuyla elde edilen sonuçlarda ise sırasıyla 6, 6 ve 11 gün daha geç meydana

gelirken; $R(t)$ fonksiyonlarının 2. pik yaptıkları gün iki taban fonksiyon için de 17 gün daha erken meydana gelmiştir. Oranların değerlerine bakıldığında dört fonksiyon için de her iki taban fonksiyonuyla elde edilen oran değerlerinin birbirine eşit, karşılaştırılan çalışmadaki oran değerlerine yakın oldukları görülmüştür.

Tablo 5.5. *G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=0,98; 0,96 ve 0,94 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,0 konumundaki 2. pik noktalarının değerleri*

	G (α=0,98)		MQ (α=0,98)		G (α=0,96)		MQ (α=0,96)		G (α=0,94)		MQ (α=0,94)	
	Gün	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**
S	544	0,425	544	0,425	555	0,409	544	0,425	578	0,399	578	0,399
E	335	0,009	335	0,009	336	0,007	336	0,007	342	0,006	342	0,006
I	340	0,021	340	0,021	341	0,017	341	0,017	349	0,014	349	0,014
R	395	0,655	395	0,655	404	0,635	404	0,636	419	0,623	419	0,623

G ve MQ taban fonksiyonlarıyla elde edilen 2. pik noktalarının gün ve oran değerleri karşılaştırıldığında; 0,98 kesir mertebe için dört fonksiyonun da gün ve oran değerlerinin aynı olduğu; 0,96 kesir mertebe için $S(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarında farklılık olduğu; 0,94 kesir mertebe için dört fonksiyonun da gün ve oran değerlerinin aynı olduğu görülmektedir.

Difüzyon etkisiz tam mertebeden SEIR matematiksel modeli şeklinde ele alınarak elde edilen $x = 0{,}6$ konumundaki 1. ve 2. pik noktalarının gün ve oran değerleri Tablo 5.6 ve Tablo 5.8'de Samsuzzoha'nın (2012) çalışmasındaki sonuçlarla birlikte verilmiştir.

Tablo 5.7 ve Tablo 5.9'da 0,98; 0,96 ve 0,94'üncü mertebeden G ve MQ taban fonksiyonları ile elde edilen $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonların $x = 0{,}6$ konumundaki 1. ve 2. pik noktalarının gün ve oran değerleri verilmiştir.

Tablo 5.6. *G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=1 mertebesi için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,6 konumundaki 1. pik noktalarının değerleri*

	Samsuzzoha		G (α=1)		MQ (α=1)	
	Gün	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**
S	400	0,50	390	0,551	387	0,551
E	45	0,05	21	0,050	21	0,050
I	45	0,11	25	0,117	25	0,117
R	150	0,64	59	0,647	59	0,647

Tablo 5.6'daki Samsuzzoha'nın çalışmasındaki veriler ile RBFC metoduyla elde edilen veriler karşılaştırıldığında; $S(t)$ fonksiyonunun ilk pik yaptığı gün G taban fonksiyonuyla elde edilen sonuçlarda 10 gün, MQ taban fonksiyonuyla elde edilen sonuçlarda ise 13 gün; $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının ilk pik yaptıkları günler ve

oran değerleri her iki taban fonksiyon için aynı elde edilmiş, ancak bu sonuçlar sırasıyla 24, 20 ve 91 gün daha erken meydana gelmiştir. Oranların değerlerine bakıldığında birbirlerine yakın oldukları görülmüştür.

Tablo 5.7. *G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=0,98; 0,96 ve 0,94 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,6 konumundaki 1. pik noktalarının değerleri*

	G (α=0,98)		**MQ (α=0,98)**		**G (α=0,96)**		**MQ (α=0,96)**		**G (α=0,94)**		**MQ (α=0,94)**	
	Gün	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**
S	327	0,472	327	0,471	324	0,448	327	0,471	329	0,431	329	0,431
E	22	0,050	22	0,049	22	0,049	22	0,049	23	0,049	23	0,049
I	26	0,115	26	0,116	27	0,114	27	0,114	29	0,112	28	0,112
R	62	0,631	62	0,631	66	0,615	66	0,615	70	0,599	70	0,599

G ve MQ taban fonksiyonlarıyla elde edilen 1. pik noktalarının gün ve oran değerleri karşılaştırıldığında; 0,98 kesir mertebe için dört fonksiyonun da günlerin aynı, oran değerlerinin de oldukça yakın olduğu; 0,96 kesir mertebe için sadece $S(t)$ fonksiyonunun gün ve oran değerlerinin farklı, diğer fonksiyonların gün ve oran değerlerinin aynı olduğu; 0,94 kesir mertebe için $I(t)$ fonksiyonunun sadece gününde farklılık olduğu görülmektedir.

Tablo 5.8. *G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=1 mertebesi için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,6 konumundaki 2. pik noktalarının değerleri*

	Samsuzzoha		**G (α=1)**		**MQ (α=1)**	
	Gün	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**
S	650	0,42	700	0,463	697	0,463
E	375	0,01	446	0,012	444	0,012
I	375	0,03	450	0,030	449	0,030
R	525	0,54	496	0,532	499	0,533

Tablo 5.8'deki Samsuzzoha'nın çalışmasındaki veriler ile RBFC metoduyla elde edilen veriler karşılaştırıldığında; $S(t)$, $E(t)$ ve $I(t)$ fonksiyonlarının 2. pik yaptığı günler G taban fonksiyonuyla elde edilen sonuçlarda sırasıyla 50, 71 ve 75 gün, MQ taban fonksiyonuyla elde edilen sonuçlarda ise sırasıyla 47, 69 ve 74 gün daha geç meydana gelirken; $R(t)$ fonksiyonlarının ikinci pik yaptıkları gün G taban fonksiyon için 29 gün, MQ taban fonksiyon için 26 gün daha erken meydana gelmiştir. Oranların değerlerine bakıldığında $R(t)$ fonksiyonu dışındakiler için her iki taban fonksiyonuyla elde edilen oran değerlerinin birbirine eşit ve karşılaştırılan çalışmadaki oran değerlerine yakın oldukları görülmüştür.

Tablo 5.9. *G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=0,98; 0,96 ve 0,94 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,6 konumundaki 2. pik noktalarının değerleri*

	G (α=0,98)		MQ (α=0,98)		G (α=0,96)		MQ (α=0,96)		G (α=0,94)		MQ (α=0,94)	
	Gün	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**
S	640	0,420	642	0,419	659	0,406	640	0,420	692	0,398	692	0,398
E	396	0,006	396	0,006	401	0,005	401	0,005	414	0,004	414	0,004
I	401	0,015	401	0,015	407	0,012	407	0,012	420	0,010	420	0,010
R	465	0,482	465	0,482	480	0,465	480	0,465	504	0,454	504	0,454

G ve MQ taban fonksiyonlarıyla elde edilen 2. pik noktalarının gün ve oran değerleri karşılaştırıldığında; 0,98 kesir mertebe için $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının gün ve oran değerlerinin aynı olduğu; 0,96 kesir mertebe için de $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının gün ve oran değerlerinin aynı olduğu; 0,94 kesir mertebe için dört fonksiyonun da gün ve oran değerlerinin aynı olduğu görülmektedir.

Difüzyon etkisiz tam mertebeden SEIR matematiksel modeli şeklinde ele alınarak elde edilen $x = 1{,}0$ konumundaki 1. ve 2. pik noktalarının gün ve oran değerleri sırasıyla Tablo 5.10 ve Tablo 5.12'de Samsuzzoha'nın (2012) çalışmasındaki sonuçlarla birlikte verilmiştir.

Tablo 5.11 ve Tablo 5.13'te 0,98; 0,96 ve 0,94'üncü mertebeden G ve MQ taban fonksiyonları ile elde edilen $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonların $x = 1{,}0$ konumundaki 1. ve 2. pik noktalarının gün ve oran değerleri verilmiştir.

Tablo 5.10. *G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=1 mertebesi için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=1,0 konumundaki 1. pik noktalarının değerleri*

	Samsuzzoha		G (α=1)		MQ (α=1)	
	Gün	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**
S	500	0,42	487	0,475	481	0,476
E	50	0,015	33	0,015	31	0,015
I	50	0,035	36	0,036	36	0,036
R	100	0,33	86	0,329	88	0,330

Tablo 5.10'daki Samsuzzoha'nın çalışmasındaki veriler ile RBFC metoduyla elde edilen veriler karşılaştırıldığında; $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının ilk pik yaptığı günler G taban fonksiyonuyla elde edilen sonuçlarda sırasıyla 13, 17, 14 ve 14 gün, MQ taban fonksiyonuyla elde edilen sonuçlarda ise sırasıyla 19, 19 ve 14 gün daha erken meydana geldiği görülmektedir. Oranların değerlerine bakıldığında iki taban fonksiyonla elde edilen değerlerin birbirlerine yakın oldukları görülmüştür. Karşılaştırma yapılan $S(t)$ fonksiyonu oran değeri RBFC metoduyla elde edilenlerden yaklaşık 0,05 oranında daha azdır.

Tablo 5.11. *G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=0,98; 0,96 ve 0,94 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=1,0 konumundaki 1. pik noktalarının değerleri*

	G (α=0,98)		MQ (α=0,98)		G (α=0,96)		MQ (α=0,96)		G (α=0,94)		MQ (α=0,94)	
	Gün	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**
S	448	0,441	448	0,441	457	0,426	448	0,441	476	0,416	476	0,416
E	33	0,015	33	0,015	34	0,015	34	0,014	35	0,014	35	0,014
I	38	0,036	38	0,036	40	0,035	40	0,035	42	0,035	42	0,035
R	94	0,321	94	0,321	100	0,312	100	0,312	107	0,305	107	0,304

G ve MQ taban fonksiyonlarıyla elde edilen 1. pik noktalarının gün ve oran değerleri karşılaştırıldığında; 0,98 kesir mertebe için dört fonksiyonun da gün ve oran değerlerinin aynı olduğu; 0,96 kesir mertebe için sadece $S(t)$ fonksiyonunun gün ve oran değerlerinin farklı, diğer fonksiyonların günlerinin aynı olduğu; 0,94 kesir mertebe için dört fonksiyonun günlerinin aynı ve oran değerlerinin de çok yakın olduğu görülmektedir.

Tablo 5.12. *G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=1 mertebesi için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=1,0 konumundaki 2. pik noktalarının değerleri*

	Samsuzzoha		G (α=1)		MQ (α=1)	
	Gün	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**
S	850	0,40	900	0,428	900	0,428
E	550	0,008	571	0,005	571	0,005
I	550	0,02	575	0,011	576	0,011
R	650	0,26	643	0,270	649	0,270

Tablo 5.12'deki Samsuzzoha'nın çalışmasındaki veriler ile RBFC metoduyla elde edilen veriler karşılaştırıldığında; iki taban fonksiyon için $S(t)$ ve $E(t)$ fonksiyonlarının ikinci pik yaptığı gün ve oran değerlerinin birbiriyle aynı olduğu, çalışmadan ise sırasıyla 50 ve 21 gün daha geç, $I(t)$ fonksiyonunun G ve MQ taban fonksiyonlarıyla elde edilen sonuçlarda sırasıyla 25 ve 26 gün daha geç, $R(t)$ fonksiyonunun G ve MQ taban fonksiyonlarıyla elde edilen sonuçlarda ise sırasıyla 7 ve 1 gün daha erken meydana geldiği görülmüştür.

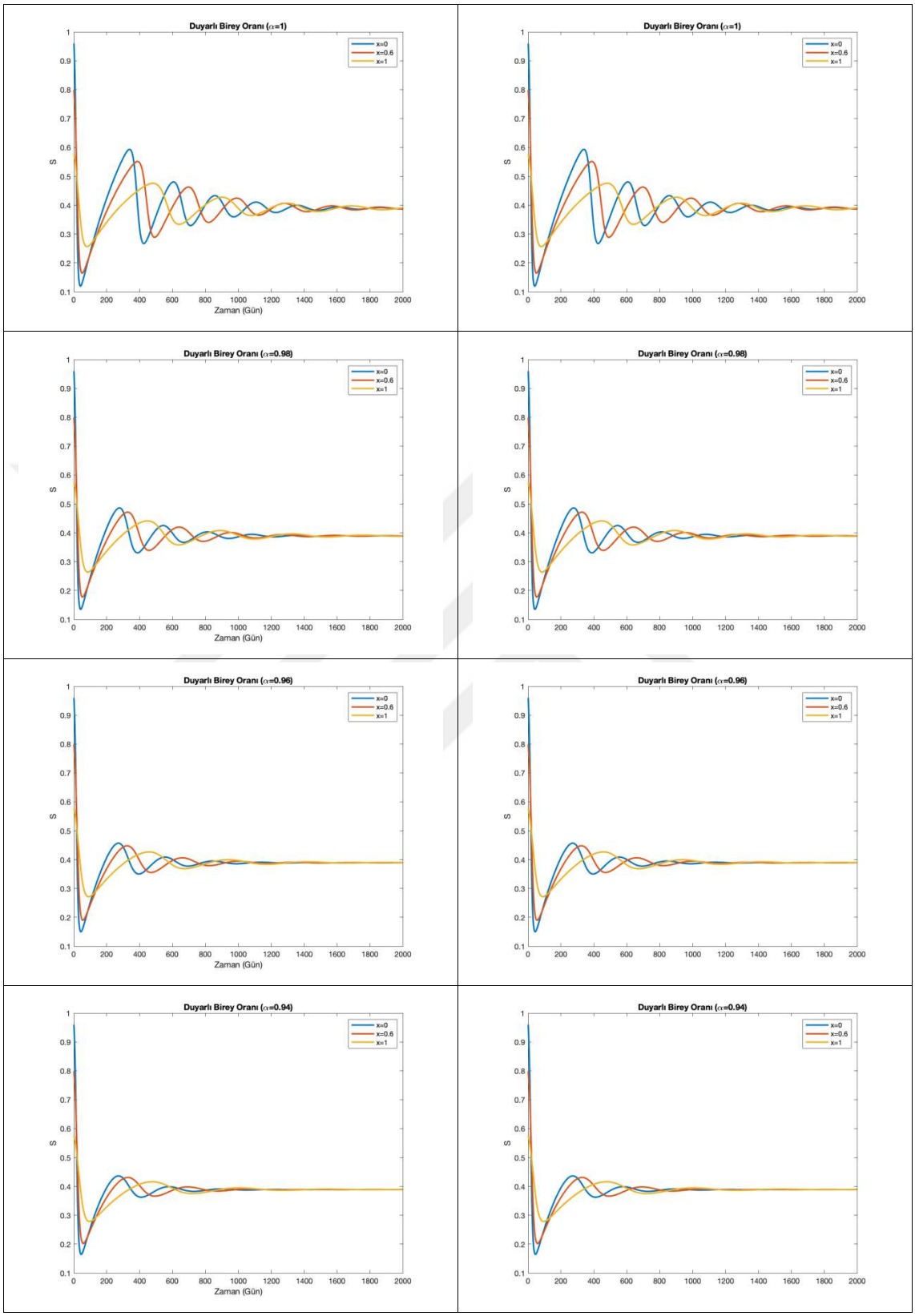
Tablo 5.13. *G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=0,98; 0,96 ve 0,94 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=1,0 konumundaki 2. pik noktalarının değerleri*

	G (α=0,98)		MQ (α=0,98)		G (α=0,96)		MQ (α=0,96)		G (α=0,94)		MQ (α=0,94)	
	Gün	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**
S	890	0,408	890	0,407	939	0,399	890	0,408	1007	0,395	1006	0,395
E	552	0,003	552	0,003	574	0,002	574	0,002	608	0,002	608	0,002
I	557	0,007	557	0,007	580	0,006	580	0,006	614	0,005	614	0,005
R	649	0,243	649	0,244	688	0,232	688	0,232	741	0,225	740	0,225

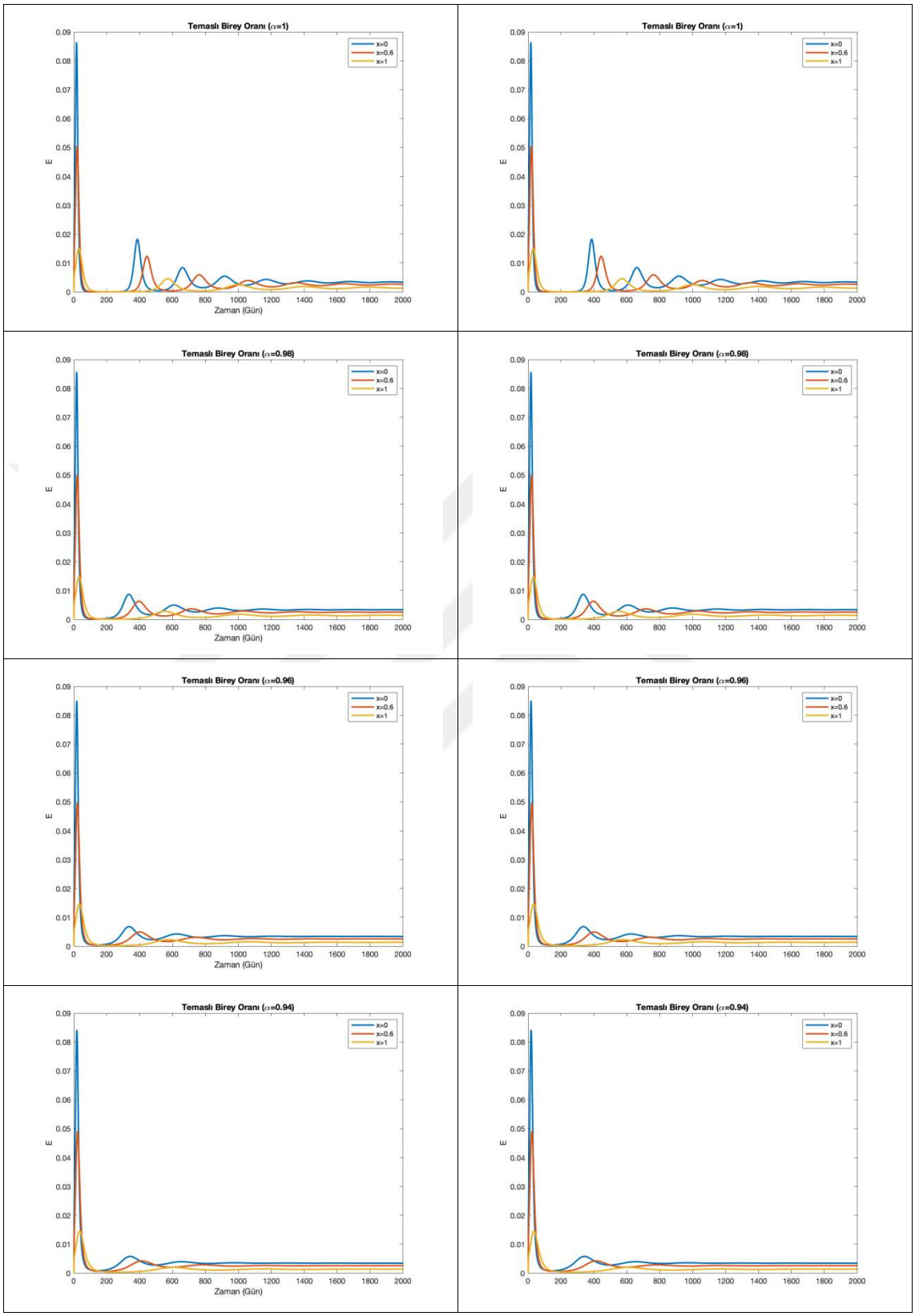
G ve MQ taban fonksiyonlarıyla elde edilen 2. pik noktalarının gün ve oran değerleri karşılaştırıldığında; 0,98 kesir mertebe için $E(t)$ ve $I(t)$ fonksiyonlarının gün

ve oran değerlerinin aynı olduğu; 0,96 kesir mertebe için $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının gün ve oran değerlerinin aynı olduğu; 0,94 kesir mertebe için dört fonksiyonun da oran değerleri aynı olduğu, S(t) ve R(t) fonksiyonlarının günleri arasında 1 gün fark olduğu görülmektedir.

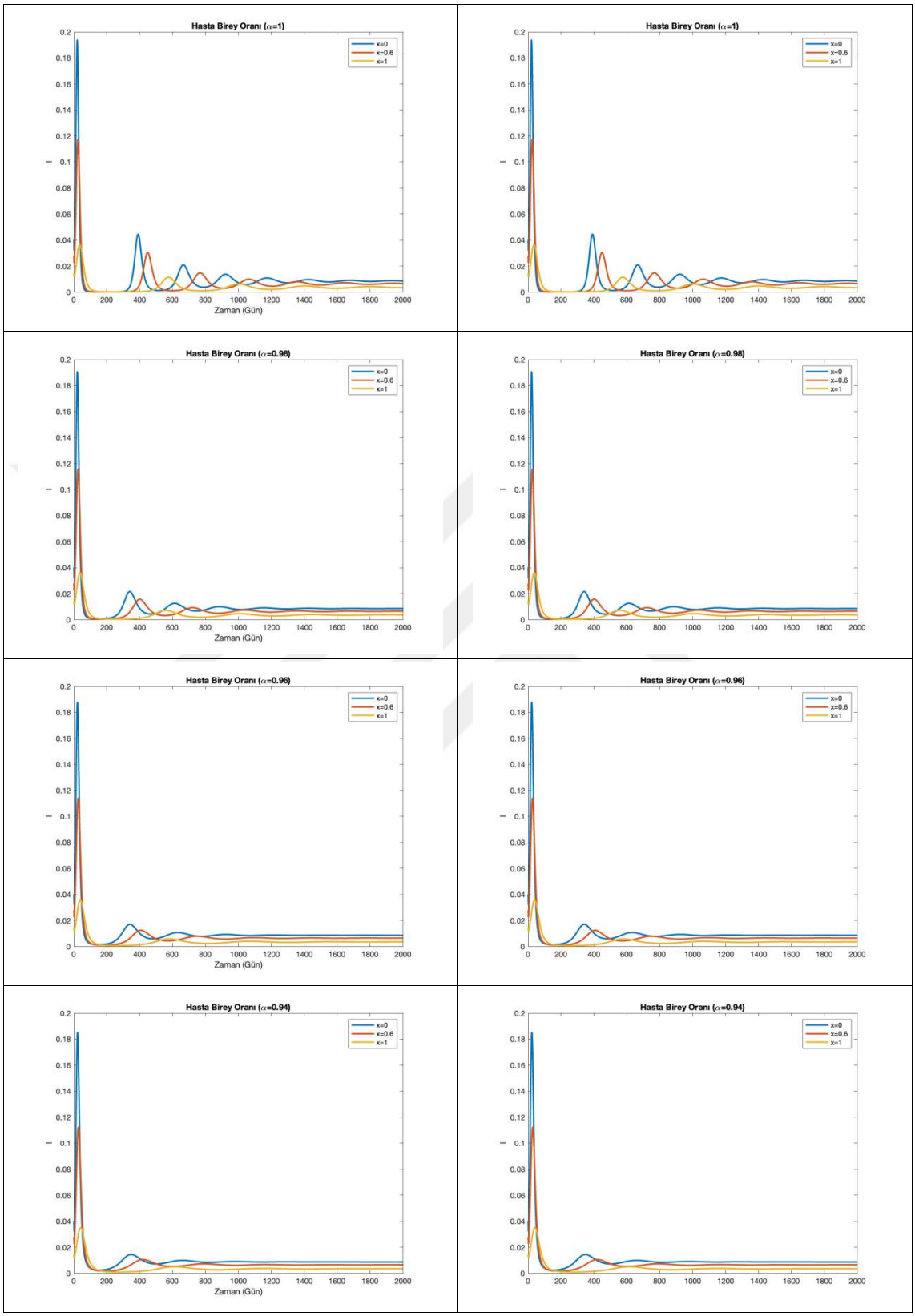
Kesir mertebesi 1; 0,98; 0,96 ve 0,94 ve difüzyon katsayıları 0 alınarak difüzyon etkisiz SEIR matematiksel modelinin G ve MQ taban fonksiyonları için *Duyarlı birey oranı (S(t)), Temaslı birey oranı (E(t)), Hasta birey oranı (I(t)) ve İyileşen birey oranı (R(t))* sonuçları elde edilmiş ve $x = 0{,}0;\ 0{,}6$ ve $1{,}0$ konumlarındaki grafikleri çizdirilmiştir. Çizdirilen $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının grafikleri sırasıyla Şekil 5.5, Şekil 5.6, Şekil 5.7 ve Şekil 5.8'de karşılaştırmalı olarak verilmiştir.



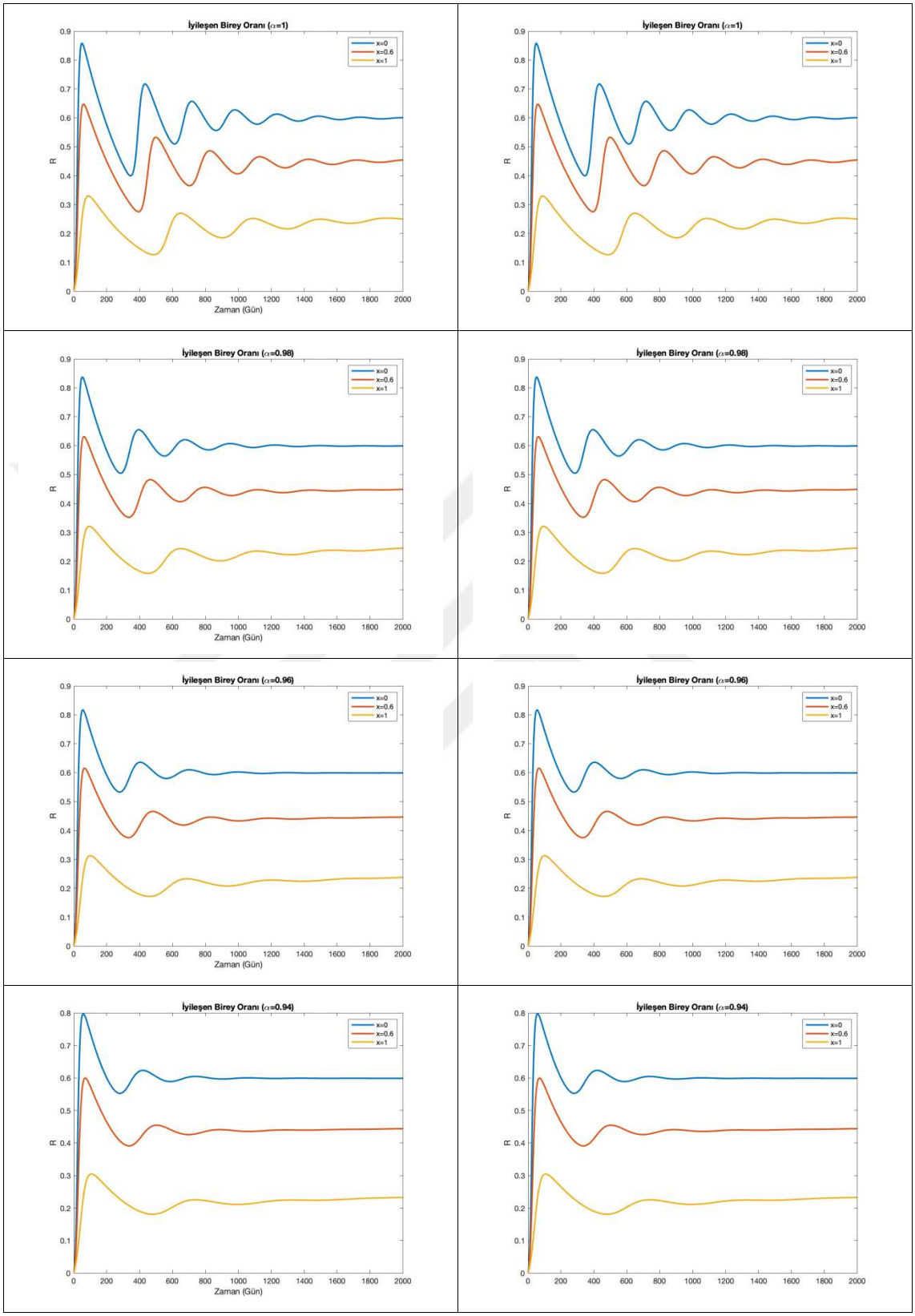
Şekil 5.5. *Sırasıyla G ve MQ taban fonksiyonları ve* $\alpha = 1;\ 0{,}98;\ 0{,}96$ *ve* $0{,}94$ *kesir mertebeleri için duyarlı birey oranı grafikleri*



Şekil 5.6. *Sırasıyla G ve MQ taban fonksiyonları ve* $\alpha = 1;\ 0{,}98;\ 0{,}96$ *ve* $0{,}94$ *kesir mertebeleri için temaslı birey oranı grafikleri*



Şekil 5.7. *Sırasıyla G ve MQ taban fonksiyonları ve* $\alpha = 1;\ 0{,}98;\ 0{,}96$ *ve* $0{,}94$ *kesir mertebeleri için hasta birey oranı grafikleri*



Şekil 5.8. *Sırasıyla G ve MQ taban fonksiyonları ve* $\alpha = 1;\ 0{,}98;\ 0{,}96$ *ve* $0{,}94$ *kesir mertebeleri için iyileşen birey oranı grafikleri*

Tablolar hâlinde verilen gün ve oran değerlerine bakarak G ve MQ taban fonksiyonlarıyla 1; 0,98; 0,96 ve 0,92 kesir mertebeleri için elde edilen sonuçlar, iki taban fonksiyon açışından karşılaştırıldığında birbirlerine oldukça yakın oldukları söylenebilir. Şekil 5.5, Şekil 5.6, Şekil 5.7 ve Şekil 5.8'de verilen $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının grafiklerinde de sonuçların yakın oldukları görülmektedir.

Dört fonksiyonun grafiklerinde de kesir mertebe azaldıkça salınım azalmakta ve genel olarak pik noktalarının gün değerleri artarken, oran değerleri azalmaktadır.

Grafiklerdeki konum değerinin sonuçlara etkisi ile kesir mertebenin sonuçlara etkisi karşılaştırıldığında, kesir mertebedeki değişikliğin sonuçlarda daha etkili olduğu görülmektedir.

II. Durum

Difüzyon katsayıları $d_1 = 0{,}001;\ d_2 = 0{,}025;\ d_3 = 0{,}001;\ d_4 = 0{,}0$ alınarak 1; 0,98; 0,96 ve 0,94 kesir mertebeleri için *Duyarlı birey oranı (S(t)), Temaslı birey oranı (E(t)), Hasta birey oranı (I(t)) ve İyileşen birey oranı (R(t))* sayısal sonuçları elde edilmiş ve $x = 0{,}0;\ 0{,}6$ ve $1{,}0$ konumlarındaki grafikleri çizdirilmiştir.

G ve MQ taban fonksiyonları ile elde edilen $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonların $x = 0{,}0$ konumundaki 1. pik noktalarının gün ve oran değerleri 1 ve 0,98'inci mertebeler için Tablo 5.14'te 0,96 ve 0,94'üncü mertebeler için Tablo 5.15'te verilmiştir.

Tablo 5.14. *G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=1 ve 0,98 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,0 konumundaki 1. pik noktalarının değerleri*

	G (α=1)		MQ (α=1)		G (α=0,98)		MQ (α=0,98)	
	Gün	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**
S	420	0,573	416	0,573	346	0,503	344	0,503
E	17	0,065	17	0,065	18	0,064	18	0,065
I	22	0,148	22	0,148	23	0,146	23	0,146
R	56	0,766	56	0,766	59	0,748	59	0,748

$S(t)$ fonksiyonunun 1. pik noktasının gün ve oran değerleri tam mertebede; 0,98 kesir mertebeden daha fazladır. Bu durum duyarlı birey oranının kesir mertebelerde daha erken pik yaptığını göstermektedir. Diğer fonksiyonların 1. pik noktasının gün ve oran değerlerinde mertebe değiştikçe anlamlı bir farklılık olmamaktadır.

Tablo 5.15. *G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=0,9 ve 0,94 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,0 konumundaki 1. pik noktalarının değerleri*

	G (α=0,96)		MQ (α=0,96)		G (α=0,94)		MQ (α=0,94)	
	Gün	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**
S	341	0,480	340	0,479	345	0,463	344	0,462
E	19	0,064	19	0,064	19	0,064	19	0,064
I	24	0,144	23	0,145	24	0,143	24	0,143
R	62	0,730	62	0,730	65	0,713	65	0,713

Tablo 5.14 ve Tablo 5.15 birlikte değerlendirildiğinde mertebe azaldıkça $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının pik noktasının gün değeri artmakta, oran değeri ise azalmaktadır. Bu durum temaslı, hasta ve iyileşen birey oranlarının kesir mertebelerde daha geç pik yaptığını ve pik oranlarının daha az olduğunu göstermektedir.

G ve MQ taban fonksiyonları ile elde edilen $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonların $x = 0{,}0$ konumundaki 2. pik noktalarının gün ve oran değerleri 1 ve 0,98'inci mertebeler için Tablo 5.16'da 0,96 ve 0,94'üncü mertebeler için Tablo 5.17'de verilmiştir.

Tablo 5.16. *G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=1 ve 0,98 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,0 konumundaki 2. pik noktalarının değerleri*

	G (α=1)		MQ (α=1)		G (α=0,98)		MQ (α=0,98)	
	Gün	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**
S	804	0,473	777	0,461	726	0,445	710	0,437
E	501	0,008	495	0,009	435	0,004	433	0,005
I	506	0,019	500	0,021	440	0,011	438	0,012
R	566	0,473	559	0,491	508	0,468	507	0,477

Dört fonksiyonunun da 2. pik noktasının gün ve oran değerleri tam mertebede; 0,98 kesir mertebeden daha fazladır. Bu durum duyarlı, temaslı, hasta ve iyileşen birey oranlarının 0,98 kesir mertebede daha erken pik yaptığını göstermektedir. Tablo geneline bakıldığında pik noktalarının oranlarının 0,98 kesir mertebede daha az olduğu görülmektedir.

Tablo 5.17. *G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=0,96 ve 0,94 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,0 konumundaki 2. pik noktalarının değerleri*

	G (α=0,96)		MQ (α=0,96)		G (α=0,94)		MQ (α=0,94)	
	Gün	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**
S	747	0,435	730	0,429	784	0,429	764	0,424
E	438	0,004	437	0,004	449	0,003	449	0,003
I	443	0,009	443	0,010	455	0,008	455	0,009
R	515	0,465	517	0,472	527	0,465	531	0,470

Dört fonksiyonunun da 2. pik noktasının gün değerleri 0,94 kesir mertebede; 0,96 kesir mertebeden daha fazla; oran değerleri ise daha azdır.

G ve MQ taban fonksiyonları ile elde edilen $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonların $x = 0{,}6$ konumundaki 1. pik noktalarının gün ve oran değerleri 1 ve 0,98'inci mertebeler için Tablo 5.18'de 0,96 ve 0,94'üncü mertebeler için Tablo 5.19'da verilmiştir.

Tablo 5.18. *G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=1 ve 0,98 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,6 konumundaki 1. pik noktalarının değerleri*

	G (α=1)		MQ (α=1)		G (α=0,98)		MQ (α=0,98)	
	Gün	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**
S	428	0,513	425	0,519	355	0,457	355	0,459
E	20	0,045	20	0,045	20	0,045	20	0,045
I	24	0,106	24	0,106	25	0,104	25	0,104
R	60	0,586	60	0,586	63	0,571	63	0,571

Mertebe 1'den 0,98'e azaltıldığında 1. pik noktasının; $E(t)$ fonksiyonunun dört durumda da gün ve oran değerlerinin aynı olduğu, $S(t)$ fonksiyonunun gün ve oran değerlerinin azaldığı, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının gün değerinin arttığı, oran değerinin azaldığı görülmektedir.

Tablo 5.19. *G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=0,96 ve 0,94 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,6 konumundaki 1. pik noktalarının değerleri*

	G (α=0,96)		MQ (α=0,96)		G (α=0,94)		MQ (α=0,94)	
	Gün	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**
S	352	0,440	352	0,441	358	0,423	358	0,428
E	21	0,045	21	0,045	22	0,044	22	0,044
I	26	0,103	26	0,103	27	0,101	27	0,101
R	67	0,557	67	0,557	70	0,543	71	0,543

0,96 ve 0,94 kesir mertebeleri için 1. pik noktasının gün ve oran değerleri karşılaştırıldığında; dört fonksiyonunun da 0,96 kesir mertebede gün değerlerinin daha az, oran değerlerinin daha fazla olduğu görülmektedir.

G ve MQ taban fonksiyonları ile elde edilen $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonların $x = 0{,}6$ konumundaki 2. pik noktalarının gün ve oran değerleri 1 ve 0,98'inci mertebeler için Tablo 5.20'de 0,96 ve 0,94'üncü mertebeler için Tablo 5.21'de verilmiştir.

Tablo 5.20. *G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=1 ve 0,98 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,6 konumundaki 2. pik noktalarının değerleri*

	G (α=1)		MQ (α=1)		G (α=0,98)		MQ (α=0,98)	
	Gün	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**
S	811	0,438	784	0,439	734	0,417	720	0,418
E	505	0,006	499	0,006	439	0,003	438	0,004
I	509	0,014	504	0,016	444	0,008	443	0,009
R	569	0,357	565	0,380	510	0,350	513	0,362

Dört fonksiyonunun da 2. pik noktasının gün ve oran değerleri tam mertebede; 0,98 kesir mertebeden daha fazladır. Bu durum duyarlı, temaslı, hasta ve iyileşen birey oranlarının 0,98 kesir mertebede daha erken pik yaptığını göstermektedir. Tablo geneline bakıldığında pik noktalarının oran değerlerinin 0,98 kesir mertebede daha az olduğu görülmektedir.

Tablo 5.21. *G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=0,96 ve 0,94 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,6 konumundaki 2. pik noktalarının değerleri*

	G (α=0,96)		MQ (α=0,96)		G (α=0,94)		MQ (α=0,94)	
	Gün	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**
S	754	0,409	743	0,410	792	0,405	781	0,406
E	443	0,003	443	0,003	454	0,002	456	0,002
I	448	0,007	448	0,007	461	0,006	462	0,006
R	517	0,348	522	0,356	527	0,348	536	0,354

Dört fonksiyonunun da 2. pik noktasının gün değerleri 0,94 kesir mertebede; 0,96 kesir mertebeden daha fazla, oran değerleri ise daha azdır.

G ve MQ taban fonksiyonları ile elde edilen $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonların $\mathrm{x} = 1{,}0$ konumundaki 1. pik noktalarının gün ve oran değerleri 1 ve 0,98'inci mertebeler için Tablo 5.22'de; 0,96 ve 0,94'üncü mertebeler için Tablo 5.23'te verilmiştir.

Tablo 5.22. *G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=1 ve 0,98 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=1,0 konumundaki 1. pik noktalarının değerleri*

	G (α=1)		MQ (α=1)		G (α=0,98)		MQ (α=0,98)	
	Gün	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**
S	442	0,422	441	0,443	373	0,384	376	0,395
E	23	0,024	23	0,024	24	0,024	24	0,024
I	27	0,057	28	0,057	28	0,056	29	0,056
R	66	0,349	66	0,349	70	0,340	70	0,340

$E(\mathrm{t})$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının 2. pik noktasının gün değerleri 0,98 kesir mertebede, tam mertebeden daha fazla; oran değerleri ise daha azdır. $S(t)$ fonksiyonunun ise tam mertebede hem gün hem de oran değerlerinin daha fazla olduğu görülmektedir.

Tablo 5.23. *G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=0,96 ve 0,94 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=1,0 konumundaki 1. pik noktalarının değerleri*

	G (α=0,96)		MQ (α=0,96)		G (α=0,94)		MQ (α=0,94)	
	Gün	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**
S	373	0,374	378	0,382	383	0,367	389	0,373
E	25	0,024	25	0,024	26	0,023	26	0,023
I	30	0,055	30	0,055	31	0,054	31	0,054
R	74	0,331	74	0,331	78	0,322	78	0,322

Dört fonksiyonunun da 2. pik noktasının gün değerleri 0,94 kesir mertebede; 0,96 kesir mertebeden daha fazla, oran değerleri ise daha azdır.

G ve MQ taban fonksiyonları ile elde edilen $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonların $x = 1{,}0$ konumundaki 2. pik noktalarının gün ve oran değerleri 1 ve 0,98'inci mertebeler için Tablo 5.24'te; 0,96 ve 0,94'üncü mertebeler için Tablo 5.25'te verilmiştir.

Tablo 5.24. *G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=1 ve 0,98 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=1,0 konumundaki 2. pik noktalarının değerleri*

	G (α=1)		MQ (α=1)		G (α=0,98)		MQ (α=0,98)	
	Gün	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**
S	825	0,378	799	0,410	748	0,365	744	0,389
E	510	0,003	505	0,004	445	0,002	446	0,002
I	515	0,008	510	0,010	450	0,004	451	0,005
R	575	0,210	576	0,240	514	0,203	524	0,218

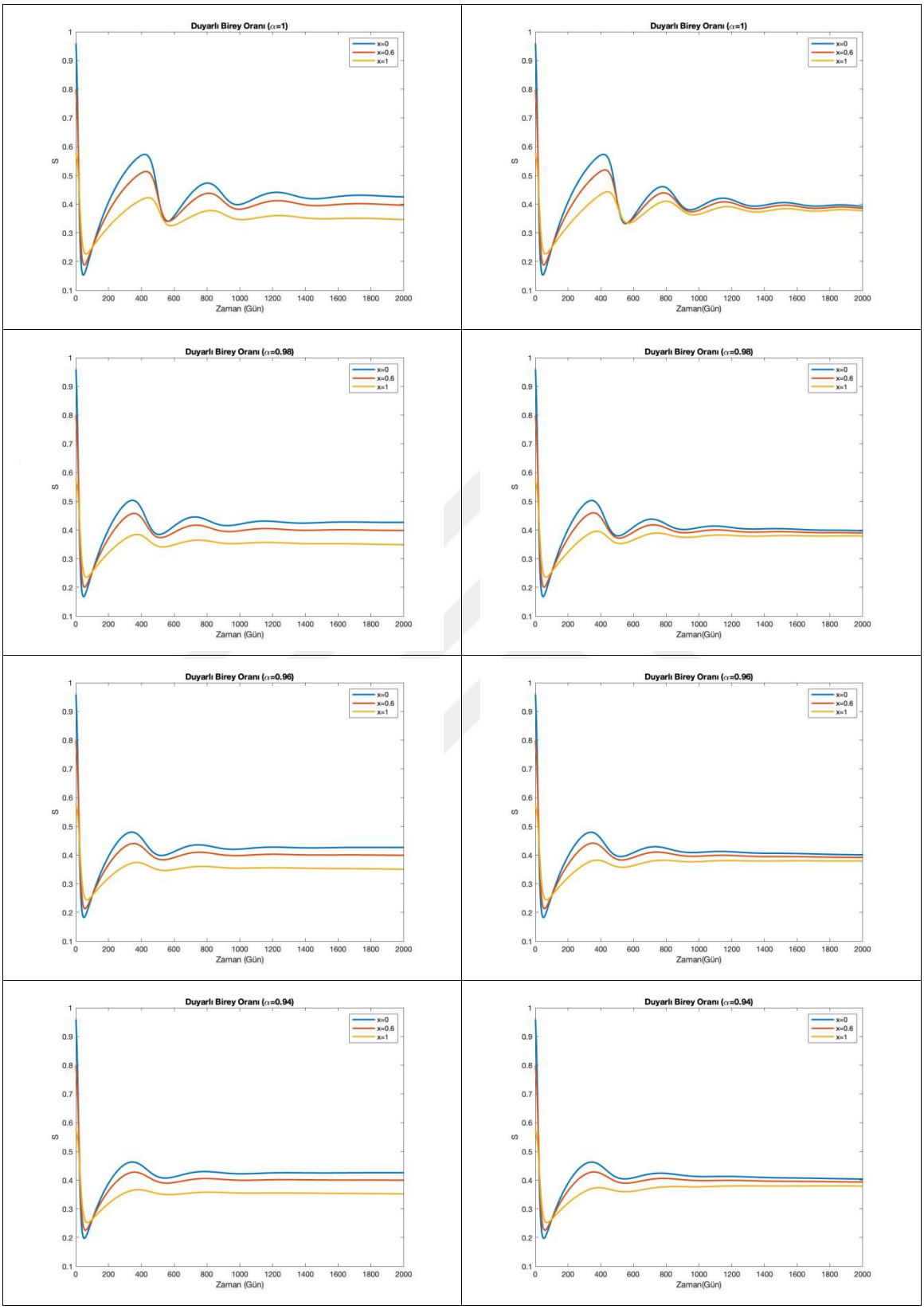
Dört fonksiyonunun da 2. pik noktasının gün ve oran değerleri tam mertebede, 0,98 kesir mertebeden daha fazladır. Bu durum duyarlı, temaslı, hasta ve iyileşen birey oranlarının 0,98 kesir mertebede daha erken pik yaptığını göstermektedir. Tablo geneline bakıldığında pik noktalarının oran değerlerinin 0,98 kesir mertebede daha az olduğu görülmektedir.

Tablo 5.25. *G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=0,96 ve 0,94 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=1,0 konumundaki 2. pik noktalarının değerleri*

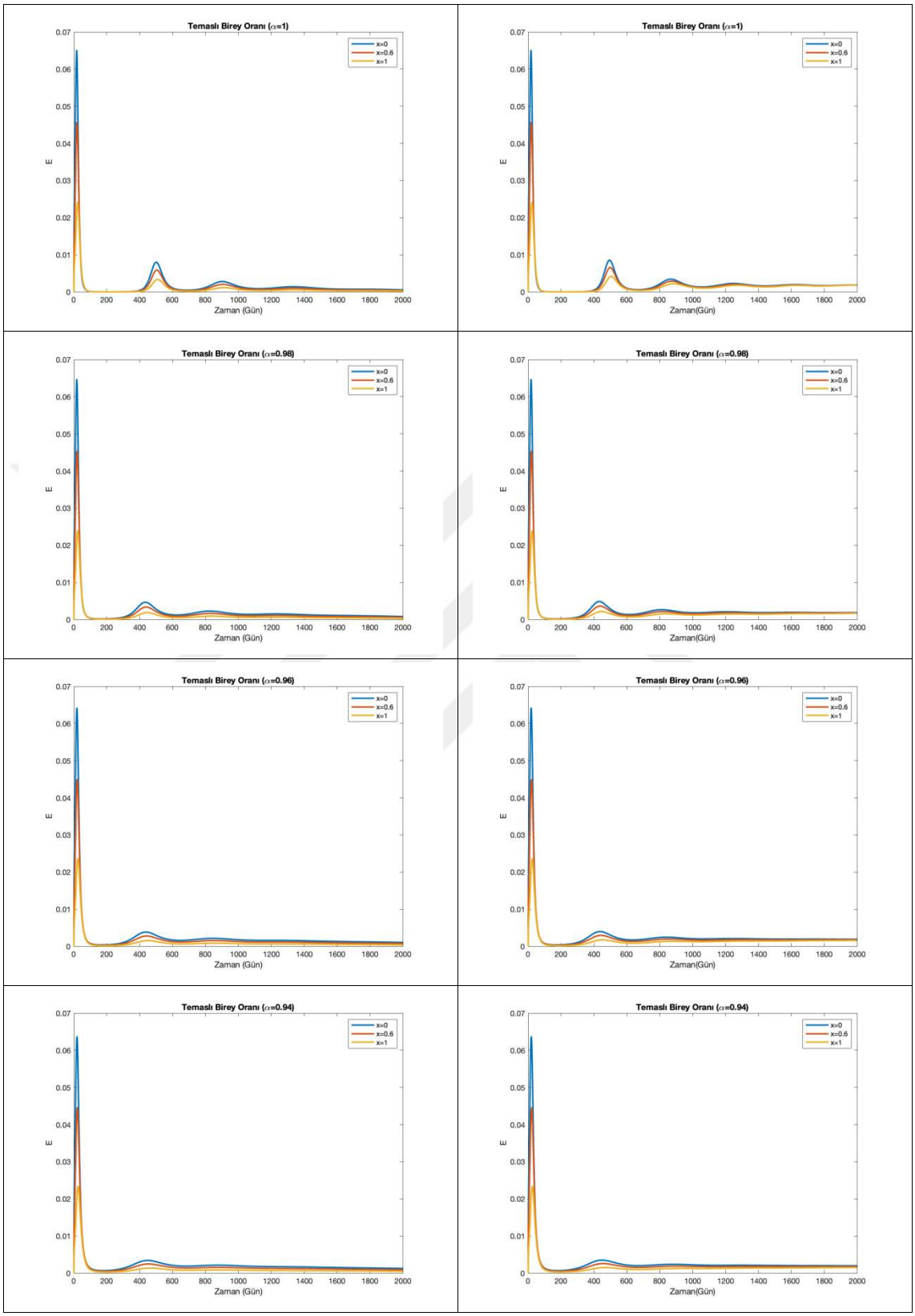
	G (α=0,96)		MQ (α=0,96)		G (α=0,94)		MQ (α=0,94)	
	Gün	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**
S	770	0,361	779	0,382	810	0,358	848	0,377
E	450	0,001	452	0,002	463	0,001	467	0,001
I	455	0,004	457	0,004	469	0,003	473	0,004
R	519	0,202	535	0,212	526	0,202	550	0,210

Dört fonksiyonunun da 2. pik noktasının gün değerleri 0,94 kesir mertebede, 0,96 kesir mertebeden daha fazla, oran değerleri ise eşit ya da daha azdır.

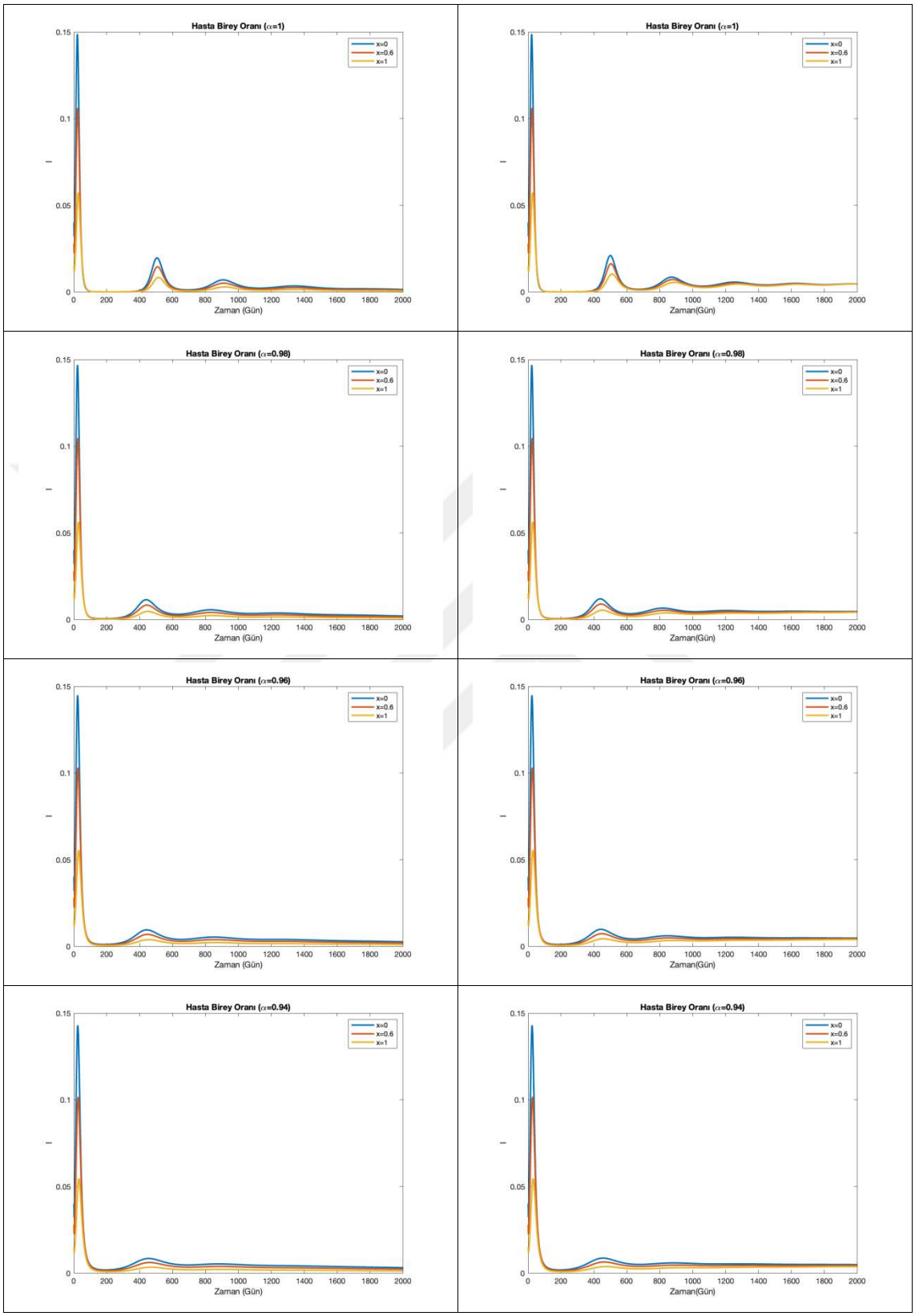
Kesir mertebesi 1; 0,98; 0,96 ve 0,94 ve difüzyon katsayıları $d_1 = 0{,}001; d_2 = 0{,}025;\ d_3 = 0{,}001\ ve\ d_4 = 0{,}0$ alınarak difüzyon etkili kesir mertebeli SEIR matematiksel modelinin G ve MQ taban fonksiyonları için; *Duyarlı birey oranı (S(t)), Temaslı birey oranı (E(t)), Hasta birey oranı (I(t)) ve İyileşen birey oranı (R(t))* sonuçları elde edilmiş ve $x = 0{,}0;\ 0{,}6$ ve $1{,}0$ konumlarındaki grafikleri çizdirilmiştir. Çizdirilen $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının grafikleri sırasıyla Şekil 5.9, Şekil 5.10, Şekil 5.11 ve Şekil 5.12'de karşılaştırmalı olarak verilmiştir.



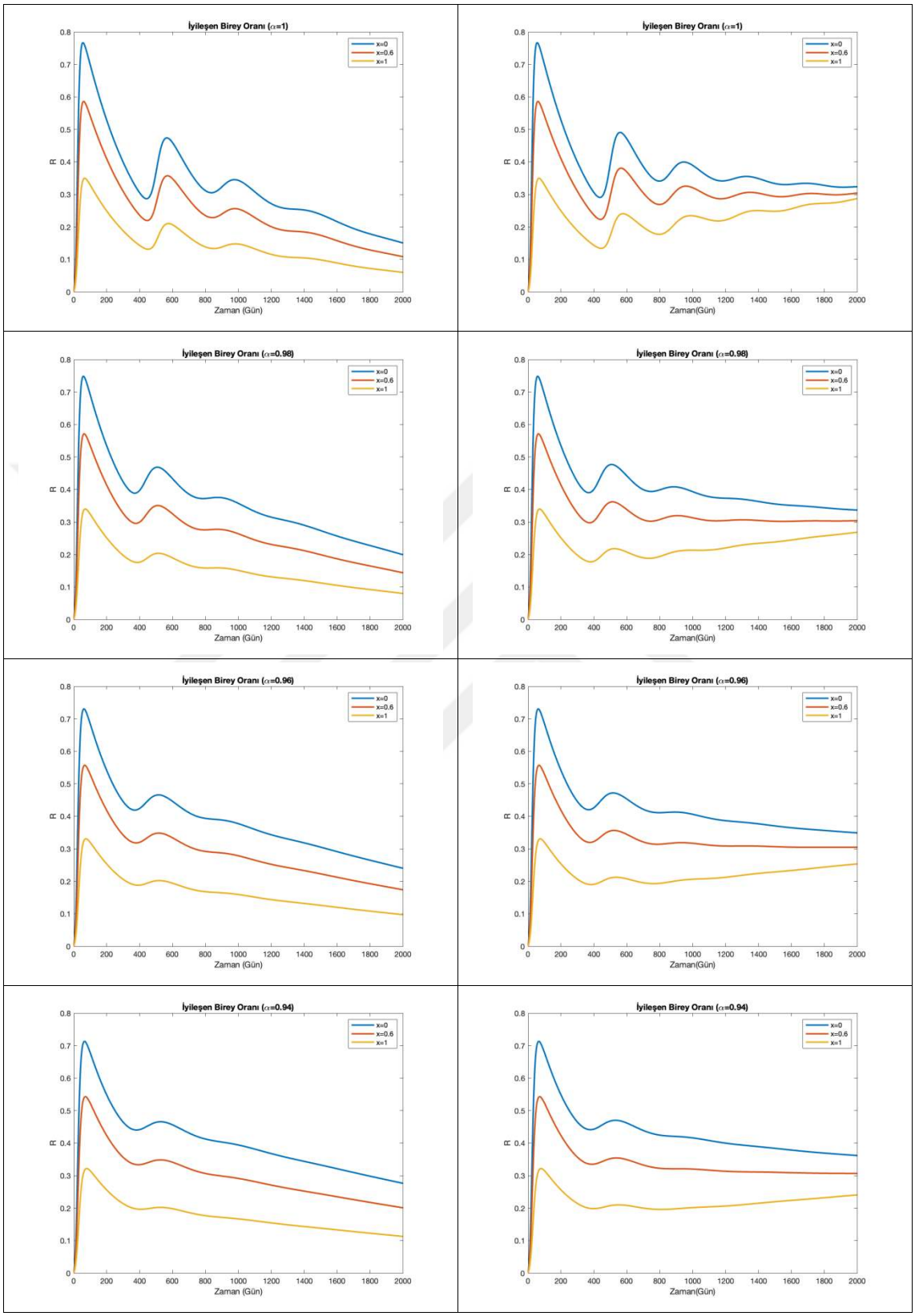
Şekil 5.9. *Sırasıyla G ve MQ taban fonksiyonları ve* $\alpha = 1;\ 0{,}98;\ 0{,}96$ *ve* $0{,}94$ *kesir mertebeleri için duyarlı birey oranı grafikleri*



Şekil 5.10. *Sırasıyla G ve MQ taban fonksiyonları ve* $\alpha = 1;\ 0{,}98;\ 0{,}96$ *ve* $0{,}94$ *kesir mertebeleri için temaslı birey oranı grafikleri*



Şekil 5.11. *Sırasıyla G ve MQ taban fonksiyonları ve* $\alpha = 1;\ 0{,}98;\ 0{,}96$ *ve* $0{,}94$ *kesir mertebeleri için hasta birey oranı grafikleri*



Şekil 5.12. **S***ırasıyla G ve MQ taban fonksiyonları ve* $\alpha = 1;\ 0{,}98;\ 0{,}96$ *ve* $0{,}94$ *kesir mertebeleri için iyileşen birey oranı grafikleri*

Tablolar hâlinde verilen gün ve oran değerlerine bakarak G ve MQ taban fonksiyonlarıyla 1; 0,98; 0,96 ve 0,92 kesir mertebeleri için elde edilen sonuçlar, iki taban fonksiyon açışından karşılaştırıldığında birbirlerine oldukça yakın oldukları söylenebilir. Şekil 5.9, Şekil 5.10, Şekil 5.11 ve Şekil 5.12'de verilen $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının grafiklerine bakıldığında; fonksiyonlar kararlı bir duruma geldiğinde MQ taban fonksiyonu ile elde edilen grafiklerde $x = 0{,}0;\ 0{,}6$ ve $1{,}0$ konumlarının grafiklerinin G taban fonksiyonuna göre birbirine daha yakın değerlerde kararlı hâle geldikleri görülmektedir.

Difüzyon etkisiz kesir mertebeli SEIR matematiksel modelinin grafiklerinde olduğu gibi dört fonksiyonun grafiklerinde de kesir mertebe azaldıkça salınım azalmakta ve genel olarak pik noktalarının gün değerleri artarken, oran değerleri azalmaktadır.

Grafiklerdeki konum değerinin sonuçlara etkisi ile kesir mertebenin sonuçlara etkisi karşılaştırıldığında, kesir mertebedeki değişikliğin sonuçlarda daha etkili olduğu görülmektedir.

III. Durum

Difüzyon katsayıları $d_1 = 0{,}0005;\ d_2 = 0{,}025;\ d_3 = 0{,}001;\ d_4 = 0{,}0$ alınarak 1; 0,98; 0,96 ve 0,94 kesir mertebeleri için *Duyarlı birey oranı (S(t)), Temaslı birey oranı (E(t)), Hasta birey oranı (I(t)) ve İyileşen birey oranı (R(t))* sayısal sonuçları elde edilmiş ve $x = 0{,}0;\ 0{,}6$ ve $1{,}0$ konumlarındaki grafikleri çizdirilmiştir. Bu grafiklerin 1. ve 2. pik noktalarının gün ve oran değerleri tablolarda verilmiştir.

G ve MQ taban fonksiyonları ile elde edilen $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonların $x = 0{,}0$ konumundaki 1. pik noktalarının gün ve oran değerleri 1 ve 0,98'inci mertebeler için Tablo 5.26'da, 0,96 ve 0,94'üncü mertebeler için Tablo 5.27'de verilmiştir.

Tablo 5.26. *G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=1 ve 0,98 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,0 konumundaki 1. pik noktalarının değerleri*

	G (α=1)		MQ (α=1)		G (α=0,98)		MQ (α=0,98)	
	Gün	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**
S	401	0,594	401	0,593	336	0,512	336	0,512
E	18	0,065	18	0,065	18	0,065	18	0,065
I	22	0,150	22	0,150	23	0,148	23	0,148
R	55	0,769	56	0,769	58	0,751	58	0,751

Mertebe 1'den 0,98'e azaltıldığında 1. pik noktasının; $E(t)$ fonksiyonunun dört durumda da gün ve oran değerlerinin aynı olduğu, $S(t)$ fonksiyonunun gün ve oran değerlerinin azaldığı, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının gün değerinin arttığı, oran değerinin azaldığı görülmektedir.

Tablo 5.27. *G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=0,96 ve 0,94 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,0 konumundaki 1. pik noktalarının değerleri*

	G (α=0,96)		MQ (α=0,96)		G (α=0,94)		MQ (α=0,94)	
	Gün	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**
S	332	0,486	332	0,486	336	0,467	336	0,467
E	19	0,065	19	0,065	19	0,064	19	0,064
I	23	0,146	23	0,146	24	0,144	24	0,144
R	61	0,733	61	0,733	65	0,715	65	0,715

$E(t)$ fonksiyonunun dört durumda gün değerleri aynı, oran değerinin 0,94 kesir mertebesinde 0,001 daha az olduğu; $S(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının kesir mertebe 0,96'dan 0,94'e azaltıldığında gün değerlerinin arttığı, oran değerlerinin azaldığı görülmektedir. Ayrıca aynı mertebeler için iki taban fonksiyonla 1. pik noktasının gün ve oran değerleri birbiriyle aynı elde edilmiştir.

G ve MQ taban fonksiyonları ile elde edilen $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonların $x = 0{,}0$ konumundaki 2. pik noktalarının gün ve oran değerleri 1 ve 0,98'inci mertebeler için Tablo 5.28'de 0,96 ve 0,94'üncü mertebeler için Tablo 5.29'da verilmiştir.

Tablo 5.28. *G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=1 ve 0,98 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,0 konumundaki 2. pik noktalarının değerleri*

	G (α=1)		MQ (α=1)		G (α=0,98)		MQ (α=0,98)	
	Gün	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**
S	747	0,485	743	0,481	684	0,488	683	0,446
E	470	0,010	469	0,011	416	0,006	416	0,006
I	475	0,025	474	0,026	421	0,014	421	0,014
R	530	0,540	529	0,542	488	0,511	488	0,512

$E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının 2. pik noktasının gün ve oran değerleri tam mertebede; 0,98 kesir mertebeden daha fazladır. $S(t)$ fonksiyonunun G taban fonksiyonuyla elde edilen sonuçlarında tam mertebede gün değerinin fazla, oranın 0,003 daha az olduğu görülmektedir.

Tablo 5.29. *G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=0,96 ve 0,94 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,0 konumundaki 2. pik noktalarının değerleri*

	G (α=0,96)		MQ (α=0,96)		G (α=0,94)		MQ (α=0,94)	
	Gün	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**
S	705	0,435	701	0,434	740	0,428	737	0,427
E	420	0,005	420	0,005	432	0,004	432	0,004
I	426	0,011	426	0,011	438	0,010	438	0,010
R	500	0,501	500	0,501	518	0,495	518	0,496

Dört fonksiyonunun da 2. pik noktasının gün değerleri 0,94 kesir mertebede; 0,96 kesir mertebeden daha fazla; oran değerleri ise daha azdır.

G ve MQ taban fonksiyonları ile elde edilen $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonların $x = 0{,}6$ konumundaki 1. pik noktalarının gün ve oran değerleri 1 ve 0,98'inci mertebeler için Tablo 5.30'da, 0,96 ve 0,94'üncü mertebeler için Tablo 5.31'de verilmiştir.

Tablo 5.30. *G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=1 ve 0,98 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,6 konumundaki 1. pik noktalarının değerleri*

	G (α=1)		MQ (α=1)		G (α=0,98)		MQ (α=0,98)	
	Gün	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**
S	408	0,532	408	0,532	345	0,468	345	0,468
E	20	0,046	20	0,046	20	0,046	20	0,046
I	24	0,107	24	0,107	25	0,105	25	0,105
R	60	0,591	60	0,591	63	0,576	63	0,576

$E(t)$ fonksiyonunun dört durumda da gün ve oran değerlerinin aynı olduğu, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının tam mertebe gün değerlerinin daha az, oran değerlerinin daha fazla olduğu görülmektedir. $S(t)$ fonksiyonunun tam mertebede hem gün hem de oran değerleri daha fazladır.

Tablo 5.31. *G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=0,96 ve 0,94 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,6 konumundaki 1. pik noktalarının değerleri*

	G (α=0,96)		MQ (α=0,96)		G (α=0,94)		MQ (α=0,94)	
	Gün	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**
S	342	0,449	342	0,449	348	0,435	348	0,435
E	21	0,045	21	0,045	22	0,045	22	0,045
I	26	0,104	26	0,104	27	0,102	27	0,102
R	66	0,561	66	0,561	71	0,547	70	0,547

0,96 ve 0,94 kesir mertebeleri için 1. pik noktasının gün ve oran değerleri karşılaştırıldığında; dört fonksiyonunun da 0,96 kesir mertebede gün değerlerinin daha az, oran değerlerinin eşit ya da daha fazla olduğu görülmektedir.

G ve MQ taban fonksiyonları ile elde edilen $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonların $x = 0{,}6$ konumundaki 2. pik noktalarının gün ve oran değerleri 1 ve

0,98'inci mertebeler için Tablo 5.32'de 0,96 ve 0,94'üncü mertebeler için Tablo 5.33'te verilmiştir.

Tablo 5.32. *G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=1 ve 0,98 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,6 konumundaki 2. pik noktalarının değerleri*

	G (α=1)		MQ (α=1)		G (α=0,98)		MQ (α=0,98)	
	Gün	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**
S	753	0,454	750	0,453	692	0,425	690	0,424
E	473	0,008	473	0,008	420	0,004	420	0,004
I	478	0,019	478	0,019	426	0,010	426	0,010
R	534	0,413	534	0,417	492	0,388	493	0,389

Dört fonksiyonunun da 2. pik noktasının gün ve oran değerleri tam mertebede; 0,98 kesir mertebeden daha fazladır. Bu durum duyarlı, temaslı, hasta ve iyileşen birey oranlarının 0,98 kesir mertebede daha erken pik yaptığını göstermektedir. Tablo geneline bakıldığında pik noktalarının oran değerlerinin 0,98 kesir mertebede daha az olduğu görülmektedir.

Tablo 5.33. *G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=0,96 ve 0,94 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=0,6 konumundaki 2. pik noktalarının değerleri*

	G (α=0,96)		MQ (α=0,96)		G (α=0,94)		MQ (α=0,94)	
	Gün	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**
S	713	0,416	711	0,415	749	0,410	747	0,410
E	425	0,003	425	0,003	438	0,003	438	0,003
I	431	0,008	431	0,008	444	0,007	445	0,007
R	504	0,379	505	0,381	522	0,375	523	0,376

0,96 ve 0,94 kesir mertebeleri için 2. pik noktasının gün ve oran değerleri karşılaştırıldığında; dört fonksiyonunun da 0,96 kesir mertebede gün değerlerinin daha az, oran değerlerinin eşit ya da daha fazla olduğu görülmektedir.

G ve MQ taban fonksiyonları ile elde edilen $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonların $x = 1{,}0$ konumundaki 1. pik noktalarının gün ve oran değerleri 1 ve 0,98'inci mertebeler için Tablo 5.34'te 0,96 ve 0,94'üncü mertebeler için Tablo 5.35'te verilmiştir.

Tablo 5.34. *G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=1 ve 0,98 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=1,0 konumundaki 1. pik noktalarının değerleri*

	G (α=1)		MQ (α=1)		G (α=0,98)		MQ (α=0,98)	
	Gün	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**
S	420	0,437	420	0,441	360	0,397	361	0,398
E	23	0,024	23	0,024	24	0,024	24	0,024
I	28	0,058	28	0,058	29	0,057	29	0,057
R	67	0,354	67	0,354	70	0,345	70	0,345

Tam mertebede $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının gün değerinin daha az, oran değerinin daha fazla ya da eşit olduğu, $S(t)$ fonksiyonunun hem gün hem de oran değerinin daha fazla olduğu görülmektedir.

Tablo 5.35. *G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=0,96 ve 0,94 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=1,0 konumundaki 1. pik noktalarının değerleri*

	G (α=0,96)		MQ (α=0,96)		G (α=0,94)		MQ (α=0,94)	
	Gün	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**
S	360	0,385	361	0,386	370	0,377	371	0,378
E	25	0,024	25	0,024	26	0,023	26	0,024
I	30	0,056	30	0,056	31	0,055	31	0,055
R	74	0,335	74	0,335	79	0,326	79	0,326

0,96 ve 0,94 kesir mertebeleri için 1. pik noktasının gün ve oran değerleri karşılaştırıldığında; dört fonksiyonunun da 0,96 kesir mertebede gün değerlerinin daha az, oran değerlerinin eşit ya da daha fazla olduğu görülmektedir.

G ve MQ taban fonksiyonları ile elde edilen $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonların $x = 1{,}0$ konumundaki 2. pik noktalarının gün ve oran değerleri 1 ve 0,98'inci mertebeler için Tablo 5.36'da 0,96 ve 0,94'üncü mertebeler için Tablo 5.37'de verilmiştir.

Tablo 5.36. *G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=1 ve 0,98 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=1,0 konumundaki 2. pik noktalarının değerleri*

	G (α=1)		MQ (α=1)		G (α=0,98)		MQ (α=0,98)	
	Gün	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**
S	764	0,399	763	0,408	706	0,380	708	0,386
E	479	0,004	479	0,005	427	0,002	427	0,002
I	484	0,011	484	0,012	432	0,006	432	0,006
R	541	0,248	541	0,254	499	0,230	501	0,233

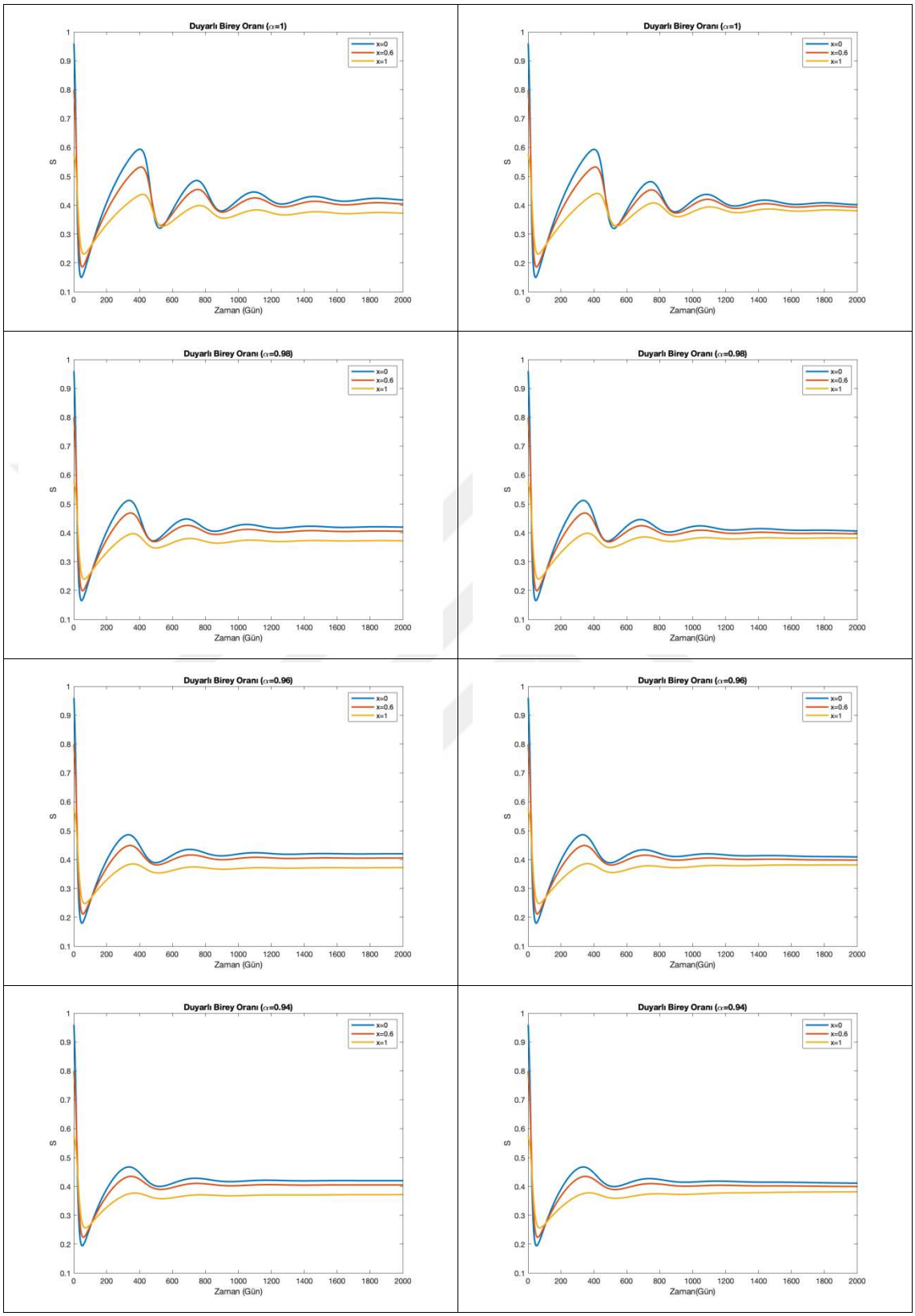
Dört fonksiyonunun da 2. pik noktasının gün ve oran değerleri tam mertebede; 0,98 kesir mertebeden daha fazladır, Bu durum fonksiyonların 0,98 kesir mertebede daha erken pik yaptığını göstermektedir.

Tablo 5.37. *G ve MQ taban fonksiyonlarıyla α=0,96 ve 0,94 kesir mertebeleri için $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının x=1,0 konumundaki 2. pik noktalarının değerleri*

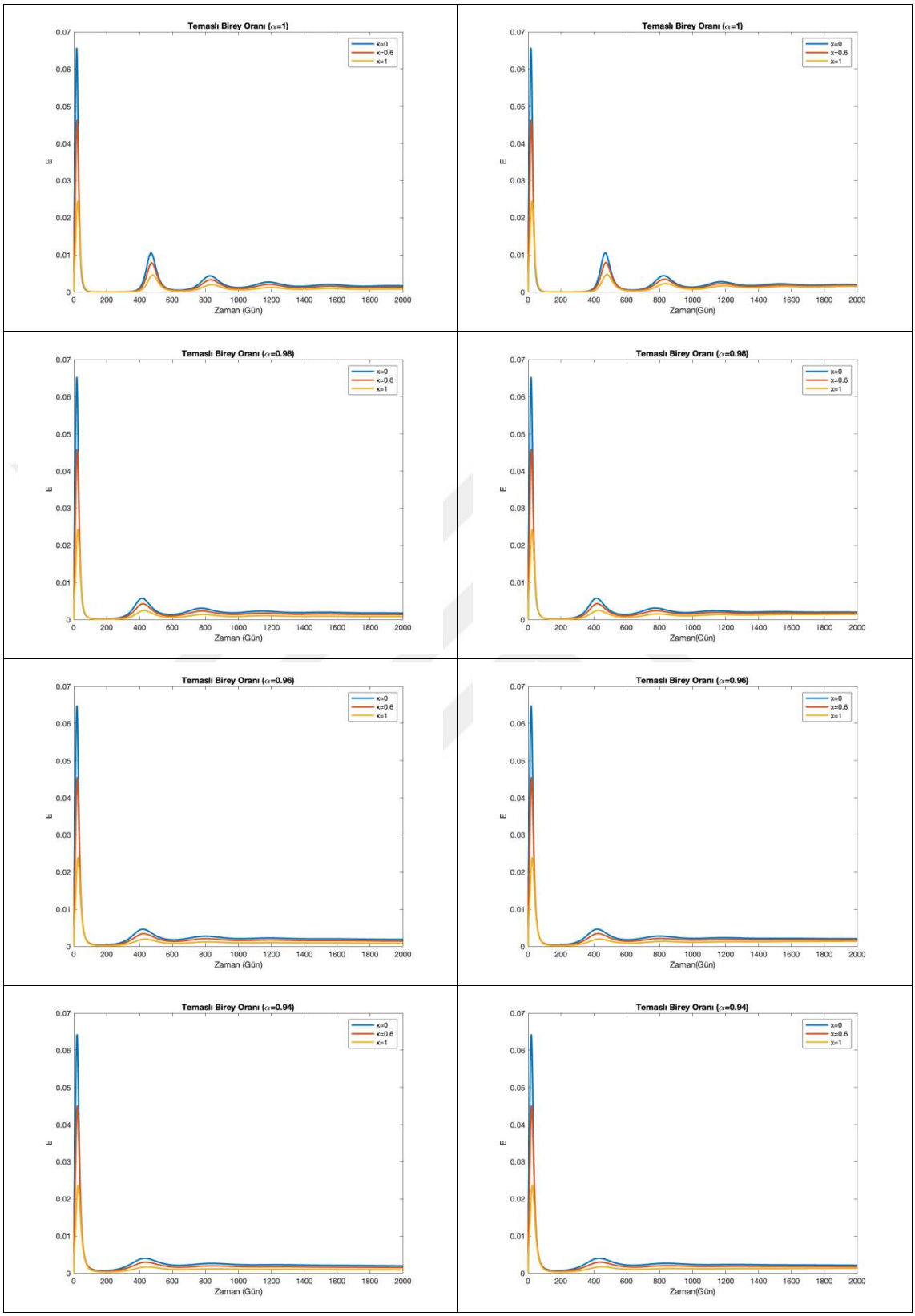
	G (α=0,96)		MQ (α=0,96)		G (α=0,94)		MQ (α=0,94)	
	Gün	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**	**Gün**	**Oran**
S	730	0,374	736	0,379	772	0,371	783	0,374
E	433	0,002	433	0,002	447	0,002	448	0,002
I	438	0,005	439	0,005	453	0,004	454	0,004
R	508	0,224	514	0,227	528	0,221	533	0,223

Dört fonksiyonunun da 2. pik noktasının gün değerleri 0,94 kesir mertebede; 0,96 kesir mertebeden daha fazla, oran değerleri ise eşit ya da daha azdır.

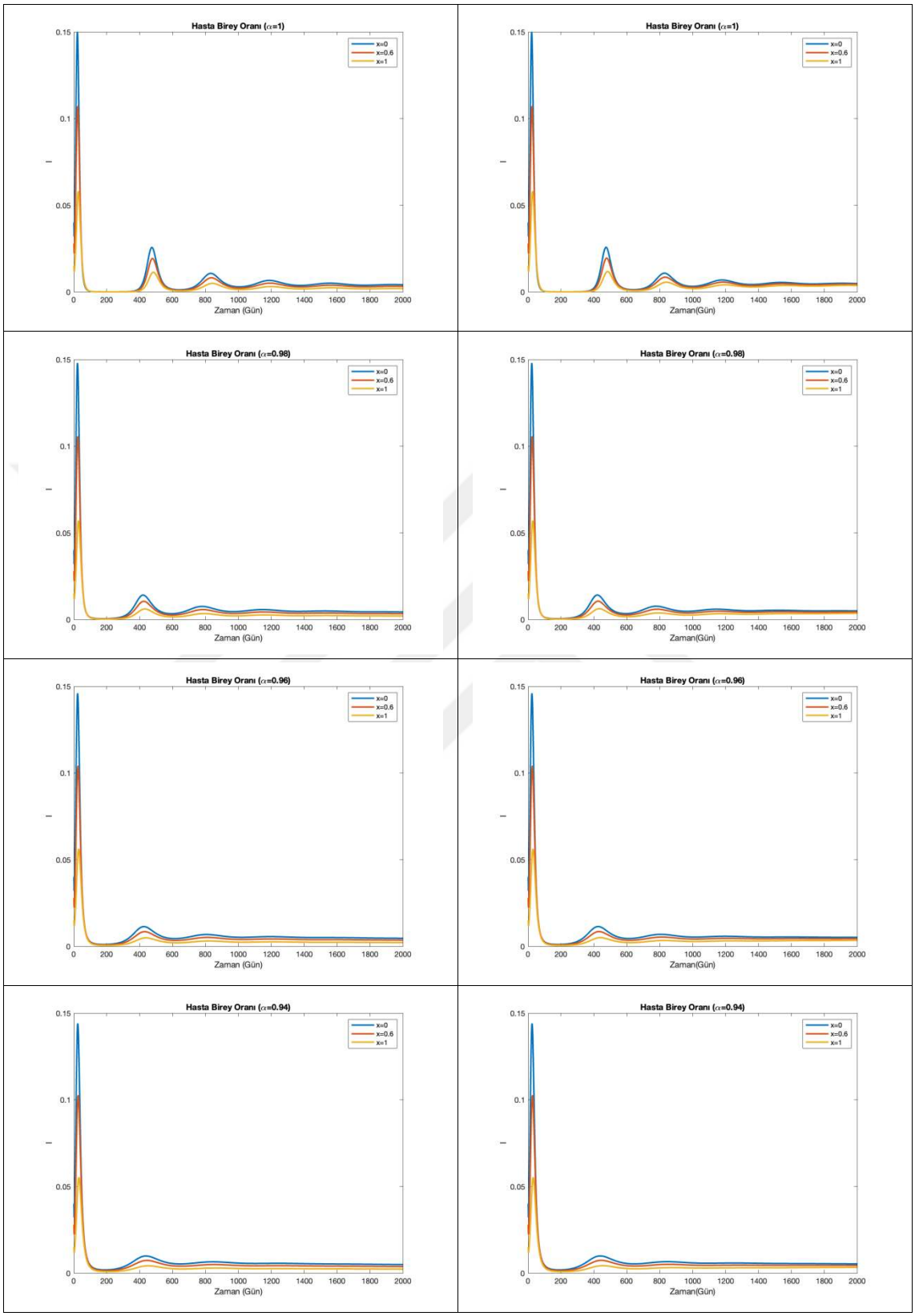
Kesir mertebesi 1; 0,98; 0,96 ve 0,94 ve difüzyon katsayıları $d_1 = 0{,}0005$; $d_2 = 0{,}025$; $d_3 = 0{,}001\ ve\ d_4 = 0{,}0$ alınarak difüzyon etkili kesir mertebeli SEIR matematiksel modelinin G ve MQ taban fonksiyonları için; *Duyarlı birey oranı (S(t)), Temaslı birey oranı (E(t)), Hasta birey oranı (I(t)) ve İyileşen birey oranı (R(t))* sonuçları elde edilmiş ve $x = 0{,}0, 0{,}6$ ve $1{,}0$ konumlarındaki grafikleri çizdirilmiştir. Çizdirilen $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının grafikleri sırasıyla Şekil 5.13, Şekil 5.14, Şekil 5.15 ve Şekil 5.16'da karşılaştırmalı olarak verilmiştir.



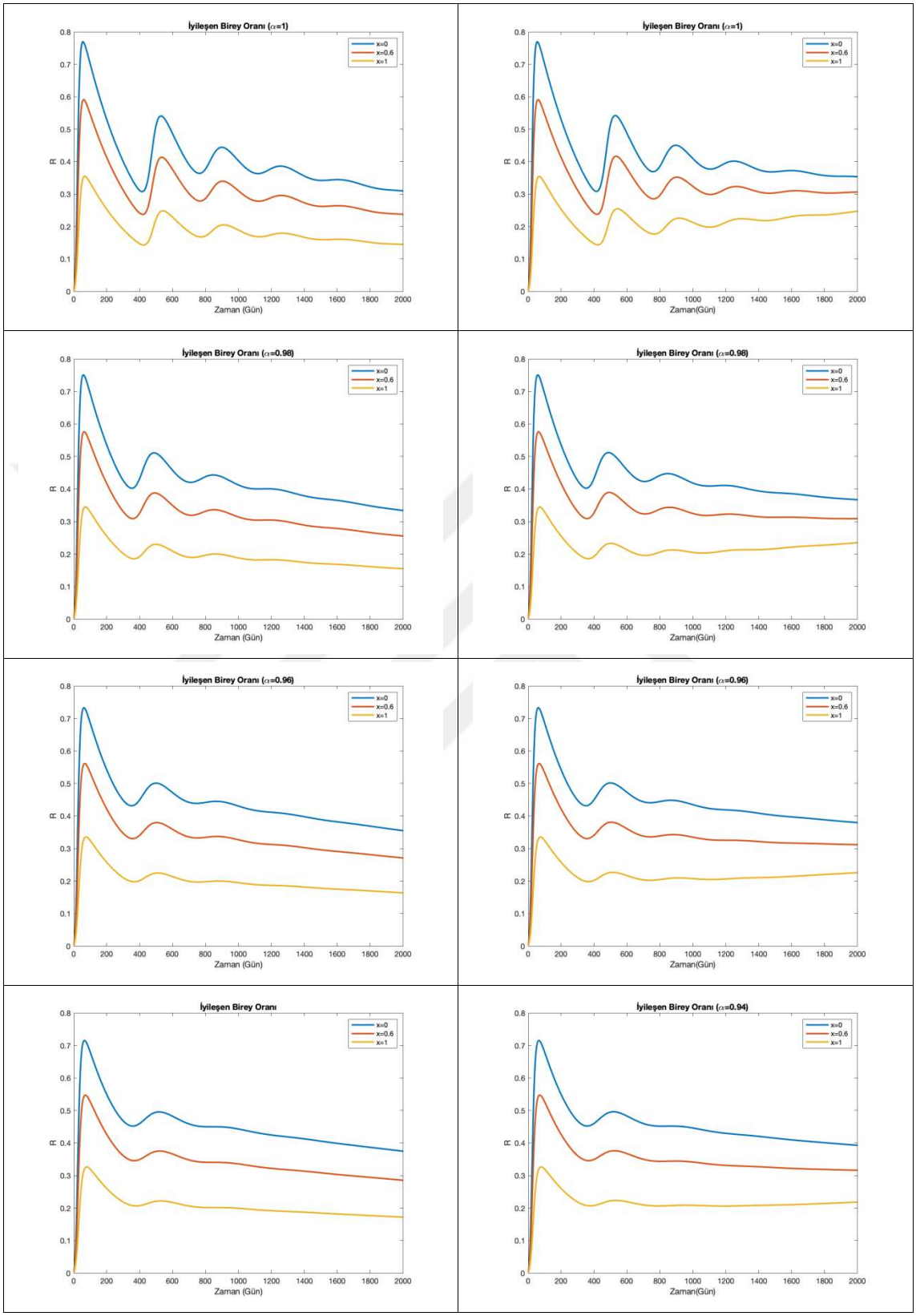
Şekil 5.13. *Sırasıyla G ve MQ taban fonksiyonları ve* $\alpha = 1;\ 0{,}98;\ 0{,}96$ *ve* $0{,}94$ *kesir mertebeleri için duyarlı birey oranı grafikleri*



Şekil 5.14. *Sırasıyla G ve MQ taban fonksiyonları ve* $\alpha = 1;\ 0{,}98;\ 0{,}96$ *ve* $0{,}94$ *kesir mertebeleri için temaslı birey oranı grafikleri*



Şekil 5.15. *Sırasıyla G ve MQ taban fonksiyonları ve* $\alpha = 1;\ 0{,}98;\ 0{,}96$ *ve* $0{,}94$ *kesir mertebeleri için hasta birey oranı grafikleri*



Şekil 5.16. *Sırasıyla G ve MQ taban fonksiyonları ve* $\alpha = 1;\ 0{,}98;\ 0{,}96$ *ve* $0{,}94$ *kesir mertebeleri için iyileşen birey oranı grafikleri*

Tablolar hâlinde verilen gün ve oran değerlerine bakarak G ve MQ taban fonksiyonlarıyla 1; 0,98; 0,96 ve 0,92 kesir mertebeleri için elde edilen sonuçlar, iki taban fonksiyon açışından karşılaştırıldığında birbirlerine oldukça yakın oldukları söylenebilir. Şekil 5.13, Şekil 5.14, Şekil 5.15 ve Şekil 5.16'da verilen sırasıyla $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarının grafiklerine bakıldığında; fonksiyonlar kararlı bir duruma geldiğinde MQ taban fonksiyonu ile elde edilen grafiklerde $x = 0{,}0;\ 0{,}6$ ve $1{,}0$ konumlarının grafiklerinin G taban fonksiyonuna göre birbirine daha yakın değerlerde kararlı hâle geldikleri görülmektedir.

I. durumda verilen difüzyon etkisiz kesir mertebeli SEIR matematiksel modelinin grafiklerinde olduğu gibi dört fonksiyonun grafiklerinde de kesir mertebe azaldıkça salınım azalmakta ve genel olarak pik noktalarının gün değerleri artarken, oran değerleri azalmaktadır.

Grafiklerdeki konum değerinin sonuçlara etkisi ile kesir mertebenin sonuçlara etkisi karşılaştırıldığında, kesir mertebedeki değişikliğin sonuçlarda daha etkili olduğu görülmektedir.

II. ve III. durumlar için elde edilen grafikler karşılaştırıldığında; $S(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonlarında farklılık görülmektedir. Bu durumda araştırılan iki difüzyon katsayılarında sadece d_1'in değerinde değişiklik yapılmış olması etkili olmuştur. d_1 değeri azaltıldığında G taban fonksiyonu ile elde edilen; $S(t)$ fonksiyonu grafiklerinde farklı konum değerlerinin grafikleri arasındaki farklar azalmış, $R(t)$ fonksiyonun grafiklerinde görülen eğim azalmıştır. MQ taban fonksiyonu ile elde edilen; $S(t)$ fonksiyonu grafiklerinde anlamlı bir farklılık olmamış, $R(t)$ fonksiyonun grafiklerinde farklı konum değerlerinin grafikleri arasındaki farklar artmıştır.

6. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu çalışmada iki farklı bulaşıcı hastalığın matematiksel modellerinin sayısal çözümleri araştırılmıştır. Adi diferansiyel denklemlerden oluşan matematiksel modeller, bu çalışmada difüzyon etkisi eklenerek kısmi diferansiyel denklemlere dönüştürülmüştür. Ayrıca tam mertebe olan modellere Caputo kesir mertebeli türev yaklaşımı uygulanarak kesir mertebeli difüzyon etkili modeller elde edilmiştir.

Sayısal çözümleri araştırılan birinci hastalık Türkiye'deki verem hastalığıdır. Verem hastalığı için üç kompartımanlı SIR matematiksel modeli; kesir türevli ve kesir türevli difüzyon etkili modeller olmak üzere iki farklı matematiksel model olarak ele alınmıştır. Bu modellerin nümerik yöntemlerle sayısal çözümleri elde edilmiştir. Bu çözümlerdeki hasta birey sayıları Türkiye'de Verem Savaşı 2021 Raporu'ndaki hasta sayıları ile karşılaştırılarak hata hesaplamaları yapılmıştır. Kesir türevli SIR matematiksel modelinin Euler ve RK4 yöntemleriyle 1; 0,96; 0,92 ve 0,88 mertebeleri için sayısal sonuçları hesaplanmıştır. Elde edilen hasta birey sayıları ile Türkiye'de Verem Savaşı 2021 Raporu'ndaki hasta sayılarının hata hesaplamaları yapılmıştır. 2005-2020 yılları için hesaplanan hasta birey sayıları, gerçek hasta sayıları ve hatalarla birlikte tablolar hâlinde verilmiştir. Ayrıca dört türev mertebesi için Euler ve RK4 yöntemleriyle hesaplamaları yapılan duyarlı, hasta ve iyileşen birey sayıları grafiklerle gösterilmiştir.

Kesir türevli difüzyon etkili SIR matematiksel modelinin RBFC ağsız yöntemiyle difüzyon etkili ve difüzyon etkisiz durumları incelenmiştir. Difüzyon etkisiz durumda difüzyon katsayıları 0 alınarak, difüzyon etkili durumda ise en uygun difüzyon katsayıları belirlenerek sayısal sonuçlar elde edilmiştir. Her iki durum için taban fonksiyonlar G ve MQ seçilmiştir. Kesir türev mertebeleri olarak 1; 0,96; 0,92 ve 0,88'in sayısal sonuçları hesaplanmıştır. Bu hesaplamalar yapılırken difüzyon etkisinde konum da göz önünde bulundurulduğundan $x = 0{,}0;\ 0{,}6$ ve $1{,}0$ konumları her türev mertebesi ve taban fonksiyon için ayrı ayrı ele alınmıştır. G ve MQ taban fonksiyonları, dört farklı türev mertebesi ve üç farklı konum için elde edilen sayısal sonuçlardan; hasta birey sayıları, gerçek hasta sayıları ile karşılaştırmalı olarak tablolar hâlinde verilmiştir. Bu tablolarda hasta birey sayıları ile Türkiye'de Verem Savaşı 2021 Raporu'ndaki hasta sayılarının hata değerleri de yer almaktadır. Hesaplanan duyarlı ve iyileşen birey sayıları ise sadece grafiklerle gösterilmiştir. Bunun yanında hasta birey sayıları, gerçek hasta sayıları ile bir grafik üzerinde verilerek yapılan tahminlerin gerçek değerlere

yakınlığı gösterilmiştir. Yapılan hesaplamalarla tahmin edilen hasta sayılarını Türkiye'de Verem Savaşı 2021 Raporu'ndaki hasta sayıları ile aynı doğrultuda oldukları görülmüştür. Kesir mertebeli türev yaklaşımı daha yakın tahminler yapılmasını sağlamıştır. Difüzyon etkisi ile hastalığın kapalı bir grup içinde yayıldığı varsayımını ortadan kaldırarak daha gerçekçi tahminler elde edilmiştir. Ancak tablolarda verilen hata değerlerine bakıldığında, hesaplama yapılan her durum için maksimum hatanın 2020 yılında olduğu görülmüştür. Bu duruma, 2020 yılının sonlarında Çin'de başlayan ve tüm dünyayı etkisi altına alan COVID-19 pandemisinin neden olduğu söylenebilir. Türkiye'deki insanların pandemiden dolayı verem tanısı için sağlık kurumlarına başvurmamaları ve verem hastalarının COVID-19 nedeniyle yaşamlarını kaybetmeleri; 2020 yılı verem hasta sayısının tahmin edilen değerinden çok daha düşük olma nedenlerinden olabilir.

Sayısal çözümleri araştırılan ikinci hastalık influenza bulaşıcı hastalığıdır. İnfluenza hastalığı için dört kompartımanlı SEIR matematiksel modeli, kesir türevli difüzyon etkili matematiksel model olarak ele alınmıştır. Kesir türevli difüzyon etkili SEIR matematiksel modelinin RBFC ağsız yöntemiyle difüzyon etkili ve difüzyon etkisiz durumları incelenmiştir. Difüzyon etkisiz durumda difüzyon katsayıları 0 alınmış, difüzyon etkili durumda ise en uygun iki farklı difüzyon katsayıları belirlenmiştir. Dolayısıyla üç farklı difüzyon katsayısı için sayısal sonuçlar elde edilmiştir. Kesir türev mertebeleri olarak 1; 0,98; 0,96 ve 0,94 belirlenmiştir. Difüzyon etkisinde konum da göz önünde bulundurulduğundan konum olarak $x = 0{,}0;\ 0{,}6$ ve $1{,}0$ noktaları alınmıştır. Üç difüzyon katsayısı için de; G ve MQ taban fonksiyonları, dört farklı türev mertebesi ve üç farklı konumun sayısal sonuçları elde edilmiştir. Bu sonuçların grafikleri çizdirilmiş, karşılaştırmalı olarak gösterilmiştir. Hasta birey oranlarının grafiklerinde 1. ve 2. pik noktalarının gün ve oran değerleri belirlenmiş olup tablolar hâlinde verilmiştir. Tablolardaki verilere bakıldığında G ve MQ taban fonksiyonlarıyla elde edilen sonuçların birbirlerine oldukça yakın oldukları söylenebilir. Grafiklerde kesir türev mertebesi azaldıkça fonksiyonların grafiklerinin daha az salınım yaptığı, yani hastalığın pik sayısının azaldığı görülmüştür. Grafikler difüzyon etkisi açısından incelendiğinde, difüzyon etkisi olduğunda fonksiyonların genel olarak pik günlerinin ertelendiği ve oran değerlerinin azaldığı görülmüştür. Difüzyon etkisi hesaba katılarak farklı konumlar için elde edilen sayısal sonuçlarda, konum 0'dan uzaklaştıkça pik noktalarının oran değerlerinin azaldığı görülmektedir.

İki bulaşıcı hastalığın sayısal çözümlerinin grafiklerine bakıldığında; kesir türev mertebesindeki değişikliğin, difüzyon etkisindeki konum değişikliğinden daha etkili olduğu görülmüştür. Aynı yorum difüzyon katsayılarının değişmesi ile kesir türev mertebesindeki değişikliğin karşılaştırması için de yapılabilir.

Bulaşıcı hastalıkların matematiksel modelleri ile ilgili yapılan bu çalışma bir bütün olarak değerlendirildiğinde, yapılan kesir türev yaklaşımının ve difüzyon etkisinin gerçek bulaşıcı hastalık problemlerini tanımlamaya daha yakın olduğu söylenebilir. Elde edilen sayısal sonuçlara bakıldığında; sonuçların gerçek hastalık verilerine benzer olduğu görülmüştür.

Araştırılan verem ve influenza hastalıkları için sayısal çözümlerle yapılan tahminlerin hastalık seyri konusunda bilgi vermesi, önleyici ve tedavi edici tedbirler alınarak olası olumsuz durumlardan kaçınmayı sağlayabilir. Aynı zamanda uygulanan tedavi yöntemlerinin ve alınan tedbirlerin işlevselliği ile ilgili bilgi verebilir.

Bulaşıcı hastalıklar için matematiksel modellerin kompartıman sayıları ve parametrelerinde değişiklikler yapılarak, hastalıkları ve günümüz koşullarını daha iyi tanımlayacak matematiksel modeller oluşturulabilir. Bu çalışmada araştırılan bulaşıcı hastalıklar için farklı matematiksel modellerle analizler yapılabilir. Türev yaklaşımı değiştirilerek ve farklı kesir türev mertebeleri için gerçek verilere daha yakın sonuçlar elde edilebilir. RBFC yönteminde taban fonksiyonları değiştirilebilir. Ayrıca farklı ağsız yöntemlerle sayısal çözümler araştırılabilir.

KAYNAKÇA

Akpınar, H. (2012). Bulaşıcı hastalıkların yayılımının tahmininde deterministik modellerin kullanılması. *Öneri Dergisi, 10*(38), 97-103.

Ammi, M. R. S., M. T., Tilioua, M., Zeb, A., Khan, I., Andualem, M. (2022). Global analysis of a time fractional order spatio-temporal SIR model. *Scientific Reports*.

Asif, M., Khan, Z. A., Haider, N., Al-Mdallal, Q. (2020). Numerical simulation for solution of SEIR models by meshless and finite difference methods. *Chaos, Solitons and Fractals*.

Ataç, A., Uçar , M. (2006). Önemli bulaşıcı hastalıklar ve yaşam sürelerine etkileri. *Bilim Tarihi Araştırmaları: Salgın Hastalıklar Tarihi*, 33-42.

Bozkurt, E. N., Yenice, M., Şahlar, H., Mutlu, S. M., Baykal, F., Gönüller, Ş., et al. (2024). *Türkiye'de verem savaşı 2021 raporu.* Ankara: T.C. Sağlık Bakanlığı.

Brauer, F. (2017). Mathematical epidemiology: past, present, and future. *Infectious Disease Modelling*, 113-127.

Brauer, F., Wu, J., Driessche, P. (2008). *Mathematical epidemiology.* Canada: Springer.

Britton, N. F. (2003). *Essential mathematical biology.* Claverton Down: Springer.

Can, G. (2018, Nisan). *Bir SIR epidemiyoloji optimal aşılama ve tedavi kontrolü*. Kütahya: Dumlupınar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

Caputo, M. (1967). Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent-II. *Geophys J. R. astr. Soc.*, 529-539.

Çilli, A., Ergen, K. (2019). Salgın hastalıkların tahmininde kullanılan SI ve SIS modellerin uygulamaları. *BEÜ Fen Bilimleri Dergisi*, 755-761.

Dereli, Y. (2010). Radial basis functions method for numerical solution of the modified equal width equation. *International Journal of Computer Mathematics*, 1569–1577.

Dietz, K., Heesterbeek, J. A. (2002). Daniel Bernoulli's epidemiological model revisited. *Mathematical Biosciences*, 1-21.

Dushoff, J., Plotkin, J., Levin, S., Earn, D. (2004). Dynamical resonance can account for seasonality of influenza epidemics. *Proc Natl Acad Sci U S A*, 16915-16916.

Elkadry, A. (2013, May). *Transmission rate in partial differential equation in epidemic models*. ABD: Marshall University.

Ergen, K., Çilli, A., Yahnioğlu, N. (2015). Predicting epidemic diseases using mathematical modelling of SIR. *Acta Physica Polonica A*.

Gümüşlü, F., Özkara, Ş., Özkan, S., Baykal, F., Güllü, Ü. (2007). *Türkiye'de verem savaşı.* Ankara: Sağlık Bakanlığı Verem Savaşı Dairesi Başkanlığı.

Hacıevliyagil, S. S. (2003). Tüberküloz'da bulaşma. *23. Ulusal Tüberküloz ve Göğüs Hastalıkları Kongresi.* Malatya: Türkiye Ulusal Verem Savaşı Dernekleri Federasyonu.

Hethcote, H. W. (1989). Three basic epidemiological models. *Applied Mathematical Ecology* (s. 119-144). içinde Berlin: Springer.

Hethcote, H. W. (2000). The mathematics of infectious diseases. *SIAM Review*, 599-653.

Işık, A. (2021). Salgın ekonomisine genel bir bakış. *Health Sciences, 7*(2), 135-158.

Jones, D. S., Plank, M. J., Sleeman, B. (2009). *Differential equations and mathematical biology.* Taylor & Francis Group.

Kansa, E. J. (1990). Multiquadrics scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics, II:Solutions to hyperbolic, parabolic and elliptic partial differential equations. *Computers Math. Applic.*, 147-161.

Karaman, B. (2019, Mayıs). *Kesir mertebeli lineer olmayan schrödinger denklem sistemlerinin sayısal çözümü*. Eskişehir: Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

Karaman, B., Dereli, Y. (2019). Lineer olmayan ikili Schrödinger denklemi için ağsız bir yöntem. *Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi*, 418–435.

Karaoğlu, E. (2024). On the stability analysis of a fractıonal order epidemic model including the general forms of nonlinear incidence and treatment function. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics, 73*(1), 285-305.

Kermack, W. O., McKendrick, A. G. (1927). A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Laboratory of the Royal College of Physicians*, 700-721.

Kermack, W. O., McKendrick, A. G. (1932). Contributions to the mathematical theory of epidemics, part. II. *Laboratory of the Royal College of Physicians*, 55-83.

Kermack, W. O., McKendrick, A. G. (1933). Contributions to the mathematical theory of epidemics, part. III. *Laboratory of the Royal College of Physicians*, 94-112.

Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., Trujillo, J. J. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations.* Amsterdam: Elsevier.

Killingray, D., Phillips, H. (2003). *The spanish influenza pandemic of 1918-1919 new perspectives.* Taylor & Francis.

Kretzschmar, M., Wallinga, J. (2010). Mathematical models in infectious disease. *Statistics for Biology and Health*, 209-221.

Li, Y., Li, W.T., Lin, G. (2015). Damped oscillating traveling waves of a diffusive SIR. *Applied Mathematics Letters*, 89-93.

Longini, I. M., Ackerman, E., Elveback, L. R. (1978). An optimization model for influenza A epidemics. *Mathematical Biosciences*, 141-157.

Ma, Z., Zhou, Y. (2009). *Modeling and dynamics of infectious diseases.* China: Higher Education Press.

Massad, E., Burattini, M. N., Coutinho, F. A., Lopez, L. F. (2007). The 1918 influenza A epidemic in the city of Sao Paulo, Brazil. *Medical Hypotheses*, 442-445.

Meena, R. K., Kumar, S. (2022). Solution of fractional order sır epidemic model using residual power series method. *Palestine Journal of Mathematics*, 12-24.

Miller, K. S., Ross, B. (1993). *An introduction to fractional calculus and fractional differential equations.* New York: John Wiley & Sons Inc.

Nelson, K. E., Williams, C. M. (2007). *Infectious disease epidemiology: theory and practice.* London: Jones and Bartlett.

Parıldar, H. (2020). Tarihte bulaşıcı hastalık salgınları. *Tepecik Eğitim ve Araştırma Hastanesi Dergisi, 30*(Ek sayı), 19-26.

Parıldar, H., Dikici, M. F. (2020). Pandemiler tarihi. *Klinik Tıp Aile Hekimliği Dergisi*, 1-8.

Podlubny, I. (1999). *Fractional differential equations.* USA: Academic Press.

Pooseh, S., Rodrigues, H. S., Torres, D. F. (2011). Fractional derivatives in dengue epidemics. *AIP Conference Proceedings*.

Porta, M. (2014). *A dictionary of epidemiology.* Oxford University Press.

Ross, B. (1975). A brief history and exposition of the fundamental theory of the fractional calculus. *Lecture Notes in Mathematics*, 1-36.

Samsuzzoha, M. (2012). *A study on numerical solutions of epidemic models*. Australia: Swinburne University of Technology, Faculty of Engineering and Industrial Sciences.

Santos, J. P., Monteiro, E., Vieira, G. B. (2017). Global stability of fractional SIR epidemic model. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics*.

Side, S., Utami, A. M., Sukarna, Pratama, M. I. (2018). Numerical solution of SIR model for transmission of tuberculosis by Runge-Kutta method. *International Conference on Mathematics and Natural Sciences*.

Skwara, U., Martins, J., Ghaffari, P., Aguiar, M., Boto, J., Stollenwerk, N. (2012). Applications of fractional calculus to epidemiological models. *AIP Conference Proceedings*, 1339-1342.

Sun, Z. Z., Wu, X. (2006). A fully discrete difference scheme for a diffusion-wave system. *Applied Numerical Mathematics*, 193-209.

Topluoğlu, S., Yenice, M., Şahan, S., Mutlu, S. M., Baykal, F., Yıldırım, A. (2021). *Türkiye'de verem savaşı 2020 raporu.* Ankara: T.C. Sağlık Bakanlığı.

Uçakan, Y. (2021, Ağustos). *Tüberküloz hastalığının Türkiye'deki seyrinin SIR, SEIR, BSEIR matematiksel modelleri ile incelenmesi*. İstanbul: Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

Ullah, I., Ahmad, S., Rahman, M. u., Arfan, M. (2021). Investigation of fractional order tuberculosis (TB) model via Caputo derivative. *Chaos, Solitons and Fractals*(142).

Ünlü, C. (2014, Aralık). *Kesirli Türevli Diferansiyel Denklemler ve Çözüm Yöntemleri*. İstanbul: İstanbul Üniversitesi.

Verschaffel, L., Greer, B., De Corte, E. (2002). Everyday knowledge and mathematical modeling of school word problems. *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (s. 257-276). içinde Berlin: Springer.

Webb, G. F. (1981). A reaction-diffusion model for a deterministic diffusive epidemic. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 150-161.

ÖZGEÇMİŞ

ORCID NO: 0009-0008-6083-2403

Ad Soyad : Ebru YILMAZ

Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim ve Mesleki Geçmişi:

- 2007-2012, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fatih Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Fen-Matematik Alanları, Matematik Öğretmenliği

- 2015-2018, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Uygulamalı Matematik Bilim Dalı, Yüksek lisans

- 2018-2024, Eskişehir Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Uygulamalı Matematik Bilim Dalı, Doktora

- 2013-2019, Matematik Öğretmeni, Şuhut Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi

- 2019-2024, Matematik Öğretmeni, Afyonkarahisar Ölçme Değerlendirme Merkezi

- 2024- , Eğitim Müfettiş Yardımcısı, Uşak İl Milli Eğitim Müdürlüğü