



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI CEBİRSEL KATEGORİLER İÇİN DENKLİKLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Luqman Mahmood Yaseen ZEBARI

DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN

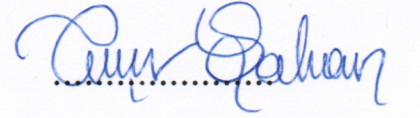
AKSARAY, 2018

AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ONAY BELGESİ

Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 172342627 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi, "Luqman Mahmood Yaseen ZEBARI", ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı "BAZI CEBİRSEL KATEGORİLER İÇİN DENKLİKLER" başlıklı tezini, aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

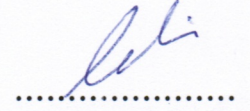
Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN

Aksaray Üniversitesi



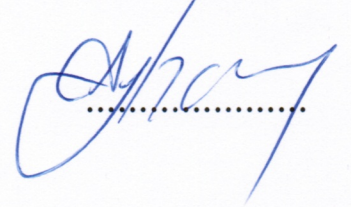
Jüri Üyeleri : Yrd. Doç. Dr. Pelin TEKİN

Trakya Üniversitesi



Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Ayhan ERCİYES

Aksaray Üniversitesi



Teslim Tarihi: 09 Ocak 2018

Savunma Tarihi: 25 Ocak 2018

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ve bu eserleri her kullanışmada alıntı yaparak yararlandığımı belirtir; bunu şerefimle doğrularım.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.



Luqman Mahmood Yaseen ZEBARI

TEŞEKKÜR

Aksaray Üniversitesi yetkililerine bana Türkiye’de eğitim alma fırsatı verdikleri ve eğitim sırasındaki yardımları için Fen Bilimleri Enstitüsü yetkilileri ve personeline en derin şükranlarımı sunuyorum.

Hazırlanma ve çalışma dönemindeki devamlı desteği ve yardımları için danışmanım Yrd. Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN’a şükranlarımı sunuyorum.



İÇİNDEKİLER

Sayfa

DOĞRULUK BEYANI.....	i
İÇİNDEKİLER.....	iii
ÖZET.....	iv
ABSTRACT	v
1. GİRİŞ	1
2. ÖN BİLGİLER.....	3
2.1 Bazı Temel Kavramlar	3
2.2 Grup Örnekleri ve Grup Teorisi Uygulamaları.....	6
2.3 Halka	7
2.4 Modül	10
3. KATEGORİ TEORİSİ	13
3.1 Kategori	13
3.2 Yeni Kategorilerin Yapısı.....	15
3.3 Kategori Türleri.....	16
3.4 Funktorlar	17
4. KATEGORİKSEL DENKLİK.....	19
4.1 Kategorilerin Denkliği.....	19
4.2 Kategoriksel Denklik İle İlgili Tanım ve Özellikler	22
4.3 Abelyen Gruplar.....	23
4.4 Basit Abelyan Olmayan Gruplar ve Onların Genişlemeleri	23
4.5 Kategoriksel Denklik.....	25
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	30
KAYNAKLAR.....	32
ÖZGEÇMİŞ	35

BAZI CEBİRSEL KATEGORİLER İÇİN DENKLİKLER

(Yüksek Lisans Tezi)

Luqman Mahmood Yaseen ZEBARI

AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Ocak 2018

ÖZET

Kategori teoride, matematiğin soyut bir dalı olan kategorilerin bir denkliği, bu kategorilerin "esasen aynı" olduğunu ortaya koyan iki kategori arasındaki bir ilişkidir. Matematiğin birçok alanında kategorik eşdeğerlik örnekleri vardır. Bir denklik kurmak ilgili matematiksel yapılar arasında güçlü benzerlikler göstermeyi içerir. Bazı durumlarda, bu yapılar, yüzeysel veya sezgisel düzeyde ilgisiz görünebilir ve bu düşüncüyü oldukça güçlü hale getirir. Bu teoremlerin temel anlamlarının çeviri altında korunduğunu bilerek, farklı matematiksel yapılar arasındaki teoremleri tercüme etme fırsatı yaratır. Örneğin kategorik denklikler kullanılarak bazı topolojik problemler cebirsel problemlere dönüştürülebilir.

Bu tezde kategorilerinin denk olduklarını gösterebilmek için dolu, düzenli ve yoğun bir fonktörünün bulunmasının yeterli olduğu gösterilmiş ve bu sonuç birçok örnekle açıklanmıştır. Daha sonra cebirsel yapılar için p-kategorik denklik kavramı hatırlatılmış ve p-kategorik denklikle ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir. Son olarak bir kategori denkliği ile birimli eşlenik fonktörler arasındaki ilişki gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Halka, Modül, Kategorik Denklik
Sayfa Adedi : 35
Tez Yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN

EQUEVALENCES BETWEEN CERTAIN ALGEBRAIC CATEGORIES

(M.Sc. Thesis)

Luqman Mahmood Yaseen ZEBARI

AKSARAY UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

January 2018

ABSTRACT

In category theory, an abstract branch of mathematics, an equivalence of categories is a relation between two categories that establishes that these categories are "essentially the same". There are numerous examples of categorical equivalences from many areas of mathematics. Establishing an equivalence involves demonstrating strong similarities between the mathematical structures concerned. In some cases, these structures may appear to be unrelated at a superficial or intuitive level, making the notion fairly powerful. It creates the opportunity to "translate" theorems between different kinds of mathematical structures, knowing that the essential meaning of those theorems is preserved under the translation. For instance using categorical equivalences one can transform topological problems to algebraic problems.

In this thesis it has been shown that it is enough to have a full, faithful and dense functor to show the equivalence of the categories, and this result is explained by many examples. We then recalled the concept of p -categorical equivalence for algebraic structures and obtained some conclusions about the p -categorical equivalence. Finally, the relationship between a categorical equivalence and unitary adjoint functors has been shown.

Keywords : Ring, Module, Categorical Equivalence
Number of Pages : 35
Adviser : Yrd. Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN

1. GİRİŞ

Cebirlerin herhangi bir türü, objeleri o türden cebirler ve morfizmleri bunların aralarındaki homomorfizmalar olan bir kategori olarak düşünülebilir.

A ve B herhangi bir tür cebir olmak üzere, eğer A yı B ye götürecek şekilde bu türleri üreten bir kategorik denklik varsa, A ve B kategoriksel denk olarak adlandırılır.

Kategorik dil yoluyla açıklanabilen tüm cebirsel kavramlar ve özellikler kategorik denklik altında korunur. Örneğin, kategoriksel denk olan A ve B cebirleri için,

- (i) A ve B nin endomorfizma yarıgrupları izomorfiktir,
- (ii) A ve B nin latis altgrupları izomorfiktir ve
- (iii) A ve B nin latis kongrüansları izomorfiktir.

(İspatlar için, bakınız [1].) Ayrıca, kategoriksel denklik limitleri koruduğu için, kategorik olarak denk olan cebirlerin tüm karşılık gelen doğru kuvvetleri de kategoriksel denktir. Eğer bunların temel kümeleri ve terim işlemleri örtüşürse, bu iki cebir terim-denk olarak adlandırılır. Eğer C nin B ye terim-denk olacak şekilde A ya izomorfik olan bir C cebiri varsa A ve B zayıf izomorfiktir denir. R. Mc Kenzie [2] ye göre, zayıf izomorfik cebirler kategorik olarak denktir.

Cebirsel yapılar uzayı üzerine empoze edilebilir şekilde çeşitli doğal denklik ilişkileri vardır. En can alıcı örneği cebirlerin izomorfizmalarıdır. Ancak basit denklik ve terim-denklik gibi diğer ilişkiler literatürde sıklıkla görünür. Verilen bir ' $\equiv$ ' denklik bağıntısı, onun hesaplanabilmesine göre araştırma yapmak doğaldır. Diğer bir deyişle, A ve B 'yi giriş olarak kabul eden bir algoritma mevcutsa, (Tipik olarak bazı koşulları empoze edilerek) ve $A \equiv B$ nin sağlanıp sağlanmayacağını belirler. Ayrıca, eğer böylesi bir algoritma varsa, hesaplamayı gerçekleştirmek için gereken süreye ne türde sınırlar eklenebilir?

$V(A)$, A tarafından üretilen cebir türü olmak üzere, eğer $V(A)$ ve $V(B)$ nin denkliği söz konusu ise A ve B ye kategorik olarak denktir denir. Bu ilişki $A \equiv cB$ şeklinde gösterilir.

A ve B nin herhangi bir şekilde ilgili olacağına dair hiçbir olasılık olmadığını unutmayın. Görünüşe göre, sonlu cebir türleri için bile $\equiv c$ bağıntısının karar verilebilir olabilme olasılığı görünmemektedir. R. McKenzie (McKenzie 1996) sayesinde kategorik denkliğin yeni bir kategorizasyonunun temelini oluşturduğu ispatlanmıştır. Genel itibariyle, algoritmamız küçük cebirler için bile pratik değildir.

[3]'de, Bergman ve Berman kategorik olarak denk cebirlerin kavramını tanımlar.

[4]'de, cebirlerin kategorik denkliği ile bu cebirlere karşılık gelen minimal bağıntısal kümeler arasındaki ilişkiyi ifade ediyoruz.

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, grup, halka ve modül gibi cebirsel yapılar hakkında temel tanımlar ve teoremler verilmiştir. İkinci bölümde, kategori, ikili kategori, çarpım kategorisi ve kategori türleri hakkında temel kurallar ve bilgiler mevcuttur. Üçüncü bölümde, sonlu gruplara atanan minimal bağlantısal kümeleri açıklanmış ve kategorik cebir denkliği, denklik karakterizasyonu, örnekler, özellikler, bağıntılılık, önermeler, teoremler ve başta kabul edilmiş teorem hakkında bazı tanımlar elde edilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, cebirsel yapıların ve teoremlerin açıklanması için kullanılacak bazı kavramlar verilecektir.

2.1 Bazı Temel Kavramlar

Bir f ikili işlemi, iki miktara veya x ve y ifadeleri için uygulanan bir işlemdir.

Tanım 2.1.1. Bir ikili işlem, boş olmayan A üzerinde bir $f : A \times A \rightarrow A$ fonksiyonudur. Böylece

- (i) f , A daki her eleman çifti için tanımlanır,
- (ii) f , A nın elemanlarının bazılarına A daki her bir eleman çiftini benzersiz olarak eşleştirir.

Örnek 2.1.2. İkili işlem örnekleri, A üzerinde $A \times A$ dan A ya kadar toplama (+), çıkarma (-), çarpma ($\times$) ve bölme ($\div$) içerir[5].

Tanım 2.1.3. Bir G kümesi $\cdot$ işlemi ile birlikte aşağıdaki dört şartı sağlaması halinde bir grup yapısı oluşturur ve $(G, \cdot)$ şeklinde gösterilir[6].

- (i) **Kapalılık özelliği:** G daki her a, b elemanı için $a \cdot b \in G$ dir.
- (ii) **Birleşme özelliği:** G daki her a, b, c elemanı için $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ dir.
- (iii) **Birim eleman:** G daki her a elemanı için $a \cdot e = e \cdot a = a$ olacak şekilde biricik e elemanı vardır. Bir grubun birim elemanı genellikle 1 veya 1_G ile gösterilir.
- (iv) **Ters eleman:** G daki her a elemanı için, $a \cdot a' = a' \cdot a = e$ olacak şekilde G de a' bir elemanı vardır.

Bir işlemin sonucu işlemdeki elemanların sırasına bağlıdır. Başka bir deyişle, her zaman $a \cdot b = b \cdot a$ ifadesi doğru olmayabilir. Bu denklem her zaman tamsayılar grubunda toplama altında korunur, çünkü a ve b tamsayıları için $a + b = b + a$ dir. $a \cdot b = b \cdot a$ şartını sağlayan gruplar abelyan grup olarak adlandırılır. Aşağıdaki bölümde açıklanan simetri grubu abelyen olmayan bir grubun örneğidir.

G kümesi $(G, \cdot)$ grubunun dayanak kümesi olarak adlandırılır. Genellikle grubun dayanak kümesi G , $(G, \cdot)$ grubu için bir kısa isim olarak kullanılır. Aynı doğrultuda, “ G grubunun bir alt kümesi” veya “ G grubunun bir elemanı” gibi kısa ifadeler, gerçekte söylenmek istenenin “ $(G, \cdot)$ grubunun dayanak kümesi G nin bir altkümesi” veya “ $(G, \cdot)$ grubunun dayanak kümesi G nin bir elemanı” olduğunda kullanılır. Genellikle, metinde G nin grubu veya dayanak kümesini işaret ettiğini açıktır.

Tanım 2.1.4. $(G, \cdot)$ ve $(H, *)$ iki grup olmak üzere $\alpha : G \rightarrow H$ fonksiyonu her $g \in G$ ve $h \in H$ için

$$\alpha(g \cdot k) = \alpha(g) * \alpha(k)$$

şartını sağlıyorsa bu fonksiyona grup homomorfizmi denir. [7]

Bu tanımlama her $g \in G$ için

$$\alpha(1_G) = 1_H \text{ ve } \alpha(g)^{-1} = \alpha(g^{-1})$$

sonuçlarını ortaya koyar. Grup homomorfizmleri, grup yapısını koruyan fonksiyonlardır. Böylece bir grup homomorfizmi, grup aksiyomları tarafından sağlanan G nin tüm yapısına uyar.

$\alpha : G \rightarrow H$ ve $\beta : H \rightarrow G$ iki grup homomorfizmi olmak üzere

$$\alpha(\beta(h)) = h \text{ ve } \beta(\alpha(g)) = g$$

ise G ve H izomorfik olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.5. $\alpha : G \rightarrow H$ grup homomorfizmi olmak üzere, α nın çekirdeği

$$\ker(\alpha) = \{u \in G : \alpha(u) = e_H\}$$

şeklinde tanımlı G nin elemanlarından oluşan bir kümedir.

Tanım 2.1.6. $\alpha : G \rightarrow H$ grup homomorfizmi olmak üzere, α nın görüntüsü

$$\text{im}(\alpha) = \alpha(G) = \{\alpha(u) : u \in G\}$$

şeklinde tanımlı H nin elemanlarından oluşan bir kümedir.

Bir homomorfizmin çekirdeği ve görüntüsü, onun bir izomorfizm olmaya ne kadar yakın olduğunu ölçmek için yorumlanabilir. 1. izomorfizm teoremi bir grup

homomorfizminin görüntüsü $\alpha(G)$ nin bölüm grubu $G/\ker\alpha$ ya izomorfik olduğunu ifade eder.

α nın çekirdeği G nin ve α nın görüntüsü H nin bir normal altgrubudur.

$$\begin{aligned}\alpha(g^{-1} \circ u \circ g) &= \alpha(g)^{-1} \cdot \alpha(u) \cdot \alpha(g) \\ &= \alpha(g)^{-1} \cdot e_H \cdot \alpha(g) \\ &= \alpha(g)^{-1} \cdot \alpha(g) = e_H\end{aligned}$$

α nın grup monomorfizmi olması için gerek ve yeter şart $\ker\alpha = \{e_G\}$ olmasıdır, yani, α birebirdir. Birebirlik doğrudan, çekirdekte benzersiz bir elemanın olduğunu verir ve çekirdekteki benzersiz bir eleman birebirliği verir. Yani,

$$\begin{aligned}\alpha(g_1) = \alpha(g_2) &\Leftrightarrow \alpha(g_1) \cdot \alpha(g_2)^{-1} = e_H \\ &\Leftrightarrow \alpha(g_1 \circ g_2)^{-1} = e_H, \quad (\ker(\alpha) = e_G) \\ &\Leftrightarrow g_1 \circ g_2 = e_G\end{aligned}$$

olup $g_1 = g_2$ dir [8,9].

Tanım 2.1.7. Bir H alt grubu, bir G grubunun içinde bulunan diğer bir alt gruptan daha büyük olan bir gruptur. Somut olarak, G nin birim elemanı, H nin içinde de bulunur. Aynı zamanda $h_1, h_2 \in H$ için $h_1 \cdot h_2, h_1^{-1} \in H$ dir. O halde, H nin elemanları, H ile kısıtlanmış G üzerindeki işlem ile birlikte bir grup yapısı oluştururlar. [7]

Tanım 2.1.8. (Bölüm grupları) bazı durumlarda bir altgrubun eşkümelerinin kümesi bölüm grubu veya faktör grubunu verecek şekilde bir grup yasası belirlenmiş olabilir. Bunun mümkün olabilmesi için, altgrubun normal olması gereklidir. Herhangi bir N normal altgrubu göz önüne alındığında, bölüm grubu

$$G/N = \{gN, g \in G\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu küme, her $g, h \in G$ için $(gN) \cdot (hN) = (g \cdot h)N$ işlemi ile birlikte bir grup yapısı oluşturur. [10]

Bu tanım, herhangi bir g elemanı için kendi eşkümesi gN ile ilişkilendiren $G \rightarrow G/N$ fonksiyonunun bir grup homomorfizmi olmasını sağlar. $eN = N$ eşkümesi bu grubun birim elemanıdır. Ters eleman ise $(gN)^{-1} = (g^{-1})N$ dir.

2.2 Grup Örnekleri ve Grup Teorisi Uygulamaları

Bir eksik nokta düzleminin temel grubu eksik nokta çevresindeki döngülerden oluşur. Bu grup tamsayılara izomorfiktir.

Grupların örnekleri ve uygulamaları oldukça fazladır. Bir başlangıç noktası, yukarıda bahsedilen, grup işlemine ek olarak toplama işlemi ile birlikte tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}$ grubudur. Eğer toplama işlemi yerine, çarpma göz önüne alınırsa, çarpımsal gruplar elde edilir. Bu gruplar soyut cebirdeki önemli yapıların öncülleridir.

Gruplar ayrıca birçok diğer matematik alanlarında da uygulanır. Matematiksel nesneler genellikle kendilerini grupları ilişkilendirerek ve karşılık gelen grupların özellikleri araştırılarak incelenir. Örneğin, Henri Poincare temel grupları araştırarak cebirsel topolojinin temelini atmıştır [10]. Bu bağlantı yoluyla, yakınsaklık ve süreklilik gibi topolojikler özellikler grupların özelliklerine dönüştürülür. Örneğin, temel grubun elemanları döngüler tarafından temsil edilir. Silinmiş bir noktalı düzlemin temel grubunun sonsuz döngüsel olduğu ortaya çıkar. Bu şekilde, temel grup deliği algılar.

Daha güncel uygulamalarda, bu etki bir grup-teorik arka plan ile geometrik yapıları oluşturmak için tersine dönmüştür. Benzer şekilde, geometrik grup teorisi hiperbolik grupların incelenmesi gibi geometrik kavramlarını kullanır [11]. Önemli bir biçimde grupları uygulayan daha ileri dallar cebirsel geometri ve sayı teorisi içerir [12].

Yukarıdaki teorik uygulamalara ek olarak, birçok pratik grup uygulaması mevcuttur. Kriptografi özellikle sonlu gruplar için uygulandığında, bilgisayar destekli gruplar teorisinde elde edilen algoritmik bilgi birikimiyle birlikte soyut gruplar teorisi birleşimine dayanır [13]. Gruplar teorisinin uygulamaları matematikle kısıtlı değildir. Fizik, kimya ve bilgisayar bilimleri gibi bilimler bu yapıdan faydalanır.

Tanım 2.2.1. (Devirli Gruplar) G bir grup ve $a \in G$ olsun. $\langle a \rangle = \{x \in G \mid x = a^n, n \in \mathbb{Z}\}$ kümesi, a tarafından üretilen devirli altgrup olarak adlandırılır. Eğer bir $a \in G$ elemanı $G = \langle a \rangle$ olacak şekilde varsa G devirli grup olarak adlandırılır. Bu durumda, a ya G nin bir üretici denir. [7]

Birim çemberin 6. karmaşık kökleri bir devirli grup oluştururlar. Ayrıca z bir üretici (ilk eleman) tir, fakat z^2 değildir, çünkü z nin tek kuvvetleri z^2 nin bir kuvveti değildir.

Bir devirli grup, elemanlarının tamamı belirli bir a elemanının kuvvetleri olan bir gruptur. Çarpımsal formda, grubun elemanı $\dots, a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a^0 = e, a, a^2, a^3, \dots$ şeklindedir, burada a^2 , $a \cdot a$ demektir ve a^{-3} ise $a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot a^{-1} = (a \cdot a \cdot a)^{-1}$ anlamına gelir. Böyle bir a elemanı bir üreteç olarak adlandırılır veya grubun bir ilk elemanıdır. Toplamsal formda ise, bir elemanın üreteç olması için grubun her bir elemanı $\dots, -a - a, -a, 0, a, a + a, \dots$ şeklinde yazılabilir olmasıdır.

Yukarıda açıklanan $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ gruplarında 1 elemanı üreteçtir, bu yüzden bu gruplar devirli gruptur. Gerçekten, her eleman 1 lerin toplamı olarak ifade edilebilir. n elemanı olan herhangi bir devirli grup bu gruba izomorftur. Devirli gruplar için ikinci bir örnek, birim çemberde $z^n = 1$ şartını sağlayan z karmaşık sayıları için n -ninci karmaşık köklerin grubudur. Bu sayılar, $n = 6$ için bir düzgün altıgen üzerindeki köşeler olarak görselleştirilebilir. Grup işlemi karmaşık sayıların çarpımıdır. z ile çarpım saat yönünün tersine 60° lik bir dönüşü karşılık gelir [7]. Cisim teorisinde, F_p^x grubu devirli grup olarak gösterilebilir. Örneğin $p = 5$ alınırsa, $3^1 = 3$, $3^2 = 9 \equiv 4$, $3^3 \equiv 2$ ve $3^4 \equiv 1$ olduğundan 3 bir üreteçtir.

Bazı devirli gruplar sonsuz sayıda elemana sahiptir. Bu gruplar, sıfırdan farklı her a elemanı için, a 'nın bütün kuvvetleri farklıdır; "devirli grup" adına rağmen, elemanların kuvvetleri devir yapmaz. Bir sonsuz devirli grup $(\mathbb{Z}, +)$ ya izomorftur [7]. Bu yapıların her ikisi de abelyan olduğu için devirli gruptur.

Sonlu üreteçli abelyan gruplar, sonlu üreteçli abelyan grupların temel teoremi ve bu durumunu yansıtan grup ile ilişkili merkez ve komütatör gibi birçok kavram ileri boyutta araştırılmıştır [9].

2.3 Halka

Tanım 2.3.1. Bir halka, ikili işlemlerle donatılmış bir R kümesidir. Yani,

- 1) $a + b$, R nin her sıralı (a, b) çifti için tanımlanır.
- 2) "+" iyi tanımlıdır, yani, eğer $a + b = c_1$ ve $a + b = c_2$ ise $c_1 = c_2$ dir.
- 3) R toplama işlemi altında kapalıdır. Yani, R nin herhangi a ve b elemanları için $a + b$ nin değeri R nin bir elemanıdır. Aynı şey çarpma için de geçerlidir. Kapalılık bir aksiom olabilirdi, ancak, yalnızca, R üzerindeki ikili işlemlerin yerine, daha büyük bir S kümesinde "+" ve "." fonksiyonları kullanılmaktadır.

"+" ve "." halka aksiyomları olarak adlandırılan aşağıdaki üç şartı sağlar [14,15,16].

(i) R toplama işlemi altında bir Abelyan gruptur, yani

- R deki her a, b, c elemanı için, $(a + b) + c = a + (b + c)$ (+ birleşmelidir).
- R deki her a, b elemanı için, $a + b = b + a$ (+ değişmelidir).
- R deki her a elemanı için, $a + 0 = a$ olacak şekilde R de bir 0 elemanı vardır (0 toplamsal birimdir).
- R deki her a elemanı için, $a + (-a) = 0$ olacak şekilde R de $-a$ elemanı vardır ($-a$ burada a nın toplamsal tersidir).

(ii) R çarpma işlemi altında monoiddir, yani

- R deki her a, b, c elemanı için, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ($\cdot$ birleşmelidir).
- R deki her a elemanı için, $a \cdot 1 = a$ ve $1 \cdot a = a$ olacak şekilde R de bir 1 elemanı vardır (1 çarpımsal birimdir).

(iii) Çarpmanın, toplama üzerine dağılma özelliği vardır:

- R deki her a, b, c elemanı için, $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ (soldan dağılma).
- R deki her a, b, c elemanı için, $(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$ (sağdan dağılma).

Bir halkanın bazı temel özelliklerini aşağıdaki şekilde sıralayabiliriz:

- Toplamsal birim, her bir elemanı toplamsal tersi, ve çarpımsal birim biriciktir.
- Bir R halkasındaki herhangi bir x elemanı için $x0 = 0 = 0x$ ve $(-1)x = -x$ dir.
- 0 birim R halkasının birim elemanı olmak üzere $0 = 1$ ise, böylece R yalnızca bir elemana sahiptir ve bu halka sıfır halkası olarak adlandırılır.
- Herhangi iki x ve y değişkeni için $xy = yx$ dir.

Örnek 2.3.2. $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ kümesi üzerinde;

- $\mathbb{Z}_4$ deki $\bar{x} + \bar{y}$ toplamı, $x + y$ nin 4 ile bölümünden kalandır. Örneğin, $\bar{2} + \bar{3} = \bar{1}$ ve $\bar{3} + \bar{3} = \bar{2}$,

- $\mathbb{Z}_4$ deki $\bar{x} \cdot \bar{y}$ çarpımı, xy nin 4 ile bölümünden kalandır. Örneğin, $\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{2}$ ve $\bar{3} \cdot \bar{3} = \bar{1}$,

işlemleri ile birlikte $\mathbb{Z}_4$ bir halkadır. Eğer x bir tamsayı ise, 4 ile bölündüğünde x nin kalanı $\mathbb{Z}_4$ ün bir elemanıdır. Bu eleman genellikle “ $x \bmod 4$ ” veya $\bar{x}$ ile gösterilir. $\mathbb{Z}_4$ te $\bar{x}$ in toplamsal tersi $\overline{-x}$ tir. Örneğin, $-\bar{3} = \overline{-3} = \bar{1}$ dir.

Örnek 2.3.3. Reel sayılar kümesi üzerinde 2×2 lik matrislerin kümesi

$$M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

şeklinde gösterilir. Matrislerde toplama ve çarpma işlemleriyle, bu küme halka

aksiyomlarını sağlar. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ elemanı bu halkanın çarpımsal birimidir. Eğer

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ alınırsa, $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ elde edilir. Bu

örnek bu halkanın değişmeli olmadığını gösterir.

Daha genel olarak, herhangi bir R halkası ve negatif olmayan n tamsayı için, $\mathbb{R}$ den alınan elemanlarla $n \times n$ lik matrislerinin halkası oluşturulabilir.

Tanım 2.3.4. R bir halka ve S , R nin boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. Eğer S altkümesi R deki işlemlere göre bir halka ise S ye R nin alt halkası denir. Diğer bir deyişle, boş kümeden farklı S kümesi için

$$x, y \in S \text{ iken } xy, x + y, -x \in S$$

ise S bir alt halkadır. Eğer tüm halkaların bir çarpımsal birime sahip olacağı varsayılırsa, S ile R aynı birim elemanına sahip olmak zorundadır [17].

Örnek 2.3.5. $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası reel sayılar cisminde, $\mathbb{Z}[X]$ polinom halkasının da bir alt halkasıdır (her iki durumda $\mathbb{Z}$, büyük halkanın çarpımsal birimi olan 1 i içerir). Diğer taraftan, çift tamsayılar kümesi $2\mathbb{Z}$, 1 birim elemanını içermez ve böylece alt halka olarak nitelendirilemez.

Tanım 2.3.6. $(R, +, \cdot)$ ve $(S, \oplus, *)$ iki halka olmak üzere $f : R \rightarrow S$ fonksiyonu her $a, b \in R$ için

- (i) $f(a + b) = f(a) \oplus f(b)$
- (ii) $f(a \cdot b) = f(a) * f(b)$
- (iii) $f(1_R) = 1_S$

şartlarını sağlıyorsa f ye halka homomorfizmi denir.

Halka homomorfizmi işlem koruyan bir fonksiyon olarak da düşünülebilir. Eğer birimli halkalar ile çalışıyorsa, üçüncü koşula bakmaya gerek yoktur. Eğer f , birebir ve örten ise izomorfizma olarak adlandırılır. R ve S halkaları arasında bir izomorfizma varsa, R ile S izomorfiktir denir ve $R \approx S$ şeklinde gösterilir. Aynı halka arasındaki homomorfizme endomorfizm, aynı halka arasındaki izomorfizme otomorfizm denir.

2.4 Modül

Tanım 2.4.1. R bir halka, 1_R çarpımsal birim ve $(M, +)$ bir abelyan grup olsun.

$$\begin{aligned} \cdot : R \times M &\rightarrow M \\ (r, m) &\mapsto r \cdot m \end{aligned}$$

işlemi her $r, s \in R$ ve $x, y \in M$ için

- (i) $r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y$
- (ii) $(r + s) \cdot x = r \cdot x + s \cdot x$
- (iii) $(rs) \cdot x = r \cdot (s \cdot x)$
- (iv) $1_R \cdot x = x$

şartlarını sağlıyorsa M ye bir sol R -modül denir ve ${}_R M$ notasyonu ile gösterilir.

M üzerindeki halkanın işlemine skaler çarpım denir ve genellikle yanyana yazılır, örneğin $r \in R$ ve $x \in M$ için rx şeklindedir. Ancak burada onu halka çarpım işleminden ayırmak için $r \cdot x$ olarak gösterilir. Ancak halkanın etkisinin sağdan olması durumunda, yani $\cdot : M \times R \rightarrow M$ iken yukarıda verilen şartlar r ve s , x ve y nin sağında olacak şekilde yazılır.

Bazı kaynaklarda modül yapısını tanımlarken halkanın birimli olmasını ön şart olarak kabul edip yukarıdaki (iv) maddesini şartların içine dahil etmezler ve bu

şekliyle oluşturulan yapıyı birimli sol R -modül olarak adlandırırlar. Bu tezde tüm halkalar ve modüllerin birimli olduğu kabul edilmektedir.

Eğer her r ye karşılık gelen f_r fonksiyonu ile birlikte skaler çarpım $f_r(x) = r \cdot x$ olacak şekilde verilirse, ilk şart f_r nin bir grup homomorfizmi olduğunu gösterir ve diğer şartlar ise

$$\begin{aligned} f &: R \rightarrow \text{End}(M) \\ r &\mapsto f_r \end{aligned}$$

ile verilen fonksiyonun bir halka homomorfizmi olduğunu ifade eder [18]. Böylece modül, abelyan grup üzerine bir halka etkisi olarak düşünülebilir. Bu bağlamda, modül teorisi vektör uzayları üzerindeki grup etkileriyle veya benzer şekilde grup halka etkileriyle ilgilenen temsil teorisini genelleştirir.

Bir modül hem sağ hemde sol R -modül ise bimodül olarak adlandırılır. Eğer R halkası değişmeli ise sol R -modül ile sağ R -modül aynıdır ve basit olarak R -modül olarak ifade edilir.

Örnek 2.4.2. S boş olmayan küme, M bir sol R -modül ve $f: S \rightarrow M$ şeklindeki tüm fonksiyonların koleksiyonu M^S olmak üzere, M^S deki toplam ve çarpım işlemi her $s \in S$ için

$$(f + g)(s) = f(s) + g(s) \text{ ve } (rf)(s) = rf(s)$$

olarak alınırsa, M^S sol R -modüldür.

Özel olarak, eğer R ise $h: M \rightarrow N$ R -modül homomorfizmlerinin koleksiyonu bir R -modüldür (aslında N^M nin bir alt modülüdür).

Tanım 2.4.3. M bir sol R -modül ve N , M nin bir altgrubu olsun. Eğer $n \in N$ ve $r \in R$ için $r \cdot n \in N$ ise N ye M nin alt modülü denir.

Verilen bir M modülünün alt modüllerinin kümesi $+$ ve $\cap$ işlemleri ile birlikte modül şartlarını sağlayan bir koleksiyon oluştururlar. M nin $N_1 \subset N_2$ olacak şekilde U, N_1, N_2 alt modülleri için

$$(N_1 + U) \cap N_2 = N_1 + (U \cap N_2)$$

dır.

Eğer M ve N sol R -modül ise, her $r, s \in R$ ve $m, n \in M$ için

$$f(r \cdot m + s \cdot n) = r \cdot f(m) + s \cdot f(n)$$

ise $f : M \rightarrow N$ fonksiyonu R -modüllerin bir homomorfizmidir.

Matematiksel nesnelerin herhangi homomorfizmi gibi, bu nesnelerin yapısını koruyan yalnızca bir dönüşümdür. Birebir ve örten olan modül homomorfizmine izomorfizm, bu modüllere izomorfik denir. İki izomorfik modül, yalnızca kendi elemanları için gösterimle farklılaşan tüm pratik amaçlar için aynıdır.

Bir modül homomorfizmi $f : M \rightarrow N$ nin çekirdeği tüm elemanları f tarafından sıfıra gönderilen M nin bir alt modülüdür.

Gruplar ve vektör uzaylarındaki izomorfizma teoremleri benzer şekilde R -modüller için de geçerlidir.

Sol R -modüller kendi modül homomorfizmleri ile birlikte abelyan olan bir kategori oluşturur ve bu kategori $R\text{-Mod}$ olarak gösterilir [18,19].

3. KATEGORİ TEORİSİ

3.1 Kategori

Kategori teorisi ilk olarak 1945 yılında Eilenberg Samuel ve Saunders Mac Lane tarafından yazılan “Doğal Eşitliklerin Genel Kuramı” isimli makalede görüldü [20]. Kategori “oklarla” bağlanan “nesnelerden” oluşan bir cebirsel yapıdır. Bir kategori;

- a) Birleşik bir şekilde okları oluşturma yeteneği
- b) Her bir nesne için bir birim okunun varlığı

şeklinde iki temel özelliğe sahiptir. Genel olarak, nesneleri ve oklar her türlü soyut varlıklar olabilir. Kategori kavramı matematiksel kuruluşlar ve bunların ilişkilerini tanımlamak için temel ve soyut bir yol sağlar. Bu kategori teorisinin ana fikri, nesneler ve okların neyi temsil ettiği ve bu bağımsız nesneler ve okları, içindeki terimlerin tüm matematiği genellemek istediği bir daldır. Neredeyse modern matematiğin her dalı kategoriler açısından tarif edilebilir ve bunu yaparken matematik sık sık görünüşte farklı alanlar arasında derin anlayış ve benzerlikleri ortaya koymaktadır. Nesnelerin aynı koleksiyonu, okların aynı toplanması ve herhangi bir çift okun düzeninin aynı yöntemle ilişkilendirilmiş olması bu iki kategorinin aynı olması anlamına gelir. İki kategori tam olarak aynı olmasa bile kategorik olarak denk kabul edilebilir.

Tanım 3.1.1. Bir kategorinin birçok eşdeğer tanımı vardır [21]. En sık kullanılan tanım aşağıdaki gibidir. C ile gösterilen bir kategoride;

- (i) $ob(C)$ ile gösterilen objeler sınıfı,
- (ii) $hom(C)$ veya $hom(A, B)$ ile gösterilen morfizmlerin(okların) sınıfı,
- (iii) $X, Y, Z \in ob(C)$ ve $f : X \rightarrow Y$ ve $g : Y \rightarrow Z$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \circ : Mor(X, Y) \times Mor(Y, Z) &\rightarrow Mor(X, Z) \\ (f, g) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı bir kompozisyon işlemi var olması gerekir.

Bir kategoride aşağıdaki aksiyomlar sağlanır.

- (a) Kompozisyon işleminin birleşmeli olması gerekir. Yani, $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ ve $h : C \rightarrow D$ için $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ dir.
- (b) Her $f \in Mor(A, B)$ için birim morfizmi olarak adlandırılan $f \circ 1_A = 1_B \circ f = f$ olacak şekilde 1_A ve 1_B morfizmleri vardır.

Bu aksiyomlar sayesinde her bir obje için bir birim morfizmin olması gerektiği aşıkardır.

Örnek 3.1.2. (a) SET ile göstereceğimiz kümeler kategorisini ele alalım. Bu sistem, objeleri A, B, C gibi kümeler, morfizmleri f, g, h gibi fonksiyonlar ve kompozisyonu bileşke işlemi olan bir kategoridir.

(b) **GRP** ile göstereceğimiz gruplar kategorisini ele alalım. Bu sistem, objeleri bütün gruplar, morfizmleri homomorfizmler ve kompozisyonu bileşke işlemi olan bir kategoridir.

(c) **TOP** ile göstereceğimiz topolojik uzaylar kategorisini ele alalım. Bu sistem, objeleri bütün topolojik uzaylar, morfizmleri sürekli fonksiyonlar ve kompozisyonu bileşke işlemi olan bir kategoridir.

Tanım 3.1.3. Bir kategorinin objelerinin sınıfı bir küme ise bu kategori küçük (small), aksi halde büyük (large) olarak adlandırılır. Yerel küçük kategori, tüm A, B objeleri için, morfizmler sınıfı $hom(A, B)$ olarak adlandırılan bir küme olacak şekildeki kategorilerdir. Matematikte birçok önemli kategori, örneğin kümeler kategorisi, her ne kadar küçük olmasa da, en azından yerel olarak küçük kategorilerdir [22].

Tanım 3.1.4. Bir kategoride morfizmler yalnızca birim morfizmler ise bu tür kategorilere soyut kategori adı verilir. Verilen herhangi bir I kümesi için, objeler olarak I nın elemanlarına, morfizm olarak ise yalnızca birim morfizmlere sahip olan kategoriler I üzerindeki soyut kategorilerdir. Soyut kategoriler kategorilerin en basit türüdür.

Örneğin, Ord ile gösterilen sıralı kümelerin kategorisi $(P, \leq)$ bir soyut kategoridir.

3.2 Yeni Kategorilerin Yapısı

Tanım 3.2.1. C herhangi bir kategori olmak üzere, objeleri C nin objeleri ile aynı, okları ise C nin oklarının tersi alınarak oluşturulan kategoriye dual veya ters kategori denir ve C^{op} şeklinde gösterilir.

Tanım 3.2.2. C ve D iki kategori olsun. Objeleri, biri C den diğeri D den alınarak elde edilen ikililer olan, morfizmleri ise morfizmlerinin birleşimlerinin çifti ile oluşturulan kategoriye C ve D nin çarpım kategorisi denir ve $C \times D$ ile gösterilir. Yani çarpım kategorisi

(i) $A \in \text{Ob}(C)$ ve $B \in \text{Ob}(D)$ iken $(A, B) \in \text{Ob}(C \times D)$

(ii) $f_1, g_1 \in \text{Mor}(C)$ ve $f_2, g_2 \in \text{Mor}(D)$ iken $(f_1 \circ g_1, f_2 \circ g_2) \in \text{Mor}(C \times D)$

şeklindedir.

Bir kategorinin $\{X_i\}_{i \in I}$ objelerinin çarpımı da bir obje olduğu için çarpım kategorisinin objesi $P = \prod_{i \in I} X_i$ dir. Diğer taraftan $\{P_i : P \rightarrow X_i\}$ morfizm ailesi olmak üzere her Q objesi ve her $i \in I$ için $p_i \circ q = q_i$ olacak şekilde bir tek $q : Q \rightarrow P$ morfizmi vardır. Aynı zamanda çarpım izomorfizm farklıla tektir.

Kümeler kategorisinde çarpım kartezyen çarpımdır, gruplar kategorisinde ise çarpım direkt çarpımdır. Her iki durumda da $P = \prod_{i \in I} X_i$ ve $P_i : P \rightarrow X_i$ i-inci eleman üzerinde izdüşümdür. Detaylı bilgi için [23,24,25,26,27] kaynaklarına bakılabilir.

Tanım 3.2.3. C bir kategori ve $f : A \rightarrow B$ bir morfizm olsun. Eğer;

(i) $f \circ g = f \circ h$ iken $g = h$ oluyorsa (soldan sadeleşme özelliği varsa) f ye monik (monomorfizm) denir.

(ii) $g \circ f = h \circ f$ iken $g = h$ oluyorsa (sağdan sadeleşme özelliği varsa) f ye epik (epimorfizm) denir.

(iii) f hem monik hem epik ise f ye bimorfizm denir.

(iv) $f \circ g = 1_B$ olacak şekilde $g : B \rightarrow A$ morfizmi varsa f ye dual kesit denir.

(v) $g \circ f = 1_A$ olacak şekilde $g : B \rightarrow A$ morfizmi varsa f ye kesit denir.

(vi) f hem kesit hem retraksiyon ise f ye izomorfizm denir [28].

- (vii) $A = B$ ise f ye endomorfizm denir. Endomorfizmler sınıfı $End(A)$ ile gösterilir.
- (viii) f hem endomorfizm hem izomorfizm ise f ye otomorfizm denir. Otomorfizmler sınıfı $Aut(A)$ ile gösterilir [22].

Her retraksiyon epimorfizmdir ve her kesit moniktir. Ayrıca aşağıdakiler denktir:

- a) f monik ve dual kesittir.
- b) f epik ve kesittir.
- c) f izomorfizmdir.

Morfizmler arasındaki ilişkiler ($fg = h$ gibi) en uygun şekilde değişmeli diyagramlar ile gösterilebilir, burada nesneler noktalar olarak ve morfizmler oklar olarak temsil edilir.

3.3 Kategori Türleri

Birçok kategoride, örneğin Ab veya $Vect_K$ gibi, $hom(A, B)$ homsetleri yalnızca kümeler değil abelyen gruplardır ve morfizmlerin kompozisyonu bu grup yapılarıyla uyumludur; örneğin bilineerdir. Böylesi bir kategoriye öntoplamsal kategori denir. Ayrıca, eğer kategori tüm sonlu çarpımlara ve eşçarpımlara sahipse toplamsal kategori olarak adlandırılır.

Diğer taraftan, eğer tüm morfizmler çekirdek ve eşçekirdeğe sahip, tüm epimorfizmler eşçekirdekler ve monomorfizmler çekirdekler ise, ancak o zaman abelyan kategoriden bahsedilebilir. Bir abelyan kategorinin tipik bir örneği abelyen gruplar kategorisidir.

Bir kategori tüm limitlere sahip ise tam (complete) olarak adlandırılır. Kümeler, abelyan gruplar ve topolojik uzaylar kategorileri tamdır.

Bir kategori sonlu direkt çarpımlara sahipse ve sonlu çarpımda tanımlı bir morfizm yalnızca faktörlerden biri üzerinde tanımlı bir morfizm tarafından gösterilebiliyorsa bu kategori kartezyen kapalı olarak adlandırılır. Kümeler kategorisi kartezyen kapalıdır. Ayrıca, topos kendi içinde tüm matematiğin formüle edilebileceği kartezyen kapalı kategorinin bir türüdür. Aynı zamanda, mantıksal teoriyi göstermek için kullanılabilir [20,22].

3.4 Funktorlar

Tanım 3.4.1. C ve D iki kategori olsun. C deki objeleri D deki objelere, C deki morfizmleri D deki morfizmlere dönüştüren ve

$$(i) \quad F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$$

$$(ii) \quad F(1_A) = 1_{F(A)}$$

şartlarını sağlayan F kuralına funktor denir [19]. Burada verilen şartlar kompozisyonun ve birimin korunması anlamına gelir.

Tanım 3.4.2. Bir F funktorunda okların yönü korunuyorsa, yani $f : A \rightarrow B$ morfizmi için $F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$ ise bu funktora kovaryant funktor denir.

Örnek 3.4.3. Her C kategorisi için objeleri $1_C(A) = A$ ve morfizmler $1_C(f) = f$ olan $1_C : C \rightarrow C$ birim fonktörü vardır.

Örnek 3.4.5. C bir kategori ve D , C nin alt kategorisi olsun. $D \rightarrow C$ funktoru indirgenmiş $1_C \rightarrow D$ funktoru kısıtlanmasıdır.

Örnek 3.4.6. A herhangi bir grup olmak üzere A' , A nin komütatör grubu olsun, yani; $A' = \{ghg^{-1}h^{-1} : g, h \in A\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} F : \text{Grp} &\rightarrow \text{Grp} \\ A &\mapsto F(A) = A' \\ f &\mapsto F(f) = f' \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan funktora komütatör alt grup funktoru denir.

Tanım 3.4.7. $F : C \rightarrow D$ bir funktor olsun. Eğer $F : C^{\text{op}} \rightarrow D$ bir funktor ise F funktoru kontravaryant funktor denir.

Kontravaryant funktorun kompozisyon yönünü ters döndürdüğüne dikkat edilmelidir [18]. Ayrıca, diğer funktorları kontravaryant funktordaki ayırt etmek için kovaryant funktorlar olarak adlandırılır. Kontravaryant funktorlar bazen eşfunktor olarak da adlandırılır.

Tanım 3.4.8. $F, G : A \rightarrow B$ iki funktor olsun. Eğer $\eta : F \rightarrow G$ dönüşümü

a) her $A \in \text{Ob}(A)$ için $\eta(A) : F(A) \rightarrow G(A)$ bir morfizmdir,

b) $f : A \rightarrow A'$ morfizmi için

$$\begin{array}{ccc}
F(A) & \xrightarrow{\eta(A)} & G(A) \\
F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\
F(A') & \xrightarrow{\eta(A')} & G(A')
\end{array}$$

diyagramı değişmeli, yani $G(f) \circ \eta(A) = \eta(A') \circ F(f)$ ise η ye doğal dđnüşüm denir. Eğer her $A \in Ob(A)$ için $\eta(A)$ izomorfıma ise η ye doğal izomorfizma denir [29]

4. KATEGORİKSEL DENKLİK

4.1 Kategorilerin Denkliği

Kategorilerin denkliği iki kategori arasındaki “temelde aynı” anlamında bir ilişkidir. Matematiğin birçok alanından kategorik denkliğe ait sayısız örnekler vardır. Bir denklik oluşturmak ilgili matematiksel yapılar arasında güçlü benzerlikler göstermeyi içerir. Bazı durumlarda, bu yapılar yapay veya sezgisel bir seviyede ilgisiz görünebilir, fakat bu farklı matematiksel yapı türleri arasında bu teoremlerin temel anlamını yitirmeden, korunduğunu bilerek teoremleri dönüştürme fırsatı sunar. Eğer bir kategori bir diğer kategorinin dualine denk ise o zaman kategorilerin duallığından bahsedilebilir ve bu iki kategorinin dual olarak denk olduğu söylenebilir.

Kategorilerin eşitliği dahil olan kategoriler arasında bir funktordan oluşur ve bunun bir ters funktora sahip olması gerekir. Ancak genel durumun tersine, cebirsel durumda izomorfizmler için funktor ve onun tersinin bileşkesi birim dönüşüm değildir. Bunun yerine, her nesnenin kendi kompozisyonu altındaki görüntüsüne doğal izomorfik olması yeterlidir. Böylece izomorfizm altında ters olan funktorlar tanımlanabilir. Böylece kategorilerin izomorfik olma kavramı ortaya çıkacaktır ancak bu denklik kavramından çok daha az kullanıma sahiptir.

Tanım 4.1.1. C ve D iki kategori, $F:C \rightarrow D$ ve $G:D \rightarrow C$ iki funktor olsun. Eğer $\varepsilon:FG \rightarrow I_D$ ve $\eta:I_C \rightarrow GF$ doğal izomorfizmaları varsa C ve D kategorileri denktir denir. Burada I_C ve I_D birim funktorlardır.

Ayrıca eğer F ve G kontravaryant ise kategorilerin duallığından bahsedilebilir. Diğer taraftan aralarında bir denklik varsa veya yukarıda bahsedilen ters funktor ve doğal izomorfizmler mevcutsa C ve D denktir denilebilir. Fakat unutulmamalıdır ki F in bilgisi G yi ve doğal izomorfizmaları yeniden yapılandırmak için yeterli değildir başka durumlar da olabilir.

Tanım 4.1.2. C ve D iki kategori, $F : C \rightarrow D$ bir fonktor olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa C ve D denktir denir:

- a) F tam (full) ise, yani $c_1, c_2 \in Ob(C)$ için tarafından indirgenen $Hom_C(c_1, c_2) \rightarrow Hom_D(Fc_1, Fc_2)$ fonksiyonu örtendir,
- b) F düzgün (faithful) ise, yani $c_1, c_2 \in Ob(C)$ için tarafından indirgenen $Hom_C(c_1, c_2) \rightarrow Hom_D(Fc_1, Fc_2)$ fonksiyonu birebirdir,
- c) F yoğun (dense) ise, yani $c \in Ob(C)$ için her bir $d \in Ob(D)$ objesi Fc nin bir objesine izomorfiktir.

Bu kriter FG , GF ve birim fonktor arasında doğal izomorfizma ve G nin tersini oluşturmak gerekmediği için oldukça kullanışlı ve yaygın olarak uygulanan bir kriterdir. Öte yandan, yukarıdaki özellikler bir kategorik denkleğin varlığını garanti etmesine rağmen eksik bilgileri vermez. Bunun için farklı birçok seçenek vardır. Bu durum sebebiyle, bazen bu özelliklere sahip bir fonktör kategorilerin zayıf bir denkliği olarak adlandırılır.

Ayrıca adjoint (eşlenik) fonktörler kavramına dair olan ilişki şu şekildedir:

Aşağıdaki ifadeler $F : C \rightarrow D$ ve $G : D \rightarrow C$ fonktörleri için denktir

- a) FG den I_D ye ve I_C den GF ye doğal izomorfizma vardır,
- b) F , G nin sol eşlenik fuktorudur ve her ikisi de tam ve düzgündür,
- c) G , F nin sağ eşlenik ve her ikisi de tam ve düzgündür.

Böylece denkleğin çok zayıf bir biçimi olarak iki fonktör arasında bir denklik ilişkisi izlenebilir. Denklikler için doğal dönüşümler verildiği varsayıldığında, bu formülasyonların tümü gerekli bilgilerin açık bir yapısına olanak sağlar ve hiçbir seçim şartlarına ihtiyaçları yoktur. Burada kanıtlanması gereken temel özellik bir adjointin eşünitesinin bir izomorfizm olması için gerek ve yeter şart sağ adjoint fonktörün tam ve düzgün olmasıdır.

Örnek 4.1.3.

- 1) Tek bir c objesine ve 1_c morfizmine sahip C kategorisi ile d_1, d_2 objeleri ve $1_{d_1}, 1_{d_2}, \delta : d_1 \rightarrow d_2$ ve $\theta : d_2 \rightarrow d_1$ morfizmlerine sahip D kategorisini ele

alalım. $F : c \rightarrow d_1$, D nin her iki objesinden c ye ve tüm morfizmlerden 1_c ye G fonktorlarına sahip olduğumuz için C ve D denktir.

- 2) Tersine, tek bir objeli ve tek bir morfizimli C kategorisi, iki objeli ve iki birim morfizimli H kategorisine iki obje izomorf olmadığından denk değildir.
- 3) Tek c objesine ve $1_c, f : c \rightarrow c$ morfizmlerine sahip C kategorisini ele alalım. c ve $f \circ f = 1$ üzerinde 1_c birim morfizmi olsun. Bu durumda C kategorisi kendisine denktir. Bu denklik I_c fonktoru ve kendisi arasındaki gerekli izomorfizmler yerine 1_c alınarak gösterilebilir. Diğer taraftan, f , I_c den kendisine bir doğal izomorfizma oluşturur. Bundan dolayı, birim fonktorların kategorilerin denkliğinde önemli bir rol oynadığı aşıkardır.
- 4) Kümeler kategorisi, kısmi fonksiyonlar kategorisi ile denktir, fakat noktalanmış kümeler ve nokta-koruyan fonksiyonlar kategorileriyle izomorfik değildir [30].
- 5) C kategorisi olarak sonlu boyutlu reel vektör uzaylarını, D kategorisi olarak reel matrislerin kümesini ele alalım. $G : D \rightarrow C$, $A_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonktoru tanımlayarak C ile D kategorilerinin denk olduğu gösterilebilir. Bu fonktor aynı zamanda tam, düzgün ve yoğundur.
- 6) Cebirsel geometrinin temel konularından biri afin düzlem kategorisinin dualitesi ve değişmeli halkalar kategorisidir. G fonktoru her değişmeli halkayı kendi spectrumuna birleştirir, böylece halkanın asal idealleri vasıtasıyla düzlem tanımlanabilir. Onun eşlenik funktoru olan G fonktoru ise her afin düzlemi onun genel bölüm halkasına birleştirir. Böylece bu iki kategorinin denkliği kurulmuş olur.
- 7) Birimli ve değişmeli C^* -cebir kategorisi ile kompakt Hausdorff uzaylar kategorisi kontravaryant olarak denktir. Bu dualite altında her kompakt Hausdorff uzayı X ile X üzerinde kompleks değerli sürekli fonksiyonların cebiri ilişkilidir ve her değişmeli C^* -cebir kendi maksimal idealler uzayı ile ilişkilendirilebilir.
- 8) Lattice teorisinde topolojik uzayların sınıflarına belirli sınıfları bağlayan temsil teoremlerine dayalı bir çok dualite vardır. Muhtemelen bu türde en iyi bilinen teorem Stone dualliğinin genel yapısı içinde özel bir durumu olan Stone'nun Boolean cebirleri temsil teoremidir. Her B Boolean cebirinden onun ultra süzgeçlerinin kümesi üzerinde bir özel topolojiye fonktor oluşturulabilir.

Tersine, herhangi bir topolojide onun hem kapalı hem açık alt kümeleri Boolean cebirini verir. Böylece Boolean cebirleri (homomorfizmleri ile) kategorisi ile Stone uzayları (sürekli fonksiyonlar ile) kategorisi arasında bir dualite elde edilir. Stone dualliğinin diğer bir durumu ise sonlu kısmi sıralar ve sonlu dağıtıcı kafesler üzerine olan Birkhoff'un temsil teoremi arasındadır.

9) Noktasız topoloji'de, uzaysal lokallerin kategorisi ölçülü uzayların kategorisinin dualine denktir.

10) R ve S iki halka olmak üzere $R\text{-Mod} \times S\text{-Mod}$ ile $(R \times S)\text{-Mod}$ denktir.

11) Herhangi bir kategori kendi iskeletine (skeleton) denktir.

Özellik 4.1.4. Kategorilerin denkliği tüm kategoriksel özellikleri korur. Eğer $F : D \rightarrow C$ bir denklik ise aşağıdaki özellikler doğrudur;

- a) C kategorisinin bir c objesinin başlangıç (terminal veya sıfır) objesi olması için gerek ve yeter şart Fc nin D kategorisinin başlangıç (terminal veya sıfır) objesi olmasıdır.
- b) C kategorisinde bir α morfizminin monomorfizm (epimorfizm veya izomorfizm) olması için gerek ve yeter şart D kategorisinde $F\alpha$ morfizminin monomorfizm (epimorfizm veya izomorfizm) olmasıdır.
- c) $H : I \rightarrow C$ fonktoru I limitine (veya kolimite) sahip olması için gerek ve yeter şart $FH : I \rightarrow D$ fonkturunun $F I$ limitine (veya kolimite) sahip olmasıdır. Bu özellik eşitleyiciler, çarpım ve koçarpım için de uygulanabilir. Eğer bu özellik çekirdek ve koçekirdek için uygulanırsa F denkliğinin tam fonktor olduğu görülebilir.

C nin bir kartezyen kapalı kategori (veya topos) olması için gerek ve yeter şart D nin bir kartezyen kapalı kategori (veya topos) olmasıdır [27,31].

4.2 Kategoriksel Denklik İle İlgili Tanım ve Özellikler

A bir cebir olmak üzere A nın her bir elemanı için, A ya tüm sabit işlemlere temel işlemleri ekleyerek elde edilen cebiri A^+ ile göstereceğiz. Böylece, A^+ nın terim işlemleri tam olarak A nın tüm polinomal işlemleridir.

Tanım 4.2.1. A ve B iki cebir olmak üzere, eğer A^+ ve B^+ kategorik olarak denk ise A ve B , p -kategorik denk olarak adlandırılır ve $A \equiv_p B$ ile gösterilir.

A sonlu cebir olmak üzere A üzerindeki her işlem A nın bir polinom işlemi ise A ya fonksiyonel olarak tam denir. Her bir asal cebir kategorik olarak iki elemanlı Boolean cebirine denk olduğundan aşağıdaki önerme yazılabilir.

Teorem 4.2.2. Her iki fonksiyonel olarak tam cebir p -kategorik olarak denktir.

Teorem 4.2.3. Kategorik denk olan cebirler p -kategorik olarak denktir [32].

4.3 Abelyen Gruplar

Sonlu abelyen gruplar için p -kategorik denklik şartı olağan kategorik denklik için de aynıdır.

Teorem 4.3.1. p -kategorik olarak denk olan sonlu Abelyan gruplar izomorftur.

İspat: A ve B iki sonlu Abelyan grup olmak üzere $A^+ \equiv_c B^+$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $(A^+)^2 \equiv_c (B^+)^2$ dir. Kategorik olarak denk cebirlerin uyum kafesleri izomorfiktir [33]. Denklik bağıntıları yansıma özelliğine sahip olduğu için sabitler etkilenmez. Böylece,

$$ConA^2 = Con(A^+)^2 \cong Con(B^+)^2 = ConB^2$$

dır. Abelyen gruplar için, altgruplar denklikler ile bire-birdir. Böylece altgrup kafes eşleşim kafesine izomorftur. Aynı zamanda $SubA^2 \cong SubB^2$ olduğundan $A \cong B$ elde edilir. Çünkü, bir sonlu Abelyan grup için direkt kare alt grup kafesi izomorfizm altında grubu belirler [31].

4.4 Basit Abelyan Olmayan Gruplar ve Onların Genişlemeleri

Sonlu basit Abelyan olmayan gruplar fonksiyonel olarak denktir [32]. Böylece Teorem 4.3.1 ile birlikte aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

Önerme 4.4.1. Her iki sonlu basit Abelyan olmayan gruplar p -kategorik olarak denktir.

Fonksiyonel tamlık, sonlu basit Abelyan olmayan H grubunun elemanlarından oluşan $(g_1, \dots, g_k)$ grubu ve H n farklı eleman çiftlerinden oluşan $(h_1, \dots, h_k)$ grubu için, H^+ nın her $1 \leq i \leq k$ için $t(h_i) = g_i$ şartını sağlayan tek terimli işleminin varlığını gösterir.

Alternatif A_n grubu $n \geq 5$ için basit Abelyan olmayan gruptur. Böylece $m, n \geq 5$ için herhangi A_m ve A_n grupları p - kategorik olarak denktir. Eğer $m \neq n$ ise A_m ve A_n grupları kategorik olarak denk değildir. Çünkü kategorik olarak denk sonlu gruplar zayıf izomorfiktir [33] olduğundan aynı boyuta sahiptir.

Eğer bir grup bir eleman merkezine sahipse, merkezsiz olarak adlandırılır. Merkezsiz olan sonlu Abelyan gruplar tarafından üretilen sonlu basit Abelyan olmayan grupların genişlemelerini göz önüne alalım. G bir grup olmak üzere eğer H , G nin normal alt grubu ve $G/H \simeq A$ ise G ye H nin A tarafından genişlemesi adı verilir.

A^k bir cebir ve S onun alt cebiri olmak üzere her $1 \leq i \leq j \leq k$ için $x_i \neq x_j$ olacak şekilde bir $x = (x_1, \dots, x_n) \in S$ varsa S ye diagonal olmayan denir [33].

Lemma 4.4.2. H sonlu basit Abelyan olmayan bir grup, G sonlu abelyen grup tarafından onun merkezsiz genişlemesi ve k pozitif bir tamsayı olsun. S , $(G^+)^k$ nin diagonal olmayan alt cebiri olsun. Bu durumda $H^k \subseteq S$ dır.

İspat: $(G^+)^k$ nin alt cebirleri, G^k nin $(a, \dots, a)$, $a \in G$ şeklindeki tüm diagonal elemanları içeren alt grupları olarak tam olarak aynı özelliklere sahiptir. Eğer $k = 1$ ise $(G^+)^k$ nin altcebiri G^+ dir. $k = 2$ alalım ve $(G^+)^2$ nin diagonal olmayan S alt cebirini göz önüne alalım. $a \neq b$ olmak üzere S , (a, b) şeklindeki ikililere sahiptir. $x_1 \neq x_2$ ve $x_1, x_2 \in H$ için $(x_1, x_2) \in S$ olduğunu göstermeliyiz. $(x_1, x_2) \notin S$ olduğunu kabul edelim.

$$(a, b)(b^{-1}, b^{-1}) = (ab^{-1}, bb^{-1}) = (ab^{-1}, 1)$$

elemanı S ye aittir ve $x_0 := ab^{-1} \neq 1$ dir, çünkü $a \neq b$ dir. Şimdi her $x \in G$ için

$$(x_0, 1)(x, x)(x_0, 1)^{-1}(x^{-1}, x^{-1}) = (x_0 x x_0^{-1} x^{-1}, 1)$$

elemanını S ye aittir ve G/H değişmeli olduğundan $x_0 x x_0^{-1} x^{-1} \in H$ dir. Bizim çelişkili varsayımımızdan dolayı her $x \in G$ için $x_0 x x_0^{-1} x^{-1} = 1$ sonucu elde edilir. Son eşitlik x_0 ın G nin merkezine ait olduğu anlamına gelir. Ancak, teorem gereği G merkezsizdir, böylece $x_0 = 1$ dir. O halde bu bir çelişkidir. H altgrubu

fonksiyonel olarak tam olduğu için $x_1 \neq x_2$ ve $x_1, x_2 \in H$ olacak şekilde $(x_1, x_2) \in S$ elemanının varlığı $H^k \subseteq S$ yi gerektirir.

Şimdi, $k \geq 3$ ve diagonal olmayan $S \leq (G^+)^k$ olsun. $H^k \cap S, (H^+)^k$ nin alt evreni olduğu açıktır. Diğer taraftan, $k=2$ için kanıtladığımızdan dolayı her $1 \leq i \leq j \leq k$ için 2-katlı izdüşüm $(H^k \cap S)_{ij} = H^2$ elde edilir. H fonksiyonel olarak tam olduğundan H^+ bir çoğunluk terimine sahiptir. 1975'te, Baker ve Pixley, çoğunluk terimine sahip sonlu bir A cebiri için, $A^k (k \geq 2)$ nin her alt cebirinin tamamen kendi 2-katlı projeksiyonlarının tümü tarafından belirlendiğini keşfettiler [33]. Her $1 \leq i \leq j \leq k$ için $H^k, (H^+)^k$ ve $(H^k)_{ij}$ nin alt evreni olduğundan $H^k \cap S = H^k$ olup $H^k \subseteq S$ elde edilir [33].

4.5 Kategoriksel Denklik

A boş olmayan bir küme, her $i \in I$ ve bazı n_i doğal sayıları için f_i, A^{n_i} den A ya fonksiyon ve $F = \langle f_i : i \in I \rangle$, A üzerinde sınırlı sayıda işlemlerin bir dizisi olmak üzere $\mathbf{A} = \langle A, F \rangle$ boş kümeden farklı bir cebirdir. Bu $\mathbf{A}$ kümesi A nin evreni olarak adlandırılır ve F in bileşenleri A nin temel işlemleridir. Diğer taraftan bir cebirin kardinalitesi onun evreninin kardinalitesidir. Eğer bir cebirin kardinalitesi 1 den büyük ise bu cebir aşıkardır.

A nin benzerlik tipi her $i \in I$ için f_i nin temel işlemlerinin n_{ii} rankını belirleyen $\mathbf{N}$ fonksiyonudur. Eğer I indis kümesi sonlu ise A sonlu tiptedir.

A nin bir terim işlemi A üzerinde, A nin temel ve projeksiyon işlemlerinden kompozisyon oluşturulabilen bir işlemdir. Boş olmayan bir A kümesi üzerinde klon A üzerindeki tüm projeksiyon işlemlerini içeren ve kompozisyon altında kapalı olan işlemlerin bir ailesidir. Böylece, bir A cebirinin terim işlemlerinin kümesi temel işlemleri içeren A üzerindeki en küçük klondur. Bu terim işlemlerinin klonu $Clo A$ ile A nin n -değişkenli terim işlemlerinin kümesi ise $Clo_n A$ ile gösterilir.

A bir cebiri olmak üzere, homomorfik görüntüler, alt cebirler ve doğrudan çarpımlar yardımıyla A tarafından üretilen en küçük cebirlerin sınıfı $V(A)$ ile gösterilir.

Birkhoff teoremine göre $V(A)$, A üzerindeki her denklemi (birim) sağlayan A ile aynı benzerlik türündeki tüm cebirlerin sınıfı ile aynıdır.

$V(A)$ sınıfı büyük (large) kategori olarak düşünülebilir. Objeleri $V(A)$ nın elemanları, morfizmleri ise cebirler arasındaki homomorfizmalardır.

Herhangi bir $V = V(A)$ değişkeni ve pozitif n tamsayısı için, V için her zaman n serbest üreteç üzerindeki serbest cebir (free algebra) vardır ve bu cebir $F_A(n)$ ile gösterilir. $F_A(n)$ nın bir somut temsili evren için $Clo_n A$ yı alarak ve temel işlemlerini açık yöntemle tanımlanmasını sağlayarak elde edilir. Sonuç olarak eğer A , k elemana sahipse $F_A(n)$ nın kardinalitesi en fazla k^{k^n} dir [33].

Tanım 4.5.1. A ve C iki kategori olmak üzere $S: A \rightarrow C$ fonktora, eğer $ST = I: C \rightarrow C$ ve $TS = I: A \rightarrow A$ olacak şekilde $T: C \rightarrow A$ fonktoru varsa kategoriler arasındaki izomorfizm denir. Burada $\eta: I \rightarrow ST$ ve $\varepsilon: TS \rightarrow I$ birim doğal dönüşümleri $\langle T, S; \eta, \varepsilon \rangle: C \rightarrow A$ yı birleşmeli yapar. Bu durumda A ve C kategorileri denktir denir.

Bir diğer deyişle, bir S fonkturunun iki taraflı tersi olan T fonktoru S nin sol-eşleniği olup T de S nin sağ-eşleniğidir.

Daha genel ve daha kullanışlı olan bir ifade de şudur:

A ve C iki kategori ve $S: A \rightarrow C$ fonktor olmak üzere $T: C \rightarrow A$ fonktoru, $ST \cong I: C \rightarrow C$ ve $TS \cong I: A \rightarrow A$ doğal izomorfizmleri varsa A ve C kategorileri denktir denir.

C bir kategori ve A onun tam alt kategorisi olsun. Eğer C nin her objesi A nın tam olarak bir objesine izomorf ise A ya C nin iskeleti (skeleton) denir. Diğer bir deyişle iki izomorfik obje özdeş ise bu kategoriye iskelet adı verilir. Aynı zamanda, A , C ye denktir ve $K: A \rightarrow C$ içine fonktor kategorilerin denkliğini ifade eder. Bunun için her $c \in C$ ye karşılık $Tc \in A$ objesi ile birlikte $\theta_c: c \cong Tc$ izomorfizminin seçilmesi yeterlidir.

Diğer taraftan, $\theta: I \cong KT$ olacak şekilde $T: C \rightarrow A$ fonktoru oluşturabiliriz. Ayrıca $TK \cong I$ olup K bir denklidir. Örneğin, tüm sonlu kümelerin kategorisi,

iskelet olarak tüm sonlu sayılar $0,1,2,\dots,n,\dots$ objeleriyle tam altkategorinin bir iskeletine sahiptir. Burada 0 boş küme ve her $n \in \mathbb{N}$ için $n = \{0,1,\dots,n-1\}$ dir.

Kategorilerin eşlenik denkliği hem $\eta: I \rightarrow ST$ birimi hem de $\varepsilon: TS \rightarrow I$ eşbirimi doğal izomorfizma ve $I \cong ST, TS \cong I$ olan $\langle T, S; \eta, \varepsilon \rangle: C \rightarrow A$ birleşimidir. Bu durumda, η^{-1} ve ε^{-1} doğal izomorfizmalardır ve üçgen $\varepsilon T \cdot T \eta = 1$, $S \varepsilon \cdot \eta S = 1$ özdeşliği sırayıyla $T \eta^{-1} \cdot \varepsilon^{-1} T = 1$, $\eta^{-1} S \cdot S \varepsilon^{-1} = 1$ olarak yazılabilir. Bu özdeşlikler $\varepsilon^{-1}: I \rightarrow TS$ birim ve $\eta^{-1}: I \rightarrow ST$ eşbirim ile birlikte $\langle S, T; \eta^{-1}, \varepsilon^{-1} \rangle: A \rightarrow C$ nin bir birleşim olduğunu gösterir. Böylece $\langle T, S; -, - \rangle$ birleşim denkliğinde $T: C \rightarrow A$ fonktoru η birimi ile birlikte $S: A \rightarrow C$ nin sol eş fonktordur, aynı zamanda ε^{-1} ile birlikte T, S nin sağ eş fonktordur.

Şimdi denklikle alakalı aşağıdaki temel teoremler verilecektir.

Teorem 4.5.2. $S: A \rightarrow C$ fonktoru ile ilgili aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) S kategorilerin bir denkliğidir,
- (ii) $S, \langle T, S; \eta, \varepsilon \rangle: C \rightarrow A$ birleşme denkliğinin bir parçasıdır,
- (iii) S tam ve düzgündür ve her $c \in C$ objesi bazı $a \in A$ objeleri için S ye izomorftur.

İspat: (iii) $\Rightarrow$ i) yi gösterelim. $ST \cong I$ olması her $c \in C$ objesi, bir $a = Tc \in A$ objesi için $c \cong S(Tc)$ formunda olduğunu ifade eder. $\theta: TS \cong I$ doğal izomorfizması her $f: a \rightarrow a'$ için

$$\begin{array}{ccc} TS(a) & \xrightarrow{\theta_a} & a \\ TS(f) \downarrow & & \downarrow f \\ TS(a') & \xrightarrow{\theta_{a'}} & a' \end{array}$$

diyagramının değişmeli olduğunu verir. Böylece $f = \theta_{a'} \circ TSf \circ \theta_a^{-1}$ olması S nin düzgün olmasını gerektirir. Simetrik olarak, $ST \cong I$ olması T nin düzgün olduğu anlamına gelir. S nin tam olduğunu göstermek için herhangi $h: Sa \rightarrow Sa'$ ve

$\theta_a \circ Th \circ \theta_a^{-1}$ kümesini ele alalım. Bu durumda yukarıdaki karede Sf, h ile yer değiştirir ve $TSf = Th$ olur. T düzgün olduğu için $Sf = h$ olup S tamdır.

(iii) $\Rightarrow$ ii)) Bunun ispatı için S den sol T eşlenik yapısını oluşturmamız gereklidir.

Her $c \in C$ objesi için $a_0 = T_0 c \in A$ objesini ve η_c izomorfizmasını

$$\begin{array}{ccc} \eta_c : c & \cong & S(T_0 c) \\ & \searrow f & \downarrow Sg \\ & & Sa \end{array} \quad g : T_0 c \rightarrow a$$

olacak şekilde seçebiliriz. Her $f : c \rightarrow Sa$ fonksiyonu için, S tam olduğundan $f \circ \eta_c^{-1}$ bileşkesi bazı g için Sg formundadır. Aynı zamanda düzgün S olduğundan g biriciktir. Diğer bir deyişle, bir tek g için $f = Sg \circ \eta_c$ dır, böylece c den S ye η_c evrenseldir. Bu yüzden, $T_0, \eta : I \rightarrow ST$ doğal izomorfizmasını elde etmek için bir tek şekilde $T : C \rightarrow A$ fonktoru haline getirilebilir, bu durumda η birim izomorfizması ile birlikte T, S nin sol eşleniğidir. Herhangi bir birleşim ile olduğu gibi, yukarıdaki diyagramda $c = Sa, f = 1$ koyularak $S\varepsilon_a \cdot \eta_{S_a} = 1$ elde edilir.

Böylece, $S\varepsilon_a = (\eta_{S_a})^{-1}$ terslenebilirdir. S tam ve düzgün olduğu için, ε_a eşbirimi de terslenebilirdir. Bu yüzden, $\langle T, S; \eta, \varepsilon \rangle : C \rightarrow A$ eşlenik denkliktir.

Bu ispatta, A, C nin bir tam alt kategorisi ve $S = K : A \rightarrow C$ nin bir ek olduğu kabul edilmiştir. Her $a \in A \subset C$ objesi için birim olarak $a_0 = a = K a$ ve η_{Ka} seçilebilir. Bu durumda her a için $K \varepsilon_a = 1$ olup $\varepsilon_a = 1$ dır.

Önerme 4.5.3. A, C nin bir tam alt kategorisi ve her $c \in C$ objesi A nın bazı objelerine izomorfik olsun. Bu durumda $K : A \rightarrow C$ bir denkliktir ve birimli eşlenik fonktor $\langle T, S; \eta, \varepsilon \rangle : C \rightarrow A$ nin bir parçasıdır. Böylece A, C de yansıyandır.

A, C nin iskeleti olduğunda, bu özellik zaten aşıkardır. Birimli eşlenik fonktor $\langle T, S; \eta, \varepsilon \rangle : C \rightarrow A$ varken, $F : X \rightarrow A$ fonktoru $G : A \rightarrow X$ fonkturunun sol-eşlenik-sol-tersi olarak adlandırılır. Bu anlamına G nin X in yansıyan bir A alt kategorisine izomorf olduğu anlamına gelir. Fonksiyonel analizde, teoremlerin dualite durumu

denklikler olarak karşımıza çıkar. Örneğin, kompakt Abelyan topolojik gruplar kategorisi $\mathbf{CAb}$ olmak üzere P karakter grubu PG olan her G Abelyan topolojik grubunu tüm $G \rightarrow R/Z$ sürekli homomorfizmaları oluşturacak şekilde belirleyeceğini kabul edelim. Pontrjagin Dualite Teoremine göre $P: \mathbf{CAb} \rightarrow \mathbf{Ab}^{\text{Op}}$ bir kategoriksel denkliktir. Benzer şekilde, Gelfand-Naimark Teoremi her X kompakt Hausdorff uzayını onun kompleks değerli sürekli fonksiyonun Abelyan C^* -cebirine taşıyan C fonktörünün bir kategoriksel denklik olduğunu ifade eder (Negrepointis, 1971).

Örnek 4.5.4. $G: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{X}$ bir fonktor olmak üzere, aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) G sol-eşlenik-sol-terse sahiptir,
- (ii) G sol eşleniğe sahiptir, tam, düzgün ve birebirdir,

$\mathbf{X}$ in tam yansıyan bir $\mathbf{Y}$ alt kategorisi vardır ve $K: \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$ olmak üzere $G = KH$ olacak şekilde $H: \mathbf{A} \cong \mathbf{Y}$ H izomorfizmi vardır [27].

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Kategori teorisinde iki kategori arasında izomorfizm bulunması çok özel, çok kuvvetli ve çok da kullanışlı olmayan bir durumdur. Fakat iki kategorinin doğal olarak denk olması hem daha zayıf hem de çok daha kullanışlı bir durumdur. Denk kategorilerden birisindeki problemler diğerlerinde daha kolay bir çözüme sahip olabilir. Böylece eldeki problem denk kategorilere aktarılarak daha kolay çözümler elde edilebilir. Örneğin grup-grupoidlerin kategorisinde çözülmesi istenilen bir problem daha az karmaşık bir yapıya sahip ve grup-grupoidlere denk olan çaprazlanmış modüllerin kategorisinde ele alınabilir.

C ve D kategorilerinin denk olabilmesi için $FG \simeq 1_D$ ve $GF \simeq 1_C$ olacak şekilde $F: C \rightarrow D$ ve $G: D \rightarrow C$ fanktorları bulunması gerekir. Burada $G: D \rightarrow C$ fanktoruna $F: C \rightarrow D$ fanktorunun doğal tersi denir. Fakat bu şekilde $F: C \rightarrow D$ fanktorunun doğal tersi olan $G: D \rightarrow C$ fanktorunu bulmak her zaman çok kolay olmayabilir.

Bu çalışmada öncelikle C ve D kategorilerinin denk olduklarını gösterebilmek için dolu, düzenli ve yoğun bir $F: C \rightarrow D$ fanktorunun bulunmasının yeterli olduğu gösterilmiş ve bu sonuç bazı örneklerle açıklanmıştır. Bu örneklerden en ilginç olanı aralarında bir izomorfizm bulunmamasına rağmen tek objeli ve tek morfizmli bir kategori ile iki objeli ve dört morfizmli bir grupoidin doğal olarak denk olmasıdır.

Daha sonra cebirsel yapılar için p-kategorik denklik kavramı hatırlatılmış ve kategorik olarak denk olan cebirlerin aynı zamanda p-kategorik olarak da denk oldukları gösterilmiştir. Ayrıca p-kategorik olarak denk olan Abelyan grupların izomorf oldukları kanıtlanmıştır.

Son olarak C ve D kategorileri için $S: C \rightarrow D$ fanktorunun bir kategori denkliği olması için gerek ve yeter şartın $S: C \rightarrow D$ nin $\langle T, S; \eta, \varepsilon \rangle$ birimli eşlenik fanktorun bir parçası olduğu gösterilmiştir.

Yansıyan kategorilerde birimli eşlenik fanktorlar altında bazı problemlerde ihtiyaç duyulan özel obje ve morfizmler korunduğu için, daha sonraki araştırmalarda denk olduğu bilinen kategoriler için birimli eşlenik fanktorun bulunması ve böylece yansıyan kategorilerin elde edilmesi faydalı olabilir.



KAYNAKLAR

- [1] Rosenfeld, A., 1968. An Introduction to Algebraic Structures. Holden-Day, New York.
- [2] Herstein, I. N., 1975. Topics in algebra (2nd ed.), Mass. Xerox College Publishing, Lexington.
- [3] Lang, S., 2005. Undergraduate Algebra (3rd ed.), Springer-Verlag, Berlin.
- [4] Dummit, D. S. ve Foote, R. M., 2004. Abstract Algebra, Third Edition,. John Wiley and Sons Inc.
- [5] Lang, S., 2002. Algebra, Graduate Texts in Mathematics 211 (Revised Third ed.), Springer-Verlag, New York.
- [6] Ledermann, W., 1973. Introduction to group theory, Barnes and Noble, New York.
- [7] Hatcher, A., 2002. Algebraic topology, Cambridge University Press.
- [8] Coornaert, M., Delzant, T. ve Papadopoulos, A., Géométrie et théorie des groupes, Lecture Notes in Mathematics (in French) 1441, Springer-Verlag, Berlin.
- [9] Neukirch, J., 1999. Algebraic Number Theory, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 322, Springer-Verlag, Berlin.
- [10] Seress, Á., 1997. An introduction to computational group theory, Notices of the American Mathematical Society 44, 6, 671–679.
- [11] Rosen, K. H., 2000. Elementary number theory and its applications (4th ed.), Addison-Wesley.
- [12] MacLane, S. ve Birkhoff, G., 1967. Algebra. AMS Chelsea, London.
- [13] Iain T. A., 1972. Elementary rings and modules. University Mathematical Texts. Oliver and Boyd.

- [14] Anderson, F.W. ve Fuller, K.R., 1992. Rings and Categories of Modules, Graduate Texts in Mathematics, 13, Springer-Verlag, New York.
- [15] Nathan, J., 1964. Structure of rings, Colloquium publications, 37, AMS Bookstore.
- [16] Eilenberg, S. ve Mac Lane, S., 1945. General Theory of Natural Equivalences, Transactions of The American Mathematical Society, 58, 2, 231-231.
- [17] Barr, M. ve Wells, C., 1999. Category Theory for Computing Science, 3rd edition. Centre de Recherche Mathématique (CRM), Montréal.
- [18] Joshi, K. D., 1983. Products and Coproducts, Introduction to General Topology. Wiley, New Delhi, India.
- [19] Kasch, F., 1982. Construction of Products and Coproducts, Academic Press New York.
- [20] Rowen, L., 1988. Products and Coproducts, San Diego, Academic Press, CA.
- [21] Stroker, J. R., 1978. Products and Sums: in Introduction to Categories, Homological Algebra and Sheaf Cohomology, Cambridge University Press, Cambridge, England.
- [22] Mac Lane, S., 1998. Categories for the working mathematician, Springer, New York.
- [23] Borceux, F., 1994. Handbook of categorical algebra. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, England.
- [24] Davey, B. A. ve Werner, H., 1983. Dualities and equivalences for varieties of algebras, Contributions to lattice theory (Szeged, 1980), Colloquium Publications, Janos Bolyai, 33, North-Holland, Amsterdam.
- [25] McKenzie, R. N., 1996. An algebraic version of categorical equivalence for varieties and more general algebraic categories, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 180, Marcel Dekker, New York.

- [26] Bergman, C. ve Berman, J., 1996. Morita equivalence of almost-primal clones, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 108, 2, 175-201.
- [27] Schröder, L., 2001. "Categories: a free tour". In Jürgen Koslowski and Austin Melton. *Categorical Perspectives*. Springer Science & Business Media. p. 10.
- [28] Hazewinkel, M., 2001. Equivalence of categories, *Encyclopedia of Mathematics*, Springer, Berlin.
- [29] Bergman, C., 1998. Categorical equivalence of algebras with a majority term, *Algebra Universalis*, 40, 149-175.
- [30] Lukacs, E. ve Palfy, P. P., 1986. Modularity of the subgroup lattice of a direct square, *Archiv der Mathematik*, 46, 1, 18-19.
- [31] Maurer, W. D. ve Rhodes, J. L., 1965. A property of finite simple non-abelian groups, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 16, 552-554.
- [32] Košik, O., 2015. *Categorical equivalence in algebra*. Tartu University Press, Tartu.
- [33] Baker, K. ve Pixley, A., 1975. Polynomial interpolation and the Chinese remainder theorem for algebraic systems, *Mathematische Zeitschrift*, 165-174.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Luqman Mahmood Yaseen ZEBARI

Doğum Tarihi ve Yeri : 01.11.1989 - Duhok / Iraq

E-posta adresi : luqmanzebari20@gmail.com

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Zakho Üniversitesi, Matematik Bölümü - 2013

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı - 2018

Doktora :

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLERİ