

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



**BAZI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ VE PANTOGRAPH
DENKLEMLERİNİ ÇÖZMEK İÇİN BOUBAKER POLİNOMLARINI VE
İNTEGRALİ BAZ ALAN YENİ BİR KOLLOKASYON YÖNTEMİ**

Beyza ÇETİN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KASIM 2025

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



**BAZI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ VE PANTOGRAPH
DENKLEMLERİNİ ÇÖZMEK İÇİN BOUBAKER POLİNOMLARINI VE
İNTEGRALİ BAZ ALAN YENİ BİR KOLLOKASYON YÖNTEMİ**

Beyza ÇETİN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KASIM 2025

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ VE PANTOGRAPH
DENKLEMLERİNİ ÇÖZMEK İÇİN BOUBAKER POLİNOMLARINI VE
İNTEGRALİ BAZ ALAN YENİ BİR KOLLOKASYON YÖNTEMİ

Beyza ÇETİN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KASIM 2025

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ VE PANTOGRAPH
DENKLEMLERİNİ ÇÖZMEK İÇİN BOUBAKER POLİNOMLARINI VE
İNTEGRALİ BAZ ALAN YENİ BİR KOLLOKASYON YÖNTEMİ

Beyza ÇETİN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 06/11/2025 tarihinde jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Şuayip YÜZBAŞI (Danışman)

Prof. Dr. Melih ERYİĞİT

Prof. Dr. Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL

ÖZET

BAZI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ VE PANTOGRAPH DENKLEMLERİNİ ÇÖZMEK İÇİN BOUBAKER POLİNOMLARINI VE İNTEGRALİ BAZ ALAN YENİ BİR KOLLOKASYON YÖNTEMİ

Beyza ÇETİN

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Şuayip YÜZBAŞI

Kasım 2025, 103 sayfa

Bu tez çalışmasında, bazı diferansiyel denklemler ve pantograph denklemlerini çözmek amacıyla Boubaker polinomları ve integrale dayalı yeni bir kolokasyon yöntemi sunulmaktadır. Yöntemin ilk adımı olarak diferansiyel denklemdeki en yüksek mertebeden türe ve Boubaker polinomlarını baz alan sonlu bir seri ile yaklaşım yaparak başlanır ve bu yaklaşım matris formunda ifade edilir. Ardından bu yaklaşımdan gerekli sayıda integral alınarak problemdeki diğer türevlerin ve bilinmeyen fonksiyonun matris formları bulunur. Diferansiyel denklem problemindeki koşullar yapılan yaklaşımdan sonra her bir integral alındığında direkt olarak kullanılır. Bilinmeyen fonksiyon ve türevlerinin matris formları diferansiyel denklemde yerleştirildikten sonra eşit aralıklı kolokasyon noktaları kullanılarak diferansiyel denklem problemi cebirsel bir denklem sistemine indirgenir. Diferansiyel denklem problemi lineer ise indirgenen cebirsel sistem lineer olurken diferansiyel denklem problemi lineer olmayan olduğunda ise cebirsel sistem lineer olmayan bir sisteme dönüşmektedir. Elde edilen cebirsel sistem çözülerek yaklaşımdaki bilinmeyen katsayılar elde edilir. Bu katsayılar aynı zamanda bilinmeyen fonksiyonun çözüm formundaki katsayılarıdır ve burada yerine yazılarak çözüm elde edilir. Bahsedilen bu yeni yöntem bu tez çalışmasında, genelleştirilmiş lineer diferansiyel denklemlerine, birinci mertebeden pantograph denklemlerine, yüksek mertebeden pantograph denklemlerine, Lane–Emden diferansiyel denklemine, Riccati diferansiyel denklemine, multi-pantograph denklemine ve lojistik nüfus modeli problemlerine uygulanmaktadır. Ayrıca rezidüel fonksiyon kullanılarak bir hata problemi oluşturulduktan sonra aynı yöntem ile

bu hata problemi de çözölerek hata tahmini yapılmaktadır. Yöntemin ve hata tahmini tekniğini açıklamak ve etkinliğini göstermek için örnekler üzerinde uygulamalar yapılır. Elde edilen sonuçlar literatürde bilinen yöntemler ile karşılaştırılarak yöntemin etkinliği gösterilir.

ANAHTAR KELİMELEER: Boubaker polinomları, Diferansiyel denklemler, Kollokasyon yöntemi, Pantograph denklemleri, Riccati denklemi.

JÜRİ: Prof.Dr. Şuayip YÜZBAŞI

Prof.Dr. Melih ERYİĞİT

Prof.Dr. Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL

ABSTRACT

A NEW COLLOCATION METHOD BASED ON BOUBAKER POLYNOMIALS AND INTEGRAL TO SOLVE SOME DIFFERENTIAL EQUATIONS AND PANTOGRAPH EQUATIONS

Beyza ÇETİN

Master Thesis in MATHEMATICS

Supervisor: Prof. Dr. Şuayip YÜZBAŞI

July 2025, 103 pages

This study introduces a novel collocation approach utilizing Boubaker polynomials and integration techniques to address differential equations and pantograph-type problems. Initially, the dominant derivative term in the equation is represented through a truncated Boubaker polynomial series, and this representation is cast into matrix form. Subsequently, successive integrations of the initial approximation are carried out to derive the matrix expressions corresponding to the remaining derivatives and the unknown function involved in the problem. After approximating the highest-order derivative, the conditions specified in the differential equation are incorporated at each stage of integration. Once the matrix expressions of the unknown function and its derivatives are inserted into the original equation, the problem is transformed into a system of algebraic equations by employing uniformly distributed collocation points. When the original differential problem is linear, the resulting algebraic system also remains linear; in contrast, a nonlinear differential problem yields a nonlinear algebraic system. Solving this system provides the values of the unknown coefficients used in the approximation. These coefficients simultaneously define the solution structure of the unknown function, and their substitution into the approximate expression yields the final solution. This new method is applied, in this thesis, to higher-order linear differential equations, first-order pantograph equations, multi-pantograph equations, the Lane–Emden differential equation, the Riccati differential equation, generalized pantograph equations, and the logistic population model problems. Additionally, after constructing a residual function and formulating an error problem, this error problem is also solved using the same method to estimate the error.

To evaluate the method and its error estimation framework, it is applied to selected test problems. The resulting solutions are benchmarked against well-known approaches from the literature to assess its effectiveness.

KEYWORDS: Boubaker polynomials, Collocation method, Differential equations, Pantograph equations, Riccati equation

COMMITTEE: Prof.Dr. Şuayip YÜZBAŞI

Prof.Dr. Melih ERYİĞİT

Prof.Dr. Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL



ÖNSÖZ

Bu tez çalışması, danışmanım Prof. Dr. Şuayip Yüzbaşı'nın değerli bilgi birikimi, akademik rehberliği ve yönlendirmeleri sayesinde şekillenmiştir. Çalışmanın her aşamasında gösterdiği sabır, titizlik ve yol göstericilik, araştırmanın hem bilimsel derinliğini hem de akademik niteliğini belirleyici şekilde etkilemiştir. Kendisinin engin tecrübesi ve vizyoner bakış açısı olmasaydı, bu çalışmanın ortaya çıkması mümkün olmazdı. Bu nedenle, tez sürecinde bana kazandırdığı bilimsel bakış, araştırma disiplini ve akademik değerler için kendisine en derin şükranlarımı sunarım.

Ayrıca, bu süreçte bana her zaman destek olan ve varlıklarıyla güç veren aileme de şükranlarımı sunuyorum. Onların manevi ve maddi destekleri sayesinde bu aşamaya ulaşabildim.

Son olarak, bu çalışmanın gerçekleşmesine katkıda bulunan tüm öğretim üyelerine, arkadaşlarım Elif Bozo'ya, Nejma Ugljanin'e, Jack Coleman'a ve desteğini esirgemeyen herkese teşekkür ederim.

Yüksek lisans sürecimde 2210-A Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı ile sağladığı mali katkılardan ötürü Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)'a minnettarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖNSÖZ	v
AKADEMİK BEYAN	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
TABLolar DİZİNİ	xii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK TARAMASI	4
2.1. Ön Bilgiler	4
2.2. Temel Klasik Polinomlar	5
2.3. Boubaker Polinomları	6
3. MATERYAL VE METOT	8
3.1. Birinci Mertebeden Lineer Pantograph Diferansiyel Denklemi ve Kullanılacak Yaklaşım	8
3.2. Birinci Mertebeden Multi-Pantograph Gecikmeli Diferansiyel Denklemler ve Kullanılacak Yaklaşım	9
3.3. Lane-Emden Diferansiyel Denklemleri ve Kullanılacak Yaklaşım	9
3.4. Popülasyonun Lojistik Büyümesi Modeli ve Kullanılacak Yaklaşım	10
3.5. Riccati Diferansiyel Denklemi ve Kullanılacak Yaklaşım	11
3.6. Yüksek Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler ve Kullanılacak Yaklaşım	12
3.7. Genelleştirilmiş Pantograph Denklemi ve Kullanılacak Yaklaşım	13
4. BULGULAR VE TARTIŞMALAR	14
4.1. Kollokasyon Noktaları	14
4.2. Yöntem	14
4.2.1. Birinci Mertebeden Pantograph Diferansiyel Denklemi için Yöntemin Oluşturulması	14
4.2.2. Birinci Mertebeden Multi Pantograph Diferansiyel Denklemi için Yöntemin Oluşturulması	18
4.2.3. Lane-Emden Diferansiyel Denklemleri için Yöntemin Oluşturulması	22

4.2.4.	Popülasyonun Lojistik Büyümesi Modeli için Yöntemin Oluştur-	
	rulması	25
4.2.5.	Riccati Diferansiyel Denklemi için Yöntemin Oluşturulması	28
4.2.6.	Yüksek Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklem için Yöntemin	
	Oluşturulması	31
4.2.7.	Genelleştirilmiş Pantograph Diferansiyel Denklem için Yöntemin	
	Oluşturulması	34
4.3.	Rezidüel Hata Analizi	36
4.3.1.	Birinci Mertebeden Pantograph Diferansiyel Denklem için Hata	
	Analizi	37
4.3.2.	Birinci Mertebeden Multi-Pantograph Diferansiyel Denklem için	
	Hata Analizi	38
4.3.3.	Lane-Emden Diferansiyel Denklem için Hata Analizi	39
4.3.4.	Popülasyonun Lojistik Büyümesi Modeli için Hata Analizi	40
4.3.5.	Riccati Diferansiyel Denklem için Hata Analizi	41
4.3.6.	Yüksek Mertbeden Lineer Diferansiyel Denklem için Hata Analizi	42
4.3.7.	Genelleştirilmiş Pantograph Diferansiyel Denklem için Hata Analizi	42
4.4.	Nümerik Uygulamalar	43
4.4.1.	Birinci Mertebeden Lineer Pantograph Denklemleri için Uygu-	
	malar	43
4.4.2.	Birinci Mertebeden Multi-Pantograph Denklemleri için Örnekler	47
4.4.3.	Lane-Emden Diferansiyel Denklemi için Uygulamalar	55
4.4.4.	Popülasyonun Lojistik Büyümesi Modeli için Uygulamalar	67
4.4.5.	Riccati Diferansiyel Denklemleri için Uygulamalar	75
4.4.6.	Yüksek Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemleri için Uygu-	
	lamalar	84
4.4.7.	Genelleştirilmiş Pantograph Diferansiyel Denklem için Uygu-	
	malar	86
5.	SONUÇLAR	91
6.	KAYNAKLAR	93
	ÖZGEÇMİŞ	104

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “BAZI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ VE PANTOGRAPH DENKLEMLERİNİ ÇÖZMEK İÇİN BOUBAKER POLİNOMLARINI VE İNTEGRALİ BAZ ALAN YENİ BİR KOLLOKASYON YÖNTEMİ ” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

27/07/2025

Beyza ÇETİN

İmza



SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler:

$b_{n,\mu}$	: Boubaker polinomları katsayıları
$\mathbf{C}$	: Boubaker polinomları katsayılar matrisi
$B_\ell(x)$	: Boubaker polinomları
$\mathbf{A}$	: Bilinmeyen katsayılar matrisi
$e_{i,N}(x)$	: Mutlak hata fonksiyonu
$e_{i,N,M}(x)$	: Tahmini hata fonksiyonu
$E_{i,N,M}(x)$	: İyileştirilmiş çözüm için hata fonksiyonu
x_j	: Kollokasyon noktaları
N	: Boubaker seri yaklaşımı için belirlenen kesme sınırı
M	: Hata problemi için uygulanan Boubaker yaklaşımındaki kesme sınır
$y_N(x)$	: Yaklaşık çözüm
$y(x)$	: Tam çözüm
q_i	: Diferansiyel denklemler için gecikme değeri
$R(x)$	: Rezidüel fonksiyon
$R_N(x)$	: N kesme sınırı için rezidüel fonksiyon
$\mathbf{V}_i$	: İntegral işlemiyle oluşan katsayılar matrisi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1	Denklem (4.170) için yaklaşık çözüm olan $y_5(x)$ ve tam çözüm olan $y(x)$ fonksiyonlarının karşılaştırılması.	46
Şekil 4.2	Farklı N değerleri ile problem (4.172) için mutlak hataların karşılaştırılması.	51
Şekil 4.3	Farklı metotlarla $N = 10$ için gerçek mutlak hata fonksiyonları ile yapılan karşılaştırma.	55
Şekil 4.4	Denklem (4.173) için tahmini hata ve gerçek hata fonksiyonlarının karşılaştırılması.	56
Şekil 4.5	Denklem (4.175)'nin tam çözümü ile yaklaşık çözümler arasındaki farkların incelenmesi.	58
Şekil 4.6	$N = 8$ ile Denklem (4.175) için mutlak hata ve iyileştirilmiş hata fonksiyonlarının karşılaştırılması.	61
Şekil 4.7	$N = 6$ ile Örnek (4.175) için tahmini hata ve mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması.	63
Şekil 4.8	$N = 5$ ile Örnek (4.176) için yaklaşık çözümün tam çözümle karşılaştırılması.	65
Şekil 4.9	Örnek (4.176) için tahmini ve gerçek hata fonksiyonlarının karşılaştırılması.	65
Şekil 4.10	Örnek (4.176) için gerçek mutlak hata fonksiyonu ile iyileştirilmiş hata fonksiyonunun karşılaştırılması.	67
Şekil 4.11	Örnek (4.177) kapsamında, $N = 5$ durumunda hesaplanan mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması.	72
Şekil 4.12	Farklı N değerleri kullanılarak elde edilen yaklaşık çözümlerin, Örnek (4.177)'in tam çözümü ile karşılaştırılması.	73
Şekil 4.13	Örnek (4.177) için farklı N değerlerinden elde edilen hata fonksiyonlarının karşılaştırılması.	74
Şekil 4.14	Örnek (4.180) için yaklaşık çözüm olan $y_5(x)$ ile tam çözüm olan $y(x)$ fonksiyonlarının karşılaştırılması.	77
Şekil 4.15	Örnek (4.180) için mutlak hata fonksiyonlarının farklı metodlarla yapılan karşılaştırması.	79
Şekil 4.16	Örnek (4.180) için gerçek ve iyileştirilmiş hata değerlerinin karşılaştırması	80
Şekil 4.17	Denklem (4.181) de elde edilen yaklaşık çözüm ($N = 6$ için) ile tam çözüm karşılaştırılması	81
Şekil 4.18	Örnek (4.4) için $N = 4, 6, 9$ ve 12 için hata fonksiyonlarının karşılaştırması	82
Şekil 4.19	Örnek (4.4) için hata fonksiyonlarının karşılaştırılması	83
Şekil 4.20	Örnek (4.185) için yaklaşık çözüm ve tam çözümün karşılaştırılması.	85

Şekil 4.21	Sunulan yöntem ve başka yöntemler ile elde edilen hata fonksiyonlarının karşılaştırılması.	89
Şekil 4.22	Denklem (4.186) için tam çözüm ve yaklaşık çözümün karşılaştırılması.	89



TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 4.1	Gerçek mutlak hata sonuçlarının Denklem (4.170) özelinde karşılaştırılması.	46
Tablo 4.2	Denklem (4.170) için gerçek mutlak hatalar ile iyileştirilmiş hataların karşılaştırılması (Yüzbaşı vd., 2024).	47
Tablo 4.3	Yaklaşık çözümlerin, Örnek (4.172) özelinde değerlendirilmesi ve karşılaştırılması (Yüzbaşı vd., 2024).	50
Tablo 4.4	Örnek (4.172)'ye ait yaklaşık çözümlere karşılık gelen mutlak hata değerlerinin karşılaştırmalı değerlendirmesi.	52
Tablo 4.5	Gerçek mutlak hata sonuçlarının, Denklem (4.173) özelinde karşılaştırılması.	53
Tablo 4.6	Denklem (4.173) için gerçek mutlak hataların ve tahmini hataların karşılaştırılması (Yüzbaşı vd., 2024).	54
Tablo 4.7	Denklem (4.175) için elde edilen hata fonksiyonlarının karşılaştırılması.	58
Tablo 4.8	Denklem (4.175) için sunulan yöntem ve literatürdeki başka yöntemler ile elde edilen yaklaşımların hatalarının incelenmesi.	59
Tablo 4.9	Gerçek, tahmini ve düzeltilmiş hata sonuçlarının Denklem (4.175) özelinde karşılaştırılması.	62
Tablo 4.10	Gerçek, tahmini ve düzeltilmiş hata sonuçlarının Denklem (4.175) özelinde karşılaştırılması.	64
Tablo 4.11	Denklem (4.176) için hata karşılaştırmaları.	66
Tablo 4.12	Denklem (4.177) üzerinde $N = 3$ için farklı yöntemlerin hataları ile sunulan yöntemin hatalarının karşılaştırılması.	69
Tablo 4.13	Denklem (4.177) üzerinde $N = 5$ için farklı yöntemlerin hataları ile sunulan yöntemin hatalarının karşılaştırılması.	69
Tablo 4.14	Denklem (4.177) ve $N = 6$ için farklı metotlarla yapılan karşılaştırma.	70
Tablo 4.15	Denklem (4.177) üzerinde $N = 8, 10$ için farklı yöntemlerin hataları ile sunulan yöntemin hatalarının karşılaştırılması.	70
Tablo 4.16	Gerçek, tahmini ve düzeltilmiş hata sonuçlarının Örnek (4.177) özelinde karşılaştırılması.	75
Tablo 4.17	Örnek (4.180)'ye ait gerçek hata değerlerinin incelenmesi ve karşılaştırılması.	78
Tablo 4.18	Denklem (4.181) için gerçek hata değerlerinin mevcut yöntem ve Taylor yöntemi (Gülsu vd., 2006) ile karşılaştırılması.	81
Tablo 4.19	Denklem (4.181) için hata fonksiyonlarının karşılaştırılması.	83

Tablo 4.20 Örnek (4.181) için farklı N ve M değerleri için CPU (Merkezi İşlem Birimi) süreleri.	84
Tablo 4.21 Örnek (4.185)'de $N = 5, 9, 13$ durumlarına ait sayısal çözümlerin tam çözümle olan uyumunun değerlendirilmesi.	86
Tablo 4.22 Denklem (4.186)'ye ait gerçek mutlak hata fonksiyonlarının değerlendirilmesi ve karşılaştırılması.	88
Tablo 4.23 Denklem (4.186)'in $(N, M) = (3, 4), (5, 6)$ için mutlak, tahmini ve iyileştirilmiş hataların karşılaştırılması.	90

1. GİRİŞ

Diferansiyel denklemler, birçok bilim dalındaki problemlerin bileşenler arasındaki ilişkiler yardımıyla tarif edilmesinde önemli bir araç olarak matematiksel modellemenin temelini oluşturmaktadır. Mühendislik alanında (Yan vd., 2023) yaygın kullanımı ile bilinen matematiksel modelleme, son yıllarda tıp, biyoloji, iktisat gibi alanlarda da birçok problemin kurulmasında kilit rol oynamaktadır (Adel vd., 2020). Mühendislik alanında, uzayda bir cismin yerinin belirlenebilmesi için gereken minimum koordinat sayısını inceleyen tek serbestlik dereceli sistemlerde (Milovanovic vd., 2022), tıp alanında HIV (Yüzbaşı vd., 2022) ve COVID-19 (Ali vd., 2022) olarak bilinen koronavirüsün yayılımı gibi birçok alanda matematik modellemeden yararlanılır. Ayrıca, av paylaşımı yapan iki türün popülasyon dinamikleri, sabit uç sıcaklıklı bir çubuğun ısı dağılımı ve pazar davranışı sergileyen tipik bir müşterinin tepkileri de matematiksel modellemenin örnekleri arasındadır (Sulaimanva vd., 2022).

Matematiksel modeller çeşitli parametreler yardımıyla kurulur. Bu parametreler problemde yükseklik, ısı, birey sayısı, hız gibi bağımsız değişken değerlerinden oluşmaktadır. Bu parametreler diferansiyel denklemler ve integral hesaplamaları yardımıyla modellenir. Bu modellerin çözümlerinin bulunması her zaman mümkün değildir. Bu durumda çeşitli sayısal yöntemlerden yararlanılarak yaklaşık çözümler elde edilir. Matematik biliminde kaydedilen güçlü ilerleme ile birlikte literatürdeki bilinen yaklaşım yöntemleri yerini daha karmaşık ve daha faydalı yöntemlere bırakmıştır (Shoaib vd., 2021). Bu sebepten bu konuda çalışan araştırmacılar yeni metotlar vasıtasıyla bilim alanındaki modellere yeni sayısal yöntemler geliştirmiştir. Bu yaklaşık çözümlerin elde edilmesi bu problemler hakkında yorum yapmayı sağlamakta ve sonuç olarak çeşitli bilim dallarına fayda getirmektedir. Bu sebeple diferansiyel denklemler ve onların matematiksel modelleri için yeni sayısal yöntemlerin geliştirilmesi bilimde önemli bir yere sahiptir. Bu amaçla literatürde birçok metot geliştirilmiştir. Bu sayısal yöntemlerin bazıları; Laguerre metodu, Bessel kollokasyon metodu, Adomian ayrıştırma metodu, Pell-Lucas metodu (Yüzbaşı vd., 2020), Taylor sıralama metodu (Işık vd., 2013), Bernstein sıralama yöntemi (She vd., 2023), Hermit polinom yöntemi (Yüzbaşı vd., 2023), Chebyshev kollokasyon yöntemi (Kumar vd., 2023), Lagrange kollokasyon yöntemi (Güngüm vd., 2020), Galerkin tipi sayısal yöntem (Dizic-

heh vd., 2020) şeklinde olup bu yöntemler geliştirilmeye devam etmektedir. Bu yöntemlerin tümünün etkin bir şekilde kullanılabilmesi, bilgisayar programlarının diferansiyel denklemleri ve denklem sistemlerini hem daha hızlı hem de daha güvenilir bir biçimde çözebilmesini gerektirir (Mehdifar vd., 2021). Bu alanda en sık tercih edilen programlar ise Matlab, Maple ve Mathematica'dır.

Öte yandan, ortogonal polinomların ve özel fonksiyonların çarpımlarını içeren entegrasyonlar, analiz, fizik ve mekaniğin çeşitli alanlarında yaygın olarak kullanılan önemli araçlardır. Bu araçların matematiksel modelleri, diferansiyel ve integral-diferansiyel denklemler de dahil olmak üzere, denklemler ve denklem sistemlerinin çözülmesinde etkin bir şekilde kullanılır.

En yeni polinom dizileri, Prof Dr. Karim Boubaker'in 2007 yılında ısı denklemini çözerken verdiği Boubaker polinomlarıdır. Boubaker polinomları, piroliz spreycihazının termal modelini veren bir fizik çalışmasında önerilen bir polinom dizisinin bileşenleridir. Belirli bir alan içindeki ısı transferi denklemini çözmek için matematiksel bir aracı temsil ederler. Boubaker polinomlarının ortogonalleştirilmesi literatürde tartışılmamıştır (Khoso vd., 2020). Bu tür polinom dizilerinin uygulama alanlarının çoğu ortogonal polinomlar gerektirdiğinden, Boubaker polinomlarının ortogonallığı uygulama alanlarının genişletilmesine katkı sağlayan etkili bir polinom olarak karşımıza çıkmaktadır.

Boubaker polinomları, Shaikh ve Boubaker tarafından açık birim diskte gerçek polinomların karmaşık sıfırlarının sayısının hesaplanmasına yönelik yeni bir sayısal yöntem geliştirmek için kullanılmıştır (Shaikh ve Boubaker 2016). Bu polinomlar aynı zamanda tek dereceli tek serbestlik dereceli sistemlerin çözümünde (Yüzbaşı vd., 2025), doğrusal olmayan Volterra-Fredholm integral denklemlerini çözmek ve Boubaker-Turki polinomlarını kullanarak homojen olmayan ikinci dereceden diferansiyel denklemleri çözmek için de kullanılmıştır (Dada vd., 2008). İyi bilinen Boubaker polinom genişleme şeması ve ilgili Boubaker teoremi, Bakır kalay sülfür üçlü malzemelerin öncül oranının optimizasyonu için yaygın olarak kullanılmıştır. Boubaker polinomlarının bazı yeni özellikleri ve Love integral denkleminin yaklaşık analitik çözümüne uygulamaları sunulmuştur (Milo-vanović vd., 2012). Barry 2013'de m-Boubaker polinomları için Chebyshev'e bağlı homojen olmayan ikinci mertebeden diferansiyel denklem formüle edilmiştir. Boubaker polinomlarının Lotka-Volterra denklemine uygulanması ve Routh-Hurwitz kriteriyle karar-

lılık tartışılmıştır (Dudey vd., 2010). Labiadh ve Boubaker Hedi vd., 2007, farklı analitik ifadeler önermeye yönelik daha ileri çabalara bir kaynak olarak Boubaker polinomlarına yönelik Sturm-Liouville şekilli bir karakteristik diferansiyel denklem sunmuştur. Ayrıca sınır değer problemlerinin sayısal çözümü Boubaker polinomlarının geliştirilmiş bir versiyonu kullanılarak elde edilmiştir. (Ahmed 2020).

Bu çalışmada yer alan problem ve sistemlerin yaklaşık çözümleri için sunulan yeni yöntem vasıtası ile daha verimli ve etkili sonuçlar bulunabilmesi amaçlanmıştır. Bu yöntem Boubaker polinomları kullanılarak geliştirilmiştir. Boubaker polinomları günümüzde farklı sayısal yöntemlerde kullanılmış olup çeşitli problemlerin yaklaşık çözümlerinin bulunması bağlamında yararlı çalışmalar bilime kazandırılmıştır. Bizim bu tez çalışmasında bu tez kapsamında geliştirilen yöntem literatürdeki yöntemlerden farklı olup, geliştirilme aşamaları bakımından daha iyi sonuç vermesi sağlanmıştır.

2. KAYNAK TARAMASI

2.1. Ön Bilgiler

Tanım 2.1. Bağımsız değişken ile ona bağlı değişken arasındaki ilişkiyi ve bu ilişkinin türevlerini gösteren ifadeler, adi diferansiyel denklemler olarak bilinir. Tek bir bağımsız değişken içeren adi diferansiyel denklemler genel olarak aşağıdaki biçimde yazılır (Ogunniran vd., 2020):

$$f(t, \sigma, \sigma', \sigma'', \dots, \sigma^{(n)}) = 0 \quad (2.1)$$

Burada $\sigma^{(n)}$, bağımlı değişken olan σ 'nın, bağımsız değişken t 'e göre alınan n 'inci türevini ifade etmektedir.

Tanım 2.2. Aynı bilinmeyenleri içeren birden fazla doğrusal denklemden oluşan ifadeler kümesine doğrusal denklem sistemi denir. Genel olarak, $i = 1, 2, \dots, k$ ve $j = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere doğrusal denklem sistemi aşağıdaki biçimde ifade edilir (Boyce, 2021):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,1}t_1 + \varepsilon_{1,2}t_2 + \dots + \varepsilon_{1,n}t_n &= \beta_1 \\ \varepsilon_{2,1}t_1 + \varepsilon_{2,2}t_2 + \dots + \varepsilon_{2,n}t_n &= \beta_2 \\ \varepsilon_{3,1}t_1 + \varepsilon_{3,2}t_2 + \dots + \varepsilon_{3,n}t_n &= \beta_3 \\ &\vdots \\ \varepsilon_{k,1}t_1 + \varepsilon_{k,2}t_2 + \dots + \varepsilon_{k,n}t_n &= \beta_k. \end{aligned}$$

Burada $\varepsilon_{i,j}$ ve β_i reel katsayıları, t_j ifadeleri ise sistemdeki bilinmeyenleri temsil etmektedir.

Tanım 2.3. Uygulamalarda görünen denklemler genellikle ikinci mertebeden denklemlerdir, ancak zaman zaman daha yüksek mertebeli denklemler de ortaya çıkar. Bu nedenle, modern fizik perspektifinden bakıldığında dünyanın "ikinci mertebeden" olduğu genel olarak kabul edilir. Yüksek mertebeden doğrusal adi diferansiyel denklemlere ilişkin temel sonuçlar, esasen ikinci mertebeden denklemlerle aynıdır; 2'nin yerine n gelir. Önemli lineer bağımsızlık kavramı, ikiden fazla fonksiyon söz konusu olduğunda biraz daha karmaşık hale gelir (Teschl, 2012). Genel halde yüksek mertebeden lineer diferansiyel denklemler

$$y^{(n)} + S_{n-1}(x)y^{(n-1)} + S_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \dots + S_0(x)y = 0 \quad (2.2)$$

şeklinde ifade edilir. Burada S_i 'ler x üzerinde tanımlı fonksiyonlardır.

Tanım 2.4. *Matris gösterimi, doğrusal denklem sistemlerinin farklı bir biçimde ifade edilmesini sağlayan bir yöntemdir. $\epsilon \mathbf{T} = \beta$ ifadesi, lineer denklem sisteminin matris biçiminde gösterimidir (Anton, 2013). Bu bağlamda:*

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{1,1} & \epsilon_{1,2} & \dots & \epsilon_{1,n} \\ \epsilon_{2,1} & \epsilon_{2,2} & \dots & \epsilon_{2,n} \\ \epsilon_{3,1} & \epsilon_{3,2} & \dots & \epsilon_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon_{n,1} & \epsilon_{n,2} & \dots & \epsilon_{n,n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

Bu durumda genişletilmiş katsayılar matrisi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$[\epsilon \mid \beta] = \begin{bmatrix} \epsilon_{1,1} & \epsilon_{1,2} & \dots & \epsilon_{1,n} & : & \beta_1 \\ \epsilon_{2,1} & \epsilon_{2,2} & \dots & \epsilon_{2,n} & : & \beta_2 \\ \epsilon_{3,1} & \epsilon_{3,2} & \dots & \epsilon_{3,n} & : & \beta_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & : & \vdots \\ \epsilon_{n,1} & \epsilon_{n,2} & \dots & \epsilon_{n,n} & : & \beta_n \end{bmatrix}$$

Tanım 2.5. *Denklem sistemlerinin çözümünün varlığı ve tekliği belirlenirken determinant veya tersinirlik kontrol edilir. $\mathbf{A}$ matrisi $n \times n$ boyutunda kare bir matris olmak üzere eğer $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$ sistemi her $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$ için tekil çözüme sahipse bu durumda $\mathbf{A}$ tersinir matristir (Strang, 2009). Çözümü bulmak için bu denklem sistemi her iki taraftan $\mathbf{A}$ matrisinin tersi ile çarpılır yani*

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

ifadesi ile çözüm elde edilir.

2.2. Temel Klasik Polinomlar

Klasik polinomlar uygulamalarına göre birçok yöntemle tanımlanmıştır. Böylece fonksiyonel sınıflar olarak tanım ifadelerine ve uygulamalarına göre sıralamak mümkündür. Diferansiyel denklemlerin çözümleri olarak tanımlanan Gegenbauer ve Legendre polinomları, rekürans formülleriyle tanımlanan Fibonacci, Euler, Bessel ve Bernoulli polinomları, değer kümesine göre tanımlanan Lagrange ve Newton polinomları ve son olarak

iyi bilinen trigonometrik ilişkileri ile tanımlanan Chebyshev polinomları bu sınıflandırma bağlamında örnek olarak verilebilir. (Szegő, 1975).

2.3. Boubaker Polinomları

Boubaker polinomlarının karakteristik diferansiyel denklemi, seri çözümü, üç terimli yineleme ilişkisi ve üreteç fonksiyonu iyi bilinmektedir (Boubaker vd., 2007). Boubaker polinomlarının karakteristik diferansiyel denklemi

$$(x^2 - 1)(3\ell x^2 + \ell - 2)y'' + 3\ell(\ell x^2 + 3\ell - 2)y' - \ell(2\ell^2 x^2 + \ell^2 - 6\ell + 8)y = 0 \quad (2.3)$$

şeklindedir (Davaeifar vd., 2017). Ayrıca seri formu

$$B_\ell(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \ell/2 \rfloor} (-1)^j \left(\frac{\ell - 4j}{\ell - j} \right) \binom{\ell - j}{\ell} x^{\ell-2j} \quad (2.4)$$

ve buradan hareketle Boubaker polinomlarının ilk dört terimi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$B_0(x) = 1$$

$$B_1(x) = x$$

$$B_2(x) = x^2 + 2$$

$$B_3(x) = x^3 + x$$

İlk üç terime ait rekürans bağıntısı,

$$B_\ell(x) = xB_{\ell-1}(x) - B_{\ell-2}(x), \quad \ell \geq 3 \quad (2.5)$$

şeklinde elde edilmektedir. Üreteç fonksiyonu olan $f_B(x, t)$ (Boubaker vd., 2007)

$$f_B(x, t) = \frac{1 + 3t^2}{1 + t(t - x)} \quad (2.6)$$

şeklindedir. Karakteristik differensiyel denklemi ise

$$A_\tau y'' + B_\tau y' + C_\tau y = 0$$

şeklindedir ve burada

$$A_\tau = (x_2 - 1)(3\tau x^2 + x - 2),$$

$$B_\tau = 3x(\tau x^2 + 3\tau - 2),$$

$$C_\tau = -\tau(3\tau^2 x^2 + \tau^2 - 6\tau + 8)$$

ile tanımlanmıştır. Ayrıca Boubaker polinomları ve Fermat polinomları olan $F_\tau(x)$ arasındaki ilişki

$$B_\ell(x) = \frac{1}{(\sqrt{2})^\tau} F_\tau\left(\frac{2\sqrt{2} \times x}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}^{\tau-2}} F_{\tau-2}\left(\frac{2\sqrt{2} \times x}{3}\right), \quad \tau = 0, 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlıdır (Milovanovic vd., 2012).

3. MATERYAL VE METOT

Bu tez kapsamında birinci mertebeden pantograph denklemleri, birinci mertebeden multi-pantograph denklemleri, Lane-Emden diferansiyel denklemi, Riccati diferansiyel denklemi, lojistik popülasyon modeli, yüksek mertebeden lineer diferansiyel denklemler ve geliştirilmiş pantograph denklemleri ele alınacak ve bu denklemleri çözmek için integral işlemi ve Boubaker polinomlarına dayalı olarak yeni bir kollokasyon yöntemi sunulacaktır.

3.1. Birinci Mertebeden Lineer Pantograph Diferansiyel Denklemi ve Kullanılacak Yaklaşım

İlk olarak $y(a) = y_a$ koşulu altında

$$y'(x) = \alpha y(x) + \beta y(qx) + f(x), \quad 0 \leq a \leq x \leq b, \quad 0 < q < 1 \quad (3.8)$$

lineer pantograph diferansiyel denklemi ele alınacaktır. Bu problem için denklemin en yüksek mertebesi olan $y'(x)$ ifadesine yaklaşım yapılır. Bu yaklaşım

$$y'(x) = \sum_{l=0}^N a_l B_l(x) = \mathbf{B}(x)\mathbf{A} \quad (3.9)$$

şeklinde ve burada $B_l(x)$ 'ler Denklem (2.4) ile verilen Boubaker polinomları terimlerini temsil eder (Yüzbaşı vd., 2018) ve

$$B_l(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} (-1)^j \binom{l-4j}{l-j} x^{\ell-2j} \quad (3.10)$$

ve

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_N \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{X}(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^N \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır (Yüzbaşı vd., 2018). (3.9) yaklaşımından integral alındıktan ve koşullar kullanıldıktan sonra bağımlı değişkenin yaklaşım formu bulunur. Ardından gecikmeli terimin matris formu bulunur. (3.9) yaklaşımı, elde edilen bağımlı değişkenin ve gecikmeli terimin matris formları diferansiyel denklemde yerine yerleştirildikten sonra kollokasyon noktaları kullanılarak diferansiyel denklem problemi lineer cebirsel bir sisteme indirgenir. Elde edilen cebirsel sistem çözüldükten sonra katsayılar matrisi bulunur ve bağımlı değişkenin matris formunda yerine yazılarak yaklaşık çözüme ulaşılır. Yöntemin

oluşturulması Bulgular ve Tartışmalar bölümünde matrislere dayalı olarak detaylı olarak açıklanacaktır. Burada ele alınan problem, tez yazarı ve danışmanı tarafından bildiri metni olarak sunulmuştur (Yüzbaşı vd., 2023).

3.2. Birinci Mertebeden Multi-Pantograph Gecikmeli Diferansiyel Denklemler ve Kullanılacak Yaklaşım

İkinci olarak birinci mertebeden multi-pantograf diferansiyel denklem ele alınacaktır. Bu denklem

$$y'(x) = f(x) + \alpha(x)y(x) + \sum_{i=1}^M \beta_i(x)y(q_i x), \quad a \leq x \leq b, \quad 0 < q_i < 1 \quad (3.11)$$

şeklinde olup $f(x)$, $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ fonksiyonları bilinen fonksiyonlardır ve q_i değeri gecikme değeridir ve bu problem $y(a) = y_a$ koşulu altında ele alınacaktır (Yüzbaşı vd., 2018). Bu denklem için

$$y'_N(x) = \sum_{\ell=0}^N a_\ell B_\ell(x) \quad (3.12)$$

birinci türeve olan yaklaşım formu ele alınacaktır. (3.12) yaklaşımından integral alınarak ve başlangıç koşulları uygulanarak bağımlı değişkenin yaklaşık formu elde edilir. Gecikmeli terimin matris formu da belirlendikten sonra, bu ifadeler diferansiyel denklemde yerine konularak kollokasyon noktaları yardımıyla problem doğrusal bir cebirsel sisteme indirgenir. Elde edilen katsayılar matrise yerleştirilerek yaklaşık çözüme ulaşılır. Bu yaklaşım, 3.1. bölümünde ele alındığı yöntem doğrultusunda uygulanacaktır. Burada ele alınan problem tez yazarı ve danışmanı tarafından araştırma makalesi olarak yayımlanmıştır (Yüzbaşı vd., 2024).

3.3. Lane-Emden Diferansiyel Denklemleri ve Kullanılacak Yaklaşım

Bu problemlerin devamında astrofizikte sıklıkla kullanılan Lane-Emden diferansiyel denklemi ele alınacaktır. Bu denklem aşağıdaki şekilde ele alınacaktır:

$$y''(x) + \frac{\alpha}{x}y'(x) + r(x)y(x) = f(x), \quad 0 \leq x \leq b. \quad (3.13)$$

Bu denklem $y'(0) = a$ ve $y(0) = b$ koşulları ile ele alınacaktır (Yüzbaşı vd., 2011). Bu denklem için denklemin en yüksek mertebeden olan ikinci türeve olan yaklaşım

$$y''_N(x) = \sum_{\ell=0}^N a_{\ell} B_{\ell}(x) \quad (3.14)$$

şeklinde yapılacaktır. (3.14) yaklaşımında bir kez integral alındıktan ve koşullar kullanıldıktan sonra bağımlı değişkenin yaklaşım formu bulunur. (3.14) yaklaşımı ile birinci türev ve bağımlı değişkenin matris formunun diferansiyel denklemde yerine yerleştirildikten sonra kollokasyon noktaları kullanılarak diferansiyel denklem problemi lineer cebirsel bir sisteme indirgenir. Elde edilen cebirsel sistem çözüldükten sonra katsayılar matrisi bulunur ve bağımlı değişkenin matris formunda yerine yazılarak yaklaşık çözüme ulaşılır. Tez aşamasında tezdeki (3.13) problemi için yöntemin uygulanması araştırma makalesi olarak yayınlanmıştır (Yüzbaşı vd., 2025). Yöntemin oluşturulması Bulgular ve Tartışmalar bölümünde matrislere dayalı olarak detaylı olarak açıklanacaktır.

3.4. Popülasyonun Lojistik Büyümesi Modeli ve Kullanılacak Yaklaşım

Popülasyon biyolojisinde matematiksel modellerin kullanılması uygulamalı matematik ve bilimde çok önemli bir role sahiptir. Bu modeller genellikle doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerden ve sistemlerden pratik olarak yararlanır. Matematik, fizik, biyoloji ve kimya, canlı sistemler üzerine yapılan araştırmalarda bütünüleyici bir bakış açısının geliştirilmesi için gereklidir. Her organizma ve çevresi arasında biyotik etkileşimler vardır. Bir türün veya topluluğun büyümesi ve gelecekte hayatta kalması bu etkileşimlere bağlıdır. Belirli koşullar altında hızlı nüfus artışları nüfus dinamikleriyle ilgilidir. Bu kısa sürede popülasyondaki birey sayısının değişmesi bazı etkileşimlerden kaynaklanmaktadır. Bu etkileşimler, ölüm oranı, hastalık, üreme, yiyecek tedariki, avcılar, rekabet ve sosyal bağlam gibi birçok parametreyi içerir. Sürekli zaman yaklaşımında bir popülasyondaki bireylerin sayısı sürekli olarak değişmektedir. Bir tür ile çevresi arasındaki etkileşim, en yaygın modelleme türüdür. Son olarak popülasyonun lojistik büyümesi modeli ele alınacaktır. Bu denklem

$$p' = rp\left(1 - \frac{p}{K}\right), \quad \alpha \leq x \leq \beta \quad (3.15)$$

başlangıç koşulları olan

$$p(0) = \lambda \quad (3.16)$$

ile birlikte ele alınacaktır (Yüzbaşı, 2016). Bu problem için

$$p'_N(x) = \sum_{\ell=0}^N a_\ell B_\ell(x) \quad (3.17)$$

yaklaşım formu üzerinden metot kurularak $p(x)$ yaklaşık çözümü elde edilecektir (Yüzbaşı vd. 2024). (3.17) yaklaşımından integral alındıktan ve koşullar kullanıldıktan sonra bağımlı değişkenin yaklaşım formu bulunur. (3.17) yaklaşımı, elde edilen bağımlı değişkenin matris formunun diferansiyel denklemde yerine yerleştirildikten sonra kollokasyon noktaları kullanılarak diferansiyel denklem problemi lineer olmayan cebirsel bir sisteme indirgenir. Elde edilen cebirsel sistem çözüldükten sonra katsayılar matrisi bulunur ve bağımlı değişkenin matris formunda yerine yazılarak yaklaşık çözüme ulaşılır. Yöntemin oluşturulması Bulgular ve Tartışmalar bölümünde matrislere dayalı olarak detaylı olarak açıklanacaktır.

3.5. Riccati Diferansiyel Denklemleri ve Kullanılacak Yaklaşım

Lineer olmayan bir diferansiyel denklem olan Riccati diferansiyel denklemleri ele alınacaktır. Doğrusal olmayan diferansiyel denklemler fizik, mühendislik ve uygulamalı matematik başta olmak üzere birçok alanda kullanılmaktadır. Bu nedenle son yıllarda çeşitli problemlerin modellenmesinde önemli bir konuma sahiptir. Örneğin tıp alanında bazı salgın hastalıkların yayılmasına yönelik oluşturulan modellerde kullanılmıştır. Fizikteki modelleme problemlerinde ve dinamik modellerde de sıklıkla karşılaşıyoruz (Wheeler, 2004; Shadi vd., 2021). Astronomi ve uzay aracı hareketleri için çeşitli modeller oluşturulmuştur. Ayrıca biyoloji, ekonomi ve iklim değişikliği konuları doğrusal olmayan denklem sistemi yardımıyla modellenmiştir (Kengne, 2014; Hamouda vd., 2013). Lineer olmayan bir adi diferansiyel denklem olan Riccati diferansiyel denklemleri aşağıda şekilde tanımlanmaktadır (El Gezery vd., 2025):

$$y'(x) = r(x)y^2(x) + q(x)y(x) + p(x), \quad \alpha \leq x \leq \beta. \quad (3.18)$$

Denklem $y(\alpha) = y_\alpha$ koşulu ile birlikte ele alınacaktır. Bu denklem için birinci türeve yaklaşım

$$y'_N(x) = \sum_{\ell=0}^N a_\ell B_\ell(x) \quad (3.19)$$

şeklinde olacaktır (Yüzbaşı vd. 2024). (3.19) yaklaşımı integral alındıktan ve başlangıç koşulları uygulandıktan sonra, bağımlı değişkenin yaklaşık ifadesi elde edilir. Bu matris formu, diferansiyel denkleme uygulanıp kollokasyon noktaları aracılığıyla problem, lineer olmayan cebirsel denklemlerden oluşan bir sisteme çevrilir. Elde edilen cebirsel sistemin çözülmesiyle katsayılar matrisi belirlenir ve bu katsayılar bağımlı değişkenin matris formuna yerleştirilerek yaklaşık çözüme ulaşılır. Bu yöntemin uygulanışı, Bulgular ve Tartışmalar bölümünde matris temelli olarak ayrıntılı biçimde sunulacaktır.

3.6. Yüksek Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler ve Kullanılacak Yaklaşım

Bu kısımda

$$\sum_{\ell=0}^m P_{\ell}(x)y^{(\ell)}(x) = f(x) \quad (3.20)$$

formundaki yüksek mertebeden lineer diferansiyel denklem

$$y^{(i)}(a) = \lambda_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-1 \quad (3.21)$$

koşulu altında ele alınacaktır. Burada $f(x)$ bilinen fonksiyon olup, λ_i reel sabitler ve $P_{\ell}(x)$ bilinen x 'e bağlı ve ele alınan aralıkta tanımlı bir fonksiyondur. Boubaker kollokasyon yönteminde ki amaç, (3.20) denklemini (3.21) koşulu altında ele alıp, yaklaşık çözümlerini belirlemektir. N . mertebeden kesilmiş Boubaker serisi cinsinden çözüm elde edilirken m . mertebeden türeve yaklaşım

$$y_N^{(m)}(x) = \sum_{\ell=0}^N a_{\ell} B_{\ell}(x) \quad (3.22)$$

şeklinde olacaktır. (3.22) yaklaşımı, yeterli sayıda integral alındıktan ve başlangıç koşulları uygulandıktan sonra bağımlı değişkenin ve ilgili türevlerinin yaklaşık ifadelerinin elde edilmesiyle başlatılır. Yaklaşımlar aracılığıyla diferansiyel denklem matris formuna çevrilir ve kollokasyon noktalarının uygulanmasıyla problem, lineer cebirsel denklemlerle ifade edilebilen bir sisteme indirilir. Edinilen sistemin çözülmesiyle yaklaşık çözüm belirlenir. Bu yöntemin uygulanışı, Bulgular ve Tartışmalar bölümünde matris temelli olarak ayrıntılı biçimde sunulacaktır.

3.7. Genelleştirilmiş Pantograph Denklemi ve Kullanılacak Yaklaşım

Ayrıca literatürde yer alan pantograph denklemlerinin daha genel bir formu, Sezer ve arkadaşları (2005) tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$y^{(m)}(x) = \sum_{i=0}^J \sum_{k=0}^{m-1} P_{ik}(x) y^{(k)}(q_{ik}x + \beta_i) + f(x), \quad -\infty < a \leq x \leq b < \infty, \quad 0 < q_i < 1. \quad (3.23)$$

Bu genel yapıda, bilinmeyen fonksiyonun türevlerinin hem ölçeklenmiş (q_{ik}) hem de kaydırılmış (β_i) argümanlarla birlikte değerlendirilmesi söz konusudur. Denklem, genellikle aşağıdaki başlangıç koşulları altında incelenmektedir:

$$y^{(i)}(a) = \lambda_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-1. \quad (3.24)$$

Bu çalışmada, söz konusu diferansiyel denkleme yaklaşım, en yüksek mertebeden türev $y^{(m)}(x)$ üzerinden kurulacaktır. Yaklaşık çözüm, kesilmiş Boubaker polinomları serisi kullanılarak aşağıdaki şekilde ifade edilecektir:

$$y_N^{(m)}(x) = \sum_{\ell=0}^N a_{\ell} B_{\ell}(x). \quad (3.25)$$

(3.25) yaklaşımından gerekli sayıda integral alındıktan ve koşullar kullanıldıktan sonra diğer türevli terimler ve bağımlı değişkenin yaklaşım formları türünden matris formu elde edilir. Bu matris formları ve seçilen kollokasyon noktaları, diferansiyel denklem probleminde kullanılarak ilgili problem lineer cebirsel denklem sistemine dönüştürülecektir. Bu çalışmanın ilerleyen bölümlerinde her bir problem için yöntemin uygulanma adımları detaylı bir şekilde ele alınacaktır.

4. BULGULAR VE TARTIŞMALAR

Bu bölümde öncelikle kollokasyon noktalarını tanımlan verilip yöntemin gerektirdiği temel matris ilişkilerini tanımlayarak çözüm yönteminin nasıl çalıştığını anlatacağız. Bu tezde ele alınan yedi farklı problem içinde matris ilişkileri tanıtılacak ve bu bağlamda yöntem tüm problemler için sistematik olarak kurulacaktır. Ayrıca, rezidüel tahmin yöntemi getirilerek yaklaşık çözümler iyileştirilir. Yöntemin doğruluğunu ve etkinliğini test etmek amacıyla çeşitli sayısal örnekler her problem için verilerek, edinilem yaklaşık çözümler ve rezidüel veriler tablo ve grafikler halinde sunulacaktır. Örnek hesaplamalar bilgisayarda Matlab programında yazılmış bir program kullanılarak yapılacaktır. Ayrıca sayısal örnekler kullanarak yöntemimizi diğer yöntemlerle karşılaştırılarak, aradaki sayısal farklar ile yöntemimizin kullanılabilirliğinin gösterilmesi amaçlanmıştır.

4.1. Kollokasyon Noktaları

Bir önceki bölümde tanıtılan altı farklı diferansiyel denklem modeli için yaklaşık çözümler aranırken aşağıdaki N kesme sınırına göre verilmiş olan kollokasyon noktaları kullanılacaktır. Bu kollokasyon noktaları

$$x_j = a + \frac{b-a}{N}j, \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (4.26)$$

şeklinde olup j 'nin artan değerleri için artarak giden x_i değerlerinden oluşmaktadır (Yüzbaşı vd. 2018).

4.2. Yöntem

4.2.1. Birinci Mertebeden Pantograph Diferansiyel Denklemi için Yöntemin Oluşturulması

İlk olarak $y(a) = y_a$ koşulu altında

$$y'(x) = \alpha y(x) + \beta y(qx) + f(x), \quad 0 \leq a \leq x \leq b, \quad 0 < q < 1 \quad (4.27)$$

lineer diferansiyel denklemi ele alınacaktır (Zhang, 2012). Bu problem için geliştirilen yöntem tez aşamasında bildiri olarak sunulmuştur (Yüzbaşı vd. 2023). Bu denklem için

en yüksek mertebeden türeve yani birinci mertbeden türeve yaklaşım

$$y'(x) = \sum_{l=0}^N a_l B_l(x) = \mathbf{B}(x)\mathbf{A} \quad (4.28)$$

şeklindedir ve burada $B_l(x)$ 'ler Boubaker polinomları terimlerini temsil eder ve ayrıca burada

$$\mathbf{B}(x) = \begin{bmatrix} B_0(x) & B_1(x) & B_2(x) & \dots & B_N(x) \end{bmatrix} \quad \text{ve} \\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_N \end{bmatrix}$$

şeklinde vektörlerdir. Ayrıca Boubaker polinomlarının katsayılar matrisini N tek sayılar olmak üzere,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \wp_{0,0} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \wp_{1,0} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \wp_{2,1} & 0 & \wp_{2,0} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \wp_{N-1, \frac{N-3}{2}} & 0 & \wp_{N-1, \frac{N-3}{2}} & \dots & \wp_{N-1,0} & 0 \\ 0 & \wp_{N, \frac{N-1}{2}} & 0 & \dots & 0 & \wp_{N,0} \end{bmatrix}$$

ve N çift sayılar olmak üzere

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \wp_{0,0} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \wp_{1,0} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \wp_{2,1} & 0 & \wp_{2,0} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \wp_{N-1, \frac{N-2}{2}} & 0 & \dots & \wp_{N-1,0} & 0 \\ \wp_{N, \frac{N}{2}} & 0 & \wp_{N, \frac{N-2}{2}} & \dots & 0 & \wp_{N,0} \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır ve buradaki terimler için bağıntı (Khoso vd., 2020)

$$\wp_{n,\mu} = (-1)^\mu \left(\frac{n-4\mu}{\mu!} \right) \prod_{j=\mu+1}^{2\mu-1} (n-j), \quad n, \mu = 0, 1, \dots, N$$

şeklinde tanımlıdır. Boubaker polinomları için

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{C} \quad (4.29)$$

matris formu elde edilir. Burada elde edilen bağıntı (4.27) denkleminde yerine yazılırsa

$$y'_N(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{C}\mathbf{A} \quad (4.30)$$

elde edilir. Burada metodu uygulamaya başlamak için gerekli matris formları bulunmuş olur. İlk olarak yaklaşımın matris formunun a 'dan x 'e integralini alınırsa

$$\int_a^x y'(t)dt = \int_a^x \mathbf{X}(t)\mathbf{C}\mathbf{A} dt \quad (4.31)$$

formu elde edilir burada koşul olan $y(a) = y_a$ ifadesi kullanılırsa

$$y(x) = y_a + [\tilde{\mathbf{X}}(x) - \tilde{\mathbf{X}}(a)]\mathbf{C}\mathbf{A} \quad (4.32)$$

ulaşılır, burada

$$\tilde{\mathbf{X}}(x) = \begin{bmatrix} x & \frac{x^2}{2} & \dots & \frac{x^{N+1}}{N+1} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

şeklinde tanımlı matristir. Burada $\tilde{\mathbf{X}}$

$$\tilde{\mathbf{X}} = x\mathbf{X}(x)\mathbf{V} \quad (4.34)$$

şeklinde ifade edilecek olup burada

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{N+1} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanacaktır.

Sonrasında (4.34) ifadesi denklem (4.32)'de yerine yazılırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$y(x) = y_a + [x\mathbf{X}(x)\mathbf{V} - a\mathbf{X}(a)\mathbf{V}]\mathbf{C}\mathbf{A}. \quad (4.35)$$

Burada amacımın a_i katsayılarına erişmek ve a_i katsayılarını kullanarak yaklaşık çözüm elde etmektir. Denklem (4.35) için $x \rightarrow xq$ dönüşümü yapılırsa

$$y(qx) = y_a + [qx\mathbf{X}(qx)\mathbf{V} - a\mathbf{X}(a)\mathbf{V}]\mathbf{C}\mathbf{A} \quad (4.36)$$

ulaşılır. Buradaki $\mathbf{X}(qx)$ matrisi (Yüzbaşı vd., 2024),

$$\mathbf{Q}(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & q^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q^N \end{bmatrix}$$

yardımla

$$\mathbf{X}(qx) = \mathbf{X}(x)\mathbf{Q}(q) \quad (4.37)$$

şeklinde ifade edilebilir. Elde edilen (4.37) ifadesi denklem (4.36)'de yerine yazılırsa

$$y(qx) = y_a + [qx\mathbf{X}(x)\mathbf{Q}(q)\mathbf{V} - a\mathbf{X}(a)\mathbf{V}]\mathbf{CA} \quad (4.38)$$

denkleminin elde edilceği kolayca görülebilir (Yüzbaşı vd. 2024). Denklem (4.30), (4.35) ve (4.38)' de elde ettiğimiz ifadeleri (4.27) denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(x)\mathbf{CA} &= f(x) + \alpha(u_a + [x\mathbf{X}(x)\mathbf{V} - a\mathbf{X}(a)\mathbf{V}]\mathbf{CA}) + \\ &\quad \beta(y_a + [qx\mathbf{X}(x)\mathbf{Q}(q)\mathbf{V} - a\mathbf{X}(a)\mathbf{V}]\mathbf{CA}) \end{aligned} \quad (4.39)$$

ifadesini elde etmiş oluruz. Eğer elde edilen (4.39) denklemi düzenlenirse

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{X}(x) - \alpha[x\mathbf{X}(x) - a\mathbf{X}(a)]\mathbf{V} - \beta[qx\mathbf{X}(x)\mathbf{Q}(q) - a\mathbf{X}(a)]\mathbf{V} \right] \mathbf{A} = \\ f(x) + \alpha y_a + \beta y_a \end{aligned} \quad (4.40)$$

ulaşılır. Buradan denklem (4.26) tanımlanan kollokasyon noktaları denklem (4.40)'de yerine yazılırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{X}(x_j) - \alpha[x_j\mathbf{X}(x_j) - a\mathbf{X}(a)] - \beta[qx_j\mathbf{X}(x_j)\mathbf{Q}(q) - a\mathbf{X}(a)]\mathbf{V} \right] \mathbf{CA} = \\ f(x_j) + \alpha y_a + \beta y_a. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Ayrıca denklem (4.41) matris formda aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\left[\mathbf{X} - \alpha[\bar{\mathbf{X}}\mathbf{X} - a\mathbf{X}(a)]\mathbf{V} - \beta[q\bar{\mathbf{X}}\mathbf{X}\mathbf{Q}(q) - a\mathbf{X}(a)]\mathbf{V} \right] \mathbf{CA} = \mathbf{F} + \bar{\mathbf{C}}y_a + \bar{\mathbf{B}}y_a. \quad (4.42)$$

Burada

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0) \\ \mathbf{X}(x_1) \\ \mathbf{X}(x_2) \\ \vdots \\ \mathbf{X}(x_N) \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} x_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_N \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \\ \beta \\ \vdots \\ \beta \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{bmatrix}.$$

Buradan temel matris denklemi (4.42)

$$\mathbf{WA} = \mathbf{G} \quad \text{veya} \quad [\mathbf{W} : \mathbf{G}] \quad (4.43)$$

şeklinde yazılır ve burada

$$\mathbf{G} = \mathbf{F} + \bar{\mathbf{C}}y_a + \bar{\mathbf{B}}y_a \quad (4.44)$$

ve

$$\mathbf{W} = [\mathbf{X} - \alpha[\bar{\mathbf{X}}\mathbf{X} - a\mathbf{X}(a)]\mathbf{V} - \beta[q\bar{\mathbf{X}}\mathbf{X}\mathbf{Q}(q) - a\mathbf{X}(a)]\mathbf{V}]\mathbf{C} \quad (4.45)$$

şeklinde dir. $\mathbf{W}\mathbf{A} = \mathbf{G}$ lineer cebirsel sistem üzerinden işlem yapılarak, bilinmeyenler matris formu olan $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_N \end{bmatrix}$ matrisi hesaplanır. Ardından $\mathbf{A}$ matrisi denklem (4.35) de yerine yazılırsa aranan yaklaşık çözüm

$$y(x) = y_a + [x\mathbf{X}(x)\mathbf{V} - a\mathbf{X}(a)\mathbf{V}]\mathbf{C}\mathbf{A} \quad (4.46)$$

şeklinde bulunmuş olur (Yüzbaşı vd. 2024).

4.2.2. Birinci Mertebeden Multi Pantograph Diferansiyel Denklemini İçin Yöntemim Oluşturulması

İkinci olarak birinci mertebeden pantograph diferansiyel denklem ele alınacaktır. Bu denklem (Yüzbaşı vd., 2018)

$$y'(x) = f(x) + \alpha(x)y(x) + \sum_{i=1}^M \beta_i(x)y(q_i x), \quad a \leq x \leq b, \quad 0 < q_i < 1 \quad (4.47)$$

şeklinde olup $f(x)$, $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında tanımlı bilinen fonksiyonlardır ve q_i değeri gecikme değeridir. $y_N(a) = y_a$ koşulu altında ele alınacaktır. Tez aşamasında tezdeki (3.11) problemi için yöntemin uygulanması araştırma makalesi olarak yayınlanmıştır (Yüzbaşı vd., 2024). Ayrıca pantograph denkleminin yüksek mertebeden formu

$$y^{(m)}(x) = f(x) + \alpha(x)y(x) + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=0}^M \beta_{ik}(x)y(q_{ik}x), \quad a \leq x \leq b, \quad 0 < q_i < 1 \quad (4.48)$$

olan bu problemde birinci mertebeden pantograph denkleminde kurulan metotdan hareketle genelleştirilebilir. Birinci mertebeden pantograph denklemi için

$$y'_N(x) = \sum_{\ell=0}^N a_\ell B_\ell(x) \quad (4.49)$$

şeklinde birinci mertebeden türeve yaklaşım yapılacaktır. Bu problemin temel matris formlarını elde etmek için ilk olarak (4.49) denkleminin matris formu şu şekilde yazılır

$$y'_N(x) = \sum_{l=0}^N a_l B_l(x) = \mathbf{B}(x)\mathbf{A} \quad (4.50)$$

burada

$$\mathbf{B}(x) = \begin{bmatrix} B_0(x) & B_1(x) & B_2(x) & \dots & B_N(x) \end{bmatrix} \quad \text{ve} \\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_N \end{bmatrix}$$

şeklinde vektörlerdir. Bir önceki alt başlıkta tanımı verilen Boubaker polinomları katsayılar matrisi kullanılarak bu ifade

$$y'_N(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{C}\mathbf{A} \quad (4.51)$$

şeklinde bulunur. Bu ifadenin a 'dan x 'e integrali alınarak y ifadesinin de matris formu bulunacaktır. İlk olarak denklem (4.51) ifadesinin tekrardan integrali a 'dan x 'e alınırsa

$$\int_a^x y'_N(t)dt = \int_a^x \mathbf{X}(t)\mathbf{C}\mathbf{A} dt \quad (4.52)$$

elde edilir, burada koşul olan $y_N(a) = y_a$ ifadesini kullanırsak

$$y_N(x) = y_a + [\tilde{\mathbf{X}}(x) - \tilde{\mathbf{X}}(a)]\mathbf{C}\mathbf{A} \quad (4.53)$$

bulunur. $\tilde{\mathbf{X}}$ matrisi

$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} x & \frac{x^2}{2} & \frac{x^3}{3} & \dots & \frac{x^{N+1}}{N+1} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlı bir vektör matris olur ve bu matris için bağıntı oluşturulacaktır. Aşağıda tanımlı

$$\mathbf{V}_i = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{i+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{i+2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{i+N} \end{bmatrix}$$

matrisi yardımıyla $\tilde{\mathbf{X}}$ ifadesi

$$\tilde{\mathbf{X}} = x\mathbf{X}(x)\mathbf{V}_1 \quad (4.54)$$

formunda yazılabilmektedir. Denklem (4.53) ifadesinde (4.54) bağıntısı kullanılırsa

$$y_N(x) = y_a + [x\mathbf{X}(x)\mathbf{V}_1 - a\mathbf{X}(a)\mathbf{V}_1]\mathbf{CA} \quad (4.55)$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca pantograph denkleminde gecikme terimide yer almaktadır. Bu sebepten gecikmeli terim olan $y(q_i x)$ ifadesi için de matris form bulunmalıdır. Bu amaçla (4.55) denkleminde $x \rightarrow q_i x$ dönüşümü yapılırsa

$$y_N(q_i x) = y_a + [q_i x\mathbf{X}(q_i x)\mathbf{V}_1 - a\mathbf{X}(a)\mathbf{V}_1]\mathbf{CA} \quad (4.56)$$

ifadesine ulaşılır. Ayrıca burada $\mathbf{X}(q_i x)$ ifadesini (Yüzbaşı vd., 2024)

$$\mathbf{Q}(q_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_i^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & q_i^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q_i^N \end{bmatrix}$$

matrisi yardımıyla

$$\mathbf{X}(q_i x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{Q}(q_i), \quad (4.57)$$

şeklinde yazmak mümkündür. (4.57) ifadesini denklem (4.56)'de yerine koyarsak

$$y_N(q_i x) = y_a + [q_i x\mathbf{X}(x)\mathbf{Q}(q_i)\mathbf{V}_1 - a\mathbf{X}(a)\mathbf{V}_1]\mathbf{CA} \quad (4.58)$$

denklemini elde edilmiş olur. Bu bulduğumuz matris bağıntıları olan (4.51), (4.55) ve (4.58) ifadeleri (4.47) denkleminde yerlerine konulursa

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(x)\mathbf{CA} &= f(x) + \alpha(x)(y_a + [x\mathbf{X}(x)\mathbf{V}_1 - a\mathbf{X}(a)\mathbf{V}_1]\mathbf{CA}) + \\ &\sum_{i=1}^M \beta_i(x)(y_a + [q_i x\mathbf{X}(x)\mathbf{Q}(q_i)\mathbf{V}_1 - a\mathbf{X}(a)\mathbf{V}_1]\mathbf{CA}) \end{aligned} \quad (4.59)$$

elde ederiz. (4.59) denkleminde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{X}(x) - \alpha(x)[x\mathbf{X}(x) - a\mathbf{X}(a)]\mathbf{V}_1 - \sum_{i=1}^M \beta_i(x)[q_i x\mathbf{X}(x)\mathbf{Q}(q_i) - a\mathbf{X}(a)]\mathbf{V}_1 \right] \mathbf{CA} = \\ f(x) + \alpha(x)y_a + \sum_{i=1}^M \beta_i(x)y_a \end{aligned} \quad (4.60)$$

şeklinde elde edilir. Burada (4.26) ile tanımlı kollokasyon noktalarını kullanırsak

$$\left[\mathbf{X}(x_j) - \alpha(x_j)[x_j \mathbf{X}(x_j) - a \mathbf{X}(a)] \mathbf{V}_1 - \sum_{i=1}^M \beta_i(x_j)[q_i x_j \mathbf{X}(x_j) \mathbf{Q}(q_i) - a \mathbf{X}(a)] \mathbf{V}_1 \right] \mathbf{C} \mathbf{A} = f(x_j) + \alpha(x_j)y_a + \sum_{i=1}^M \beta_i(x_j)y_a, \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (4.61)$$

elde edilir. Bu sistemin temel matris denklemi şeklinde ifadesi şu şekildedir:

$$\left[\mathbf{X} - \mathbf{K}[\bar{\mathbf{X}}\mathbf{X} - a\bar{\mathbf{X}}(a)] \mathbf{V}_1 - \sum_{i=1}^M \mathbf{B}_i[q_i \bar{\mathbf{X}}\mathbf{X}\mathbf{Q}(q_i) - a\bar{\mathbf{X}}(a)] \mathbf{V}_1 \right] \mathbf{C} \mathbf{A} = \mathbf{F} + \bar{\mathbf{K}}y_a + \sum_{i=1}^M \bar{\mathbf{B}}_i y_a. \quad (4.62)$$

Denklem (4.62) ifadesindeki matris formları kollokasyon noktalarına bağlı olarak aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0) \\ \mathbf{X}(x_1) \\ \mathbf{X}(x_2) \\ \vdots \\ \mathbf{X}(x_N) \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \alpha(x_0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha(x_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha(x_N) \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \alpha(x_0) \\ \alpha(x_1) \\ \alpha(x_2) \\ \vdots \\ \alpha(x_N) \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{X}}(x_j) = \begin{bmatrix} x_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_N \end{bmatrix}, \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \beta_i(x_0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_i(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \beta_i(x_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_i(x_N) \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{B}}_i = \begin{bmatrix} \beta_i(x_0) \\ \beta_i(x_1) \\ \beta_i(x_2) \\ \vdots \\ \beta_i(x_N) \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{bmatrix}.$$

Burada temel matris formundan hareketle (4.47) aşağıdaki formda kısaca yazılabilir:

$$[\mathbf{W} : \mathbf{G}] \quad (4.63)$$

burada

$$\mathbf{G} = \mathbf{F} + \bar{\mathbf{K}}y_a + \sum_{i=1}^M \bar{\mathbf{B}}_i(x)y_a. \quad (4.64)$$

Buradan hareketle aşağıdaaki formu elde ederiz:

$$\mathbf{W} = \left[\mathbf{X} - \mathbf{K}[\bar{\mathbf{X}}\mathbf{X} - a\bar{\mathbf{X}}(a)]\mathbf{V}_1 - \sum_{i=1}^M \mathbf{B}_i[q_i\bar{\mathbf{X}}\mathbf{X}\mathbf{Q}(q_i) - a\bar{\mathbf{X}}(a)]\mathbf{V}_1 \right] \mathbf{C}. \quad (4.65)$$

(4.63) sistemi çözüldüğünde aranılan $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_N \end{bmatrix}$ matrisi bulunmuş olur. Bulunan bu $\mathbf{A}$ matrisi denklem (4.55)'de yerine yazılarak yaklaşık çözüm

$$y_N(x) = u_a + [x\mathbf{X}(x)\mathbf{V}_1 - a\mathbf{X}(a)\mathbf{V}_1]\mathbf{C}\mathbf{A} \quad (4.66)$$

şeklinde bulunur. Tez aşamasında tez konusunun bu bölümünde ele alınan multi-pantograph denklem problemi için yöntemin uygulanmasında tez yazarı ve danışmanı tarafından araştırma makalesi üretilerek yayınlanmıştır (Yüzbaşı vd. 2024).

4.2.3. Lane-Emden Diferansiyel Denklemleri için Yöntemin Oluşturulması

Bu kesimde astrofizikte sıklıkla kullanılan Lane-Emden diferansiyel denklemi ele alınacaktır. Bu denklem aşağıdaki şekilde tanımlanır (Yüzbaşı vd., 2011):

$$y''(x) + \frac{\alpha}{x}y'(x) + r(x)y(x) = f(x), \quad 0 \leq x \leq b. \quad (4.67)$$

Bu denklem $y'(0) = a$ ve $y(0) = b$ koşulları ile ele alınacaktır. Tez aşamasında tezdeki (4.67) problemi için yöntemin uygulanması araştırma makalesi olarak yayınlanmıştır (Yüzbaşı vd., 2025). Bu problem için yaklaşık çözüm formu

$$y_N''(x) = \sum_{\ell=0}^N a_\ell B_\ell(x) \quad (4.68)$$

şeklinde ele alınacaktır. Bu ifade aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$y''(x) = \sum_{\ell=0}^N a_\ell B_\ell(x) = \mathbf{B}(x)\mathbf{A}. \quad (4.69)$$

Yukarıda ilk alt başlıkta ele alınan problemdeki Boubaker matris ilişkisi kullanılırsa

$$y''(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{C}\mathbf{A} \quad (4.70)$$

formu elde edilir. Buradan y' ifadesinin matris formu bulunması amacıyla (4.69) denkleminin 0 dan x 'e integrali aşağıdaki gibi alınır:

$$\int_0^x y''(\nu) d\nu = \int_0^x \mathbf{X}(\nu) \mathbf{C} \mathbf{A} d\nu, \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y'(x) - y'(0) &= \int_0^x \begin{bmatrix} 1 & \nu & \nu^2 & \dots & \nu^N \end{bmatrix} d\nu \mathbf{C} \mathbf{A}, \\ \Rightarrow y'(x) - y'(0) &= [\tilde{\mathbf{X}}(x) - \tilde{\mathbf{X}}(0)] \mathbf{C} \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Burada $\tilde{\mathbf{X}}$ matrisi

$$\tilde{\mathbf{X}}(x) = \begin{bmatrix} x & \frac{x^2}{2} & \frac{x^3}{3} & \dots & \frac{x^{N+1}}{N+1} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Ayrıca

$$\mathbf{V}_i = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{i+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{i+2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{i+N} \end{bmatrix}$$

katsayılar matrisi olmak üzere $\tilde{\mathbf{X}}(x)$ matrisi

$$\tilde{\mathbf{X}}(x) = x \mathbf{X}(x) \mathbf{V}_1$$

şeklinde elde edilir. İlk koşul olan $y'(0) = a$ denklem (4.72)'de yerine yazılırsa

$$y'(x) = a + x \mathbf{X}(x) \mathbf{V}_1 \mathbf{C} \mathbf{A} \quad (4.73)$$

bulunur. Elde edilen bu ifadenin tekrar integrali alınır

$$\begin{aligned} \int_0^x y'(\nu) d\nu &= \int_0^x [a + x \mathbf{X}(\nu) \mathbf{V}_1 \mathbf{C} \mathbf{A}] d\nu, \\ \Rightarrow y(x) &= b + ax + x^2 \mathbf{X}(x) \mathbf{V}_2 \mathbf{V}_1 \mathbf{C} \mathbf{A} \end{aligned} \quad (4.74)$$

ifadesi elde edilir. Elde edilen (4.70), (4.73) ve (4.74) ifadeleri, denklem (4.67)'de yerine yazılırsa

$$\mathbf{X}(x) \mathbf{G} \mathbf{A} + \frac{\alpha}{x} [a + x \mathbf{X}(x) \mathbf{V}_1 \mathbf{G} \mathbf{A}] + r(x) [b + ax + x^2 \mathbf{X}(x) \mathbf{V}_2 \mathbf{V}_1 \mathbf{C} \mathbf{A}] = f(x) \quad (4.75)$$

edinilir burada denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$[\mathbf{X}(x) + \frac{\alpha}{x} [x \mathbf{X}(x) \mathbf{V}_1] + r(x) x^2 \mathbf{X}(x) \mathbf{V}_2] \mathbf{C} \mathbf{A} = f(x) - \frac{\alpha}{x} a - r(x) b \quad (4.76)$$

ifadesine ulaşılır. Lane-Emden diferansiyel denklemleri için $x = 0$ noktası tekil noktadır, bu nedenle kollokasyon noktaları belilenirken ilk terim 0 yerine 0'a çok yakın pozitif bir sayı seçilir. Kollokasyon noktaları denklem (4.76)'de yerine yazılırsa

$$[\mathbf{X}(x_j) + \frac{\alpha}{x_j} [x_j \mathbf{X}(x_j) \mathbf{V}_1] + r(x_j) x_j^2 \mathbf{X}(x_j) \mathbf{V}_2 \mathbf{V}_1] \mathbf{C} \mathbf{A} = f(x_j) - \frac{\alpha}{x_j} a - r(x_j) b \quad (4.77)$$

şekinde denklem elde edilir ve buradan

$$[\mathbf{X} + \mathbf{P} [\bar{\mathbf{X}} \mathbf{X} \mathbf{V}_1] + \mathbf{R} \bar{\mathbf{X}}^2 \mathbf{X} \mathbf{V}_2 \mathbf{V}_1] \mathbf{G} \mathbf{A} = \bar{\mathbf{F}} - \bar{\mathbf{P}} a - \bar{\mathbf{R}} b - a \bar{\mathbf{R}} \quad (4.78)$$

bulunur. Buradaki matrisler aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0) \\ \mathbf{X}(x_1) \\ \mathbf{X}(x_2) \\ \vdots \\ \mathbf{X}(x_N) \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} x_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_N \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} r(x_0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & r(x_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r(x_N) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{x_0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{x_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{x_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\alpha}{x_N} \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} r(x_0) \\ r(x_1) \\ r(x_2) \\ \vdots \\ r(x_N) \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \alpha/x_0 \\ \alpha/x_1 \\ \alpha/x_2 \\ \vdots \\ \alpha/x_N \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{bmatrix}, \mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{N+1} \end{bmatrix}, \mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{N+2} \end{bmatrix}.$$

Buradan

$$\mathbf{T} = \bar{\mathbf{F}} - \bar{\mathbf{P}} a - \bar{\mathbf{R}} b - a \bar{\mathbf{R}} \quad (4.79)$$

ve

$$\mathbf{W} = [\mathbf{X} + \mathbf{P} [\bar{\mathbf{X}} \mathbf{X} \mathbf{V}_1] + \mathbf{R} \bar{\mathbf{X}}^2 \mathbf{X} \mathbf{V}_2 \mathbf{V}_1] \mathbf{G} \quad (4.80)$$

olmak üzere (4.67) denkleminin temel matris denklemi

$$[\mathbf{W} : \mathbf{T}] \quad (4.81)$$

şeklinde bulunur. Bu lineer cebirsel sistemin çözülmesi ile $\mathbf{A}$ matrisi bulunur, bulunan bu $\mathbf{A}$ matrisinin (4.74) denkleminde yerine yazılması ile aranan yaklaşık çözüm bulunmuş olunur.

4.2.4. Popülasyonun Lojistik Büyümesi Modeli için Yöntemin Oluşturulması

Bu bölümde tek türler için sürekli popülasyon modelinin yaklaşık çözümlerini elde etmek amacıyla yeni ve etkili bir kollokasyon yöntemi sunuyoruz. Popülasyonun lojistik büyümesi modeli ele alınacaktır. Bu model

$$\frac{d\rho}{dt} = rp\left(1 - \frac{p}{K}\right), \quad \alpha \leq t \leq \beta \quad (4.82)$$

denklemini ve

$$p(0) = \lambda \quad (4.83)$$

koşulu ile birlikte verilir (Yüzbaşı vd., 2020). Burada r ve K gerçek sabitlerdir ve λ gerçek ve uygun bir sabittir. ρ türün popülasyonunu, t ise zamanı temsil eder.

$$p'_N(t) = \sum_{\ell=0}^N a_\ell B_\ell(t) \quad (4.84)$$

yaklaşım formu üzerinden metot kurulacaktır. Bu yaklaşım formu önceki alt başlıklarda ele alındığı üzere şu şekilde matris formunda yazılabilir:

$$\rho'(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{CA} \quad (4.85)$$

burada

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_N \end{bmatrix}^T \quad \text{ve} \quad \mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & \dots & t^N \end{bmatrix}$$

şeklindeki matrislerdir. Metodumuzu uygulamaya başlamak için ilk olarak bu ifadenin integrali alınmalıdır. 0 da x 'e integral alınırsa aşağıdaki ifadeye ulaşılır:

$$\int_0^t \rho'(\nu) d\nu = \int_0^t \mathbf{X}(\nu)\mathbf{CA} d\nu, \quad (4.86)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \rho(x) - \rho(0) &= \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & \nu & \nu^2 & \dots & \nu^N \end{bmatrix} d\nu \mathbf{CA}, \\ \Rightarrow \rho(t) - \rho(0) &= [\tilde{\mathbf{X}}(t) - \tilde{\mathbf{X}}(0)]\mathbf{CA}. \end{aligned} \quad (4.87)$$

İşlem kolaylığı sağlamak ve ifadeyi daha düzün bir halde yazmak amacıyla aşağıdaki bağıntı kullanılacaktır. $\tilde{\mathbf{X}}$ matrisi için

$$\tilde{\mathbf{X}}(t) = t\mathbf{X}(t)\mathbf{V}_1 \quad (4.88)$$

bağıntısı bu şekilde tanımlanmış olup burada $\mathbf{V}_1$ matrisi

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{1+N} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan matristir. Bulunan (4.88) bağıntısı denklem (4.87)'de yerine konulursa ve $p(0) = \lambda$ kullanılırsa

$$\rho(t) = \lambda + t\mathbf{X}(t)\mathbf{V}_1\mathbf{CA} \quad (4.89)$$

denklemini elde ederiz (Yüzbaşı vd., 2024). İntegral işlemi yardımıyla elde edilen (4.85)-(4.89) ifadeleri, denklem (4.82)'de yerine yazılırsa

$$\mathbf{X}(t)\mathbf{CA} - r(\lambda + t\mathbf{X}(t)\mathbf{V}_1\mathbf{CA}) + \frac{r}{K}(\lambda + t\mathbf{X}(t)\mathbf{V}_1\mathbf{CA})^2 = 0 \quad (4.90)$$

elde edilir. Elde edilen bu denklem düzenlenirse

$$\mathbf{X}(t)\mathbf{CA} - rt\mathbf{X}(t)\mathbf{V}_1\mathbf{CA} + \frac{r}{K}2\lambda t\mathbf{X}(t)\mathbf{V}_1\mathbf{CA} + \quad (4.91)$$

$$\frac{r}{K}(t\mathbf{X}(t)\mathbf{V}_1\mathbf{CA})^2 = r\lambda - \frac{r\lambda}{K}$$

formuna ulaşılır. (4.26)'de tanımlanan kollokasyon noktaları son denklemde yerine konulursa

$$\mathbf{X}(t_j)\mathbf{CA} - rt_j\mathbf{X}(t_j)\mathbf{V}_1\mathbf{CA} + \frac{r}{K}2\lambda t_j\mathbf{X}(t_j)\mathbf{V}_1\mathbf{CA} + \quad (4.92)$$

$$\frac{r}{K}(t_j\mathbf{X}(t_j)\mathbf{V}_1\mathbf{CA})^2 = r\lambda - \frac{r\lambda}{K}$$

sistemine ulaşılır. Bu denklemi aşağıdaki gibi matris formunda yazmak mümkündür:

$$[\mathbf{XC} + r\bar{\mathbf{X}}\mathbf{X}\mathbf{V}_1\mathbf{C} + 2\lambda\mathbf{K}\bar{\mathbf{X}}\mathbf{X}\mathbf{V}_1\mathbf{C} - \mathbf{K}(\bar{\mathbf{X}}\mathbf{X}\mathbf{V}_1\mathbf{C}\bar{\mathbf{A}})^2] \mathbf{A} = +\bar{\mathbf{R}} + \bar{\mathbf{K}}. \quad (4.93)$$

Denklem (4.93)'deki matris formları aşağıda verilmiştir.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(t_0) \\ \mathbf{X}(t_1) \\ \mathbf{X}(t_2) \\ \vdots \\ \mathbf{X}(t_N) \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} t_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & t_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t_N \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} r/K & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r/K & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & r/K & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r/K \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} r\lambda \\ r\lambda \\ r\lambda \\ \vdots \\ r\lambda \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{A} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{A} \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} r\lambda/K \\ r\lambda/K \\ r\lambda/K \\ \vdots \\ r\lambda/K \end{bmatrix}.$$

Sonuç olarak bu cebirsel sistem kısaca şöyle yazılabilir:

$$[\mathbf{W} : \mathbf{G}] \tag{4.94}$$

burada

$$\mathbf{G} = \bar{\mathbf{R}} + \bar{\mathbf{K}} \tag{4.95}$$

ve

$$\mathbf{W} = \mathbf{X}\mathbf{C} + r\bar{\mathbf{X}}\mathbf{X}\mathbf{V}_1\mathbf{C} + 2\lambda\mathbf{K}\bar{\mathbf{X}}\mathbf{X}\mathbf{V}_1\mathbf{C} - \mathbf{K}(\bar{\mathbf{X}}\mathbf{X}\mathbf{V}_1\mathbf{C}\bar{\mathbf{A}})^2 \tag{4.96}$$

şeklindeki ifadelerdir. Bu sistem çözülrse bilinmeyen katsayılar matrisi olan $\mathbf{A}$ bulunmuş olur. Sonuç olarak $\mathbf{A}$ katsayılar matrisi denklem (4.89) de yerine konularak aranan yaklaşık çözüm bulunmuş olur.

4.2.5. Riccati Diferansiyel Denklemi için Yöntemin Oluşturulması

Bu kısımda lineer olmayan bir diferansiyel denklem olan Riccati diferansiyel denklemi ele alınacaktır. Riccati diferansiyel denklemi

$$y'(x) = r(x)y^2(x) + q(x)y(x) + p(x), \quad \alpha \leq x \leq \beta \quad (4.97)$$

şeklinde olup bu denklem $y(\alpha) = y_\alpha$ koşulu ile birlikte ele alınacaktır (Kengne, 2014).

Bu denklem için

$$y'_N(x) = \sum_{\ell=0}^N a_\ell B_\ell(x) \quad (4.98)$$

şeklinde birinci türeve yaklaşım yapılacaktır. Önceki alt başlıklarda ele alınan Boubaker polinomlarının matris formunda yararlanılırsa (4.98) ifadesi aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$y'_N(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{CA}. \quad (4.99)$$

Eğer iki tarafın integrali a 'dan e 'e alınırsa

$$\int_{\alpha}^x y'_N(r)dr = \int_{\alpha}^x \mathbf{X}(r)\mathbf{CA} dr \quad (4.100)$$

elde edilir ve buradan

$$y_N(x) - y(\alpha) = [\ddot{\mathbf{X}}(x) - \ddot{\mathbf{X}}(\alpha)]\mathbf{CA} \quad (4.101)$$

bulunmuş olunur. Buradaki $\ddot{\mathbf{X}}(x)$ ifadesi

$$\ddot{\mathbf{X}}(x) = \begin{bmatrix} x & \frac{x^2}{2} & \frac{x^3}{3} & \cdots & \frac{x^{N+1}}{N+1} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlı matristir. (4.101) ifadesinde koşul olan $y(\alpha) = y_\alpha$ terimi yerine yazılırsa

$$y_N(x) = y_\alpha + [\ddot{\mathbf{X}}(x) - \ddot{\mathbf{X}}(\alpha)]\mathbf{CA} \quad (4.102)$$

halini almış olur. Bu ifadeyi daha basit halde yazmak ve kodlamayı kolaylaştırmak adına bir takım bağıntılardan yararlanılabilir. Bu bağıntı, $\ddot{\mathbf{X}}$ matrisini $\mathbf{X}$ and $\mathbf{V}_1$ matrisi yardımıyla yazılmasıyla üretilen aşağıdaki bağıntıdır.

$$\ddot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} x & \frac{x^2}{2} & \frac{x^3}{3} & \cdots & \frac{x^{N+1}}{N+1} \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{N+1} \end{bmatrix}.$$

Bu ifadeden aşağıdaki sonuca ulaşılır:

$$\ddot{\mathbf{X}} = x\mathbf{X}(x)\mathbf{C}\mathbf{V}_1. \quad (4.103)$$

(4.103) denklemi yeniden düzenlenip (4.102) ifadesi yerine yazılırsa

$$y_N(x) = y_\alpha + [x\mathbf{X}(x)\mathbf{V}_1 - \alpha\mathbf{X}(\alpha)\mathbf{V}_1]\mathbf{C}\mathbf{A} \quad (4.104)$$

denkleminde ulaşılır (Yüzbaşı vd., 2024). Buradan itibaren ele alacağımız denklemlerin daha kolay işlemlere tabii olması amacıyla aşağıdaki karşılık kullanılacaktır.

$$\mathbf{X}_\alpha(x) = [x\mathbf{X}(x)\mathbf{V}_1 - \alpha\mathbf{X}(\alpha)\mathbf{V}_1]. \quad (4.105)$$

Bulunan ifadeler olan denklem (4.99) ve denklem (4.104), (4.97) denkleminde yerine konulur ve (4.105) kullanılırsa

$$\mathbf{X}(x)\mathbf{C}\mathbf{A} = r(x)[y_\alpha + \mathbf{X}_\alpha(x)\mathbf{C}\mathbf{A}]^2 + q(x)[y_\alpha + \mathbf{X}_\alpha(x)\mathbf{C}\mathbf{A}] + p(x). \quad (4.106)$$

(4.106) denkleminde gerekli düzenlemeler yapılırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(x)\mathbf{C}\mathbf{A} = r(x)y_\alpha^2 + 2r(x)y_\alpha\mathbf{X}_\alpha(x)\mathbf{C}\mathbf{A} + r(x)\mathbf{X}_\alpha(x)\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{X}_\alpha(x)\mathbf{C}\mathbf{A} + \\ q(x)y_\alpha + q(x)\mathbf{T}_\alpha(x)\mathbf{C}\mathbf{A} + p(x). \end{aligned} \quad (4.107)$$

Ayrıca denklem (4.26)'de tanımlanan kollokasyon noktaları en son elde ettiğimiz denkleminde olan (4.107)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(x_j)\mathbf{C}\mathbf{A} = r(x_j)y_\alpha^2 + 2r(x_j)y_\alpha\mathbf{X}_\alpha(x_j)\mathbf{C}\mathbf{A} + r(x_j)\mathbf{T}_\alpha(x_j)\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{X}_\alpha(x_j)\mathbf{C}\mathbf{A} + \\ q(x_j)y_\alpha + q(x_j)\mathbf{X}_\alpha(x_j)\mathbf{C}\mathbf{A} + p(x_j) \end{aligned} \quad (4.108)$$

elde edilmiş olunur. Elde edilen (4.108) denklemi düzenlenir ve matris formunda yazılırsa aşağıdaki denkleme ulaşılır:

$$\dot{\mathbf{X}}\mathbf{C}\mathbf{A} - 2y_\alpha\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{X}}\mathbf{C}\mathbf{A} - \dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{X}}\mathbf{C}\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}\mathbf{C}\mathbf{A} - \dot{\mathbf{Q}}\dot{\mathbf{X}}\mathbf{C}\mathbf{A} = \dot{\mathbf{R}}y_\alpha^2 + \dot{\mathbf{Q}}y_\alpha + \dot{\mathbf{P}}. \quad (4.109)$$

Bu matris tanımları bilinmeyen matris olan $\mathbf{A}$ matrisini bulmak için bir sisteme dönüştürülebilir.. Eğer sistemi ortak $\mathbf{A}$ parantezine alırsak

$$\left\{ \dot{\mathbf{X}}\mathbf{C} - 2y_\alpha\dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{X}}\mathbf{C} - \dot{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{X}}\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}\mathbf{C} - \dot{\mathbf{Q}}\dot{\mathbf{X}}\mathbf{C} \right\} \mathbf{A} = \dot{\mathbf{R}}y_\alpha^2 + \dot{\mathbf{Q}}y_\alpha + \dot{\mathbf{P}} \quad (4.110)$$

bulunacaktır ve bu sistem aşağıdaki cebirsel sistemem dönüşecektir.

$$[\mathbf{W}; \mathbf{Y}] \quad (4.111)$$

burada

$$\mathbf{Y} = \dot{\mathbf{R}}y_\alpha^2 + \dot{\mathbf{Q}}y_\alpha + \dot{\mathbf{P}} \quad (4.112)$$

ve

$$\mathbf{W} = \dot{\mathbf{X}}\mathbf{C} - 2y_\alpha \tilde{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{X}}\mathbf{C} - \tilde{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{X}}\tilde{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{X}}\mathbf{C} - \tilde{\mathbf{Q}}\dot{\mathbf{X}}\mathbf{C} \quad (4.113)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Buradaki matris formlar aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0) \\ \mathbf{X}(x_1) \\ \mathbf{X}(x_2) \\ \vdots \\ \mathbf{X}(x_N) \end{bmatrix}, \dot{\tilde{\mathbf{X}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_\alpha(x_0) \\ \mathbf{X}_\alpha(x_1) \\ \mathbf{X}_\alpha(x_2) \\ \vdots \\ \mathbf{X}_\alpha(x_N) \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_\alpha(x_0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}_\alpha(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X}_\alpha(x_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{X}_\alpha(x_N) \end{bmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{R}} &= \begin{bmatrix} r(x_0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & r(x_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r(x_N) \end{bmatrix}, \dot{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}(x_0) \\ \mathbf{r}(x_1) \\ \mathbf{r}(x_2) \\ \vdots \\ \mathbf{r}(x_N) \end{bmatrix}, \dot{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(x_0) \\ \mathbf{q}(x_1) \\ \mathbf{q}(x_2) \\ \vdots \\ \mathbf{q}(x_N) \end{bmatrix}, \\ \dot{\mathbf{P}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{p}(x_0) \\ \mathbf{p}(x_1) \\ \mathbf{p}(x_2) \\ \vdots \\ \mathbf{p}(x_N) \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} q(x_0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & q(x_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q(x_N) \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{A} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{A} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Burada $\tilde{\mathbf{A}}$ matrisinin ful boyutu $(N+1)^2 \times (N+1)$ şeklindedir. Bu sistemin çözümünün ardından bilinmeyen katsayılar matrisi olan $\mathbf{A}$ bulunmuş olur. $\mathbf{A}$ matrisinin denklem (4.104) de yerine konuymasıyla yaklaşık çözüm bulunmuş olur.

4.2.6. Yüksek Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklem için Yöntemin Oluşturulması

Bu bölümde [3.20](#) problemi için önerilen metot oluşturulacak olup gereken matris ilişkileri kurulacaktır. İlk olarak yüksek mertebeden lineer diferansiyel denklemindeki m . mertebeden türeve

$$y_N^{(m)}(x) = \sum_{\ell=0}^N a_{\ell} B_{\ell}(x) = \mathbf{B}(x)\mathbf{A} \quad (4.114)$$

şeklinde yaklaşım yapılır. Burada

$$\mathbf{B}(x) = \begin{bmatrix} B_0(x) & B_1(x) & B_2(x) & \dots & B_N(x) \end{bmatrix} \quad \text{ve}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_N \end{bmatrix}^T$$

şeklinde vektörlerdir. Ayrıca

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{C}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\mathbf{C}$ Boubaker polinomları için katsayılar matrisidir. Bu matris formu kullanılarak

$$y_N^{(m)}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{C}\mathbf{A}. \quad (4.115)$$

Buradan integral alınarak daha düşük mertebeden türevlerin matris formu elde edilecektir.

Bu amaç için şimdi [\(4.115\)](#)'nin a 'dan x 'e integrali alınır

$$\int_a^x y_N^{(m)}(t)dt = \int_a^x \mathbf{X}(t)\mathbf{C}\mathbf{A} dt \quad (4.116)$$

yazılabilir ve integral alındıktan sonra [\(3.20\)](#) denklemindeki $y^{(m-1)}(a) = \lambda_{m-1}$ koşulu yerine konulursa

$$y_N^{(m-1)}(x) = \lambda_{m-1} + [\tilde{\mathbf{X}}(x) - \tilde{\mathbf{X}}(a)]\mathbf{C}\mathbf{A} \quad (4.117)$$

ifadesi elde edilir. Burada $\tilde{\mathbf{X}}$ matrisi

$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} x & \frac{x^2}{2} & \frac{x^3}{3} & \dots & \frac{x^{N+1}}{N+1} \end{bmatrix}$$

şeklinde olup bu matris için bir bağıntı bulunacaktır. Bunun sebebi ℓ . mertebeden olan yaklaşımı bulmak için $m - \ell$ kez integral alınarak ℓ . mertebeden y ifadesinin matris formu

elde edilecektir. Bu sebeple

$$\mathbf{V}_i = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{i+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{i+2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{i+N} \end{bmatrix}$$

katsayılar matrisi olmak üzere

$$\tilde{\mathbf{X}} = x\mathbf{X}(x)\mathbf{V}_1 \quad (4.118)$$

şeklinde yazılabilir. Bu bağıntı sonraki integral alımlarında kullanılacak temel bağıntıdır. Bu bağıntıyı denklem (4.117) de yerine yazarsak,

$$y^{(m-1)}(x) = \lambda_{m-1} + x\mathbf{X}(x)\mathbf{V}_1\mathbf{C}\mathbf{A}$$

formunu elde ederiz. İntegral alma işlemine devam edilerek, bilinmeyen fonksiyonun diğer türevlerine ulaşılır. İkinci integral sonucunda,

$$y^{(m-2)}(x) = \lambda_{m-2} + \lambda_{m-1}x + x^2\mathbf{X}(x)\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2\mathbf{C}\mathbf{A} \quad (4.119)$$

ifadesi elde edilir. Bu adımın ardından genel bir ifade elde etmek mümkündür. Üçüncü integral için

$$y^{(m-3)}(t) = \lambda_{m-3} + \lambda_{m-2}x + \lambda_{m-1}\frac{x^2}{2} + x^3\mathbf{X}(x)\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2\mathbf{V}_3\mathbf{C}\mathbf{A} \quad (4.120)$$

ifadesine ulaşılır. Burada $m - \ell$ kez integral alımının ardından $m - (m - \ell)$, yani ℓ . mertebeden türevin matris formu

$$y^{(\ell)}(x) = \sum_{r=\ell}^{m-1} \lambda_r \frac{x^{r-\ell}}{(r-\ell)!} + x^{m-\ell}\mathbf{X}(x) \left(\prod_{j=1}^{m-\ell} \mathbf{V}_j \right) \mathbf{C}\mathbf{A} \quad (4.121)$$

şeklinde elde edilir. Bu ifade problem (3.20)'de yerine yerleştirilirse,

$$\sum_{\ell=0}^m P_\ell(x) \left[\sum_{r=\ell}^{m-1} \lambda_r \frac{x^{r-\ell}}{(r-\ell)!} + x^{m-\ell}\mathbf{X}(x) \left(\prod_{j=1}^{m-\ell} \mathbf{V}_j \right) \right] \mathbf{C}\mathbf{A} = \rho(x) \quad (4.122)$$

elde edilir ve sonrasında kollokasyon noktaları olan (4.26) kullanılarak

$$\sum_{\ell=0}^m P_\ell(x_i) \left[\sum_{r=\ell}^{m-1} \lambda_r \frac{x_i^{r-\ell}}{(r-\ell)!} + x_i^{m-\ell}\mathbf{X}(x_i) \left(\prod_{j=1}^{m-\ell} \mathbf{V}_j \right) \right] \mathbf{C}\mathbf{A} = \rho(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (4.123)$$

denklemini elde edilir. Ardından denklem

$$\sum_{\ell=0}^m P_{\ell}(x_i) \left[\sum_{r=\ell}^{m-1} \lambda_r \frac{\bar{\mathbf{X}}^{r-\ell}}{(r-\ell)!} + \bar{\mathbf{X}}^{m-\ell} \dot{\mathbf{X}} \left(\prod_{j=1}^{m-\ell} \mathbf{V}_j \right) \right] \mathbf{CA} = \tilde{\mathbf{P}}, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (4.124)$$

lineer cebirsel sistem haline çevrilir: Burada

$$\bar{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{m-\ell} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{m-\ell} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \cdots & x_N^{m-\ell} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{X}}^{r-\ell} = \begin{bmatrix} x_0^{r-\ell} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_1^{r-\ell} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_2^{r-\ell} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_N^{r-\ell} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \rho(x_0) \\ \rho(x_1) \\ \vdots \\ \rho(x_N) \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{X}}^{m-\ell} = \begin{bmatrix} x_0^{m-\ell} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_1^{m-\ell} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_2^{m-\ell} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_N^{m-\ell} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır ve bu sistem aşağıdaki cebirsel sisteme dönüşecektir:

$$[\mathbf{W}; \tilde{\mathbf{P}}] \quad (4.125)$$

burada

$$\mathbf{W} = \sum_{\ell=0}^m P_{\ell}(x_i) \left[\sum_{r=\ell}^{m-1} \lambda_r \frac{\bar{\mathbf{X}}^{r-\ell}}{(r-\ell)!} + \bar{\mathbf{X}}^{m-\ell} \dot{\mathbf{X}} \left(\prod_{j=1}^{m-\ell} \mathbf{V}_j \right) \right] \mathbf{C} \quad (4.126)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada $\mathbf{A}$ matrisi sistemin çözümünün ardından bulunmuş olur. (4.121) denkleminde integral alma işlemine devam edilerek

$$y(x) = \sum_{r=0}^{m-1} \lambda_r \frac{x^r}{r!} + x^m \mathbf{X}(x) \left(\prod_{j=1}^m \mathbf{V}_j \right) \mathbf{CA} \quad (4.127)$$

denkleminde ulaşılır. Bulunan $\mathbf{A}$ matrisi (4.127)'de yerine konulmasıyla yaklaşık çözüm bulunmuş olur.

4.2.7. Genelleştirilmiş Pantograph Diferansiyel Denklem için Yöntemin Oluşturulması

Son olarak genelleştirilmiş pantograph diferansiyel denklemi ele alınacaktır. Bu denklem

$$y^{(m)}(x) = \sum_{i=1}^J \sum_{k=0}^{m-1} P_{ik}(x) y^{(k)}(q_{ik}x + \beta_{ik}) + f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad 0 < q_i < 1 \quad (4.128)$$

şeklinde tanımlanmış olup

$$y^{(i)}(a) = \lambda_i, \quad i = 0, 1, \dots, m-1 \quad (4.129)$$

koşulu altında ele alınacaktır. Bu diferansiyel denklemin en yüksek mertebeden türevi olan m . mertebeden türeve

$$y_N^{(m)}(x) = \sum_{\ell=0}^N a_{\ell} B_{\ell}(x) \quad (4.130)$$

ifadesi ile yaklaşım yapılacaktır. Bu denklem

$$y_N^{(m)}(x) = \sum_{\ell=0}^N a_{\ell} B_{\ell}(x) = \mathbf{B}(x) \mathbf{A} \quad (4.131)$$

şeklinde tanımlı olup burada

$$\mathbf{B}(x) = \begin{bmatrix} B_0(x) & B_1(x) & B_2(x) & \dots & B_N(x) \end{bmatrix} \quad \text{ve} \\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_N \end{bmatrix}$$

şeklinde vektörlerdir. Bu matris formu kullanılarak

$$y_N^{(m)}(x) = \mathbf{X}(x) \mathbf{C} \mathbf{A} \quad (4.132)$$

ifadesine ulaşılır. Bu ifadenin bir kez integrali alınarak

$$y_N^{(m-1)}(x) = \lambda_{m-1} + [x \mathbf{X}(x) \mathbf{V}_1 - a \mathbf{X}(a) \mathbf{V}_1] \mathbf{C} \mathbf{A} \quad (4.133)$$

ifadesine ulaşılır. Görüldüğü üzere burda elde edilen bağıntı bir önceki bölümde yüksek mertebeden diferansiyel denklemler için elde edilen bağıntı formundadır. Benzer şekilde (4.132) yaklaşımının $m - k$ kez integral alınıp başlangıç koşulları kullanılarak k . mertebeden türevin matris formu

$$y_N^{(k)}(x) = \sum_{r=k}^{m-1} \lambda_r \frac{x^{r-k}}{(r-k)!} + x^{m-k} \mathbf{X}(x) \left(\prod_{j=1}^{m-k} \mathbf{V}_j \right) \mathbf{C} \mathbf{A} \quad (4.134)$$

şeklinde elde edilir. Eğer x yerine $q_i x + \beta_{ik}$ yazılırsa, aşağıdaki denklem elde edilir:

$$y_N^{(k)}(q_i x + \beta_{ik}) = \sum_{r=k}^{m-1} \lambda_r \frac{(q_i x + \beta_{ik})^{r-k}}{(r-k)!} + (q_i x + \beta_{ik})^{m-k} \mathbf{X}(q_i x + \beta_{ik}) \left(\prod_{j=1}^{m-k} \mathbf{V}_j \right) \mathbf{CA}. \quad (4.135)$$

Bu ifade denklem (4.128)'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(x) \mathbf{CA} &= \sum_{i=1}^J \sum_{k=0}^{m-1} P_{ik}(x) \left[\sum_{r=k}^{m-1} \lambda_r \frac{(q_{ik} x + \beta_{ik})^{r-k}}{(r-k)!} \right. \\ &\quad \left. + (q_{ik} x + \beta_{ik})^{m-k} \mathbf{X}(q_{ik} x + \beta_{ik}) \left(\prod_{j=1}^{m-k} \mathbf{V}_j \right) \right] \mathbf{CA} + f(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında denklem aşağıdaki biçime dönüştürülür:

$$\begin{aligned} &\left[\mathbf{X}(x) - \sum_{i=1}^J \sum_{k=0}^{m-1} P_{ik}(x) \left[\sum_{r=k}^{m-1} \lambda_r \frac{(q_{ik} x + \beta_{ik})^{r-k}}{(r-k)!} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (q_{ik} x + \beta_{ik})^{m-k} \mathbf{X}(q_{ik} x + \beta_{ik}) \left(\prod_{j=1}^{m-k} \mathbf{V}_j \right) \right] \right] \mathbf{CA} = f(x). \end{aligned}$$

Kollokasyon noktaları (4.26) kullanılarak denklem

$$\begin{aligned} &\left[\mathbf{X}(x_i) - \sum_{i=1}^J \sum_{k=0}^{m-1} P_{ik}(x_i) \left[\sum_{r=k}^{m-1} \lambda_r \frac{(q_{ik} x_i + \beta_{ik})^{r-k}}{(r-k)!} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (q_{ik} x_i + \beta_{ik})^{m-k} \mathbf{X}(q_{ik} x_i + \beta_{ik}) \left(\prod_{j=1}^{m-k} \mathbf{V}_j \right) \right] \right] \mathbf{CA} = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu sistem matris biçiminde

$$\bar{\mathbf{X}} - \sum_{i=1}^J \sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{P} \left[\sum_{r=k}^{m-1} \bar{\lambda} \frac{\mathbf{X}_q^{r-k}}{(r-k)!} + \mathbf{X}_q^{m-k} \bar{\mathbf{X}} \bar{\mathbf{Q}} \left(\prod_{j=1}^{m-k} \mathbf{V}_j \right) \right] \mathbf{CA} = \tilde{\mathbf{F}}$$

formundadır. Burada

$$\bar{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^N \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \cdots & x_N^N \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} 1 & \binom{1}{0} \beta_{ik} & \binom{2}{0} \beta_{ik}^2 & \cdots & \beta_{ik}^N \\ 0 & q_{ik} & \binom{2}{1} q_{ik} \beta_{ik} & \cdots & \binom{N}{1} q_{ik} \beta_{ik}^{N-1} \\ 0 & 0 & q_{ik}^2 & \cdots & \binom{N}{2} q_{ik}^2 \beta_{ik}^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q_{ik}^N \end{bmatrix} l$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{10}(x_0) & P_{11}(x_0) & \cdots & P_{1,m-1}(x_0) \\ P_{20}(x_1) & P_{21}(x_1) & \cdots & P_{2,m-1}(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{J0}(x_N) & P_{J1}(x_N) & \cdots & P_{J,m-1}(x_N) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_q^{r-k} = \begin{bmatrix} (q_{ik}x_0 + \beta_{ik})^{r-k} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (q_{ik}x_1 + \beta_{ik})^{r-k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & (q_{ik}x_2 + \beta_{ik})^{r-k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (q_{ik}x_N + \beta_{ik})^{r-k} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_q^{m-k} = \begin{bmatrix} (q_{ik}x_0 + \beta_{ik})^{m-k} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (q_{ik}x_1 + \beta_{ik})^{m-k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & (q_{ik}x_2 + \beta_{ik})^{m-k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (q_{ik}x_N + \beta_{ik})^{m-k} \end{bmatrix}$$

kollokasyon noktalarından oluşturulan matristir ve bu sistem aşağıdaki lineer cebirsel sisteme dönüşecektir.

$$[\mathbf{W}; \tilde{\mathbf{F}}]. \quad (4.136)$$

Burada $\mathbf{A}$ matrisi sistemin çözümünün ardından bulunmuş olur. $\mathbf{A}$ matrisinin

$$y(x) = \sum_{r=0}^{m-1} \lambda_r \frac{x^r}{r!} + x^m \mathbf{X}(x) \left(\prod_{j=1}^m \mathbf{V}_j \right) \mathbf{C} \mathbf{A} \quad (4.137)$$

denkleminde yerine konulmasıyla yaklaşık çözüm bulunmuş olur.

4.3. Rezidüel Hata Analizi

Bu bölümde ele alınan problemler için rezidüel hata analizi yapılacaktır. Ayrıca tahmini hata ve iyileştirilmiş hata fonksiyonlarında yararlanılarak elde edilen yaklaşık çözümlerden daha iyi çözümler elde edilecektir (Yüzbaşı vd., 2011).

4.3.1. Birinci Mertebeden Pantograph Diferansiyel Denklem için Hata Analizi

Bu kısımda birinci mertebeden pantograph diferansiyel denklemler için hata tahmini yapılacaktır (Bahsi vd., 2015). Pantograph tipinde ki birinci mertebeden diferansiyel denklem olan (3.8) problemi için rezidüel fonksiyon

$$R(x) = y'(x) - \alpha(x)y(x) + \beta y(qx) - f(x) = 0 \quad (4.138)$$

şeklindedir. $y(x)$ tam çözümü yerine yaklaşık çözüm olan $y_N(x)$ yazılırsa

$$R_N(x) = y'_N(x) - \alpha(x)y_N(x) + \beta y_N(qx) - f(x) \approx 0 \quad (4.139)$$

elde edilir. Elde edilen denklem (4.138) ve denklem (4.139) taraf tarafa çıkarırsak

$$e'_N(x) = -R_N(x) + \alpha(x)e_N(x) + \beta e_N(x) = 0 \quad (4.140)$$

ulaşırız, burada

$$e_N(x) = y(x) - y_N(x)$$

şeklinde belirtilen hata fonksiyonudur. Denklem (4.140) için başlangıç koşullarını elde edilir çünkü yaklaşık çözüm bu başlangıç koşullarını sağlar. Bu sebeple

$$e_N(a) = y(a) - y_N(a) = y_a - y_a = 0. \quad (4.141)$$

Sonrasında (4.140) ve (4.141) hata problemi 4.2.1 de açıklanan yöntem ile M kesme sınırı için çözülerek $e_N(x)$ için $e_{N,M}(x)$ yaklaşımı elde edilir. Bu $e_{N,M}(x)$ tahmini hata fonksiyonudur. Daha sonra ise $y_{N,M}(x) = y_N(x) + e_{N,M}(x)$ olarak iyileştirilmiş bir çözüm elde edebiliriz. Böylece iyileştirilmiş çözüme ait gerçek hatası ise

$$E_{N,M}(x) = y(x) - y_{N,M}(x)$$

şeklinde olur. Burada $y(x)$ problemin tam çözümüdür. Bu tez çalışması aşamasında tez konusunda yer alan multi-pantograph denklem problemi için yöntemin uygulanması çalışmasından üretilerek tez yazarı ve danışmanı tarafından araştırma makalesi bu hata analizi kısmında içermektedir.

4.3.2. Birinci Mertebeden Multi-Pantograph Diferansiyel Denklem için Hata Analizi

Bu kısımda multi-pantograph diferansiyel denklemler için hata tahmini yapılacaktır (Yüzbaşı vd., 2024). Pantograph tipinde ki birinci dereceden diferansiyel denklem olan denklem (3.13) için rezidüel fonksiyon

$$R(x) = y'(x) - \alpha(x)y(x) - \sum_{i=1}^M \beta_i(x)y(q_i x) - f(x) = 0 \quad (4.142)$$

şeklinde dir. $y(x)$ yerine yaklaşık çözüm olan $y_N(x)$ yazılırsa

$$R_N(x) = y'_N(x) - \alpha(x)y_N(x) - \sum_{i=1}^M \beta_i(x)y_N(q_i x) - f(x) \approx 0 \quad (4.143)$$

elde edilir. Elde edilen denklem (4.142) ve denklem (4.143) taraf tarafa çıkarırsak

$$e'_N(x) = -R_N(x) + \alpha(x)e_N(x) + \sum_{i=1}^M \beta_i(x)e_N(q_i x) = 0 \quad (4.144)$$

ifadesine ulaşırız, burada

$$e_N(x) = y(x) - y_N(x)$$

şeklinde ifade edilen hata fonksiyondur. Denklem (4.144) için başlangıç koşullarını elde edilir çünkü yaklaşık çözüm bu başlangıç koşullarını sağlar. Bu sebeple

$$e_N(a) = y(a) - y_N(a) = y_a - y_a = 0. \quad (4.145)$$

Sonrasında bu yaklaşımı kullanarak iyileştirilmiş çözüme ulaşırız. Sonrasında (4.144) ve (4.145) hata problemi 4.2.2 de açıklanan yöntem ile M kesme sınırı için çözümlenerek $e_N(x)$ için $e_{N,M}(x)$ yaklaşımı elde edilir. Bu $e_{N,M}(x)$ tahmini hata fonksiyonudur. Daha sonra ise $y_{N,M}(x) = y_N(x) + e_{N,M}(x)$ şeklinde iyileştirilmiş bir çözüm elde edebiliriz. Böylece iyileştirilmiş çözüme ait gerçek hatası ise

$$E_{N,M}(x) = y(x) - y_{N,M}(x)$$

şeklinde elde edebiliriz. Burada $y(x)$ problemin tam çözümüdür. Bu tez çalışmasında ele alınan çoklu pantograph diferansiyel denklem problemi, tez kapsamında geliştirilen yöntemin uygulanabilirliğini göstermek amacıyla hazırlanmış olup, aynı zamanda tez yazarı ve danışmanı tarafından yayımlanan araştırma makalesinde (Yüzbaşı vd., 2024) detaylı olarak incelenmiş ve bu hata tahmin analizine de yer verilmiştir.

4.3.3. Lane-Emden Diferansiyel Denklem için Hata Analizi

Bu kısımda Lane-Emden diferansiyel denklemleri için hata analizi yapılacaktır (Sadeh vd., 2022). Bu denklem için rezidüel fonksiyon ve yaklaşık çözümün yerine koyularak ulaşılabilecek olan fonksiyon

$$R(x) = y''(x) + \frac{\alpha}{x}y'(x) + r(x)y(x) - f(x) = 0, \quad (4.146)$$

$$R_N(x) = y_N''(x) + \frac{\alpha}{x}y_N'(x) + r(x)y_N(x) - f(x) \quad (4.147)$$

şeklinde dir. Burada (4.146) ve (4.147) denklemleri taraf tarafa çıkartılarak

$$-R_N(x) = e_N''(x) + \frac{\alpha}{x}e_N'(x) + r(x)e_N(x) \quad (4.148)$$

denklemini elde ederiz, burada

$$e_N(x) = y(x) - y_N(x)$$

şeklinde tanımlı hata fonksiyonudur. Şimdi denklem (4.148)'in koşulları incelenecektir. Denklem (4.146) için koşullar $y'(a) = y_1$ ve $y(b) = y_2$ olup denklem (4.147) için koşullar $y_N'(a) = y_1$ ve $y_N(b) = y_2$ şeklinde olacaktır. Bu koşullar kullanılırsa hata denkleminin koşulları $e_N'(a) = 0$ ve $e_N(b) = 0$ şeklinde elde edilir. Buradan hata problemi

$$\begin{cases} e_N''(x) + \frac{\alpha}{x}e_N'(x) + r(x)e_N(x) = -R_N(x) \\ e_N'(a) = 0, \quad e_N(b) = 0 \end{cases} \quad (4.149)$$

şeklinde bulunur. Denklem (4.149) sunulan metot ile çözülürse $e_N''(x)$ 'e olan yaklaşım

$$e_{N,M}''(x) = \sum_{w=0}^M a_w^* B_w(x) \quad (4.150)$$

şeklinde elde edilebilir. Buradan da yöntem (4.2.3)'de olduğu bilgi uygulanarak $e_{N,M}(x)$ ifadesi bulunur. $y_N(x)$ ve $e_{N,M}(x)$, ($M > N$) fonksiyonları aracılığıyla aşağıdaki gibi iyileştirilmiş çözümü elde ederiz:

$$y_{N,M}(x) = y_N(x) + e_{N,M}(x).$$

Bu sayede iyileştirilmiş çözümün hata fonksiyonu olan $E_{N,M}(x)$ şu şekilde bulunur:

$$E_{N,M}(x) = e_N(x) - e_{N,M}(x).$$

4.3.4. Popülasyonun Lojistik Büyümesi Modeli için Hata Analizi

Bu alt başlıkta popülasyonun lojistik büyüme denklemi için hata analizi ele alınacaktır. Bu denklem için $R(x)$ rezidüal fonksiyon ve yaklaşık çözümün denklemde yerine konulması ile elde edilen $R_N(x)$

$$R(t) = \rho'(t) - r\rho(t)(1 - \frac{\rho(t)}{K}) = 0, \quad (4.151)$$

$$R_N(t) = \rho'_N(t) - r\rho_N(t)(1 - \frac{\rho_N(t)}{K}) \quad (4.152)$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu iki denklemi taraf tarafa çıkarırsak

$$-R_N(t) = (\rho'(t) - \rho'_N(t)) - r(\rho(t) - \rho_N(t)) + \frac{r}{K}(\rho(t)^2 - \rho_N(t)^2)$$

şeklindeki denklem elde edilir. Burada

$$e_N(t) = \rho(t) - \rho_N(t) \quad (4.153)$$

ifadesi kullanılarak ve (4.153) ifadesinden hareketle $\rho(t) = e_N(t) + \rho_N(t)$ ifadesi elde edilmiş olur. Bu ifade yerine yazılırsa

$$-R_N(t) = e'_N(t) - re_N(t) + \frac{r}{K}([e_N(t) + \rho_N(t)]^2 - \rho_N^2(t))$$

ulasılır. Buradaki bağıntı kullanılırsa

$$-R_N(t) = e'_N(t) - re_N(t) + \frac{r}{K}e_N(t)^2 + 2e_N(t)\rho_N(t)$$

ifadesine ulaşılır. Gerekli düzenlemeler ve işlemler yapılırsa aşağıdaki denklem elde edilmiş olur:

$$e'_N(t) = re_N(t) - \frac{r}{K}e_N(t)^2 - 2e_N(t)\rho_N(t) - R_N(t). \quad (4.154)$$

Buna ek olarak $\rho(0) = \lambda$ koşulunu hem $\rho(t)$ hemde $\rho_N(t)$ fonksiyonları sağlar, buradan denklem (4.154) için başlangıç koşulu $\rho(0) = 0$ şeklinde elde edilir. Sonrasında bu koşul ve (4.154) denkleminde oluşan bu hata probleminin sunulan yöntem ile M kesme sınırı için çözülmesiyle $e_{N,M}(t)$ elde edilmiş olur. Sonrasında $y_{N,M}(t)$ iyileştirilmiş çözüm elde edilir ve iyileştirilmiş çözümün hatası ise

$$E_{N,M}(t) = y(t) - y_{N,M}(t)$$

şeklinde bulunur.

4.3.5. Riccati Diferansiyel Denklem için Hata Analizi

Riccati diferansiyel denklemi (3.18) için hata analizi bu bölümde ele alınacaktır (Yüz-bası, 2013). Riccati denklemi için rezidüel fonksiyon

$$R(x) = y'(x) - r(x)y^2(x) - q(x)y(x) - p(x) = 0 \quad (4.155)$$

şeklindedir. Yaklaşık çözüm olan $y_N(x)$ ifadesi denklem (3.18)'de yerine yazılırsa

$$R_N(x) = y'_N(x) - r(x)y_N^2(x) - q(x)y_N(x) - p(x) \quad (4.156)$$

ifadesi elde edilir. Denklem (4.155) ve (4.156) taraf tarafa çıkarılırsa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$-R_N(x) = y'(x) - y'_N(x) - r(x)[y^2(x) - y_N^2(x)] - q(x)[y(x) - y_N(x)]. \quad (4.157)$$

Doğrusal olmayan kısmı düzenlersek ve $e_N(x) = y(x) - y_N(x)$ ifadesini kullanırsak

$$\begin{aligned} -r(x)[y^2(x) - y_N^2(x)] &= -r(x)[e_N(x) + y_N(x)]^2 - y_N^2(x) \\ &= -r(x)[e_N(x)^2 + 2e_N(x)y_N(x)] \end{aligned} \quad (4.158)$$

elde edilmiş olur. Burada düzenleme yapılırsa

$$-R_N(x) = e'_N(x) - 2r(x)y_N(x)e_N(x) - r(x)e_N^2(x) - q(x)e_N(x) \quad (4.159)$$

elde edilir ve (4.159) denklemi düzenlenirse

$$e'_N(x) - [2ry_N(x) + q]e_N(x) - r(x)e_N^2(x) + R_N(x) \quad (4.160)$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca $y(\alpha) = y_\alpha$ koşulu $y_N(x)$ ve $y(x)$ 'yi sağlar. Bu yüzden $e_N(\alpha) = 0$ ifadesi denklem (4.160) çözülerek $e_N(x)$ için başlangıç koşuludur. Daha sonra elde edilen bu hata problemi, seçilen M için sunulan yöntemle çözülerek $e_N(x)$ için ve $e_{N,M}(x)$ yaklaşımı elde edilir. $y_N(x)$ yaklaşık çözümü ve $e_{N,M}(x)$ tahmini hata fonksiyonu ile toplayarak, iyileştirilmiş çözümü şu şekilde elde ederiz:

$$y_{N,M}(x) = y_N(x) + e_{N,M}(x)$$

Buradan hareketle iyileştirilmiş çözüm için hata fonksiyonu

$$E_{N,M}(x) = y_{N,M}(x) - y(x)$$

şeklinde tanımlanır.

4.3.6. Yüksek Mertbeden Lineer Diferansiyel Denklem için Hata Analizi

Bu alt başlıkta yüksek mertebeden lineer diferansiyel denklemler için hata analizi araştırılacak ve rezidüel fonksiyonundan bahsedilecektir (Çetin vd., 2015). Yüksek mertebeden diferansiyel denklem için rezidüel fonksiyon

$$R(x) = \sum_{\ell=0}^m P_{\ell}(x)y^{(\ell)}(x) - f(x) = 0 \quad (4.161)$$

şeklindedir. $y(x)$ yerine yaklaşık çözüm olan $y_N(x)$ yazılırsa

$$R_N(x) = \sum_{\ell=0}^m P_{\ell}(x)y_N^{(\ell)}(x) - f(x) \approx 0 \quad (4.162)$$

ifadesine ulaşılır. Elde edilen denklem (4.161) ve denklem (4.162) taraf tarafa çıkarırsak

$$e_N^{(\ell)}(x) = -R_N^{(\ell)}(x) + \sum_{\ell=0}^m P_{\ell}(x)y_N^{(\ell)}(x) \approx 0 \quad (4.163)$$

denkleminde ulaşılır, burada

$$e_N(x) = y(x) - y_N(x)$$

şeklindeki fonksiyondur. Denklem (4.163) için homojen başlangıç koşulları elde edilir çünkü yaklaşık çözüm bu başlangıç koşullarını sağlar. Bu sebeple aşağıdaki koşullar elde edilir:

$$e^{(i)}(a) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m-1 \quad (4.164)$$

Sonrasında denklem (4.163), (4.164) koşulu altında önerilen metodla çözülerek $e_N(x)$ hata ifadesi için $e_{N,M}(x)$ yaklaşımı edinilir. Böylece (4.47) için $y_{N,M}(x) = y_N(x) + e_{N,M}(x)$ şeklinde iyileştirilmiş çözüm elde edilir. Buradan hareketle iyileştirilmiş çözüme ait gerçek hata fonksiyonu

$$E_{N,M}(x) = y(x) - y_{N,M}(x)$$

olur.

4.3.7. Genelleştirilmiş Pantograph Diferansiyel Denklem için Hata Analizi

Bu kısımda yüksek mertebeden pantograph gecikmeli diferansiyel denklemler için hata tahmini yapılacaktır (Bahşı vd., 2015). Genelleştirilmiş pantograph diferansiyel denklemin rezidüel fonksiyon

$$R(x) = y^{(m)}(x) - \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{m-1} P_{ik}(x)y(q_{ik}x\beta_j) + f(x) = 0 \quad (4.165)$$

şeklindedir. $y(x)$ yerine yaklaşık çözüm olan $y_N(x)$ yazılırsa

$$R_N(x) = y_N^{(m)}(x) - \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{m-1} P_{ik}(x) y_N(q_{ik}x\beta_j) + f(x) \approx 0 \quad (4.166)$$

ifadesine ulaşılır. Elde edilen denklem (4.165) ve denklem (4.166) taraf tarafa çıkarırsak

$$e_N(x) = -R_N(x) + \sum_{i=0}^J \sum_{k=0}^{m-1} P_{ik}(x) e_N(q_{ik}x\beta_j) = 0 \quad (4.167)$$

denklemini elde ederiz, burada

$$e_N(x) = y(x) - y_N(x)$$

şeklinde tanımlı hata fonksiyonudur. Yaklaşık çözüm de aynı zamanda koşulları sağlar bu sebeple koşullar taraf taraf çıkartılırsa ve $e_N(x)$ hata fonksiyonu kullanılırsa

$$e^{(i)}(a) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m-1 \quad (4.168)$$

homojen koşulları edinilir. Elde edilen hata problemi önerilem metodla çözülerek $e_N(x)$ ifadesi için $e_{N,M}(x)$ yaklaşımı edinilir. Ayrıca $y_{N,M}(x) = y_N(x) + e_{N,M}(x)$ şeklinde iyileştirilmiş yaklaşık çözümü elde edilir. Buradan hareketle $E_{N,M}(x)$ hata fonksiyonu

$$E_{N,M}(x) = y(x) - y_{N,M}(x)$$

şeklinde olup buradaki $y_{N,M}(x)$ iyileştirilmiş çözümü göstermektedir.

4.4. Nümerik Uygulamalar

Bu kısımda sunulan yöntem ve hata tahmini yöntemini açıklamak için ele alınan problemler sayısal örneklere uygulanarak sonuçlar tablo ve şekiller halinde verilmektedir. Ayrıca literatürdeki mevcut yöntemlerin sonuçları ile karşılaştırmalar yapılır. Bu bölümde incelenen tüm problemler MATLAB(2021) programı vasıtasıyla yazılan kodlar yardımıyla çözülmüştür.

4.4.1. Birinci Mertebeden Lineer Pantograph Denklemleri için Uygulamalar

Örnek 4.1. İlk olarak aşağıdaki homojen olmayan pantograph denklemini ele alalım. Bu denklem

$$y'(x) = 2y(x) - y(0.5x) - \frac{31}{16}x^4 + 4x^3 - \frac{3}{2}x + 1, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.169)$$

şeklinde tanımlı ve $y(0) = 0$ koşulu altında ele alınacaktır. Bu denklem için tam çözüm $y(x) = x^4 + x$ şeklindedir. Burada $\alpha = 2, \beta = -1, q = 0.5$ ve $f(x) = -\frac{31}{16}x^4 + 4x^3 - \frac{3}{2}x + 1$ şeklinde olduğu kolaylıkla görülebilir. Birinci mertebeden lineer pantograph denkleminde bu parametreler ve tam çözüm belirtildiği şekilde seçilerek (4.169) denklemi elde edilmiştir. $N = 3$ için önerilen yöntemin kullanılması ile aranılan yaklaşık çözüm bulunacaktır. Bu amaçla, ilk olarak $a = 0, b = 0$ ve $N = 3$ için kollokasyon noktaları

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1667}{5000}, \quad x_2 = \frac{6667}{10000}, \quad x_3 = 1$$

olarak hesaplanır. Bu problem ışığında temel matris denklemini olan denklem (4.45)

$$\mathbf{W} = \mathbf{X} - \alpha[\bar{\mathbf{X}}\mathbf{X} - 0\mathbf{X}(0)]\mathbf{V} - \beta[(0.5)\bar{\mathbf{X}}\mathbf{X}\mathbf{Q}(0.5) - 0\mathbf{X}(0)]\mathbf{V}$$

şeklinde yazılır ve burada

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1667/5000 & (1667/5000)^2 & (1667/5000)^3 \\ 1 & 6667/10000 & (6667/10000)^2 & (6667/10000)^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1667/5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6667/10000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}(0.5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (0.5) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (0.5)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (0.5)^3 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1/10 \\ 1/10 \\ 1/10 \\ 1/10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 \\ 809/1296 \\ 65/81 \\ 25/16 \end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanır. Sonrasında $\mathbf{G}$ matrisi aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 809/1296 \\ 65/81 \\ 25/16 \end{bmatrix}.$$

Bu sayede artırılmış matris olan denklem (4.45) aşağıdaki gibi elde edilmiş olur:

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 1 \\ 1/2 & 17/72 & 19/216 & 161/5184 & ; & 809/1296 \\ 0 & 5/18 & 7/27 & 65/324 & ; & 65/81 \\ -1/2 & 1/8 & 3/8 & 33/64 & ; & 25/16 \end{bmatrix}.$$

Bu sistemin çözülmesiyle katsayılar matrisi $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}^T$$

şeklinde hesaplanır. Son olarak $\mathbf{A}$ matrisinin (4.46) çözüm formunda yerine yazılması ile aranan yaklaşık çözüm $y_3(x) = x^4 + x$ şeklinde elde edilir. Kolayca görülebileceği üzere bulunan yaklaşık çözüm tam çözüm ile aynıdır. Burada ele alınan problem, tez yazarı ve danışmanı tarafından bildiri metni olarak sunulmuştur (Yüzbaşı vd., 2023).

Örnek 4.2. İkinci olarak $y(0) = 1$ koşulu altında (Sezer vd., 2008)

$$y'(x) = \frac{y(x)}{2} + \frac{1}{2}e^{(x/2)}y(x/2), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.170)$$

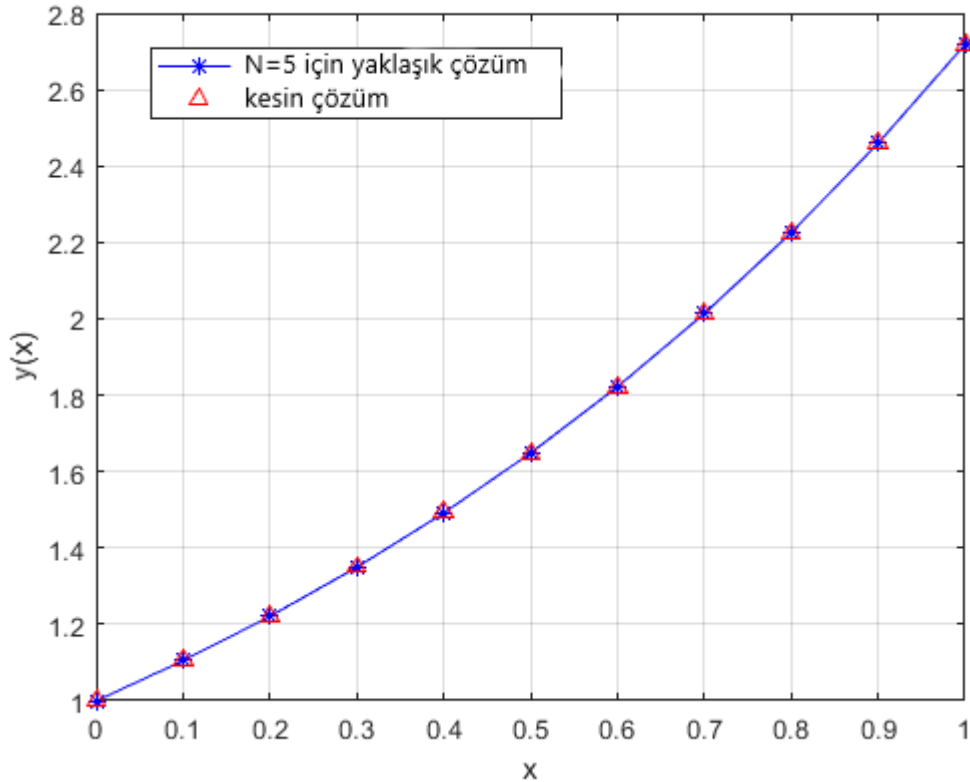
şeklinde tanımlı pantograph diferansiyel denklem ele alınacaktır. Bu denklem için $\alpha = 1/2$, $\beta = (1/2)e^{x/2}$, $q = 1/2$ ve $f(x) = 0$ şeklindedir. $y(x) = e^x$ denklemi bu problemi sağlayan tam çözümdür. İlk örnekte olduğu gibi matris işlemleri yapılır ve $[\mathbf{W} : \mathbf{G}]$ artırılmış matrisi hesaplanırsa

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 1 \\ 1167/1588 & 887/2983 & 2958/28435 & 529/14952 & ; & 433/397 \\ 1761/4057 & 354/685 & 211/546 & 329/1221 & ; & 3276/2735 \\ 261/2972 & 733/1133 & 787/985 & 594/689 & ; & 984/743 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Sistemi çözer ve çözümünü (yani belirtilen katsayıları) denklemin (4.46) çözüm formunda yerine koyarak $N = 3$ için yaklaşık çözüm elde edilir. Benzer şekilde $N = 5$ için de yöntem uygulanarak yaklaşık çözüm bulunur. Şekil 4.1.'de $N = 5$ için bulunan yaklaşık çözüm ve tam çözüm karşılaştırılır. Burada edinilen görselde yaklaşık çözümün tam çözüme kayda değer ölçüde yakın olduğu gözlemlenebilmektedir.

Tablo 4.1. Gerçek mutlak hata sonuçlarının Denklem (4.170) özelinde karşılaştırılması.

	Önerilen Metot (Yüzbaşı vd., 2024)	Taylor Metodu (Sezer vd., 2008)	Galerkin Metodu (Yüzbaşı vd., 2018)	Önerilen Metot (Yüzbaşı vd., 2024)	Taylor Metodu (Sezer vd., 2008)	Legendre P. Metodu (Jafari vd., 2021)
x	$N = 7$	$N = 7$	$N = 7$	$N = 9$	$N = 9$	$N = 9$
0,0	0	0	0	0	0	0
0,2	3.8504e-10	2,5600e-11	6.2610e- 09	3.4616e-13	2.2200-14	4.9000e-13
0,6	5.3296e-10	7.7700e-08	1.0810e-08	5.3334e-13	2.2200e-09	2.5040e-11
1,0	1.1523e-09	2.1200e-06	1.7880e-08	1.1186e-12	5.0100e-07	4.8860e-11

Şekil 4.1. Denklem (4.170) için yaklaşık çözüm olan $y_5(x)$ ve tam çözüm olan $y(x)$ fonksiyonlarının karşılaştırılması.

Tablo 4.2. Denklem (4.170) için gerçek mutlak hatalar ile iyileştirilmiş hatalarının karşılaştırılması (Yüzbaşı vd., 2024).

	Mutlak Hata	İyileştirilmiş Hata	Mutlak Hata	İyileştirilmiş Hata
x	N = 5	N = 5, M = 6	N = 7	N = 7, M = 8
	$e_5(x)$	$E_{5,6}(x)$	$e_7(x)$	$E_{7,8}(x)$
0,2	3.2025e-07	1.1786e-08	3.8767e-10	1.1878e-11
0,4	2.9193e-07	1.2422e-08	4.6122e-10	1.4833e-11
0,6	4.3395e-07	1.5130e-08	5.3296e-10	1.7940e-11
0,8	4.1912e-07	2.0137e-08	6.4202e-10	2.1432e-11
1,0	8.3366e-07	1.3246e-08	1.1314e-09	1.5813e-11

Tablo 4.1.'de değişen N leri için bulunan mutlak hatalar diğer literatürdeki metotlarla karşılaştırılmıştır (Jafari vd., 2021, Yüzbaşı vd., 2018). Tablo incelendiğinde önerilen metodun karşılaştıma yapılan Taylor metodundan (Sezer vd., 2008) aynı N değerleri için daha iyi performans verdiği görülebilmektedir. Ayrıca önemi vurgulanması gereken bir diğer konu $[0, 1]$ değer aralığında önerilen metoddan elde edilen değerler arasında tutarlılık olmasıdır. Bu durum x 'in değişen değerleri için etkili sonuçlar elde edileceğini vurgular. Tablo 4.1.'den anlaşılacağı üzere önerilen yöntemden elde edilen yaklaşık çözümler tam çözüme oldukça yakın değerler olmuş ve bu durum mutlak hatalardan gözlemlenmiştir. Burada görüldüğü üzere yaklaşık çözümden elde edilen sonucun etkinliği kolayca görülebilmektedir. Ayrıca Tablo 4.2'de mutlak hatalar ile birlikte iyileştirilmiş hata değerleride verilmiştir. Burada iyileştirilmiş hataların iyileştirilmemiş hatalardan daha küçük sonuçlar verdiği görülebilir. İyileştirilmiş sonuçlar için seçilen yeni kesme sınırı M , ilk seçtiğimiz kesme sınırı olan N 'den daha büyük seçilmiştir. Bunun sebebi daha tutarlı sonuçlar elde etmek içindir. Burada ele alınan problem, tez yazarı ve danışmanı tarafından makale olarak yayınlanmıştır (Yüzbaşı vd., 2024).

4.4.2. Birinci Mertebeden Multi-Pantograph Denklemleri için Örnekler

Örnek 4.3. İlk olarak

$$y'(x) = y(x) + 2y(0.2x) + 2x - \frac{54x^2}{50} - 3, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.171)$$

$y(0) = 1$ koşulu altında birinci mertebeden bir pantograph denklemi ele alınacaktır. Bu denklem için tam çözüm $y(x) = x^2 + 1$ şeklinde olup burada $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $q = 0.2$, $f(x) = 2x - 54x^2/50 - 3$ şeklindedir. Birinci mertebeden multi-pantograph denkleminde bu parametreler ve kesin çözüm belirtildiği şekilde seçilerek (4.171) denklemi elde edilmiştir. Kollokasyon noktalarının kümesi $N = 3$ için

$$\left\{ x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1667}{5000}, \quad x_2 = \frac{6667}{10000}, \quad x_3 = 1 \right\}$$

şeklinde bulunur. Bu problem için $\mathbf{W}$ ve $\mathbf{G}$ matrisleri denklem (4.65) ve (4.64)'den hareketle

$$\mathbf{W} = \left[\mathbf{X} - \mathbf{K}[\bar{\mathbf{X}}\mathbf{X} - 0\mathbf{X}(0)]\mathbf{V} - \mathbf{B}[0.2\bar{\mathbf{X}}\mathbf{X}\mathbf{Q}(0.2) - 0\mathbf{X}(0)]\mathbf{V} \right] \mathbf{C},$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{F} + \bar{\mathbf{K}} + \bar{\mathbf{B}}$$

şeklinde hesaplanır. Burada mevcut matrisler

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1667/5000 & (1667/5000)^2 & (1667/5000)^3 \\ 1 & 6667/10000 & (6667/10000)^2 & (6667/10000)^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1667/5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6667/10000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}(0.2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1/2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1/2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1/2)^3 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -3 \\ -184/75 \\ -161/75 \\ -52/25 \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 41/75 \\ 64/75 \\ 23/25 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur, buradan hareketle gerekli işlemler yapılarak aşağıdaki sistem elde edilir:

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & , & 0 \\ 8/15 & 41/150 & 117798/10125 & 20741/67500 & , & 41/75 \\ 1/15 & 32/75 & 4834/10125 & 3788/5625 & , & 64/75 \\ -2/5 & 35/50 & -52/375 & 3023/2500 & , & 23/25 \end{bmatrix}.$$

Bu sistemin çözülmesiyle $\mathbf{A} = [0 \ 2 \ 0 \ 0]^T$ bulunur ve denklem (4.46)'da yerine yazılırsa $y(x) = x^2 + 1$ yaklaşık çözümünü elde edilmiş olur. Sonuç olarak tam çözüm elde edilmiş olur.

Örnek 4.4. İkinci olarak (Murayo vd., 2002)

$$u'(x) = -u(x) + 0.1u(0.2x) - 0.1e^{-0.2x}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.172)$$

şeklinde tanımlı homojen olmayın lineer pantograph denklemi $y(0) = 1$ koşulu altında ele alınacaktır. Bu denklem için tam çözüm $y(x) = e^{-x}$ şeklindedir (Shadia, 1992). Denklemdaki katsayılar $\alpha = -1$, $\beta = 0.1$, $q = 0.2$, $a = 0$, $u_a = 1$ ve $f(x) = -0.1e^{-0.2x}$ formundadır. Bu problem için temel matris denklem (4.65)'den hareketle

$$\mathbf{W} = \mathbf{X} - \mathbf{C}[\bar{\mathbf{X}}\mathbf{X} - 0\mathbf{X}(0)]\mathbf{V} - \mathbf{B}[q\bar{\mathbf{X}}\mathbf{X}\mathbf{Q}(q) - 0\mathbf{X}(0)]\mathbf{V}$$

şeklindedir. Önceki örnekteki yöntemin prosedürü devam edilirse arttırılmış matris

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ; & -1 \\ 134/101 & 809/2081 & 545/4413 & 87/2167 & ; & -6007/6046 \\ 663/401 & 1539/1733 & 1352/2489 & 2483/7182 & ; & -712/721 \\ 99/50 & 749/500 & 1665/1249 & 7811/6249 & ; & -325/331 \end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanır. Bu lineer cebirsel sistemin çözülmesiyle $\mathbf{A}$ matrisi bulunmuş olur. Bulunan $\mathbf{A}$ matrisinin çözüm formu olan (4.46)'da yerine yazılmasıyla

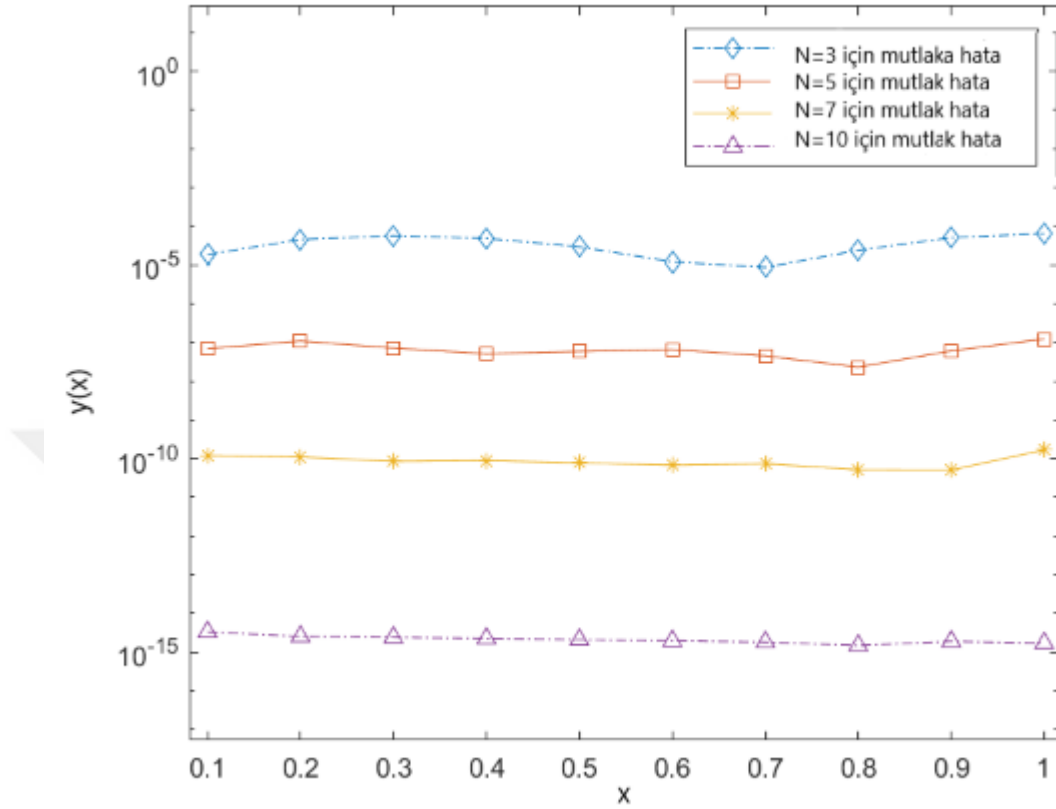
$$y_3(x) = (2.5863e - 02)x^4 - (1.5517e - 01)x^3 + (4.9713e - 01)x^2 - x + 1$$

Tablo 4.3. Yaklaşık çözümlerin, Örnek (4.172) özelinde değerlendirilmesi ve karşılaştırılması (Yüzbaşı vd., 2024).

	Tam Çözüm	Önerilen Yöntem	Önerilen Yöntem	Önerilen Yöntem	Önerilen Yöntem
x	$y(x) = e^{-x}$	$N = 3$	$N = 5$	$N = 7$	$N = 10$
0,0	1	1	1	1	1
0,2	8.1873e-01	8.1869e-01	8.1872e-01	8.1873e-01	8.1873e-01
0,4	6.7032e-01	6.7027e-01	6.7031e-01	6.7032e-01	6.7032e-01
0,6	5.4881e-01	5.4880e-01	5.4880e-01	5.4881e-01	5.4881e-01
0,8	4.4933e-01	4.4930e-01	4.4934e-01	4.4932e-01	4.4933e-01
1,0	3.6788e-01	3.6781e-01	3.6757e-01	3.6788e-01	3.6788e-01

yaklaşık çözümü edinilir. Denklem (4.172)'nin $N = 3, 5, 7, 10$ için bulunan yaklaşık ve tam çözüm ifadeleri Tablo 4.1.'de karşılaştırılarak verilmiştir. Tablo 4.3.'den görüleceği üzere yaklaşık çözümün doğruluğu N artıkça artmaktadır.

Şekil 4.2. Farklı N değerleri ile problem (4.172) için mutlak hataların karşılaştırılması.



Tablo 4.4.'de mutlak hataların farklı metotlarla birlikte karşılaştırılmasına yer verilmiştir. Bu metotlar Taylor metodu (Sezer vd., 2011), kollokasyon yöntemi (Murayo vd., 2002) ve Galerkin metodudur (Yüzbaşı vd., 2018). Karşılaştırmalardan anlaşılacağı üzere önerilen metot diğer yöntemlere göre daha etkili sonuç vermiştir. Burada ele alınan örnek tez yazarı ve danışmanı tarafından araştırma makalesi olarak yayımlanmıştır (Yüzbaşı vd., 2024).

Örnek 4.5. Bu alt başlığın son örneği olarak aşağıdaki denklem ele alınacaktır (Murayo vd., 2002).

$$y'(x) = -y(x) + \frac{q}{2}u(qx) - \frac{q}{2}e^{-qx}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.173)$$

Tablo 4.4. Örnek (4.172)'ye ait yaklaşık çözümlere karşılık gelen mutlak hata değerlerinin karşılaştırmalı değerlendirmesi.

	Taylor Metodu (Sezer vd., 2011)	Galerkin Metodu (Sezer vd., 2011)	Kollokasyon Metodu (Murayo vd., 2002)	Mevcut Metot (Yüzbaşı vd., 2024)	Mevcut Metot (Yüzbaşı vd., 2024)
x	$N = 12$	$N = 7$		$N = 7$	$N = 12$
2^{-1}	1.24e-10	1.1625e-09	2.7190e-05	7.7571e-11	2.0435e-18
2^{-2}	9.74e-11	1.6975e-09	1.080e-06	9.1539e-11	1.1967e-18
2^{-3}	7.00e-11	1.8217e-09	3.8170e-08	1.3035e-10	5.4222e-17
2^{-4}	9.14e-11	3.0370e-09	1.2690e-09	7.9933e-11	3.66089e-17
2^{-5}	5.28e-11	2.6907e-09	4.0900e-11	3.0402e-11	4.0095e-18
2^{-6}	1.95e-11	1.7620e-09	1.2000e-12	9.3013e-12	1.36660e-17

Bu problem $y(0) = 1$ koşulu ile verilmektedir, $q = 0.2$ olarak alınacaktır ve $y(x) = e^{-x}$ tam çözümüne sahiptir. Bu örnek homojen bir multi-pantograph denklemdir. N 'in farklı değerleri ile yöntem için oluşturulan kodlar yardımıyla yaklaşık çözümler bulunur. Buradan önerilen yöntem vasıtasıyla çözümler elde edilmiş ve tablolarda karşılaştırılmalarında sunulmuştur. Tablo 4.7.'de farklı yöntemlerden elde edilen sonuçlar mevcut yöntemle karşılaştırılmıştır. Farklı N değerleri için yapılan karşılaştırılmada yöntemin etkin ve uygulanabilir olduğu gözlemlenebilmektedir. Ayrıca Tablo 4.4.'de $N = 12$ için mevcut yöntemden elde edilen sonuçlar Sezer metodundan (Sezer vd., 2011) $N = 12$ için elde edilen sonuçlardan daha iyi sonuç vermiştir. Bu durum, sunulan yöntem ile daha düşük kesme sınırları için daha iyi sonuçlar alınabileceğini göstermektedir. Ayrıca bu gözlemler Şekil 4.5. da grafik olarak görselleştirilmiştir. Burada önerilen yöntem Taylor yöntemi (Sezer vd., 2011), kollokasyon yöntemi (Muroya vd., 2002) ve Galerkin yöntemiyle (Yüzbaşı vd., 2018) aynı N değerleri için karşılaştırılmıştır. Tablo 4.8.'de tahmini hatanın mutlak hatadan, iyileştirilmiş hatanında tahmini hatadan daha düşük olduğu görülebilir. Hata analizinin amacı daha tutarlı ve uygulanabilir çözümler elde edilmesidir. Bu durum tablodan gözlemlenebileceği üzere amaçlandığı gibi sonuçlar alınmış ve sayısal olarak gözlemlenebilir hale getirilmiştir. Burada ele alınan örnek tez yazarı ve danışmanı tarafından araştırma makalesi olarak yayımlanmıştır (Yüzbaşı vd., 2024).

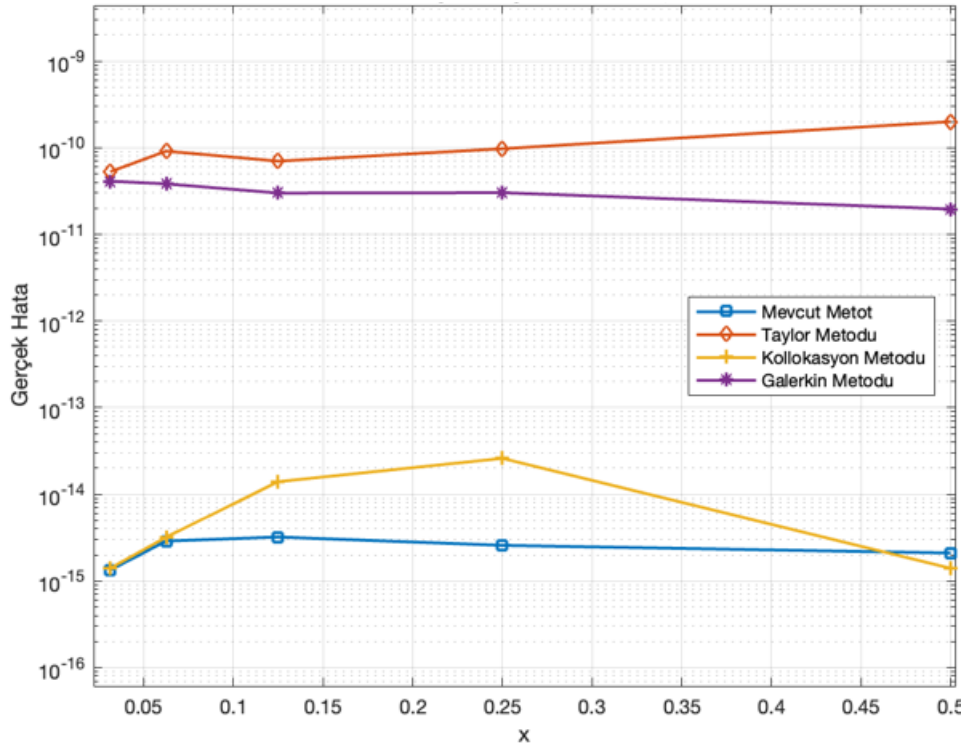
Tablo 4.5. Gerçek mutlak hata sonuçlarının, Denklem (4.173) özelinde karşılaştırılması.

	Mevcut Metot	Mevcut Metot	Mevcut Metot	Mevcut Metot	Taylor Metodu	Taylor Metodu
	(Yüzbaşı vd., 2024)	(Yüzbaşı vd., 2024)	(Yüzbaşı vd., 2024)	(Yüzbaşı vd., 2024)	(Sezer vd., 2011)	(Sezer vd., 2011)
x	$N = 7$	$N = 10$	$N = 12$	$N = 13$	$N = 10$	$N = 12$
2^{-1}	7.75e-11	2.10e-15	1.64e-18	1.14e-18	2.00e-10	1.24e-10
2^{-2}	9.15e-11	2.57e-15	1.15e-17	1.08e-17	0.97e-10	9.74e-11
2^{-3}	1.29e-10	3.21e-15	3.81e-17	2.75e-17	1.00e-10	7.00e-11
2^{-4}	7.62e-11	2.88e-15	1.18e-17	1.11e-17	0.91e-10	9.14e-11
2^{-5}	2.84e-11	1.33e-15	2.14e-17	2.18e-17	0.52e-10	5.28e-11
	Muroya Metodu	Sezer Metodu	Kollokasyon Metod	Bessel Metodu	Galerkin Metodu	
	(Muroya vd., 2003)	(Sezer vd., 2007)	(Muroya vd., 2002)	(Yüzbaşı vd., 2011)	(Yüzbaşı vd., 2018)	
		$N = 13$	$N = 10$	$N = 13$	$N = 10$	
	2.19e-05	7.77e-16	1.40e-15	1.11e-16	1.96e-11	
	1.08e-06	1.11e-16	2.60e-14	1.11e-16	3.03e-11	
	3.81e-08	2.22e-16	1.40e-14	2.22e-16	2.08e-11	
	1.26e-09	0	3.20e-15	0	3.83e-11	
	4.09e-11	1.11e-16	1.40e-15	2.22e-16	4.11e-11	

Tablo 4.6. Denklem (4.173) için gerçek mutlak hataların ve tahmini hataların karşılaştırılması (Yüzbaşı vd., 2024).

x	Mutlak Hatalar	Tahmini Hatalar	İyileştirilmiş Hatalar
	$N = 5$	$N = 5, M = 8$	$N = 5, M = 8$
	$ e_5(x) = y(x) - y_5(x) $	$ e_{5,8}(x) $	$ E_{5,8}(x) $
0,0	0	0	0
0,2	1.0050e-07	1.0050e-07	3.3318e-12
0,4	5.0761e-08	5.0758e-08	2.8007e-12
0,6	6.5433e-08	6.5431e-08	2.4017e-12
0,8	2.3293e-08	2.3291e-08	1.9496e-12
1,0	1.2346e-07	1.2346e-07	1.9030ze-12

Şekil 4.3. Farklı metotlarla $N = 10$ için gerçek mutlak hata fonksiyonları ile yapılan karşılaştırma.



4.4.3. Lane-Emden Diferansiyel Denklemini için Uygulamalar

Bu bölümde yöntemin Lane-Emden denklemi üzerinde ki güvenilirliğini ortaya koymak amacıyla çeşitli uygulamalar yapılmıştır. Elde edilen veriler farklı yöntemlerle karşılaştırılarak tablo ve grafiklerde bulunabilir.

Örnek 4.6. İlk olarak,

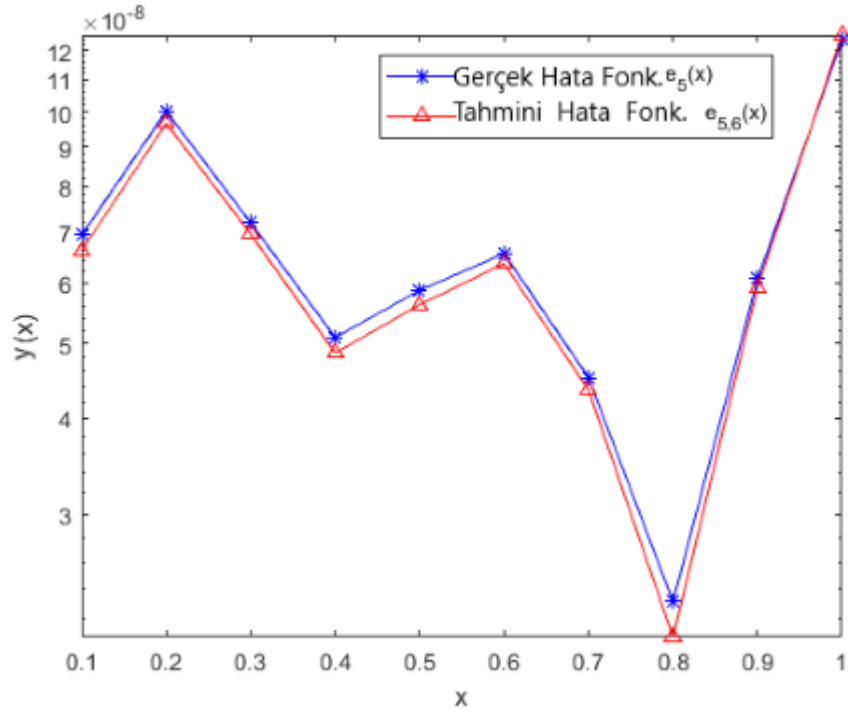
$$y''(x) + \frac{2}{x}y'(x) + y(x) = 6 + 12x + x^2 + x^3 \quad 0 < x \leq 1 \quad (4.174)$$

denklemini ele alınacaktır. Bu denklem $x^3 + x^2$ şeklinde tam çözümünü polinom olan bir çözüme sahiptir. Lane-Emden diferansiyel denkleminde bu parametreler ve kesin çözüm belirtildiği şekilde seçilerek (4.174) denklemini elde edilmiştir. Ayrıca bu problem $y(0) = 0$ ve $y'(0) = 0$ şeklindeki koşullar altında ele alınacaktır. Metoda başlarken $N = 1$ için kollokasyon noktaları

$$\{x_0 = 0.0001, \quad x_1 = 1\}$$

şeklinde elde edilir. Burada görüleceği üzere ilk kollokasyon noktası 0 yerine sıfıra yakın

Şekil 4.4. Denklem (4.173) için tahmini hata ve gerçek hata fonksiyonlarının karşılaştırılması.



bir nokta olarak seçilmiştir. Bunun sebebi Lane-Emden diferansiyel denkleminin singüler bir noktaya sahip olmasıdır. Bu kollokasyon noktaları ışığında

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0.0001 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0.0001 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{X}_a = \mathbf{X}_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{X}}_b = \begin{bmatrix} 0.0001 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\ddot{\mathbf{X}}_b = \begin{bmatrix} 0.0001 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 20000 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 20000 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 4999/833 \\ 20 \end{bmatrix}, \mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

matrisleri elde edilmiş olup buna bağlı lineer sistem için denklem (4.80)'den $\mathbf{W}$ matrisi

$$\mathbf{W} = [\mathbf{X} + \mathbf{P} [(\bar{\mathbf{X}}\mathbf{X} - 0\mathbf{X}_0)\mathbf{V}_1] + \mathbf{R}\bar{\mathbf{X}}^2\mathbf{X}\mathbf{V}_2\mathbf{V}_1 - \mathbf{R}0^2\mathbf{X}_0\mathbf{V}_2\mathbf{V}_1 - \mathbf{R}\mathbf{a}\mathbf{X}_0\bar{\mathbf{X}}_0\mathbf{V}_1]\mathbf{G}$$

ve buna bağlı lineer cebirsel sistem

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 3 & 1/5000 & ; & 4999/833 \\ 7/2 & 13/6 & ; & 20 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Bu sistemin çözülmesi sonrası

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{G} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Bu bulunan bilinmeyen katsayılar matrisi $\mathbf{A}$ yaklaşık çözüm formu olan denklem (4.74)'de yerine konularak yaklaşık çözüm bulunur. Bu işlem sonrası yaklaşık çözüm $y_1(x) = x^3 + x^2$ şeklinde elde edilir ki buda tam çözümün kendisidir. Tez aşamasında tezdeki (4.174) problemi için yöntemin uygulanması ve edinilen sonuçlar araştırma makalesi olarak yayınlanmıştır (Yüzbaşı vd., 2025).

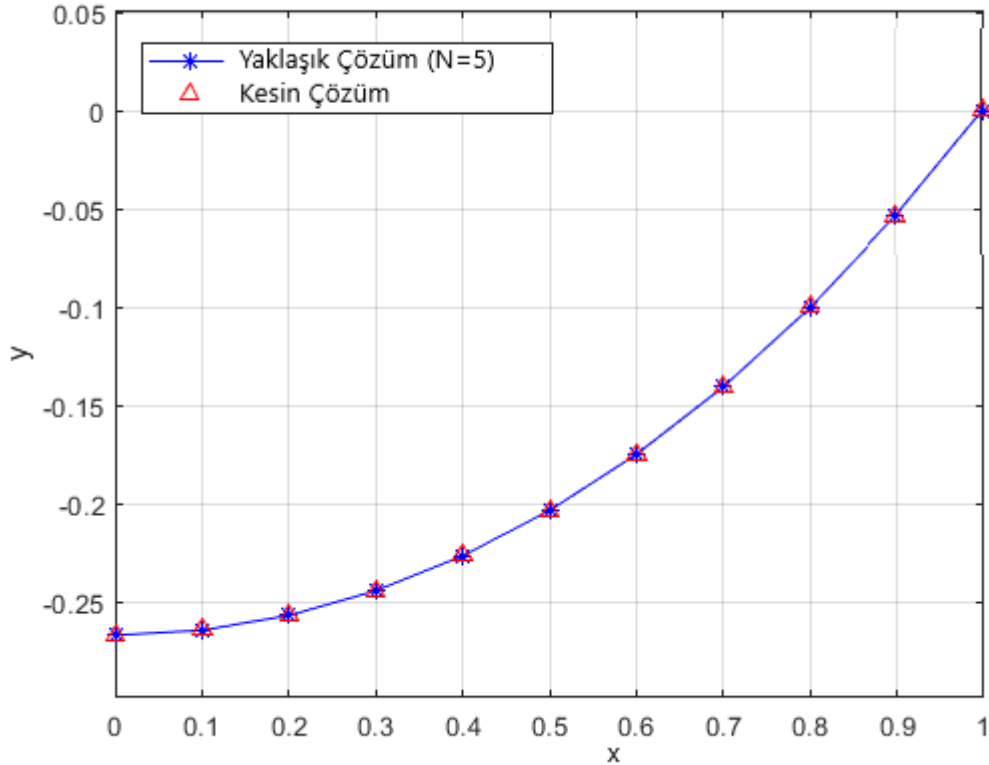
Örnek 4.7. İkinci olarak aşağıdaki şekilde tanımlı Lane-Emden diferansiyel denklemini ele alalım (Yüzbaşı vd 2011):

$$y'' + \frac{2}{x}y' - 2(2x^2 + 3)y = 0, \quad 0 < x \leq 1. \quad (4.175)$$

Bu problem $y(0) = 0$ ve $y'(0) = 0$ koşulu altında ele alınacaktır. Bu problemin tam çözümü $y(x) = e^{x^2}$ şeklindeki üstel fonksiyondur. Önerilen yöntem bu problem için farklı N değerlerinde çözümlenerek tablo ve grafiklerle verilecektir. $N = 5, 13, 17$ için elde edilen çözümler Tablo 4.7'da verilmiştir ve görüldüğü üzere elde edilen çözüm değerleri tam çözüm değerlerine kayda değer şekilde yakın çıkmıştır. Ayrıca artan N değerleri için tam çözüme daha yakın çözümler elde edilmiştir. Ayrıca Görsel 4.5.'de $N = 5$ için bulunan yaklaşık çözüm ve tam çözüm değerleri karşılaştırılmıştır.

Tablo 4.7. Denklem (4.175) için elde edilen hata fonksiyonlarının karşılaştırılması.

x	Tam çözüm $y(x) = e^{x^2}$	Yaklaşık Çözüm $N = 5$	Yaklaşık Çözüm $N = 13$	Yaklaşık Çözüm $N = 17$
0,0	1	1	1	1
0,2	1.04081077419238	1.0408746253313	1.0408107742010	1.0408107741923
0,4	1.17351087099181	1.1735786881614	1.1735108710020	1.1735108709918
0,6	1.43332941456034	1.4334186990090	1.4333294145729	1.4333294145603
0,8	1.89648087930495	1.8965735095697	1.8964808793215	1.8964808793049
1,0	2.71828182845904	2.7185464738086	2.7182818284962	2.7182818284590

Şekil 4.5. Denklem (4.175)'nin tam çözümü ile yaklaşık çözümler arasındaki farkların incelenmesi.

Tablo 4.8. Denklem (4.175) için sunulan yöntem ve literatürdeki başka yöntemler ile elde edilen yaklaşımların hatalarının incelenmesi.

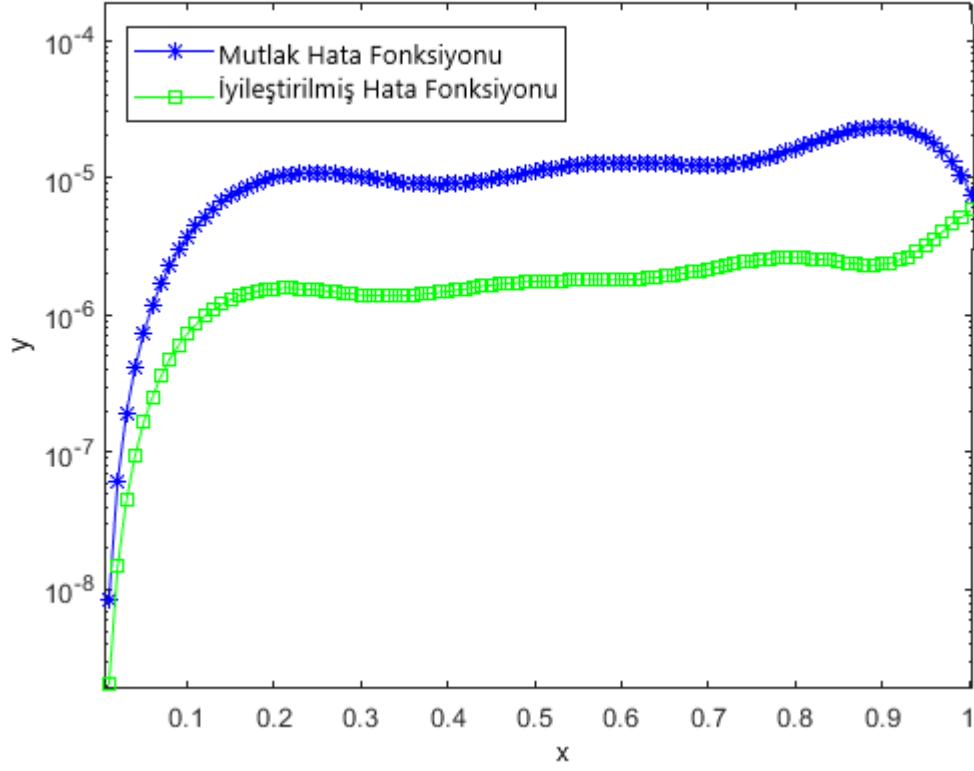
	Mevcut Metot (Yüzbaşı vd., 2025)	Mevcut Metot (Yüzbaşı vd., 2025)	Laguerre Metot (Gürbüz vd., 2014)	Bessel Metot (Yüzbaşı vd., 2011)
x	$N = 12$	$N = 13$	$N = 12$	$N = 13$
0,0	0	0	1.23e-10	0
0,2	6.65e-11	8.67e-12	4.67e-07	2.17e-09
0,5	8.60e-11	1.12e-11	6.84e-07	2.94e-09
0,7	1.09e-10	1.43e-11	8.84e-07	3.78e-09
0,8	1.28e-10	1.65e-11	1.03e-06	4.41e-9
1,0	7.86e-11	3.72e-11	1.48e-06	2.70e-08

	Mevcut Metot (Yüzbaşı vd., 2025)	Bernstein Metot (Işık vd., 2015)	Taylor Metot (Aslan vd 2015)	Laguerre Metot (Gürbüz vd., 2014)
x	$N = 10$	$N = 10$	$N = 10$	$N = 10$
0,0	0	0	0	2.20e-10
0,2	3.82e-09	1.26e-07	1.66e-05	9.27e-05
0,5	4.78e-09	1.67e-07	2.29e-05	2.58e-03
0,7	6.13e-09	2.14e-07	2.92e-05	2.93e-03
0,8	6.95e-09	2.52e-07	3.72e-05	3.29e-03
1,0	4.12e-09	5.99e-06	5.64e-05	5.65e-03

Tablo 4.8., literatürde ki diğer metotlarla yapılan karşılaştırmayı sunmaktadır. Burada $N = 10$ için yapılan karşılaştırmada Laguerre (Gürbüz vd., 2014), Bernstein (Işık vd., 2015), Bessel (Yüzbaşı vd 2011) ve Taylor (Aslan vd 2015) metotlarıyla yapılan karşılaştırma mevcut metodun etkililiğini göstermektedir. Aynı zamanda $N = 12$ ve $N = 13$ için Laguerre ve Bessel metoduyla yapılan karşılaştırmada mevcut metodun daha iyi sonuç verdiği görülebilir. Burada ki karşılaştırmadan anlaşılabilir ki aynı N değerleri için farklı metodlar bağlamında mevcut metot daha iyi sonuç vermiştir.



Şekil 4.6. $N = 8$ ile Denklem (4.175) için mutlak hata ve iyileştirilmiş hata fonksiyonlarının karşılaştırılması.

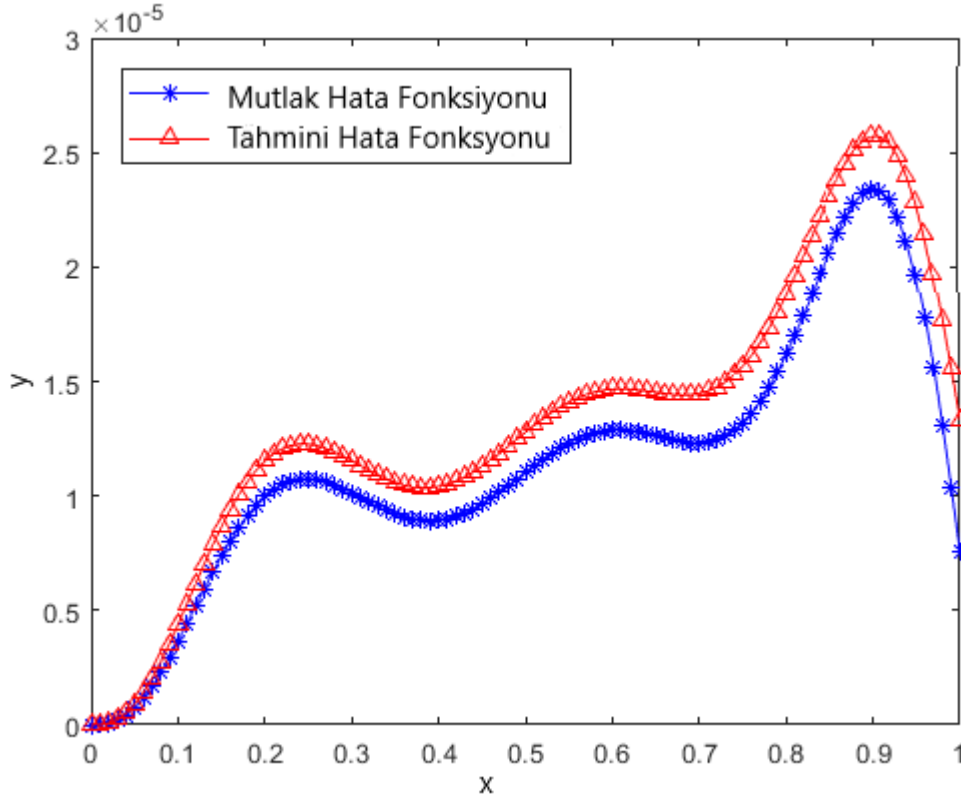


Tablo 4.9. Gerçek, tahmini ve düzeltilmiş hata sonuçlarının Denklem (4.175) özelinde karşılaştırılması.

	Mutlak Hatalar	Tahmini Hatalar	İyileştirilmiş Hatalar
x	$N = 4$	$N = 4, M = 5$	$N = 4, M = 5$
0,2	6.3851e-05	7.3837e-05	9.9865e-06
0,4	6.7817e-05	7.6749e-05	8.9319e-06
0,6	8.9284e-05	1.0215e-05	1.2871e-05
0,8	9.2630e-05	1.0882e-04	1.6191e-05
1,0	2.6464e-04	2.7218e-04	7.5419e-06
	$N = 10$	$N = 10, M = 11$	$N = 10, M = 11$
0,2	3.8251e-09	4.3392e-09	5.1406e-10
0,4	4.3517e-09	4.9484e-09	5.9678e-10
0,6	5.3318e-09	6.0665e-09	7.3473e-10
0,8	6.9568e-09	7.9363e-09	9.7954e-10
1,0	4.1276e-09	6.3388e-09	2.2112e-10

Tablo 4.9.'da farklı hata değerlerinin karşılaştırılması görülmektedir. Burada iki farklı N değeri için mutlak hata ve ayrıca farklı M değerleri için tahmini ve iyileştirilmiş hata değerleri karşılaştırılmıştır. Burada tahmini hatanın gerçek hatalara yakın olduğu ve iyileştirilmiş hatanın iyileştirilmiş çözümün hatasından daha küçük olduğu görülmektedir. Tez aşamasında tezdeki (4.175) problemi için yöntemin uygulanması ve edinilen sonuçlar araştırma makalesi olarak yayınlanmıştır (Yüzbaşı vd., 2025).

Şekil 4.7. $N = 6$ ile Örnek (4.175) için tahmini hata ve mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması.



Örnek 4.8. Bu örnekte Lane-Emden diferansiyel denklemi aşağıdaki şekilde ele alınmaktadır (Caglar vd., 2006):

$$y'' + \frac{1}{x}y' = \left(\frac{8}{8-x^2} \right)^2, \quad 0 < x \leq 1 \quad (4.176)$$

Bu denklem, $y(1) = 0$ ve $y'(0) = 0$ başlangıç koşullarıyla birlikte değerlendirilmiştir. Denklem için analitik (tam) çözüm $y(x) = 2 \log(7/8 - x^2)$ şeklindedir.

Mevcut yöntem $N = 2, 3$ ve 5 için uygulandığında elde edilen yaklaşık çözümler sırasıyla aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= \frac{100}{4571}x^4 - \frac{17}{3484}x^3 + \frac{56941}{227763}x^2 - \frac{1663}{6227}, \\
y_3(x) &= \frac{51}{10153}x^5 + \frac{49}{4778}x^4 + \frac{41}{22418}x^3 + \frac{151962}{607849}x^2 - \frac{1663}{6227}, \\
y_5(x) &= 0.000075005502x^7 - 0.0000070937x^6 + 0.001143587x^5 - 0.01516702545x^4 \\
&\quad + 0.0000734954x^3 - 0.24999998348x^2 - 0.267062785249.
\end{aligned}$$

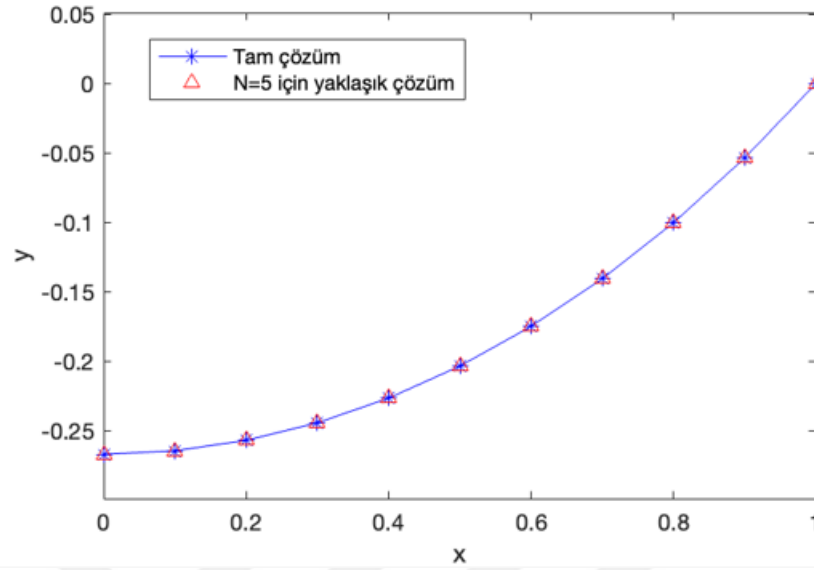
Tablo 4.10’da, Denklem (4.176) için farklı yöntemler kullanılarak elde edilen yaklaşık çözümlerle mutlak hata karşılaştırmaları sunulmuştur.

Tablo 4.10. Gerçek, tahmini ve düzeltilmiş hata sonuçlarının Denklem (4.175) özelinde karşılaştırılması.

	Mevcut Yöntem (Yüzbaşı vd., 2025)	Mevcut Yöntem (Yüzbaşı vd., 2013)	Bessel Yöntem (Yüzbaşı vd., 2013)	Bessel Yöntem (Yüzbaşı vd., 2013)	Spline Yöntem (Çağlar vd., 2006)
x	$N = 7$	$N = 10$	$N = 7$	$N = 10$	$h = 1/40$
0,0	0	0	1.60e-06	3.57e-09	6.00e-06
0,2	2.28e-09	4.80e-12	1.56e-06	3.88e-09	6.00e-06
0,4	2.91e-09	6.37e-12	1.57e-06	3.98e-09	4.00e-06
0,6	3.36e-09	7.37e-12	1.55e-06	4.05e-09	4.00e-06
0,8	3.86e-09	7.89e-12	1.55e-06	4.09e-09	4.00e-06
1,0	5.81e-09	7.83e-12	1.38e-06	4.03e-09	0

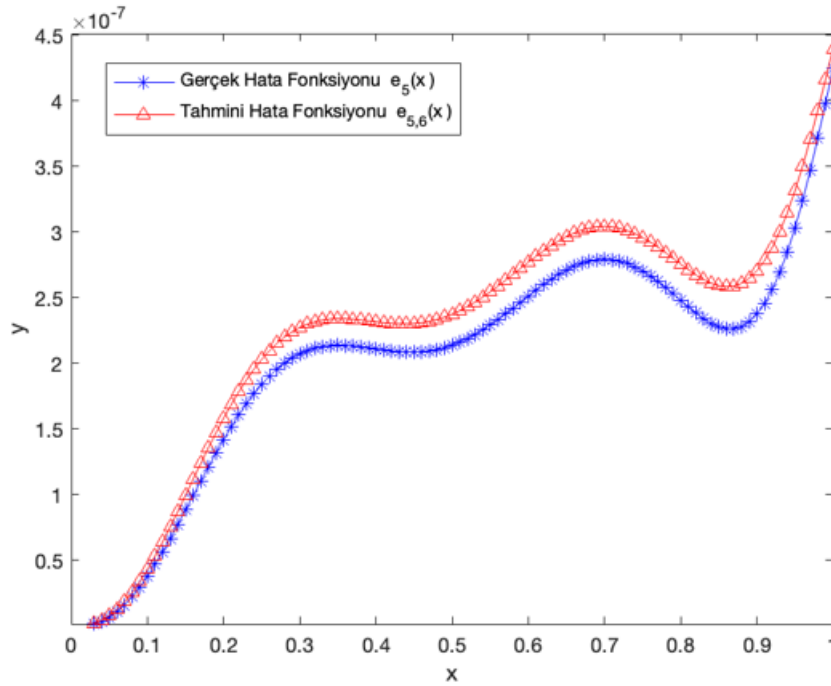
Bu tablo, mevcut yöntemin hem $N = 7$ hem de $N = 10$ için Bessel ve Spline yöntemlerine göre daha hassas sonuçlar verdiğini göstermektedir. Denklem (4.176)’ın yaklaşık çözümünün analitik çözümle karşılaştırması Şekil 4.8’te sunulmuştur.

Şekil 4.8. $N = 5$ ile Örnek (4.176) için yaklaşık çözümün tam çözümle karşılaştırılması.



Benzer şekilde, tahmini hata fonksiyonu ile gerçek hata fonksiyonunun karşılaştırması Şekil 4.9'te sunulmuştur.

Şekil 4.9. Örnek (4.176) için tahmini ve gerçek hata fonksiyonlarının karşılaştırması.



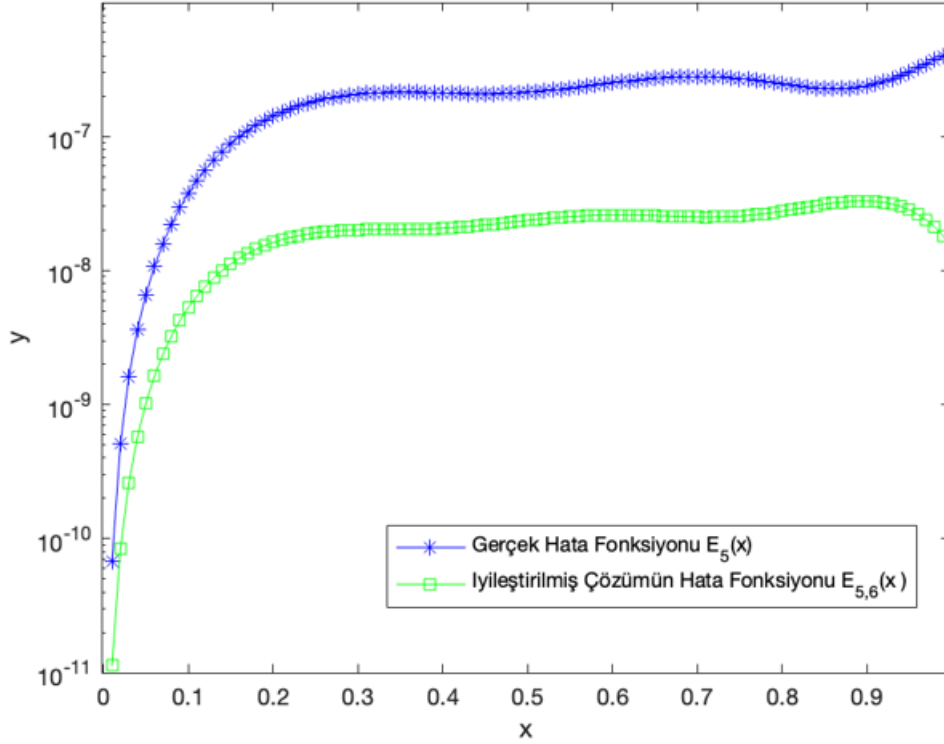
Ayrıca, Denklem (4.176) için çeşitli hata değerleri (gerçek, tahmini ve iyileştirilmiş) Tablo 4.11’de gösterilmiştir.

Tablo 4.11. Denklem (4.176) için hata karşılaştırmaları.

	Gerçek mutlak hata	Tahmini mutlak hata	İyileştirilmiş mutlak hata
x	$N = 4$	$N = 4, K = 5$	$N = 4, K = 5$
	$ e_4(x) = y(x) - y_4(x) $	$e_{4,5}(x)$	$E_{4,5}(x)$
0,0	0	0	0
0,2	8.47e-07	9.89e-07	1.41e-07
0,4	1.79e-06	2.00e-06	2.10e-07
0,6	1.55e-06	1.80e-06	2.51e-07
0,8	2.44e-06	2.68e-06	2.47e-07
1,0	9.56e-07	1.38e-06	4.24e-07
	$N = 7$	$N = 7, K = 8$	$N = 7, K = 8$
	$ e_7(x) = y(x) - y_7(x) $	$e_{7,8}(x)$	$E_{7,8}(x)$
0,0	0	0	0
0,2	2.28e-09	4.79e-08	2.74e-10
0,4	2.91e-09	2.90e-08	3.56e-10
0,6	3.36e-09	2.06e-08	4.07e-10
0,8	3.86e-09	2.34e-08	4.33e-10
1,0	5.81e-09	3.77e-08	2.61e-10

Son olarak, Şekil 4.10’da gerçek mutlak hata fonksiyonu ile iyileştirilmiş hata fonksiyonunun karşılaştırması gösterilmiştir.

Şekil 4.10. Örnek (4.176) için gerçek mutlak hata fonksiyonu ile iyileştirilmiş hata fonksiyonunun karşılaştırılması.



4.4.4. Popülasyonun Lojistik Büyümesi Modeli için Uygulamalar

Bu bölümde tek tür popülasyon modeli üzerinde durulmuş olup, oluşturulan yöntem yardımıyla bu sorun çözülmüştür. Ayrıca sunulan hata tahmini kullanılarak daha iyi sonuçlar elde edilmiştir. Elde edilen bu veriler tablo ve grafikler yardımıyla yorumlanabilir hale gelir.

Örnek 4.9. Bu örnekte aşağıdaki şekilde tanımlı lojistik denklemi üzerinde durulacaktır:

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dx} = \rho(1 - \rho) & 0 \leq x \leq 1. \\ \rho(0) = 2 \end{cases} \quad (4.177)$$

Bu problem için tam çözüm $\rho(x) = \frac{2}{2-e^{-x}}$ şeklindedir (Pamuk, 2005). İlk olarak $N = 3$ için önerilen yöntem vasıtasıyla çözüm aranacaktır. İlk olarak kollokasyon noktalarının

kümesi $N = 3$ için aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\left\{ x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{2}{3}, \quad x_3 = 1 \right\}.$$

Kollokasyon noktaları yardımıyla matris ilişkileri

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & (1/3)^2 & (1/3)^3 \\ 1 & 2/3 & (2/3)^2 & (2/3)^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{A} \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir ve buradan artırılmış matris olan denklem (4.96)

$$[\mathbf{X}\mathbf{T} + r\bar{\mathbf{X}}\mathbf{X}\mathbf{H}\mathbf{T} + 2\lambda\mathbf{K}\bar{\mathbf{X}}\mathbf{X}\mathbf{H}\mathbf{T} - \mathbf{K}(\bar{\mathbf{X}}\mathbf{X}\mathbf{H}\mathbf{T}\bar{\mathbf{A}})^2] \mathbf{A} = \bar{\mathbf{G}} + \bar{\mathbf{R}} + \bar{\mathbf{K}}$$

şeklinde elde edilir. Bu lineer olmayan cebirsel sistem çözülerek bilinmeyen katsayılar matrisi olan $\mathbf{A} = [a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3]$ matrisi

$$\mathbf{A} = [-2 \ 929/182 \ -3385/578 \ 993/400]^T$$

olarak hesaplanır. Buradan elde edilen katsayılar

$$\rho(x) = 2 + x\mathbf{X}(x)\mathbf{H}\mathbf{T}\mathbf{A} \quad (4.178)$$

çözüm formunda yerinekonularak $N = 3$ için yaklaşık çözüm elde edilecektir. Bu yaklaşık çözüm

$$\rho_3(x) = 656/1057x^4 - 367/188x^3 + 2639/1034x^2 - 2x + 2$$

elde edilir. Tablo 4.12.-4.15.'de farklı metotlarla farklı N değerleri için yapılan karşılaştırma görülebilmektedir. Tablo 4.12. ve 4.13.'de yapılan karşılaştırmalarda yöntemin uygulanabilirliği hakkında güzel yorumlar yapmak mümkündür. Burada $N = 3$ için yapılan farklı metotlardan elde edilen hata değerlerinde Bessel (Yüzbaşı, 2012) ve Pell-Lucas (Yüzbaşı vd., 2020) metotlarından elde edilen değerler yakın olsada mevcut yöntem daha

iyi sonuç vermiştir. Arica Adomian (Pamuk, 2005) metodundan daha iyi sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca $N = 5$ için oluşturulan Tablo 4.13., yöntemin Galerkin (Yüzbaşı vd., 2017) yöntemi için de daha tutarlı sonuçlar verdiğini gözler önüne sermiştir. Ayrıca N değerleri büyüdükçe ediniden hataların diğer yöntemlerden daha iyi olduğu gözlemlenmektedir.

Tablo 4.12. Denklem (4.177) üzerinde $N = 3$ için farklı yöntemlerin hataları ile sunulan yöntemin hatalarının karşılaştırılması.

	Mevcut	(Yüzbaşı vd., 2020)	(Yüzbaşı, 2012)	(Pamuk, 2005)
x	Metot	Pell-Lucas Metot	Bessel Metot	Adomian D. Metot
0,0	0	1.0593e-06	0	0
0,2	5.6292e-03	9.8854e-03	9.8863e-03	7.7608e-03
0,4	4.8137e-03	8.6300e-03	8.6310e-03	1.0145e-01
0,6	6.0687e-04	2.6572e-03	2.6560e-03	4.3418e-01
0,8	1.6225e-03	6.5266e-03	6.5282e-03	1.1884e+00
1,0	4.6791e-03	7.8721e-02	7.8723e-02	2.5587e+00

Tablo 4.13. Denklem (4.177) üzerinde $N = 5$ için farklı yöntemlerin hataları ile sunulan yöntemin hatalarının karşılaştırılması.

	Mevcut	(Yüzbaşı vd., 2020)	(Yüzbaşı vd., 2017)	(Pamuk, 2005)
x	Metot	Pell-Lucas Metot	Galerkin Metot	Adomian D. Metot
0,0	0	4.6502e-08	0	0
0,2	3.6174e-04	6.2170e-04	3.1731e-04	6.4611e-04
0,4	1.3338e-04	1.7693e-04	2.4464e-04	3.3785e-02
0,6	1.5462e-04	3.2242e-04	5.3748e-05	3.2532e-01
0,8	3.0473e-05	2.1499e-04	2.3628e-04	1.5830e+00
1,0	2.5614e-04	7.2039e-03	4.7008e-08	5.3254e-00

Tablo 4.14. Denklem (4.177) ve $N = 6$ için farklı metotlarla yapılan karşılaştırma.

	Mevcut	(Yüzbaşı vd., 2017)	(Yüzbaşı, 2012)	(Pamuk vd., 2010)
x	Metot	Galerkin Metot	Bessel Metot	Homotopy P Metot
0,0	0	0	0	0
0,2	8.5586e-05	4.5167e-05	1.4442e-04	1.8643e-04
0,4	4.3134e-05	6.0264e-05	6.9504e-05	1.9497e-02
0,6	2.8746e-05	6.9106e-05	3.9746e-05	2.8160e-01
0,8	3.2359e-05	5.6255e-05	1.1093e-04	1.8270e+00
1,0	3.3514e-05	5.7646e-10	2.2060e-03	7.6876e+00

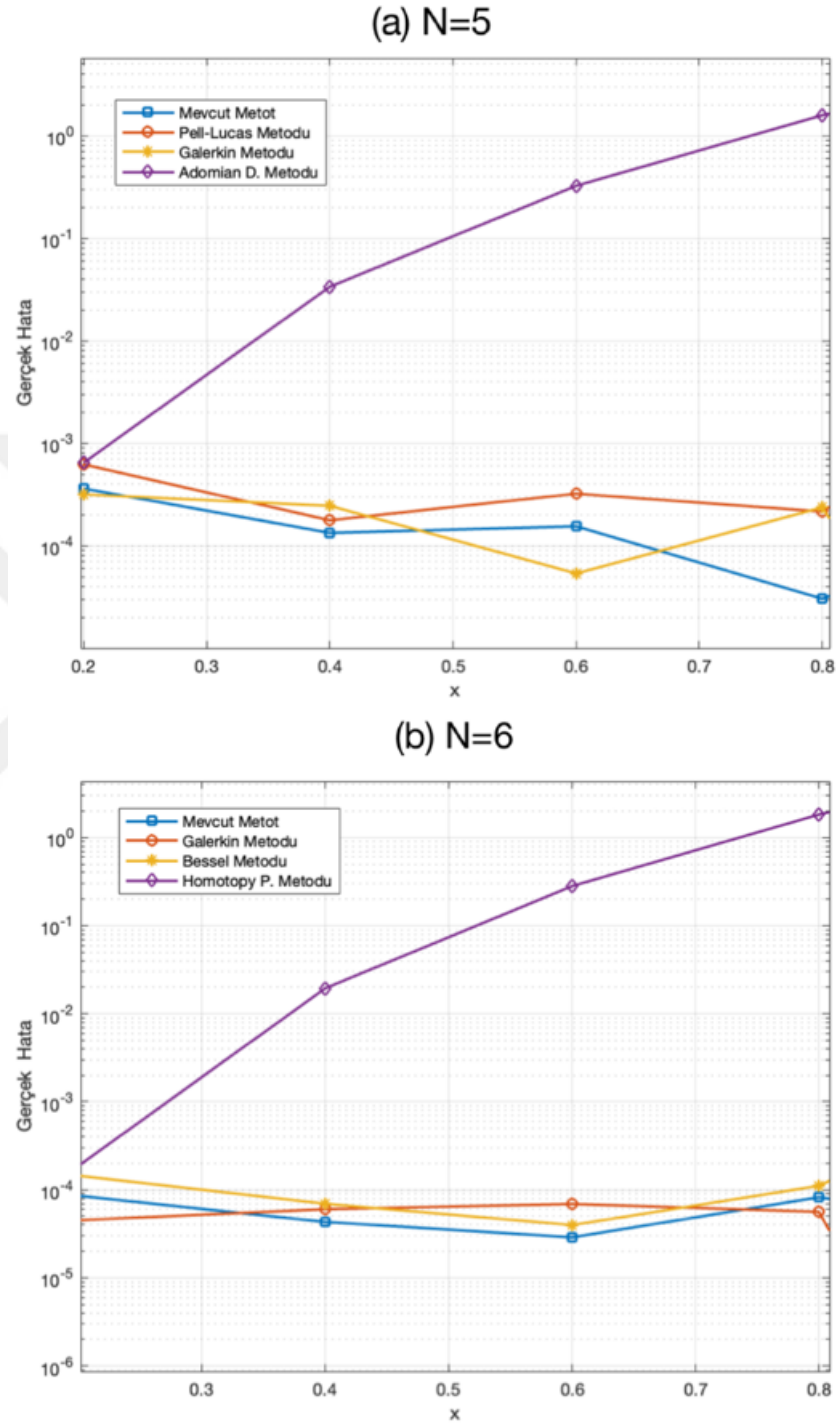
Tablo 4.15. Denklem (4.177) üzerinde $N = 8, 10$ için farklı yöntemlerin hataları ile sunulan yöntemin hatalarının karşılaştırılması.

	Mevcut	(Yüzbaşı vd., 2017)	(Pamuk, 2005)	Mevcut	(Yüzbaşı vd., 2017)
	Metot	Galerkin Metodu	Adomian D.	Metot	Galerkin Metodu
x	$N = 8$	$N = 8$	$N = 8$	$N = 10$	$N = 10$
0,0	0	0	0	0	0
0,2	5.208e-06	2.969e-06	1.552e-04	4.033e-07	1.079e-05
0,4	3.502e-06	3.703e-06	6.492e-03	2.690e-07	1.810e-05
0,6	2.433e-06	2.805e-06	2.110e-01	1.842e-07	1.790e-05
0,8	1.680e-06	1.850e-06	2.433e+00	1.230e-07	1.402e-05
1,0	2.494e-06	6.069e-11	1.599e+00	2.011e-07	3.262e-10

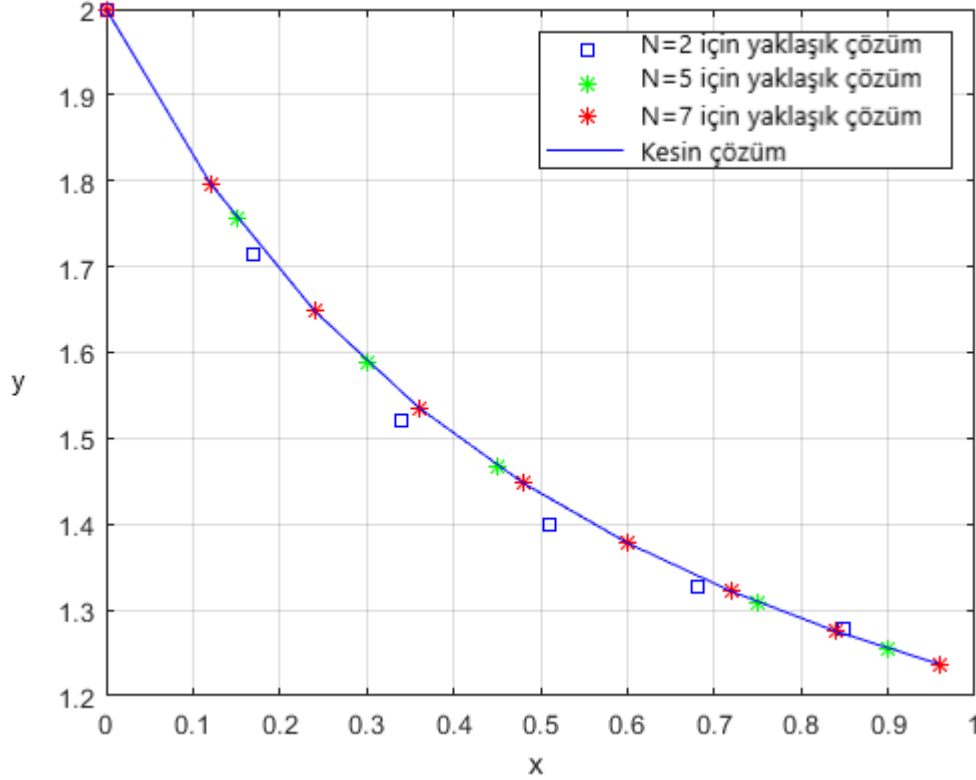
Tablo 4.14’de $N = 6$ için üç farkı metot ile karşılaştırmalar oluşturulmuştur. Burada literatürdeki diğer etkili metotlardan daha iyi sonuç vermesi aynı zamanda metodun etkinliğini de gözler önüne sermektedir. Daha büyük N değerleri için Tablo 4.15 oluşturuldu. $N = 8$ ve 10 değerleri için yöntemimizin gerçek hata değerleri diğer yöntemlerin gerçek hata değerlerine göre daha etkili sonuçlar verdiği Tablo 4.15 de görülmektedir. Burada elde edilen sayısal değerlerin tablolar halinde verilmesinin ardından bu değerler grafikler vasıtasıyla Şekil 4.11 de sunulmuştur. Şekil 4.11(a)’da siyah grafik çizgisi ve 4.11(b) grafiğinde kırmızı grafik çizgisinden oluşan mevcut yöntem diğerlerine göre sıfıra daha yakın çıkmış ve bu durum tam çözüme yakınlık olarak yorumlanabilmektedir.



Şekil 4.11. Örnek (4.177) kapsamında, $N = 5$ durumunda hesaplanan mutlak hata fonksiyonlarının karşılaştırılması.

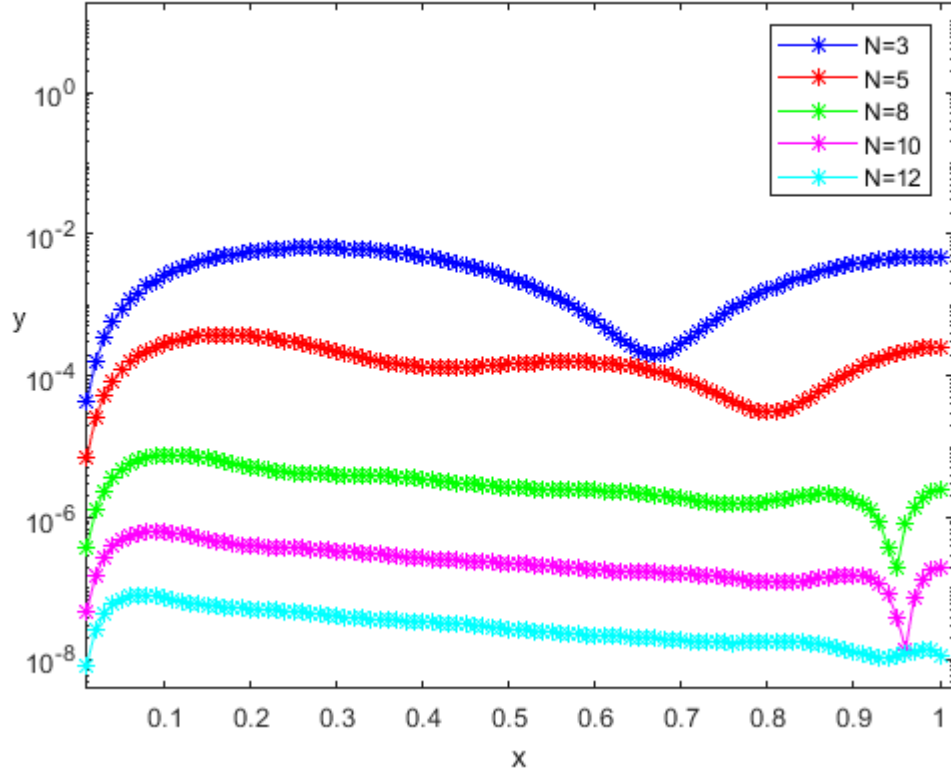


Şekil 4.12. Farklı N değerleri kullanılarak elde edilen yaklaşık çözümlerin, Örnek (4.177)'in tam çözümü ile karşılaştırılması.



Önerilen yöntemin farklı N değerleri için elde edilen hata fonksiyonlarının karşılaştırılması Şekil 4.12.'de verilmektedir. Şekil 4.12.'de N büyüdükçe yaklaşık çözümlerin tam çözüme yaklaştığı görülmektedir. Ayrıca Şekil 4.12.'de farklı N değerleri için elde edilen hatalar karşılaştırılmıştır. N değeri arttıkça elde edilen hataların tutarlılığı artmış ve daha küçük hatalar elde edilmiştir. Bu bağlamda N değeri arttıkça bulunan yaklaşık çözümlerin değerlerinin tam çözüme daha da yaklaştığı sonucunu çıkarmak mümkündür.

Şekil 4.13. Örnek (4.177) için farklı N değerlerinden elde edilen hata fonksiyonlarının karşılaştırılması.



Ayrıca tahmini ve iyileştirilmiş hatalar bulunarak Tablo 4.16.'da sunulmuştur. Bu amaçla tahmini hata değerlerinin gerçek hata değerleri ile karşılaştırılması Tablo 4.16.'te verilmiştir. Burada residüal fonksiyonu kullanıldığında elde edilen tahmini hataların daha küçük olduğu görülmektedir. Bu durum bizi tam çözüme yaklaştırmaya ve daha anlamlı sonuçlar almaya yöneltmektedir.

Tablo 4.16. Gerçek, tahmini ve düzeltilmiş hata sonuçlarının Örnek (4.177) özelinde karşılaştırılması.

	Mutlak Hata	Tahmini Hata	Mutlak Hata	Tahmini Hata
x	$N = 3$	$N = 3, M = 4$	$N = 8$	$N = 8, M = 9$
	$e_3(x)$	$e_{3,4}(x)$	$e_{3,5}(x)$	$e_{3,7}(x)$
0,0	0	0	0	0
0,2	5.6292e-03	4.1745e-03	5.2088e-06	2.8828e-06
0,4	4.8137e-03	4.1892e-03	3.5029e-06	1.9716e-06
0,6	6.0687e-04	1.5356e-04	2.4339e-06	1.3949e-06
0,8	1.6225e-03	1.0756e-03	1.6809e-06	9.3277e-07
1,0	4.6791e-03	5.2046e-03	2.4945e-06	2.9423e-07

Sunulan grafikler ve tablolar, mevcut yöntemin Örnek (4.177) üzerinde ki etkinliğini, uygulanabilirliğini ve tutarlılığını göstermektedir.

4.4.5. Riccati Diferansiyel Denklemleri için Uygulamalar

bu bölümde Riccati diferansiyel denklemi için önerilen metodun uygulanabilirliği farklı örnekler ile test edilecektir.

Örnek 4.10. İlk olarak aşağıda ki Riccati diferansiyel denklem problemi

$$\begin{cases} y'(x) = y^2(x) - 2y - x^4 + 2x^2 + 2 & 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (4.179)$$

şeklinde ele alınacaktır. Denklemin tam çözümü $y(x) = x^2$ 'dir. Problemin koşulu $y(0) = 0$ olarak verilmiş olup buradan $y(a) = 0$ ve $y_a = 0$ elde edilir. Bu örnek tez çalışması için ilgili parametreler seçilerek uyarlanmıştır. $N = 1$ için yaklaşık çözüm hesaplanacaktır, $N = 1$ için kollokasyon noktalarının kümesi şu şekilde hesaplanır:

$$\{x_0 = 0, \quad x_2 = 1\}.$$

Burada $r(x) = 1$, $q(x) = -2$ ve $p(x) = -x^4 + 2x^2 + 2x$ şeklindedir. Bu parametreler ışığında (4.113) denklemindeki temel matris denkleminde yer alan

$$\dot{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 0\mathbf{T}(0)\mathbf{S} & 0 \\ 0 & 1\mathbf{T}(1)\mathbf{S} \end{bmatrix}, \dot{\tilde{\mathbf{T}}} = \begin{bmatrix} 0\mathbf{T}(0)\mathbf{S} \\ 1\mathbf{T}(1)\mathbf{S} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & \mathbf{A} \end{bmatrix}, \dot{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

matrisleri elde edilir. Dolayısıyla lineer cebirsel sistem (4.112) ve (4.113) denklemleri ışığında

$$\mathbf{W} = \dot{\mathbf{X}}\mathbf{C} - \tilde{\mathbf{R}}\tilde{\mathbf{X}}\tilde{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{X}}\mathbf{C} - \tilde{\mathbf{Q}}\dot{\mathbf{X}}\mathbf{C} \quad \text{ve} \quad \mathbf{Y} = \dot{\mathbf{P}}$$

şeklinde hesaplanır. Bu sistemin çözülmesinin ardından, $\mathbf{A}$ matrisi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilmiş olur. Buradan tam çözümle aynı olan yaklaşık çözüm $y(x) = x^2$ şeklinde elde edilmiş olur.

Örnek 4.11. Şimdi ise;

$$\begin{cases} y'(x) = 2y(x) - y^2(x) + 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (4.180)$$

problemi ele alınacaktır ve bu problem için tam çözüm $y(x) = 1 + \sqrt{2} \tanh \left[\sqrt{2}x + \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right]$ şeklindedir (Yüzbaşı, 2020). Denklemindeki parametrelerin $r(x) = -1$, $q(x) = 2$ ve $p(x) = 1$ şeklinde olduğu görülür. Eğer $N = 3, 5, 7$ için mevcut yöntemle çözümler şu şekilde hesaplanır:

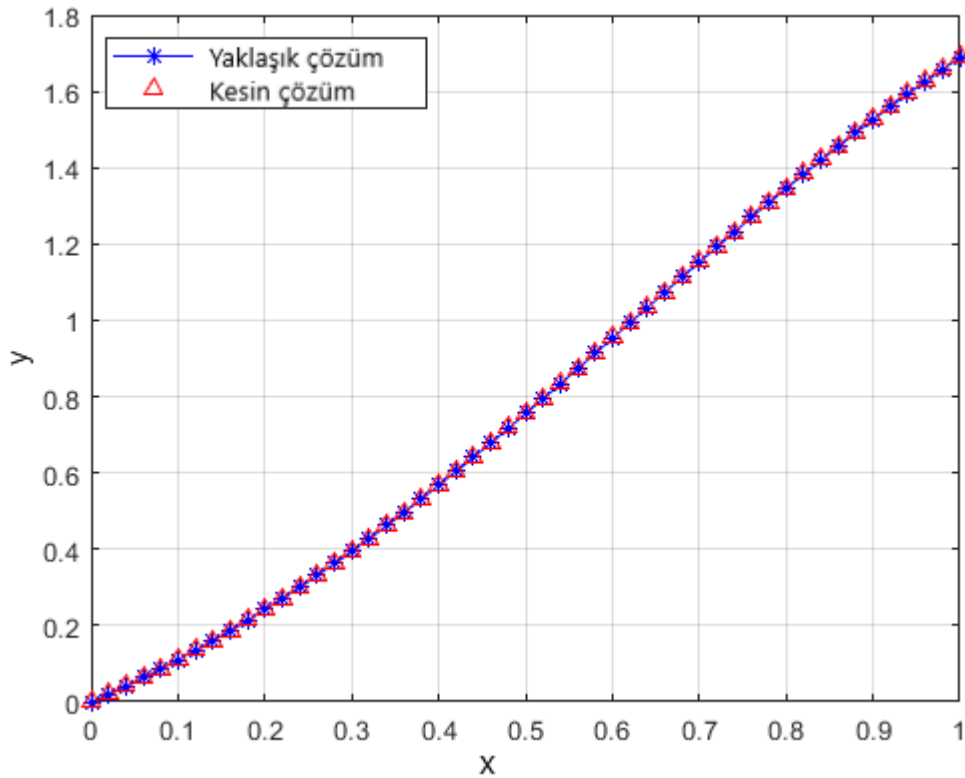
$$y_3(x) = -463/1184x^4 - 1039/9514x^3 + 377/314x^2 + x,$$

$$y_5(x) = 1333/3144x^6 - 655/979x^5 - 1213/2437x^4 + 233/513x^3 + 697/713x^2 + x,$$

$$y_7(x) = -828/2099x^8 + 395/331x^7 - 599/743x^6 - 538/1817x^5 - 461/1384x^4 + 773/2380x^3 + 811/810x^2 + x.$$

Yaklaşık çözümlerin uygulanabilirliğini test etmek için grafik ve tablolardan yararlanılarak çözümler ve hatalar karşılaştırılır. İlk olarak Şekil 4.14.'de tam çözüm ile $N = 5$ için bulunan yaklaşık çözüm karşılaştırılması yapılmıştır.

Şekil 4.14. Örnek (4.180) için yaklaşık çözüm olan $y_5(x)$ ile tam çözüm olan $y(x)$ fonksiyonlarının karşılaştırılması.



Şekil 4.14.'de görülebileceği üzere tam çözüm ve yaklaşık çözüm çakışık görünümlü grafikler oluşturmuştur. Buradan anlaşılabileceği üzere $N = 5$ için bulunan yaklaşık çözüm tam çözüme kayda değer oranda yakındır. Tablo 4.17'de bu iddia sayısal verilerle desteklenmektedir. $N = 5$ için elde edilen değerler Bessel (Yüzbaşı, 2012), Chebyshev (Daşçıoğlu vd., 2011), Adomian (Adomian, 1994), Legendre (Yüzbaşı vd., 2020) ve Bernstein yöntemlerinden (Yüzbaşı, 2013) elde edilen hata değerleriyle karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma sonrası mevcut yöntemin diğerlerinden daha iyi sonuç verdiği görülmüştür. $N = 8$ için önerilen yöntem Homotopy metoduyla karşılaştırılır. Bu karşılaştırma sonrası

edinilen hata değerlerinin daha tutarlı olduğu görülmektedir. Ayrıca N değeri büyüdükçe diğer metotlar arası yapılan karşılaştırma daha etkili bir yorum yapmamızı sağlamıştır. $N = 9$ için elde edilen hatalar Legendre metoduyla (Yüzbaşı vd., 2020) karşılaştırılmıştır ve burada hata değerleri arasında ki sayılar fark dahada gözlemlenebilir bir hal almıştır. $N = 12$ değeri için de aynı durumdan söz etmek mümkündür. Ayrıca bu tabloda verilen sayısal değerler sonrasında görsel olarakta sunulmuştur.

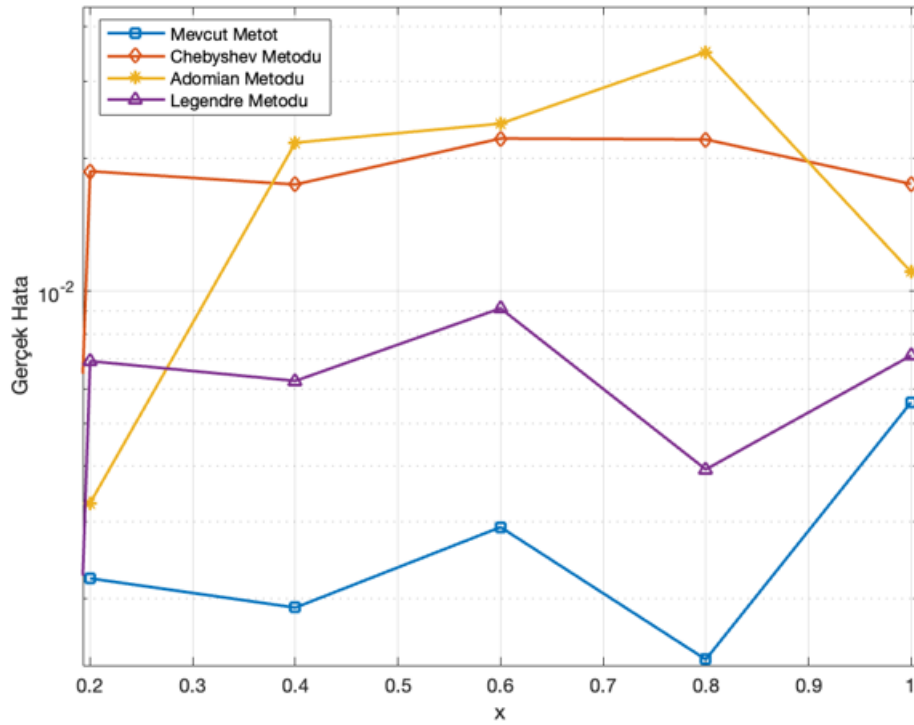
Tablo 4.17. Örnek (4.180)'ye ait gerçek hata değerlerinin incelenmesi ve karşılaştırılması.

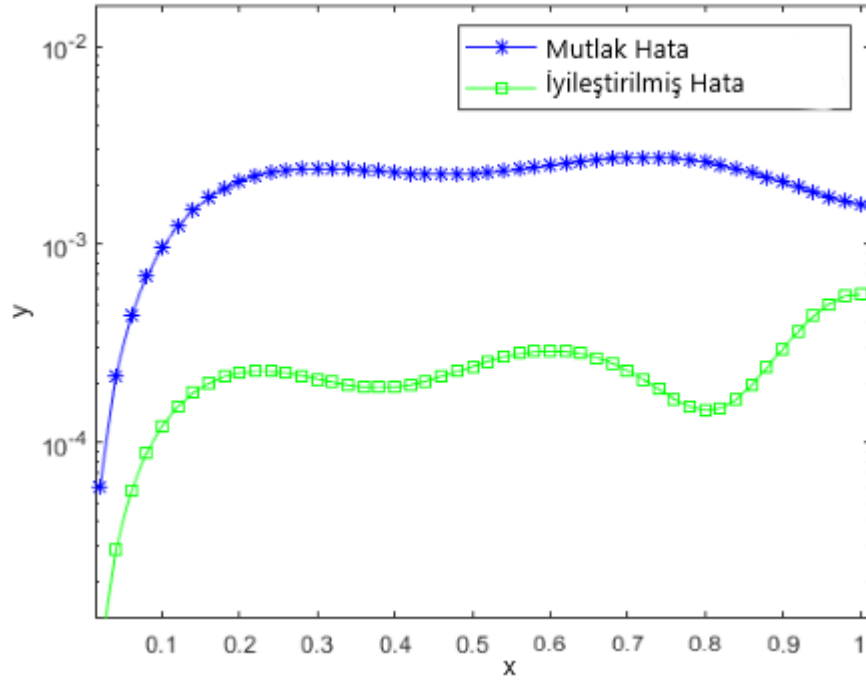
	Mevcut Metot	Bessel Metodu (Yüzbaşı, 2012)	Chebyshev Metodu (Daşcıoğlu vd., 2011)	Adomian Metodu (Adomian, 1994)	Legendre Metodu (Yüzbaşı vd., 2020)	Bernstein Metodu (Yüzbaşı, 2013)
x	$N = 5$	$N = 5$	$N = 5$	$N = 5$	$N = 5$	$N = 5$
0,0	0	0	0.2220e-15	0	0.1411e-15	0
0,2	0.2224e-03	0.6933e-03	0.1872e-02	0.3299e-03	0.6933e-03	0.6933e-03
0,4	0.1909e-03	0.6250e-03	0.1747e-02	0.2174e-02	0.6251e-03	0.6250e-03
0,6	0.2908e-03	0.9137e-03	0.2226e-02	0.2407e-02	0.9137e-03	0.9137e-03
0,8	0.1455e-03	0.3934e-03	0.2211e-02	0.3493e-01	0.3934e-03	0.3934e-03
1,0	0.5586e-03	0.7136e-02	0.1752e-02	0.1106e-00	0.7136e-02	0.7136e-02

	Mevcut Metot	Mevcut Metot	Mevcut Metot	Homotopy Metodu (Abbasbandy, 2006)	Legendre Metodu (Yüzbaşı vd., 2020)	Legendre Metodu (Yüzbaşı vd., 2020)
x	$N = 8$	$N = 9$	$N = 12$	$N = 8$	$N = 9$	$N = 12$
0.0	0	0	0	0	0.1410e-15	0.6295e-13
0.2	0.1108e-04	0.2307e-06	0.1900e-07	0.3152e-06	0.3084e-05	0.4892e-07
0.4	0.1423e-04	0.2863e-06	0.2530e-07	0.5834e-03	0.4040e-05	0.6098e-07
0.6	0.1564e-04	0.3100e-06	0.2783e-07	0.1007e-01	0.4763e-05	0.1827e-06
0.8	0.1456e-04	0.2536e-06	0.1459e-07	0.7177e-01	0.9944e-05	0.3768e-05
1.0	0.6618e-04	0.1450e-05	0.1786e-06	0.3044e-00	0.1526e-03	0.3940e-04

Şekil 4.15.'de $N = 5$ için tabloda verilen sayısal değerler grafik halinde sunulmuştur. Bu tezde yeni geliştirilen yöntemin etkinliği ve uygulanabilirliği tartışılmakta olup, bu yöntemle farklı diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri bulunabilmektedir. Bu bağlamda verilen grafik ve tablolar etkili bir şekilde bunu göstermektedir. Şekil 4.15.'de farklı metotlarda yapılan karşılaştırmaya (Yüzbaşı, 2012), (Yüzbaşı vd., 2020), (Yüzbaşı, 2013), (Dascioğlu vd., 2011), (Adomian, 1994), (Abbashandy vd., 2006) yer verilirken Şekil 4.16.'de mutlak hata ile iyileştirilmiş hata değerlerine yer verilmiştir. İyileştirilmiş hata bu görselde hada değer oranda mutlak hatadan küçük gelmiştir.

Şekil 4.15. Örnek (4.180) için mutlak hata fonksiyonlarının farklı metodlarla yapılan karşılaştırması.



Şekil 4.16. Örnek (4.180) için gerçek ve iyileştirilmiş hata değerlerinin karşılaştırması

Örnek 4.12. Bir sonraki örnek şu şekilde ele alınır (Yüzbaşı vd., 2016):

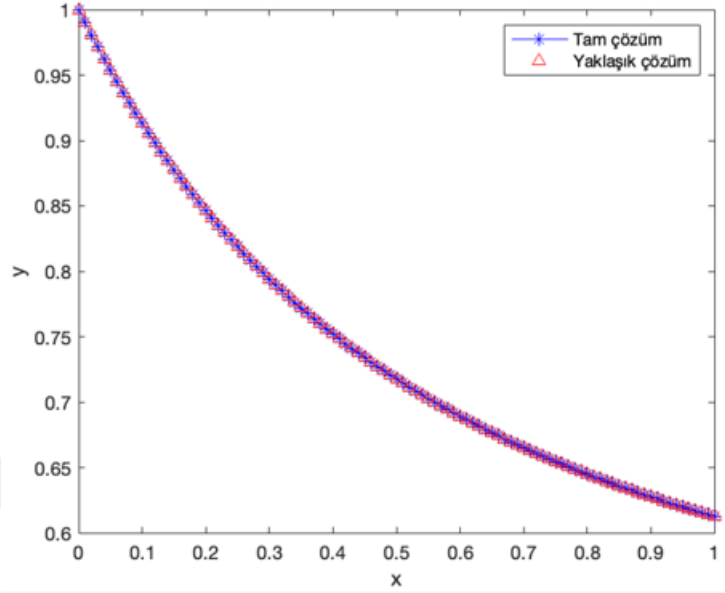
$$\begin{cases} r(\eta) = -2 \\ q(\eta) = 1 \\ p(\eta) = 0 \\ \alpha = 0, \quad y_\alpha = 1 \end{cases} \quad 0 \leq \eta \leq 1. \quad (4.181)$$

Bu parametreler kullanıldığında (4.112) ve (4.113) denklemleri ışığında artırılmış matris şu şekilde elde edilir:

$$\mathbf{W} = \dot{\mathbf{T}} - 2\tilde{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{T}} - \tilde{\mathbf{R}}\dot{\mathbf{T}}\dot{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{T}} - \tilde{\mathbf{Q}}\dot{\mathbf{T}} \quad \text{ve} \quad \mathbf{Y} = \dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{Q}} + \dot{\mathbf{P}}. \quad (4.182)$$

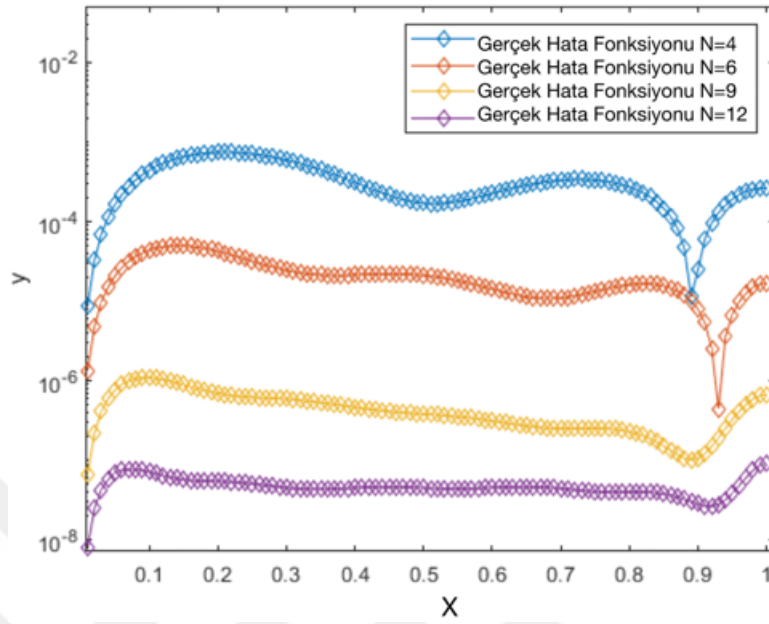
Ayrıca, $y(\eta) = \frac{1}{2 - e^{-\eta}}$ fonksiyonu Denklem (4.181)'ün tam çözümüdür (Yüzbaşı vd., 2016). $[\mathbf{W}; \mathbf{Y}]$ sistemi çözülerek istenilen N değeri için yaklaşık çözüm elde edilir. Bölüm 3'te sunulan yöntemle göre elde edilen hata değerleri Tablo 5'te gösterilmiştir. Bu değerler, Taylor yöntemi (Gülsu vd., 2006) ile $N = 3, 4$ ve 5 için karşılaştırılmıştır.

Şekil 4.17. Denklem (4.181) de elde edilen yaklaşık çözüm ($N = 6$ için) ile tam çözüm karşılaştırılması

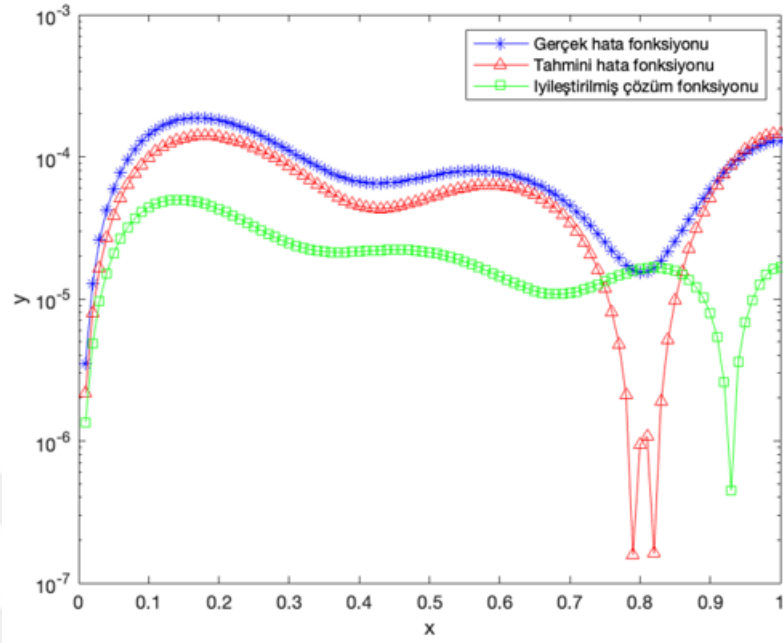


Tablo 4.18. Denklem (4.181) için gerçek hata değerlerinin mevcut yöntem ve Taylor yöntemi (Gülsu vd., 2006) ile karşılaştırılması

η	Mevcut Yöntem			Taylor Yöntemi (Gülsu vd., 2006)		
	$N = 4$	$N = 5$	$N = 6$	$N = 4$	$N = 5$	$N = 6$
0.0	0	0	0	0	0	0
0.1	4.4245e-04	1.4280e-04	4.4068e-05	3.999e-05	3.508e-06	2.941e-06
0.2	7.4081e-04	1.8086e-04	4.2793e-05	1.119e-02	1.523e-03	1.487e-03
0.3	5.9520e-04	1.1073e-04	2.4624e-05	7.645e-02	2.013e-02	1.971e-02
0.4	3.1224e-04	6.6491e-05	2.1567e-05	2.927e-01	1.143e-01	1.119e-01
0.5	1.7106e-04	7.3001e-05	2.1238e-05	8.184e-01	4.237e-01	4.148e-01

Şekil 4.18. Örnek (4.4) için $N = 4, 6, 9$ ve 12 için hata fonksiyonlarının karşılaştırması

Hataların, N değeri arttıkça azaldığı açıkça görülmektedir. N değeri ne kadar yüksek seçilirse, yaklaşık çözüm tam çözüme o kadar yaklaşmaktadır. Tablo 4.18 verileri incelendiğinde, önerilen yöntemin daha tutarlı sonuçlar verdiği söylenebilir. Bu nedenle önerilen yöntem hem uygun hem de etkilidir. Şekil 4.18’de, tanımlanan yöntemle elde edilen çözümlere ait grafikler gösterilmiştir. Şekil 4.19’da üç farklı hata fonksiyonu (gerçek, tahmini ve iyileştirilmiş) gösterilmiştir.

Şekil 4.19. Örnek (4.4) için hata fonksiyonlarının karşılaştırılması**Tablo 4.19.** Denklem (4.181) için hata fonksiyonlarının karşılaştırılması.

	Gerçek mutlak hata	Tahmini mutlak hata	İyileştirilmiş mutlak hata
η	$N = 4$	$N = 4, M = 5$	$N = 4, M = 5$
0.0	0	0	0
0.2	7.4089e-04	5.5998e-04	1.8086e-04
0.4	3.1224e-04	2.2455e-04	6.6685e-05
0.6	2.2665e-04	1.4934e-04	7.7306e-05
0.8	2.7345e-04	2.5822e-04	1.5232e-05
1.0	2.6276e-04	3.9008e-04	1.2806e-04
	$N = 6$	$N = 6, M = 7$	$N = 6, M = 7$
0.0	0	0	0
0.2	4.2793e-05	3.2515e-05	1.0278e-05
0.4	2.1567e-05	1.5094e-05	6.4732e-06
0.6	1.4375e-05	1.0471e-05	3.9038e-06
0.8	1.6180e-05	1.3780e-05	2.4203e-06
1.0	1.6796e-05	2.5719e-05	8.9631e-06

Tablo 4.20. Örnek (4.181) için farklı N ve M değerleri için CPU (Merkezi İşlem Birimi) süreleri.

(N, M)	$(4, 5)$	$(6, 7)$
CPU süresi (saniye)	5.87	8.28

4.4.6. Yüksek Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemleri için Uygulamalar

Bu bölüme yüksek mertebeden diferansiyel denklemler için uygulama ele alınıp sonuçlar üzerinde durulacaktır.

Örnek 4.13. Aşağıdaki şekilde verilen dördüncü mertebeden diferansiyel denklemi inceleyelim:

$$y^{(4)} - 5y = -5r^5 + 25r^2 + 120r, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -10, \quad y'''(0) = 0. \quad (4.183)$$

Bu problemin analitik çözümü $y(r) = r^5 - 5r^2$ şeklindedir ve bu örnek metodun uygulanması için uyarlanmıştır. Önceki bölümde geliştirdiğimiz yöntem uygulanarak, $N = 5$ için yaklaşık çözüm elde edilmiştir. Yaklaşık çözümü elde etmek için bir lineer cebirsel sistem oluşturulmuştur. Bu amaçla, $\mathbf{W}$ ve $\mathbf{F}$ matrisleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} -53 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 \\ 0 & 365 & 0 & -120 & 0 & 120 \\ -10 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 5 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = [0 \ 120 \ 25 \ 0 \ 0 \ -5]^T. \quad (4.184)$$

Bu sistem çözüldüğünde, $\mathbf{A}$ matrisi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\mathbf{A} = [0 \ 0 \ -5 \ 0 \ 0 \ 1]^T.$$

Bu matris, Denklem (4.122)'ne yerleştirildiğinde, elde edilen yaklaşık çözüm $y_5(r) = r^5 - 5r^2$ olup, bu aynı zamanda analitik çözüme eşittir.

Örnek 4.14. İlk olarak aşağıdaki yüksek mertebeden diferansiyel denklem ele alınacaktır.

$$y''' + 2y'' - 3y' = 17e^{2x} + 10xe^{2x}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 2, y''(0) = 5. \quad (4.185)$$

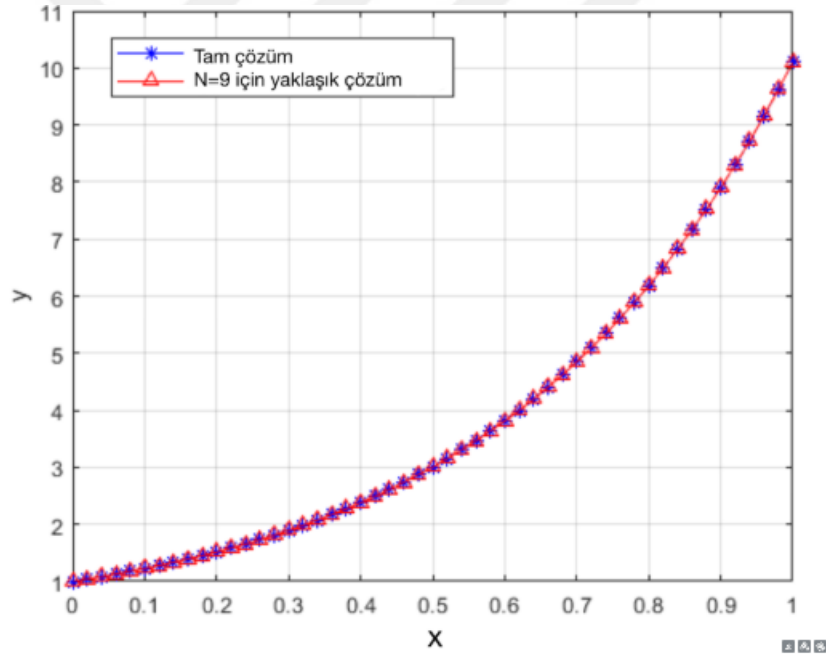
Burada denklem için tam çözüm $e^x + xe^{2x}$ şeklindedir ve bu örnek metodun uygulanması için uyarlanmıştır. $N = 5, 9$ ve 13 için elde edilen yaklaşık çözümler aşağıda verilmiştir.

$$y_5(x) = 0.675x^5 + 1.375x^4 + 2.1667x^3 + 2.5x^2 + 2x + 1,$$

$$y_9(x) = 0.0064x^9 + 0.0254x^8 + 0.8909x^7 + 0.268x^6 + 0.675x^5 + 1.375x^4 + 2.1667x^3 + 2.5x^2 + 2x + 1$$

$$y_{13}(x) = 0.00008x^{13} + 0.00005x^{12} + 0.00028x^{11} + 0.0014x^{10} + 0.0064x^9 + 0.0254x^8 + 0.8909x^7 + 0.268x^6 + 0.675x^5 + 1.375x^4 + 2.1667x^3 + 2.5x^2 + 2x + 1.$$

Şekil 4.20. Örnek (4.185) için yaklaşık çözüm ve tam çözümün karşılaştırılması.



Şekil 4.20.'da yaklaşık çözüm ve gerçek çözüm arasında ki karşılaştırma gösterilmektedir. Burada $N = 9$ için elde edilen yaklaşık çözümün tam çözüme kayda değer ölçüde yakın olduğu görülebilmektedir. Ayrıca Tablo 4.18.'de yaklaşık çözüm ve tam çözüm karşılaştırılması sayısal veriler halinde verilmiştir. Bu sayısal verilerden anlaşılacağı üzere N değeri artırıldıkça elde edilen veriler tam çözüme daha da yakın hale gelmiştir.

Tablo 4.21. Örnek (4.185)'de $N = 5, 9, 13$ durumlarına ait sayısal çözümlerin tam çözümle olan uyumunun değerlendirilmesi.

	Tam Çözüm	Yaklaşık Çözüm	Yaklaşık Çözüm	Yaklaşık Çözüm
x	$e^x + xe^{2x}$	$N = 5$	$N = 9$	$N = 13$
0,0	1	1	1	1
0,2	1.519767697	1.5197493360	1.5197677002	1.5197677003
0,4	2.382041069	2.3807786880	2.3820409298	2.3820410905
0,6	3.814188954	3.7986880720	3.8141793472	3.8141890269
0,8	6.187966868	6.0937175040	6.1877872192	6.1879669851
1,0	10.10733792	9.7166669999	10.105583491	10.107336774

4.4.7. Genelleştirilmiş Pantograph Diferansiyel Denklem için Uygulamalar

Örnek 4.15. Bu örnekte aşağıda verilen denklem önerilen yöntem ile çözümlenecektir.

$$y^{(m)}(x) = \sum_{i=1}^J \sum_{k=0}^{m-1} P_{ik}(x) y^{(k)}(q_{ik}x + \beta) + f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad 0 < q_i < 1 \quad (4.186)$$

şeklindedir. Bu örnek için $m = 1$ ve $J = 2$ alınırsa, denklem aşağıdaki biçimi alır:

$$y'(x) = P_{11}(x) y(q_{11}x + \beta) + P_{21}(x) y(q_{21}x + \beta) + f(x). \quad (4.187)$$

Burada

$$P_{11}(x) = -e^{\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{1}{2}x\right), \quad P_{21}(x) = 2e^{-\frac{3}{4}x} \cos\left(\frac{1}{2}x\right) \sin\left(\frac{1}{4}x\right),$$

$$q_{11} = \frac{1}{2}, \quad q_{21} = \frac{1}{4}, \quad \beta = 0, \quad f(x) = 0.$$

Dolayısıyla (4.187) denklemi açık biçimiyle

$$y'(x) = -y(x) + \beta_1(x) y\left(\frac{1}{2}x\right) + \beta_2(x) y\left(\frac{1}{4}x\right), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.188)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\beta_1(x) = -e^{1/2x} \sin(1/2x)$ ve $\beta_2(x) = 2e^{-3/4x} \cos(1/2x) \sin(1/4x)$ şeklinde verilecektir. Bu problem için tam çözüm $y(x) = e^{-x} \cos(x)$ şeklinde olup başlangıç koşulu $y(0) = 1$ olarak ele alınacaktır (Kumbınarasaiah vd., 2023). Eğer $N = 3, 5, 7$ ve 10 için mevcut yöntem kullanılarak yaklaşık çözümler aşağıdaki şekilde bulunur:

$$y_3(x) = -0.09117991172x^4 + 0.2755329828x^3 + 0.01470351398x^2 - 1.0x + 1.0,$$

$$y_5(x) = -0.0031228776x^6 + 0.036609746x^5 - 0.16854135x^4 + 0.3338878x^3 - 0.000067506209x^2 - 1.0x + 1.0,$$

$$y_7(x) = 0.00021314x^8 - 0.0012558x^7 - 0.000328x^6 + 0.033524x^5 - 0.16673x^4 + 0.33335x^3 - 9.794e - 7x^2 - 1.0x + 1.0,$$

ve

$$y_{10}(x) = 1.9983e - 7x^{11} + 1.4181e - 6x^{10} - 0.00004613x^9 + 0.00039874x^8 - 0.0015885x^7 + 5.2964e - 7x^6 + 0.033333x^5 - 0.16667x^4 + 0.33333x^3 + 1.5904e - 10x^2 - 1.0x + 1.0.$$

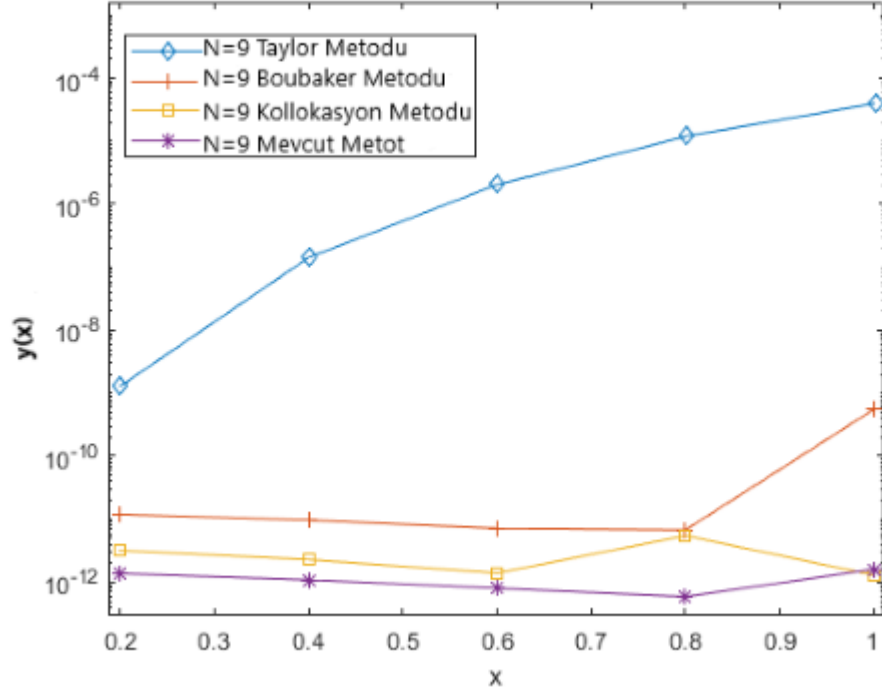
Tablo 4.22.'de bu yöntemden elde edilen hata değerleri ve diğer metotlarla karşılaştırılması görülebilir. Buradaki hata değerlerine bakıldığında önerilen yöntemin diğer yöntemlerden daha iyi ve tutarlı sonuç verdiği görülebilir. Tablo 4.22. bize etkili bir karşılaştırma sunmaktadır (Yu vd 2008),(Doha vd., 2017). Aynı N değerleri için edinilen hata değerlerinde etkililik ve uygulanabilirlik daha iyi görülebilmektedir. N = 9 için önerilen metot Taylor (Sezer vd 2007) metoduyla karşılaştırılmış ve önerilen yöntemden daha küçük hata değerleri elde edilmiştir. Buradan önerilen yöntemin N = 9 için tam çözüme daha çok yaklaştığı sonucunu çıkarmak mümkündür. Ayrıca kollokasyon metodu (Reutskiy vd., 2015) ve Boubaker metodu (Akkaya vd., 2013) için aynı N değeri içinde etkili sonuç alınmıştır. N = 7 değeri için benzer karşılaştırma yapılmıştır. İkinci basamaktaki tabloda bu durum kolaylıkla gözlemleneceği üzere daha tutarlı sonuçlar elde edilmiştir. Sezer'in metodu (Sezer vd., 2008) ve Bessel metodunun (Yüzbaşı, 2011) sonuçlarına bakıldığında önerilen metot ile daha uygulanabilir sonuçlara ulaşılmıştır. Ayrıca bu karşılaştırma Görsel 4.21.'de de görülebilmektedir. Görsel 4.21'de görüldüğü üzere mevcut metot daha stabil ve tutarlı sonuç vermiştir.

Tablo 4.22. Denklem (4.186)'ye ait gerçek mutlak hata fonksiyonlarının değerlendirilmesi ve karşılaştırılması.

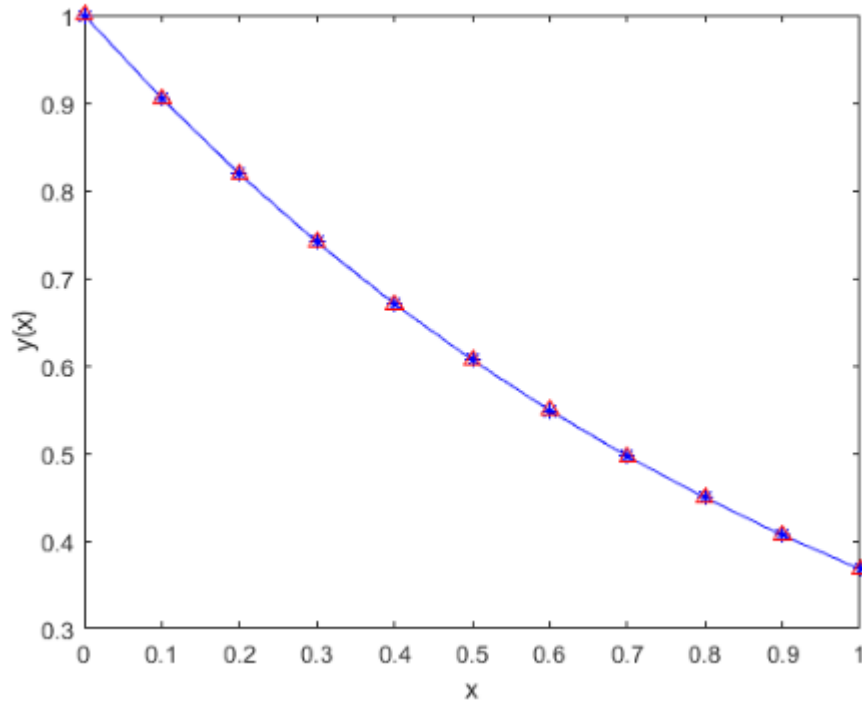
	Önerilen Metot	Önerilen Metot	Taylor Metot (Sezer vd 2007)	Kollokasyon Metot (Reutskiy vd., 2015)	Boubaker Metot (Akkaya vd., 2013)
x	$N = 9$	$N = 10$	$N = 9$	$N = 9$	$N = 9$
0	0	0	0	0	0
0.2	1.38e-12	1.45e-13	1.30e-09	3.20e-12	1.20e-11
0.4	1.09e-12	1.15e-13	1.43e-07	2.30e-12	9.70e-12
0.6	8.06e-13	8.36e-14	2.05e-06	1.40e-12	7.20e-12
0.8	5.93e-13	5.30e-14	1.21e-05	5.50e-12	6.80e-12
1.0	1.61e-12	1.3e-13	4.00e-05	1.30e-12	5.60e-10

	Önerilen Metot	Sezer Metodu (Sezer vd., 2008)	Bessel Metodu (Yüzbaşı, 2011)	Variational Iteration Metodu (Yu, 2008)	Jacobi Metodu (Doha vd., 2017)
x	$N = 7$	$N = 7$	$N = 7$		
0	0	0	0	0	0
0.2	2.30e-09	9.93e-10	1.45e-08	5.65e-09	1.44e-06
0.4	1.72e-09	2.48e-07	1.11e-08	2.95e-07	6.06e-08
0.6	1.10e-09	6.22e-06	6.35e-09	2.72e-06	4.62e-07
0.8	6.14e-10	6.07e-05	8.89e-10	1.73e-05	8.72e-07
1.0	3.01e-09	3.53e-04	4.65e-07	3.80e-05	3.48e-06

Şekil 4.21. Sunulan yöntem ve başka yöntemler ile elde edilen hata fonksiyonlarının karşılaştırılması.



Şekil 4.22. Denklem (4.186) için tam çözüm ve yaklaşık çözümün karşılaştırılması.



Tablo 4.23. Denklem (4.186)'in $(N, M) = (3, 4), (5, 6)$ için mutlak, tahmini ve iyileştirilmiş hataların karşılaştırılması.

x	Mutlak Hatalar	Tahmini Hatalar	İyileştirilmiş Hatalar
	$N = 3$	$N = 3, M = 4$	$N = 3, M = 4$
	$ e_3(x) = y(x) - y_3(x) $	$e_{3,4}(x)$	$E_{3,4}(x)$
0,2	2.3586e-04	2.2821e-04	7.6545e-06
0,4	2.4681e-04	2.4289e-04	3.9208e-06
0,6	3.7683e-05	3.4691e-05	2.9920e-06
0,8	8.5340e-05	8.1377e-05	3.9631e-06
1,0	2.9047e-04	2.9751e-04	7.0375e-06
x	$N = 5$	$N = 5, M = 6$	$N = 5, M = 6$
	$ e_5(x) = y(x) - y_5(x) $	$e_{5,6}(x)$	$E_{5,6}(x)$
0,2	3.9608e-07	3.4587e-07	5.0209e-08
0,4	1.9571e-07	1.6489e-07	3.0802e-08
0,6	2.1266e-07	1.9092e-07	2.1732e-08
0,8	5.3704e-08	2.9601e-08	2.4103e-08
1,0	2.9937e-07	3.3407e-07	3.4693e-08

Tablo 4.23.'deki karşılaştırmada farklı hata değerleri üzerinde durulmuştur. Bu hata değerleri mutlak, tahmini ve iyileştirilmiş olmak üzere üç aşamada vrilmiştir. İlk aşamada $N = 3$ ve $M = 4, 5$ için yapılan karşılaştırma tablonun ikinci aşamasında $N = 5$ ve $M = 6, 8$ için yapılmıştır.

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada, yedi farklı diferansiyel denklemin çözümü için Boubaker polinomlarını kullanan yeni bir yaklaşım yöntemi sunulmaktadır. Bu problemler, literatürde yer alan çeşitli ve iyi bilinen denklemlerin yanı sıra hem lineer hem de lineer olmayan varyasyonlarıyla yöntemimizin çeşitliliğini ve etkililiğini göstermektedir. Yöntem, her problem için ayrı ayrı detaylı biçimde açıklanmış ve ilgili matris ilişkileri adım adım tanıtılmıştır. Hata analizi kısmında ise rezidüel fonksiyon yardımıyla her problem için tahmini ve iyileştirilmiş hata değerleri incelenmiştir. Mevcut yöntemin daha iyi anlaşılması ve uygulanabilirliğinin değerlendirilmesi amacıyla, ele alınan her bir problem daha önce farklı yöntemlerle çözülen örneklerle karşılaştırılmış ve sonuçlar tablo ve grafikler halinde sunulmuştur.

İlk olarak birinci dereceden pantograph denklemi ele alınmış ve hem polinom hem de üstel tam çözüme sahip iki farklı örnek üzerinde yöntem uygulanmıştır. Şekil 4.1’de, mevcut yöntem ile tam çözümün karşılaştırması verilmiştir. İkinci örnekte elde edilen sonuçlar Tablo 4.1’de sunulmuş olup, yöntemin etkililiği ve uygulanabilirliği burada açıkça görülmektedir. Ayrıca Şekil 4.2’de, farklı N değerleri için elde edilen sonuçların grafiksel gösterimi yöntemin yakınsama davranışını ortaya koymaktadır. Bu örneklerde yöntem farklı türde denklemler için detaylı olarak uygulanmış ve diğer metotlarla karşılaştırılarak etkililiği tartışılmıştır. Sonraki örneklerde tahmini ve iyileştirilmiş hata değerlerinin mutlak hatalarla karşılaştırılması yapılmıştır. Bölüm 4.4.3’te Lane–Emden diferansiyel denklemi üzerinde uygulamalar gerçekleştirilmiştir. Bu tür denklemler, bilimsel modellemede yaygın olarak kullanıldığı gibi, astrofizik alanında da sıklıkla karşımıza çıkmaktadır. Bu nedenle verilen örnekler, yöntemin bu tür denklemler üzerindeki başarısını göstermek açısından önemlidir. İlk olarak polinom çözümlü bir örnek ele alınmış ve tam çözüme ulaşılmıştır. Ardından, üstel tam çözümlü ikinci bir örnek üzerinde çalışılmış ve Tablo 4.8’de farklı metotlarla karşılaştırma yapılmıştır. Bu karşılaştırmanın ardından, tahmini ve iyileştirilmiş hata fonksiyonlarının mutlak hatalarla ilişkisi sunulmuş ve iyileştirilmiş hataların tam çözüme daha yakın sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir. Sonrasında popülasyonun lojistik büyüme modeli incelenmiştir. Elde edilen verilerle dört farklı tablo hazırlanmış ve karşılaştırmalar detaylı bir biçimde sunulmuştur. Önerilen metodun etkililiği, uygula-

nabilirliği ve tutarlılığı literatürdeki diğer yöntemlerle kapsamlı biçimde karşılaştırılarak tartışılmıştır. Bu karşılaştırmalar yöntemin güçlü yönlerini açıkça ortaya koymaktadır. Ardından, diferansiyel denklemler içinde en bilinen lineer olmayan türlerden biri olan Riccati denklemi ele alınmıştır. Riccati denklemi için ilk olarak polinom çözümlü bir örnek üzerinde tam çözüme ulaşılmış; ardından logaritmik ve trigonometrik fonksiyonlar içeren bir başka örnek incelenmiş ve sonuçlar literatürdeki diğer yöntemlerle karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmalar grafiklerle de desteklenmiştir. Son olarak yüksek mertebeden bir diferansiyel denklem örneği ele alınmıştır. Tüm bu örnekler, önerilen yöntemin etkililiğini ve genel uygulanabilirliğini açık biçimde ortaya koymaktadır. Geliştirilen bu yeni yöntem, farklı türde diferansiyel denklemlere uygulanabilmesi ve sağladığı yüksek doğruluk sayesinde özgün ve yenilikçi bir yaklaşım olarak değerlendirilebilir.

6. KAYNAKLAR

- Yüzbaşı, Ş., çayır, M. (2018). A Galerkin-type method for solving a delayed model on HIV infection of CD 4+ T-cells. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*, 42(3), 1087-1095.
- Ali, Z. M., Aleem, S. H. A., Omar, A. I., Mahmoud, B. S. (2022). Economical-environmental-technical operation of power networks with high penetration of renewable energy systems using multi-objective coronavirus herd immunity algorithm. *Mathematics*, 10(7), 1201.
- Yan, L., Sabir, Z., Ilhan, E., Asif Zahoor Raja, M., Gao, W., & Mehmet Baskonus, H. . Design of a Computational Heuristic to Solve the Nonlinear Liénard Differential Model. *Comput. Model. Eng. Sci*, 136(2023) 201-221.
- Adel, W., & Sabir, Z. . Solving a new design of nonlinear second-order Lane–Emden pantograph delay differential model via Bernoulli collocation method. *The European Physical Journal Plus*, 135(5)(2020) 1-12.
- Shoaib, M., Raja, M. A. Z., Sabir, M. T., Bukhari, A. H., Alrabaiah, H., Shah, Z., ... & Islam, S. (2021). A stochastic numerical analysis based on hybrid NAR-RBFs networks nonlinear SITR model for novel COVID-19 dynamics. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 202, 105973.
- Sabir, Z., Botmart, T., Raja, M. A. Z., Sadat, R., Ali, M. R., Alsulami, A. A., & Alghamdi, A. (2022). Artificial neural network scheme to solve the nonlinear influenza disease model. *Biomedical Signal Processing and Control*, 75, 103594.
- Wen, X. K., Wu, G. Z., Liu, W., & Dai, C. Q. (2022). Dynamics of diverse data-driven solitons for the three-component coupled nonlinear Schrödinger model by the MPS-PINN method. *Nonlinear Dynamics*, 109(4), 3041-3050.
- Sulaiman, T. A., Yusuf, A., Alshomrani, A. S., & Baleanu, D. . Lump collision phenomena to a nonlinear physical model in coastal engineering. *Mathematics*, 10(15)(2022) 2805.

- Dehghan, M., & Shakeri, F. Approximate solution of a differential equation arising in astrophysics using the variational iteration method. *New Astronomy*, 13(1)(2008) 53-59.
- Ogundele, A. D., Sinclair, A. J., & Sinha, S. C.. Closed form parametric solutions of nonlinear abel-type and riccati-type spacecraft relative motion. *Acta Astronautica*, 178 (2021) 733-742.
- Rial, J. A., & Saha, R. Modeling abrupt climate change as the interaction between sea ice extent and mean ocean temperature under orbital insolation forcing. *Abrupt Climate Change: Mechanisms, Patterns, and Impacts*, 193(2011) 57-74.
- Bonyah, E., Atangana, A., & Chand, M.. Analysis of 3D IS-LM macroeconomic system model within the scope of fractional calculus. *Chaos, Solitons & Fractals: X*, 2 (2019) 100007.
- Ş. Yüzbaşı, & M. Sezer. [2011]. A collocation approach to solve a class of Lane-Emden type equations. *Journal of Advanced Research in Applied Mathematics* (3)2, 58-73.
- Kumar M., Umesh. [2022]. Recent development of Adomian decomposition method for ordinary and partial differential equations. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 8(2) 81
- Ogunniran M. O., Tayo O. A., Haruna Y., & Adebisi A. F. . [2020]. Linear stability analysis of Runge-Kutta methods for singular Lane-Emden equations. *Journal of the Nigerian Society of Physical Sciences*, 134-140
- Wheeler, N. (2004). *Quantum Applications of the Riccati Equation*. Reed College Physics Department.
- Shadi, R., Liavoli, F. B., Fakharian, A. (2021, February). Nonlinear sub-optimal controller for Ebola virus disease: State-dependent Riccati equation approach. In *2021 7th International Conference on Control, Instrumentation and Automation (IC-CIA)* (pp. 1–6). IEEE.

- Schuch, D. (2014, October). Relations between nonlinear Riccati equations and other equations in fundamental physics. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 538, No. 1, p. 012019). IOP Publishing.
- Kengne, E., Hamouda, F. B., Lakhssassi, A. (2013). Extended generalized Riccati equation mapping for thermal traveling-wave distribution in biological tissues through a bio-heat transfer model with linear/quadratic temperature-dependent blood perfusion. *Applied Mathematics*, 4(10), 1471–1484.
- El Gezery, M., Abdelaal, M., Osama, M., Elassal, A. (2025). Hybrid Control Strategy Using Iterative Learning and State-Dependent Riccati Equation for Enhanced Precision in Parallel Delta Robots. *e-Prime-Advances in Electrical Engineering, Electronics and Energy*, 100915.
- Ogunniran, M. O., Tayo, O. A., Haruna, Y., & Adebisi, A. F. (2020). Linear stability analysis of Runge-Kutta methods for singular Lane-Emden equations. *Journal of the Nigerian Society of Physical Sciences*, 134–140.
- Anton, H. and Rorres, C. (2013). *Elementary Linear Algebra*. Wiley, 11th Edition.
- Strang, G. (2009). *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley-Cambridge Press, 4th Edition.
- Gümgüm S., [2020] Taylor wavelet solution of linear and nonlinear Lane-Emden equations. *Applied Numerical Mathematics*, 158 44-53
- Dizicheh A. K., Ahmadian A., Salahshour S., & Baleanu D.. [2020]. A novel algorithm based on the Legendre wavelets spectral technique for solving the Lane–Emden equations. *Applied Numerical Mathematics*, 153 443-456 (2020)
- Yüzbaşı Ş., Yıldırım G.. [2022]. Pell-Lucas Collocation Method to Solve Second-Order Nonlinear Lane-Emden Type Pantograph Differential Equations. *Fundamentals of Contemporary Mathematical Sciences*, 3(1) 75-97
- Yüzbaşı Ş. , & Sezer M.. [2013]. An improved Bessel collocation method with a residual error function to solve a class of Lane–Emden differential equations. *Mathematical and Computer Modelling*, 57(5-6) 1298-1311 (2013).

- Yüzbaşı, Ş., Çetin, B. (2025) A New Approximation Method Based on Boubaker Polynomials to Solve a Type of Lane–Emden Differential Equations Arising in Astrophysics. *Iranian Journal of Science*, 1-12.
- Yüzbaşı, Ş. (2012). Bessel collocation approach for solving continuous population models for single and interacting species. *Applied Mathematical Modelling*, 36(8), 3787-3802.
- Zhang, C. (2012). Analytic continuation of solutions of the pantograph equation by means of θ -modular formula. *arXiv preprint arXiv:1202.0423*.
- Yüzbaşı, A., Cetin, B. (2024). A new approximation method for multi-pantograph type delay differential equations using Boubaker polynomials. *International Journal of Computational Methods*, 21(3).
- Yüzbaşı, Ş., Çetin, B. (2023) A new approximation method to solve linear pantograph equations with nonhomogeneous. (GFSNP)
- Yüzbaşı, Ş., Çetin, B. (2025). A Boubaker Collocation Method to Solve the Single Degree of Freedom System. In: Stanić, M.P., Albijanić, M., Djurčić, D., Spalević, M.M. (eds) *Analysis, Approximation, Optimization: Computation and Applications*. Springer Optimization and Its Applications, vol 224. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-85743-0_21
- Yuzbasi, S., Cetin, B. (2023) A new approximation method for multi-pantograph type delay differential equations using Hermite polynomials (MICOPAM).
- Szegő, G. (1975). *Orthogonal Polynomials*. American Mathematical Society.
- N. Caglar, & H. Caglar,. (2006) B-spline solution of singular boundary value problems. *Applied Mathematics and Computation*, **182(2)** 1509-1513.
- Yüzbaşı, Ş. (2020). An operational method for solutions of Riccati type differential equations with functional arguments. *Journal of Taibah University for Science*, 14(1), 661-669.

- Boyce, W. E. and DiPrima, R. C. (2021). Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. Wiley, 11th Edition.
- Teschl, G. (2012). Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems. American Mathematical Society.
- Mehdifar F., Khani A. (2022). A Specific Numerical Method for Two-Dimensional Linear Fredholm Integral Equations of the Second Kind by Boubaker Polynomial Bases. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, **8(5)** 240.
- Davaeifar S., Rashidinia J. (2017). Boubaker polynomials collocation approach for solving systems of nonlinear Volterra–Fredholm integral equations. *Journal of Taibah university for science*, **11(6)** 1182-1199.
- Yüzbaşı, Ş., Karaçayır, M. (2018). A Galerkin-like approach to solve multi-pantograph type delay differential equations, *Filomat*, 32(2) 409-422. (Makale)
- Muroya, Y., Ishiwata, E., & Brunner, H.. On the attainable order of collocation methods for pantograph integro-differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 152(1-2)(2003) 347-366.
- Izadi, M., Yüzbaşı, Ş., & Ansari, K. J.. Application of Vieta–Lucas series to solve a class of multi-pantograph delay differential equations with singularity. *Symmetry*, 13(12)(2021) 2370.
- Shadia, M. Numerical solution of delay differential and neutral differential equations using spline methods. Assuit University, Asyut, Egypt. (1992)
- Yüzbaşı, Ş., & Yıldırım, G. (2020). Pell–Lucas collocation method for numerical solutions of two population models and residual correction. *Journal of Taibah University for Science*, 14(1), 1262-1278.
- Pamuk, S. The decomposition method for continuous population models for single and interacting species. *Applied Mathematics and Computation*, 163(1) (2005) 79-88.

- Reutskiy, S. Y.. A new collocation method for approximate solution of the pantograph functional differential equations with proportional delay. *Applied Mathematics and Computation*, 266(2015) 642-655.
- Yalçınbaş, S., & Akkaya, T.. A numerical approach for solving linear integro-differential-difference equations with Boubaker polynomial bases. *Ain Shams Engineering Journal*, 3(2)(2012) 153-161.
- Sezer M., Yalçınbaş S., Gülsu M., A Taylor polynomial approach for solving generalized pantograph equations with nonhomogenous term, *Int. J. Comput. Math.* Volume 85, 2008 - Issue 7. Pages 1055-1063 | Received 07 Dec 2005, Accepted 21 May 2007, Published online: 04 Mar 2011
- Yüzbaşı, Ş., & Karaçayır, M.. A Galerkin-like scheme to solve Riccati equations encountered in quantum physics. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 766, No. 1, p. 012036)(2016, October) IOP Publishing.
- Gülsu, M., & Sezer, M.. On the solution of the Riccati equation by the Taylor matrix method. *Applied Mathematics and Computation*, 176(2)(2006) 414-421.
- Çetin, M., Sezer, M., Güler, C. (2015). Lucas Polynomial Approach for System of High-Order Linear Differential Equations and Residual Error Estimation. *Mathematical problems in engineering*, 2015(1), 625984.
- Boubaker, K., Chaouachi, A., Amlouk, M., Bouzouita, H. (2007). Enhancement of pyrolysis spray disposal performance using thermal time-response to precursor uniform deposition. *The European Physical Journal-Applied Physics*, 37(1), 105-109.
- Saadeh, R., Burqan, A., & El-Ajou, A. (2022). Reliable solutions to fractional Lane-Emden equations via Laplace transform and residual error function. *Alexandria Engineering Journal*, 61(12), 10551–10562.
- Khoso, N. A., Shaikh, M. M., Wasim, A. (2020). On orthogonalization of Boubaker polynomials. *Journal of Mechanics of Continua and Mathematical Sciences*, 15(11), 119-131.

- Shaikh, M. M., Boubaker, K. (2016). An efficient numerical method for computation of the number of complex zeros of real polynomials inside the open unit disk. *Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences*, 21, 86-91.
- Dada, M., Awojoyogbe, B., Hasler, M., Ben Mahmoud, K., Bannour, A. (2008). Establishment of a Chebyshev-dependent inhomogeneous second order differential equation for the applied physics-related Boubaker-Turki polynomials.
- Milovanovic, G. V., Joksimovic', D., Simos, T. E., Psihoyios, G., Tsitouras, C., Anastassi, Z. (2012). Some properties of Boubaker polynomials and applications. In *AIP Conference Proceedings-American Institute of Physics* (Vol. 1479, No. 1, p. 1050).
- Barry, P. (2013). Research Article On the Connection Coefficients of the Chebyshev-Boubaker Polynomials.
- Dubey, B., Zhao, T. G., Jonsson, M., Rahmanov, H. (2010). A solution to the accelerated-predator-satiety Lotka–Volterra predator–prey problem using Boubaker polynomial expansion scheme. *Journal of Theoretical Biology*, 264(1), 154-160.
- Yüzbaşı, Ş. (2013). Numerical solutions of fractional Riccati type differential equations by means of the Bernstein polynomials. *Applied Mathematics and Computation*, 219(11), 6328–6343.
- Yüzbaşı, Ş., Yıldırım, G. (2020). Legendre collocation method to solve the Riccati equations with functional arguments. *International Journal of Computational Methods*, 17(10), 2050011.
- Hedi, L., Karem, B. (2007). A Sturm-Liouville shaped characteristic differential equation as a guide to establish a quasi-polynomial expression to the Boubaker polynomials. (2), 117-133.
- Bahşı, M. M., Çevik, M., & Sezer, M. (2015). Orthoexponential polynomial solutions of delay pantograph differential equations with residual error estimation. *Applied Mathematics and Computation*, 271, 11

- Yüzbaşı, Ş., Gök, E., Sezer, M. (2015). Residual correction of the Hermite polynomial solutions of the generalized pantograph equations. *New Trends in Mathematical Sciences*, 3(2), 118-125.
- Alfrdji, E. H. O., Ahmed, I. N. (2020). Numerical Methods for Solving Optimal Control Problem Using Scaling Boubaker Function. *Al-Qadisiyah Journal of pure science*, 25(2), 78-89.
- Braun, M., Golubitsky, M. (1983). *Differential equations and their applications* (Vol. 2). New York: Springer-Verlag.
- Gronwall, T. H. (1919). Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations. *Annals of Mathematics*, 292-296.
- Yüzbaşı, Ş. (2016). Improved Bessel collocation method for linear Volterra integro-differential equations with piecewise intervals and application of a Volterra population model. *Applied Mathematical Modelling*, 40(9-10), 5349-5363.
- Savaşaneril, N. B. (2018). Laguerre series solutions of the delayed single degree-of-freedom oscillator excited by an external excitation and controlled by a control force. *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*, 15(2), 606-610.
- Padierna, L. C., Carpio, M., Rojas-Domínguez, A., Puga, H., Fraire, H. (2018). A novel formulation of orthogonal polynomial kernel functions for SVM classifiers: The Gegenbauer family. *Pattern Recognition*, 84, 211-225.
- Abdelhakem, M., Fawzy, M., El-Kady, M., Moussa, H. (2023). Legendre polynomials' second derivative tau method for solving Lane-Emden and Ricatti equations. *Appl. Math. Inf. Sci*, 17, 437-445.
- Isik O. R., & Sezer M.. (2013). Bernstein series solution of a class of Lane-Emden type equations. *Mathematical Problems in Engineering*,

- Gürbüz B., , & Sezer M.. (2014). Laguerre polynomial approach for solving Lane–Emden type functional differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, **242** 255-264 (2014).
- Aslan B. B., Gurbuz B., M. Sezer. (2015). A Taylor matrix-collocation method based on residual error for solving Lane-Emden type differential equations. *New Trends in Mathematical Sciences*, **3(2)** 219.
- Ahmed, S., Shah, K., Jahan, S., Abdeljawad, T. (2023). An efficient method for the fractional electric circuits based on Fibonacci wavelet. *Results in Physics*, 52, 106753.
- Arimi, H. J., Eslami, M., Ansari, A. (2024). Numerical study of distributed-order Bessel fractional derivative with application to Euler–Poisson–Darboux equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 133, 107950.
- Kumbinarasaiah, S., Raghunatha, K. R., Preetham, M. P. (2023). Applications of Bernoulli wavelet collocation method in the analysis of Jeffery–Hamel flow and heat transfer in Eyring–Powell fluid. *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, 148(3), 1173-1189.
- Kumar, S., Gupta, V., Kumar, A., Gómez-Aguilar, J. F. (2023). An accurate operational matrix method based on Lagrange polynomials for solving fractional-order pantograph delay and Riccati differential equations. *Physica Scripta*, 98(4), 044005.
- Sha, F., Pan, J. (2023, May). Accelerating Stochastic Newton Method via Chebyshev Polynomial Approximation. In *Pacific-Asia Conference on Knowledge Discovery and Data Mining* (pp. 523-534). Cham: Springer Nature Switzerland.
- Rabiei, K., Ordokhani, Y., Babolian, E. (2017). The Boubaker polynomials and their application to solve fractional optimal control problems. *Nonlinear Dynamics*, 88, 1013-1026.
- Sarhan, M. A., Shihab, S., Rasheed, M. (2020). On the properties of two-dimensional normalized boubaker polynomials. *Journal of Southwest Jiaotong University*, 55(3).

- Yüzbaşı, Ş.. Numerical solutions of fractional Riccati type differential equations by means of the Bernstein polynomials. *Applied Mathematics and Computation*, 219(11)(2013), 6328-6343.
- Yüzbaşı, Ş.. A numerical approximation based on the Bessel functions of first kind for solutions of Riccati type differential–difference equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 64(6)(2012) 1691-1705.
- Yalçınbaş, S., & Akkaya, T.. A numerical approach for solving linear integro-differential-difference equations with Boubaker polynomial bases. *Ain Shams Engineering Journal*, 3(2)(2012) 153-161.
- Abbasbandy, S.. Homotopy perturbation method for quadratic Riccati differential equation and comparison with Adomian’s decomposition method. *Applied Mathematics and Computation*, 172(1)(2006) 485-490.
- Daşcıoğlu, A., & Yaslan, H. (2011). The solution of high-order nonlinear ordinary differential equations by Chebyshev polynomials. *Appl. Math. Comput.*, 217(2), 5658-5666.
- Adomian, G.. *Solving frontier problems of physics: the decomposition method*, Springer. Dordrecht (1994)
- Muroya Y., Ishiwata E. , Brunner H., On the attainable order of collocation methods for pantograph integro-diferential equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Received 13 December 2001; received in revised form 22 May 2002
- Shadia, M., (1992). Numerical solution of delay differential and neutral differential equations using spline methods. Assuit University, Asyut, Egypt. (Makale)
- Sezer, M., Akyüz-Daşcıoğlu, A., (2007). A Taylor method for numerical solution of generalized pantograph equations with linear functional argument. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 200(1) 217-225. (Makale)

- Jafari, H., Mahmoudi, M., Noori Skandari, M. H. (2021) A new numerical method to solve pantograph delay differential equations with convergence analysis. *Advances in Difference Equations*, 2021(1) 1-12. (Makale)
- Sezer, M., Yalçınbaş, S., Gülsu, M., (2008). A Taylor polynomial approach for solving generalized pantograph equations with nonhomogenous term. *International Journal of Computer Mathematics*, 85(7) 1055-1063. (Makale)
- Akkaya, T., Yalçınbaş, S., & Sezer, M. Numeric solutions for the pantograph type delay differential equation using First Boubaker polynomials. *Applied Mathematics and Computation*, 219(17)(2013) 9484-9492.
- Yu, Z. H. Variational iteration method for solving the multi-pantograph delay equation. *Physics Letters A*, 372(43)(2008) 6475-6479.
- Doha, E. H., Bhrawy, A. H., & Hafez, R. M. Numerical algorithm for solving multi-pantograph delay equations on the half-line using Jacobi rational functions with convergence analysis. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, 33(2)(2017) 297-310.
- Sezer, M., & Şahin, N. Approximate solution of multi-pantograph equation with variable coefficients. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 214(2)(2008) 406-416.
- Yuzbasi, S., Sahin, N., & Sezer, M. A Bessel polynomial approach for solving linear neutral delay differential equations with variable coefficients. *J. Adv. Res. Differ. Equ*, 3(1)(2011) 81-101.
- Pamuk, S., Pamuk, N. He's homotopy perturbation method for continuous population models for single and interacting species. *Computers & Mathematics with Applications*, 59(2)(2010) 612-621.
- Yüzbaşı, Ş., Şahin, N., Sezer, M. (2011). Numerical solutions of systems of linear Fredholm integro-differential equations with Bessel polynomial bases. *Computers and Mathematics with Applications*, 61(10), 3079-3096.

ÖZGEÇMİŞ

Beyza ÇETİN

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans 2022-2025	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Antalya
Lisans 2018-2022	Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Ankara

ESERLER:

Uluslararası hakemli dergilerde yayımlanan makaleler

- 1- Yüzbaşı, Ş. and Çetin, B. (2024).A new approximation method for multi-pantograph type delay differential equations using Boubaker polynomials. International Journal of Computational Methods, 21(3).
- 2- Yüzbaşı, Ş. and Çetin, B. (2025) A New Approximation Method Based on Boubaker Polynomials to Solve a Type of Lane–Emden Differential Equations Arising in Astrophysics. Iranian Journal of Science, 1-12.

Ulusal bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitaplarında basılan bildiriler

- 1- Yüzbaşı, Ş., Çetin, B. A new approximation method to solve linear pantograph equations with nonhomogeneous. "The 13th Symposium on Generating Functions of Special Numbers and Polynomials and their Applications (GFSNP 2023)" (Edited by Alkan, M., Kucukoglu, I. and Ones, O.) Antalya, Türkiye, ISBN: 978-625-00-1128-7.
- 2- Yüzbaşı, Ş., Çetin, B. A Boubaker matrix method for solving high order differential equation with constant coefficients "The 6th Mediterranean International Conference of Pure & Applied Mathematics and Related Areas (MICOPAM 2023)" (Edited by Bayad, A., Alkan, M., Kucukoglu, I. and Ones, O.) Antalya, Türkiye, ISBN: 978-2-491766-01-6.
- 3- Yüzbaşı, Ş., Çetin, B. A new approximation method for multi-pantograph type delay differential equations using Hermite polynomials "The 6th Mediterranean International Conference of Pure & Applied Mathematics and Related Areas (MICOPAM 2023)" (Edited by Bayad, A., Alkan, M., Kucukoglu, I. and Ones, O.) Antalya, Türkiye, ISBN: 978-2-491766-01-6.

4- Yüzbaşı, Ş., Çetin, B. A Boubaker Collocation Method to Solve the Single Degree of Freedom System. In Analysis, Approximation, Optimization: Computation and Applications: In Honor of Gradimir V. Milovanović on the Occasion of His 75th Birthday (pp. 415-424)(2025) Cham: Springer Nature Switzerland.

