



T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI DOĞRU KONGRÜANSLARI

Osman KAYNUN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ekim-2025
MUŞ
Her Hakkı Saklıdır



T.C.
MUŞ ALPARSLAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI DOĞRU KONGRÜANSLARI

Osman KAYNUN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç.Dr. Muhsin İNCESU
Jüri Üyesi: Prof. Dr. Talat KÖRPİNAR
Jüri Üyesi: Prof. Dr. Sadulla JAFAROV
Jüri Üyesi: Prof. Dr. Hatice KUŞAK SAMANCI
Jüri Üyesi: Doç. Dr. Rıdvan Cem DEMİRKOL

Ekim-2025
MUŞ
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL ve ONAYI

Osman KAYNUN tarafından hazırlanan “**Bazı Doğru Kongrüansları**” adlı tez çalışması 18/09/2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan

Prof. Dr. Talat KÖRPINAR

Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü

Danışman

Doç. Dr. Muhsin İNCESU

Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü

Üye

Prof. Dr. Sadulla JAFAROV

Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü

Üye

Hatice KUŞAK SAMANCI

Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü

Üye

Rıdvan Cem DEMİRKOL

Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 26/09/2025 Tarih ve 15/2 nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Selçuk SAĞIR

FBE Müdürü

Bu tez çalışması Muş Alparslan Üniversitesi Bilimsel Araştırma projeleri birimi tarafından BAP-24-EMF-4902-01 nolu proje ile desteklenmiştir.

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Osman KAYNUN
Ekim / 2025

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI DOĞRU KONGRÜANSLARI

Osman KAYNUN

Muş Alparslan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Muhsin İNCESU

Bu tezde dayanak yüzeyi ve doğrultman vektörünün özel yüzeyler ve vektörler olduğu doğru kongrüansları ile dual değişkenli D3 teki dual eğrilere özellikle dual polinom eğrilere ve bunların özel bir hali olan dual doğrulara karşılık gelen kongrüanslar ele alınmış ve irdelenmiştir.

2025, 34 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Bezier Yüzeyleri, Frenet vektör alanları, doğru kongrüansı, dual doğrular, dual eğriler

ABSTRACT

MS THESIS

ON SOME LINE CONGRUENCES

Osman KAYNUN

Muş Alparslan University
Natural and Applied Science
Department of Mathematics

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Muhsin İNCESU

In this thesis, the line congruences for which the directrix surface and the director vectors are special surfaces and vectors are discussed and examined. Also in this thesis the line congruences corresponding to the dual curves with the dual variables especially dual polynomial curves in D^3 and the dual lines, which are a special case of them, are discussed and examined.

2025, 34 Pages

Keywords: Line Congruences, Dual Lines, Dual Curves, Bezier Surfaces, Frenet vector fields.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmamın hazırlanması sürecinde bilgisinden her zaman faydalandığım, çalışmamın başından itibaren yardımlarını esirgemeyen, değerli zamanını ayıran saygı değer hocam Doç. Dr. Muhsin İNCESU'ya teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Osman KAYNUN
MUŞ-2025



İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER.....	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	x
1. GİRİŞ.....	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	3
3. MATERYAL ve YÖNTEM	5
3.1 Temel Tanım ve Teoremler	5
3.1.1 Yüzey	6
3.1.2 Yüzeyin Birim Normal Vektörü	6
3.1.3 Darboux Çatısı	6
3.1.4 Doğrultman Vektörü	7
3.1.5 Özel Regle yüzeyler	7
3.1.6 Boğaz Noktası.....	8
3.1.7 Yüzeyin Boğaz Eğrisi	8
3.1.8 Doğru Kongrüansı.....	8
3.1.9 Kapalı Regle Yüzeyin Açılım Uzunluğu	9
3.1.10 Kapalı Regle Yüzeyin Açılım Açısı	10
3.1.11 Kongrüansın Boğaz Yüzeyi	10
3.1.12 Doğru Kongrüansın Dağılma Parametrisi.....	11
4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI ve TARTIŞMA	12
4.1 Dayanak Yüzeyi için Özel Koşullar.....	12
4.1.1. Dayanak Yüzeyi $\alpha t, v$ nin (n,m) tipli bir Bezier Yüzeyi Olması ve $\beta t, v$ nin de Bu Yüzeyin Normal Vektörü Olması Durumu	12
4.1.2 Dayanak Yüzeyi (n,m) tipli bir Bezier Yüzeyi Olan Doğru Kongrüansında De Casteljau Algoritması	13
4.1.3 Dayanak Yüzeyi (n,m) tipli bir Bezier Yüzeyi Olan Doğru Kongrüansında Koordinat Regle Yüzeyler	18
4.2 Dual Küresel Eğriler ve Karşılık Gelen Doğru Kongrüansları	22
4.2.1 Dual Polinom Eğrilerin Dual Küresel İzdüşüm Eğrileri ve Karşılık Gelen Doğru Kongrüansları.....	23
4.3 Dual Doğrular ve Karşılık Gelen Doğru Kongrüansları	25
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER.....	31
5.1 Sonuçlar	31

5.2 Öneriler	31
KAYNAKLAR	32
ÖZGEÇMİŞ	34



SİMGELER

Simgeler

R^3	: Üç boyutlu Öklid uzay
b_i	: Bezier Eğrisinin Kontrol Noktası
$\hat{U}$	: Dual vektör
$\langle \hat{U}, \hat{V} \rangle$	: Dual vektörlerde İç çarpım
$\ \hat{U}\ $	: Dual vektörün Normu
$B_i^n(t)$	: Bernstein Taban Polinomu
P_{ij}	: Bezier Yüzeyinin Kontrol Noktası
$\Delta^i P_{ij}$	: $P_{(i+1)j} - P_{ij}$
$\Delta^j P_{ij}$	: $\Delta^j P_{ij} = P_{i(j+1)} - P_{ij}$
P_{ij}^k	: ${}^t P_{ij}^k$
${}^t P_{ij}^k$	: ${}^t P_{ij}^k (1 - t_0) P_{ij}^{k-1} + t_0 P_{i(j+1)}^{k-1}$
$(P_{ij}^k)^u$	: ${}^v P_{ij}^{k,u}$
${}^v P_{ij}^{k,u}$	: ${}^v P_{ij}^{k,u-1} (1 - v_0) + {}^v P_{i(j+1)}^{k,u-1} (v_0)$
$\Delta^i {}^v P_{00}^{n,m}$	: ${}^v P_{10}^{n-1,m} - {}^v P_{00}^{n,m}$

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1	Bezier yüzeyinde Subdivision	17
Şekil 4.2	Dayanak yüzeyi Bezier yüzeyi olan doğru kongrüansında koordinat regle yüzeyler.....	18
Şekil 4.3	D^3 te L doğrusu	26
Şekil 4.4	L ye karşılık gelen $M(\lambda, \lambda^*, v)$ doğru kongrüansı	29
Şekil 4.5	L dual doğrusuna karşılık gelen doğru kongrüansının dayanak yüzeyi	30



1. GİRİŞ

Geometrik modellemelerde amaç bir cismin ya da nesnenin matematiksel yapısını oluşturup bilgisayarda çeşitli programlar ve algoritmalar beraberinde şekiller ile görselleştirilmesidir. Bilgisayarların her geçen gün gelişmesiyle de beraber bu modellemelerde optimum seviyelere doğru hareket etmektedirler. Matematik modellemelerle elde edilen tasarımların alt yapısını parametrik eğri ve yüzeyler oluşturmaktadır. Bunlardan; Bezier yüzeyleri ve eğrileri, B-spline yöntemleri, NURBS eğrileri uygulaması yaygın olarak kullanılan önemli bir alana sahiptir.

Bernstein polinomlarıyla tanımlanan Bezier yüzeyleri ve eğrilerine Paul De-Casteljau ve Pierre Bezier öncülük etmiştir. Bu eğriler ve yüzeyler otomotiv sanayisinden uçak sanayisine, mühendislikten tıp alanına kadar geniş yelpazede kullanıldığından sürekli geliştirilerek çalışmaya devam etmektedir. Endüstriyel tasarımlarda kullanılan Spline' lar noktalar kümesi tarafından belirlenen düzgün bir eğri oluşturmak için kullanılan esnek bir şerittir. Çok sayıda ağırlıklar şerit boyunca yayılmasıyla sabit konumda duran bir eğri oluşturmaktadırlar. Yine modellemelerin alt yapısında kullanılan NURBS yüzeylerinin ve eğrilerinin invaryantlarının tanımlanmasıyla yüzey ve eğrilerin önemli özelliklerinden Gauss eğriliği, burulma, asal eğrilik, eğrilik ve daha fazla yapı tanımlanmaktadır. En temel örnek olarak bir arabanın dizaynında rüzgâr direncinden yakıt tüketimine kadar etkili olan aerodinamik kavisler, kıvrımlar bu eğri ve yüzeylerin sahip olduğu özellikler ile tanımlanmaktadır.

Uzayda 2-parametrelili doğruların ailesi, doğrusal kongrüans veya doğru kongrüansı olarak adlandırılır. R3 de doğru kongrüansları, doğru geometrisinin klasik bir alanıdır. Bununla birlikte son zamanlarda projektif diferansiyel geometri, hesaplama ve görüntüleme teknikleri, ... gibi farklı alanlarda da kullanıldığı görülmektedir (Garcia ve Sotomoyar,2000). Ayrıca günümüzde doğruların diferansiyel geometrisi geniş olarak ürünlerin dizaynı, imalatı, hareket analizlerinde, katı cisim simülasyonlarında ve objelerin modellenmesinde kullanılmaktadır (Gray 2006).

Doğru kongrüansındaki tüm doğruları kesen yüzeye **taban yüzey** yada **referans yüzey** veya **dayanak yüzeyi** denir. Yüzey üzerinde alınan bir eğri boyunca devam eden doğru kongrüansının doğruları uzayın ya da elde edilen regle yüzeyin doğrularının 1-parametrelili ailesidir. Taban yüzeyinin normallerini, doğru kongrüansındaki doğruların doğrultmanları yerine alırsak elde edilen doğru kongrüansına, **normaller kongrüansı**

denir. Bundan dolayı normaller kongrüansı, doğru kongrüanslarının özel bir sınıfını oluşturur. Ayrıca normaller kongrüansları yüzeylerin klasik diferansiyel geometrisinde önemli rol oynarlar (Öztürk, 2011).



2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Dual sayılar 19. Yy da Clifford tarafından bulunmuş ve kinematik uygulamaları daha sonra Study ve Kotelnikov tarafından genelleştirilmiştir. Ayrıca dual sayılar cebiri ve dönüşüm uygulamaları Müller (1963), Köse (1974), Bottema ve Roth (1979) çalışmalarında kullanılmıştır (Sarıoğlu,2003).

Doğru kongrüansları üzerine ilk çalışma **Kummer** in “**Allgemeine Theorie der Grandlinigen Strahlen System**” isimli kitabında verilmiştir. Diğer yandan doğrularla bir yüzeyi diğer bir yüzeye dönüştürmek için kullanılan klasik metotlarda doğru kongrüansı kullanılmaktadır (Blaschke 1945). 1875 yıllarında Backlund and Bianchi böyle bir dönüşümü doğru kongrüansları ile vermiştir ve buna Backlund Dönüşümü denilmiştir (Öztürk, 2011).

Regle yüzeyler ve doğru kongrüansları dual S^2 küresi üzerinde birim dual eğriye karşılık gelir. (Guegenheimer, 1977). Böylece bir doğrusal yüzeyin oluşturulması, karşılık gelen birim dual kürenin bulunması problemine dönüşür. Minkowski uzay zaman geometrisinin zamanla gelişimi ile Study teoremi ile 3- boyutlu dual uzay ve timelike ya da spacelike doğrular kümesi arasında da birebir eşleşme ifade edildi. Böylece R_1^3 , 3 boyutlu Minkowski uzayındaki timelike yönelmiş doğrular ile 3- boyutlu Lorentz uzayında H_0^2 birim hiperbolik küre yüzeyi üzerindeki noktalar arasında da bir eşleşme var olduğu (Uğurlu ve Çalışkan, 1996) da gösterilmiş oldu (Kazaz ve ark. 2008).

Regle yüzeyler matematik alanının dışında mekanik, robotik ve diğer bazı endüstri alanlarında da tasarım amacıyla kullanılmaktadır. Bu sebeple, makine mühendisleri, bilgisayar bilimciler vb. alanlardaki bilim adamları bu yüzeyleri incelemişlerdir. Bunların bazıları bu yüzeylerin diferansiyel geometrik özelliklerini incelerken diğerleri de uygun bir gösterimini araştırmıştır.

Regle yüzeyler ve doğru kongrüansları ile ilgili olarak J. Hoschek (1973), bu yüzeyleri sınıflandırmak için bu yüzeylere ait integral invaryantları tanımlamıştır. Gürsoy (1979) çalışmada dual uzayda 1- parametrelili kapalı küresel eğriler için bir integral invaryant olan dual açılım açısını tanımlamıştır. Böylece bu kapalı eğriler üzerinde Holditch teoremi ve bu kapalı eğrilerin sınırladığı bölgenin alanının dual açılım açısı ile ilişkileri ve bu ilişkilerin reel büyüklüklerle karşılığı (Gürsoy 1990a, 1990b) ile (Abdel-Baky ve Hacısalihoğlu, 1998) de çalışılmıştır. (Eralp, 2009). Doğru kongrüansları ile daha spesifik çalışmaları Hacısalihoğlu (1983), Öztürk (2011), Taş (2016), Yılmaz A. (2018) vermişlerdir.

Bilgisayar destekli tasarımda önemli bir kavram olan Bezier eğrileriyle pek çok çalışma yapılmıştır. Örnek birkaç çalışmayı ifade etmek gerekirse, Samancı, Çelik ve İncesu (2015), Evren (2020), Samancı (2018), Farouki, Szafran ve Biard, (2009); Hoschek, (1992); İncesu ve Gursoy, (2004); İncesu, (2003); Juhász, (1999); Liu, ve Wang (2002); Piegl ve Tiller, (1999) Kılıçoğlu ve Şenyurt (2020) bunlardan bir kaçıdır.



3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1 Temel Tanım ve Teoremler

E^2 iki boyutlu Öklid uzayında $A = (a_1, a_2)$ ve $B = (b_1, b_2)$ olmak üzere toplama ve çarpma işlemleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\begin{aligned} +: E^2 \times E^2 &\rightarrow E^2 \\ (A, B) &\mapsto A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \\ \cdot: E^2 \times E^2 &\rightarrow E^2 \\ (A, B) &\mapsto A \cdot B = (a_1 b_1, a_1 b_2 + a_2 b_1) \end{aligned}$$

E^2 kümesi bu işlemler altında dual sayılar kümesi olarak tanımlanır ve $\mathbb{D}$ ile gösterilir. $A = (a, a^*) \in \mathbb{D}$ keyfi elemanı

$$A = a(1,0) + a^*(0,1)$$

Bişiminde yazılabilir. Burada $(1,0)$ elemanına reel birim, $(0,1)$ elemanına da dual birim denir ve dual birim ε ile gösterilir. Açıkça görülebilir ki $\varepsilon^2 = 0$ dır. Keyfi $(r, 0)$ elemanı $r \in R$ elemanına izomorftur. Böylece $A = (a, a^*)$ dual eleman $a, a^* \in R$ olmak üzere $A = a + \varepsilon a^*$ biçiminde gösterilebilir. Eğer $A = a + \varepsilon a^*$ dual sayısı verildiğinde a ve a^* sayılarına A nın sırasıyla reel ve dual kısmı diye adlandırılır. Bir $A = a + \varepsilon a^*$ dual sayısının eşleniği $\bar{A} = a - \varepsilon a^*$ sayısıdır.

$U_i \in \mathbb{D}$ olmak üzere Bir $\hat{U} = (U_1, U_2, U_3) \in \mathbb{D}^3$ vektörüne dual vektör denir.

$\hat{U} = U + \varepsilon U^*$ ve $\hat{V} = V + \varepsilon V^*$ dual vektörleri için iç çarpım

$$\langle \hat{U}, \hat{V} \rangle = \langle U, V \rangle + \varepsilon (\langle U^*, V \rangle + \langle U, V^* \rangle)$$

bişiminde tanımlanır buna göre ve reel kısmı sıfırdan farklı olan ($U \neq 0$) bir $\hat{U} = U + \varepsilon U^*$ dual vektörün normu da

$$\|\hat{U}\| = \sqrt{\langle \hat{U}, \hat{U} \rangle} = \sqrt{\langle U, U \rangle + 2\varepsilon \langle U, U^* \rangle} = \|U\| + \varepsilon \frac{\langle U, U^* \rangle}{\|U\|} = u + \varepsilon u^* \in D$$

bişimindedir. (Hacısalihoglu,1983).

Birim dual küre üzerindeki her bir $\tilde{U} = \dot{U} + \varepsilon \dot{U}^*$ ($U \neq 0$) vektörü R^3 de yönelmiş bir doğruya bire bir olarak karşılık gelmektedir. (Hacısalihoglu,1983)

Bu bölümdeki tanım ve teoremlerin bir çoğu (Yılmaz A.,2018) den alınmıştır.

3.1.1 Yüzey

Eğer $r_u \wedge r_v \neq 0$ olacak şekilde, $S \subset R^3$ kümesinin bir alt kümesi için

$$r: U \subset R^2 \rightarrow S \subset R^3$$

şeklinde tanımlanmış, diferansiyellenebilir ve birebir bir fonksiyon varsa bu fonksiyona S 'nin düzgün bir parametrizasyonu denir.

Ayrıca $r^{-1}: r(U) \rightarrow U$ fonksiyonu sürekli olduğunda ve $S \subset R^3$ kümesinin her noktasının, böyle bir düzgün parametrizasyonla örtülebilen bir komşuluğu varsa, S kümesine R^3 içinde bir yüzey adı verilir (Shifrin, 2011).

3.1.2 Yüzeyin Birim Normal Vektörü

Eğer S kümesi R^3 içinde bir yüzeyse ve $R = r(u_0, v_0) \in S$ olacak şekilde

$$r: U \subset R^2 \rightarrow S \subset R^3$$

şeklinde düzgün bir parametrizasyon tanımlıysa, bu durumda r_u ve r_v vektörleri, R noktasında yüzeye teğet olan $T_R(S)$ düzlemini oluşturur. Bu teğet düzleme dik olan ve aşağıda verilen vektör

$$U = \frac{r_u \wedge r_v}{\|r_u \wedge r_v\|}$$

birim vektördür ve bu vektöre yüzeyin birim normal vektörü adı verilir (Shifrin, 2011).

3.1.3 Darboux Çatısı

M düzgün bir yüzey ve $\alpha: I \subset R \rightarrow M$ düzgün parametrizasyonlu birim hızda bir eğri olsun. Eğrinin teğet vektör alanı $T = \alpha'(s)$ ile gösterilsin. Ayrıca U , M yüzeyinin birim normal vektörü olmak üzere,

$$\{T, U, B = T \wedge U\}$$

kümesi Darboux çerçevesi olarak tanımlanır. α eğrisi boyunca Darboux çatısı için türev formülleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix} T' \\ U' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_g & \kappa_n \\ -\kappa_g & 0 & \tau_g \\ -\kappa_n & -\tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ U \\ B \end{bmatrix}$$

Burada:

- κ_g : Geodezik eğrilik,
- κ_n : Normal eğrilik,
- τ_g : Geodezik burulma

İfadeleridir. Ayrıca, α eğrisinin geodezik eğriliği κ_g aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\kappa_g = \langle U \wedge T, T' \rangle$$

Özel Durumlar:

1. Eğri, yüzey üzerinde asimptotikse: $\kappa_n = 0$ olur.
2. Eğri, yüzey üzerinde geodezikse: $\kappa_g = 0$ olur.
3. Eğri, yüzeyin eğrilik çizgisi ise: $\tau_g = 0$ olur (O'Neill, 1996).

3.1.4 Doğrultman Vektörü

Parametrik doğrulardan oluşan bir aileyi içeren yüzeyler, regle yüzey olarak adlandırılır. Regle yüzeyler genel olarak şu şekilde ifade edilir:

$$X(s, v) = \sigma(s) + v \beta(s)$$

Burada, $\sigma(s)$ ifadesi yüzeyin dayanak eğrisini temsil ederken, $\beta(s)$ vektörü ise $\sigma(s)$ noktasındaki yüzeyin doğrultman vektörü olarak adlandırılır (Gray, 2006).

3.1.5 Özel Regle yüzeyler

$M \subset E^3$ bir yüzey ve $\sigma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E$ diferansiyellenebilir düzgün bir eğri olsun. Bu eğrinin Frenet çatısı $\{T_\sigma, N_\sigma, B_\sigma, k_\sigma, \tau_\sigma\}$ Buna göre:

1. Eğer regle yüzey aşağıdaki biçimde verilmişse

$$X(s, v) = \sigma(s) + v T_\sigma(s)$$

bu yüzeye M' ye teğet regle yüzey denir.

2. Eğer regle yüzey aşağıdaki şekilde tanımlanırsa

$$X(s, v) = \sigma(s) + v N_\sigma(s)$$

bu yüzeye M' ye normal yüzey adı verilir.

3. Eğer regle yüzeyin parametreleştirmesi

$$X(s, v) = \sigma(s) + v B_\sigma(s)$$

şeklinde yapılmışsa, bu durumda M' ye binormal yüzey denir.

4. Sabit bir $q \in E^3$ vektörü için, eğer regle yüzey

$$X(s, v) = \sigma(s) + v q$$

biçiminde ifade ediliyorsa bu yüzey M , silindirik yüzey olarak adlandırılır.

5. Sabit bir $p \in E^3$ noktası için, regle yüzey

$$X(s, v) = p + v\beta(s)$$

biçiminde ifade ediliyorsa bu yüzey M , koni yüzeyi olarak adlandırılır.

3.1.6 Boğaz Noktası

Bir regle yüzeyin $X(s, v)$ parametreleştirmesinde, ardışık iki doğrultmanın ortak dikmesinin esas doğrultu üzerindeki izdüşümüne boğaz (striksiyon) noktası adı verilir (Hacısalihioğlu, 2000).

3.1.7 Yüzeyin Boğaz Eğrisi

Bir regle yüzeyin $X(s, v)$ parametreleştirmesinde, ana doğru boyunca yüzeyin oluşumu sırasında boğaz noktalarının geometrik yerini gösteren eğriye yüzeyin boğaz eğrisi denir (Hacısalihioğlu, 2000).

$$\sigma(s) = \alpha(s) + v\beta(s) \quad (3.1.)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\alpha(s)$ dayanak eğrisinin yer vektörü, $\beta(s)$ ise doğrultu vektörüdür.

Şimdi $X(s, v)$ regle yüzeyinde $\sigma(s)$ ve $\sigma(s) + d\sigma(s)$ olmak üzere iki komşu noktayı ele alalım. Bu iki noktanın doğrultuları üzerinde ayakları olan P ve Q noktaları alınsın. P ve Q arasındaki ortak dikme PQ ile gösterilsin. Eğer PQ doğrusu, boğaz eğrisine teğet olursa, aşağıdaki koşul sağlanır:

$$\langle \beta'(s), PQ \rangle = 0, \quad \langle \beta(s) + \beta'(s) ds, PQ \rangle \geq 0$$

Bundan hareketle şu eşitlik elde edilir:

$$\langle \beta'(s), T_\sigma \rangle = 0, \quad \langle \beta(s), T_\sigma \rangle + \left\langle \beta'(s), \frac{d\alpha}{ds} \right\rangle = 0$$

Sonuç olarak, boğaz eğrisinin parametre değeri

$$v = -\frac{\langle T_\sigma, \beta'(s) \rangle}{\langle \beta'(s), \beta'(s) \rangle}$$

şeklinde bulunur. Bu değer (3.1.) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$\sigma(s) = \alpha(s) - \frac{\langle T_\sigma, \beta'(s) \rangle}{\langle \beta'(s), \beta'(s) \rangle} \beta(s)$$

elde edilir. Böylece boğaz eğrisinin parametrik ifadesi ortaya konmuş olur.

3.1.8 Doğru Kongrüansı

$$Y(u, v, w): U \times R \rightarrow E^3, \quad (u, v, w) \mapsto Y(u, v, w) = x(v, w) + ud(v, w)$$

dönüşümüyle tanımlanan E^3 uzayında elde edilen $Y(u, v, w)$ ailesine kongrüans adı verilir. Burada $Y(u, v, w)$ bir doğru ailesini belirtmektedir. Dolayısıyla, E^3 'te iki bağımsız parametreye bağlı doğru ailesi bir doğru kongrüansı olarak adlandırılır.

Bu durumda $x(v, w)$ kongrüanstaki doğruların kesiştiği **taban yüzeyini** $x(U)$ gösterir. Ayrıca

$$d: U \subset R^2 \rightarrow E^3$$

dönüşümü ile tanımlanan $d(v, w)$ kongrüansın ana doğrularının birim yön vektörlerinden oluşan bir aileyi temsil eder. Parametre u ise, taban yüzeyindeki $x(U)$ noktası ile doğru üzerindeki $Y(u, v, w)$ noktası arasındaki uzaklığı belirtir (Biran, 1970)

$Y(u, v, w)$ doğru kongrüansı için:

- i. Eğer $d(v, w)$ sabit bir vektör ise, $Y(u, v, w)$ doğru kongrüansını oluşturan doğrular paralel olur.
- ii. Eğer $d(v, w)$ sabit değilse, bu durumda $Y(u, v, w)$ doğru kongrüansındaki doğrular paralel değildir (Öztürk, 2011).

3.1.9 Kapalı Regle Yüzeyin Açılım Uzunluğu

$$Y(u, v, w): U \times R \rightarrow E^3, (u, v, w) \mapsto Y(u, v, w) = x(v, w) + ud(v, w)$$

dönüşümüyle verilen doğru kongrüansında, taban yüzeyi $x(U)$ 'nin birim normal vektörü $n(v, w)$ olmak üzere:

i) Eğer $\forall (v, w) \in U$ için $d(v, w) = n(v, w)$ ise $Y(u, v, w)$ kongrüansının ortogonal yörünge eğrisi, kongrüans eksen $n(v, w)$ 'yi dik kesen bir eğridir. Bu durumda, taban yüzeyi $x(U)$ üzerindeki kapalı bir $\varphi(v, w)$ eğrisi boyunca hesaplanan uzunluk, kapalı regle yüzeyin açılım uzunluğu

$$l = \int_{\varphi} \langle \varphi(v, w), n(v, w) \rangle$$

olarak tanımlanır.

ii) Eğer $\forall (v, w) \in U$ için $d(v, w) \neq n(v, w)$ için olursa, $Y(u, v, w)$ kongrüansının ortogonal yörünge eğrisi bu kez kongrüans eksen $n(v, w)$ 'yi dik keser. Aynı şekilde, taban yüzeyi $x(U)$ üzerindeki kapalı bir $\varphi(v, w)$ eğrisi boyunca elde edilen uzunluk yine kapalı regle yüzeyin açılım uzunluğunu verir ve şu şekilde tanımlanır:

$$\ell = \int_{\varphi} \langle \varphi(v, w), d(v, w) \rangle$$

(Öztürk, 2011).

3.1.10 Kapalı Regle Yüzeyin Açılım Açısı

$$Y(u, v, w): U \times R \rightarrow E^3, (u, v, w) \mapsto Y(u, v, w) = x(v, w) + ud(v, w)$$

dönüşümüyle verilen doğru kongrüansında, taban yüzeyi $x(U)$ 'nün birim normal vektörü $n(v, w)$ olmak üzere:

i) $\forall (v, w) \in U$ için $d(v, w) = n(v, w)$ olduğunda, $Y(u, v, w)$ kongrüansı taban yüzeyi $x(U)$ üzerinde tanımlanmış parametre eğrilerinden bir eğrilik doğrusu oluşturur. Bu durumda kongrüansın açılım açısı, taban yüzeyi $x(U)$ üzerinde tanımlı kapalı bir $\varphi(v, w)$ eğrisi boyunca elde edilen kapalı regle yüzeyin açılım açısıdır ve şu şekilde tanımlanır:

$$\rho = - \int_{\varphi} \det[\partial x, \partial^2 x, n]$$

ii) $\forall (v, w) \in U$ için $d(v, w) \neq n(v, w)$ olduğunda, $Y(u, v, w)$ kongrüansının açılım açısı, ana doğrularının birim yön vektörü $d(v, w)$ olan doğruların, kongrüansın eksenini boyunca bir periyot sonra ilk konumuna göre yaptığı açı olarak tanımlanır. Bu durumda açılım açısı:

$$\rho = - \int_{\varphi} \det[\partial x, \partial^2 x, d]$$

şeklinde ifade edilir (Öztürk, 2011).

3.1.11 Kongrüansın Boğaz Yüzeyi

$$Y(u, v, w): U \times R \rightarrow E^3, (u, v, w) \mapsto Y(u, v, w) = x(v, w) + ud(v, w)$$

şeklinde verilen, paralel olmayan bir doğru kongrüansında

$$\langle \partial \alpha(v, w), \partial d(v, w) \rangle = 0$$

koşulunu sağlayan bir $\alpha = (v, w)$ yüzeyi vardır. Bu durumda doğru kongrüansı yeniden parametrelenerek

$$Y(u, v, w) = \alpha(v, w) + ud(v, w)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\alpha(v, w)$ yüzeyine, $Y(u, v, w)$ kongrüansının boğaz yüzeyi adı verilir. Bu yüzey şu şekilde ifade edilir:

$$\alpha(v, w) = x(v, w) - \frac{\langle \partial x(v, w), \partial d(v, w) \rangle}{|d(v, w)|^2} d(v, w)$$

(Öztürk, 2011).

3.1.12 Doğru Kongrüansın Dağılma Parametrisi

$Y(u, v, w)$ taban yüzeyi boğaz yüzeyi olan, paralel olmayan bir doğru kongrüansı olsun. Bu doğru kongrüansının dağılma parametresi şu şekilde tanımlanır:

$$\rho(v, w) = \frac{\langle \partial \alpha(v, w) \wedge d(v, w), \partial d(v, w) \rangle}{|d(v, w)|^2} = \frac{\det(\partial \alpha(v, w), d(v, w), \partial d(v, w))}{|d(v, w)|^2}$$

(Öztürk, 2011).



4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI ve TARTIŞMA

Bu tezde genel formatı

$$X(t, v, w) = \alpha(t, v) + w\beta(t, v) \quad (1)$$

biçiminde verilen bir doğru kongrüansında dayanak yüzeyi $\alpha(t, v)$ ve doğrultman vektörü $\beta(t, v)$ nin özel durumları ile küresel dual eğrilerin özel hallerine ait doğru kongrüansları ele alınacaktır.

4.1 Dayanak Yüzeyi için Özel Koşullar

4.1.1. Dayanak Yüzeyi $\alpha(t, v)$ nin (n,m) tipli bir Bezier Yüzeyi Olması ve $\beta(t, v)$ nin de Bu Yüzeyin Normal Vektörü Olması Durumu

Bu durumda $\alpha(t, v)$ dayanak yüzeyi kontrol noktaları

$$\begin{bmatrix} P_{00} & \cdots & P_{n0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{0m} & \cdots & P_{nm} \end{bmatrix}$$

biçiminde verilen bir Bezier yüzeyi olsun. Buna göre

$$\alpha(t, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} \cdot B_i^n(t) B_j^m(v) \quad (2)$$

Olsun. Bu yüzeyin herhangi bir (t, v) noktasındaki normal vektörü de

$$\beta(t, v) = N(t, v) = \frac{\alpha_t(t, v) \times \alpha_v(t, v)}{\|\alpha_t(t, v) \times \alpha_v(t, v)\|} \quad (3)$$

olur. Bezier yüzeylerinde kısmi türev ifadeleri dikkate alındığında (3) ifadesi

$$\beta(t, v) = \frac{[\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m P_{ij}^{(1,0)} \cdot B_i^{n-1}(t) B_j^m(v)] \times [\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} P_{ij}^{(0,1)} B_i^n(t) B_j^{m-1}(v)]}{\|[\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m P_{ij}^{(1,0)} \cdot B_i^{n-1}(t) B_j^m(v)] \times [\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} P_{ij}^{(0,1)} B_i^n(t) B_j^{m-1}(v)]\|} \quad (4)$$

olur. Buna göre (1) kongrüansı için şu teorem verilebilir:

Teorem 4.1: $\alpha(t, v)$ dayanak yüzeyi kontrol noktaları $\{P_{00}, \dots, P_{n0}, \dots, P_{0m}, \dots, P_{nm}\}$ biçiminde verilen bir Bezier yüzeyi ve $\beta(t, v)$ doğrultmanı da bu yüzeyin normal vektörü olan bir doğru kongrüansı verilsin. Yani (2) ve (4) sağlayan (1) kongrüansı verilsin. Buna göre

- a) $t = 0, v = 0$ için $X(0,0,w) = P_{00} + w \frac{\Delta^i P_{00} \times \Delta^j P_{00}}{\|\Delta^i P_{00} \times \Delta^j P_{00}\|}$
- b) $t = 0, v = 1$ için $X(0,1,w) = P_{0m} + w \frac{\Delta^i P_{00} \times \Delta^j P_{0(m-1)}}{\|\Delta^i P_{00} \times \Delta^j P_{0(m-1)}\|}$
- c) $t = 1, v = 0$ için $X(1,0,w) = P_{n0} + w \frac{\Delta^i P_{(n-1)0} \times \Delta^j P_{00}}{\|\Delta^i P_{(n-1)0} \times \Delta^j P_{00}\|}$
- d) $t = 1, v = 1$ için $X(1,1,w) = P_{nm} + w \frac{\Delta^i P_{(n-1)m} \times \Delta^j P_{n(m-1)}}{\|\Delta^i P_{(n-1)m} \times \Delta^j P_{n(m-1)}\|}$

dir. Burada $\Delta^i P_{ij} = P_{(i+1)j} - P_{ij}$ ve $\Delta^j P_{ij} = P_{i(j+1)} - P_{ij}$ dir.

İspat: Bezier yüzeylerinde son nokta interpolasyon ve son nokta teğet özellikleri dikkate alınarak kolayca bulunacaktır. İlgili özellikler için (İncesu, 2003) incelenebilir.

4.1.2 Dayanak Yüzeyi (n,m) tipli bir Bezier Yüzeyi Olan Doğru Kongrüansında De Casteljau Algoritması

Kontrol noktaları $\{P_{ij}\}$ $i = 0, \dots, n$, $j = 0, \dots, m$ olan bir Bezier yüzeyi verilsin. Yüzeyin herhangi bir (t_0, v_0) noktasındaki değerini, yüzey üzerindeki koordinat eğrilerini bulmak ya da bu eğrilerin yüzeyi ayırdığı alt yüzeyleri elde edebilmek için yüzeyin kontrol noktalarına de Casteljau algoritması uygulanır. $t_0, v_0 \in [0,1]$ olsun. Önce $t_0 \in [0,1]$ için $\alpha(t_0, v)$ koordinat eğrisini ve bu eğrinin yüzeyi ayırdığı iki ayrı Bezier yüzeyini bulalım. Bunun için her bir j değerine karşılık gelen kontrol noktalarına ayrı ayrı de Casteljau algoritması uygulanır. $j = 0$ için kontrol noktaları $\{P_{00}, P_{10}, P_{20}, \dots, P_{n0}\}$ dir. Bu m noktalar ve diğer j değerlerine karşılık gelen noktalara algoritmayı uygularsak,

$$j = 0 \rightarrow \begin{array}{ccccccc} & P_{00}^0 & P_{10}^0 & \dots & \dots & P_{n0}^0 \\ & P_{00}^1 & P_{10}^1 & \dots & P_{(n-1)0}^1 & & \\ & \vdots & \vdots & & & & \\ & P_{00}^n & & & & & \end{array}$$

benzer şekilde

$$j = 1 \rightarrow \begin{array}{ccccccc} & P_{01}^0 & P_{11}^0 & \dots & \dots & P_{n1}^0 \\ & P_{01}^1 & P_{11}^1 & \dots & P_{(n-1)1}^1 & & \\ & \vdots & \vdots & & & & \\ & P_{01}^n & & & & & \end{array},$$

...

$$j = m \rightarrow \begin{matrix} P_{0m}^0 & P_{1m}^0 & \dots & \dots & P_{nm}^0 \\ P_{0m}^1 & P_{1m}^1 & \dots & P_{(n-1)m}^1 & \\ \vdots & \vdots & & & \\ P_{0m}^n & & & & \end{matrix},$$

Bulunur. Burada uygulanacak olan algoritma

$$P_{ij}^k = {}^tP_{ij}^k = (1 - t_0)P_{ij}^{k-1} + t_0P_{i(j+1)}^{k-1} \quad (5)$$

dır ve $P_{ij}^0 = P_{ij}$ dir.

Bu algoritma ile $\alpha(t, v)$ Bezier yüzeyi üzerinde $t = t_0$ sabit tutulup v boyunca alınacak $\alpha(t_0, v)$ eğrisi yine bir Bezier eğrisidir. Bu eğrinin kontrol noktaları

$$\{ {}^tP_{00}^n, {}^tP_{01}^n, {}^tP_{02}^n, \dots, {}^tP_{0m}^n \}$$

dir. Açıkta ki de Casteljau algoritması ile $\alpha(t_0, v)$ koordinat eğrisi, $\alpha(t, v)$ Bezier yüzeyini iki ayrı Bezier yüzeyine ayıracaktır. Bu Bezier yüzeylerinin kontrol noktaları yukarıdaki algoritmada I yönündeki noktalar birinci yüzeyini; II yönündeki noktalar da ikinci Bezier yüzeyini oluşturacaktır. (şekil 1) Buna göre elde edilecek Bezier yüzeylerinin kontrol noktaları

$$\text{I yüzeyi:} \quad \begin{matrix} P_{00}^0 & P_{00}^1 & \dots & P_{00}^n \\ P_{01}^0 & P_{01}^1 & \dots & P_{01}^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{0m}^0 & P_{0m}^1 & \dots & P_{0m}^n \end{matrix}$$

Ve

$$\text{II yüzeyi:} \quad \begin{matrix} P_{00}^n & P_{10}^{n-1} & \dots & P_{n0}^0 \\ P_{01}^n & P_{11}^{n-1} & \dots & P_{n1}^0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{0m}^n & P_{1m}^{n-1} & \dots & P_{nm}^0 \end{matrix}$$

olur. Şimdi her iki yüzeye de v_0 noktasında tekrar bir de Casteljau algoritması uygularsak bu defa dört ayrı Bezier yüzeyi elde edilecektir. Her bir i değeri için bu algoritmayı uygulayalım:

I yüzeyi için:

$$\begin{array}{c}
 i = 0 \rightarrow \begin{array}{ccccccc}
 (P_{00}^0)^0 & (P_{01}^0)^0 & \cdots & \cdots & (P_{0m}^0)^0 \\
 (P_{00}^0)^1 & (P_{01}^0)^1 & \cdots & (P_{0(m-1)}^0)^1 \\
 \vdots & \vdots & & & \\
 (P_{00}^0)^m & = v_{P_{00}^{0,m}} & & &
 \end{array}
 \end{array}$$

1 2

benzer şekilde

$$\begin{array}{c}
 i = 1 \rightarrow \begin{array}{ccccccc}
 (P_{00}^1)^0 & (P_{01}^1)^0 & \cdots & \cdots & (P_{0m}^1)^0 \\
 (P_{00}^1)^1 & (P_{01}^1)^1 & \cdots & (P_{0(m-1)}^1)^1 \\
 \vdots & \vdots & & & \\
 (P_{00}^1)^m & = v_{P_{00}^{1,m}} & & &
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 i = n \rightarrow \begin{array}{ccccccc}
 (P_{00}^n)^0 & (P_{01}^n)^0 & \cdots & \cdots & (P_{0m}^n)^0 \\
 (P_{00}^n)^1 & (P_{01}^n)^1 & \cdots & (P_{0(m-1)}^n)^1 \\
 \vdots & \vdots & & & \\
 (P_{00}^n)^m & = v_{P_{00}^{n,m}} & & &
 \end{array}
 \end{array}$$

II yüzeyi için:

$$\begin{array}{c}
 i = 0 \rightarrow \begin{array}{ccccccc}
 (P_{00}^n)^0 & (P_{01}^n)^0 & \cdots & \cdots & (P_{0m}^n)^0 \\
 (P_{00}^n)^1 & (P_{01}^n)^1 & \cdots & (P_{0(m-1)}^n)^1 \\
 \vdots & \vdots & & & \\
 (P_{00}^n)^m & = v_{P_{00}^{n,m}} & & &
 \end{array}
 \end{array}$$

benzer şekilde

$$\begin{array}{c}
 i = 1 \rightarrow \begin{array}{ccccccc}
 (P_{10}^{n-1})^0 & (P_{11}^{n-1})^0 & \cdots & \cdots & (P_{1m}^{n-1})^0 \\
 (P_{10}^{n-1})^1 & (P_{11}^{n-1})^1 & \cdots & (P_{1(m-1)}^{n-1})^1 \\
 \vdots & \vdots & & & \\
 (P_{10}^{n-1})^m & = v_{P_{10}^{(n-1),m}} & & &
 \end{array}
 \end{array}$$

:

$$i = n \rightarrow \begin{array}{ccccccc} (P_{n0}^0)^0 & (P_{n1}^0)^0 & \cdots & \cdots & (P_{nm}^0)^0 \\ (P_{n0}^0)^1 & (P_{n1}^0)^1 & \cdots & (P_{n(m-1)}^0)^1 \\ \vdots & \vdots & & & \\ (P_{n0}^0)^m & = & v_{P_{n0}}^{0,m} \end{array}$$

Burada da yine 1 ve 2 yönündeki noktaları ayırırsak, bunlar sırasıyla I_1 , I_2 , II_1 ve II_2 Bezier yüzeylerinin kontrol noktaları olacaktır. $(P_{ij}^k)^u$ ifadesini $v_{P_{ij}}^{k,u}$ biçiminde gösterirsek, bu dört alt Bezier yüzeylerinin kontrol noktaları

$$\begin{array}{ll} I_1 \text{ yüzeyi:} & \begin{array}{ccc} v_{P_{00}}^{0,0} & v_{P_{00}}^{1,0} & v_{P_{00}}^{n,0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{P_{00}}^{0,m} & v_{P_{00}}^{1,m} & v_{P_{00}}^{n,m} \end{array} \\ I_2 \text{ yüzeyi:} & \begin{array}{ccc} v_{P_{00}}^{0,m} & v_{P_{00}}^{1,m} & v_{P_{00}}^{n,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{P_{0m}}^{0,0} & v_{P_{0m}}^{1,0} & v_{P_{0m}}^{n,0} \end{array} \\ II_1 \text{ yüzeyi:} & \begin{array}{ccc} v_{P_{00}}^{n,0} & v_{P_{10}}^{n-1,0} & v_{P_{n0}}^{0,0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{P_{00}}^{n,m} & v_{P_{10}}^{n-1,m} & v_{P_{n0}}^{0,m} \end{array} \end{array}$$

ve

$$II_2 \text{ yüzeyi:} \begin{array}{ccc} v_{P_{00}}^{n,m} & v_{P_{10}}^{n-1,m} & v_{P_{n0}}^{0,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{P_{0m}}^{n,0} & v_{P_{10}}^{n-1,0} & v_{P_{nm}}^{0,0} \end{array}$$

Olur. Buradaki algoritma da

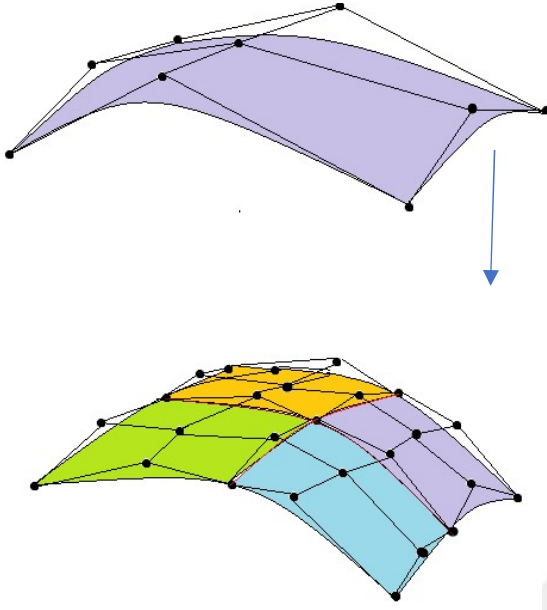
$$v_{P_{ij}}^{k,u} = (P_{ij}^k)^u = v_{P_{ij}}^{k,u-1}(1 - v_0) + v_{P_{i(j+1)}}^{k,u-1}(v_0) \quad (6)$$

dır ve $v_{P_{ij}}^{k,0}$ ifadesi de (5) teki gibi $v_{P_{ij}}^{k,0} = {}^tP_{ij}^k = P_{ij}^k$ dir. Açıktır ki $\alpha(t_0, v_0)$ noktası bu algoritmaya göre

$$\alpha(t_0, v_0) = v_{P_{00}}^{n,m} \quad (7)$$

dir.

Buna göre aşağıdaki teorem verilebilir:



Şekil 4.1 Bezier yüzeyinde Subdivision

Teorem 4.2: $\alpha(t, v)$ dayanak yüzeyi, kontrol noktaları

$$\begin{bmatrix} P_{00} & \cdots & P_{n0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{0m} & \cdots & P_{nm} \end{bmatrix}$$

biçiminde verilen bir Bezier yüzeyi ve $\beta(t, v)$ doğrultmanı da bu yüzeyin normal vektörü olan bir doğru kongrüansı verilsin. Yani (2) ve (4) sağlayan (1) kongrüansı verilsin. Buna göre $t_0, v_0 \in [0,1]$ için doğru kongrüansı

$$X(t_0, v_0, w) = {}^v P_{00}^{n,m} + w \frac{\Delta^i {}^v P_{00}^{n,m} \times \Delta^j {}^v P_{00}^{n,m}}{\|\Delta^i {}^v P_{00}^{n,m} \times \Delta^j {}^v P_{00}^{n,m}\|}$$

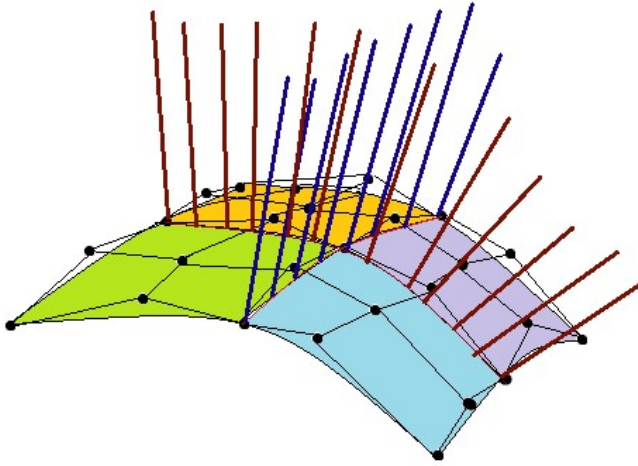
dir. Burada

$$\Delta^i {}^v P_{00}^{n,m} = {}^v P_{10}^{n-1,m} - {}^v P_{00}^{n,m} \text{ ve } \Delta^j {}^v P_{00}^{n,m} = {}^v P_{01}^{n,m-1} - {}^v P_{00}^{n,m} \text{ biçimindedir.}$$

4.1.3 Dayanak Yüzeyi (n,m) tipli bir Bezier Yüzeyi Olan Doğru Kongrüansında Koordinat Regle Yüzeyler

$$X(t, v, w) = \alpha(t, v) + w\beta(t, v)$$

biçiminde verilen bir doğru kongrüansında dayanak yüzeyi $\alpha(t, v)$, kontrol noktaları $\{P_{ij}\}$ $i = 0, \dots, n$, $j = 0, \dots, m$ olan bir Bezier yüzeyi ve doğrultmanı da . Yüzeyin normali olan doğru kongrüansı göz önüne alınsın. $t_0, v_0 \in [0,1]$ olmak üzere $\alpha(t_0, v)$ ve $\alpha(t, v_0)$ eğrileri dayanak yüzeyi üzerinde alınan koordinat eğrileridir. $\alpha(t, v)$ yüzeyi Bezier yüzeyi olduğundan bu koordinat eğrileri de birer Bezier eğrisidir. Buna göre $X(t_0, v, w)$ ve $X(t, v_0, w)$ regle yüzeyleri de koordinat regle yüzeyleridir.



Şekil 4.2 Dayanak yüzeyi Bezier yüzeyi olan doğru kongrüansında koordinat regle yüzeyler

$\alpha(t_0, v)$ ve $\alpha(t, v_0)$ koordinat eğrilerinin kontrol noktaları sırasıyla,

$$\{ {}^tP_{00}^n, {}^tP_{01}^n, {}^tP_{02}^n, \dots, {}^tP_{0m}^n \}$$

ve

$$\{ {}^vP_{00}^m, {}^vP_{10}^m, {}^vP_{20}^m, \dots, {}^vP_{n0}^m \}$$

dir. Burada ${}^tP_{ij}^n$ ve ${}^vP_{ij}^m$ noktaları de Casteljau algoritması ile elde edilen noktalardır.

Bu algaritmaya göre

$${}^tP_{ij}^n = (1 - t_0){}^tP_{ij}^{n-1} + t_0{}^tP_{i(j+1)}^{n-1}$$

ve

$${}^v P_{ij}^m = (1 - v_0)P_{ij}^{n-1} + v_0 P_{(i+1)j}^{n-1}$$

dır.

Doğru kongrüansının dayanak yüzeyi üzerindeki koordinat eğrileri tercih edildiğinde kongrüansın doğrultmanı olan yüzeye ait normal vektörü de koordinat eğrisinin Frenet çatısındaki normal vektörü konumunda olacaktır. O halde α bir koordinat eğrisi ve β da o eğrinin normali ise elde edilecek regle yüzeyler

$$X(t_0, v, w) = \alpha(v) + w\beta(v) \quad \text{ve} \quad X(t, v_0, w) = \alpha(t) + w\beta(t)$$

Olur. Her iki durumda da $\|\alpha'\| = r$ olmak üzere $\beta = N$ olduğundan ve

$\langle \alpha', \beta' \rangle = \langle rT, -r\kappa T + r\tau B \rangle = -r^2\kappa$ olacağından α koordinat eğrilerinin aynı zamanda regle yüzeyin striksiyon eğrisi olmadığı görülür. Bu nedenle bu verilen koordinat eğrileri yardımıyla bir striksiyon eğrisi bulabiliriz. Bunun için eğrinin Frenet çatı ve türev formullerinden

$$\sigma = \alpha - \frac{\langle \alpha', \beta' \rangle}{\|\beta'\|^2} \beta$$

yani

$$\sigma = \alpha + \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} N \quad (8)$$

elde edilir.

Kontrol noktaları $\{b_0, \dots, b_n\}$ olan bir $B(t)$ Bezier eğrisinde ($t \in [0,1]$) son nokta teğet özelliğine göre $B(0) = b_0$ ve $B(1) = b_n$ dir. Son nokta teğet özelliklerine göre de $B'(0) = n\Delta b_0$ ve $B'(1) = n\Delta b_{n-1}$ dir. Burada $\Delta b_i = b_{i+1} - b_i$ dir. Bu özelliklere göre birim normal vektör $N(0) = \frac{\Delta b_1}{\|\Delta b_1\|} \csc \varphi - \frac{\Delta b_0}{\|\Delta b_0\|} \cot \varphi$ dir. Burada φ açısı Δb_0 ile Δb_1 arasındaki açıdır. Benzer şekilde $N(1) = \frac{\Delta b_{n-1}}{\|\Delta b_{n-1}\|} \cot \psi - \frac{\Delta b_{n-2}}{\|\Delta b_{n-2}\|} \csc \psi$ dir. Burada da ψ açısı Δb_{n-1} ile Δb_{n-2} arasındaki açıdır. (Samancı, Çelik, İncesu, 2015)

Eğrilikler ise $\kappa(0) = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|}{\|\Delta b_0\|^3}$ ve $\tau(0) = \frac{n-2}{n} \frac{\det(\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2)}{\|\Delta b_0 \times \Delta b_1\|^2}$ dir. Benzer

şekilde $\kappa(1) = \frac{n-1}{n} \frac{\|\Delta b_{n-1} \times \Delta b_{n-2}\|}{\|\Delta b_{n-1}\|^3}$ ve $\tau(1) = -\frac{n-2}{n} \frac{\det(\Delta b_{n-1}, \Delta b_{n-2}, \Delta b_{n-3})}{\|\Delta b_{n-1} \times \Delta b_{n-2}\|^2}$ dir.
(Samancı, Çelik, İncesu, 2015)

Şimdi yukarıdaki α koordinat eğrisinin t yada v ye bağlı olmasına göre son nokta teğet ve son nokta interpolasyon özellikleri kullanılarak aşağıdaki özellikler ifade edilebilir.

Teorem 4.3: $X(t, v, w) = \alpha(t, v) + w\beta(t, v)$ doğru kongrüansının dayanak yüzeyi, kontrol noktaları $\{P_{ij}\}$ $i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, m$ olan bir Bezier yüzeyi olsun. $t_0, v_0 \in [0,1]$ olmak üzere bu yüzey üzerinde alınan $\alpha(t_0, v)$ ve $\alpha(t, v_0)$ koordinat eğrilerinin ve kongrüansın doğrultman vektörünün bu eğrilere göre ifadesi olan $N(v)$ ve $N(t)$ vektörleri olmak üzere sırasıyla $X(t_0, v, w) = \alpha(v) + wN(v)$ ve $X(t, v_0, w) = \alpha(t) + wN(t)$ koordinat regle yüzeyleri için striksiyon eğrileri $\sigma(v)$ ve $\sigma(t)$ olmak üzere;

$$a) \sigma(v = 0) = {}^tP_{00}^n + \frac{m(m-1)\|\Delta^j {}^tP_{00}^n\|^3 \|\Delta^j {}^tP_{00}^n \times \Delta^j {}^tP_{01}^n\|^3 \left[\frac{\Delta^j {}^tP_{01}^n}{\|\Delta^j {}^tP_{01}^n\|} \csc \varphi - \frac{\Delta^j {}^tP_{00}^n}{\|\Delta^j {}^tP_{00}^n\|} \cot \varphi \right]}{(m-1)^2 \|\Delta^j {}^tP_{00}^n \times \Delta^j {}^tP_{01}^n\|^4 + (m-2)^2 \|\Delta^j {}^tP_{00}^n\|^6 \|\Delta^j {}^tP_{02}^n\|^2 \cos^2 \phi}$$

dir. Burada $\Delta^j {}^tP_{ij}^n = {}^tP_{i(j+1)}^n - {}^tP_{ij}^n$ ve φ açısı $\Delta^j {}^tP_{00}^n$ ile $\Delta^j {}^tP_{01}^n$ arasındaki açı; ϕ açısı da $\Delta^j {}^tP_{00}^n \times \Delta^j {}^tP_{01}^n$ ile $\Delta^j {}^tP_{02}^n$ arasındaki açıdır.

$$b) \sigma(v = 1) = {}^tP_{0m}^n +$$

$$\frac{m(m-1)\|\Delta^j {}^tP_{0(m-1)}^n\|^3 \|\Delta^j {}^tP_{0(m-1)}^n \times \Delta^j {}^tP_{0(m-2)}^n\|^3 \left[\frac{\Delta^j {}^tP_{0(m-1)}^n}{\|\Delta^j {}^tP_{0(m-1)}^n\|} \cot \varphi - \frac{\Delta^j {}^tP_{0(m-2)}^n}{\|\Delta^j {}^tP_{0(m-2)}^n\|} \csc \varphi \right]}{(m-1)^2 \|\Delta^j {}^tP_{0(m-1)}^n \times \Delta^j {}^tP_{0(m-2)}^n\|^4 + (m-2)^2 \|\Delta^j {}^tP_{0(m-1)}^n\|^6 \|\Delta^j {}^tP_{0(m-3)}^n\|^2 \cos^2 \phi}$$

dir. Burada $\Delta^j {}^tP_{ij}^n = {}^tP_{i(j+1)}^n - {}^tP_{ij}^n$ ve φ açısı $\Delta^j {}^tP_{0(m-1)}^n$ ile $\Delta^j {}^tP_{0(m-2)}^n$ arasındaki açı; ϕ açısı da $\Delta^j {}^tP_{0(m-1)}^n \times \Delta^j {}^tP_{0(m-2)}^n$ ile $\Delta^j {}^tP_{0(m-3)}^n$ arasındaki açıdır.

$$c) \sigma(t = 0) = {}^vP_{00}^m + \frac{n(n-1)\|\Delta^i {}^vP_{00}^m\|^3 \|\Delta^i {}^vP_{00}^m \times \Delta^i {}^vP_{10}^m\|^3 \left[\frac{\Delta^i {}^vP_{10}^m}{\|\Delta^i {}^vP_{10}^m\|} \csc \varphi - \frac{\Delta^i {}^vP_{00}^m}{\|\Delta^i {}^vP_{00}^m\|} \cot \varphi \right]}{(n-1)^2 \|\Delta^i {}^vP_{00}^m \times \Delta^i {}^vP_{10}^m\|^4 + (n-2)^2 \|\Delta^i {}^vP_{00}^m\|^6 \|\Delta^i {}^vP_{20}^m\|^2 \cos^2 \phi}$$

dir. Burada $\Delta^i {}^vP_{ij}^m = {}^vP_{(i+1)j}^m - {}^vP_{ij}^m$ ve φ açısı $\Delta^i {}^vP_{00}^m$ ile $\Delta^i {}^vP_{10}^m$ arasındaki açı; ϕ açısı da $\Delta^i {}^vP_{00}^m \times \Delta^i {}^vP_{10}^m$ ile $\Delta^i {}^vP_{20}^m$ arasındaki açıdır.

$$d) \sigma(t = 1) = {}^tP_{0m}^n +$$

$$\frac{n(n-1)\|\Delta^i v P_{(n-1)0}^m\|^3 \|\Delta^i v P_{(n-1)0}^m \times \Delta^i v P_{(n-2)0}^m\|^3 \left[\frac{\Delta^i v P_{(n-1)0}^m}{\|\Delta^i v P_{(n-1)0}^m\|} \cot \varphi - \frac{\Delta^i v P_{(n-2)0}^m}{\|\Delta^i v P_{(n-2)0}^m\|} \operatorname{csct} \varphi \right]}{(n-1)^2 \|\Delta^i v P_{(n-1)0}^m \times \Delta^i v P_{(n-2)0}^m\|^4 + (n-2)^2 \|\Delta^i v P_{(n-1)0}^m\|^6 \|\Delta^i v P_{(n-3)0}^m\|^2 \cos^2 \phi}$$

dır. Burada $\Delta^i v P_{ij}^m = v P_{(i+1)j}^m - v P_{ij}^m$ ve φ açısı $\Delta^i v P_{(n-1)0}^m$ ile $\Delta^i v P_{(n-2)0}^m$ arasındaki açı; ϕ açısı da $\Delta^i v P_{(n-1)0}^m \times \Delta^i v P_{(n-2)0}^m$ ile $\Delta^i v P_{(n-3)0}^m$ arasındaki açıdır.

Striksiyon eğrisinin (8) ifadesi ve doğru kongrüansının koordinat regle yüzeyine ait dağılma parametresi ifadesi dikkate alındığında Frenet formüllerinden

$$\rho = \frac{\det(\beta(t), \beta'(t), \sigma'(t))}{\|\beta'(t)\|^2} = \frac{\det(N, N', [\alpha + \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2} N]')}{\|N'\|^2} = \frac{\tau}{(\kappa^2 + \tau^2)}$$

olur. Yine son nokta teğet ve son nokta interpolasyon özellikleri kullanılarak aşağıdaki özellikler ifade edilebilir.

Teorem 4.4: $X(t, v, w) = \alpha(t, v) + w\beta(t, v)$ doğru kongrüansının dayanak yüzeyi, kontrol noktaları $\{P_{ij}\}$ $i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, m$ olan bir Bezier yüzeyi olsun. $t_0, v_0 \in [0, 1]$ olmak üzere bu yüzey üzerinde alınan $\alpha(t_0, v)$ ve $\alpha(t, v_0)$ koordinat eğrilerinin ve kongrüansın doğrultman vektörünün bu eğrilere göre ifadesi olan $N(v)$ ve $N(t)$ vektörleri olmak üzere sırasıyla $X(t_0, v, w) = \alpha(v) + wN(v)$ ve $X(t, v_0, w) = \alpha(t) + wN(t)$ koordinat regle yüzeyleri için dağılma parametreleri

$$a) \quad \rho(v = 0) = \frac{m(m-1)\|\Delta^j t P_{00}^n\|^3 \|\Delta^j t P_{01}^n\|^2 \|\Delta^j t P_{02}^n\| \cos \phi \sin \varphi}{(m-1)^2 \|\Delta^j t P_{01}^n\|^5 \sin^6 \varphi + (m-2)^2 \|\Delta^j t P_{00}^n\| \|\Delta^j t P_{02}^n\| \cos \phi \cos \varphi}$$

dir. Burada $\Delta^j t P_{ij}^n = t P_{i(j+1)}^n - t P_{ij}^n$ ve φ açısı $\Delta^j t P_{00}^n$ ile $\Delta^j t P_{01}^n$ arasındaki açı; ϕ açısı da $\Delta^j t P_{00}^n \times \Delta^j t P_{01}^n$ ile $\Delta^j t P_{02}^n$ arasındaki açıdır.

$$b) \quad \rho(v = 1) = \frac{-m(m-1)\|\Delta^j t P_{0(m-1)}^n\|^3 \|\Delta^j t P_{0(m-2)}^n\|^2 \|\Delta^j t P_{0(m-3)}^n\| \cos \phi \sin \varphi}{(m-1)^2 \|\Delta^j t P_{0(m-2)}^n\|^5 \sin^6 \varphi + (m-2)^2 \|\Delta^j t P_{0(m-1)}^n\| \|\Delta^j t P_{0(m-3)}^n\| \cos \phi \cos \varphi}$$

dır. Burada $\Delta^j t P_{ij}^n = t P_{i(j+1)}^n - t P_{ij}^n$ ve φ açısı $\Delta^j t P_{0(m-1)}^n$ ile $\Delta^j t P_{0(m-2)}^n$ arasındaki açı; ϕ açısı da $\Delta^j t P_{0(m-1)}^n \times \Delta^j t P_{0(m-2)}^n$ ile $\Delta^j t P_{0(m-3)}^n$ arasındaki açıdır.

$$c) \quad \rho(t = 0) = \frac{n(n-1)\|\Delta^i v P_{00}^m\|^3 \|\Delta^i v P_{10}^m\|^2 \|\Delta^i v P_{20}^m\| \cos \phi \sin \varphi}{(n-1)^2 \|\Delta^i v P_{10}^m\|^5 \sin^6 \varphi + (n-2)^2 \|\Delta^i v P_{00}^m\| \|\Delta^i v P_{20}^m\| \cos \phi \cos \varphi}$$

dır. Burada $\Delta^i v P_{ij}^m = v P_{(i+1)j}^m - v P_{ij}^m$ ve φ açısı $\Delta^i v P_{00}^m$ ile $\Delta^i v P_{10}^m$ arasındaki açı; ϕ açısı da $\Delta^i v P_{00}^m \times \Delta^i v P_{10}^m$ ile $\Delta^i v P_{20}^m$ arasındaki açıdır.

$$d) \rho(t=1) = \frac{-n(n-1) \|\Delta^i v P_{(n-1)0}^m\|^3 \|\Delta^i v P_{(n-2)0}^m\|^2 \|\Delta^i v P_{(n-3)0}^m\| \cos \phi \sin \varphi}{(n-1)^2 \|\Delta^i v P_{(n-2)0}^m\|^5 \sin^6 \varphi + (n-2)^2 \|\Delta^i v P_{(n-1)0}^m\| \|\Delta^i v P_{(n-3)0}^m\| \cos \phi \cos \varphi}$$

dır. Burada $\Delta^i v P_{ij}^m = v P_{(i+1)j}^m - v P_{ij}^m$ ve φ açısı $\Delta^i v P_{(n-1)0}^m$ ile $\Delta^i v P_{(n-2)0}^m$ arasındaki açı; ϕ açısı da $\Delta^i v P_{(n-1)0}^m \times \Delta^i v P_{(n-2)0}^m$ ile $\Delta^i v P_{(n-3)0}^m$ arasındaki açıdır.

4.2 Dual Küresel Eğriler ve Karşılık Gelen Doğru Kongrüansları

$\hat{\phi}: D \rightarrow \mathcal{D}^3$ Olarak tanımlanan bir $\hat{\phi}(t + \epsilon t^*)$ dual eğrisinin taylor açılımları dikkate alınarak elde edilecek ifadesi

$$\hat{\phi}(\hat{t}) = \hat{\phi}(t + \epsilon t^*) = \phi(t) + \epsilon(\phi^*(t) + t^* \phi'(t)) \quad (9)$$

yazılabilir. Burada $\phi(t)$ ve $\phi^*(t)$ eğrileri $\hat{\phi}(t + \epsilon t^*)$ dual eğrisinin $t^* = 0$ anındaki konum eğrisinin reel ve dual kısımlarını ifade eder. Yani

$$\hat{\phi}'(t + \epsilon t^*)|_{t^*=0} = \phi(t) + \epsilon \phi^*(t)$$

dir.

Örnek olarak

$$\hat{\phi}(\hat{t}) = (a_0 + \epsilon a_0^*) + (a_1 + \epsilon a_1^*)(t + \epsilon t^*) + (a_2 + \epsilon a_2^*)(t + \epsilon t^*)^2$$

biçiminde ikinci dereceden dual polinom eğrisi olsun. Bu eğri

$$\hat{\phi}(\hat{t}) = (a_0 + a_1 t + a_2 t^2) + \epsilon[(a_0^* + a_1^* t + a_2^* t^2) + t^* (a_1 + 2a_2 t)]$$

biçiminde yazıldığında

$$\phi(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

$$\phi^*(t) = a_0^* + a_1^* t + a_2^* t^2$$

dir. Benzer şekilde (9) ile verilen $\hat{\phi}(\hat{t})$ nin türev ifadesi de

$$\hat{\phi}'(\hat{t}) = \hat{\phi}'(t + \epsilon t^*) = \phi'(t) + \epsilon(\phi^{*'}(t) + t^* \phi''(t)) \quad (10)$$

dır. (Aydın, 2025) Buna göre bir dual değişkenli eğrinin birim dual küre üzerine izdüşüm eğrisi ise

$$\tilde{\phi}(\hat{t}) = \frac{\hat{\phi}(\hat{t})}{\|\hat{\phi}(\hat{t})\|} = \frac{\phi(t)}{\|\phi(t)\|} + \epsilon \left(\frac{\phi^*(t) + t^* \phi'(t)}{\|\phi(t)\|} - \frac{\langle \phi(t), \phi^*(t) + t^* \phi'(t) \rangle}{\|\phi(t)\|^3} \phi(t) \right) \quad (11)$$

biçimindedir. Bu eğrinin reel ve dual kısımları

$$U(t, t^*) = \frac{\phi(t)}{\|\phi(t)\|} \quad \text{ve} \quad U^*(t, t^*) = \frac{\phi^*(t) + t^* \phi'(t)}{\|\phi(t)\|} - \frac{\langle \phi(t), \phi^*(t) + t^* \phi'(t) \rangle}{\|\phi(t)\|^3} \phi(t) \quad (12)$$

dir. Kinematikte temel teoremlerden biri olan E Study teoremine göre birim dual küre üzerindeki her bir nokta reel uzayda bir yönlendirilmiş doğruya karşılık geldiğinden (11) ile verilen birim dual küresel eğrisi de reel de bir doğru kongrüansına karşılık gelir. Buna göre bu eğrinin karşılık geldiği doğru kongrüansının dayanak yüzeyi ve doğrultman vektörü

$$\begin{aligned}\alpha(t, t^*) &= U(t, t^*) \times U^*(t, t^*) \\ \beta(t, t^*) &= U(t, t^*)\end{aligned}$$

dir. (Incesu, 2022) Buna göre (11) dual küresel eğrisinin karşılık geldiği doğru kongrüansı

$$\begin{aligned}X(t, t^*, w) &= \alpha(t, t^*) + w\beta(t, t^*) \\ X(t, t^*, w) &= \left(\frac{\phi(t)}{\|\phi(t)\|} \times \frac{\phi^*(t) + t^*\phi'(t)}{\|\phi(t)\|} \right) + w \frac{\phi(t)}{\|\phi(t)\|}\end{aligned}\quad (13)$$

olur. Burada ϕ ve ϕ^* reel değerli eğrilerdir.

4.2.1 Dual Polinom Eğrilerin Dual Küresel İzdüşüm Eğrileri ve Karşılık Gelen Doğru Kongrüansları

$$\hat{\phi}(\hat{t}) = (a_0 + \epsilon a_0^*) + (a_1 + \epsilon a_1^*)(t + \epsilon t^*) + (a_2 + \epsilon a_2^*)(t + \epsilon t^*)^2$$

Biçiminde kuadratik Polinom Eğri olsun. Burada D^3 dual uzayda bir eğri olduğundan a_i , $a_i^* \in R^3$ ve $t, t^* \in R$ dir. Bu eğriyi (9) formatında yazarsak,

$$\begin{aligned}\phi(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \\ \phi^*(t) &= a_0^* + a_1^* t + a_2^* t^2\end{aligned}$$

yazabiliriz. Buna göre bu eğrinin dual küresel izdüşüm eğrisi,

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(\hat{t}) &= \frac{(a_0 + a_1 t + a_2 t^2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^3 (a_{0i} + a_{1i} t + a_{2i} t^2)}} \\ &+ \epsilon \left[\frac{(a_0^* + a_1^* t + a_2^* t^2) + t^*(a_1 + 2a_2 t)}{\sqrt{\sum_{i=1}^3 (a_{0i} + a_{1i} t + a_{2i} t^2)}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\langle (a_0 + a_1 t + a_2 t^2), (a_0^* + a_1^* t + a_2^* t^2) + t^*(a_1 + 2a_2 t) \rangle}{\left[\sqrt{\sum_{i=1}^3 (a_{0i} + a_{1i} t + a_{2i} t^2)} \right]^3} (a_0 + a_1 t + a_2 t^2) \right]\end{aligned}$$

biçimindedir. Karşılık gelen doğru kongrüansı ise

$$X(t, t^*, w) = \left(\frac{(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) \times [(a_0^* + a_1^* t + a_2^* t^2) + t^*(a_1 + 2a_2 t)]}{\sum_{i=1}^3 (a_{0i} + a_{1i} t + a_{2i} t^2)} \right) + w \frac{(a_0 + a_1 t + a_2 t^2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^3 (a_{0i} + a_{1i} t + a_{2i} t^2)}}$$

dir.

Örnek: $a_0 = (1, -1, 1)$, $a_1 = (2, 1, -1)$, $a_2 = (1, 0, 1)$, $a_0^* = (0, -1, 2)$, $a_1^* = (-1, 1, 0)$, $a_2^* = (1, 1, 1)$ olsun. Buna göre polinom eğri,

$$\hat{\phi}(\hat{t}) = (1 + 2t + t^2, -1 + t, 1 - t + t^2) + \epsilon[(-t + t^2, -1 + t + t^2, 2 + t^2) + t^*(2 + 2t, 1, -1 + 2t)]$$

dir. Bu eğrinin küresel izdüşüm eğrisi

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(\hat{t}) &= \frac{(1 + 2t + t^2, -1 + t, 1 - t + t^2)}{\sqrt{2t^4 + 2t^3 + 10t^2 + 3}} \\ &+ \epsilon \left[\frac{(-t + t^2, -1 + t + t^2, 2 + t^2) + t^*(2 + 2t, 1, -1 + 2t)}{\sqrt{2t^4 + 2t^3 + 10t^2 + 3}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\langle (1 + 2t + t^2, -1 + t, 1 - t + t^2), [(-t + t^2, -1 + t + t^2, 2 + t^2) + t^*(2 + 2t, 1, -1 + 2t)] \rangle}{[2t^4 + 2t^3 + 10t^2 + 3]^3} (1 + 2t + t^2, -1 + t, 1 - t + t^2) \right] \\ &= \frac{(1 + 2t + t^2, -1 + t, 1 - t + t^2)}{\sqrt{2t^4 + 2t^3 + 10t^2 + 3}} + \epsilon \left[\frac{(-t + t^2, -1 + t + t^2, 2 + t^2) + t^*(2 + 2t, 1, -1 + 2t)}{\sqrt{2t^4 + 2t^3 + 10t^2 + 3}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(2t^4 + t^3 - t + 1) + t^*(4t^3 + 3t^2 + 10t)}{[2t^4 + 2t^3 + 10t^2 + 3]^3} (1 + 2t + t^2, -1 + t, 1 - t + t^2) \right] \end{aligned}$$

Olur. Buna göre doğru kongrüansı

$$\begin{aligned} X(t, t^*, w) &= \left(\frac{(1 + 2t + t^2, -1 + t, 1 - t + t^2) \times [(-t + t^2, -1 + t + t^2, 2 + t^2) + t^*(2 + 2t, 1, -1 + 2t)]}{2t^4 + 2t^3 + 10t^2 + 3} \right) \\ &\quad + w \frac{(1 + 2t + t^2, -1 + t, 1 - t + t^2)}{\sqrt{2t^4 + 2t^3 + 10t^2 + 3}} \end{aligned}$$

biçimindedir.

Bu dayanak yüzeyi üzerinde koordinat eğrileri alırsak bu durumda koordinat regle yüzeyler;

$t = 0$ için

$$X(0, t^*, w) = \left(\frac{(-1, 3t^* - 2, 3t^* - 1)}{3} \right) + w \frac{(1, -1, 1)}{\sqrt{3}}$$

biçiminde bir regle yüzey ifade edecektir. Bu yüzey bir düzlemdir. Çünkü dağılma parametresi ve Gauss eğriliği sıfırdır. Şimdi,

$t^* = 0$ için

$$X(t, 0, w) = \left(\frac{(-t^4 + t^3 - 1, -4t^3 - t^2 - 5t - 2, t^4 + 2t^3 + 4t^2 - 2t - 1)}{2t^4 + 2t^3 + 10t^2 + 3} \right) + w \frac{(1 + 2t + t^2, -1 + t, 1 - t + t^2)}{\sqrt{2t^4 + 2t^3 + 10t^2 + 3}}$$

Olur. Bu regle yüzeyin dayanak eğrisi α bir striksiyon eğrisi oluşturur mu? Bu sorunun cevabı maalesef oluşturmazdır. Çünkü $\langle \alpha', \beta' \rangle \neq 0$ dır. O halde bu eğri yardımıyla bir striksiyon eğrisi bulalım.

$$\sigma = \alpha - \frac{\langle \alpha', \beta' \rangle}{\|\beta'\|} \beta$$

$$= \left(\frac{(-t^4 + t^3 - 1, -4t^3 - t^2 - 5t - 2, t^4 + 2t^3 + 4t^2 - 2t - 1)}{2t^4 + 2t^3 + 10t^2 + 3} \right)$$

$$- \left[\frac{-10t^{10} + 58t^9 + 60t^8 + 372t^7 + 307t^6 + 150t^5 + 631t^4 - 153t^3 + 93t^2 - 36t - 27}{\left[\sqrt{2t^4 + 2t^3 + 10t^2 + 3} \right]^7} \right] \cdot \frac{(1 + 2t + t^2, -1 + t, 1 - t + t^2)}{\left[\frac{\sqrt{22t^8 + 6t^7 + 62t^6 - 88t^5 - 67t^4 + 132t^3 + 132t^2 + 36t + 54}}{\left[\sqrt{2t^4 + 2t^3 + 10t^2 + 3} \right]^3} \right]}$$

Olarak yazılabilir. $t = 0$ alınırsa striksiyon eğrisinin konumu

$$\sigma(0) = \left(\frac{-1}{3} + \frac{1}{18\sqrt{3}}, \frac{-2}{3} - \frac{1}{18\sqrt{3}}, \frac{-1}{3} + \frac{1}{18\sqrt{3}} \right)$$

Olur.

4.3 Dual Doğrular ve Karşılık Gelen Doğru Kongrüansları

Dual uzayda tanımlı bir L dual doğrusu verilsin bu doğrunun doğrultmanı $\vec{D} = \vec{d} + \varepsilon \vec{d}^*$ olsun ve doğrunun geçtiği herhangi bir nokta $\hat{A} = A + \varepsilon A^*$ olsun. (şekil). L doğrusunun üzerindeki keyfi bir nokta $\hat{X} = X + \varepsilon X^*$ olmak üzere

$$\vec{\hat{O}\hat{X}} = \vec{\hat{O}\hat{A}} + \Lambda \vec{D}$$

yazılabilir. Burada $\Lambda = \lambda + \varepsilon \lambda^* \in \mathbb{D}$. Buna göre keyfi $\hat{X}$ vektörü

$$\hat{X} = X + \varepsilon X^* = (A + \lambda \vec{d}) + \varepsilon (A^* + \lambda \vec{d}^* + \lambda^* \vec{d})$$

Dir. Burada reel ve dual kısımlar ayrılırsa

$$X = A + \lambda \vec{d} \quad \text{and} \quad X^* = A^* + \lambda \vec{d}^* + \lambda^* \vec{d}$$

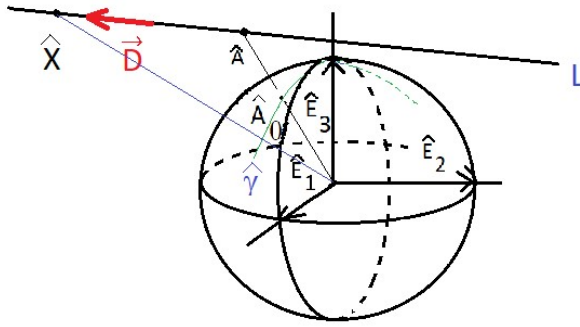
Olur. Eğer $X = (x, y, z)$; $X^* = (x^*, y^*, z^*)$; $\vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$; $\vec{d}^* = (d_1^*, d_2^*, d_3^*)$; $A = (a, b, c)$ ve $A^* = (a^*, b^*, c^*)$ biçiminde ifade edilecek olursa L dual doğrusu parametrik olarak $\lambda, \lambda^* \in R$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x &= a + \lambda d_1 & x^* &= a^* + \lambda d_1^* + \lambda^* d_1 \\ y &= b + \lambda d_2 & y^* &= b^* + \lambda d_2^* + \lambda^* d_2 \\ z &= c + \lambda d_3 & z^* &= c^* + \lambda d_3^* + \lambda^* d_3 \end{aligned} \quad (14)$$

Bu (14) denklemi $\hat{A} = A + \varepsilon A^*$ dual noktasından geçen ve $\vec{D} = \vec{d} + \varepsilon \vec{d}^*$ dual vektörüne paralel olan L doğrusunun parametrik denklemidir. Her bir denklemden :

$$\begin{aligned} \lambda + \varepsilon \lambda^* &= \frac{x-a}{d_1} + \varepsilon \left(\frac{x^*-a^*}{d_1} - \frac{(x-a)d_1^*}{d_1^2} \right) = \frac{y-b}{d_2} + \varepsilon \left(\frac{y^*-b^*}{d_2} - \frac{(y-b)d_2^*}{d_2^2} \right) \\ &= \frac{z-c}{d_3} + \varepsilon \left(\frac{z^*-c^*}{d_3} - \frac{(z-c)d_3^*}{d_3^2} \right) \end{aligned}$$

İfadeleri yazılabilir.



Şekil 4.3 D^3 te L doğrusu

Eğer $\Lambda = \lambda + \varepsilon \lambda^* = 0$ seçilirse ($\lambda = \lambda^* = 0$) bu durumda $\hat{X} = X + \varepsilon X^*$ ve $\hat{A} = A + \varepsilon A^*$ noktaları L de çakışık olur.

Eğer $\lambda = 0$ ve $\lambda^* \neq 0$ ise bu durumda yalnızca $\hat{X} = X + \varepsilon X^*$ ve $\hat{A} = A + \varepsilon A^*$ noktalarının reel kısımları çakışıktır. (i.e. $X = A$) ve $\hat{X}$ in dual kısmı ise A^* noktasından geçen ve $\vec{d}$ yönündeki doğrunun üzerinde bulunur. Yani

$$\lambda^* = \frac{x^*-a^*}{d_1} = \frac{y^*-b^*}{d_2} = \frac{z^*-c^*}{d_3}$$

dir.

Eğer $\lambda^* = 0$ and $\lambda \neq 0$ seçilirse

$$\lambda = \frac{x-a}{d_1} = \frac{y-b}{d_2} = \frac{z-c}{d_3} = \frac{x^*-a^*}{d_1^*} = \frac{y^*-b^*}{d_2^*} = \frac{z^*-c^*}{d_3^*}$$

sağlanır. Bunun anlamı A dan geçen $\vec{d}$ yönündeki l_1 doğrusu ile A^* dan geçen $\vec{d}^*$ vektörüne paralel olan l_2 doğrusunun yönlenmeleri ve hızları aynıdır.

Şimdi D^3 uzayında verilen $\hat{\mathcal{S}}_0 = \mathcal{S}_0 + \varepsilon \mathcal{S}_0^*$, $\hat{\mathcal{S}}_1 = \mathcal{S}_1 + \varepsilon \mathcal{S}_1^*$, $\hat{\mathcal{S}}_2 = \mathcal{S}_2 + \varepsilon \mathcal{S}_2^*$ noktaları doğrudan olsun. Bu durumda $\overrightarrow{\hat{\mathcal{O}}\hat{\mathcal{S}}_i}$, ($i=0,1,2$) vektörleri lineer bağımlıdır. Bu durumda $G = \det(\hat{\mathcal{S}}_0, \hat{\mathcal{S}}_1, \hat{\mathcal{S}}_2)$ determinant değeri sıfır olur. determinant özelliklerinden bu determinant aşağıdaki gibi yazılabilir. Yani

$$\begin{aligned} G &= \det(\hat{\mathcal{S}}_0, \hat{\mathcal{S}}_1, \hat{\mathcal{S}}_2) \\ &= \det(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2) + \varepsilon [\det(\mathcal{S}_0^*, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2) + \det(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1^*, \mathcal{S}_2) + \det(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2^*)] \\ &\quad + \varepsilon^2 [\det(\mathcal{S}_0^*, \mathcal{S}_1^*, \mathcal{S}_2) + \det(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1^*, \mathcal{S}_2^*) + \det(\mathcal{S}_0^*, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2^*)] + \varepsilon^3 \det(\mathcal{S}_0^*, \mathcal{S}_1^*, \mathcal{S}_2^*) \\ \varepsilon^2 &= 0 \text{ olduğundan} \\ G &= \det(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2) + \varepsilon [\det(\mathcal{S}_0^*, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2) + \det(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1^*, \mathcal{S}_2) + \det(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2^*)] = 0 \end{aligned}$$

Veya dual ve reel kısımları ayrı ayrı olarak

$$\det(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2) = 0$$

$$\det(\mathcal{S}_0^*, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2) + \det(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1^*, \mathcal{S}_2) + \det(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2^*) = 0$$

Yazılabilir. Burada şu teorem ifadesi verilebilir.

Teorem 4.5: Eğer D^3 de $\hat{\mathcal{S}}_0 = \mathcal{S}_0 + \varepsilon \mathcal{S}_0^*$, $\hat{\mathcal{S}}_1 = \mathcal{S}_1 + \varepsilon \mathcal{S}_1^*$, $\hat{\mathcal{S}}_2 = \mathcal{S}_2 + \varepsilon \mathcal{S}_2^*$ üç nokta doğrudan ise

$$i) \det(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2) = 0 \quad (15)$$

$$ii) \det(\mathcal{S}_0^*, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2) + \det(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1^*, \mathcal{S}_2) + \det(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2^*) = 0$$

sağlamalıdır.

L dual doğrusu verilsin. L doğrusunun birim dual küre üzerine izdüşüm eğrisi $\hat{\gamma}$ olsun. Bu izdüşüm ile L üzerindeki $\hat{X} = X + \varepsilon X^*$ noktası birim dual küre üzerindeki $\hat{\gamma}$ eğrisi üzerinde $\hat{X}_0 = X_0 + \varepsilon X_0^*$ noktasına projektif olur. (Şekil.) böylece şu teorem yazılabilir.

Teorem 4.6: $\vec{D} = \vec{d} + \varepsilon \vec{d}^*$ yönündeki $\hat{A} = A + \varepsilon A^*$ dan geçen L doğrusu verilsin. Bu takdirde L doğrusu üzerindeki $\hat{X} = X + \varepsilon X^*$ noktası birim dual küre üzerindeki $\hat{\gamma}$ eğrisinin $\hat{X}_0 = X_0 + \varepsilon X_0^*$ noktasına projektif olur. Yani

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{X}{\|X\|} \\ X_0^* &= \frac{X^*}{\|X\|} - \frac{\langle X, X^* \rangle X}{\|X\|^3} \end{aligned}$$

sağlanır.

Proof: Birim dual vektör tanımdan kolayca görülebilir.

(14) parametrik denkleminde şu teorem verilebilir:

Teorem 4.7: $\vec{D} = \vec{d} + \varepsilon \vec{d}^*$ yönündeki $\hat{A} = A + \varepsilon A^*$ dan geçen L doğrusu verilsin. Eğer $X = (x, y, z)$; $X^* = (x^*, y^*, z^*)$; $\vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$; $\vec{d}^* = (d_1^*, d_2^*, d_3^*)$; $A = (a, b, c)$ ve $A^* = (a^*, b^*, c^*)$ biçiminde yazılırsa L doğrusu üzerindeki $\hat{X} = X + \varepsilon X^*$ noktasının birim dual küre üzerindeki $\hat{\gamma}$ eğrisinin $\hat{X}_0 = X_0 + \varepsilon X_0^*$ noktasına projektif ise bu takdirde

$$X_0(\lambda, \lambda^*) = \frac{(a + \lambda d_1, b + \lambda d_2, c + \lambda d_3)}{\sqrt{(a + \lambda d_1)^2 + (b + \lambda d_2)^2 + (c + \lambda d_3)^2}}$$

$$X_0^*(\lambda, \lambda^*) = \frac{(a^* + \lambda d_1^* + \lambda^* d_1, b^* + \lambda d_2^* + \lambda^* d_2, c^* + \lambda d_3^* + \lambda^* d_3)}{\sqrt{(a + \lambda d_1)^2 + (b + \lambda d_2)^2 + (c + \lambda d_3)^2}}$$

$$- \frac{[(a + \lambda d_1)(a^* + \lambda d_1^* + \lambda^* d_1) + (b + \lambda d_2)(b^* + \lambda d_2^* + \lambda^* d_2) + (c + \lambda d_3)(c^* + \lambda d_3^* + \lambda^* d_3)]}{[(a + \lambda d_1)^2 + (b + \lambda d_2)^2 + (c + \lambda d_3)^2]^{3/2}} (a + \lambda d_1, b + \lambda d_2, c + \lambda d_3)$$

Sağlanır.

İspat: E. Study teoremi ile birim dual küre üzerindeki her bir nokta reel 3- uzay R^3 te bir yönlendirilmiş doğruya karşılık geldiğinden bu L doğrusu da bir doğru kongrüansına karşılık gelecektir. Bu kongrüans

(İncesu,2022) den de görüleceği gibi her $\lambda, \lambda^* \in R$ için α dayanak eğrisi ve β doğrultman vektörü

$$\alpha(\lambda, \lambda^*) = \frac{X \times X^*}{\|X\|^2} \quad \text{and} \quad \beta(t) = X_0$$

biçiminde ifade edilebilir. $\lambda, \lambda^*, \nu \in R$ olmak üzere karşılık gelen doğru kongrüansı

$$M(\lambda, \lambda^*, \nu) = \alpha + \nu \beta(t) = \frac{X \times X^*}{\|X\|^2} + \nu \frac{X}{\|X\|}$$

elde edilir. Böylece şu teorem verilebilir:

Teorem 4.8: $\vec{D} = \vec{d} + \varepsilon \vec{d}^*$ yönündeki $\hat{A} = A + \varepsilon A^*$ dan geçen L doğrusu verilsin. Bu takdirde L doğrusu üzerindeki $\hat{X} = X + \varepsilon X^*$ keyfî noktalarına R^3 te karşılık gelen doğru kongrüansı

$$M(\lambda, \lambda^*, \nu) = \frac{(a + \lambda d_1, b + \lambda d_2, c + \lambda d_3) \times (a^* + \lambda d_1^* + \lambda^* d_1, b^* + \lambda d_2^* + \lambda^* d_2, c^* + \lambda d_3^* + \lambda^* d_3)}{(a + \lambda d_1)^2 + (b + \lambda d_2)^2 + (c + \lambda d_3)^2} +$$

$$+ \nu \frac{(a + \lambda d_1, b + \lambda d_2, c + \lambda d_3)}{\sqrt{(a + \lambda d_1)^2 + (b + \lambda d_2)^2 + (c + \lambda d_3)^2}}$$

biçimindedir.

Bu doğru kongrüansını

$$M(\lambda, \lambda^*, \nu) = (M_1(\lambda, \lambda^*, \nu), M_2(\lambda, \lambda^*, \nu), M_3(\lambda, \lambda^*, \nu))$$

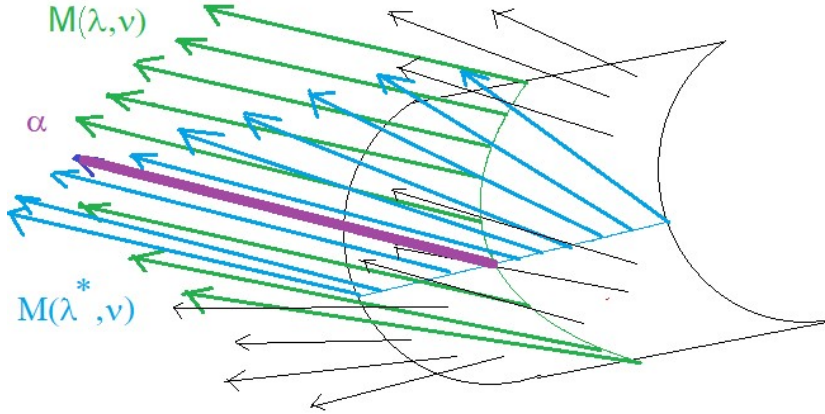
Biçiminde yazarsak bu durumda kongrüansın koordinat

$$M_1(\lambda, \lambda^*, \nu) = \frac{(bc^* - cb^*) + \lambda(bd_3^* - d_3b^* + cd_2^* - d_2c^*) + \lambda^*(bd_3 - cd_2) + \lambda^2(d_2d_3^* - d_3d_2^*)}{(a + \lambda d_1)^2 + (b + \lambda d_2)^2 + (c + \lambda d_3)^2}$$

$$+ \frac{\nu(a + \lambda d_1)}{\sqrt{(a + \lambda d_1)^2 + (b + \lambda d_2)^2 + (c + \lambda d_3)^2}}$$

$$\begin{aligned}
M_2(\lambda, \lambda^*, \nu) &= \frac{(ca^* - ac^*) + \lambda(cd_1^* - d_1c^* + d_3a^* - ad_3^*) + \lambda^*(cd_1 - ad_3) + \lambda^2(d_3d_1^* - d_3^*d_1)}{(a + \lambda d_1)^2 + (b + \lambda d_2)^2 + (c + \lambda d_3)^2} \\
&\quad + \frac{\nu(b + \lambda d_2)}{\sqrt{(a + \lambda d_1)^2 + (b + \lambda d_2)^2 + (c + \lambda d_3)^2}} \\
M_3(\lambda, \lambda^*, \nu) &= \frac{(ab^* - ba^*) + \lambda(ad_2^* - d_2a^* + d_1b^* - bd_1^*) + \lambda^*(ad_2 - bd_1) + \lambda^2(d_1d_2^* - d_1^*d_2)}{(a + \lambda d_1)^2 + (b + \lambda d_2)^2 + (c + \lambda d_3)^2} \\
&\quad + \frac{\nu(c + \lambda d_3)}{\sqrt{(a + \lambda d_1)^2 + (b + \lambda d_2)^2 + (c + \lambda d_3)^2}}
\end{aligned}$$

dır. Bu kongrüansın dayanak yüzeyini kuadratik yüzey olarak seçersek bu kongrüans kabaca aşağıdaki gibi çizilebilir. (fig.2).

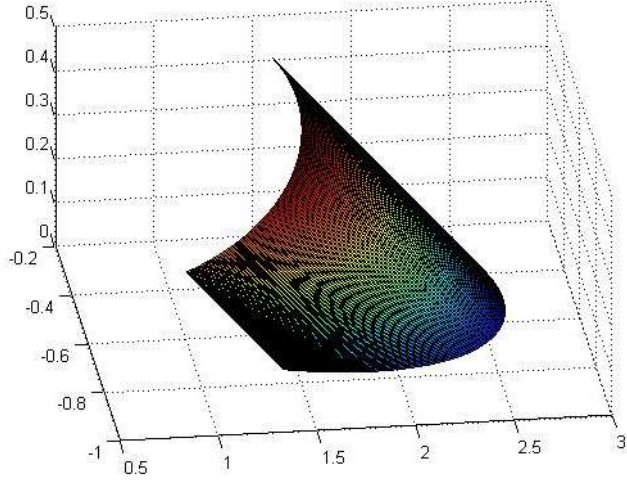


Şekil 4.4 L ye karşılık gelen $M(\lambda, \lambda^*, \nu)$ doğru kongrüansı

Şekilde, koordinat regle yüzeyler gösterilmiştir. Bunlar $\lambda^* = 0$ için yeşil renk ile $M(\lambda, \nu)$ regle yüzeyi, ve $\lambda = 0$ için mavi renk ile verilen $M(\lambda^*, \nu)$ regle yüzeyleridir. Pembe renk ile verilen vektör ise L üzerindeki $\hat{A}$ noktasına karşılık gelen vektördür. Yani $\lambda = 0$ ve $\lambda^* = 0$.

Örnek: $\vec{d} = (1, -1, 2)$; $\vec{d}^* = (-1, 1, -1)$; $A = (0, 2, 1)$ ve $A^* = (-1, 0, 4)$ verilsin. Bu takdirde $\vec{D} = \vec{d} + \varepsilon \vec{d}^*$ yönünde $\hat{A} = A + \varepsilon A^*$ dan geçen L doğrusuna karşılık gelen doğru kongrüansının koordinat fonksiyonları:

$$\begin{aligned}
M_1(\lambda, \lambda^*, \nu) &= \frac{8 + 3\lambda + 5\lambda^* - \lambda^2}{(\lambda)^2 + (2 - \lambda)^2 + (1 + 2\lambda)^2} + \frac{\lambda\nu}{\sqrt{(\lambda)^2 + (2 - \lambda)^2 + (1 + 2\lambda)^2}} \\
M_2(\lambda, \lambda^*, \nu) &= \frac{-1 - 7\lambda - \lambda^* - \lambda^2}{(\lambda)^2 + (2 - \lambda)^2 + (1 + 2\lambda)^2} + \frac{\nu(2 - 2\lambda)}{\sqrt{(\lambda)^2 + (2 - \lambda)^2 + (1 + 2\lambda)^2}} \\
M_3(\lambda, \lambda^*, \nu) &= \frac{2 + \lambda - 2\lambda^*}{(\lambda)^2 + (2 - \lambda)^2 + (1 + 2\lambda)^2} + \frac{\nu(1 + 2\lambda)}{\sqrt{(\lambda)^2 + (2 - \lambda)^2 + (1 + 2\lambda)^2}}
\end{aligned}$$



Şekil 4.5 L dual doğrusuna karşılık gelen doğru kongrüansının dayanak yüzeyi biçimindedir.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Bu çalışmada bir doğru kongrüansında dayanak yüzeyinin bir (n,m) tipli Bezier yüzeyi olması durumu ve bu durumda doğrultmanlarında yüzeye ait normal vektör olması durumu incelenmiş bu kongrüansın başlangıç noktaları verilmiş dayanak yüzeyi üzerinde alınan koordinat eğrilerinin herhangi bir noktadaki de Casteljau algoritması verilmiş, bu koordinat eğrileriyle oluşan regle yüzeyler incelenmiştir. Ayrıca kinematikte sıklıkla kullanılan dual değişkenli eğriler alınmış bu eğrilerin birim dual küre üzerine yansıma eğrileri oluşturulmuş özel olarak bu eğriler polinom eğrilerden seçilmiş ve bu eğrilere karşılık gelen doğru kongrüansı incelenmiştir. Son olarak dual uzayda verilen bir noktadan geçen ve bir doğrultuya paralel olan dual doğrular incelenmiş bu doğruların birim dual küre üzerine yansıma eğrileri yine verilmiş bu yansıma eğrisine karşılık gelen doğru kongrüansları verilerek incelenmiştir.

5.2 Öneriler

Bu çalışmada ifade edilen doğru kongrüansları dikkate alınarak karşılık gelen regle yüzeylerin kapalı olma durumları ve bir yörünge yüzeyi olma durumları da dikkate alınarak daha genel sonuçlar elde edilebilir. Bu kapalı regle yüzeylere ait Frenet vektör alanları ve bu alanların oluşturduğu kapalı yörünge yüzeyleri açılım açıları ve açılım uzunlukları olarak incelenebilir.

KAYNAKLAR

- Abdel-Aziz, H. S., Zanaty, E. A., Ali. H. A., Khalifa Saad, M., Generating Bezier curves for medical image reconstruction, *Results in Physics*, 23, 103996.
- Blaschke, W. 1945. Vorlesungen über Differential Geometrie, Dover Publications, New York.
- Bottema O, Roth B.,(1979). Theoretical Kinematics, North Holland Publishing Company.
- E. Study, 1903, Geometrie der Dynamen, Leipzig.
- Evren Yılmaz, S., 2020. Bertrand Nurbs Eğrileri Üzerine, Yüksek Lisans Tez, Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Muş.
- Eralp N., (2009), Bir-parametrelili kapalı dual küresel hareketler için Holditch teoremi, YL Tez., Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Sakarya.
- Farouki, R. T., Szafran, N., Biard, L., 2009. Construction of Bézier surface patches with Bézier curves as geodesic boundaries, *Computer Aided Design*, 41, 772-781.
- Ferhat Taş, Hesaplanabilir Doğrular Geometrisi Üzerine, Doktora Tezi, İstanbul Üniv. 2016.
- Garcia, R. A. and Sotomoyar, J. 2000. Lectures Notes on Qualitative Theory of Differential Equations of Classical Geometry, Notes de Curso, IME/UFG
- Guegenheimer H, 1977. Differential Geometry, Dover, New York, pp.378.
- Gray, A. 1998, Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, CRC Press LLC.
- Gray, A. 2006. Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica, CRC Press, Inc., Boca Raton, FL.
- Gürsoy, O., 1979, Açılım açısı ve açılım uzunluğu üzerine, Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi.
- Gürsoy, O., 1990a, The dual angle of pitch of a closed ruled surface, Mechanizm and Machine Theory, Great Britain, Vol.25, No:2, pp. 131-140.
- Gürsoy, O. (1990b). On the integral invariants of a closed ruled surface. *Journal of Geometry*, 39(1-2), 80-91.
- Hacısalıhoğlu, H. H., Abdel-Baky, R. A., (1997), “Holditch’s Theorem for One-Parameter Closed Motions”, Mech. Mach. Theory, 32, 235-239.
- Hacısalıhoğlu, H. H.,(1983), “Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi”, Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, Math., 2, 1983.
- Hoschek, J., Integralinvarianten von Regelflächen. Arch. Math. XXIV, 1973, pp. 218-224.
- Hoschek, J. 1992. Circular splines. *Computer-Aided Design*, 24(11), 611-618.
- Incesu, M., Gursoy, O. 2004, Bezier Yüzeylerinde Esas Formlar ve eğrilikler, XVII Ulusal Matematik Sempozyumu, Bolu,146-157.
- İncesu M., (2003), Bezier eğrileri, Bezier Yüzeyleri ve Matlab ile Sayısal Algoritmalar, Yüksek Lisans Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

- Juhász, I. 1999. Weight-based shape modification of NURBS curves. *Computer Aided Geometric Design*, 16(5), 377-383.
- Kazaz, M., Özdemir A, Güroğlu T., (2008). On the determination of a developable timelike ruled surface. *Süleyman Demirel University Faculty of Arts and Science Journal of Science*, 3(1), 72-79.
- Köse Ö, (1974) Çizgiler Uzayında Yörünge Yüzeyleri, PhD. Thesis, Ataturk Univ., Erzurum.
- Kılıçoğlu, Ş., Şenyurt, S., 2020. On the Involute of the Cubic Bezier Curve By Using Matrix Representation in E^3 , *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 13(2), 216-226.
- Liu, L., Wang, G. 2002. Explicit matrix representation for NURBS curves and surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 19(6), 409-419.
- Marsh, D. 1999. Applied geometry for computer graphics and CAD, Springer- Verlag, London.
- Müller, H. R., Esat Egesoy, and Maide Oruç. *Kinematik dersleri*. Ankara Üniversitesi, 1963.
- Öztürk U., Differential Geometry Of Congruences, Doktora Tezi , Anka Üniv. 2011
- Piegl, L.A. ve Tiller, W. 1999. Computing off sets of NURBS curves and surfaces. *Computer-Aided Design*, 31(2), 147-156.
- Samancı Kuşak, H. 2018. Introduction to Timelike Uniform B-Spline Curves in Minkowski 3-Space, *Journal of Mathematical sciences and Modelling*, 1(3), 206-210.
- Samancı Kuşak, H., Çelik, S., İncesu, M., 2015. The Bishop Frame of Bezier Curves, *Life Science Journal*, 12, 175–180.
- Sarioğlu, C. C. (2003). *Acceleration and the differential geometry of screws* (Master's thesis, Dokuz Eylül Üniversitesi (Turkey)).
- Uğurlu Hh, Çalışkan A, (1996). The Study Mapping for Directed Spacelike and Timelike Lines in Minkowski 3-Space R_1^3 . *Mathematical and Computational Applications*, 1(2), 142-148
- Yılmaz A., (2018) Doğru kongrüansları ve geometrik modellemesi, Doktora Tezi, Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

ÖZGEÇMİŞ**KİŞİSEL BİLGİLER**

Adı Soyadı : Osman KAYNUN

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Bingöl Anadolu Öğretmen Lisesi	2009
Üniversite	: Gaziantep Üniversitesi Eğitim Fakültesi	2013
Yüksek Lisans :	Muş Alparslan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü	2025

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2013	Dört Yol Ortaokulu	Öğretmen
2018	Şehit Mustafa Gündoğdu Ortaokulu	Öğretmen