T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

BAZI DEJENERE ÖZEL SAYILAR VE POLİNOMLAR

Seçil BİLGİÇ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

HAZİRAN 2021
ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

BAZI DEJENERE ÖZEL SAYILAR VE POLİNOMLAR

Seçil BİLGİÇ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

HAZİRAN 2021
ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI DEJENERE ÖZEL SAYILAR VE POLİNOMLAR

Seçil BİLGİÇ

MATEMATİK

ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

Bu tez 30/06/2021 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Dr. Öğr. Üyesi Ayhan DİL (Danışman)
Prof. Dr. Mehmet CENKCİ
Doç. Dr. Gültekin TINAZTEPE
Doç. Dr. Seçil ÇEKEN
Dr. Öğr. Üyesi Zafer ŞANLI

ÖZET

BAZI DEJENERE ÖZEL SAYILAR VE POLİNOMLAR

Seçil BİLGİÇ

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Ayhan DİL

Haziran 2021; 58 sayfa

Bu çalışmada, son yılların önemli çalışma konularından olan 2. tip Bernoulli, Euler, Genocchi polinomlarının, Cauchy polinomlarının ve Hermite-tabanlı polinomlarının çeşitli genelleştirmeleri verildi ve bu polinomların dejenere durumları incelendi. Dejenere durumda bazı temel teoremler ile kanıtları, çeşitli özdeşlikler ve bağıntılar verildi. Dejenere durumlarının özel halleri literatürde yer alan mevcut sonuçları verdiği görüldü.

ANAHTAR KELİMELER: 2. tip unified Apostol-Bernoulli tipli polinom, 2. tip parametrik unified Apostol-Bernoulli tipli polinom, 2. tip unified dejenere poli-üstel Apostol-Bernoulli tipli polinom, dejenere 2. tip unified Apostol-Bernoulli tipli polinom, Hermite-tabanlı dejenere 2. tip unified Apostol-Bernoulli tipli polinom, dejenere Cauchy polinomu.

JÜRİ: Dr. Öğr. Üyesi Ayhan DİL
Prof. Dr. Mehmet CENKCİ
Doç. Dr. Gültekin TINAZTEPE
Doç. Dr. Seçil ÇEKEN
Dr. Öğr. Üyesi Zafer ŞANLI

ABSTRACT

SOME DEGENERATE SPECIAL NUMBERS AND POLYNOMIALS

Seçil BİLGİÇ

PhD Thesis in MATHEMATICS

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Ayhan DİL

June 2021; 58 pages

In this study, various generalizations of type 2 Bernoulli, Euler, Genocchi polynomials, Cauchy polynomials and Hermite-based polynomials, which are important study topics of recent years, are given and the degenerate states of these polynomials are examined. In the degenerate case, some basic theorems and their proofs, various identities and relations are given. It was seen that the special cases of degenerate states gave the current results in the literature.

KEYWORDS: second type unified Apostol-Bernoulli type polynomials, second type parametric unified Apostol-Bernoulli type polynomials, second type unified degenerate poly-exponential Apostol-Bernoulli type polynomials, degenerate second type unified Apostol-Bernoulli type polynomials, Hermit-based degenerate second type unified Apostol-Bernoulli type polynomials, poly-logarithmic degenerate Cauchy polynomials.

COMMITTEE: Asst. Prof. Dr. Ayhan DİL
Prof. Dr. Mehmet CENKCİ
Assoc. Prof. Dr. Gültekin TINAZTEPE
Assoc. Prof. Dr. Seçil ÇEKEN
Asst. Prof. Dr. Zafer ŞANLI

ÖNSÖZ

Bu çalışma esas olarak Kaynak Taraması ve Bulgular bölümlerinden oluşmaktadır. Kaynak taraması bölümünde Bulgular bölümünde ihtiyaç duyduğumuz Bernoulli, Euler, Genocchi, Hermite ve Cauchy polinomları, bu polinomların çeşitli genelleştirmeleri, 1. ve 2. tip Stirling sayıları, poli-logaritmik, poli-üstel fonksiyonlar ve bu polinomların dejenere ifadeleri verildi. Bulgular bölümünde ise çeşitli genelleştirmeler yapıldı.

Bu tez çalışmasının, bu alanda yapılan çalışmalara katkıda bulunacağı inancındayım.

Bu çalışmanın devam ettiği süreçte emekliye ayrılmasına rağmen tezimin bilimsel danışmanlığını büyük bir özveri ile yürüten, karşılaştığım her problemde zaman ayıran, desteklerini hiç esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Veli KURT'a ve resmi olarak danışmanlığımı üstlenen değerli danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Ayhan DİL hocama çok teşekkür ederim.

Tez süreci boyunca çalışmalarımın bilimsel açıdan incelenmesine katkı sağlayan Tez İzleme Komitesi üyeleri Prof. Dr. Mehmet CENKCİ ve Doç. Dr. Gültekin TINAZTEPE hocalarıma en içten dileklerimle çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET i
ABSTRACT ii
ÖNSÖZ iii
AKADEMİK BEYAN v
SİMGELER VE KISALTMALAR vi
1. GİRİŞ 1
2. KAYNAK TARAMASI 3
3. MATERYAL VE METOT 11
4. BULGULAR VE TARTIŞMA 12
4.1. 2. Tip Unified Apostol-Bernoulli Tipli Polinomlar 12
4.2. 2. Tip Parametrik Unified Apostol-Bernoulli Tipli Polinomlar 16
4.3. 2. Tip Karmaşık Değerli Unified Apostol-Bernoulli Tipli Polinomlar . . . 22
4.4. Hermite-Tabanlı 2. Tip Unified Apostol-Bernoulli Tipli Polinomlar 25
4.5. Dejenere 2. Tip Unified Apostol-Bernoulli Tipli Polinomlar 29
4.6. Hermite-Tabanlı Dejenere 2. Tip Unified Apostol-Bernoulli Tipli Polinomlar 38
4.7. 2. Tip Unified Dejenere Poli-Üstel Apostol-Bernoulli Tipli Polinomlar . . 41
4.8. Dejenere Poli-Cauchy Polinomları 47
5. SONUÇLAR 52
6. KAYNAKLAR 53
ÖZGEÇMİŞ

AKADEMİK BEYAN

Doktora Tezi olarak sunduğum “Bazı Dejenere Özel Sayılar ve Polinomlar ” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

30/06/2021

Seçil BİLGİÇ

İmza

SİMGELER

Simgeler:

$\tilde{B}_n(x)$	: 2. tip Bernoulli polinomu
$\tilde{E}_n(x)$	: 2. tip Euler polinomu
$\tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha)}(x;k,a,b)$	: 2. tip unified Apostol-Bernoulli tipli polinomu
$\tilde{R}_{n,\beta}^{(c,\alpha)}(p,q;k,a,b)$	: 2. tip parametrik unified Apostol-Bernoulli tipli polinomu
${}_H\tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha)}(x,y;k,a,b)$	: Hermite-tabanlı 2. tip unified Apostol-Bernoulli tipli polinomu
${}_k\tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha)}(x;s,a,b)$	: 2. tip unified dejenere poli-üstel Apostol-Bernoulli tipli polinomu
$\tilde{R}_{n,\beta,\lambda}^{(\alpha)}(x;k,a,b)$	: Dejenere 2. tip unified Apostol-Bernoulli tipli polinomu
${}_H\tilde{R}_{n,\beta,\lambda}^{(\alpha)}(x,y;k,a,b)$	: Hermite-tabanlı dejenere 2. tip unified Apostol-Bernoulli tipli polinomu
$C_n^{(k)}(\lambda,x)$	: 1. çeşit dejenere poli-Cauchy polinomu

1. GİRİŞ

Bernoulli sayıları ve polinomları, Euler sayıları ve polinomları, Genocchi sayıları ve polinomları hem analitik sayılar teorisi kuramı hem de matematiksel fizik alanının önemli konularındandır. Bernoulli sayıları ilk olarak İsviçreli matematikçi Jakob Bernoulli (1655-1705) tarafından ve Euler polinomu ise yine İsviçreli matematikçi aynı zamanda Johann Bernoulli' nin öğrencisi olan Leonhard Euler (1707-1783) tarafından tanımlanmıştır. Uzun yıllardır çalışılan Genocchi polinomları ise İtalyan matematikçi Angelo Genocchi' ye (1817-1889) kadar uzanmaktadır. Bu polinomlarının keşfiyle başlayan ve yüzyıllardır devam eden bir çalışma alanı olan Bernoulli, Euler ve Genocchi polinomları birçok araştırmacı tarafından çalışılmakta ve bu polinomlara çeşitli genelleştirmeler yapılmaktadır. Yapılan çeşitli genelleştirmelerden bazıları Apostol-Bernoulli, Apostol-Euler, Apostol-Genocchi polinomları, dejenere Bernoulli, dejenere Euler, parametrik Bernoulli, parametrik Euler ve parametrik Genocchi polinomlarıdır (Apostol 1951; Bernoulli 1713; Carlitz 1979; Luo ve Srivastava 2005; Srivastava vd. 2010; Srivastava vd. 2011; Srivastava ve Choi 2011; Özarslan 2011; Khan 2015; Kim vd. 2016; Srivastava vd. 2018; Kim vd. 2019b; Kim vd. 2019c; Srivastava vd. 2019; Jang ve Kim 2019).

Bernoulli polinomları $B_n(x)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{t}{e^t-1}e^{xt},\ |t|<2\pi,$$

Euler polinomları $E_n(x)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{2}{e^t+1}e^{xt},\ |t|<\pi$$

ve Genocchi polinomları $G_n(x)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{2t}{e^t+1}e^{xt},\ |t|<\pi$$

ifadesiyle verilir (Carlitz 1968; Apostol 1998; Cheon 2003; Srivastava ve Choi 2001; Cohen 2008).

Eğer $x=0$ alınırsa $B_n(0)=B_n$, $E_n(0)=E_n$, $G_n(0)=G_n$ sayıları sırasıyla Bernoulli, Euler ve Genocchi sayıları olarak ifade edilir.

Bu polinomlar için Carlitz farklı bir genelleştirme yaparak dejenere Bernoulli ve dejenere Euler polinomlarını tanımlamıştır (Carlitz 1979).

Dejenere Bernoulli polinomları

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (x \mid \lambda) \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} - 1} (1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}}$$

ve dejenere Euler polinomları

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}_n (x \mid \lambda) \frac{t^n}{n!} = \frac{2}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} + 1} (1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}}$$

şeklinde tanımlanır (Carlitz 1979).

Son yıllarda 2. tip Bernoulli, 2. tip Euler, 2. tip Genocchi polinomları üzerine pek çok çalışmalar yapılmıştır (Jang ve Kim 2019; Kim vd. 2019a; Kim vd. 2019b; Kim vd. 2019c; Kim vd. 2019d; Na ve Kim 2020).

2. tip Bernoulli polinomu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{B}_n (x) \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{e^t - e^{-t}} e^{xt},$$

2. tip Euler polinomu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{E}_n (x) \frac{t^n}{n!} = \frac{2}{e^t + e^{-t}} e^{xt}$$

ve 2. tip Genocchi polinomu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{G}_n (x) \frac{t^n}{n!} = \frac{2t}{e^t + e^{-t}} e^{xt}$$

şeklinde tanımlanır (Agarwal vd. 2019; Jang ve Kim 2019; Kim vd. 2019d; Na ve Kim 2020).

Dejenere 2. tip Bernoulli polinomları

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{n,\lambda} (x) \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{2\lambda}} - (1+\lambda t)^{\frac{-1}{2\lambda}}} (1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}}$$

ve dejenere 2. tip Euler polinomları

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_{n,\lambda} (x) \frac{t^n}{n!} = \frac{2}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{2\lambda}} + (1+\lambda t)^{\frac{-1}{2\lambda}}} (1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}}$$

şeklinde ifade edilir (Jang ve Kim 2019; Kim vd. 2019b).

Karmaşık değerli dejenere 2. tip Genocchi polinomları

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{G}_{n,\lambda} (x+iy) \frac{t^n}{n!} = \frac{2t}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} + (1+\lambda t)^{\frac{-1}{\lambda}}} (1+\lambda t)^{\frac{x+iy}{\lambda}}, \; i = \sqrt{-1}$$

şeklinde ifade edilir (Na ve Kim 2020).

2. KAYNAK TARAMASI

Tanım 2.1. *Bernoulli polinomu* $B_n(x)$, *Euler polinomu* $E_n(x)$ *ve Genocchi polinomu* $G_n(x)$ *sırasıyla,*

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!} &= \frac{t}{e^t-1}e^{xt},\ |t|<2\pi,\\ \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\frac{t^n}{n!} &= \frac{2}{e^t+1}e^{xt},\ |t|<\pi,\\ \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x)\frac{t^n}{n!} &= \frac{2t}{e^t+1}e^{xt},\ |t|<\pi\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır (Carlitz 1968; Apostol 1998; Srivastava ve Choi 2001; Cheon 2003; Cohen 2008).

Tanım 2.2. *2. tip Bernoulli polinomları*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{B}_n(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{t}{e^t-e^{-t}}e^{xt},\ (|t|<\pi)$$

ve 2. tip Euler polinomları

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{E}_n(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{2}{e^t+e^{-t}}e^{xt},\ \left(|t|<\frac{\pi}{2}\right)$$

ve 2. tip Genocchi polinomları

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{G}_n(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{2t}{e^t+e^{-t}}e^{xt},\ \left(|t|<\frac{\pi}{2}\right)$$

şeklinde tanımlanırlar (Jang ve Kim 2019; Kim vd. 2019d; Agarwal vd. 2019; Na ve Kim 2020).

Klasik Bernoulli polinomu ile 2. tip Bernoulli polinomu ve klasik Euler polinomu ile 2. tip Euler polinomu arasında

$$\tilde{B}_n(x) = 2^{n-1}B_n\left(\frac{x+1}{2}\right),\ (n\geq 0)$$

ve

$$\tilde{E}_n(x) = 2^n E_n\left(\frac{x+1}{2}\right),\ (n\geq 0)$$

bağıntıları vardır (Kim vd. 2020).

Tanım 2.3. *Apostol tarafından tanımlanan Apostol-Bernoulli, Apostol-Euler ve Apostol-Genocchi polinomları sırasıyla aşağıdaki üreteç fonksiyonlarıyla verilirler (Apostol 1951; Szegö 1954; Liu ve Srivastava 2006).*

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x;\lambda)\frac{t^n}{n!} = \frac{t}{\lambda e^t - 1}e^{xt} \quad (|t+\log\lambda| < 2\pi).$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n(x;\lambda)\frac{t^n}{n!} = \frac{2}{\lambda e^t + 1}e^{xt} \quad (|t+\log\lambda| < \pi).$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n(x;\lambda)\frac{t^n}{n!} = \frac{2t}{\lambda e^t + 1}e^{xt} \quad (|t+\log\lambda| < \pi).$$

Tanım 2.4. *Yüksek mertebeden Bernoulli, yüksek mertebeden Euler ve yüksek mertebeden Genocchi polinomları sırasıyla aşağıdaki üreteç fonksiyonlarıyla verilirler (Nörland 1924; Washington 1997; Luo ve Srivastava 2006; Arıcı vd. 2014; San Kim ve Kim 2015).*

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(\alpha)}(x;\lambda)\frac{t^n}{n!} = \left(\frac{t}{e^t-1}\right)^{\alpha} e^{xt} \quad (|t| < 2\pi,\ 1^{\alpha} := 1),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(\alpha)}(x;\lambda)\frac{t^n}{n!} = \left(\frac{2}{e^t+1}\right)^{\alpha} e^{xt} \quad (|t| < \pi,\ 1^{\alpha} := 1),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(\alpha)}(x;\lambda)\frac{t^n}{n!} = \left(\frac{2t}{e^t+1}\right)^{\alpha} e^{xt} \quad (|t| < \pi,\ 1^{\alpha} := 1),$$

Tanım 2.5. *Genelleştirilmiş Apostol-Bernoulli, genelleştirilmiş Apostol-Euler ve genelleştirilmiş Apostol-Genocchi polinomları sırasıyla aşağıdaki üreteç fonksiyonlarıyla verilirler (Luo vd. 2005; Navas vd. 2019).*

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(\alpha)}(x;\lambda)\frac{t^n}{n!} = \left(\frac{t}{\lambda e^t-1}\right)^{\alpha} e^{xt} \quad (|t| < 2\pi,\ \lambda = 1;\ |t| < |\log\lambda|,\ \lambda \neq 1).$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(\alpha)}(x;\lambda)\frac{t^n}{n!} = \left(\frac{2}{\lambda e^t+1}\right)^{\alpha} e^{xt} \quad (|t| < \pi,\ \lambda = 1;\ |t| < |\log(-\lambda)|,\ \lambda \neq 1).$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(\alpha)}(x;\lambda)\frac{t^n}{n!} = \left(\frac{2t}{\lambda e^t+1}\right)^{\alpha} e^{xt} \quad (|t| < \pi,\ \lambda = 1;\ |t| < |\log(-\lambda)|,\ \lambda \neq 1).$$

Tanım 2.6. *2 parametreli Apostol-Bernoulli polinomları*

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(c)}(p,q,\lambda)\frac{t^n}{n!} = \frac{t}{\lambda e^t-1}e^{pt}\cos qt,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(s)}(p,q,\lambda)\frac{t^n}{n!} = \frac{t}{\lambda e^t-1}e^{pt}\sin qt,$$

2 parametreli Apostol-Euler polinomları

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(c)}(p,q,\lambda)\frac{t^n}{n!} &= \frac{2}{\lambda e^t+1}e^{pt}\cos qt,\\ \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(s)}(p,q,\lambda)\frac{t^n}{n!} &= \frac{2}{\lambda e^t+1}e^{pt}\sin qt\end{aligned}$$

ve son olarak 2 parametreli Apostol-Genocchi polinomları

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(c)}(p,q,\lambda)\frac{t^n}{n!} &= \frac{2t}{\lambda e^t+1}e^{pt}\cos qt,\\ \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(s)}(p,q,\lambda)\frac{t^n}{n!} &= \frac{2t}{\lambda e^t+1}e^{pt}\sin qt\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanırlar (Srivastava vd. 2018; Kim vd. 2019c; Kim vd. 2019d).

Tanım 2.7. *Dejenere Bernoulli polinomları*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n(x\mid\lambda)\frac{t^n}{n!}=\frac{t}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-1}(1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}}$$

ve dejenere Euler polinomları

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{E}_n(x\mid\lambda)\frac{t^n}{n!}=\frac{2}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}+1}(1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}}$$

şeklinde tanımlanır (Carlitz 1979).

Burada $x=0$ alınırsa, $\beta_n=\beta_{n,\lambda}(0\mid\lambda)$ dejenere Bernoulli sayıları ve $\mathcal{E}_n=\mathcal{E}_n(0\mid\lambda)$ dejenere Euler sayıları elde edilir.

$\lambda\to 0$ için limite geçilirse,

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to 0}\beta_n(x\mid\lambda) &= B_n(x),\ (n\geq 0)\\ \lim_{\lambda\to 0}\mathcal{E}_n(x\mid\lambda) &= E_n(x),\ (n\geq 0)\end{aligned}$$

sağlanır.

Tanım 2.8. *Dejenere üstel fonksiyon*

$$\begin{aligned}e_\lambda^x(t) &= (1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}},\ e_\lambda(t)=e_\lambda^1(t),\\ e_\lambda^x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty}(x)_{n,\lambda}\frac{t^n}{n!}=(1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}},\\ (x)_{0,\lambda} &= 1,\ (x)_{n,\lambda}=x(x-\lambda)(x-2\lambda)\dots(x-(n-1)\lambda),(n\geq 1).\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir (Na ve Kim 2020).

Tanım 2.9. *Poli-logaritma fonksiyonu*

$$Li_s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s}, \ |z| < 1; \ s \in \mathbb{C}.$$

şeklinde tanımlanır (Zagier 1990; Hain 1994; Kamano 2010).

Tanım 2.10. *Dejenere poli-logaritma fonksiyonu*

$$\log_\lambda(1+t) = \frac{1}{\lambda}\left((1+t)^\lambda - 1\right)$$

şeklinde tanımlanır ve dejenere üstel fonksiyon ile dejenere poli-logaritma fonksiyonu arasında aşağıdaki bağıntı vardır (Kim vd. 2019c).

$$e_\lambda(\log_\lambda(1+t)) = 1+t.$$

Tanım 2.11. *Yeni dejenere Bernoulli polinomları*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_{n,\lambda}(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{\log(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} - 1}(1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}}$$

şeklinde tanımlanır (Kim vd. 2016).

Tanım 2.12. *Dejenere 2. tip Bernoulli polinomları*

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{n,\lambda}(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{t}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{2\lambda}} - (1+\lambda t)^{\frac{-1}{2\lambda}}}(1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}}$$

ve dejenere 2. tip Euler polinomları

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_{n,\lambda}(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{2}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{2\lambda}} + (1+\lambda t)^{\frac{-1}{2\lambda}}}(1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}}$$

şeklinde ifade edilirler (Jang ve Kim 2019; Kim vd. 2019b).

Tanım 2.13. *Karmaşık değerli dejenere 2. tip Genocchi polinomu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{G}_{n,\lambda}(x+iy)\frac{t^n}{n!} = \frac{2t}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} + (1+\lambda t)^{\frac{-1}{\lambda}}}(1+\lambda t)^{\frac{x+iy}{\lambda}}, \ i = \sqrt{-1}$$

üreteç fonksiyonuyla şeklinde ifade edilir (Na ve Kim 2020).

Tanım 2.14. *Yüksek mertebeden dejenere 2. tip Bernoulli polinomları*

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{n,\lambda}^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!} = \left(\frac{t}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{2\lambda}} - (1+\lambda t)^{\frac{-1}{2\lambda}}}\right)^{\alpha}(1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}},$$

yüksek mertebeden dejenere 2. tip Euler polinomları

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_{n,\lambda}^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!} = \left(\frac{2}{(1+\lambda t)^{\frac{1}{2\lambda}} + (1+\lambda t)^{\frac{-1}{2\lambda}}}\right)^{\alpha} (1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}}$$

şeklinde ifade edilir (Jang ve Kim 2019; Kim vd. 2019d).

Tanım 2.15.

$$\begin{aligned}\cos_{\lambda}^{(y)}(t) &= \cos\left(\frac{y}{\lambda}\log(1+\lambda t)\right),\\ \sin_{\lambda}^{(y)}(t) &= \sin\left(\frac{y}{\lambda}\log(1+\lambda t)\right)\end{aligned}$$

olmak üzere, 2. tip dejenere cosine-Bernoulli, sine-Bernoulli polinomu ve 2. tip dejenere cosine-Euler ve sine-Euler polinomu sırasıyla

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} B_{n,\lambda}^{(c)}(x,y)\frac{t^n}{n!} &= \frac{t}{e_{\lambda}^{\frac{1}{2}}(t) - e_{\lambda}^{-\frac{1}{2}}(t)} e_{\lambda}^{\frac{x}{2}}(t)\cos_{\lambda}^{(y)}(t),\\ \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,\lambda}^{(s)}(x,y)\frac{t^n}{n!} &= \frac{t}{e_{\lambda}^{\frac{1}{2}}(t) - e_{\lambda}^{-\frac{1}{2}}(t)} e_{\lambda}^{\frac{x}{2}}(t)\sin_{\lambda}^{(y)}(t)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} E_{n,\lambda}^{(c)}(x,y)\frac{t^n}{n!} &= \frac{2}{e_{\lambda}^{\frac{1}{2}}(t) + e_{\lambda}^{-\frac{1}{2}}(t)} e_{\lambda}^{\frac{x}{2}}(t)\cos_{\lambda}^{(y)}(t),\\ \sum_{n=0}^{\infty} E_{n,\lambda}^{(s)}(x,y)\frac{t^n}{n!} &= \frac{2}{e_{\lambda}^{\frac{1}{2}}(t) + e_{\lambda}^{-\frac{1}{2}}(t)} e_{\lambda}^{\frac{x}{2}}(t)\sin_{\lambda}^{(y)}(t)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanırlar (Kim vd. 2019d).

Tanım 2.16. *2 değişkenli Hermite-Kampé de Fériet polinomları*

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x,y)\frac{t^n}{n!} = e^{xt+yt^2} \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanır (Özarslan 2013; Whittaker ve Watson 2020).

Tanım 2.17. $\alpha \in \mathbb{N}_0$, $\mu, v \in \mathbb{C}$ *olmak üzere, genelleştirilmiş Apostol tipi Hermite-tabanlı polinomları* ${}_H F_n^{(\alpha)}(x,y;\lambda;\mu,v,c)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_H F_n^{(\alpha)}(x,y;\lambda;\mu,v,c)\frac{t^n}{n!} = \left(\frac{2^{\mu}t^{v}}{\lambda c^t + 1}\right)^{\alpha} c^{xt+yt^2}$$

şeklinde tanımlanır (Khan 2015).

Tanım 2.18. *Genelleştirilmiş modified dejenere Hermite-tabanlı Apostol-Bernoulli polinomları*

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_{H}B_{n,\alpha}^{(r)}(x,y;\lambda)\frac{t^n}{n!}=\left(\frac{t}{\alpha(1+\lambda)^{\mu t}-1}\right)^r(1+\lambda)^{\left(xt+yt^2\right)\mu},\ \mu\lambda=1,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

şeklinde, genelleştirilmiş modified dejenere Hermite-tabanlı Apostol-Euler polinomları

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_{H}E_{n,\alpha}^{(r)}(x,y;\lambda)\frac{t^n}{n!}=\left(\frac{2}{\alpha(1+\lambda)^{\mu t}+1}\right)^r(1+\lambda)^{\left(xt+yt^2\right)\mu},\ \mu\lambda=1,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

olarak ve genelleştirilmiş modified dejenere Hermite-tabanlı Apostol-Genocchi polinomları

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_{H}G_{n,\alpha}^{(r)}(x,y;\lambda)\frac{t^n}{n!}=\left(\frac{2t}{\alpha(1+\lambda)^{\mu t}+1}\right)^r(1+\lambda)^{\left(xt+yt^2\right)\mu},\ \mu\lambda=1,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

şeklinde ifade edilirler (Srivastava vd. 2019).

Tanım 2.19. *Genelleştirilmiş unified modified dejenere Hermite-tabanlı Apostol tipi polinomları aşağıdaki üreteç fonksiyonu yardımıyla*

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_{H}R_{n,\beta}^{r}(x,y;\lambda)\frac{t^n}{n!}=\left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b(1+\lambda)^{\frac{t}{\lambda}}-a^b}\right)^r(1+\lambda)^{\frac{\left(xt+yt^2\right)}{\lambda}}$$

tanımlanır (Srivastava vd. 2019).

Tanım 2.20. *Poli-logaritma faktöriyel fonksiyonu*

$$Lif_k(x)=\sum_{m\geq 0}^{\infty}\frac{x^m}{m!(m+1)^k}$$

şeklinde tanımlanır (Dolgy vd. 2015; Komatsu 2018).

Tanım 2.21. *Poli-üstel fonksiyonu ve dejenere poli-üstel fonksiyonu*

$$\begin{aligned}\mathrm{Ei}_k(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!n^k},\ (k\in\mathbb{Z}),\\ &= x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!(n+1)^k}=xLi_k(x)\end{aligned}$$

ve

$$\mathrm{Ei}_{k,\lambda}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1)_{n,\lambda}x^n}{(n-1)!n^k},\ (\lambda\in\mathbb{R}),$$

şeklinde tanımlanırlar (Kim ve Kim 2019d; Kim vd. 2019f; Na ve Kim 2020).

Tanım 2.22. *1. tip Stirling sayıları*

$$\sum_{n=k}^{\infty} S_1(n,k)\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}\left(\log(1+t)\right)^k,\ k \geq 0$$

şeklinde tanımlanır(Jordan 1933; Comtet 1974; Carlitz 1980; Çam 2005).

Stirling sayıları; ilk defa 18. yüzyılda James Stirling tarafından tanımlanmıştır.

Tanım 2.23. *Dejenere 1. tip Stirling sayısı*

$$\sum_{n=k}^{\infty} S_{1,\lambda}(n,k)\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}\left(\log_\lambda(1+t)\right)^k,\ \ (k \geq 0)$$

şeklinde ifade edilir (Na ve Kim 2020).

Tanım 2.24. *2. tip Stirling sayısı*

$$\sum_{n=k}^{\infty} S_2(n,k)\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}\left(e^t-1\right)^k,\ \ (k \geq 0)$$

şeklinde tanımlanır (Comtet 1974; Hsu ve Shiue 1998; Çam 2005; Kim vd. 2018)

Tanım 2.25. $v \in \mathbb{N}, a, b, \beta \in \mathbb{R}\ (a \neq b)$ *olmak üzere, genelleştirilmiş 2. tip Stirling sayısı* $S_2(n,v,a,b,\beta)$ *üreteç fonksiyonu ile*

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_2(n,v,a,b,\beta)\frac{t^n}{n!} = \frac{\left(\beta^b e^t - a^b\right)^v}{v!}$$

şeklinde ifade edilir. Genelleştirilmiş 2. tip Stirling sayısı $S_2(n,v,a,b,\beta)$*' de* $b=1$, $\beta=\lambda$ *ve* $a=1$ *alınırsa genelleştirilmiş 2. tip* $\lambda-$*Stirling sayısı* $S_2(n,k,\lambda)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_2(n,v,\lambda)\frac{t^n}{n!} = \frac{\left(\lambda e^t-1\right)^v}{v!}$$

elde edilir (Srivastava vd. 2019; Özden vd. 2020).

Tanım 2.26. $v \in \mathbb{N}, a, b, \beta \in \mathbb{R}\ (a \neq b)$ *olmak üzere, modified dejenere 2. tip Stirling sayısı* $S_{2,\lambda}(n,v,a,b,\beta)$ *üreteç fonksiyonu ile*

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_{2,\lambda}(n,v,a,b,\beta)\frac{t^n}{n!} = \frac{\left(\beta^b\left(1+\lambda t\right)^{\frac{t}{\lambda}} - a^b\right)^v}{v!}$$

şeklinde ifade edilir (Srivastava vd. 2019).

Tanım 2.27. *Cauchy polinomu* $C_n(x)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{\log(1+t)} (1+t)^x$$

şeklinde tanımlanır (Comtet 1974; Zhao 2009; Kim ve Jang 2020).

Tanım 2.28. *1. çeşit poli-Cauchy polinomları ve 2. çeşit poli-Cauchy polinomları sırasıyla*

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(k)}(x) \frac{t^n}{n!} = Lif_k(\log(1+t))(1+t)^x, \ k \in \mathbb{Z}$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} \hat{C}_n^{(k)}(x) \frac{t^n}{n!} = Lif_k(-\log(1+t))(1+t)^{-x}, \ k \in \mathbb{Z}$$

şeklinde tanımlanırlar. Burada $x = 0$ *alınırsa* $C_n^{(k)}$ *1. çeşit poli-Cauchy sayısı ve* $\hat{C}_n^{(k)}$ *2. çeşit poli-Cauchy sayısı elde edilir (Komatsu 2013; Komatsu vd. 2013; Dolgy vd. 2015).*

3. MATERYAL VE METOT

Sunulan tez çalışmasında öncelikle Bernoulli polinomları, Euler polinomları, Genocchi polinomları, Hermite polinomları, Cauchy polinomları ve bu polinomların özel halleri olan sayılar üzerine literatür taraması yapılmıştır. Literatür taramasına klasik formlarından başlanmıştır. Daha sonra bu polinomların genelleştirilmiş birçok durumu incelenmiş ve tez çalışmasının Kaynak Taraması bölümünde sunulmuştur. İncelenen bazı genelleştirmeler; Apostol-Bernoulli, Apostol-Euler, Apostol-Genocchi polinomları, dejenere Bernoulli polinomları, dejenere Euler polinomları, parametrik Bernoulli polinomları, parametrik Euler polinomları, Hermite-tabanlı Bernoulli polinomları, Hermite-tabanlı Euler polinomları, Hermite-tabanlı Genocchi polinomları ve poli-Cauchy polinomlarıdır (Apostol 1951; Carlitz 1979; Luo vd. 2005; Özarslan 2011; Özarslan 2013; Khan 2015; Kim vd. 2016; Kim 2017; Srivastava vd. 2018; Komatsu 2018; Srivastava vd. 2019; Kim vd. 2019c; Kim ve Jang 2020).

Literatür verilerine göre Bernoulli polinomları, Euler polinomları, Genocchi polinomları ve bu polinomların çeşitli genelleştirmeleri uzun yıllardır araştırılmaktadır. Carlitz (1961) tarafından tanımlanan 2. tip Bernoulli ve 2. tip Euler polinomları da son yıllarda araştırmacılar tarafından aktif olarak çalışılmaktadır (Carlitz 1961; Jang ve Kim 2019; Kim vd. 2019b; Kim vd. 2019c).

Bu tez çalışmasında, 2. tip Bernoulli polinomları, 2. tip Euler polinomları, Hermite-tabanlı polinomlar, 2 parametreli Apostol-Bernoulli polinomları, 2 parametreli Apostol- Euler polinomları ve 2 parametreli Apostol-Genocchi polinomları üzerine çeşitli genelleştirmeler yapılmıştır. Bu genelleştirmelerin özel halleri ise mevcut literatürlerdeki sonuçları verilmektedir.

Son olarak bulunan sonuçlar Bulgular ve Tartışma bölümünde verilmiştir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. 2. Tip Unified Apostol-Bernoulli Tipli Polinomlar

Tezin bu bölümünde klasik Bernoulli, Euler ve Genocchi polinomlarının bir genelleştirmesi olan Apostol-Bernoulli, Apostol-Euler ve Apostol-Genocchi polinomlarına uygulanan genelleştirmelerden esinlenerek, son yıllarda yoğun olarak çalışılmaya başlanılan 2. tip Bernoulli ve 2. tip Euler polinomları üzerine bazı genelleştirmeler yaptık. Yaptığımız bu genelleştirmelere 2. tip genelleştirilmiş Apostol-Bernoulli polinomu, 2. tip genelleştirilmiş Apostol-Euler polinomu ve 2. tip genelleştirilmiş Apostol-Genocchi polinomu isimlerini verdik. Daha sonra bu genelleştirmeleri tek bir polinom ifadesiyle göstermek istedik ve 2. tip unified Apostol-Bernoulli tipli polinomlarını tanımladık. Bu polinomun özel hallerinin bilinen klasik sonuçları verdiğini gösterdik.

Tanım 4.29. *2. tip genelleştirilmiş Apostol-Bernoulli polinomlarını üreteç fonksiyonları yardımıyla*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{B}_n^{(\alpha)}(x,\lambda)\frac{t^n}{n!} = \left(\frac{t}{\lambda e^t - e^{-t}}\right)^{\alpha} e^{xt},$$

2. tip genelleştirilmiş Apostol-Euler polinomlarını

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{E}_n^{(\alpha)}(x,\lambda)\frac{t^n}{n!} = \left(\frac{2}{\lambda e^t + e^{-t}}\right)^{\alpha} e^{xt}$$

ve son olarak 2. tip genelleştirilmiş Apostol-Genocchi polinomlarını

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{G}_n^{(\alpha)}(x,\lambda)\frac{t^n}{n!} = \left(\frac{2t}{\lambda e^t + e^{-t}}\right)^{\alpha} e^{xt}$$

olarak tanımlayalım.

Tanım 4.30. $x \in \mathbb{R}$, β, $\alpha \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$*olmak üzere, 2. tip unified Apostol-Bernoulli tipli polinomu*

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha)}(x;k,a,b)\frac{t^n}{n!} &= \left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t - a^b e^{-t}}\right)^{\alpha} e^{xt}, \\ \left|2t + b\log\left(\frac{\beta}{a}\right)\right| &< 2\pi,\ a \neq 0,\ 1^{\alpha} := 1 \end{aligned} \tag{4.1}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlayalım. Burada $x = 0$ *için,* $\tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha)}(0;k,a,b) = \tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha)}(k,a,b)$ *ile gösterilen ifadeyi 2. tip unified Apostol-Bernoulli tipli sayı olarak adlandıralım.*

(4.1) ifadesinde $k=a=b=1$, $\beta=\lambda$ ise $\tilde{R}_{n,\lambda}^{(\alpha)}(x;1,1,1)=\tilde{B}_n^{(\alpha)}(x,\lambda)$,

$\alpha=\lambda=1$ ise $\tilde{R}_{n,1}^{(1)}(x;1,1,1)=\tilde{B}_n(x)$,

$k=0$, $-a=b=1$, $\beta=\lambda$ ise $\tilde{R}_{n,\lambda}^{(\alpha)}(x;0,1,1)=\tilde{E}_n^{(\alpha)}(x,\lambda)$,

$\alpha=\lambda=1$ ise $\tilde{R}_{n,1}^{(1)}(x;0,1,1)=\tilde{E}_n(x)$,

$k=1, a=\frac{-1}{2}, b=1, \beta=\frac{\lambda}{2}$ ise $\tilde{R}_{n,\frac{\lambda}{2}}^{(\alpha)}\left(x;1,\frac{-1}{2},1\right)=\tilde{G}_n^{(\alpha)}(x,\lambda)$

edilir.

Teorem 4.31. *2. tip unified Apostol-Bernoulli tipli polinomlar aşağıdaki bağıntıyı sağlar:*

$$\tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha_1+\alpha_2)}(x+y;k,a,b)=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\tilde{R}_{l,\beta}^{(\alpha_1)}(x;k,a,b)\,\tilde{R}_{n-l,\beta}^{(\alpha_2)}(y;k,a,b). \tag{4.2}$$

İspat (4.1) tanımından kolaylıkla elde edilebilir. □

Sonuç 4.32. *(4.2) ifadesinde $k=a=b=1$, $\beta=\lambda$ ise*

$$\tilde{B}_n^{(\alpha_1+\alpha_2)}(x+y,\lambda)=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\tilde{B}_l^{(\alpha_1)}(x,\lambda)\,\tilde{B}_{n-l}^{(\alpha_2)}(y,\lambda)$$

elde edilir.

Sonuç 4.33. *(4.2) ifadesinde $k=a=b=1$, $\beta=1$ ise*

$$\tilde{B}_n^{(\alpha_1+\alpha_2)}(x+y)=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\tilde{B}_l^{(\alpha_1)}(x)\,\tilde{B}_{n-l}^{(\alpha_2)}(y)$$

elde edilir.

Teorem 4.34. *$a\neq 0$, $\alpha\in\mathbb{N}$ ve $n\geq k\alpha$ olmak üzere, 2. tip unified Apostol-Bernoulli tipli polinomları ile 2. çeşit $\lambda-$Stirling sayıları arasında*

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\tilde{R}_{n-r,\beta}^{(\alpha)}(x;k,a,b)\,2^r S\left(r,\alpha,\left(\frac{\beta}{a}\right)^b\right)=\frac{2^{(1-k)\alpha}}{\alpha!a^{b\alpha}}\frac{n!}{(n-k\alpha)!}(x+\alpha)^{n-k\alpha} \tag{4.3}$$

bağıntısı vardır.

İspat

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha)}(x;k,a,b)\frac{t^n}{n!} &= \left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t-a^b e^{-t}}\right)^{\alpha}e^{xt}\\ &= \frac{2^{(1-k)\alpha}t^{k\alpha}e^{(x+\alpha)t}}{a^{b\alpha}\alpha!\sum_{n=0}^{\infty}S\left(n,\alpha,\left(\frac{\beta}{a}\right)^b\right)\frac{2^n t^n}{n!}}\end{aligned}$$

$$a^{b\alpha}\alpha!\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\tilde{R}_{n-r,\beta}^{(\alpha)}(x;k,a,b)\,2^{r}S\left(r,\alpha,\left(\frac{\beta}{a}\right)^{b}\right)\frac{t^{n}}{n!}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
&= 2^{(1-k)\alpha}t^{k\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}(x+\alpha)^{n}\frac{t^{n}}{n!}\\
&= 2^{(1-k)\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}(x+\alpha)^{n}\frac{t^{n+k\alpha}}{n!}\\
&= 2^{(1-k)\alpha}\sum_{n=k\alpha}^{\infty}(x+\alpha)^{n-k\alpha}\frac{n!}{(n-k\alpha)!}\frac{t^{n}}{n!}
\end{aligned}$$

olur. Eşitliğin her iki tarafında $\frac{t^n}{n!}$ katsayılarını karşılaştırırsak istenilen elde edilir. □

Sonuç 4.35. *(4.3) eşitliğinde $k=a=b=1$, $\beta=\lambda$ ise*

$$\alpha!\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\tilde{B}_{n-r}^{(\alpha)}(x,\lambda)\,2^{r}S(r,\alpha,\lambda)=\frac{n!}{(n-\alpha)!}(x+\alpha)^{n-\alpha}$$

ifadesi elde edilir. (Ayrıca 2. tip genelleştirilmiş Bernoulli polinomları tanımı kullanarak da bu eşitlik bulunabilir.)

Sonuç 4.36. *(4.3) eşitliğinde $k=a=b=1=\beta=\alpha$ ise*

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\tilde{B}_{n-r}(x)\,2^{r}S(r,1,1) &= \frac{n!}{(n-1)!}(x+1)^{n-1}\\
&= n(x+1)^{n-1}
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. (Benzer şekilde 2. tip Bernoulli polinomları tanımı kullanarak da bu eşitlik bulunabilir.)

Tanım 4.37. *$\lambda\in\mathbb{R}$ ya da $\lambda\in\mathbb{C}$ olmak üzere,*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{S}_{k}(n,\lambda)\frac{t^{k}}{k!}=\frac{\lambda e^{(n+1)t}-1}{\lambda e^{t}-1} \tag{4.4}$$

şeklinde ifade edilir. (Özarslan 2011).

(4.4) eşitliğinde $\lambda=1$ alınırsa kuvvetler toplamı olarak adlandırılan

$$\mathcal{S}_{k}(n)=\sum_{i=0}^{n}i^{k}$$

toplamının üreteç fonksiyonu elde edilir.

Teorem 4.38. *$c \neq d$, ve $c, d \neq -1$ olmak üzere,*

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=0}^{n}\sum_{l=0}^{r}\binom{r}{l}\binom{n}{r}c^{n-r}\left(d+1\right)^{r}d^{r-l}\tilde{R}_{n-r,\beta}^{(m)}\left(dx;k,a,b\right)\\
&\mathcal{S}_{l}\left(c-1+\frac{1-c}{1+d};\left(\frac{\beta}{a}\right)^{b}\right)\tilde{R}_{r-l,,\beta}^{(m-1)}\left(cy;k,a,b\right)\\
=&\sum_{r=0}^{n}\sum_{l=0}^{r}\binom{r}{l}\binom{n}{r}d^{n-r}\left(c+1\right)^{r}c^{r-l}\tilde{R}_{n-r,\beta}^{(m)}\left(cx;k,a,b\right)\\
&\mathcal{S}_{l}\left(d-1+\frac{1-d}{1+c};\left(\frac{\beta}{a}\right)^{b}\right)\tilde{R}_{r-l,,\beta}^{(m-1)}\left(dy;k,a,b\right)
\end{aligned}$$

simetriklik bağıntısı vardır.

İspat

$$G\left(t\right)=\frac{2^{(1-k)(2m-1)}t^{2km-k}e^{cdxt}\left(\beta^{b}e^{cdt}-a^{b}e^{-t}\right)e^{cdyt}}{\left(\beta^{b}e^{ct}-a^{b}e^{-t}\right)^{m}\left(\beta^{b}e^{dt}-a^{b}e^{-t}\right)^{m}}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Her iki tarafın buna eşit olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$$\begin{aligned}
G\left(t\right) &= \frac{1}{c^{km}d^{k(m-1)}}\left(\frac{2^{k-1}c^{k}t^{k}}{\beta^{b}e^{ct}-a^{b}e^{-t}}\right)^{m}e^{cdxt}\\
&\left(\frac{\beta^{b}e^{cdt}-a^{b}e^{-t}}{\beta^{b}e^{dt}-a^{b}e^{-t}}\right)\left(\frac{2^{k-1}d^{k}t^{k}}{\beta^{b}e^{dt}-a^{b}e^{-t}}\right)^{m-1}e^{cdyt}\\
&= \frac{1}{c^{km}d^{k(m-1)}}\left(\frac{2^{k-1}c^{k}t^{k}}{\beta^{b}e^{ct}-a^{b}e^{-t}}\right)^{m}e^{cdxt}\\
&\left(\frac{\beta^{b}e^{(cd+1)t}-a^{b}}{\beta^{b}e^{(d+1)t}-a^{b}}\right)\left(\frac{2^{k-1}d^{k}t^{k}}{\beta^{b}e^{dt}-a^{b}e^{-t}}\right)^{m-1}e^{cdyt}\\
&= \frac{1}{c^{km}d^{k(m-1)}}\left(\frac{2^{k-1}c^{k}t^{k}}{\beta^{b}e^{ct}-a^{b}e^{-t}}\right)^{m}e^{cdxt}\\
&\left(\frac{\beta^{b}e^{\left(c+\frac{1-c}{1+d}\right)(d+1)t}-a^{b}}{\beta^{b}e^{(d+1)t}-a^{b}}\right)\left(\frac{2^{k-1}d^{k}t^{k}}{\beta^{b}e^{dt}-a^{b}e^{-t}}\right)^{m-1}e^{cdyt}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{c^{km}d^{k(m-1)}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{R}_{n,\beta}^{(m)}\left(dx;k,a,b\right)\frac{\left(ct\right)^{n}}{n!}\right)\\
&\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{S}_{n}\left(c-1+\frac{1-c}{1+d};\left(\frac{\beta}{a}\right)^{b}\right)\frac{\left(d+1\right)^{n}t^{n}}{n!}\right)\\
&\left(\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{R}_{n,\beta}^{(m-1)}\left(cy;k,a,b\right)\frac{\left(dt\right)^{n}}{n!}\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{c^{km}d^{k(m-1)}}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}c^{n-r}\tilde{R}_{n-r,\beta}^{(m)}(dx;k,a,b)\right.$$
$$\left.\sum_{l=0}^{r}\binom{r}{l}(d+1)^{l}d^{r-l}\mathcal{S}_{l}\left(c-1+\frac{1-c}{1+d};\left(\frac{\beta}{a}\right)^{b}\right)\tilde{R}_{r-l,\beta}^{(m-1)}(cy;k,a,b)\frac{t^{n}}{n!}\right\}.$$

Benzer işlemler diğer taraf içinde yapılırsa $G(t)$ fonksiyonunun simetriklik bağıntısını sağladığı görülür. □

4.2. 2. Tip Parametrik Unified Apostol-Bernoulli Tipli Polinomlar

Bernoulli, Euler ve Genocchi polinomunun diğer bir genelleştirmesi de trigonometrik fonksiyonlar kullanılarak yapılan cosine-sine Bernoulli, Euler ve Genocchi polinomlarıdır. Bu bölümde bu motivastonla yeni bir polinom tanımlayacağız. Tanımladığımız bu polinom hem 2. tip unified Apostol-Bernoulli tipi polinomlarının hem de 2. tip cosine-sine Bernoulli, Euler ve Genocchi polinomlarının bir genel hali olacaktır.

Tanım 4.39. *İki parametreli 2. tip genelleştirilmiş Apostol-Bernoulli polinomlarını*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{B}_{n}^{(c,\alpha)}(p,q,\lambda)\frac{t^{n}}{n!} = \left(\frac{t}{\lambda e^{t}-e^{-t}}\right)^{\alpha}e^{pt}\cos qt,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{B}_{n}^{(s,\alpha)}(p,q,\lambda)\frac{t^{n}}{n!} = \left(\frac{t}{\lambda e^{t}-e^{-t}}\right)^{\alpha}e^{pt}\sin qt$$

şeklinde, iki parametreli 2. tip genelleştirilmiş Apostol-Euler polinomlarını

$$\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{E}_{n}^{(c,\alpha)}(p,q,\lambda)\frac{t^{n}}{n!} = \left(\frac{2}{\lambda e^{t}+e^{-t}}\right)^{\alpha}e^{pt}\cos qt,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{E}_{n}^{(s,\alpha)}(p,q,\lambda)\frac{t^{n}}{n!} = \left(\frac{2}{\lambda e^{t}+e^{-t}}\right)^{\alpha}e^{pt}\sin qt$$

ve son olarak iki parametreli 2. tip genelleştirilmiş Apostol-Genocchi polinomlarını

$$\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{G}_{n}^{(c,\alpha)}(p,q,\lambda)\frac{t^{n}}{n!} = \left(\frac{2t}{\lambda e^{t}+e^{-t}}\right)^{\alpha}e^{pt}\cos qt,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{G}_{n}^{(s,\alpha)}(p,q,\lambda)\frac{t^{n}}{n!} = \left(\frac{2t}{\lambda e^{t}+e^{-t}}\right)^{\alpha}e^{pt}\sin qt$$

üreteç fonksiyonlarıyla tanımlayalım.

Burada

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_n^{(c,1)}(x,0,1) &= \tilde{B}_n(x),\\
\tilde{B}_n^{(c,1)}(0,0,1) &= \tilde{B}_n,\\
\tilde{E}_n^{(c,1)}(x,0,1) &= \tilde{E}_n(x),\\
\tilde{E}_n^{(c,1)}(0,0,1) &= \tilde{E}_n,\\
\tilde{G}_n^{(c,1)}(x,0,1) &= \tilde{G}_n(x),\\
\tilde{G}_n^{(c,1)}(0,0,1) &= \tilde{G}_n
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

Tanım 4.40. *$p,\ q \in \mathbb{R}$ olmak üzere, 2. tip parametrik unified Apostol-Bernoulli tipli polinomlarının üreteç fonksiyonlarını*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{R}_{n,\beta}^{(c,\alpha)}(p,q;k,a,b)\frac{t^n}{n!} &= \left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t - a^b e^{-t}}\right)^{\alpha} e^{pt}\cos qt, \qquad (4.5)\\
\left|2t + b\log\left(\frac{\beta}{a}\right)\right| &< 2\pi,\ a \neq 0,\ 1^{\alpha} := 1
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{R}_{n,\beta}^{(s,\alpha)}(p,q;k,a,b)\frac{t^n}{n!} &= \left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t - a^b e^{-t}}\right)^{\alpha} e^{pt}\sin qt\\
\left|2t + b\log\left(\frac{\beta}{a}\right)\right| &< 2\pi,\ a \neq 0,\ 1^{\alpha} := 1
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edelim.

(4.5) ifadesinde

$q = 0$ ise $\tilde{R}_{n,\beta}^{(c,\alpha)}(p,0;k,a,b) = \tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha)}(p;k,a,b)$,

$q = 0$ ve $\alpha = k = a = b = 1, \beta = 1$ ise $\tilde{R}_{n,1}^{(c,1)}(p,0;1,1,1) = \tilde{B}_n(p)$,

$q = 0$ ve $k = 0, \alpha = -1, b = 1, \beta = 1$ ise $\tilde{R}_{n,1}^{(c,1)}(p,0;0,1,1) = \tilde{E}_n(p)$,

$q = 0$ ve $\alpha = k = 1, a = \frac{-1}{2}, b = 1, \beta = \frac{1}{2}$ ise $\tilde{R}_{n,\frac{1}{2}}^{(c,1)}\left(p,0;1,\frac{-1}{2},1\right) = \tilde{G}_n(p)$

elde edilir.

Teorem 4.41. *$n \geq k$ olmak üzere, 2. tip parametrik unified Apostol-Bernoulli tipli poli-*

nomları arasında aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{n,\beta}^{(c,\alpha)}(p+m,q;k,a,b) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}m^{n-k}\tilde{R}_{k,\beta}^{(c,\alpha)}(p,q;k,a,b).\\
\tilde{R}_{n,\beta}^{(s,\alpha)}(p+m,q;k,a,b) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}m^{n-k}\tilde{R}_{k,\beta}^{(s,\alpha)}(p,q;k,a,b).\\
\tilde{R}_{n,\beta}^{(c,\alpha)}(p+m,q;k,a,b) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(p+m)^{n-k}\tilde{R}_{k,\beta}^{(c,\alpha)}(0,q;k,a,b).\\
\tilde{R}_{n,\beta}^{(s,\alpha)}(p+m,q;k,a,b) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(p+m)^{n-k}\tilde{R}_{k,\beta}^{(s,\alpha)}(0,q;k,a,b).\\
\tilde{R}_{n,\beta}^{(c,\alpha_1+\alpha_2)}(p+m,q+s;k,a,b) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\tilde{R}_{k,\beta}^{(c,\alpha_1)}(p,q;k,a,b)\tilde{R}_{n-k,\beta}^{(c,\alpha_2)}(m,s;k,a,b).\\
\tilde{R}_{n,\beta}^{(s,\alpha_1+\alpha_2)}(p+m,q+s;k,a,b) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\tilde{R}_{k,\beta}^{(s,\alpha_1)}(p,q;k,a,b)\tilde{R}_{n-k,\beta}^{(s,\alpha_2)}(m,s;k,a,b).\\
2^{1-k}\frac{n!}{(n-k)!}\tilde{R}_{n-k,\beta}^{(c,\alpha-1)}(p,q;k,a,b) &= \beta^b\tilde{R}_{n,\beta}^{(c,\alpha)}(p+1,q;k,a,b) \qquad (4.6)\\
&\quad -a^b\tilde{R}_{n,\beta}^{(c,\alpha)}(p-1,q;k,a,b).\\
2^{1-k}\frac{n!}{(n-k)!}\tilde{R}_{n-k,\beta}^{(s,\alpha-1)}(p,q;k,a,b) &= \beta^b\tilde{R}_{n,\beta}^{(s,\alpha)}(p+1,q;k,a,b)\\
&\quad -a^b\tilde{R}_{n,\beta}^{(s,\alpha)}(p-1,q;k,a,b).
\end{aligned}$$

İspat (4.5) tanımından elde edilebilir. □

Sonuç 4.42. *(4.6) eşitliğinde $q=0$ alınırsa*

$$\beta^b\tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha)}(x+1;k,a,b)-a^b\tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha)}(x-1;k,a,b)=2^{1-k}\frac{n!}{(n-k)!}\tilde{R}_{n-k,\beta}^{(\alpha-1)}(x;k,a,b) \quad (4.7)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğinin sağlandığı 2. tip unified Apostol-Bernoulli tipli polinomları tanımı kullanılarak da görülebilir.

Sonuç 4.43. *(4.7) eşitliğinde $k=a=b=1$, $\beta=\lambda$ seçilirse ya da (4.6) eşitliğinde $q=0$ ve $k=a=b=1$, $\beta=\lambda$ ise*

$$\lambda\tilde{B}_{n,\lambda}^{(\alpha)}(x+1,\lambda)-\tilde{B}_{n,\lambda}^{(\alpha)}(x-1,\lambda)=n\tilde{B}_{n-k,\lambda}^{(\alpha-1)}(x,\lambda)$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitliğin sağlandığı 2. tip genelleştirilmiş Apostol-Bernoulli polinomları tanımı kullanılarak da görülebilir.

Teorem 4.44. *$v \in \mathbb{N}$ ve $n \geq kv$ olmak üzere, 2. tip parametrik unified Apostol-Bernoulli tipli polinomları ile genelleştirilmiş 2. tip Stirling sayıları arasında*

$$\tilde{R}_{n-kv,\beta}^{(c,\alpha-v)}(p,q;k,a,b) = \frac{2^{(k-1)v}v!\,(n-kv)!}{n!} \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}2^r \tilde{R}_{n-r,\beta}^{(c,\alpha)}(p-v,q;k,a,b)\,S(r,v,a,b,\beta) \tag{4.8}$$

ve

$$\tilde{R}_{n-kv,\beta}^{(s,\alpha-v)}(p,q;k,a,b) = \frac{2^{(k-1)v}v!\,(n-kv)!}{n!} \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}2^r \tilde{R}_{n-r,\beta}^{(s,\alpha)}(p-v,q;k,a,b)\,S(r,v,a,b,\beta)$$

bağıntıları vardır.

İspat

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{R}_{n,\beta}^{(c,\alpha-v)}(p,q;k,a,b)\frac{t^n}{n!}\\
&= \left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t - a^b e^{-t}}\right)^{\alpha} e^{pt}\cos qt\left(\frac{\beta^b e^t - a^b e^{-t}}{2^{1-k}t^k}\right)^{v}\\
&= \left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t - a^b e^{-t}}\right)^{\alpha} e^{pt}\cos qt\left(\frac{\beta^b e^{2t} - a^b}{2^{1-k}t^k}\right)^{v} e^{-tv}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{R}_{n,\beta}^{(c,\alpha-v)}(p,q;k,a,b)\frac{t^{n+kv}}{n!}\\
&= 2^{(k-1)v}\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{R}_{n,\beta}^{(c,\alpha)}(p-v,q;k,a,b)\,v!\sum_{n=0}^{\infty}S(n,v,a,b,\beta)\frac{2^n t^n}{n!}\\
&= 2^{(k-1)v}v!\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n}2^r\binom{n}{r}\tilde{R}_{n-r,\beta}^{(c,\alpha)}(p-v,q;k,a,b)\,S(r,v,a,b,\beta)\frac{t^n}{n!}\\
&\sum_{n=kv}^{\infty}\tilde{R}_{n-kv,\beta}^{(c,\alpha-v)}(p,q;k,a,b)\frac{t^n n!}{(n-kv)!n!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n}2^{(k-1)v}v!2^r\binom{n}{r}\tilde{R}_{n-r,\beta}^{(c,\alpha)}(p-v,q;k,a,b)\,S(r,v,a,b,\beta)\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

olur. Son olarak katsayılar karşılaştırılırsa istenilen elde edilir. Diğer eşitlik de benzer şekilde görülür. □

Sonuç 4.45. (4.8) *eşitliğinde* $q = 0$ *alınırsa*

$$\tilde{R}^{(\alpha-v)}_{n-kv,\beta}(x;k,a,b) = \left\{ \frac{2^{(k-1)v} v!\,(n-kv)!}{n!} \right. \tag{4.9}$$
$$\left. \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} 2^r \tilde{R}^{(\alpha)}_{n-r,\beta}(x-v;k,a,b)\, S(r,v,a,b,\beta) \right\}$$

eşitliği sağlanır. 2. tip unified Apostol-Bernoulli tipli polinomları için de bu eşitliğinin sağlandığı 2. tip unified Apostol-Bernoulli tipli polinomları tanımı kullanılarak görülebilir.

Sonuç 4.46. (4.9) *eşitliğinde* $k = a = b = 1$, $\beta = \lambda$ *ya da* (4.8) *eşitliğinde* $q = 0$ *ve* $k = a = b = 1$, $\beta = \lambda$ *ise*

$$\tilde{B}^{(\alpha-v)}_{n-v}(x,\lambda) = \frac{v!\,(n-v)!}{n!} \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} 2^r \tilde{B}^{(\alpha)}_{n-r}(x-v,\lambda)\, S(r,v,1,1,\lambda)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 4.47. *2. tip parametrik unified Apostol-Bernoulli tipli polinom*

$$\tilde{R}^{(s,\alpha_1+\alpha_2)}_{n,\beta}(p+m,2q;k,a,b) = 2\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \tilde{R}^{(s,\alpha_1)}_{r,\beta}(p,q;k,a,b)\, \tilde{R}^{(c,\alpha_2)}_{n-r,\beta}(m,q;k,a,b)$$

ve

$$\tilde{R}^{(s,\alpha_1+\alpha_2)}_{n,\beta}(p+m,2q;k,a,b) = 2\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \tilde{R}^{(c,\alpha_1)}_{r,\beta}(p,q;k,a,b)\, \tilde{R}^{(s,\alpha_2)}_{n-r,\beta}(m,q;k,a,b)$$

eşitliklerini sağlar.

İspat

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{R}^{(s,\alpha_1+\alpha_2)}_{n,\beta}(p+m,2q;k,a,b)\,\frac{t^n}{n!} \\
&= \left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t - a^b e^{-t}}\right)^{\alpha_1+\alpha_2} e^{(p+m)t}\sin 2qt \\
&= 2\left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t - a^b e^{-t}}\right)^{\alpha_1} e^{pt}\sin qt \left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t - a^b e^{-t}}\right)^{\alpha_2} e^{mt}\cos qt \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{R}^{(s,\alpha_1)}_{n,\beta}(p,q;k,a,b)\,\frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{R}^{(c,\alpha_2)}_{n,\beta}(m,q;k,a,b)\,\frac{t^n}{n!} \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \tilde{R}^{(s,\alpha_1)}_{r,\beta}(p,q;k,a,b)\, \tilde{R}^{(c,\alpha_2)}_{n-r,\beta}(m,q;k,a,b)\,\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

olur. Katsayılar karşılaştırılırsa istenilen elde edilmiş olur. Diğer eşitlik de benzer şekilde görülür. □

Teorem 4.48. *2. tip parametrik unified Apostol-Bernoulli tipli polinomlar aşağıdaki bağıntıları sağlar.*

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{n,\beta}^{(s,\alpha_1+\alpha_2)}(p+m,q+w;k,a,b) &= \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\left\{\tilde{R}_{r,\beta}^{(s,\alpha_1)}(p,q;k,a,b)\,\tilde{R}_{n-r,\beta}^{(c,\alpha_2)}(m,w;k,a,b)\right.\\ &\quad\left.+\tilde{R}_{r,\beta}^{(s,\alpha_1)}(p,w;k,a,b)\,\tilde{R}_{n-r,\beta}^{(c,\alpha_2)}(m,q;k,a,b)\right\}.\\ \tilde{R}_{n,\beta}^{(s,\alpha_1+\alpha_2)}(p+m,q+w;k,a,b) &= \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\left\{\tilde{R}_{r,\beta}^{(c,\alpha_1)}(p,q;k,a,b)\,\tilde{R}_{n-r,\beta}^{(s,\alpha_2)}(m,w;k,a,b)\right.\\ &\quad\left.+\tilde{R}_{r,\beta}^{(c,\alpha_1)}(p,w;k,a,b)\,\tilde{R}_{n-r,\beta}^{(s,\alpha_2)}(m,q;k,a,b)\right\}.\end{aligned}$$

İspat

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{R}_{n,\beta}^{(s,\alpha_1+\alpha_2)}(p+m,q+w;k,a,b)\frac{t^n}{n!}\\ &= \left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t-a^b e^{-t}}\right)^{\alpha_1+\alpha_2}e^{(p+m)t}\sin\left((q+w)t\right)\\ &= \left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t-a^b e^{-t}}\right)^{\alpha_1}e^{pt}\sin qt\left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t-a^b e^{-t}}\right)^{\alpha_2}e^{mt}\cos wt\\ &\quad+\left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t-a^b e^{-t}}\right)^{\alpha_1}e^{pt}\sin wt\left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t-a^b e^{-t}}\right)^{\alpha_2}e^{mt}\cos qt\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\tilde{R}_{n,\beta}^{(s,\alpha_1)}(p,q;k,a,b)\frac{t^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{R}_{n,\beta}^{(c,\alpha_2)}(m,w;k,a,b)\frac{t^n}{n!}\\ &\quad+\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{R}_{n,\beta}^{(s,\alpha_1)}(p,w;k,a,b)\frac{t^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{R}_{n,\beta}^{(c,\alpha_2)}(m,q;k,a,b)\frac{t^n}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\tilde{R}_{r,\beta}^{(s,\alpha_1)}(p,q;k,a,b)\,\tilde{R}_{n-r,\beta}^{(c,\alpha_2)}(m,w;k,a,b)\frac{t^n}{n!}\\ &\quad+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\tilde{R}_{r,\beta}^{(s,\alpha_1)}(p,w;k,a,b)\,\tilde{R}_{n-r,\beta}^{(c,\alpha_2)}(m,q;k,a,b)\frac{t^n}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\left\{\tilde{R}_{r,\beta}^{(s,\alpha_1)}(p,q;k,a,b)\,\tilde{R}_{n-r,\beta}^{(c,\alpha_2)}(m,w;k,a,b)\right.\\ &\quad\left.+\tilde{R}_{r,\beta}^{(s,\alpha_1)}(p,w;k,a,b)\,\tilde{R}_{n-r,\beta}^{(c,\alpha_2)}(m,q;k,a,b)\right\}\frac{t^n}{n!}.\end{aligned}$$

olur. Katsayılar karşılaştırılırsa istenilen elde edilir. Diğer eşitlik de benzer şekilde görülür. □

4.3. 2. Tip Karmaşık Değerli Unified Apostol-Bernoulli Tipli Polinomlar

Bu bölümde ilk bölümde tanımladığımız 2. tip unified Apostol-Bernoulli tipli polinomlarının daha genel bir tanımı olarak 2. tip karmaşık değerli unified Apostol-Bernoulli tipli polinomlarını tanımlayacağız. Tanımladığımız bu polinomun sağladığı bağıntıları, özdeşlikleri vereceğiz ve bazı teoremleri ifade edip ispatlayacağız.

Tanım 4.49. *$x,\ y \in \mathbb{R},\ \beta,\ \alpha \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N}$ olmak üzere, 2. tip karmaşık değerli unified Apostol-Bernoulli tipli polinomunu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha)}(x+iy;k,a,b)\frac{t^n}{n!} = \left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t - a^b e^{-t}}\right)^{\alpha} e^{(x+iy)t},\ i=\sqrt{-1} \quad (4.10)$$
$$\left|2t + b\log\left(\frac{\beta}{a}\right)\right| < 2\pi,\ a \neq 0,\ 1^{\alpha} := 1$$

üreteç fonksiyonunu ile tanımlayalım.

$y=0,\ k=a=b=1,\ \beta=\lambda$ ise $\tilde{R}_{n,\lambda}^{(\alpha)}(x;1,1,1) = \tilde{B}_n^{(\alpha)}(x,\lambda)$ ve özel olarak $\alpha=\lambda=1$ ise $\tilde{R}_{n,1}^{(1)}(x;1,1,1) = \tilde{B}_n(x)$ elde edilir.

$y=0,\ k=0,\ a=-1,\ b=1,\ \beta=\lambda$ ise $\tilde{R}_{n,\lambda}^{(\alpha)}(x;0,-1,1) = \tilde{E}_n^{(\alpha)}(x,\lambda)$ ve özel olarak $\alpha=\lambda=1$ ise $\tilde{R}_{n,1}^{(1)}(x;0,1,1) = \tilde{E}_n(x)$ elde edilir.

$y=0, k=1, a=\frac{-1}{2}, b=1, \beta=\frac{\lambda}{2}$ ise $\tilde{R}_{n,\frac{\lambda}{2}}^{(\alpha)}\left(x;1,\frac{-1}{2},1\right) = \tilde{G}_n^{(\alpha)}(x,\lambda)$ ve özel olarak $\alpha=\lambda=1$ ise $\tilde{R}_{n,\frac{1}{2}}^{(1)}\left(x;1,\frac{-1}{2},1\right) = \tilde{G}_n(x)$
edilir.

Tanım 4.50. *$p \in \mathbb{C}$ ve $q \in \mathbb{R}$ olmak üzere, 2. tip karmaşık değerli parametrik unified Apostol-Bernoulli tipli polinomlarının üreteç fonksiyonunu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{R}_{n,\beta}^{(c,\alpha)}(p,q;k,a,b)\frac{t^n}{n!} = \left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t - a^b e^{-t}}\right)^{\alpha} e^{pt}\cos qt$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{R}_{n,\beta}^{(s,\alpha)}(p,q;k,a,b)\frac{t^n}{n!} = \left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t - a^b e^{-t}}\right)^{\alpha} e^{pt}\sin qt$$

şeklinde ifade edelim.

Teorem 4.51. *2. tip karmaşık değerli unified Apostol-Bernoulli tipli polinomları aşağı-*

daki eşitlikleri sağlar.

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha)}(x+iy;k,a,b) &= \tilde{R}_{n,\beta}^{(c,\alpha)}(x,y;k,a,b)+i\tilde{R}_{n,\beta}^{(s,\alpha)}(x,y;k,a,b).\\
\tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha)}(x+iy;k,a,b) &= \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\tilde{R}_{m,\beta}^{(\alpha)}(iy;k,a,b)\,x^{n-m}.\\
\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\tilde{R}_{m,\beta}^{(\alpha)}(iy;k,a,b)\,x^{n-m} &= \tilde{R}_{n,\beta}^{(c,\alpha)}(x,y;k,a,b)+i\tilde{R}_{n,\beta}^{(s,\alpha)}(x,y;k,a,b).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha_1+\alpha_2)}(x_1+iy_1+x_2+iy_2;k,a,b) &= \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\tilde{R}_{m,\beta}^{(\alpha_1)}(x_1+iy_1;k,a,b)\\
&\quad \tilde{R}_{n-m,\beta}^{(\alpha_2)}(x_2+iy_2;k,a,b).
\end{aligned}$$

İspat (4.10) tanımından görülebilir. □

Teorem 4.52. *$x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere, 2. tip karmaşık değerli unified Apostol-Bernoulli tipli polinomu ile 2. tip unified Apostol-Bernoulli tipli polinomu arasında*

$$\tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha)}(x+iy;k,a,b)=\tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha)}(x;k,a,b)+2i\tilde{R}_{n,\beta}^{(s,\alpha)}\left(x+\frac{iy}{2},\frac{y}{2};k,a,b\right)$$

eşitliği vardır.

İspat

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha)}(x+iy;k,a,b)\frac{t^n}{n!}\\
&= \left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t-a^b e^{-t}}\right)^{\alpha}e^{(x+iy)t}\\
&= \left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t-a^b e^{-t}}\right)^{\alpha}e^{xt}(\cos yt+i\sin yt)\\
&= \left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t-a^b e^{-t}}\right)^{\alpha}e^{xt}\cos yt+i\left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t-a^b e^{-t}}\right)^{\alpha}e^{xt}\sin yt\\
&= \left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t-a^b e^{-t}}\right)^{\alpha}e^{xt}\left(1-2\sin^2\frac{yt}{2}\right)\\
&\quad +i\left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t-a^b e^{-t}}\right)^{\alpha}e^{xt}2\sin\frac{yt}{2}\cos\frac{yt}{2}\\
&= \left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t-a^b e^{-t}}\right)^{\alpha}e^{xt}-2\left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t-a^b e^{-t}}\right)^{\alpha}e^{xt}\sin\frac{yt}{2}\sin\frac{yt}{2}\\
&\quad +2i\left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t-a^b e^{-t}}\right)^{\alpha}e^{xt}\sin\frac{yt}{2}\cos\frac{yt}{2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t - a^b e^{-t}}\right)^\alpha e^{xt} - 2\left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t - a^b e^{-t}}\right)^\alpha e^{xt}\sin\frac{yt}{2}\left(\sin\frac{yt}{2} - i\cos\frac{yt}{2}\right)\\
&= \left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t - a^b e^{-t}}\right)^\alpha e^{xt} + i^2 2\left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t - a^b e^{-t}}\right)^\alpha e^{xt}\sin\frac{yt}{2}\left(\sin\frac{yt}{2} - i\cos\frac{yt}{2}\right)\\
&= \left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t - a^b e^{-t}}\right)^\alpha e^{xt} + 2i\left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t - a^b e^{-t}}\right)^\alpha e^{xt}\sin\frac{yt}{2}\left(i\sin\frac{yt}{2} - i^2\cos\frac{yt}{2}\right)\\
&= \left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t - a^b e^{-t}}\right)^\alpha e^{xt} + 2i\left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t - a^b e^{-t}}\right)^\alpha e^{xt}\sin\frac{yt}{2}\left(\cos\frac{yt}{2} + i\sin\frac{yt}{2}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha)}(x;k,a,b) + 2i\tilde{R}_{n,\beta}^{(s,\alpha)}\left(x+\frac{iy}{2},\frac{y}{2};k,a,b\right)\right)\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}
$$

olur. Katsayılar karşılaştırılırsa istenilen elde edilir. □

Teorem 4.53. *$y \neq 0$ olmak üzere,*

$$
\begin{aligned}
\tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha)}(\log(x+iy);k,a,b) &= \tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha,c)}\left(\sqrt{x^2+y^2},\arctan\frac{x}{y};k,a,b\right)\\
&\quad + i\tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha,s)}\left(\sqrt{x^2+y^2},\arctan\frac{x}{y};k,a,b\right)
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

eşitliği vardır.

İspat

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha)}(\log(x+iy);k,a,b)\ \frac{t^n}{n!} = \left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t - a^b e^{-t}}\right)^\alpha e^{t\log(x+iy)}\\
&= \left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t - a^b e^{-t}}\right)^\alpha e^{(\log|x+iy| + i\arg(x+iy))t}\\
&= \left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t - a^b e^{-t}}\right)^\alpha e^{\left(\sqrt{x^2+y^2} + i\left(\arctan\frac{x}{y}\right)\right)t}\\
&= \left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t - a^b e^{-t}}\right)^\alpha e^{t\sqrt{x^2+y^2}}\\
&\quad \left(\cos\left(t\arctan\frac{x}{y}\right) + i\sin\left(t\arctan\frac{x}{y}\right)\right)\\
&= \left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t - a^b e^{-t}}\right)^\alpha e^{t\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(t\arctan\frac{x}{y}\right)\\
&\quad + i\left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t - a^b e^{-t}}\right)^\alpha e^{t\sqrt{x^2+y^2}}\sin\left(t\arctan\frac{x}{y}\right)\\
&\quad \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha,c)}\left(\sqrt{x^2+y^2},\arctan\frac{x}{y};k,a,b\right)\right.\\
&\quad \left. + i\tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha,s)}\left(\sqrt{x^2+y^2},\arctan\frac{x}{y};k,a,b\right)\right\}\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}
$$

olur. Katsayılar karşılaştırılarak istenilen elde edilir. □

Tanım 4.54. *$x, y \in \mathbb{R}$, $\beta, \alpha \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere, dejenere 2. tip karmaşık değerli unified Apostol-Bernoulli tipli polinomlar*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{R}_{n,\beta,\lambda}^{(\alpha)}(x+iy;k,a,b)\frac{t^n}{n!} = \left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e_\lambda^t - a^b e_\lambda^{-t}}\right)^\alpha e_\lambda^{(x+iy)t}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlayalım.

4.4. Hermite-Tabanlı 2. Tip Unified Apostol-Bernoulli Tipli Polinomlar

Bu bölümde ilk bölümdeki 2. tip unified Apostol-Bernoulli tipli polinomlarının, Hermite-tabanlı 2. tip unified Apostol-Bernoulli tipli polinomları tanımlandı. Bazı bağıntı ve teoremler verildi.

Tanım 4.55. *Hermite-tabanlı 2. tip Bernoulli polinomunu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_H\tilde{B}_n(x,y)\frac{t^n}{n!} = \frac{t}{e^t - e^{-t}}e^{xt+yt^2}$$

şeklinde, Hermite-tabanlı 2. tip Euler polinomunu

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_H\tilde{E}_n(x,y)\frac{t^n}{n!} = \frac{2}{e^t + e^{-t}}e^{xt+yt^2}$$

şeklinde ve son olarak Hermite-tabanlı 2. tip Genocchi polinomunu

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_H\tilde{G}_n(x,y)\frac{t^n}{n!} = \frac{2t}{e^t + e^{-t}}e^{xt+yt^2}$$

şeklinde tanımlayalım.

Tanım 4.56. *Hermite-tabanlı 2. tip Apostol Bernoulli polinomunu*

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_H\tilde{B}_{n,\beta}^{(\alpha)}(x,y)\frac{t^n}{n!} = \left(\frac{t}{e^t - e^{-t}}\right)^\alpha e^{xt+yt^2}$$

şeklinde, Hermite-tabanlı 2. tip Apostol Euler polinomunu

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_H\tilde{E}_{n,\beta}^{(\alpha)}(x,y)\frac{t^n}{n!} = \left(\frac{2}{e^t + e^{-t}}\right)^\alpha e^{xt+yt^2}$$

şeklinde ve son olarak Hermite-tabanlı 2. tip Apostol Genocchi polinomunu

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_H\tilde{G}_{n,\beta}^{(\alpha)}(x,y)\frac{t^n}{n!} = \left(\frac{2t}{e^t + e^{-t}}\right)^\alpha e^{xt+yt^2}$$

şeklinde tanımlayalım.

Tanım 4.57. *Hermite-tabanlı 2. tip unified Apostol-Bernoulli tipli polinomu üreteç fonksiyonu ile*

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_{H}\tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha)}(x,y;k,a,b)\frac{t^n}{n!} = \left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t - a^b e^{-t}}\right)^{\alpha} e^{xt+yt^2} \tag{4.12}$$
$$\left|2t + b\log\left(\frac{\beta}{a}\right)\right| < 2\pi,\ a \neq 0,\ 1^{\alpha} := 1$$

olarak tanımlayalım.

Burada $y = 0$ ise ${}_{H}\tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha)}(x,0;k,a,b) = \tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha)}(x;k,a,b)$,

$k = a = b = \beta = \lambda = \alpha = 1$ ise ${}_{H}\tilde{R}_{n,1}^{(\alpha)}(x,y;1,1,1) = {}_{H}\tilde{B}_n(x,y)$,

$k = 0, -a = b = \beta = \alpha = \lambda = 1$ ise ${}_{H}\tilde{R}_{n,1}^{(\alpha)}(x,y;0,-1,1) = {}_{H}\tilde{E}_n(x,y)$,

$k = b = \alpha = 1 = \lambda,\ a = \frac{-1}{2},\ \beta = \frac{1}{2}$ ise ${}_{H}\tilde{R}_{n,\frac{1}{2}}^{(\alpha)}\left(x,y;1,\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right) = {}_{H}\tilde{G}_n(x,y)$

elde edilir.

Teorem 4.58. *Hermite-tabanlı 2. tip unified Apostol-Bernoulli tipli polinomları aşağıdaki eşitlikleri sağlar.*

$${}_{H}\tilde{R}_{n,\beta}^{(r+s)}(x+u,y+v;k,a,b) = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r} {}_{H}\tilde{R}_{r,\beta}^{(r)}(x,y;k,a,b)\,{}_{H}\tilde{R}_{n-r,\beta}^{(s)}(u,v;k,a,b).$$

$${}_{H}\tilde{R}_{n,\beta}^{(r+s)}(x+u,y+v;k,a,b) = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r} {}_{H}\tilde{R}_{r,\beta}^{(r+s)}(x,y;k,a,b)\,H_{n-r}(u,v).$$

$${}_{H}\tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha)}(x+m,y;k,a,b) = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r} {}_{H}\tilde{R}_{r,\beta}^{(\alpha)}(x,y;k,a,b)\,m^{n-r}.$$

Burada $H_n(u,v)$ (2.1) ile verilen 2 değişkenli Hermite-Kampé de Fériet polinomudur.

İspat (4.12) tanımı kullanılarak elde edilebilir. □

Teorem 4.59. *$m \neq 0$ olmak üzere, $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m = \alpha$ olsun. Hermite-tabanlı 2. tip unified Apostol-Bernoulli tipli polinomlarının çarpımları aşağıdaki bağıntıyı sağlar.*

$${}_{H}\tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha)}(x,y;k,a,b)\,\frac{t^n}{n!} = \sum_{\substack{i_1\geq 0,\cdots,i_m\geq 0\\ i_1+i_2+\cdots+i_m=n}} \frac{n!}{i_1!\cdots i_m!}\,{}_{H}\tilde{R}_{i_1,\beta}^{(\alpha_1)}\left(\frac{x}{m},\frac{y}{m};k,a,b\right)$$
$${}_{H}\tilde{R}_{i_2,\beta}^{(\alpha_2)}\left(\frac{x}{m},\frac{y}{m};k,a,b\right)\cdots\cdot\,{}_{H}\tilde{R}_{i_m,\beta}^{(\alpha_m)}\left(\frac{x}{m},\frac{y}{m};k,a,b\right).$$

İspat

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} {}_H\tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha)}(x,y;k,a,b)\ \frac{t^n}{n!}\\
=&\sum_{n=0}^{\infty} {}_H\tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m)}(x,y;k,a,b)\ \frac{t^n}{n!}\\
=&\left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t - a^b e^{-t}}\right)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m} e^{xt+yt^2}\\
=&\left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t - a^b e^{-t}}\right)^{\alpha_1} e^{\frac{x}{m}t+\frac{y}{m}t^2}\left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t - a^b e^{-t}}\right)^{\alpha_2} e^{\frac{x}{m}t+\frac{y}{m}t^2}\\
&\cdots\left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t - a^b e^{-t}}\right)^{\alpha_m} e^{\frac{x}{m}t+\frac{y}{m}t^2}\\
=&\sum_{n=0}^{\infty} {}_H\tilde{R}_{i_1,\beta}^{(\alpha_1)}\left(\frac{x}{m},\frac{y}{m};k,a,b\right)\frac{t^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty} {}_H\tilde{R}_{i_2,\beta}^{(\alpha_2)}\left(\frac{x}{m},\frac{y}{m};k,a,b\right)\frac{t^n}{n!}\\
&\cdots\sum_{n=0}^{\infty} {}_H\tilde{R}_{i_m,\beta}^{(\alpha_m)}\left(\frac{x}{m},\frac{y}{m};k,a,b\right)\frac{t^n}{n!}\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\substack{i_1\geq 0,\cdots,i_m\geq 0\\ i_1+i_2+\cdots+i_m=n}}\frac{n!}{i_1!\cdots i_m!}\ {}_H\tilde{R}_{i_1,\beta}^{(\alpha_1)}\left(\frac{x}{m},\frac{y}{m};k,a,b\right)\\
&{}_H\tilde{R}_{i_2,\beta}^{(\alpha_2)}\left(\frac{x}{m},\frac{y}{m};k,a,b\right)\cdot\cdots\cdot{}_H\tilde{R}_{i_m,\beta}^{(\alpha_m)}\left(\frac{x}{m},\frac{y}{m};k,a,b\right)\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

olur. Katsayılar karşılaştırılırsa istenilen elde edilir. □

Teorem 4.60. *$n \geq k$ olmak üzere, Hermite-tabanlı 2. tip unified Apostol-Bernoulli tipli polinomları arasında aşağıdaki eşitlik vardır.*

$$\begin{aligned}
{}_H\tilde{R}_{n-k,\beta}^{(\alpha)}(x,y;k,a,b) &= \frac{(n-k)!}{2^{1-k}n!}\Big\{\beta^b\ {}_H\tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha+1)}(x+1,y;k,a,b)\\
&\quad -a^b\ {}_H\tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha+1)}(x-1,y;k,a,b)\Big\}.
\end{aligned}$$

İspat

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} {}_H\tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha)}(x,y;k,a,b)\ \frac{t^n}{n!}\\
=&\left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t - a^b e^{-t}}\right)^{\alpha} e^{xt+yt^2}\frac{\left(\beta^b e^t - a^b e^{-t}\right)}{\left(\beta^b e^t - a^b e^{-t}\right)}\frac{2^{1-k}t^k}{2^{1-k}t^k}\\
=&\frac{1}{2^{1-k}t^k}\beta^b\left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t - a^b e^{-t}}\right)^{\alpha+1} e^{(x+1)t+yt^2}\\
&-\frac{1}{2^{1-k}t^k}a^b\left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t - a^b e^{-t}}\right)^{\alpha+1} e^{(x-1)t+yt^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\beta^b}{2^{1-k}t^k}\sum_{n=0}^{\infty} {}_H\tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha+1)}(x+1,y;k,a,b)\ \frac{t^n}{n!} \\
&\quad -\frac{a^b}{2^{1-k}t^k}\sum_{n=0}^{\infty} {}_H\tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha+1)}(x-1,y;k,a,b)\ \frac{t^n}{n!}. \\
&\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{1-k}}\left(\beta^b\ {}_H\tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha+1)}(x+1,y;k,a,b) - a^b\ {}_H\tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha+1)}(x-1,y;k,a,b)\right)\frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} {}_H\tilde{R}_{n-k,\beta}^{(\alpha)}(x,y;k,a,b)\ \frac{t^n}{(n-k)!}\frac{n!}{n!}
\end{aligned}
$$

olur. Katsayılar karşılaştırılırsa istenilen elde edilir. □

Teorem 4.61. *Hermite-tabanlı 2. tip unified Apostol-Bernoulli tipli polinomları ile 2. tip Hermite-tabanlı Euler polinomları arasında*

$$
\begin{aligned}
&2\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\ {}_H\tilde{R}_{r,\beta}^{(\alpha)}(x+p,y+q;k,a,b) \\
&= \sum_{j=0}^{n}\sum_{m=0}^{j}\binom{n}{j}\binom{j}{m}2^{n-j}\ {}_H\tilde{R}_{m,\beta}^{(\alpha)}(x,y;k,a,b)\ {}_HE_{j-m}(p,q) \\
&\quad -\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\ {}_H\tilde{R}_{j,\beta}^{(\alpha)}(x,y;k,a,b)\ {}_HE_{n-j}(p,q)
\end{aligned}
$$

bağıntısı vardır.

İspat

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} {}_H\tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha)}(x+p,y+q;k,a,b)\frac{t^n}{n!} \\
&= \left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t - a^b e^{-t}}\right)^{\alpha} e^{(x+p)t+(y+p)t^2} \\
&= \left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b e^t - a^b e^{-t}}\right)^{\alpha} e^{xt+yt^2}e^{pt+qt^2}\frac{2}{e^t-e^{-t}}\frac{e^t-e^{-t}}{2}\frac{e^t}{e^t} \\
&= \frac{1}{2e^t}\sum_{n=0}^{\infty} {}_H\tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha)}(x,y;k,a,b)\frac{t^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty} {}_HE_n(p,q)\frac{t^n}{n!}\left(e^{2t}-1\right) \\
&\quad \sum_{n=0}^{\infty} {}_H\tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha)}(x+p,y+q;k,a,b)\frac{t^n}{n!}2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} {}_H\tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha)}(x,y;k,a,b)\frac{t^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty} {}_HE_n(p,q)\frac{t^n}{n!}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n t^n}{n!}-1\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\,{}_H\tilde{R}^{(\alpha)}_{m,\beta}(x,y;k,a,b)\;\,{}_HE_{n-m}(p,q)\,\frac{t^n}{n!}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n t^n}{n!}-1\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}\sum_{m=0}^{j}\binom{n}{j}\binom{j}{m}2^{n-j}\,{}_H\tilde{R}^{(\alpha)}_{m,\beta}(x,y;k,a,b)\;\,{}_HE_{j-m}(p,q)\,\frac{t^n}{n!}\\
&\quad -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\,{}_H\tilde{R}^{(\alpha)}_{m,\beta}(x,y;k,a,b)\;\,{}_HE_{n-m}(p,q)\,\frac{t^n}{n!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}2\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\,{}_H\tilde{R}^{(\alpha)}_{r,\beta}(x+p,y+q;k,a,b)\,\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}
$$

olur. Katsayılar karşılaştırılırsa istenilen sonuç elde edilir. □

4.5. Dejenere 2. Tip Unified Apostol-Bernoulli Tipli Polinomlar

Bu bölümde, 4.1 bölümünde tanımladığımız 2. tip unified Apostol-Bernoulli tipli polinomunun dejenere durumunu inceleyeceğiz.

Tanım 4.62. *Dejenere 2. tip unified Apostol-Bernoulli tipli polinomları*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{R}^{(\alpha)}_{n,\beta,\lambda}(x;k,a,b)\,\frac{t^n}{n!}=\left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-a^b(1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}}}\right)^{\alpha}(1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlayalım. Burada $x=0$ *alınırsa*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{R}^{(\alpha)}_{n,\beta,\lambda}(0;k,a,b)\,\frac{t^n}{n!}=\left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-a^b(1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}}}\right)^{\alpha}$$

dejenere 2. tip unified Apostol-Bernoulli tipli sayılar elde edilir ve $\tilde{R}^{(\alpha)}_{n,\beta,\lambda}(0;k,a,b)=\tilde{R}^{(\alpha)}_{n,\beta,\lambda}(k,a,b)$ *olarak gösterilir.*

Tanımdan

$$\lim_{\lambda\to 0}\tilde{R}^{(\alpha)}_{n,\beta,\lambda}(x;k,a,b)=\tilde{R}^{(\alpha)}_{n,\beta}(x;k,a,b)$$

ve

$$\lim_{\lambda\to 0}\tilde{R}^{(\alpha)}_{n,\beta,\lambda}(k,a,b)=\tilde{R}^{(\alpha)}_{n,\beta}(k,a,b)$$

olduğu görülür.

Teorem 4.63. *Aşağıdaki eşitlik sağlanır.*

$$
\begin{aligned}
&\tilde{R}^{(\alpha)}_{n,\beta,\lambda}(x+y;k,a,b)+\tilde{R}^{(\alpha)}_{n,\beta,\lambda}(x+z;k,a,b) \qquad (4.13)\\
&= \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\tilde{R}^{(\alpha)}_{n-m,\beta,\lambda}(x;k,a,b)\left((y\mid\lambda)_m+(z\mid\lambda)_m\right).
\end{aligned}
$$

İspat

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\left(\tilde{R}^{(\alpha)}_{n,\beta,\lambda}(x+y;k,a,b)+\tilde{R}^{(\alpha)}_{n,\beta,\lambda}(x+z;k,a,b)\right)\frac{t^n}{n!}\\
=&\left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-a^b(1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}}}\right)^{\alpha}(1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}}(1+\lambda t)^{\frac{y}{\lambda}}\\
&+\left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-a^b(1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}}}\right)^{\alpha}(1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}}(1+\lambda t)^{\frac{z}{\lambda}}\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{R}^{(\alpha)}_{n,\beta,\lambda}(x;k,a,b)\frac{t^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}\left((y\mid\lambda)_n+(z\mid\lambda)_n\right)\frac{t^n}{n!}\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\tilde{R}^{(\alpha)}_{n-m,\beta,\lambda}(x;k,a,b)\left((y\mid\lambda)_m+(z\mid\lambda)_m\right)\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

olur. Katsayılar karşılaştırılırsa istenilen elde edilir. □

Teorem 4.64. $x=x_1+x_2+\cdots+x_p$ *olmak üzere dejenere 2. tip unified Apostol-Bernoulli tipli polinomları aşağıdaki eşitliği sağlar.*

$$\begin{aligned}
\tilde{R}^{(\alpha)}_{n,\beta,\lambda}(x;k,a,b) &= \tilde{R}^{(\alpha)}_{n,\beta,\lambda}(x_1+x_2+\cdots+x_p;k,a,b)\\
&=\sum_{m_p=0}^{n}\sum_{m_{p-1}=0}^{m_p}\cdots\sum_{m_1=0}^{m_2}\binom{n}{m_p}\binom{m_p}{m_{p-1}}\cdots\binom{m_2}{m_1}\\
&\quad\tilde{R}^{(\alpha)}_{m_1,\beta,\lambda}(0;k,a,b)(x_1\mid\lambda)_{m_2-m_1}(x_2\mid\lambda)_{m_3-m_2}\\
&\quad\cdots(x_{p-1}\mid\lambda)_{m_p-m_{p-1}}(x_p\mid\lambda)_{n-m_p}.
\end{aligned}$$

İspat p üzerinden tümevarım yöntemini kullanalım.

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{R}^{(\alpha)}_{n,\beta,\lambda}(x_1;k,a,b)\frac{t^n}{n!}\\
=&\left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-a^b(1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}}}\right)^{\alpha}(1+\lambda t)^{\frac{x_1}{\lambda}}\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m_1=0}^{n}\binom{n}{m_1}\tilde{R}^{(\alpha)}_{m_1,\beta,\lambda}(0;k,a,b)(x_1\mid\lambda)_{n-m_1}\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

$$\tilde{R}^{(\alpha)}_{n,\beta,\lambda}(x_1;k,a,b)=\sum_{m_1=0}^{n}\binom{n}{m_1}\tilde{R}^{(\alpha)}_{m_1,\beta,\lambda}(0;k,a,b)(x_1\mid\lambda)_{n-m_1}.$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{R}^{(\alpha)}_{n,\beta,\lambda}\left(x_1+x_2;k,a,b\right)\frac{t^n}{n!}\\
&= \left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b\left(1+\lambda t\right)^{\frac{1}{\lambda}}-a^b\left(1+\lambda t\right)^{-\frac{1}{\lambda}}}\right)^{\alpha}\left(1+\lambda t\right)^{\frac{x_1}{\lambda}}\left(1+\lambda t\right)^{\frac{x_2}{\lambda}}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m_1=0}^{n}\binom{n}{m_1}\tilde{R}^{(\alpha)}_{m_1,\beta,\lambda}\left(0;k,a,b\right)\left(x_1\mid\lambda\right)_{n-m_1}\frac{t^n}{n!}\sum_{s=0}^{\infty}\left(x_2\mid\lambda\right)_s\frac{t^s}{s!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{n}\sum_{m_1=0}^{m_2}\binom{n}{m_2}\binom{m_2}{m_1}\tilde{R}^{(\alpha)}_{m_1,\beta,\lambda}\left(0;k,a,b\right)\left(x_1\mid\lambda\right)_{m_2-m_1}\left(x_2\mid\lambda\right)_{n-m_2}\frac{t^n}{n!}\\
&\tilde{R}^{(\alpha)}_{n,\beta,\lambda}\left(x_1+x_2;k,a,b\right)\\
&= \sum_{m_2=0}^{n}\sum_{m_1=0}^{m_2}\binom{n}{m_2}\binom{m_2}{m_1}\tilde{R}^{(\alpha)}_{m_1,\beta,\lambda}\left(0;k,a,b\right)\left(x_1\mid\lambda\right)_{m_2-m_1}\left(x_2\mid\lambda\right)_{n-m_2}.
\end{aligned}
$$

p için doğru olsun.

$$
\begin{aligned}
&\tilde{R}^{(\alpha)}_{n,\beta,\lambda}\left(x_1+x_2+\cdots+x_p;k,a,b\right)\\
&= \sum_{m_p=0}^{n}\sum_{m_{p-1}=0}^{m_p}\cdots\sum_{m_1=0}^{m_2}\binom{n}{m_p}\binom{m_p}{m_{p-1}}\cdots\binom{m_2}{m_1}\\
&\tilde{R}^{(\alpha)}_{m_1,\beta,\lambda}\left(0;k,a,b\right)\left(x_1\mid\lambda\right)_{m_2-m_1}\left(x_2\mid\lambda\right)_{m_3-m_2}\cdots\left(x_{p-1}\mid\lambda\right)_{m_p-m_{p-1}}\left(x_p\mid\lambda\right)_{n-m_p}
\end{aligned}
$$

$p+1$ için görelim.

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{R}^{(\alpha)}_{n,\beta,\lambda}\left(x_1+x_2+\cdots+x_p+x_{p+1};k,a,b\right)\frac{t^n}{n!}\\
&= \left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b\left(1+\lambda t\right)^{\frac{1}{\lambda}}-a^b\left(1+\lambda t\right)^{-\frac{1}{\lambda}}}\right)^{\alpha}\left(1+\lambda t\right)^{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_p}{\lambda}}\left(1+\lambda t\right)^{\frac{x_{p+1}}{\lambda}}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m_p=0}^{n}\sum_{m_{p-1}=0}^{m_p}\cdots\sum_{m_1=0}^{m_2}\binom{n}{m_p}\binom{m_p}{m_{p-1}}\cdots\binom{m_2}{m_1}\\
&\quad\tilde{R}^{(\alpha)}_{m_1,\beta,\lambda}\left(0;k,a,b\right)\left(x_1\mid\lambda\right)_{m_2-m_1}\left(x_2\mid\lambda\right)_{m_3-m_2}\\
&\quad\cdots\left(x_{p-1}\mid\lambda\right)_{m_p-m_{p-1}}\left(x_p\mid\lambda\right)_{n-m_p}\frac{t^n}{n!}\sum_{s=0}^{\infty}\left(x_{p+1}\mid\lambda\right)_s\frac{t^s}{s!}\\
&\quad\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m_{p+1}=0}^{n}\sum_{m_p=0}^{m_{p+1}}\cdots\sum_{m_1=0}^{m_2}\binom{n}{m_{p+1}}\binom{m_{p+1}}{m_p}\binom{m_p}{m_{p-1}}\cdots\binom{m_2}{m_1}\\
&\quad\tilde{R}^{(\alpha)}_{m_1,\beta,\lambda}\left(0;k,a,b\right)\left(x_1\mid\lambda\right)_{m_2-m_1}\left(x_2\mid\lambda\right)_{m_3-m_2}\\
&\quad\cdots\left(x_p\mid\lambda\right)_{m_{p-1}-m_p}\left(x_{p+1}\mid\lambda\right)_{n-m_{p+1}}\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu ise tümevarımı tamamlar. □

Teorem 4.65. *$v \in \mathbb{N}$, $n \geq kv$ olmak üzere, dejenere 2. tip unified Apostol-Bernoulli tipli polinomları ile modified dejenere 2. tip Stirling sayıları arasında aşağıdaki eşitlik vardır.*

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{n-kv} \binom{n-kv}{m} \tilde{R}_{m,\beta,\lambda}^{(\alpha-v)}(x;k,a,b)\,(v \mid \lambda)_{n-kv-m}\,\frac{2^{(1-k)v}n!}{(n-kv)!v!} \\ = & \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} 2^{n-m} \tilde{R}_{m,\beta,\lambda}^{(\alpha)}(x;k,a,b)\,S_{2,\lambda}(n-m,v,a,b,\beta)\,. \end{aligned}$$

İspat

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{R}_{n,\beta,\lambda}^{(\alpha-v)}(x;k,a,b)\,\frac{t^n}{n!} \\ = & \left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} - a^b(1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}}}\right)^{\alpha} (1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}} \left(\frac{\beta^b(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} - a^b(1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}}}{2^{1-k}t^k}\right)^{v} \\ = & \left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} - a^b(1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}}}\right)^{\alpha} (1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}} \frac{1}{2^{(1-k)v}t^{kv}} \frac{\left(\beta^b(1+\lambda t)^{\frac{2}{\lambda}} - a^b\right)^{v}}{(1+\lambda t)^{\frac{v}{\lambda}}}. \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{R}_{n,\beta,\lambda}^{(\alpha-v)}(x;k,a,b)\,\frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} (v \mid \lambda)_n \frac{t^n}{n!} 2^{(1-k)v}t^{kv} \\ = & 2^{(1-k)v}t^{kv} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \tilde{R}_{m,\beta,\lambda}^{(\alpha-v)}(x;k,a,b)\,(v \mid \lambda)_{n-m}\,\frac{t^n}{n!} \\ = & v! \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{R}_{n,\beta,\lambda}^{(\alpha)}(x;k,a,b)\,\frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n S_{2,\lambda}(n,v,a,b,\beta)\,\frac{t^n}{n!} \\ = & v! \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} 2^{n-m} \tilde{R}_{m,\beta,\lambda}^{(\alpha)}(x;k,a,b)\,S_{2,\lambda}(n-m,v,a,b,\beta)\,\frac{t^n}{n!} \\ = & 2^{(1-k)v} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \tilde{R}_{m,\beta,\lambda}^{(\alpha-v)}(x;k,a,b)\,(v \mid \lambda)_{n-m}\,\frac{t^{n+kv}}{n!} \\ = & 2^{(1-k)v} \sum_{n=kv}^{\infty}\sum_{m=0}^{n-kv} \binom{n-kv}{m} \tilde{R}_{m,\beta,\lambda}^{(\alpha-v)}(x;k,a,b)\,(v \mid \lambda)_{n-kv-m}\,\frac{t^n}{(n-kv)!}\frac{n!}{n!} \\ = & v! \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} 2^{n-m} \tilde{R}_{m,\beta,\lambda}^{(\alpha)}(x;k,a,b)\,S_{2,\lambda}(n-m,v,a,b,\beta)\,\frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

olur. Katsayılar karşılaştırılırsa istenen eşitlik elde edilir. □

Teorem 4.66. *Aşağıdaki eşitlik sağlanır.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left((4 \mid \lambda)_n - 2\,(2 \mid \lambda)_n - 2^{n+1}S_2(n,2,1,b,1)\right)\frac{t^n}{n!} = -1.$$

İspat

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{R}^{(2)}_{n,1,\lambda}(0;k,1,b)\frac{t^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{R}^{(-2)}_{n,1,\lambda}(0;k,1,b)\frac{t^n}{n!} &= 1\\ \frac{\left(2^{1-k}t^k\right)^2}{\left(1^b(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-1^b(1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}}\right)^2}\frac{\left(1^b(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-1^b(1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}}\right)^2}{\left(2^{1-k}t^k\right)^2} &= 1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1+\lambda t)^{\frac{2}{\lambda}}-2+(1+\lambda t)^{\frac{-2}{\lambda}} &= \frac{\left((1+\lambda t)^{\frac{2}{\lambda}}-1\right)^2}{(1+\lambda t)^{\frac{2}{\lambda}}}\\ (1+\lambda t)^{\frac{4}{\lambda}}-2(1+\lambda t)^{\frac{2}{\lambda}}+1 &= 2!\sum_{n=0}^{\infty}S_2(n,2,1,b,1)\frac{2^n t^n}{n!}\\ \sum_{n=0}^{\infty}\left((4\mid\lambda)_n-2(2\mid\lambda)_n-2^{n+1}S_2(n,2,1,b,1)\right)\frac{t^n}{n!} &= -1\end{aligned}$$

elde edilir. □

Tanım 4.67. *Bir kez dejenere 2. tip unified Apostol-Bernoulli tipli polinomlarını aşağıdaki şekilde tanımlayalım.*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{R}^{(\alpha)}_{n,\beta,\lambda}(x;k,a,b)\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}{}^{1}\tilde{R}^{(\alpha)}_{n,\beta,\lambda}(x;k,a,b)\frac{t^n}{n!} \tag{4.14}$$

m defa dejenere edilmiş 2. tip unified Apostol-Bernoulli tipli polinomunu ise ${}^{m}\tilde{R}^{(\alpha)}_{n_{k+1},\beta,\lambda}(x;k,a,b)$ olarak gösterelim.

Teorem 4.68. *$n_{i+1}>n_i\geq 0$, $i=1,\cdots,m+1$ için, 1. tip Stirling sayısı ile dejenere 2. tip unified Apostol-Bernoulli tipli polinomları arasında*

$${}^{m}\tilde{R}^{(\alpha)}_{n_{m+1},\beta,\lambda}(x;k,a,b)=\sum_{n_m=0}^{n_{m+1}}\cdots\sum_{n_2=0}^{n_3}\lambda^{n_{m+1}-n_2}\left(\prod_{j=1}^{k-1}S_1(n_{j+1},n_j)\right){}^{1}\tilde{R}^{(\alpha)}_{n_2,\beta,\lambda}(x;k,a,b)$$

bağıntısı vardır.

İspat (4.14) eşitliğinde t yerine $log\left(1+\lambda t\right)^{\frac{1}{\lambda}}$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{n_2=0}^{\infty} {}^{2}\tilde{R}_{n_2,\beta,\lambda}^{(\alpha)}\left(x;k,a,b\right)\frac{t^{n_2}}{n_2!} &= \sum_{n_2=0}^{\infty} {}^{1}\tilde{R}_{n_1,\beta,\lambda}^{(\alpha)}\left(x;k,a,b\right)\frac{\left(log\left(1+\lambda t\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right)^{n_1}}{n_1!} \\
&= \sum_{n_1=0}^{\infty} {}^{1}\tilde{R}_{n_1,\beta,\lambda}^{(\alpha)}\left(x;k,a,b\right)\lambda^{n_2-n_1}\sum_{n_2=n_1}^{\infty} S_1\left(n_2,n_1\right)\frac{t^{n_2}}{n_2!} \\
&= \sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{n_2} {}^{1}\tilde{R}_{n_1,\beta,\lambda}^{(\alpha)}\left(x;k,a,b\right)\lambda^{n_2-n_1}S_1\left(n_2,n_1\right)\frac{t^{n_2}}{n_2!} \\
{}^{2}\tilde{R}_{n_2,\beta,\lambda}^{(\alpha)}\left(x;k,a,b\right) &= \sum_{n_1=0}^{n_2} {}^{1}\tilde{R}_{n_1,\beta,\lambda}^{(\alpha)}\left(x;k,a,b\right)\lambda^{n_2-n_1}S_1\left(n_2,n_1\right)
\end{aligned}$$

aynı işemleri tekrar edersek

$$\begin{aligned}
{}^{3}\tilde{R}_{n_2,\beta,\lambda}^{(\alpha)}\left(x;k,a,b\right) &= \sum_{n_2=0}^{n_3} {}^{2}\tilde{R}_{n_2,\beta,\lambda}^{(\alpha)}\left(x;k,a,b\right)\lambda^{n_3-n_2}S_1\left(n_3,n_2\right) \\
&= \sum_{n_2=0}^{n_3}\sum_{n_1=0}^{n_2}\lambda^{n_3-n_1}S_1\left(n_3,n_2\right)S_1\left(n_2,n_1\right)^{1}\tilde{R}_{n_1,\beta,\lambda}^{(\alpha)}\left(x;k,a,b\right) \\
&\cdots \\
{}^{m}\tilde{R}_{n_m,\beta,\lambda}^{(\alpha)}\left(x;k,a,b\right) &= \sum_{n_{m-1}=0}^{n_m}\cdots\sum_{n_1=0}^{n_2}\lambda^{n_m-n_1}\left(\prod_{j=1}^{k-1}S_1\left(n_{j+1},n_j\right)\right){}^{1}\tilde{R}_{n_2,\beta,\lambda}^{(\alpha)}\left(x;k,a,b\right).
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 4.69. *$j\in\mathbb{N}$ olmak üzere,*

$$\cos_{\lambda}^{y}\left(t\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\lambda^{n-2j}\left(-1\right)^{j}y^{2j}S_1\left(m,2j\right)\right)\frac{t^n}{n!}$$

ve

$$\sin_{\lambda}^{y}\left(t\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\lambda^{n-2j-1}\left(-1\right)^{j}y^{2j+1}S_1\left(m,2j+1\right)\right)\frac{t^n}{n!}$$

bağıntısı vardır (Kim vd. 2019c).

Teorem 4.70. *$k\in\mathbb{N}$ olmak üzere,*

$$\tilde{R}_{n,\beta,\lambda}^{(c,\alpha)}\left(x,y;k,a,b\right)=\sum_{m=0}^{n}\sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\binom{n}{m}\lambda^{m-2j}\left(-1\right)^{j}y^{2j}S_1\left(m,2j\right)\tilde{R}_{n-m,\beta,\lambda}^{(\alpha)}\left(x;k,a,b\right)$$

eşitliği vardır.

İspat

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{R}_{n,\beta,\lambda}^{(c,\alpha)}(x;k,a,b)\frac{t^n}{n!} \\
&= \left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} - a^b(1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}}}\right)^{\alpha}(1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}}\cos_{\lambda}^{y} t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{R}_{n,\beta,\lambda}^{(\alpha)}(x;k,a,b)\frac{t^n}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\lambda^{m-2j}(-1)^j y^{2j} S_1(m,2j)\frac{t^m}{m!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\binom{n}{m}\lambda^{m-2j}(-1)^j y^{2j} S_1(m,2j)\tilde{R}_{n-m,\beta,\lambda}^{(\alpha)}(x;k,a,b)\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

olur. Katsayılar karşılaştırırlırsa istenilen elde edilir. □

Sonuç 4.71. $k = a = b = \beta = \alpha = 1$ *alınırsa,* $\tilde{R}_{n,1}^{(1)}(x;1,1,1) = \tilde{B}_n(x)$ *sağlanır. O halde*

$$\tilde{R}_{n,1,\lambda}^{(c,1)}(x,y;1,1,1) = \sum_{m=0}^{n}\sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\binom{n}{m}\lambda^{m-2j}(-1)^j y^{2j} S_1(m,2j)\tilde{R}_{n-m,1,\lambda}^{(1)}(x;1,1,1)$$

ve

$$\tilde{B}_{n,\lambda}^{(c)}(x,y) = \sum_{m=0}^{n}\sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\binom{n}{m}\lambda^{m-2j}(-1)^j y^{2j} S_1(m,2j)\tilde{B}_{n-m,\lambda}(x)$$

elde edilir. Bu bağıntı (Kim vd. 2019d) makalesindeki Teorem 2.2' yi verir.

Teorem 4.72. $k \in \mathbb{N}$ *olmak üzere,*

$$\begin{aligned}
&\tilde{R}_{n,\beta,\lambda}^{(\alpha)}(x;k,a,b) \\
&= \sum_{m=0}^{n}\sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\binom{n}{m}\lambda^{m-2j}(-1)^j y^{2j} S_1(m,2j)\tilde{R}_{n-m,\beta,\lambda}^{(c,\alpha)}(x,y;k,a,b) \\
&\quad + \sum_{m=1}^{n+1}\sum_{j=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\binom{n+1}{m}\lambda^{m-2j-1}(-1)^j y^{2j+1} S_1(m,2j+1)\tilde{R}_{n+1-m,\beta,\lambda}^{(s,\alpha)}(x,y;k,a,b)
\end{aligned}$$

eşitliği vardır.

İspat

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{R}^{(\alpha)}_{n,\beta,\lambda}(x;k,a,b)\frac{t^n}{n!} \\
&= \left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} - a^b(1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}}}\right)^{\alpha}(1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}}\left((\cos_\lambda^y t)^2 + (\sin_\lambda^y t)^2\right) \\
&= \left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} - a^b(1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}}}\right)^{\alpha}(1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}}(\cos_\lambda^y t)^2 \\
&\quad + \left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} - a^b(1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}}}\right)^{\alpha}(1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}}(\sin_\lambda^y t)^2
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} - a^b(1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}}}\right)^{\alpha}(1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}}(\cos_\lambda^y t)^2 \\
&= \left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} - a^b(1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}}}\right)^{\alpha}(1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}}(\cos_\lambda^y t)(\cos_\lambda^y t) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\tilde{R}^{(c,\alpha)}_{n,\beta,\lambda}(x,y;k,a,b)\frac{t^n}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\lambda^{m-2j}(-1)^j y^{2j}S_1(m,2j)\frac{t^m}{m!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\binom{n}{m}\lambda^{m-2j}(-1)^j y^{2j}S_1(m,2j)\tilde{R}^{(c,\alpha)}_{n-m,\beta,\lambda}(x,y;k,a,b)\frac{t^n}{n!} \\
&\left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} - a^b(1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}}}\right)^{\alpha}(1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}}(\sin_\lambda^y t)^2 \\
&= \left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}} - a^b(1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}}}\right)^{\alpha}(1+\lambda t)^{\frac{x}{\lambda}}(\sin_\lambda^y t)(\sin_\lambda^y t) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\tilde{R}^{(s,\alpha)}_{n,\beta,\lambda}(x,y;k,a,b)\frac{t^n}{n!}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\lambda^{m-2j-1}(-1)^j y^{2j+1}S_1(m,2j+1)\frac{t^m}{m!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\sum_{j=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\binom{n}{m}\lambda^{m-2j-1}(-1)^j y^{2j+1}S_1(m,2j+1)\tilde{R}^{(s,\alpha)}_{n-m,\beta,\lambda}(x,y;k,a,b)\frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{n+1}\sum_{j=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\binom{n+1}{m}\lambda^{m-2j-1}(-1)^j y^{2j+1}S_1(m,2j+1)\tilde{R}^{(s,\alpha)}_{n+1-m,\beta,\lambda}(x,y;k,a,b)\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{R}_{n,\beta,\lambda}^{(\alpha)}(x;k,a,b)\frac{t^n}{n!}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\binom{n}{m}\lambda^{m-2k}(-1)^k y^{2k}S_1(m,2k)\,\tilde{R}_{n-m,\beta,\lambda}^{(c,\alpha)}(x,y;k,a,b)\frac{t^n}{n!}\\
&\quad+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{n+1}\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\binom{n+1}{m}\lambda^{m-2k-1}(-1)^k y^{2k+1}S_1(m,2k+1)\,\tilde{R}_{n+1-m,\beta,\lambda}^{(s,\alpha)}(x,y;k,a,b)\frac{t^n}{n!}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{m=0}^{n}\sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\binom{n}{m}\lambda^{m-2j}(-1)^j y^{2j}S_1(m,2j)\,\tilde{R}_{n-m,\beta,\lambda}^{(c,\alpha)}(x,y;k,a,b)\right.\\
&\quad\left.+\sum_{m=1}^{n+1}\sum_{j=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\binom{n+1}{m}\lambda^{m-2j-1}(-1)^j y^{2j+1}S_1(m,2j+1)\,\tilde{R}_{n+1-m,\beta,\lambda}^{(s,\alpha)}(x,y;k,a,b)\right\}\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

olur. Eşitliğin her iki tarafındaki $\frac{t^n}{n!}$ katsayıları karşılaştırılırsa istenilen elde edilir. □

Teorem 4.73. *$N, n, m \in \mathbb{N}$ olmak üzere,*

$$\sum_{N=0}^{\infty}f(N)\frac{(x+y)^N}{N!}=\sum_{n,m=0}^{\infty}f(n+m)\frac{x^n}{n!}\frac{y^m}{m!} \tag{4.15}$$

eşitliği vardır (Srivastava ve Manocho 1984).

Teorem 4.74. *Dejenere 2. tip unified Apostol-Bernoulli tipli polinomları arasında aşağıdaki eşitlik vardır.*

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{n+m,\beta,\lambda}^{(\alpha)}(x;k,a,b) &= \sum_{p=0}^{n}\left\{\sum_{q=0}^{m}\binom{n}{p}\binom{m}{p}\lambda^{-(p+q)}(x-y)^{p+q}\right.\\
&\quad\left.(\log(1+\lambda))^{p+q}\,\tilde{R}_{n+m-p-q,\beta,\lambda}^{(\alpha)}(y;k,a,b)\right\}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

İspat Bu ispatı yaparken (4.15) bağıntısını kullanmalıyız.

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{2^{1-k}(t+u)^k}{\beta^b(1+\lambda)^{\frac{(t+u)}{\lambda}}-a^b(1+\lambda t)^{-\frac{(t+u)}{\lambda}}}\right)^{\alpha}(1+\lambda)^{\frac{x(t+u)}{\lambda}}\\
&=\left(\frac{2^{1-k}(t+u)^k}{\beta^b(1+\lambda)^{\frac{(t+u)}{\lambda}}-a^b(1+\lambda t)^{-\frac{(t+u)}{\lambda}}}\right)^{\alpha}e^{\frac{x(t+u)\log(1+\lambda)}{\lambda}}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\tilde{R}_{n+m,\beta,\lambda}^{(\alpha)}(x;k,a,b)\frac{u^m}{m!}\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\tilde{R}^{(\alpha)}_{n+m,\beta,\lambda}(x;k,a,b)\frac{u^m}{m!}\frac{t^n}{n!}\\
=&\left(\frac{2^{1-k}(t+u)^k}{\beta^b(1+\lambda)^{\frac{(t+u)}{\lambda}}-a^b(1+\lambda t)^{-\frac{(t+u)}{\lambda}}}\right)^{\alpha}e^{\frac{(x-y)(t+u)\log(1+\lambda)}{\lambda}}e^{\frac{y(t+u)\log(1+\lambda)}{\lambda}}\\
=&\ e^{\frac{(x-y)(t+u)\log(1+\lambda)}{\lambda}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\tilde{R}^{(\alpha)}_{n+m,\beta,\lambda}(y;k,a,b)\frac{u^m}{m!}\frac{t^n}{n!}\\
=&\sum_{N=0}^{\infty}\frac{((x-y)(t+u)\log(1+\lambda))^N}{\lambda^N N!}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\tilde{R}^{(\alpha)}_{n+m,\beta,\lambda}(y;k,a,b)\frac{u^m}{m!}\frac{t^n}{n!}\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(x-y)^{t+u}\log(1+\lambda)^{t+u}}{\lambda^{t+u}}\frac{u^m}{m!}\frac{t^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\tilde{R}^{(\alpha)}_{n+m,\beta,\lambda}(y;k,a,b)\frac{u^m}{m!}\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

olur. Cauchy çarpımı yapılarak katsayılar karşılaştırılırsa istenilen elde edilir. □

4.6. Hermite-Tabanlı Dejenere 2. Tip Unified Apostol-Bernoulli Tipli Polinomlar

Bu bölümde, 4.4 bölümünde tanımladığımız Hermite-tabanlı 2. tip unified Apostol-Bernoulli tipli polinomunun dejenere durumunu inceleyeceğiz.

Tanım 4.75. *Genelleştirilmiş 2. tip modified dejenere Hermite-tabanlı Apostol-Bernoulli polinomlarını*

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}_H\tilde{B}^{(\alpha)}_{n,\mu,\lambda}(x,y)\frac{t^n}{n!}=\left(\frac{t}{\mu(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-(1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}}}\right)^{\alpha}(1+\lambda t)^{\frac{x+yt}{\lambda}},\ \lambda,\ \mu\in\mathbb{R},$$

genelleştirilmiş 2. tip modified dejenere Hermite-tabanlı Apostol-Euler polinomlarını

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}_H\tilde{E}^{(\alpha)}_{n,\mu,\lambda}(x,y)\frac{t^n}{n!}=\left(\frac{2}{\mu(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}+(1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}}}\right)^{\alpha}(1+\lambda t)^{\frac{x+yt}{\lambda}},\ \lambda,\ \mu\in\mathbb{R}$$

ve genelleştirilmiş 2. tip modified dejenere Hermite-tabanlı Apostol-Genocchi polinomlarını

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}_H\tilde{G}^{(\alpha)}_{n,\mu,\lambda}(x,y)\frac{t^n}{n!}=\left(\frac{2t}{\mu(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}+(1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}}}\right)^{\alpha}(1+\lambda t)^{\frac{x+yt}{\lambda}},\ \lambda,\ \mu\in\mathbb{R}$$

şeklinde tanımlayalım.

Daha sonra bu polinomları tek bir polinom olarak gösterelim ve aşağıdaki Hermite-tabanlı dejenere 2. tip unified Apostol-Bernoulli tipli polinomlarını tanımlayalım.

Tanım 4.76. *Hermite-tabanlı dejenere 2. tip unified Apostol-Bernoulli tipli polinomu üreteç fonksiyonu ile*

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_H\tilde{R}^{(\alpha)}_{n,\beta,\lambda}(x,y;k,a,b)\frac{t^n}{n!}=\left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-a^b(1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}}}\right)^{\alpha}(1+\lambda t)^{\frac{x+yt}{\lambda}}$$

şeklinde tanımlayalım.

Tanımdan

$$\lim_{\lambda\to 0} {}_H\tilde{R}^{(\alpha)}_{n,\beta,\lambda}(x,y;k,a,b)= {}_H\tilde{R}^{(\alpha)}_{n,\beta}(x,y;k,a,b)$$

olduğu görülür.

$y=0$ alınırsa ${}_H\tilde{R}^{(\alpha)}_{n,\beta,\lambda}(x,0;k,a,b)=\tilde{R}^{(\alpha)}_{n,\beta,\lambda}(x;k,a,b)$,

$k=a=b=1$, $\beta=\mu$ alınırsa ${}_H\tilde{R}^{(\alpha)}_{n,\mu,\lambda}(x,y;1,1,1)={}_H\tilde{B}^{(\alpha)}_{n,\mu,\lambda}(x,y)$,

$k=0$, $-a=b=1$, $\beta=\mu$ alınırsa ${}_H\tilde{R}^{(\alpha)}_{n,\mu,\lambda}(x,y;0,1,1)={}_H\tilde{E}^{(\alpha)}_{n,\mu,\lambda}(x,y)$,

$k=b=1$, $a=\frac{-1}{2}$, $\beta=\frac{\mu}{2}$ alınırsa ${}_H\tilde{R}^{(\alpha)}_{n,\frac{\mu}{2},\lambda}\left(x,y;1,\frac{-1}{2},1\right)={}_H\tilde{G}^{(\alpha)}_{n,\mu,\lambda}(x,y)$

elde edilir.

Teorem 4.77. *$r,s\in\mathbb{N}_0$ ve $\beta\in\mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlik sağlanır.*

$${}_H\tilde{R}^{(r+s)}_{n,\beta,\lambda}(x+u,y+v;k,a,b)=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}{}_H\tilde{R}^{(r)}_{l,\beta,\lambda}(x,y;k,a,b)_H\,\tilde{R}^{(s)}_{n-l,\beta,\lambda}(u,v;k,a,b).$$

Ayrıca $k=a=b=1$, $\beta=\mu$ ise

$${}_H\tilde{B}^{(r+s)}_{n,\mu,\lambda}(x+u,y+v)=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}{}_H\tilde{B}^{(r)}_{l,\mu,\lambda}(x,y)_H\,\tilde{B}^{(s)}_{n-l,\mu,\lambda}(u,v),$$

$k=0$, $-a=b=1$, $\beta=\mu$ ise

$${}_H\tilde{E}^{(r+s)}_{n,\mu,\lambda}(x+u,y+v)=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}{}_H\tilde{E}^{(r)}_{l,\mu,\lambda}(x,y)_H\,\tilde{E}^{(s)}_{n-l,\mu,\lambda}(u,v),$$

$k=b=1$, $a=\frac{-1}{2}$, $\beta=\frac{\mu}{2}$ ise

$${}_H\tilde{G}^{(r+s)}_{n,\frac{\mu}{2},\lambda}(x+u,y+v)=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}{}_H\tilde{G}^{(r)}_{l,\frac{\mu}{2},\lambda}(x,y)\ {}_H\tilde{G}^{(s)}_{n-l,\frac{\mu}{2},\lambda}(u,v)$$

elde edilir.

İspat

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} {}_H\tilde{R}^{(r+s)}_{n,\beta,\lambda}(x+u,y+v;k,a,b)\frac{t^n}{n!}\\
&= \left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-a^b(1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}}}\right)^{r+s}(1+\lambda t)^{\frac{(x+u)+(y+v)t}{\lambda}}\\
&= \left\{\left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-a^b(1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}}}\right)^{r}(1+\lambda t)^{\frac{x+yt}{\lambda}}\right.\\
&\quad \left.\left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-a^b(1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}}}\right)^{s}(1+\lambda t)^{\frac{u+vt}{\lambda}}\right\}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} {}_H\tilde{R}^{(r)}_{n,\beta,\lambda}(x,y;k,a,b)\frac{t^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty} {}_H\tilde{R}^{(s)}_{n,\beta,\lambda}(u,v;k,a,b)\frac{t^n}{n!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l} {}_H\tilde{R}^{(r)}_{l,\beta,\lambda}(x,y;k,a,b)\ {}_H\tilde{R}^{(s)}_{n-l,\beta,\lambda}(x,y;k,a,b)\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

olur. Katsayılar karşılaştırılırsa istenilen elde edilir. □

Teorem 4.78. *Hermite-tabanlı dejenere 2. tip unified Apostol-Bernoulli tipli polinomları ile modified dejenere 2. tip Stirling sayıları arasında*

$$\begin{aligned}
{}_H\tilde{R}^{(\alpha-v)}_{n-kv,\beta,\lambda}(x,y;k,a,b) &= \frac{v!(n-kv)!}{n!2^{(1-k)v}}\sum_{r=0}^{n}\left\{\binom{n}{r}2^{n-r}\ {}_H\tilde{R}^{(\alpha)}_{r,\beta,\lambda}(x-v,y;k,a,b)\right.\\
&\quad \left. S_{2,\lambda}(n-r,v,a,b,\beta)\right\}
\end{aligned}$$

bağıntısı vardır. Ayrıca burada $y=0$ *ise*

$$\begin{aligned}
\tilde{R}^{(\alpha-v)}_{n-kv,\beta,\lambda}(x;k,a,b) &= \frac{v!(n-kv)!}{n!2^{(1-k)v}}\sum_{r=0}^{n}\left\{\binom{n}{r}2^{n-r}\ \tilde{R}^{(\alpha)}_{r,\beta,\lambda}(x-v;k,a,b)\right.\\
&\quad \left. S_{2,\lambda}(n-r,v,a,b,\beta)\right\}
\end{aligned}$$

$k=a=b=1$, $\beta=\mu$ *ise*

$${}_H\tilde{B}^{(\alpha-v)}_{n-kv,\mu,\lambda}(x,y)=\frac{v!(n-v)!}{n!}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}2^{n-r}\ {}_H\tilde{B}^{(\alpha)}_{r,\mu,\lambda}(x-v,y)\,S_{2,\lambda}(n-r,v,1,1,1),$$

$k=0$, $-a=b=1$, $\beta=\mu$ *ise*

$${}_H\tilde{E}^{(\alpha-v)}_{n-kv,\mu,\lambda}(x,y)=\frac{v!(n-v)!}{n!2^v}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}2^{n-r}\ {}_H\tilde{E}^{(\alpha)}_{r,\mu,\lambda}(x-v,y)\,S_{2,\lambda}(n-r,v,-1,1,1),$$

$k = b = 1, a = \frac{-1}{2}, \beta = \frac{\mu}{2}$ *ise*

$$ {}_H\tilde{G}^{(\alpha-v)}_{n-kv,\mu,\lambda}(x,y) = \frac{v!\,(n-v)!}{n!}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}2^{n-r}\,{}_H\tilde{G}^{(\alpha)}_{r,\mu,\lambda}(x-v,y)\,S_{2,\lambda}\left(n-r,v,\frac{-1}{2},1,\frac{1}{2}\right) $$

elde edilir.

İspat

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}{}_H\tilde{R}^{(\alpha-v)}_{n,\beta,\lambda}(x,y;k,a,b)\frac{t^n}{n!}\\
=&\left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-a^b(1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}}}\right)^{\alpha-v}(1+\lambda t)^{\frac{x+yt}{\lambda}}\\
=&\left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-a^b(1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}}}\right)^{\alpha}(1+\lambda t)^{\frac{x+yt}{\lambda}}\left(\frac{\beta^b(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-a^b(1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}}}{2^{1-k}t^k}\right)^{v}\\
=&\left(\frac{2^{1-k}t^k}{\beta^b(1+\lambda t)^{\frac{1}{\lambda}}-a^b(1+\lambda t)^{-\frac{1}{\lambda}}}\right)^{\alpha}(1+\lambda t)^{\frac{x-v+yt}{\lambda}}\frac{\left(\beta^b(1+\lambda t)^{\frac{2}{\lambda}}-a^b\right)^{v}}{2^{(1-k)v}t^{kv}}\\
&\sum_{n=0}^{\infty}{}_H\tilde{R}^{(\alpha-v)}_{n,\beta,\lambda}(x,y;k,a,b)\frac{t^{n+kv}}{n!}\\
=&\frac{v!}{2^{(1-k)v}}\sum_{n=0}^{\infty}{}_H\tilde{R}^{(\alpha)}_{n,\beta,\lambda}(x-v,y;k,a,b)\frac{t^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}S(n,v,a,b,\beta)\,\frac{2^nt^n}{n!}\\
&\sum_{n=kv}^{\infty}{}_H\tilde{R}^{(\alpha-v)}_{n-kv,\beta,\lambda}(x,y;k,a,b)\frac{t^n}{(n-kv)!}\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{v!}{2^{(1-k)v}}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}2^{n-r}\,{}_H\tilde{R}^{(\alpha)}_{r,\beta,\lambda}(x-v,y;k,a,b)\,S(n-r,v,a,b,\beta)\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}
$$

olur. Katsayılar karşılaştırılırsa eşitlik elde edilir. □

4.7. 2. Tip Unified Dejenere Poli-Üstel Apostol-Bernoulli Tipli Polinomlar

Bu bölümde T. Kim ve D. S. Kim (2020) tarafından tanımlanan modified poli-üstel fonksiyon tanımı ve önceki bölümde tanımladığımız dejenere 2. tip unified Apostol-Bernoulli tipli polinomları tanımından yola çıkarak, 2. tip unified dejenere poli-üstel Apostol-Bernoulli tipli polinomlarını tanımlayacağız. Tanımladığımız bu polinomlara dair bazı özdeşlikler, rekürans bağıntıları ve teoremleri ifade edeceğiz.

Tanım 4.79. *2. tip unified poli-üstel Apostol-Bernoulli tipli polinomu üreteç fonksiyonu ile*

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_k\tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha)}(x;s,a,b)\frac{t^n}{n!} = \left(\frac{2^{1-s}\left(\mathrm{Ei}_k\left(\log\left(1+t\right)\right)\right)^s}{\beta^b e^t - a^b e^{-t}}\right)^{\alpha} e^{xt}$$

olarak tanımlayalım.

$k=1$ ise ${}_1\tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha)}(x;s,a,b) = \tilde{R}_{n,\beta}^{(\alpha)}(x;s,a,b)$ sağlanır.

$k=1$, $s=a=b=1$, $\beta=\lambda$ ise ${}_1\tilde{R}_{n,\lambda}^{(\alpha)}(x;1,1,1) = \tilde{B}_n^{(\alpha)}(x,\lambda)$ olur. Ayrıca $\alpha=\lambda=1$ ise ${}_1\tilde{R}_{n,1}^{(1)}(x;1,1,1) = \tilde{B}_n(x)$,

$k=1$, $s=0$, $a=-1$, $b=1$, $\beta=\lambda$ ise ${}_1\tilde{R}_{n,\lambda}^{(\alpha)}(x;0,-1,1) = \tilde{E}_n^{(\alpha)}(x,\lambda)$ olur. Ayrıca $\alpha=\lambda=1$ ise ${}_1\tilde{R}_{n,1}^{(1)}(x;0,1,1) = \tilde{E}_n(x)$,

$k=1$, $s=1$, $a=\frac{-1}{2}$, $b=1$, $\beta=\frac{\lambda}{2}$ ise ${}_1\tilde{R}_{n,\frac{\lambda}{2}}^{(\alpha)}\left(x;1,\frac{-1}{2},1\right) = \tilde{G}_n^{(\alpha)}(x,\lambda)$ olur. Ayrıca $\alpha=\lambda=1$ ise ${}_1\tilde{R}_{n,\frac{1}{2}}^{(1)}\left(x;1,\frac{-1}{2},1\right) = \tilde{G}_n(x)$

elde edilir.

Tanım 4.80. *2. tip unified dejenere poli-üstel Apostol-Bernoulli tipli polinomları*

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}_k\tilde{R}_{n,\beta,\lambda}^{(\alpha)}(x;s,a,b,c)\frac{t^n}{n!} = \left(\frac{2^{1-s}\left(\mathrm{Ei}_{k,\lambda}\left(\log_\lambda\left(1+t\right)\right)\right)^s}{\beta^b e_\lambda^t - a^b e_\lambda^{-t}}\right)^{\alpha} e_\lambda^t(x)$$

üreteç fonksiyonu ile ifade edelim.

$k=1$ ise ${}_1\tilde{R}_{n,\beta,\lambda}^{(\alpha)}(x;s,a,b) = \tilde{R}_{n,\beta,\lambda}^{(\alpha)}(x;s,a,b)$ sağlanır.

Teorem 4.81.

$${}_k\tilde{R}_{n,\beta,\lambda}^{(\alpha)}(x;s,a,b,c) = \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\ {}_k\tilde{R}_{l,\beta,\lambda}^{(\alpha)}(0;s,a,b,c)\left(x\mid\lambda\right)_{n-l}$$

eşitliği vardır.

İspat

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} {}_k\tilde{R}_{n,\beta,\lambda}^{(\alpha)}(x;s,a,b,c)\frac{t^n}{n!} &= \left(\frac{2^{1-s}\left(\mathrm{Ei}_{k,\lambda}\left(\log_\lambda\left(1+t\right)\right)\right)^s}{\beta^b e_\lambda^t - a^b e_\lambda^{-t}}\right)^{\alpha} e_\lambda^t(x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} {}_k\tilde{R}_{n,\beta,\lambda}^{(\alpha)}(0;s,a,b,c)\frac{t^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}\left(x\mid\lambda\right)_n\ \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\ {}_k\tilde{R}_{l,\beta,\lambda}^{(\alpha)}(0;s,a,b,c)\left(x\mid\lambda\right)_{n-l}\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

olur. Eşitliğin her iki tarafında katsayılar karşılaştırılırsa istenilen elde edilir. □

Teorem 4.82. *2. tip unified dejenere poli-üstel Apostol-Bernoulli tipli polinomları*

$$
\begin{aligned}
&{}_k\tilde{R}^{(\alpha)}_{n,\beta,\lambda}(x+y;s,a,b)+{}_k\tilde{R}^{(\alpha)}_{n,\beta,\lambda}(x+z;s,a,b) \qquad (4.17)\\
&=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}{}_k\tilde{R}^{(\alpha)}_{n-m,\beta,\lambda}(x;s,a,b)\left\{(y\mid\lambda)_m+(z\mid\lambda)_m\right\}
\end{aligned}
$$

eşitliğini sağlar.

İspat

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\left({}_k\tilde{R}^{(\alpha)}_{n,\beta,\lambda}(x+y;s,a,b)+{}_k\tilde{R}^{(\alpha)}_{n,\beta,\lambda}(x+z;s,a,b)\right)\frac{t^n}{n!}\\
&=\left(\frac{2^{1-s}\left(\mathrm{Ei}_{k,\lambda}\left(\log_\lambda(1+t)\right)\right)^s}{\beta^b e_\lambda(t)-a^b e^{-1}_\lambda(t)}\right)^{\alpha}e^{x+y}_\lambda(t)+\left(\frac{2^{1-s}\left(\mathrm{Ei}_{k,\lambda}\left(\log_\lambda(1+t)\right)\right)^s}{\beta^b e_\lambda(t)-a^b e^{-t}_\lambda}\right)^{\alpha}e^{x+z}_\lambda(t)\\
&=\left(\frac{2^{1-s}\left(\mathrm{Ei}_{k,\lambda}\left(\log_\lambda(1+t)\right)\right)^s}{\beta^b e_\lambda(t)-a^b e^{-t}_\lambda}\right)^{\alpha}e^{x}_\lambda(t)\left(e^{y}_\lambda(t)+e^{z}_\lambda(t)\right)\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}{}_k\tilde{R}^{(\alpha)}_{n,\beta,\lambda}(x;s,a,b)\frac{t^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(y\mid\lambda)_n+(z\mid\lambda)_n\right\}\frac{t^n}{n!}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}{}_k\tilde{R}^{(\alpha)}_{n-m,\beta,\lambda}(x;s,a,b)\left\{(y\mid\lambda)_m+(z\mid\lambda)_m\right\}\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}
$$

olur. Katsayıları karşılaştırılırsa istenilen eşitlik edilir. □

Sonuç 4.83. *(4.17) denkleminde $k=1$ alınırsa (4.13) bağıntısı elde edilir.*

Teorem 4.84.

$$
\begin{aligned}
{}_k\tilde{R}^{(\alpha m)}_{n,\beta,\lambda}(mx;s,a,b) &= \sum_{\substack{i_1\geq 0,\cdots,i_m\geq 0\\ i_1+i_2+\cdots+i_m=n}}\frac{n!}{i_1!\cdots i_m!}\;{}_k\tilde{R}^{(\alpha)}_{i_1,\beta,\lambda}(x;s,a,b)\;{}_k\tilde{R}^{(\alpha)}_{i_2,\beta,\lambda}(x;s,a,b)\\
&\quad\cdots\;{}_k\tilde{R}^{(\alpha)}_{i_m,\beta,\lambda}(x;s,a,b)
\end{aligned}
$$

bağıntısı vardır.

İspat $\sum_{n=0}^{\infty} {}_k\tilde{R}_{n,\beta,\lambda}^{(\alpha)}(x;s,a,b)\,\frac{t^n}{n!}$ serisinin m-ninci kuvvetini alalım.

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{n=0}^{\infty} {}_k\tilde{R}_{n,\beta,\lambda}^{(\alpha)}(x;s,a,b)\,\frac{t^n}{n!}\right)^m \\
&= \left(\frac{2^{1-s}\left(\mathrm{Ei}_{k,\lambda}\left(\log_\lambda(1+t)\right)\right)^s}{\beta^b e_\lambda^t - a^b e_\lambda^{-t}}\right)^{m\alpha} e_\lambda^{mx}(t) \\
&= \left(\frac{2^{1-s}\left(\mathrm{Ei}_{k,\lambda}\left(\log_\lambda(1+t)\right)\right)^s}{\beta^b e_\lambda^t - a^b e_\lambda^{-t}}\right)^{\alpha} e_\lambda^{x}(t) \left(\frac{2^{1-s}\left(\mathrm{Ei}_{k,\lambda}\left(\log_\lambda(1+t)\right)\right)^s}{\beta^b e_\lambda^t - a^b e_\lambda^{-t}}\right)^{\alpha} e_\lambda^{x}(t) \\
&\quad \cdots \left(\frac{2^{1-s}\left(\mathrm{Ei}_{k,\lambda}\left(\log_\lambda(1+t)\right)\right)^s}{\beta^b e_\lambda^t - a^b e_\lambda^{-t}}\right)^{\alpha} e_\lambda^{x}(t) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} {}_k\tilde{R}_{i_1,\beta,\lambda}^{(\alpha)}(x;s,a,b)\,\frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} {}_k\tilde{R}_{i_2,\beta,\lambda}^{(\alpha)}(x;s,a,b)\,\frac{t^n}{n!} \\
&\quad \cdots \sum_{n=0}^{\infty} {}_k\tilde{R}_{i_m,\beta,\lambda}^{(\alpha)}(x;s,a,b)\,\frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{i_1\geq 0,\cdots,i_m\geq 0 \\ i_1+i_2+\cdots+i_m=n}} \frac{n!}{i_1!\cdots i_m!}\, {}_k\tilde{R}_{i_1,\beta,\lambda}^{(\alpha)}(x;s,a,b)\; {}_k\tilde{R}_{i_2,\beta,\lambda}^{(\alpha)}(x;s,a,b) \\
&\quad \cdot \cdots \cdot {}_k\tilde{R}_{i_m,\beta,v}^{(\alpha)}(x;k,a,b)\,\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

olur. Katsayılar karşılaştırılırsa istenilen elde edilir.

Önteorem 4.85.

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{Ei}_{k,\lambda}\left(\log_\lambda(1+t)\right)\right)^m &= \sum_{j=1}^{\infty}\left\{\sum_{n=1}^{j} \sum_{\substack{i_{11}\geq i_2\geq\cdots\geq i_m\geq 1 \\ i_1+i_2+\cdots+i_m=n}} \frac{n!}{i_1!\cdots i_m!}\right. \\
&\qquad \left.\frac{1}{i_1^{k-1} i_2^{k-1}\cdots i_m^{k-1}} S_{1,\lambda}(j,n)\,\frac{t^j}{j!}\right\}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

bağıntısı vardır.

□

İspat

$$
\begin{aligned}
&\left(\mathrm{Ei}_{k,\lambda}\left(\log_\lambda\left(1+t\right)\right)\right)^m \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\log_\lambda(1+t)^n\right.}{(n-1)!n^k}\frac{n}{n}\right)^m \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\log_\lambda\left(1+t\right)\right)^n}{n!n^{k-1}}\right)\cdots\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\log_\lambda\left(1+t\right)\right)^n}{n!n^{k-1}}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{i_1\geq i_2\geq\cdots\geq i_m\geq 1\\ i_1+i_2+\cdots+i_m=n}}\frac{1}{i_1!\cdots i_m!}\,\frac{\left(\log_\lambda\left(1+t\right)\right)^{i_1}\cdots\left(\log_\lambda\left(1+t\right)\right)^{i_m}}{i_1^{k-1}i_2^{k-1}\cdots i_m^{k-1}} \\
&\quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{i_1\geq i_2\geq\cdots\geq i_m\geq 1\\ i_1+i_2+\cdots+i_m=n}}\frac{n!}{i_1!\cdots i_m!}\,\frac{\left(\log_\lambda\left(1+t\right)\right)^n}{i_1^{k-1}i_2^{k-1}\cdots i_m^{k-1}n!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{i_1\geq i_2\geq\cdots\geq i_m\geq 1\\ i_1+i_2+\cdots+i_m=n}}\frac{n!}{i_1!\cdots i_m!}\,\frac{1}{i_1^{k-1}i_2^{k-1}\cdots i_m^{k-1}}\sum_{j=n}^{\infty}S_{1,\lambda}\left(j,n\right)\frac{t^j}{j!} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{j}\sum_{\substack{i_{11}\geq i_2\geq\cdots\geq i_m\geq 1\\ i_1+i_2+\cdots+i_m=n}}\frac{n!}{i_1!\cdots i_m!}\,\frac{1}{i_1^{k-1}i_2^{k-1}\cdots i_m^{k-1}}\,S_{1,\lambda}\left(j,n\right)\frac{t^j}{j!}
\end{aligned}
$$

olur. □

Teorem 4.86. *2. tip unified dejenere poli-üstel Apostol-Bernoulli tipli polinomları ile modified dejenere 2. tip Stirling sayıları ve dejenere 1. tip Stirling sayıları arasında aşağıdaki bağıntı vardır.*

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{p}{}_k\tilde{R}_{0,\beta,\lambda}^{(\alpha-v)}\left(x;s,a,b\right)\sum_{\substack{i_{11}\geq i_2\geq\cdots\geq i_m\geq 1\\ i_1+i_2+\cdots+i_m=n}}\frac{n!}{i_1!\cdots i_m!}\frac{1}{i_1^{k-1}i_2^{k-1}\cdots i_m^{k-1}}S_{1,\lambda}\left(p,n\right) \\
&+\sum_{j=1}^{p}\binom{p}{j}\sum_{n=1}^{j}\sum_{\substack{i_{11}\geq i_2\geq\cdots\geq i_m\geq 1\\ i_1+i_2+\cdots+i_m=n}}\frac{n!}{i_1!\cdots i_m!}\,\frac{1}{i_1^{k-1}i_2^{k-1}\cdots i_m^{k-1}}\,S_{1,\lambda}\left(j,n\right)\,{}_k\tilde{R}_{p-j,\beta,\lambda}^{(\alpha-v)}\left(x;s,a,b\right) \\
&= \sum_{m=0}^{p}\binom{p}{m}{}_k\tilde{R}_{m,\beta,\lambda}^{(\alpha)}\left(x-v;s,a,b\right)v!S_{2,\lambda}\left(p-m,v,a,b,\beta\right)2^{p-m}.
\end{aligned}
$$

İspat

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} {}_k\tilde{R}_{n,\beta,\lambda}^{(\alpha-v)}(x;s,a,b)\frac{t^n}{n!}\\
&= \left(\frac{2^{1-s}\left(\mathrm{Ei}_{k,\lambda}\left(\log_\lambda(1+t)\right)\right)^s}{\beta^b e_\lambda^1(t)-a^b e_\lambda^{-1}(t)}\right)^{\alpha}\left(\frac{\beta^b e_\lambda^1(t)-a^b e_\lambda^{-1}(t)}{2^{1-s}\left(\mathrm{Ei}_{k,\lambda}\left(\log_\lambda(1+t)\right)\right)^s}\right)^{v} e_\lambda^x(t)\\
&= \left(\frac{2^{1-s}\left(\mathrm{Ei}_{k,\lambda}\left(\log_\lambda(1+t)\right)\right)^s}{\beta^b e_\lambda^1(t)-a^b e_\lambda^{-1}(t)}\right)^{\alpha} e_\lambda^x(t)\frac{1}{2^{(1-s)v}\left(\mathrm{Ei}_{k,\lambda}\left(\log_\lambda(1+t)\right)\right)^{sv}}\\
&\quad \frac{\left(\beta^b e_\lambda^2(t)-a^b\right)^v}{e_\lambda^v(t)}.
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
&2^{(1-s)v}\sum_{n=0}^{\infty} {}_k\tilde{R}_{n,\beta,\lambda}^{(\alpha-v)}(x;s,a,b)\frac{t^n}{n!}\left(\mathrm{Ei}_{k,v}\left(\log_\lambda(1+t)\right)\right)^{sv}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} {}_k\tilde{R}_{n,\beta,\lambda}^{(\alpha)}(x-v;s,a,b)\frac{t^n}{n!}v!\sum_{n=0}^{\infty}S_{2,\lambda}(n,v,a,b,\beta)\,2^n\frac{t^n}{n!}\\
&= \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{p}\binom{p}{m}_k\tilde{R}_{m,\beta,\lambda}^{(\alpha)}(x-v;s,a,b)\,v!S_{2,\lambda}(p-m,v,a,b,\beta)\,2^{p-m}\frac{t^p}{p!}
\end{aligned}$$

olur. (4.18) bağıntısı kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
&= \left\{2^{(1-s)v}\sum_{n=0}^{\infty} {}_k\tilde{R}_{n,\beta,\lambda}^{(\alpha-v)}(x;s,a,b)\frac{t^n}{n!}\right.\\
&\left.\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{j}\sum_{\substack{i_{11}\geq i_2\geq\cdots\geq i_m\geq 1\\ i_1+i_2+\cdots+i_m=n}}\frac{n!}{i_1!\cdots i_m!}\frac{1}{i_1^{k-1}i_2^{k-1}\cdots i_m^{k-1}}S_{1,\lambda}(j,n)\frac{t^j}{j!}\right\}.\\
&= \left\{2^{(1-s)v}\left\{{}_k\tilde{R}_{0,\beta,\lambda}^{(\alpha-v)}(x;s,a,b)+\sum_{n=1}^{\infty} {}_k\tilde{R}_{n,\beta,\lambda}^{(\alpha-v)}(x;s,a,b)\frac{t^n}{n!}\right\}\right.\\
&\left.\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{j}\sum_{\substack{i_{11}\geq i_2\geq\cdots\geq i_m\geq 1\\ i_1+i_2+\cdots+i_m=n}}\frac{n!}{i_1!\cdots i_m!}\frac{1}{i_1^{k-1}i_2^{k-1}\cdots i_m^{k-1}}S_{1,\lambda}(j,n)\frac{t^j}{j!}\right\}.\\
&\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{p} {}_k\tilde{R}_{0,\beta,\lambda}^{(\alpha-v)}(x;s,a,b)\sum_{\substack{i_{11}\geq i_2\geq\cdots\geq i_m\geq 1\\ i_1+i_2+\cdots+i_m=n}}\frac{n!}{i_1!\cdots i_m!}\frac{1}{i_1^{k-1}i_2^{k-1}\cdots i_m^{k-1}}S_{1,\lambda}(p,n)\frac{t^p}{p!}\\
&+\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{p}\binom{p}{j}\sum_{n=1}^{j}\sum_{\substack{i_{11}\geq i_2\geq\cdots\geq i_m\geq 1\\ i_1+i_2+\cdots+i_m=n}}\frac{n!}{i_1!\cdots i_m!}\frac{1}{i_1^{k-1}i_2^{k-1}\cdots i_m^{k-1}}S_{1,\lambda}(j,n)\,{}_k\tilde{R}_{p-j,\beta,\lambda}^{(\alpha-v)}(x;s,a,b)\frac{t^p}{p!}\\
&= \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{p}\binom{p}{m}_k\tilde{R}_{m,\beta,\lambda}^{(\alpha)}(x-v;s,a,b)\,v!S_{2,\lambda}(p-m,v,a,b,\beta)\,2^{p-m}\frac{t^p}{p!}
\end{aligned}$$

olur. Katsayılar karşılaştırılırsa istenilen elde edilir. □

Teorem 4.87. *2. tip unified dejenere poli-üstel Apostol-Bernoulli tipli polinomları*

$$\begin{aligned} & 2^{s-n}\ {}_1\tilde{R}^{(1)}_{n,\beta,\lambda}(2x;s,a,b) \\ = \ & \beta^b\ {}_1\tilde{R}^{(1)}_{n,\beta,\lambda}\left(x+\frac{1}{2};s,2a,2b\right)+a^b\ {}_1\tilde{R}^{(1)}_{n,\beta,\lambda}\left(x-\frac{1}{2};s,2a,2b\right) \end{aligned}$$

bağıntısını sağlar.

İspat

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty}\left(\beta^b\ {}_1\tilde{R}^{(1)}_{n,\beta,\lambda}\left(x+\frac{1}{2};s,2a,2b\right)+a^b\ {}_1\tilde{R}^{(1)}_{n,\beta,\lambda}\left(x-\frac{1}{2};s,2a,2b\right)\right)\frac{2^n t^n}{n!} \\ = \ & \beta^b e_\lambda^{\left(x+\frac{1}{2}\right)}(2t)\left(\frac{2^{1-s}\left(\mathrm{Ei}_{1,v}\left(\log_\lambda(1+2t)\right)\right)^s}{\beta^{2b}e_\lambda^2(t)-a^{2b}e_\lambda^{-2}(t)}\right)^1 \\ & +a^b e_\lambda^{\left(x-\frac{1}{2}\right)}(2t)\left(\frac{2^{1-s}\left(\mathrm{Ei}_{1,\lambda}\left(\log_\lambda(1+2t)\right)\right)^s}{\beta^{2b}e_\lambda^2(t)-a^{2b}e_\lambda^{-2}(t)}\right)^1 \\ = \ & \beta^b e_\lambda^{(2x+1)}(t)\left(\frac{2^{1-s}\left(\mathrm{Ei}_{1,v}\left(\log_\lambda(1+2t)\right)\right)^s}{\beta^{2b}e_\lambda^2(t)-a^{2b}e_\lambda^{-2}(t)}\right) \\ & +a^b e_\lambda^{(2x-1)}(t)\left(\frac{2^{1-s}\left(\mathrm{Ei}_{1,\lambda}\left(\log_\lambda(1+2t)\right)\right)^s}{\beta^{2b}e_\lambda^2(t)-a^{2b}e_\lambda^{-2}(t)}\right) \\ = \ & \left(\beta^b e_\lambda(t)+a^b e_\lambda^{-1}(t)\right)\left(\frac{2^{1-s}\left(\mathrm{Ei}_{1,\lambda}\left(\log_\lambda(1+2t)\right)\right)^s}{\beta^{2b}e_\lambda^2(t)-a^{2b}e_\lambda^{-2}(t)}\right)e_\lambda^{2x}(t) \\ = \ & \frac{2^{1-s}(2t)^s}{\beta^b e_\lambda(t)-a^b e_\lambda^{-1}(t)}e_\lambda^{2x}(t) \\ = \ & 2^s\sum_{n=0}^{\infty}\ {}_1\tilde{R}^{(1)}_{n,\beta,\lambda}(2x;s,a,b)\frac{t^n}{n!}. \end{aligned}$$

olur. Katsayılar karşılaştırılırsa istenilen elde edilir. □

4.8. Dejenere Poli-Cauchy Polinomları

Dejenere Cauchy sayıları ve polinomları son yıllarda aktif olarak çalışılan konulardan biridir (Kim 2017; Komatsu 2018; Kim ve Jang 2020). Bu bölümde dejenere poli-Cauchy polinomlarının ve sayılarının poli-logaritma faktöriyel fonksiyonu yardımıyla verilen tanımı kullanılarak bazı özellikleri ve bağıntıları verilecektir.

Tanım 4.88. *1. çeşit dejenere poli-Cauchy polinomları ve 2. çeşit dejenere poli-Cauchy polinomları sırasıyla aşağıdaki seri ifadeleri ile verilir (Dolgy vd. 2015).*

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(k)}(\lambda, x)\frac{t^n}{n!} = Lif_k\left(\frac{(1+t)^{\lambda}-1}{\lambda}\right)(1+t)^x \tag{4.19}$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} \hat{C}_n^{(k)}(\lambda, x)\frac{t^n}{n!} = Lif_k\left(-\frac{(1+t)^{\lambda}-1}{\lambda}\right)(1+t)^{-x}. \tag{4.20}$$

Buradan

$$\lim_{\lambda\to 0} C_n^{(k)}(\lambda, x) = C_n^{(k)}(x)$$

ve

$$\lim_{\lambda\to 0} \hat{C}_n^{(k)}(\lambda, x) = \hat{C}_n^{(k)}(x)$$

olduğu görülür. Eğer $x = 0$ alınırsa sırasıyla $C_n^{(k)}(\lambda, 0) = C_n^{(k)}(\lambda)$ 1. çeşit dejenere poli-Cauchy sayısı, $\hat{C}_n^{(k)}(\lambda, 0) = \hat{C}_n^{(k)}(\lambda)$ 2. çeşit dejenere poli-Cauchy sayısı olur.

Teorem 4.89. *Dejenere poli-Cauchy polinomları aşağıdaki ifadeleri sağlar.*

$$\begin{aligned}
C_n^{(k)}(\lambda, x+y) &= \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r} C_{n-r}^{(k)}(\lambda, x)(y \mid 1)_r, \\
C_n^{(k)}(\lambda, x+y) &= \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r} C_{n-r}^{(k)}(\lambda, y)(x \mid 1)_r, \\
\hat{C}_n^{(k)}(\lambda, x+y) &= \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r} \hat{C}_{n-r}^{(k)}(\lambda, x)(-y \mid 1)_r, \\
\hat{C}_n^{(k)}(\lambda, x+y) &= \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r} \hat{C}_{n-r}^{(k)}(\lambda, y)(-x \mid 1)_r.
\end{aligned}$$

İspat Bu teoremin ispatı (4.19) ve (4.20) kullanılarak rahatlıkla görülür. □

Teorem 4.90. *Dejenere poli-Cauchy polinomları ile 1. tip Stirling sayıları arasında*

$$C_n^{(k)}(\lambda, x) = \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l} C_{n-l}^{(k)}(\lambda, 0)\, x^j \sum_{j=0}^{l} S_1(l, j)$$

bağıntısı vardır.

İspat (4.19) ve (4.20) tanımınından

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(k)}(\lambda,x)\frac{t^n}{n!} &= Lif_k\left(\frac{(1+t)^{\lambda}-1}{\lambda}\right)(1+t)^x \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!\,(m+1)^k}\left(\frac{(1+t)^{\lambda}-1}{\lambda}\right)^m e^{x\log(1+t)} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} C_l^{(k)}(\lambda,0)\frac{t^l}{l!}\sum_{j=0}^{\infty} x^j\frac{(\log(1+t))^j}{j!} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} C_l^{(k)}(\lambda,0)\frac{t^l}{l!}\sum_{j=0}^{\infty} x^j\sum_{l=j}^{\infty} S_1(l,j)\frac{t^l}{l!}\end{aligned}$$

olur. Sağ tarafa Cauchy çarpımı uygulayıp katsayılar karşılaştırılırsa istenilen bağıntı elde edilir. □

Teorem 4.91. *1. çeşit dejenere poli-Cauchy polinomları*

$$C_n^{(k)}(\lambda,x+1)-C_n^{(k)}(\lambda,x)=nC_{n-1}^{(k)}(\lambda,x)$$

bağıntısını sağlar.

İspat

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\left[C_n^{(k)}(\lambda,x+1)-C_n^{(k)}(\lambda,x)\right]\frac{t^n}{n!} &= Lif_k\left(\frac{(1+t)^{\lambda}-1}{\lambda}\right)(1+t)^x.t \\ &= t\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(k)}(\lambda,x)\frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} nC_{n-1}^{(k)}(\lambda,x)\frac{t^n}{n!}\end{aligned}$$

olur. $n\geq 1$ için katsayılar karşılaştırılırsa istenilen bağıntı elde edilir. □

Teorem 4.92. *1. ve 2. çeşit dejenere poli-Cauchy polinomları aşağıdaki eşitlikleri sağlar.*

$$C_n^{(k)}(\lambda,x)=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}C_m^{(k)}(\lambda,0)\,(1\mid x)_{n-m}$$

ve

$$\hat{C}_n^{(k)}(\lambda,x)=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\hat{C}_m^{(k)}(\lambda,0)\,(1\mid(-x))_{n-m}.$$

İspat

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(k)}(\lambda,x)\frac{t^n}{n!} &= Lif_k\left(\frac{(1+t)^{\lambda}-1}{\lambda}\right)(1+t)^x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(k)}(\lambda,0)\frac{t^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}(1\mid x)_n\frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}C_m^{(k)}(\lambda,0)(1\mid x)_{n-m}\frac{t^n}{n!}\end{aligned}$$

olur. □

Teorem 4.93. *$\lambda \neq 0$ olmak üzere 1. çeşit dejenere poli-Cauchy polinomları ile 2. tip Stirling sayıları arasında*

$$\sum_{m=0}^{n} C_m^{(k)}(\lambda,x)S_2(n,m)\frac{1}{\lambda^m} = \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\sum_{m=0}^{l}\frac{1}{\lambda^m}\frac{1}{(m+1)^k}S_2(l,j)\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{n-l}$$

eşitliği vardır.

İspat

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(k)}(\lambda,x)\frac{t^n}{n!} &= Lif_k\left(\frac{(1+t)^{\lambda}-1}{\lambda}\right)(1+t)^x \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!\,(m+1)^k}\left(\frac{(1+t)^{\lambda}-1}{\lambda}\right)^m(1+t)^x\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(k)}(\lambda,x)\frac{\left(e^{\frac{t}{\lambda}}-1\right)^n}{n!} &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left((1+t)^{\lambda}-1\right)^m}{\lambda^m m!\,(m+1)^k}e^{\frac{t}{\lambda}x} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda^m}\sum_{l=m}^{\infty}S_2(l,m)\frac{t^l}{l!}\frac{1}{(m+1)^k}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^r\frac{t^r}{r!}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\frac{1}{\lambda^m}S_2\left(l,m\right)\frac{t^l}{l!}\frac{1}{\left(m+1\right)^k}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^r\frac{t^r}{r!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\sum_{m=0}^{l}\frac{1}{\lambda^m}S_2\left(l,m\right)\frac{t^l}{l!}\frac{1}{\left(m+1\right)^k}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{n-l}\frac{t^r}{r!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}C_n^{(k)}\left(\lambda,x\right)\frac{\left(e^{\frac{t}{\lambda}}-1\right)^n}{n!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}C_n^{(k)}\left(\lambda,x\right)\sum_{l=n}^{\infty}S_2\left(l,n\right)\left(\frac{t}{\lambda}\right)^l\frac{1}{l!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}C_m^{(k)}\left(\lambda,x\right)S_2\left(n,m\right)\frac{1}{\lambda^m}\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}
$$

olur. Sağ tarafa Cauchy çarpımı uygulayıp katsayılar kıyaslanırsa istenilen elde edilir. □

Teorem 4.94. *Dejenere poli-Cauchy polinomları ile 1. ve 2. tip Stirling sayıları arasında aşağıdaki bağıntı vardır.*

$$C_n^{(k)}\left(\lambda,x\right)=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\sum_{m=0}^{l}\frac{\lambda^{-m}}{\left(m+1\right)^k}S_2\left(l,m\right)\sum_{j=0}^{n-l}x^jS_1\left(n-l,j\right).$$

İspat

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}C_n^{(k)}\left(\lambda,x\right)\frac{t^n}{n!} &= Lif_k\left(\frac{\left(1+t\right)^{\lambda}-1}{\lambda}\right)\left(1+t\right)^x\\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^{-m}}{\left(m+1\right)^k}\frac{\left(\left(1+t\right)^{\lambda}-1\right)^m}{m!}e^{x\ln(1+t)}\\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^{-m}}{\left(m+1\right)^k}\frac{\left(e^{\lambda\ln(1+t)}-1\right)^m}{m!}\sum_{j=0}^{\infty}x^j\frac{\left(\ln\left(1+t\right)\right)^j}{j!}\\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^{-m}}{\left(m+1\right)^k}\sum_{l=m}^{\infty}S_2\left(l,m\right)\frac{t^l}{l!}\sum_{j=0}^{\infty}x^j\sum_{r=j}^{\infty}S_1\left(r,j\right)\frac{t^r}{r!}\\
&= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\frac{\lambda^{-m}}{\left(m+1\right)^k}S_2\left(l,m\right)\frac{t^l}{l!}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{r}x^jS_1\left(r,j\right)\frac{t^r}{r!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\sum_{m=0}^{l}\frac{\lambda^{-m}}{\left(m+1\right)^k}S_2\left(l,m\right)\sum_{j=0}^{n-l}x^jS_1\left(n-l,j\right)\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}
$$

olur. Katsayılar karşılaştırılırsa istenilen elde edilir. □

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada 2. tip Apostol-Bernoulli tipli polinomlar tanımlandı. Tanımladığımız bu polinomların özel hali 2. tip Bernoulli ve 2. tip Euler polinomlarını verdi. Daha sonra bu polinomların dejenere durumları tanımlandı. Bu tanımın özel halinin de 2. tip dejenere Bernoulli ve 2. tip dejenere Euler polinomları olduğu görüldü. Sonrasında bu tanımladığımız polinomların parametrik ifadesi, Hermite-tabanlı durumları, poli-üstel ve poli-logaritmik ifadeleri tanımlanıp sağladığı bağıntılar elde edildi. Dejenere poli-Cauchy polinomlarının sağladığı bazı teoremler verildi.

6. KAYNAKLAR

Abramowitz, M. and Stegun, I. A. 1970. Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, Inc., New York.

Agarwal, R. P., Kang, J. Y. and Ryoo, C. S. 2019. A new q-extension of Euler polynomial of the second kind and some related polynomials. *J. Computational Analysis and Appl,* 27(1), 136-148.

Apostol, T. M. 1951. On the Lerch zeta function. *Pacific Journal of Mathematics,* 1(2), 161-167.

Apostol, T. M. 1998. Introduction to analytic number theory. Springer Science and Business Media.

Araci, S., Şen, E. and Acikgoz, M. 2014. Theorems on Genocchi polynomials of higher order arising from Genocchi basis. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 18(2), 473-482.

Bernoulli, J. 1713. Ars conjectandi. *Basel:* Published Posthumously.

Carlitz, L. 1961. A note on Bernoulli and Euler polynomials of the second kind. *Scripta Math*, 25, 323-330.

Carlitz, L. 1968. Bernoulli numbers. *Fib. Quart*, 6, 71-85.

Carlitz, L. 1979. Degenerate stirling. Bernoulli and Eulerian numbers. *Util. Math*, 15(1), 51-88.

Carlitz, L. 1980. Weighted Stirling numbers of the first and second kind–II. *Fibonacci Quart*, 18(3), 242-257.

Çam, Ş. 2005. Stirling Sayıları. *Matematik Dünyası Dergisi Bahar*, 30-34.

Cheon, G. S. 2003. A note on the Bernoulli and Euler polynomials. *Applied Mathematics Letters*, 16(3), 365-368.

Cohen, H. 2008. Number theory: Volume II: Analytic and modern tools (Vol. 240). Springer Science and Business Media.

Comtet L. 1974. Advanced Combinatorics. Dordrecht: Reidel.

Dolgy, D. V., San Kim, D., Kim, T. and Mansour, T. 2015. Degenerate poly-Cauchy polynomials. *Applied Mathematics and Computation,* 269, 637-646.

Hain, R. M. 1994. Classical polylogarithms. *Motives* (Seattle, WA, 1991), 55, 3-42.

Hsu, L. C. and Shiue, P. J. S. 1998. A unified approach to generalized Stirling numbers. *Advances in Applied Mathematics,* 20(3), 366-384

Jang, G. W. and Kim, T. 2019. A note on type 2 degenerate Euler and Bernoulli polynomials. *Adv. Stud. Contemp. Math.(Kyungshang)*, 29(1), 147-159.

Jordan, C. 1933. On Stirling's numbers. *Tohoku Mathematical Journal, First Series,* 37, 254-278.

Kamano, K. 2010. Sums of products of Bernoulli numbers, including poly-Bernoulli numbers. *J. Integer Seq,* 13(5), 10-5.

Khan, W. A. 2015. Some properties of the generalized Apostol type Hermite-Based polynomials. *Kyungpook Mathematical Journal,* 55(3), 597-614.

Kim, T., Kim, D. S. and Kwon, H. I. 2016. Some identities relating to degenerate Bernoulli polynomials. *Filomat*, 30(4), 905-912.

Kim, T. 2017. Degenerate Cauchy numbers and polynomials of the second kind. arXiv preprint arXiv:1708.07275.

Kim, T., Kim, D. S., and Kwon, H. I. 2018. A note on degenerate Stirling numbers and their applications. *In Proc. Jangjeon Math. Soc* (Vol. 21, No. 2, pp. 195-203).

Kim, D. S., Kim, H. Y., Kim, D. and Kim, T. 2019a. Identities of symmetry for type 2 Bernoulli and Euler polynomials. *Symmetry*, 11(5), 613.

Kim, D. S., Dolgy, D. V., Kwon, J. and Kim, T. 2019b. Note on type 2 degenerate q-Bernoulli polynomials. *Symmetry*, 11(7), 914.

Kim, D. S., Kim, T. and Lee, H. 2019c. A note on degenerate Euler and Bernoulli polynomials of complex variable. *Symmetry*, 11(9), 1168.

Kim, D. S., and Kim, T. 2019d. A note on polyexponential and unipoly functions. *Russ. J. Math. Phys,* 26(1), 40-49.

Kim, T., Kim, D. S., Jang, L. C. and Kim, H. Y. 2019d. On type 2 degenerate Bernoulli and Euler polynomials of complex variable. *Advances in Difference Equations*, 1-15.

Kim, T., Kim, D. S. and Lee, H. 2019e. Degenerate hypergeometric functions and degenerate hypergeometric numbers of order p. arXiv preprint arXiv:1908.11803.

Kim, T., San Kim, D., Kwon, J. and Lee, H. 2020. Degenerate polyexponential functions and type 2 degenerate poly-Bernoulli numbers and polynomials. *Advances in Difference Equations*, 1-12.

Kim, T. and Kim, D. S. 2020. Degenerate polyexponential functions and degenerate Bell polynomials. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 487(2), 124017.

Kim, H. K. and Jang, L. C. 2020. A Note on the Degenerate Poly-Cauchy Polynomials and Numbers of the Second Kind. *Symmetry*, 12(7), 1066.

Kim, T., Jang, L. C., Kim, D. S. and Kim, H. Y. 2020. Some identities on type 2 degenerate Bernoulli polynomials of the second kind. *Symmetry,* 12(4), 510.

Kim, D. S. and Kim, T. 2020. A note on a new type of degenerate Bernoulli numbers. *Russian Journal of Mathematical Physics,* 27, 227-235.

Komatsu, T. 2013. Poly-Cauchy numbers. *Kyushu Journal of Mathematics*, 67(1), 143-153.

Komatsu, T., Laohakosol, V. and Liptai, K. 2013. A generalization of poly-Cauchy numbers and their properties. *In Abstract and Applied Analysis* (Vol. 2013). Hindawi.

Komatsu, T. 2018. Degenerate Bernoulli polynomials and poly-Cauchy polynomials (Analytic Number Theory and Related Areas). *RIMS Kokyuroku,* 2092, 146-159.

Liu, G. D. and Srivastava, H. M. 2006. Explicit formulas for the Nörlund polynomials Bn (x) and bn (x). *Computers & Mathematics with Applications*, 51(9-10), 1377-1384.

Luo, Q. M. and Srivastava, H. M. 2005. Some generalizations of the Apostol–Bernoulli and Apostol–Euler polynomials. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 308(1), 290-302.

Luo, Q. M. and Srivastava, H. M. 2006. Some relationships between the Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials. *Computers & Mathematics with Applications,* 51(3-4), 631-642.

Na, H. and Kim, J. H. 2020. A note on type 2 degenerate poly-Genocchi polynomials and numbers of complex variable arising from the degenerate modified poly exponential function. *Advanced Studies in Contemporary Mathematics* No.4, pp.559-570.

Navas, L. M., Ruiz, F. J. and Varona, J. L. 2019. Existence and reduction of generalized Apostol-Bernoulli, Apostol-Euler and Apostol-Genocchi polynomials. *Archivum Mathematicum*, 55(3), 157-165.

Nörlund, N. E. 1924. Vorlesungen über differenzenrechnung (Vol. 13). J. Springer.

Özarslan, M. A. 2011. Unified Apostol–Bernoulli, Euler and Genocchi polynomials. *Computers & Mathematics with Applications,* 62(6), 2452-2462.

Özarslan, M. A. 2013. Hermite-based unified Apostol-Bernoulli, Euler and Genocchi polynomials. *Advances in Difference Equations*, 1-13.

Özden, H., Simsek, Y. and Srivastava, H. M. 2010. A unified presentation of the generating functions of the generalized Bernoulli, Euler and Genocchi polynomials. *Computers and Mathematics with Applications*, 60(10), 2779-2787.

San Kim, D. and Kim, T. 2015. Higher-order Bernoulli and poly-Bernoulli mixed type polynomials. *Georgian Mathematical Journal,* 22(2), 265-272.

Srivastava, H. M. and Manocha, H. L. 1984. A Treatise on Generating Functions. *Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chichester)*, Wiley, New York.

Srivastava, H. M. and Choi, J. 2001. Series associated with the zeta and related functions (Vol. 530). Springer Science and Business Media.

Srivastava, H. M., Garg, M. and Choudhary, S. 2010. A new generalization of the Bernoulli and related polynomials. *Russian Journal of Mathematical Physics,* 17(2), 251-261.

Srivastava, H. M. 2011. Some generalizations and basic (or q-) extensions of the Bernoulli, Euler and Genocchi polynomials. *Appl. Math. Inform. Sci,* 5(3), 390-444.

Srivastava, H. M. and Choi, J. 2012. Zeta and q-Zeta Functions and Associated Series and Integrals. Elsevier.

Srivastava, H. M., Masjed-Jamei, M. and Beyki, M. R. 2018. A parametric type of the Apostol-Bernoulli, Apostol-Euler and Apostol-Genocchi polynomials. *Appl. Math. Inf. Sci,* 12(5), 907-916.

Srivastava, H. M., Kurt, B. and Kurt, V. 2019. Identities and relations involving the modified degenerate hermite-based Apostol–Bernoulli and Apostol–Euler polynomials. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas,* 113(2), 1299-1313.

Szegö, G. 1954. A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and Fg Tricomi, Higher Transcendental Functions. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 60(4), 405-408.

Washington, L. C. 1997. Introduction to Cyclotomic Fields (Vol. 83). Springer Science & Business Media.

Whittaker, E. T. 1962. A course of modern analysis. An introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions: with an account of the principal transcendental functions. Cambridge University Press, Printed in the USA.

Zagier, D. 1990. The bloch-wigner-ramakrishnan polylogarithm function. *Mathematische Annalen,* 286(1), 613-624.

ÖZGEÇMİŞ

Seçil BİLGİÇ

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Doktora 2016-2021	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Antalya
Yüksek Lisans 2014-2016	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Antalya
Lisans 2008-2012	Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Antalya

MESLEKİ VE İDARİ GÖREVLER

Öğretim Görevlisi 2016-Devam Ediyor	Akdeniz Üniversitesi Anadolu Bil MYO, Bilgisayar Prog.(UE), İstanbul

ESERLER

Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler

1- Kurt, B. and Bilgic, S. (2017). Symmetry Identities for the 2-Variable Unified Apostol-Type Polynomials. Journal of Inequalities and Special Functions, 8(4), 96-103.

2- Bilgic, S. and Kurt, V. (2020). On generalized q-poly-Bernoulli numbers and polynomials. Filomat, 34(2), 515-520.

Ulusal bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitaplarında basılan bildiriler

1- Bilgiç, S. (2016). Genelleştirilmiş Poly-Bernoulli polinomları ve Poly-Genocchi polinomları. 28. Ulusal Matematik Sempozyumu, 2015. (Özet Bildiri/Davetli Konuşmacı)

Ulusal bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitaplarında basılan bildiriler

1- Kurt, B. and Bilgic, S. (2017). Recurrence relations on the generelizad poly-Genocchi polynomials. In AIP Conference Proceedings (Vol. 1863, No. 1, p. 300020). AIP Publishing LLC. (Özet Bildiri/Davetli Konuşmacı)

2- Bilgic, S. and Kurt, B. (2017). Some Relationships between for the 2-Variable Unified Apostol-type Polynomials. International Conference on Mathematics and Engineering. ICOMA 2017. (Özet Bildiri/Davetli Konuşmacı)

3- Bilgic, S. and Kurt, V. (2018). On the Partially q-Poly-Bernoulli Numbers and Polynomials. MICOPAM 2018. (Özet Bildiri/Davetli Konuşmacı)