

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gizem KUTLU

**BAZI DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA QUASI-
İDEMPOTENTLER**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA - 2022

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA QUASI-İDEMPOTENTLER

Gizem KUTLU

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman : Doç. Dr. Leyla BUGAY
Yıl: 2022, Sayfa: 87
Jüri : Doç. Dr. Leyla BUGAY
: Prof. Dr. Gonca AYIK
: Dr. Öğr. Üyesi Cennet ESKAL

S bir yarıgrup ve $e \in S$ olsun. Eğer $e \neq e^2 = e^4$ oluyor ise e ye S de bir **quasi-idempotent eleman** denir. Bu kavram gruplarda involüsyon kavramına denk gelmektedir. $m \geq 1$ ve $n \geq 1$ olmak üzere ($m = n = 2$ haricinde) derecesi m ve n olan iki eleman tarafından üretilen altgrupların yapısı hakkında neredeyse hiçbir şey söylememiz mümkün değildir. Ancak, bir grupta iki quasi-idempotentin dihedral altgrubu ürettiği bilinmektedir. Quasi-idempotentler grup takdimleri için de önemli bir kavramdır. Çünkü, gruplarda quasi-idempotentlerin tersleri de kendileri olup bir takdimde üreteç olan bir quasi-idempotentin tersine ihtiyaç yoktur. Bu nedenlerle bazı grup ve yarıgruplardaki quasi-idempotentlerin yapısını belirlemek önemli bir araştırma konusudur.

P_n, T_n, I_n, S_n ve A_n $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ kümesi üzerindeki kısmi dönüşümler yarıgrubu, (tam) dönüşümler yarıgrubu, bire-bir kısmi dönüşümler yarıgrubu, permütasyonlar grubu (n inci simetrik grup) ve alterne grup olsun. Bu çalışmada P_n, T_n, I_n yarıgrupları ile S_n ve A_n grupları içindeki quasi-idempotentlerin cebirsel yapılarını inceleyen ve bu yarıgrupların (minimal) quasi-idempotent üreteç kümelerini inceleyerek quasi-idempotent ranklarını belirleyen çalışmaları derleyerek yarıgrup araştırmacılarının bilgisine sunduk.

Anahtar Kelimeler: Dönüşüm yarıgrupları, idempotent, quasi-idempotent, doğuray kümesi, rank.

ABSTRACT

MSc. THESIS

QUASI-IDEMPOTENTS in CERTAIN TRANSFORMATION SEMIGROUPS

Gizem KUTLU

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Leyla BUGAY
Year: 2022, Pages: 87
Jury : Assoc. Prof. Dr. Leyla BUGAY
: Prof. Dr. Gonca AYIK
: Asst. Prof. Dr. Cennet ESKAL

Let S be a semigroup and $e \in S$. If $e \neq e^2 = e^4$, then $e \in S$ is called a quasi-idempotent.. This concept corresponds to the concept of involution in groups. Although there appears to be almost nothing that can be said about the structure of a subgroup generated by two elements of given orders $m \geq 1$ and $n \geq 1$ in any case other than $m = n = 2$, two quasi-idempotent in any group generate a dihedral subgroup. Moreover quasi-idempotents also have an important role for group presentation, since there is no need to use the inverse of any generators in relations since the inverse of any involution is itself. Hence determining the structure of quasi-idempotents in certain groups and semigroups is an important research topic.

Let P_n, T_n, I_n, S_n and A_n be the partial transformation semigroup, (full) transformation semigroup, symmetric inverse semigroup, the symmetric group and the alternating group on $X_n = \{1, \dots, n\}$. In this study we present the compilation of some studies which examine the algebraic structure of quasi-idempotents in P_n, T_n, I_n, S_n and A_n , and which obtain the quasi-idempotent rank of these semigroups by using the (minimal) quasi-idempotent generating sets to the researchers.

Key words: Transformation semigroups, idempotent, quasi-idempotent, generating set, rank.

GENİŞLETİLMİŞ ÖZET

S bir yarıgrup ve $e \in S$ olsun. Eğer $e^2 = ee = e$ oluyor ise e elemanına S nin bir **idempotent elemanı** denir. S yarı grubundaki idempotentlerin kümesi $E(S)$ ile gösterilir. Eğer $e \neq e^2 = e^4$ oluyor ise e ye S nin bir **quasi-idempotenti** denir. S yarı grubundaki quasi-idempotentlerin kümesi $Q(S)$ ile gösterilir.

B_X , boş olmayan bir X kümesi üzerinde tanımlı bağıntılar yarı grubu ve $\alpha \in B_X$ olsun. Eğer $\forall x \in X$ için $|x\alpha| \leq 1$ oluyor ise α ya X üzerinde bir **kısmi dönüşüm** denir. B_X yarı grubundaki kısmi dönüşümlerin oluşturduğu küme P_X bileşke işlemiyle bir yarı gruptur ve yarı gruba X üzerindeki **kısmi dönüşümler yarı grubu** denir. $\alpha \in P_X$ kısmi dönüşümünü $\alpha = \begin{pmatrix} x \in \text{dom}(\alpha) & x \in X_n \setminus \text{dom}(\alpha) \\ x\alpha & - \end{pmatrix}$ formunda gösterebiliriz. $\alpha \in P_X$ kısmi dönüşümünün **tanım kümesi** ve **görüntü kümesi** sırasıyla $\text{dom}(\alpha) = \{x \in X : \exists y \in X \text{ için } x\alpha = y\}$ ve $\text{im}(\alpha) = X\alpha = \{y \in X : \exists x \in X \text{ için } x\alpha = y\}$ şeklinde tanımlanır.

$\alpha \in P_X$ olsun. Eğer, $\forall x_1, x_2 \in \text{dom}(\alpha)$ için $x_1\alpha = x_2\alpha$ iken $x_1 = x_2$ oluyor ise α ya X üzerinde bir **kısmi bire-bir dönüşüm** denir. X üzerindeki tüm kısmi bire-bir dönüşümlerin kümesini I_X ile gösterelim. I_X bileşke işlemiyle bir yarı gruptur ve bu yarı gruba X üzerindeki **kısmi-bire-bir dönüşümler yarı grubu (simetrik inverse yarı grup)** denir. Eğer $\forall x \in X$ için $|x\alpha| = 1$ ise α ya X üzerinde bir **(tam) dönüşüm** denir. X üzerindeki tüm dönüşümlerinin oluşturduğu kümeyi T_X ile gösterelim. T_X bileşke işlemiyle bir yarı gruptur ve yarı gruba X üzerindeki **(tam) dönüşümler yarı grubu** denir. $\alpha \in T_X$ olsun. Eğer α hem bire-bir hem de örten ise α ya X üzerinde bir **permütasyon** denir ve X üzerindeki tüm permütasyonların kümesi S_X ile gösterilir. S_X bileşke işlemi ile bir grup olup bu gruba X üzerindeki **simetrik grup (permütasyon grubu)** denir.

Eğer X bir sonlu küme ise genelliği bozmaksızın $X = X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ sonlu kümesi ele alınır. Bu durumda P_X, I_X, T_X, S_X yerine sırasıyla $P_n, I_n, T_n,$

S_n yazılır. $n \geq 2$ için X_n üzerindeki çift permütasyonların kümesi A_n bileşke işlemiyle S_n nin altgrubu olup bu gruba **n –inci Alterne grup** denir

S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq X \subseteq S$ olsun. S nin X kümesini içeren altyarıgruplarının arakesiti de X kümesini içeren bir altyarıgrup olup bu altyarıgruba S nin X **tarafından doğurulan (üretilen) altyarıgrubu** denir ve $\langle X \rangle$ ile gösterilir. Eğer $\langle X \rangle = S$ oluyor ise **X e S nin bir doğuray kümesi** denir. $\langle X \rangle = S$ olacak şekilde S yarıgrubunun bir sonlu X alt kümesi mevcut ise **S ye sonlu doğuraylı yarıgrup** denir. Eğer S sonlu doğuraylı yarıgrup ise $\text{rank}(S) = \min\{|X| : \langle X \rangle = S \text{ ve } X \subseteq S \text{ sonlu}\}$ pozitif tamsayısına S nin **rankı** denir. Eğer S yarıgrubu sadece quasi-idempotentlerden oluşan (sonlu) bir küme tarafından doğuruluyor ise S ye (sonlu) **quasi-idempotent doğuraylı yarıgrup** denir ve S nin **quasi-idempotent rankı** $\text{qrank}(S) = \min\{|X| : \langle X \rangle = S \text{ ve } X \subseteq Q(S) \text{ sonlu}\}$ olarak tanımlanır.

Bu çalışmada P_n, T_n, I_n, S_n ve A_n ve bazı altyarıgrupları içindeki quasi-idempotentlerin cebirsel yapılarını inceleyen ve bu yarıgrupların (minimal) quasi-idempotent doğuray kümelerini inceleyerek quasi-idempotent ranklarını belirleyen çalışmaları derleyerek yarıgrup araştırmacılarının bilgisine sunduk.

3. bölümde, $\alpha \in P_n$ için $K(\alpha) = \{x \in \text{dom}(\alpha) : x\alpha^k = x \text{ olacak şekilde } k \in \mathbb{Z}^+ \text{ var}\}$ şeklinde tanımlanarak, idempotent olmayan bir $\alpha \in P_n$ elemanının bir quasi-idempotent olması için gerek ve yeter koşulun " $\forall x \in K(\alpha)$ için $xa^2 = x$ olması ve $\forall x \in \text{dom}(\alpha) - K(\alpha)$ için $xa \notin \text{dom}(\alpha)$ veya $xa^2 \in K(\alpha)$ olması" olduğu gösterildi. Buradan yararlanarak, idempotent olmayan bir $\alpha \in P_n$ elemanının bir quasi-idempotent olması için gerek ve yeter koşulun α nın her bir orbitinin "1-devir veya 2-devir (ağaç eklenmeden), uzunluğu 2 veya 3 olan bazı ağaçlar eklenmiş 1-devir veya 2-devir veya tek kökü olan 1 veya 2 uzunluklu ağaç" formlarından biri şeklinde olması olduğu sonucuna ulaşıldı. Bunun aşikar bir sonucu olarak, idempotent olmayan bir $\alpha \in T_n$ elemanının bir quasi-idempotent olması için gerek ve yeter koşulun α nın her bir orbitinin "1-devir veya 2-devir

(ağaç eklenmeden) veya uzunluğu 2 veya 3 olan bazı ağaçlar eklenmiş 1-devir veya 2-devir” formlarından biri şeklinde olması olduğu elde edildi. Daha sonra idempotent olmayan $\alpha \in I_n$ elemanının bir quasi-idempotent olması için gerek ve yeter koşulun “her bir orbitinin en fazla 2 uzunluklu olması” olduğu gösterildi. Ayrıca, $\alpha \in Q(S_n)$ olması için gerek ve yeter koşulun “ α ’nın ayrık 2 - devirler şeklinde yazılabiliyor olması” olduğu ispatlanarak S_n ’de tanımlanan bazı özel quasi-idempotentler ile üretilen altıyarıgruplar için elde edilen sonuçlar verildi.

4. bölümde, $2 \leq m \leq n$, $(b_1, \dots, b_m)$ herhangi bir sıralı m -li ve $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq m$ için $(b_i b_j)$ bir 2-devir olmak üzere

$$[[b_1, \dots, b_m]] = \begin{cases} (b_1 b_m)(b_2 b_{m-1}) \dots \left(b_{\frac{m}{2}} b_{\frac{m}{2}+1}\right); & m \text{ çift doğal sayı} \\ (b_1 b_m)(b_2 b_{m-1}) \dots \left(b_{\frac{m-1}{2}} b_{\frac{m+1}{2}}\right); & m \text{ tek doğal sayı} \end{cases}$$

şeklinde yeni bir notasyon tanımlandı. $n \geq 4$ ve $\alpha, \beta \in Q(S_n)$

- $\alpha = [[1, \dots, k+1]][[k+2, \dots, n]]$,
 $\beta = [[1, \dots, k+2]][[k+3, \dots, n]]$ ($1 \leq k \leq n-4$ ve $n \geq 5$);
- $\alpha = [[1, \dots, n+2]](n-1n)$,
 $\beta = [[1, \dots, n-1]]$;
- $\alpha = [[1, \dots, n-1]]$,
 $\beta = [[1, \dots, n]]$;
- $\alpha = [[1, \dots, n]]$,
 $\beta = [[2, \dots, n]]$;
- $\alpha = [[2, \dots, n]]$,
 $\beta = (12)[[3, \dots, n]]$.

şeklinde verilen n tane formdan biri olmak üzere $S_n = \langle (12), \alpha, \beta \rangle$ olduğu ve

$$\text{qrang}(S_n) = \begin{cases} 1, & n = 2 \text{ ise} \\ 2, & n = 3 \text{ ise} \\ 3, & n \geq 4 \text{ ise} \end{cases} \text{ olduğu ispatlandı. Daha sonra, } 4 \leq m \leq$$

n , $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ bir sıralı m -li ve $1 \leq i, j \leq m$ için $(b_i b_j)$ bir 2-devir olmak üzere

$$[[b_1, \dots, b_m]]^\# = \begin{cases} (b_1 b_m)(b_2 b_{m-1}) \cdots \left(b_{\frac{m-2}{2}} b_{\frac{m+4}{2}} \right), & m \text{ çift doğal sayı} \\ (b_1 b_m)(b_2 b_{m-1}) \cdots \left(b_{\frac{m-3}{2}} b_{\frac{m+5}{2}} \right), & m \text{ tek doğal sayı} \end{cases}$$

şeklinde notasyon tanımlandı. $n \geq 5$ için α, β ve γ

$$\alpha = \begin{cases} (13) [[4, \dots, n]]^\# & n \equiv 0 \pmod{4} \text{ ise} \\ (12) [[4, \dots, n]] & n \equiv 1, 2 \pmod{4} \text{ ise} \\ (12) [[4, \dots, n]]^\# & n \equiv 3 \pmod{4} \text{ ise} \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} (23) \left(\frac{n+2}{2} \frac{n+6}{2} \right) & n \equiv 0 \pmod{4} \text{ ise} \\ (13) [[4, \dots, n]] & n \equiv 1, 2 \pmod{4} \text{ ise} \\ (13) \left(\frac{n+3}{2} \frac{n+5}{2} \right) & n \equiv 3 \pmod{4} \text{ ise} \end{cases}$$

$$\gamma = \begin{cases} (1n)(23) [[4, \dots, n-1]] & n \equiv 0 \pmod{4} \text{ ise} \\ (14)(23) [[5, \dots, n]] & n \equiv 1 \pmod{4} \text{ ise} \\ (24) [[5, \dots, n]] & n \equiv 2 \pmod{4} \text{ ise} \\ (14) [[5, \dots, n]] & n \equiv 3 \pmod{4} \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde verilen quasi-idempotentler olmak üzere $A_n = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ olduğu ve buradan

da $n \geq 5$ için $\text{qrang}(A_n) = 3$ olduğu gösterildi. Benzer şekilde

$$\text{qrang}(I_n) = \begin{cases} 2 & n = 2 \text{ ise} \\ 3 & n = 3 \text{ ise} \\ 4 & n \geq 4 \text{ ise} \end{cases} \quad \text{qrang}(T_n) = \begin{cases} 3 & n = 3 \text{ ise} \\ 4 & n \geq 4 \text{ ise} \end{cases}$$

$$\text{qrang}(P_n) = \begin{cases} 4 & n = 3 \text{ ise} \\ 5 & n \geq 4 \text{ ise} \end{cases}$$

olduğu gösterildi.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans öğrenimine başladığım ilk günden itibaren bilgi ve tecrübeleriyle beni aydınlatan, çalışmalarımı yönlendiren ve bu tezin hazırlanması aşamasında yardımlarını ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli danışman hocam Doç. Dr. Leyla Bugay'a ve Ç. Ü. Matematik Bölümü'nün tüm öğretim üyelerine çok teşekkür ederim.

Ayrıca sonsuz sevgi ve güvenleriyle hayatım boyunca beni yalnız bırakmayan, desteklerini esirgemeyen anneme, babama ve ablalarım, sevgili aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SAYFA

ÖZ	I
ABSTRACT.....	II
GENİŞLETİLMİŞ ÖZET	III
TEŞEKKÜR.....	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ	X
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	7
2.1. Yarıgruplar	7
2.2. Doğuray Kümeleri	14
2.3. Bağıntı ve Denklik	17
2.4. Green Denklik Bağıntıları.....	21
2.5. Bazı Dönüşüm Yarıgrupları	26
2.6. Grafikler ve Diyagramlar	35
3. BAZI DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA QUASI-İDEMPOTENTLER	43
3.1. Pn de Quasi-idempotentler.....	43
3.2. In , $In - (In +)$ daki Quasi-idempotentler	46
3.3. Sn deki Quasi-idempotentler	50
4. QUASI-İDEMPOTENT DOĞURAY KÜMESİ VE RANKI	63
4.1. Sn nin Quasi-idempotent Rankı.....	64
4.2. An nin Quasi-idempotent Rankı	65
4.3. In, Tn ve Pn nin Quasi-idempotent Rankı	68
4.4. In de Bazı İdeallerin Quasi-idempotent Rankları.....	72
4.5. Quasi-idempotent İlişkili Ranklar	81
KAYNAKLAR	85
ÖZGEÇMİŞ	87



ŞEKİLLER DİZİNİ

SAYFA

Şekil 2.1. Bir $\mathcal{D}$ -Green denklik sınıfının yumurta kutusu formu	25
Şekil 2.2. Dönüşüm Yarıgruplarının Hasse Diyagramı	30





1. GİRİŞ

Yarıgrup teorisi 1900' lü yılların başında ortaya çıkmış ve 1940'lı yıllarda Clifford ve Dubreil tarafından yayımlanan makalelerle önem kazanmıştır. Bu dönemden itibaren çalışmalar hızla artarak 1950'li yılların sonuna doğru yarıgrup teorisi cebir araştırmacılarının ilgisini çeken önemli bir alt dal haline gelmiştir.

(S, ϕ) bir grupoid olsun. Eğer " ϕ " ikili işlemi S üzerinde birleşme özelliğine sahip ise, yani $\forall x, y, z \in S$ için

$$((x, y)\phi, z)\phi = (x, (y, z)\phi)\phi$$

ise (S, ϕ) ikilisine bir **yarıgrup** denir. S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq T \subseteq S$ olsun. Eğer $T^2 \subseteq T$ ise T ye S nin **altyarıgrubu** denir ve $T \leq S$ şeklinde gösterilir. S bir yarıgrup ve $e \in S$ olsun. Eğer $e^2 = ee = e$ oluyor ise e elemanına S nin bir **idempotent elemanı** denir. S yarıgrubundaki idempotentlerin kümesi $E(S)$ ile gösterilir. Eğer $e \neq e^2 = e^4$ oluyor ise e ye S nin bir **quasi-idempotent elemanı** denir. S yarıgrubundaki quasi-idempotentlerin kümesi $Q(S)$ ile gösterilir.

Quasi-idempotent kavramı gruplarda involüsyon kavramına denk gelmektedir. İnvolüsyonların sonlu basit grupların sınıflandırılmasında kullanıldığı iyi bilinmektedir. Isaacs (2008) da vurgulandığı gibi, $m \geq 1$ ve $n \geq 1$ olmak üzere ($m = n = 2$ haricinde) derecesi m ve n olan iki eleman tarafından üretilen altgrupların yapısı hakkında neredeyse hiçbir şey söylememiz mümkün değildir. Ancak, bir grupta iki quasi-idempotentin dihedral altgrubu ürettiği bilinmektedir. Quasi-idempotentler grup takdimleri için de önemli bir kavramdır. Çünkü, gruplarda quasi-idempotentlerin tersleri de kendileri olup bir takdimde üreteç olan bir quasi-idempotentin tersine ihtiyaç yoktur. Bu nedenlerle bazı grup ve yarıgruplardaki quasi-idempotentlerin yapısını belirlemek önemli bir araştırma konusudur.

X boştan farklı bir küme olmak üzere $X \times X$ in her bir ρ alt kümesine X üzerinde bir **bağıntı** denir ve X üzerindeki tüm bağıntıların kümesi $B_X = \{\rho: \rho \subseteq X \times X\}$ bileşke işlemi ile bir yarıgruptur. $x \in X$ olsun. x elemanının **görüntü kümesi** $x\alpha = \{y \in X: (x, y) \in \alpha\}$ şeklinde tanımlanır.

$\alpha \in B_X$ olsun. Eğer $\forall x \in X$ için $|x\alpha| \leq 1$ oluyor ise α ya X üzerinde bir **kısmi dönüşüm** denir. B_X yarıgrubundaki kısmi dönüşümlerin oluşturduğu küme P_X bileşke işlemiyle bir yarıgruptur ve yarıgruba X üzerindeki **kısmi dönüşümler yarıgrubu** denir. $\alpha \in P_X$ kısmi dönüşümünü

$$\alpha = \begin{pmatrix} x \in \text{dom}(\alpha) & x \in X_n \setminus \text{dom}(\alpha) \\ x\alpha & - \end{pmatrix}$$

formunda gösterebiliriz. $\alpha \in P_X$ kısmi dönüşümünün **tanım kümesi** ve **görüntü kümesi**, sırasıyla

$$\begin{aligned} \text{dom}(\alpha) &= \{x \in X: \exists y \in X \text{ için } x\alpha = y\} \\ \text{im}(\alpha) &= X\alpha = \{y \in X: \exists x \in X \text{ için } x\alpha = y\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

$\alpha \in P_X$ olsun. Eğer, $\forall x_1, x_2 \in \text{dom}(\alpha)$ için $x_1\alpha = x_2\alpha$ iken $x_1 = x_2$ oluyor ise α ya X üzerinde bir **kısmi bire-bir dönüşüm** denir. X üzerindeki tüm kısmi bire-bir dönüşümlerin kümesini I_X ile gösterelim. I_X bileşke işlemiyle bir yarıgruptur ve yarıgruba X üzerindeki **kısmi-bire-bir dönüşümler yarıgrubu** denir.

$\alpha \in P_X$ olsun. Eğer $\forall x \in X$ için $|x\alpha| = 1$ ise α ya X üzerinde bir **(tam) dönüşüm** denir. X üzerindeki tüm dönüşümlerinin oluşturduğu kümeyi T_X ile gösterelim. T_X bileşke işlemiyle bir yarıgruptur ve yarıgruba X üzerindeki **(tam) dönüşümler yarıgrubu** denir.

$a \in T_X$ olsun . Eğer α hem bire-bir hem de örten ise α ya X üzerinde bir **permütasyon** denir ve X üzerindeki tüm permütasyonların kümesi S_X ile gösterilir. S_X bileşke işlemi ile bir grup olup bu gruba X üzerindeki **simetrik grup (permütasyon grubu)** denir.

Eğer X bir sonlu küme ise genelliği bozmaksızın $X = X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ sonlu kümesi ele alınır. Bu durumda B_X, P_X, I_X, T_X, S_X yerine sırasıyla B_n, P_n, I_n, T_n, S_n yazılır.

I_n, X_n kümesi üzerindeki bire-bir örten dönüşümlerden oluşan simetrik inverse yarıgrup olmak üzere I_n de tanım (görüntü) kümesinde en fazla $n - 1$ tane eleman olan tüm kısmi 1-1 dönüşümlerin kümesi SI_n olsun;

$$SI_n = \{\alpha \in I_n : |\text{dom}(\alpha)| \leq n - 1\} = I_n - S_n$$

SI_n in dönüşümlerin bileşkesi işlemiyle I_n nin bir altyarıgrubu olduğu açıktır. $\alpha \in I_n$ olmak üzere $\forall x \in \text{dom}(\alpha)$ için $x\alpha \leq x$ oluyorsa α ya **sıra azaltan kısmi bire-bir dönüşüm**; $\forall x \in \text{dom}(\alpha)$ için $x\alpha \geq x$ oluyorsa α ya **sıra arttıran kısmi bire-bir dönüşüm** denir. SI_n deki tüm sıra azaltan kısmi bire-bir dönüşümlerin kümesi I_n^- ve SI_n deki tüm sıra arttıran kısmi bire-bir dönüşümlerin kümesi I_n^+ olsun.

$$I_n^- = \{\alpha \in SI_n : x \in \text{dom}(\alpha) \text{ için } x\alpha \leq x\}$$

$$I_n^+ = \{\alpha \in SI_n : x \in \text{dom}(\alpha) \text{ için } x\alpha \geq x\}$$

I_n^- ve I_n^+ , SI_n yarıgrupunun bir altyarıgrupudur ve I_n^- ile I_n^+ yarıgrupları izomorfiktir.

$\alpha \in S_n$ ve $a_1, a_2, \dots, a_k \in X_n$ birbirinden farklı elemanlar olmak üzere her $i = 1, 2, \dots, k - 1$ için $a_i \alpha = a_{i+1}$, $a_k \alpha = a_1$ ve her $x \in X_n \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ için $x\alpha = x$ ise α ya bir **r-devir** denir; ve $\alpha = (a_1 a_2 \dots a_k)$ şeklinde yazılır. 2-

devir **transpozisyon** olarak da adlandırılır. Özel olarak birim permütasyon $\varepsilon = (i)$ ($\forall 1 \leq i \leq n$) olarak da ifade edilebilir. $k, t \in \mathbb{Z}^+$ için eğer $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ ve $\{b_1, b_2, \dots, b_t\}$ iki ayrık küme ise $(a_1 a_2 \dots a_k)$ ve $(b_1 b_2 \dots b_t)$ devirlerine **ayrık devir** denir. Her permütasyon ayrık devirlerin çarpımı şeklinde yazılabilir. Ayrıca her devir de transpozisyonların çarpımı şeklinde yazılabilir. Gerçekten de, $r \geq 3$ için

$$(a_1 a_2 \dots a_r) = (a_1 a_2)(a_1 a_3) \cdots (a_1 a_r)$$

şeklindedir. Dolayısıyla her permütasyon transpozisyonların çarpımı şeklinde yazılabilir. Bir permütasyonun transpozisyonların çarpımı şeklinde yazılışı tek türlü değildir, ancak sayısı aynıdır. Eğer bir permütasyon tek sayıda transpozisyonun çarpımı şeklinde yazılabiliyorsa bu permütasyona **tek permütasyon**, çift sayıda transpozisyonun çarpımı şeklinde yazılabiliyorsa bu permütasyona **çift permütasyon** denir. S_n deki tüm çift permütasyonların kümesi A_n ve tek permütasyonların kümesi B_n ile gösterilir. $n \geq 2$ için X_n üzerindeki çift permütasyonların kümesi A_n bileşke işlemiyle S_n nin alt grubu olup bu gruba **n –inci alterne grup** denir. Ayrıca $|A_n| = \frac{n!}{2}$ dir.

S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq X \subseteq S$ olsun. S nin X kümesini içeren alt yarıgruplarının arakesiti de X kümesini içeren bir alt yarıgrup olup bu alt yarıgruba S nin X **tarafından doğurulan (üretilen) alt yarı grubu** denir ve $\langle X \rangle$ ile gösterilir. Eğer $\langle X \rangle = S$ oluyor ise **X e S nin bir doğuray kümesi** denir. $\langle X \rangle = S$ olacak şekilde S yarı grubunun bir sonlu X alt kümesi mevcut ise **S ye sonlu doğuraylı yarıgrup** denir. Eğer S sonlu doğuraylı yarıgrup ise

$$\text{rank}(S) = \min\{|X| : \langle X \rangle = S \text{ ve } X \subseteq S \text{ sonlu}\}$$

pozitif tamsayısına S nin **rankı** denir. Eğer S yarıgrubu sadece quasi-idempotentlerden oluşan (sonlu) bir küme tarafından doğruluyor ise S ye (sonlu) **quasi-idempotent doğuraylı yarıgrup** denir ve S nin **quasi-idempotent rankı**

$$\text{qrank}(S) = \min\{ |X| : \langle X \rangle = S \text{ ve } X \subseteq Q(S) \text{ sonlu} \}$$

olarak tanımlanır.

Cebirsel teorilerde önemli problemlerden biri onları belirli özelliklerle ifade edebilecek yöntemler bulmak ve böylece onları sınıflandırabilmektir. Bu amaçla, (varsa) sonlu doğuray kümesi bulma ve bu kümelerin eleman sayılarının minimumunu bularak minimal doğuray kümesini ve böylece rankını belirleme problemi birçok çalışmanın temelini oluşturmuştur. Çalışmalar ilerledikçe özel elemanlarla elde edilen doğuray kümeleri ve özel rankları da ilgi çekmiştir. (Örneğin, idempotent rank, nilpotent rank, (m, r) -rank, ...)

Cayley Teoremi'nden, her sonlu grubun sonlu bir küme üzerindeki permütasyonlar grubu S_n nin bir altgrubuna izomorf olduğu iyi bilinmektedir. Cayley Teoremi'nin bir benzeri olarak, her sonlu yarıgrup sonlu bir küme üzerindeki tam dönüşümler yarıgrubu T_n nin bir altarıgrubuna izomorftur. Ayrıca $P_n, T_{Xn \cup \{0\}}$ de $0\alpha = 0$ olacak şekildeki dönüşümlerden oluşan P_n^* altarıgrubuna izomorftur. Wagner-Preston Teoremi gereği de her inverse yarıgrup sonlu bir küme üzerindeki bire-bir kısmi dönüşümler yarıgrubu I_n nin bir altarıgrubuna izomorftur. Dolayısıyla, P_n, T_n, I_n , ve S_n nin ve altarıgruplarının doğuray kümelerini ve ranklarını bulma konusu yarıgrup teorisinde başlı başına bir araştırma konusu olmuştur.

Bu çalışmada $P_n, T_n, I_n, I_n^-, S_n$ ve A_n içindeki quasi-idempotentlerin cebirsel yapılarını inceleyen ve bu yarıgrupların (minimal) quasi-idempotent doğuray kümelerini inceleyerek quasi-idempotent ranklarını belirleyen bazı çalışmaları (Garba ve Imam (2016), Umar (1993), Bugay (2019), Bugay (2020a),

Bugay (2020b), Bugay (2021)) derleyerek yarıgrup araştırmacılarının bilgisine sunduk.



2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1. Yarıgruplar

Tanım 2.1.1. S boş olmayan bir küme olmak üzere

$$\phi: S \times S \rightarrow S$$

şeklinde tanımlı bir “ ϕ ” fonksiyonuna S üzerinde bir **ikili işlem** denir. $\forall x, y \in S$ için bu işlem $(x, y)\phi$ ile gösterilir. Eğer ϕ , S üzerinde bir ikili işlem ise (S, ϕ) ikilisine de bir **grupoid** denir.

(S, ϕ) bir grupoid olsun. Eğer “ ϕ ” ikili işlemi S üzerinde birleşme özelliğine sahip ise, yani $\forall x, y, z \in S$ için

$$((x, y)\phi, z)\phi = (x, (y, z)\phi)\phi$$

ise (S, ϕ) ikilisine bir **yarıgrup** denir. Burada işlemin sembollerin sağına yazılmış olduğuna dikkat ediniz. Eğer yukarıdaki eşitlikte $\forall x, y \in S$ için $(x, y)\phi$ yerine $x \cdot y$ yazarsak eşitlik

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

şeklinde olup cebirsel yapılarda daha yaygın olarak kullanılan birleşme özelliği formuna dönüşmüş olur. Bu durumda (S, ϕ) yerine $(S, \cdot)$ yazacağız. Eğer S üzerinde tanımlı ikili işlem belli ise kolaylık olması açısından $(S, \cdot)$ yerine kısaca S ve $x \cdot y$ yerine de kısaca xy yazacağız.

Tanım 2.1.2. Bir S yarıgrubu üzerindeki ikili işleme göre değişme özelliğine sahip, yani

$$\forall x, y \in S \text{ için } xy = yx$$

oluyorsa bu S yarıgrubuna **değişmeli yarıgrup** denir.

Örnek 2.1.3. $\mathbb{Z}$ üzerinde $x * y = x + y - 1$ ile tanımlanan $*$ işlemi için

$$\begin{aligned} x * (y * z) &= x * (y + z - 1) \\ &= x + y + z - 1 - 1 \\ &= x + y - 1 + z - 1 \\ &= (x * y) * z \end{aligned}$$

olduğundan $*$ işlemi $\mathbb{Z}$ üzerinde birleşme özelliğine sahiptir. Ayrıca,

$$x * y = x + y - 1 = y + x - 1 = y * x$$

olduğundan $*$ işlemi $\mathbb{Z}$ üzerinde değişme özelliğine sahiptir. O halde $\mathbb{Z}$, bu işlemle bir değişmeli yarıgruptur.

Tanım 2.1.4. S bir yarıgrup ve $e \in S$ olsun. Eğer $\forall x \in S$ için $ex = e$ oluyor ise e ye S nin **sol sıfır elemanı** denir. Eğer $\forall x \in S$ için $xe = e$ oluyor ise e ye S nin **sağ sıfır elemanı** denir. Eğer $\forall x \in S$ için $ex = xe = e$ oluyor, yani $e \in S$ hem sol hem de sağ sıfır eleman ise e ye S nin bir **sıfır elemanı** denir ve tektir (teklik Önerme 2.1.5' te gösterilmiştir). Bu teklikten dolayı sıfır elemanı "0" ile gösterilir.

Önerme 2.1.5. Bir S yarıgrubunun sıfır elemanı varsa tektir.

İspat. 0 ve $0'$, S nin iki sıfır elemanı olsun. $00' = 0$ (0, sıfır eleman) ve $00' = 0'$ ($0'$, sıfır eleman) olduğundan $0 = 0'$ olur. ■

Tanım 2.1.6. S bir yarıgrup ve $f \in S$ olsun. Eğer $\forall x \in S$ için $fx = x$ oluyor ise f ye S nin **sol birim elemanı** denir. Eğer $\forall x \in S$ için $xf = x$ oluyor ise f ye S nin **sağ birim elemanı** denir. Eğer $\forall x \in S$ için $fx = xf = x$ eşitliği sağlanıyor ise, yani $f \in S$ hem sol hem de sağ birim eleman ise f ye S nin **birim elemanı** denir ve tektir (teklik Önerme 2.1.7 de gösterilmiştir). Bu teklikten dolayı 1 ile gösterilir.

Önerme 2.1.7. Bir S yarıgrupunun birim elemanı varsa tektir.

İspat. 1 ve $1'$, S nin iki birim elemanı olsun. 1 birim eleman olup $11' = 1'$ ve $1'$ birim eleman olup $11' = 1$ olduğundan $1 = 1'$ olur. ■

Tanım 2.1.8. S bir yarıgrup olsun. Eğer S nin birim elemanı varsa S ye bir **monoid** denir. Ayrıca,

$$S^1 = \begin{cases} S, & S \text{ bir monoid ise} \\ S \cup \{1\}, & S \text{ bir monoid değilse} \end{cases}$$

kümesi üzerinde tanımlanan

$$\forall e, f \in S^1 \text{ için } ef = \begin{cases} ef, & e \neq 1, f \neq 1 \text{ ise} \\ f, & e = 1 \text{ ise} \\ e, & f = 1 \text{ ise} \\ 1, & e = f = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

işlem ile bir monoiddir. Bu monoide S ye gerekirse **birim eleman eklenerek elde edilen monoid** denir.

Tanım 2.1.9. S bir yarıgrup ve $e \in S$ olsun. Eğer $e^2 = ee = e$ oluyor ise e elemanına S nin bir **idempotent elemanı** denir. S yarıgrubundaki tüm idempotentlerin kümesi $E(S)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.10. S bir yarıgrup ve $e \in S$ olsun. Eğer $e \neq e^2 = e^4$ oluyor ise e elemanına S nin bir **quasi-idempotent elemanı** denir. Başka bir ifade ile, kendisi idempotent olmayıp karesi idempotent olan elemana quasi-idempotent eleman denir. S yarıgrubundaki tüm quasi-idempotentlerin kümesi $Q(S)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.11. S bir yarıgrup olsun. Eğer S nin tüm elemanları birer idempotent eleman ise S ye bir **band** denir. Eğer S yarıgrubu hem değişmeli hem de bir band oluyor ise S ye bir **yarılatis** denir.

Örnekler 2.1.12. Bazı monoid örnekleri:

- 1) $(\mathbb{Z}, +)$ sıfır elemanı içermeyen ve birim elemanı “0” olan değişmeli bir monoiddir.
- 2) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ sıfır elemanı “0” ve birim elemanı “1” olan değişmeli bir monoiddir.
- 3) $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$ modülo n toplaması ile sıfır elemanı içermeyen ve birim elemanı “0” olan değişmeli bir monoiddir.
- 4) $(\mathbb{Z}_n, \odot)$ modülo n çarpması ile sıfır elemanı “0” ve birim elemanı “1” olan değişmeli bir monoiddir.
- 5) $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ olsun. $C_n = (X_n, \min\{u, v\})$ olarak alalım. Her $u, v, z \in X_n$ için

$$(uv)z = \min\{\min\{u, v\}, z\} = \min\{u, v, z\},$$

$$u(vz) = \min\{u, \min\{v, z\}\} = \min\{u, v, z\} \text{ ve}$$

$$uv = \min\{u, v\} = \min\{v, u\} = vu$$

olduğundan C_n bir değişmeli yarıgrup olur. Her $u \in X_n$ için

$$uu = \min\{u, u\} = u$$

olup C_n nin her elemanı bir idempotent eleman olur. Böylece C_n bir değişmeli band olup C_n bir yarılatistir. Bu yarılatise n inci dereceden zincir denir. Ayrıca, her $u \in X_n$ için

$$un = \min\{u, n\} = u$$

olup n , C_n yarıgrubunun birim elemanıdır. Her $u \in X_n$ için

$$u1 = \min\{u, 1\} = 1$$

olup 1 , C_n yarıgrubunun sıfır elemanıdır.

Tanım 2.1.13. X boş kümeden farklı herhangi bir küme olsun. X kümesi

$$\forall x, y \in X \text{ için } xy = x$$

şeklinde tanımlanan ikili işlem ile bir yarıgruptur. Bu yarıgruba **sol sıfır yarıgrup** denir ve L_X ile gösterilir. L_X deki her eleman sol sıfır elemandır. Ayrıca X in her elemanı bir sağ birim elemandır.

X sonlu bir küme ise $|X| = n$ olmak üzere L_X yerine L_n yazılır.

Tanım 2.1.14. X boş kümeden farklı herhangi bir küme olsun. X kümesi

$$\forall x, y \in X \text{ için } xy = y$$

şeklinde tanımlanan ikili işlem ile bir yarıgruptur. Bu yarıgruba **sağ sıfır yarıgrup** denir ve R_X ile gösterilir. R_X deki her eleman sağ sıfır elemandır. Ayrıca X in her elemanı bir sol birim elemandır.

X sonlu bir küme ise $|X| = n$ olmak üzere R_X yerine R_n yazılır.

Tanım 2.1.15. X boş kümeden farklı herhangi bir küme ve $z \in X$ olsun. X kümesi

$$\forall x, y \in X \text{ için } xy = z$$

şeklinde tanımlanan ikili işlem ile bir yarıgrup olup bu yarıgruba **sıfır yarıgrubu** denir ve Z_X ile gösterilir. Dikkat edilirse $\forall x \in X$ için $xz = zx = z$ olup z bir sıfır elemandır.

X sonlu bir küme ise $|X| = n$ olmak üzere Z_X yerine Z_n yazılır.

Tanım 2.1.16. S bir monoid ve $a \in S$ olsun. Eğer $a^{-1}a = 1$ olacak şekilde bir $a^{-1} \in S$ var ise a^{-1} ye a nın **sol tersi**; $aa^{-1} = 1$ olacak şekilde $a^{-1} \in S$ varsa a^{-1} ye a nın **sağ tersi** denir. Eğer a nın hem sağ hem de sol tersi var ise a ya bir **birim (unit) (tersinir eleman)** ve $a^{-1} \in S$ elemanına da a elemanının **tersi** denir. S nin tüm birimlerinin kümesi $U(S)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.17. S bir yarıgrup olsun. Eğer her $x \in S$ için $Sx = S$ ve $xS = S$ ise S ye bir **grup** denir.

Aslında bu tanıma denk olan aşağıdaki tanım daha çok kullanılmaktadır.

Tanım 2.1.18. S bir yarıgrup olsun. Her $a \in S$ için

$$ea = ae = a$$

olacak şekilde bir $e \in S$ varsa, ve her bir $a \in S$ için

$$a^{-1}a = aa^{-1} = e$$

olacak şekilde bir $a^{-1} \in S$ var ise S ye bir **grup** denir. Burada $e \in S$ ye grubun **birim elemanı**, $a^{-1} \in S$ ye de a elemanının **tersi** denir.

Tanım 2.1.19. S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq T \subseteq S$ olsun. Eğer T , S deki ikili işleme göre kapalı, yani $\forall u, v \in T$ için $uv \in T$ ($T^2 \subseteq T$) oluyor ise T ye S nin bir **altarıgrubu** denir ve $T \leq S$ şeklinde gösterilir.

Açık olarak $S^2 \subseteq S$ olup $S \leq S$ dir.

Tanım 2.1.20. S bir yarıgrup ve I , S nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer $\forall s \in S$ ve $\forall a \in I$ için $sa \in I$, yani $SI \subseteq I$ oluyor ise I ya S nin bir **sol ideali**; eğer $\forall s \in S$ ve $\forall a \in I$ için $as \in I$, yani $IS \subseteq I$ oluyor ise I ya S nin bir **sağ ideali** denir. Eğer $SI \subseteq I$ ve $IS \subseteq I$ ise I ya S nin **ideali** denir ve $I \trianglelefteq S$ şeklinde gösterilir.

Açık olarak $SS = S^2 \subseteq S$ olup $S \trianglelefteq S$ dir.

Tanım 2.1.21. S ile T iki yarıgrup ve $\phi: S \rightarrow T$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $u, v \in S$ için

$$(uv)\phi = (u\phi)(v\phi)$$

ise ϕ ye bir **yarıgrup homomorfizmi** denir. Eğer S ile T iki monoid ve $\phi: S \rightarrow T$ bir fonksiyon iken

$$\forall u, v \in S \text{ için } (uv)\phi = (u\phi)(v\phi) \text{ ve } 1_S\phi = 1_T$$

oluyor ise ϕ ye bir **monoid homomorfizmi** denir.

Tanım 2.1.22. S ile T iki yarıgrup ve $\phi: S \rightarrow T$ bir yarıgrup homomorfizmi olsun.

- 1) Eğer ϕ bire-bir ise ϕ ye bir **monomorfizm** denir.
- 2) Eğer ϕ örten ise ϕ ye bir **epimorfizm** denir.
- 3) Eğer ϕ bire-bir ve örten ise, başka bir ifadeyle ϕ hem monomorfizm hem de epimorfizm ise ϕ ye bir **izomorfizm** denir. Eğer S den T ye bir izomorfizm mevcut ise S ile T ye **izomorfik yarıgruplar** denir ve $S \cong T$ şeklinde gösterilir
- 4) Eğer ϕ , S den S ye bir homomorfizm ise ϕ ye **endomorfizm** denir.
- 5) Eğer ϕ , S den S ye bir izomorfizm ise ϕ ye bir **otomorfizm** denir.

2.2. Doğuray Kümeleri

Tanım 2.2.1. S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq X \subseteq S$ olsun. S nin X kümesini içeren alt yarıgruplarının arakesiti de X kümesini içeren bir alt yarıgrup olup bu alt yarıgruba S nin **X tarafından doğurulan (üretilen) alt yarıgrubu** denir ve $\langle X \rangle$ ile gösterilir.

Tanımdan

$$\langle X \rangle = \cap \{ T \leq S : X \subseteq T \}$$

$$\langle X \rangle = \{ x_1 x_2 \cdots x_n : n \in \mathbb{Z}^+ \text{ ve } x_1, x_2, \dots, x_n \in X \}$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Eğer $\langle X \rangle = S$ oluyor ise X kümesine S nin bir **doğuray kümesi** ve eğer X bir sonlu küme ise X kümesine S nin bir **sonlu doğuray kümesi** denir. Eğer $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ şeklinde sonlu bir küme ise $\langle X \rangle = \langle \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \rangle$ yerine $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ yazılır. Eğer $X = \{x\}$ ise

$\langle X \rangle = \langle \{x\} \rangle$ yerine $\langle x \rangle$ yazılır. Bu durumda $\langle x \rangle$ altıyarıgrupuna **tek doğuraylı (monogenic) altıyarıgrup** denir.

Teorem 2.2.2. Zorn Lemması: X boş olmayan sıralı bir küme olsun. X in tam sıralı her alt kümesi alttan sınırlı ise X in en az bir minimal elemanı vardır.

İspat. Akkaş, Hacısalihoğlu, Özel, Sabuncuoğlu (1998), 2. Teorem sayfa:115' e bakınız. ■

Tanım 2.2.3. S bir yarıgrup ve $x \in S$ olsun.

$$\langle x \rangle = \{x, x^2, \dots\} = \{x^k : k \in \mathbb{Z}^+\}$$

kümesi sonsuz sayıda farklı eleman içeriyor (diğer bir ifade ile $x^k = x^l \Rightarrow k = l$) ise $\langle x \rangle$ ya **sonsuz monogenic yarıgrup** denir. Aksi halde $\{x, x^2, \dots\}$ kümesi sonlu olur. Bu durumda $x^k = x^l$ olacak şekilde farklı iki pozitif tamsayı mevcut olup

$$A = \{k \in \mathbb{N} : x^k = x^l \text{ ve } k \neq l \in \mathbb{N}\}$$

kümesi boş küme değildir. Zorn Lemması'ndan A kümesinin minimum elemanı mevcuttur. $\min(A) = m$ ise

$$B = \{k \in \mathbb{N} : x^{m+k} = x^m \text{ } (k \in \mathbb{N})\}$$

kümesi de boş küme olmayıp benzer şekilde minimum elemanı mevcuttur. $\min(B) = r$ ise

$$\langle x \rangle = \{x, x^2, x^3, \dots, x^{m-1}, x^m, x^{m+1}, \dots, x^{m+r-1}\}$$

olur. Bu durumda m ye x in **indeksi** ve r ye de x in **periyodu** denir. Bu monogenic yarıgrup $M_{m,r}(x)$ ile gösterilir. O halde

$$\langle x \rangle = M_{m,r}(x) = \{ x, x^2, x^3, \dots, x^{m-1}, x^m, x^{m+1}, \dots, x^{m+r-1} \}$$

olur ve bu yarıgrup $m + r - 1$ elemanlıdır.

Teorem 2.2.4. S bir yarıgrup, $x \in S$ ve x in indeksi m , periyodu r olsun. $k, l \in \{0, 1, 2, \dots, r - 1\}$ elemanları

$$m + k \equiv 0 \pmod{r} \text{ ve } m + l \equiv 1 \pmod{r}$$

olacak şekilde seçilirse

$$K_x = \{x^m, x^{m+1}, \dots, x^{m+r-1}\}$$

kümesi r elemanlı, birim elemanı x^{m+k} olan ve x^{m+l} tarafından doğurulan bir devirli gruptur. Bu gruba $\langle x \rangle$ nin **çekirdek grubu** denir.

İspat. Howie (1995), sayfa 10'a bakınız. ■

Tanım 2.2.5. S bir yarıgrup olsun. Her $x \in S$ için $\langle x \rangle$ monogenic yarıgrubu sonlu ise S ye **periyodik yarıgrup** denir. Her sonlu yarıgrup periyodiktir.

Tanım 2.2.6. Eğer S sonlu doğuraylı bir yarıgrup ise

$$\text{rank}(S) = \min\{ |X| : \langle X \rangle = S \text{ ve } X \subseteq S \text{ sonlu} \}$$

pozitif tam sayısına S nin **rankı** denir. Eğer S idempotentlerden oluşan sonlu bir küme tarafından doğruluyor ise S nin **idempotent rankı**

$$\text{idrank}(S) = \min\{ |X| : \langle X \rangle = S \text{ ve } X \subseteq E(S) \text{ sonlu} \}$$

olarak tanımlanır. Bu tanımlamalardan açıkça görüleceği üzere $\text{rank}(S) \leq \text{idrank}(S)$ dir. Benzer şekilde bir çok özel doğuray kümesi ve rankı tanımlanabilir.

2.3. Bağntı ve Denklik

Tanım 2.3.1. X ve Y boş olmayan iki küme olmak üzere

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

kümesine X ile Y nin **kartezyen çarpımı** denir.

Tanım 2.3.2. X ve Y boş olmayan iki küme olsun. $X \times Y$ nin her bir ρ alt kümesine **X ten Y ye bir bağntı** denir. $X \times X$ in her bir ρ alt kümesine ise **X üzerinde bir bağntı** denir ve X üzerindeki tüm bağntıların kümesi

$$B_X = \{\rho : \rho \subseteq X \times X\}$$

ile gösterilir. Ayrıca $\rho \in B_X$ olmak üzere $(s, t) \in \rho$ elemanı kısaca $s\rho t$ şeklinde de gösterilebilir.

$\emptyset$ de bir bağntı olup bu bağntıya X üzerinde **boş bağntı** denir. $X \times X$ de bir bağntı olup bu bağntıya X üzerinde **evrensel bağntı** denir. $\Delta_x = 1_x = \{(x, x) : x \in X\}$ kümesi de bir bağntı olup bu bağntıya X üzerinde **birim bağntı** denir. Ayrıca $\rho \in B_X$ olmak üzere

$$\rho^{-1} = \{(x, y) \in X \times X : (y, x) \in \rho\}$$

olarak tanımlanan $\rho^{-1} \in B_X$ bağıntısına ρ nun **ters bağıntısı (tersi)** denir. $\forall \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n \in B_X$ için

$$(\rho^{-1})^{-1} = \rho$$

$$(\rho_1 \circ \rho_2 \circ \dots \circ \rho_n)^{-1} = \rho_n^{-1} \circ \dots \circ \rho_2^{-1} \circ \rho_1^{-1}$$

olduğu açıkça görülür. $\rho \in B_X$ için

- $\text{dom}(\rho) = \{x \in X : \exists y \in X, (x, y) \in \rho\}$ kümesine ρ bağıntısının **tanım kümesi**,
- $\text{im}(\rho) = \{y \in X : \exists x \in X, (x, y) \in \rho\}$ kümesine ρ bağıntısının **görüntü (imaj) kümesi**,
- $x\rho = \{y \in X : (x, y) \in \rho\}$ kümesine $x \in X$ in **ρ altındaki görüntü kümesi**,
- $y\rho^{-1} = \{x \in X : (x, y) \in \rho\}$ kümesine $y \in X$ in **ρ altındaki ters-görüntü kümesi**

denir.

Tanımlardan yola çıkılarak her $\alpha, \beta \in B_X$ için eğer $\alpha \subseteq \beta$ ise

$$\text{dom}(\alpha) \subseteq \text{dom}(\beta) \text{ ve } \text{im}(\alpha) \subseteq \text{im}(\beta) \text{ ve } \alpha \subseteq \beta \Rightarrow \alpha^{-1} \subseteq \beta^{-1}$$

olduğu açıkça görülür.

Tanım 2.3.3. $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. B_X üzerinde $\forall \alpha, \beta \in B_X$ için

$$\alpha \circ \beta = \alpha \beta = \{(x, y) \in X \times X : \exists z \in X \text{ için } (x, z) \in \alpha \text{ ve } (z, y) \in \beta\}$$

şeklinde tanımlanan (ikili işlem) bileşke işlemi ile bir yarıgrup olup bu yarıgruba X üzerindeki **bağıntılar yarıgrubu** denir. $\forall \sigma, \alpha, \beta \in B_X$ için $\alpha \subseteq \beta$ ise

$$\alpha \circ \sigma \subseteq \beta \circ \sigma \quad \text{ve} \quad \sigma \circ \alpha \subseteq \sigma \circ \beta$$

olur.

Tanım 2.3.4. X boştan farklı bir küme ve $\rho \in B_X$ olsun.

- $\Delta_x \subseteq \rho$ ise ρ ya **yansımali bağıntı**,
- $\rho = \rho^{-1}$ ise ρ ya **simetrik bağıntı**,
- $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \Delta_x$ ise ρ ya **ters simetrik bağıntı** ve
- $\rho \circ \rho \subseteq \rho$ ise ρ ya **geçişmeli bağıntı**

denir. Eğer ρ bağıntısı yansımali, simetrik ve geçişmeli bir bağıntı ise ρ ya X üzerinde bir **denklik bağıntısı** denir. ρ , X kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı ve $x \in X$ olmak üzere

$$x\rho = \{y \in X : (x, y) \in \rho\}$$

kümesine x in **denklik sınıfı** ve X in tüm denklik sınıflarının

$$X/\rho = \{x\rho : x \in X\}$$

ailesine ise X in ρ ile elde edilen **bölüm kümesi** denir.

Önerme 2.3.5. ρ , X üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. O halde $x\rho, y\rho \in X/\rho$ için ya $x\rho \cap y\rho = \emptyset$ ya da $x\rho = y\rho$ olur.

İspat. Karakaş (2008), Ders 1, Teorem 1'e bakınız. ■

Önerme 2.3.6. $\{\rho_i: i \in I\}$, X üzerindeki denklik bağıntılarının bir ailesi olsun. Bu durumda $\cap \{\rho_i: i \in I\}$ kümesi de X üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

İspat. Akkaş, Hacısalihoğlu, Özel, Sabuncuoğlu (1998), 513. Alıştırmalar 19' a bakınız. ■

Önerme 2.3.7. $\phi: X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olsun. $\phi \circ \phi^{-1}$, X üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

İspat. Howie (1995), Proposition 1.4.7' ye bakınız. ■

Tanım 2.3.8. $\phi: X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olsun. $\phi \circ \phi^{-1}$ e ϕ nin **çekirdeği (kernel)** denir ve $\ker(\phi)$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.9. X boştan farklı bir küme ve R, X üzerinde bir bağıntı olsun. O halde $R \subseteq X \times X$ dir ve X üzerinde R yi içeren en az bir denklik bağıntısı var olur. Böylece R yi içeren denklik bağıntılarının ailesi boş kümeden farklı olup R yi içeren denklik bağıntılarının arakesitine **R tarafından doğurulan denklik bağıntısı** denir ve R^e ile gösterilir.

$$R^e = \cap \{\rho: R \subseteq \rho \text{ ve } \rho, X \text{ üzerinde bir denklik bağıntısı}\}$$

olur. Bu denklik bağıntısı R yi içeren en küçük denklik bağıntısıdır. Ayrıca

- 1) $R = \emptyset \Rightarrow R^e = \Delta_X$,
- 2) R denklik bağıntısı ise $R^e = R$ ve
- 3) $R^e = (R^{-1})^e$

olduğu kolayca görülür.

Tanım 2.3.10. R , boş olmayan bir X kümesi üzerinde bir yansılmalı bağıntı olsun. O halde

$$\begin{aligned} R &= \Delta_X \circ R \subseteq R \circ R = R^2 \\ R^2 &= \Delta_X \circ R^2 \subseteq R \circ R^2 \subseteq R^3 \end{aligned}$$

olup genel olarak

$$R \subseteq R^2 \subseteq R^3 \subseteq \dots \subseteq R^n \subseteq \dots$$

olduğu elde edilir. Bundan yararlanarak X üzerinde R^∞ bağıntısı

$$R^\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} R^n$$

olarak tanımlanır.

Önerme 2.3.11. Yukarıda tanımlanan R^∞ , X üzerinde R yi içeren en küçük geçişmeli bağıntıdır.

İspat. Howie (1995), Lemma 1.4.8'e bakınız. ■

Önerme 2.3.12. R , boş olmayan herhangi bir X kümesi üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. O zaman $R^e = [R \cup R^{-1} \cup \Delta_X]^\infty$ olur.

İspat. Howie (1995), Proposition 1.4.9'a bakınız. ■

2.4. Green Denklik Bağıntıları

S bir yarıgrup olmak üzere S nin bir a elemanını içeren en küçük sol, sağ ve iki taraflı idealleri sırasıyla

$$\begin{aligned}
S^1a &= Sa \cup \{a\} = \{xa: x \in S^1\} \\
aS^1 &= aS \cup \{a\} = \{ax: x \in S^1\} \\
S^1aS^1 &= SaS \cup aS \cup Sa \cup \{a\} = \{xay: x, y \in S^1\}
\end{aligned}$$

formundadır.

Tanım 2.4.1. S yarıgrubu üzerinde tanımlanan

$$\begin{aligned}
a\mathcal{L}b &\Leftrightarrow S^1a = S^1b \\
a\mathcal{R}b &\Leftrightarrow aS^1 = bS^1 \\
a\mathcal{J}b &\Leftrightarrow S^1aS^1 = S^1bS^1
\end{aligned}$$

bağıntılar birer denklik bağıntısıdır. Burada tanımlanan $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{J}$ denklik bağıntılarına sırasıyla **sol-Green bağıntısı** ($\mathcal{L}$ –Green), **sağ-Green bağıntısı** ($\mathcal{R}$ –Green) ve **$\mathcal{J}$ –Green bağıntısı** denir.

Önerme 2.4.2. S bir yarıgrup ve $a, b \in S$ olsun.

- 1) $a\mathcal{L}b \Leftrightarrow a = xb$ ve $b = ya$ olacak şekilde $x, y \in S^1$ vardır.
- 2) $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a = bx$ ve $b = ay$ olacak şekilde $x, y \in S^1$ vardır.
- 3) $a\mathcal{J}b \Leftrightarrow a = xby$ ve $b = uav$ olacak şekilde $x, y, u, v \in S^1$ vardır.

İspat. Howie (1995), Proposition 2.1.1' e bakınız. ■

Önerme 2.4.3. S yarıgrubu üzerinde yukarıda tanımlanan $\mathcal{L}$ ile $\mathcal{R}$ bağıntıları değişmeli, yani $\mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$ dir.

İspat. Howie (1995), Proposition 2.1.3' e bakınız. ■

Tanım 2.4.4. S yarıgrubu üzerinde yukarıda tanımlanan $\mathcal{L}$ ile $\mathcal{R}$ bağıntılarının arakesiti de bir denklik bağıntısı olup

$$\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$$

olarak tanımlanır. Bu $\mathcal{H}$ denklik bağıntısına **$\mathcal{H}$ –Green denklik bağıntısı** denir. S yarıgrubu üzerinde $\mathcal{L} \cup \mathcal{R}$ yi içeren en küçük denklik bağıntısı

$$\mathcal{D} = (\mathcal{L} \cup \mathcal{R})^e$$

olup $\mathcal{D}$ bağıntısına da **$\mathcal{D}$ –Green denklik bağıntısı** denir. Burada

$$(\mathcal{L} \cup \mathcal{R}) = (\mathcal{L} \cup \mathcal{R})^{-1} \text{ ve } \Delta_s \subseteq \mathcal{L} \cup \mathcal{R}$$

olup

$$(\mathcal{L} \cup \mathcal{R}) \cup (\mathcal{L} \cup \mathcal{R})^{-1} \cup \Delta_s = \mathcal{L} \cup \mathcal{R}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= (\mathcal{L} \cup \mathcal{R})^e = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} [(\mathcal{L} \cup \mathcal{R}) \cup (\mathcal{L} \cup \mathcal{R})^{-1} \cup \Delta_s]^n \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} (\mathcal{L} \cup \mathcal{R})^n \\ &= (\mathcal{L} \cup \mathcal{R}) \cup [(\mathcal{L} \cup \mathcal{R}) \circ (\mathcal{L} \cup \mathcal{R})] \cup [(\mathcal{L} \cup \mathcal{R}) \circ (\mathcal{L} \cup \mathcal{R}) \circ (\mathcal{L} \cup \mathcal{R})] \cup \dots \\ &= (\mathcal{L} \cup \mathcal{R}) \cup [(\mathcal{L} \circ \mathcal{L}) \cup (\mathcal{L} \circ \mathcal{R}) \cup (\mathcal{R} \circ \mathcal{L}) \cup (\mathcal{R} \circ \mathcal{R})] \cup (\mathcal{L} \cup \mathcal{R})^3 \cup \dots \\ &= (\mathcal{L} \cup \mathcal{R}) \cup [\mathcal{L} \cup (\mathcal{L} \circ \mathcal{R}) \cup \mathcal{R}] \cup (\mathcal{L} \cup \mathcal{R})^3 \cup \dots \\ &= (\mathcal{L} \circ \mathcal{R}) \cup [(\mathcal{L} \cup \mathcal{R})^2 \circ (\mathcal{L} \cup \mathcal{R})] \dots \\ &= (\mathcal{L} \circ \mathcal{R}) \cup (\mathcal{L} \circ \mathcal{R}) \dots \\ &\vdots \\ &= \mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L} \end{aligned}$$

olur.

Önerme 2.4.5. S bir grup ise $\mathcal{H} = \mathcal{L} = \mathcal{R} = \mathcal{D} = \mathcal{J} = S \times S$ olur.

İspat. $\forall a, b \in S$ için

$$a = ae = a(b^{-1}b) = (ab^{-1})b$$

$$b = be = b(a^{-1}a) = (ba^{-1})a$$

olup $x = ab^{-1} \in S$ ve $y = ba^{-1} \in S$ olacak şekilde $a = xb$ ve $b = ya$ olacak şekilde $x, y \in S$ bulunmuş olur. O halde $\forall x, y \in S$ için $a\mathcal{L}b$ olup $\mathcal{L} = S \times S$ olur. Benzer şekilde $\mathcal{R} = S \times S$ olup $\mathcal{H} = \mathcal{L} = \mathcal{R} = \mathcal{D} = \mathcal{J} = S \times S$ elde edilir. ■

Önerme 2.4.6. S bir değişmeli yarıgrup ise $\mathcal{H} = \mathcal{L} = \mathcal{R} = \mathcal{D} = \mathcal{J}$ olur.

İspat. $\forall a, b \in S$ için $a\mathcal{L}b$ olsun. O halde $a = xb$ ve $b = ya$ olacak şekilde $x, y \in S^1$ vardır. S değişmeli olduğundan aynı zamanda $a = bx$ ve $b = ay$ olup $a\mathcal{R}b$ olur. Böylece $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{R}$ olduğu açıkça görülür. Benzer şekilde $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}$ olup $\mathcal{H} = \mathcal{L} = \mathcal{R} = \mathcal{D} = \mathcal{J}$ olduğu elde edilir. ■

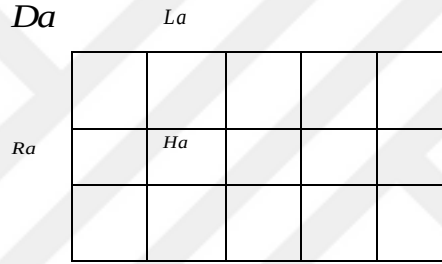
Önerme 2.4.7. S bir periyodik yarıgrup ise $\mathcal{D} = \mathcal{J}$ olur.

İspat. Howie (1995), Proposition 2.1.4' e bakınız. ■

Tanım 2.4.8. $\mathcal{J}$ -Green denklik bağıntısı ile elde edilen denklik sınıflarının kümesi $S/\mathcal{J}$ ile gösterilir. Benzer şekilde $\mathcal{D}, \mathcal{L}, \mathcal{R}$ ve $\mathcal{H}$ -Green denklik bağıntıları ile elde edilen denklik sınıflarının kümeleri $S/\mathcal{D}, S/\mathcal{L}, S/\mathcal{R}, S/\mathcal{H}$ ile gösterilir. $a \in S$ elemanını içeren $\mathcal{J}, \mathcal{D}, \mathcal{L}, \mathcal{R}$ ve $\mathcal{H}$ -Green denklik sınıfları ise $J_a, \mathcal{D}_a, \mathcal{L}_a, \mathcal{R}_a$ ve $\mathcal{H}_a$ şeklinde gösterilir. Bu notasyonlarla

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_a &\subseteq \mathcal{L}_a \subseteq \mathcal{D}_a \\ \mathcal{H}_a &\subseteq \mathcal{R}_a \subseteq \mathcal{D}_a \text{ ve} \\ \mathcal{H}_a &= \mathcal{L}_a \cap \mathcal{R}_a\end{aligned}$$

olur. Bir $\mathcal{D}$ -Green denklik sınıfının ayırık $\mathcal{L}$ -Green sınıfı ve ayırık $\mathcal{R}$ -Green sınıflarının birleşimi şeklinde olduğu bilinmektedir. Böylece bir $\mathcal{D}$ sınıfı, her satırı bir $\mathcal{R}$ -Green sınıfını, her sütunu ise bir $\mathcal{L}$ -Green denklik sınıfını ve her hücresi de bir $\mathcal{H}$ -Green denklik sınıfını temsil eden bir yumurta kutusu (eggbox) şeklindedir.



Şekil 2.1. Bir $\mathcal{D}$ -Green denklik sınıfının yumurta kutusu formu

Teorem 2.4.9. (Green Teoremi) S bir yarıgrup ve $a, b \in S$ olsun.

1. $(a, b) \in R \in S/\mathcal{R}$ ise $as = b$ ve $bt = a$ olacak şekilde $s, t \in S^1$ vardır.

$$\begin{array}{ll}\rho_s: L_a \rightarrow L_b & \rho_t: L_b \rightarrow L_a \\ x \rightarrow xs & y \rightarrow yt\end{array}$$

dönüşümleri bire-bir, örten ve birbirlerinin tersidir. Ayrıca ρ_s ve ρ_t , bir H –sınıfını bir H –sınıfına götürür.

2. $(a, b) \in L \in S/\mathcal{L}$ ise $sa = b$ ve $tb = a$ olacak şekilde $s, t \in S^1$ vardır.

$$\begin{array}{ll} \lambda_s: R_a \rightarrow R_b & \lambda_t: R_b \rightarrow R_a \\ x \rightarrow sx & y \rightarrow ty \end{array}$$

dönüşümleri bire-bir, örten ve birbirlerinin tersidir. Ayrıca λ_s ve λ_t , bir H –sınıfını bir H –sınıfına götürür.

İspat. Howie (1995), Lemma 2.2.1 ve Lemma 2.2.2’ ye bakınız. ■

Sonuç 2.4.10. S bir yarıgrup ve a, b elemanları için H_a ve H_b aynı $\mathcal{D}$ –Green denklik sınıfında iki H sınıfı olsun. O zaman $|H_a| = |H_b|$ olur.

İspat. Howie (1995), Lemma 2.2.3’ e bakınız. ■

Sonuç 2.4.11. $L, R \subseteq D$ ve $|D| < \infty$ ise $|L|$ ve $|R|$ sayıları $|D|$ sayısını böler. ■

Teorem 2.4.12. S bir yarıgrup olmak üzere H de bir S yarıgrupunun $\mathcal{H}$ –sınıfı ise $H^2 \cap H = \emptyset$ veya $H^2 = H$ olup H, S nin bir altgrupudur.

İspat. Howie (1995), Theorem 2.2.5. e bakınız. ■

2.5. Bazı Dönüşüm Yarıgrupları

Tanım 2.5.1. X boştan farklı bir küme ve $\alpha \in B_X$ olsun. Eğer

$$\forall x \in X \text{ için } |x\alpha| \leq 1$$

oluyor ise α ya bir **kısmi dönüşüm** denir. Tüm kısmi dönüşümlerin oluşturduğu kümeyi P_X ile gösterelim. $\alpha \in P_X$ ise $\emptyset \subseteq \text{dom}(\alpha) \subseteq X$ olur. Ayrıca, $\alpha \in P_X$ kısmi dönüşümünü

$$\alpha = \begin{pmatrix} x \in \text{dom}(\alpha) & x \in X_n \setminus \text{dom}(\alpha) \\ x\alpha & - \end{pmatrix}$$

formunda gösterebiliriz.

Eğer $\alpha \in P_X$ ve $\text{dom}(\alpha) = \emptyset$ ise bu dönüşüme **boş dönüşüm** denir ve $\emptyset$ ile gösterilir. $\alpha \in P_X$ kısmi dönüşüm ve $x \in X$ olsun. x elemanının **görüntü kümesi**, $\alpha \in P_X$ in **tanım kümesi** ve $\alpha \in P_X$ in **görüntü kümesi**, sırasıyla

$$\begin{aligned} x\alpha &= \{y \in X : (x, y) \in \alpha\} \\ \text{dom}(\alpha) &= \{x \in X : \exists y \in X \text{ için } x\alpha = y\} \\ \text{im}(\alpha) &= X\alpha = \{y \in X : \exists x \in X \text{ için } x\alpha = y\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca $\alpha \in P_X$ ve $x \in \text{dom}(\alpha)$ için $x\alpha = x$ ise x elemanına α nın bir **sabit noktası**, aksi durumda x elemanına α nın bir **sabit olmayan noktası** denir. α kısmi dönüşümünün sabit noktalarının kümesi ve sabit olmayan noktalarının kümesi, sırasıyla

$$\begin{aligned} \text{fix}(\alpha) &= \{x \in \text{dom}(\alpha) : x\alpha = x\} \\ \text{shift}(\alpha) &= \{x \in \text{dom}(\alpha) : x\alpha \neq x\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 2.5.2. $\alpha, \beta \in P_X$ için $\text{dom}(\alpha\beta) \subseteq \text{dom}(\alpha)$ ve $\text{im}(\alpha\beta) \subseteq \text{im}(\beta)$ olur.

İspat. $\alpha, \beta \in P_X$ ve $x \in \text{dom}(\alpha\beta)$ olsun. Bu durumda $x(\alpha\beta) = y$ olacak şekilde $y \in X_n$ var olup $x(\alpha\beta) = y = (x\alpha)\beta$ olduğundan $x\alpha \in \text{dom}(\beta) \subseteq X_n$ ve $x \in \text{dom}(\alpha)$ olduğu sonucuna varılır. Böylece $\text{dom}(\alpha\beta) \subseteq \text{dom}(\alpha)$ olduğu elde edilir.

Ayrıca, $\alpha, \beta \in P_X$ için $x \in \text{im}(\alpha\beta)$ ise $y(\alpha\beta) = x$ olacak şekilde $y \in X_n$ var olup $y(\alpha\beta) = x = (y\alpha)\beta$ olduğundan $x \in \text{im}(\beta)$ olur. Böylece $\text{im}(\alpha\beta) \subseteq \text{im}(\beta)$ olduğu elde edilir. ■

Tanım 2.5.3. $\alpha \in P_X$ için $\text{dom}(\alpha) = X$ oluyorsa α ya X üzerinde bir **(tam) dönüşüm** veya **fonksiyon** denir. X üzerinde tanımlı tüm dönüşümlerin oluşturduğu kümeyi T_X ile gösterelim.

Önerme 2.5.4. Tüm kısmi dönüşümlerin kümesi P_X , bağıntıların bileşke işlemi ile tüm bağıntılar yarıgrubu B_X in bir altarıgrubudur. Tüm dönüşümlerin kümesi T_X , bağıntıların bileşke işlemi ile tüm kısmi dönüşümlerin yarıgrubu P_X in bir altarıgrubudur.

İspat. Herhangi $\alpha, \beta \in P_X$ için $\text{dom}(\alpha) \subseteq X$, $\text{dom}(\beta) = X$ ve $\forall x \in X$ için $|x\alpha| \leq 1$, $|x\beta| \leq 1$ dir. Buradan $\text{dom}(\alpha\beta) \subseteq X$ ve $|x\alpha\beta| \leq 1$ olduğu kolayca görülür. O halde $\alpha\beta \in P_X$ olduğu elde edilir.

Herhangi $\alpha, \beta \in T_X$ için $\text{dom}(\alpha) = \text{dom}(\beta) = X$ ve $\forall x \in X$ için $|x\alpha| = |x\beta| = 1$ dir. Böylelikle $\text{dom}(\alpha\beta) \subseteq X$ olur. Herhangi bir $x \in X$ elemanını için $x \in \text{dom}(\alpha)$ olduğundan $(x, y) \in \alpha$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır. Ayrıca $y \in \text{dom}(\beta)$ olup $(y, z) \in \beta$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. Böylece

$$(x, y) \circ (y, z) = (x, z) \in \alpha\beta$$

ve $x \in \text{dom}(\alpha\beta)$ olup $X \subseteq \text{dom}(\alpha\beta)$ olduğu elde edilir. O halde $X = \text{dom}(\alpha\beta)$ olup $\alpha\beta \in T_X$ olduğu elde edilir. ■

Tanım 2.5.5. P_X yarıgrubuna X üzerindeki **kısmi dönüşümler yarıgrubu** ve T_X yarıgrubuna X üzerindeki **(tam) dönüşümler yarıgrubu** denir.

Tanım 2.5.6. $\alpha \in P_X$ olmak üzere

$$\ker(\alpha) = \left\{ (x, y) \in X \times X : (x, y \in \text{dom}(\alpha) \text{ ve } x\alpha = y\alpha) \text{ veya } (x, y \in X \setminus \text{dom}(\alpha)) \right\}$$

kümesine α kısmi dönüşümünün **çekirdek kümesi** denir.

Tanım 2.5.7. $\alpha \in T_X$ için

$$\ker(\alpha) = \{(x, y) \in X \times X : x\alpha = y\alpha\}$$

kümesine α dönüşümünün **çekirdek kümesi** denir.

Tanım 2.5.8. $\alpha \in P_X$ olsun. Eğer $\forall x_1, x_2 \in \text{dom}(\alpha)$ için $x_1\alpha = x_2\alpha$ iken $x_1 = x_2$ oluyor ise α ya bir **kısmi bire-bir dönüşüm** denir. X üzerindeki tüm kısmi bire-bir dönüşümlerin kümesini I_X ile gösterelim.

$\alpha \in T_X$ olsun. Eğer α hem bire-bir hem örten ise α ya X üzerinde bir **permütasyon** denir. Başka bir ifade ile; $\forall x \in X$ için $|x\alpha^{-1}| = 1$ oluyor ise α ya X üzerinde bir permütasyon denir. X üzerindeki tüm permütasyonların kümesi S_X ile gösterilir.

Önerme 2.5.9. I_X dönüşümlerin bileşke işlemi ile P_X in bir altıyargı grubudur.

İspat. Bire-bir dönüşümlerin bileşkesi de bire-bir olup sonuç açıktır. ■

Önerme 2.5.10. S_X dönüşümlerin bileşke işlemi ile I_X in bir alt grubudur.

İspat. Howie (1995), sayfa 6' ya bakınız. ■

Tanım 2.5.11. I_X yarıgrubuna X üzerindeki **kısmi bire-bir dönüşümler yarıgrubu** veya **simetrik inverse yarıgrup** denir. S_X grubuna da X üzerindeki **simetrik grup (permütasyon grubu)** denir.

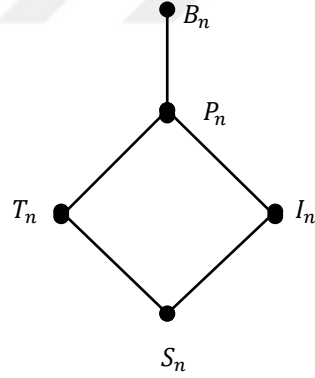
Tanımlardan dolayı

$$S_X \leq T_X, \quad I_X \leq P_X \leq B_X$$

olduğu açıktır.

Eğer X bir sonlu küme ise genelliği bozmaksızın $X = X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ sonlu kümesi ele alınır. Bu durumda B_X, P_X, T_X, I_X, S_X yerine sırasıyla B_n, P_n, T_n, I_n, S_n yazılır.

Böylelikle $S_n \subseteq T_n, I_n \subseteq P_n \subseteq B_n$ olup aralarındaki bu ilişkiyi aşağıdaki Hasse Diyagramı ile verebiliriz.



Şekil 2.2. Dönüşüm Yarıgruplarının Hasse Diyagramı

Ayrıca, $\alpha \in T_n$ dönüşümünü de

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1\alpha & 2\alpha & \dots & n\alpha \end{pmatrix}$$

formunda temsil edebiliriz.

Önerme 2.5.12. $\alpha \in P_n$ kısmi dönüşümünün bir idempotent eleman olması için gerek ve yeter koşul α nın $\text{im}(\alpha)$ ya kısıtlanışının $\text{im}(\alpha)$ üzerinde birim dönüşüm olmasıdır. Buna denk olarak, $\alpha \in P_n$ kısmi dönüşümünün bir idempotent eleman olması için gerek ve yeter koşul her $x \in \text{im}(\alpha)$ için $x\alpha = x$ olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$ $\alpha \in P_n$ kısmi dönüşümü bir idempotent olsun. Farz edelim ki bir $x \in \text{im}(\alpha)$ için $x\alpha \neq x$ olsun. O halde $x \neq y \in X_n$ için $y\alpha = x$ olup

$$y\alpha^2 = (y\alpha)\alpha = x\alpha \neq x = y\alpha$$

elde edilir. Bu durum ise α nın idempotent olması ile çelişkilidir. O halde $\forall x \in \text{im}(\alpha)$ için $x\alpha = x$ olmalıdır.

$(\Leftarrow)$ $\alpha \in P_n$ kısmi dönüşüm ve $\forall x \in \text{im}(\alpha)$ için $x\alpha = x$ olsun. O halde $\forall x \in \text{im}(\alpha) \subseteq \text{dom}(\alpha)$ için

$$x\alpha^2 = (x\alpha)\alpha = x\alpha$$

olup $\forall y \in \text{dom}(\alpha) \setminus \text{im}(\alpha)$ için $y\alpha = x$ olacak şekilde bir $x \in \text{im}(\alpha)$ var ve

$$y\alpha^2 = (y\alpha)\alpha = x\alpha = x = y\alpha$$

olduğundan α bir idempotenttir. ■

Tanım 2.5.13. (Cayley Teoremi) Eleman sayısı n olan sonlu bir yarıgrup T_n veya T_{n+1} in bir altyarıgrubuna izomorftur.

İspat. Ganyushkin, Mazorchuk (2009), Theorem 2.4.3' e bakınız.

Teorem 2.5.14. S , T_n ve P_n yarıgruplarından herhangi biri ve $\alpha, \beta \in S$ olsun. O halde

1. $\alpha\mathcal{R}\beta \Leftrightarrow \ker(\alpha) = \ker(\beta)$ ve $\text{dom}(\alpha) = \text{dom}(\beta)$,
2. $\alpha\mathcal{L}\beta \Leftrightarrow \text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta)$,
3. $\alpha\mathcal{H}\beta \Leftrightarrow \text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta)$ ve $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$,
4. $\alpha\mathcal{D}\beta \Leftrightarrow |\text{im}(\alpha)| = |\text{im}(\beta)|$ dir.

İspat. Ganyushkin, Mazorchuk (2009), Theorem 4.5.1' e bakınız. ■

P_n kısmi dönüşümler yarı grubunda $n + 1$ tane $\mathcal{D}$ -Green denklik sınıfı var olup $0 \leq k \leq n$ için

$$D_k = \{\alpha \in P_n : |\text{im}(\alpha)| = k\}$$

şeklindedir. T_n dönüşümler yarı grubunda ise n tane $\mathcal{D}$ -Green denklik sınıfı var olup $1 \leq k \leq n$ için

$$D_k = \{\alpha \in T_n : |\text{im}(\alpha)| = k\}$$

şeklindedir.

Tanım 2.5.15. $n \geq k$ olmak üzere n farklı nesneyi k tane özdeş kutuya kutular boş kalmayacak şekilde dağıtmanın sayısına **2. Tip Stirling Sayısı** denir ve $S(n, k)$ ile gösterilir. O halde

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{r=0}^k (-1)^r \binom{k}{k-r} (k-r)^n$$

olur. Ayrıca, $S(n, 1) = S(n, n) = 1$ ve $1 < k \leq n$ olmak üzere

$$S(n+1, k) = S(n, k-1) + kS(n, k)$$

indirgeme bağıntısı ile elde edilir.

Önerme 2.5.16. $0 \leq k \leq n$ için P_n de ($1 \leq k \leq n$ için T_n de) bir D_k sınıfı

- $\binom{n}{k}$ tane $\mathcal{L}$ –Green denklik sınıfı
- $S(n, k)$ tane $\mathcal{R}$ –Green denklik sınıfı
- $\binom{n}{k} S(n, k)$ tane $\mathcal{H}$ –Green denklik sınıfı içerir.

İspat. Ganyushkin ve Mazorchuk (2009), Proposition 4.6.3, Proposition 4.6.4 ve Proposition 4.6.5' e bakınız. ■

Önerme 2.5.17. P_n (T_n) yarıgrupunun bir D_k sınıfında her bir $\mathcal{H}$ –Green denklik sınıfı $k!$ tane eleman içerir.

İspat. Ganyushkin, Mazorchuk (2009), Proposition 4.6.6' ya bakınız. ■

Tanım 2.5.18. $\alpha \in S_n$ ve $a_1, a_2, \dots, a_k \in X_n$ birbirinden farklı elemanlar olmak üzere her $i = 1, 2, \dots, k-1$ için $a_i \alpha = a_{i+1}$, $a_k \alpha = a_1$ ve her $x \in X_n \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ için $x\alpha = x$ ise α ya bir **r-devir** denir ve $\alpha = (a_1 a_2 \dots a_k)$ şeklinde yazılır. Özel olarak bir 2-devir **transpozisyon** olarak da adlandırılır. Ayrıca, birim permütasyon $\varepsilon = (i) \ (\forall 1 \leq i \leq n)$ olarak da ifade edilebilir.

$k, t \in \mathbb{Z}^+$ için eğer $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ ve $\{b_1, b_2, \dots, b_t\}$ iki ayrık küme ise $(a_1 a_2 \cdots a_k)$ ve $(b_1 b_2 \cdots b_t)$ devirlerine **ayrık devirler** denir.

X_n üzerindeki permütasyonlar grubu S_n , ayrık devirlerin çarpımı şeklinde yazılabilir. Ayrıca her devir de transpozisyonların çarpımı şeklinde yazılabilir. Gerçekten de $r \geq 3$ için

$$(a_1 a_2 \cdots a_r) = (a_1 a_2)(a_1 a_3) \cdots (a_1 a_r)$$

şeklindedir. Dolayısıyla her permütasyon transpozisyonların çarpımı şeklinde yazılabilir. Bir permütasyonun transpozisyonların çarpımı şeklinde yazılışı tek türlü değildir, ancak sayısı aynıdır. Eğer bir permütasyon tek sayıda transpozisyonun çarpımı şeklinde yazılabiliyorsa bu permütasyona **tek permütasyon**, çift sayıda transpozisyonun çarpımı şeklinde yazılabiliyorsa bu permütasyona **çift permütasyon** denir. S_n deki tüm çift permütasyonların kümesi A_n ve tek permütasyonların kümesi B_n ile gösterilir. (Bakınız: Asar, Arıkan, Arıkan (2009), Teorem 1.3.8, Teorem 1.3.9, Teorem 1.3.10, Teorem 1.3.11, Teorem 1.3.13, Teorem 1.3.14) Örneğin; $A_2 = \{\varepsilon\}$, $A_3 = \{\varepsilon, (123), (132)\}$, $A_4 = \{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (123), (124), (134), (234), (132), (142), (143), (243)\}$.

Önerme 2.5.19. $n \geq 2$ için X_n üzerindeki çift permütasyonların kümesi A_n bileşke işlemiyle S_n nin alt grubudur. Ayrıca $|A_n| = \frac{n!}{2}$ dir.

İspat. Asar, Arıkan, Arıkan (2009), Teorem 1.3.15' e bakınız. ■

Tanım 2.5.20. A_n grubuna **n –inci alterne grup** denir.

Teorem 2.5.21. $S_2 = \langle (12) \rangle, S_3 = \langle (12), (23) \rangle$ ve $n \geq 3$ için

$$S_n = \langle (12), (12 \dots n) \rangle$$

dir.

İspat. Howie (1995), Exercises 1.9: 6' ya bakınız. ■

Teorem 2.5.22. $n \geq 3$ için $\text{rank}(S_n) = 2$ olur.

İspat. Howie (1995), Exercises 1.9: 6' ya bakınız. ■

Yarıgruplarla ilgili daha ayrıntılı tanım ve bilgiler için ilgili kaynaklara (örneğin, Howie (1995), Ganyushkin Mazorchuk (2009)) ve gruplarla ilgili daha ayrıntılı tanım ve bilgiler için ilgili kaynaklara (örneğin; Asar, Arıkan, Arıkan (2009), Isaacs (2008)) bakınız.

2.6. Grafikler ve Diyagramlar

Bir **grafik**, köşeler kümesi denen boş olmayan sonlu bir kümeden ve kenarlar listesi denen ve köşelerin sırası önemli olmayan ikililerinin listesinden oluşan yapıya denir. Π bir grafik olsun. Genel olarak, Π nin köşelerinin kümesi $V(\Pi)$ ile ve kenarlarının listesi $E(\Pi)$ ile gösterilir. Ayrıca u, v iki köşe olsun. Bu köşeleri birleştiren bir kenar varsa bu kenar $\{u, v\}$ ile gösterilir. Eğer Π de u ve v köşelerini birleştiren çok kenar varsa bu kenarlara **katlı kenar** denir. Bir kenarın iki ucu aynı köşe olduğunda bu kenara **halka** denir. Π , halka ve katlı kenar içermiyor ise bu grafiğe **basit grafik** denir. Π grafiği tek parça ise Π ye bir **bağlantılı grafik**, tek parça değilse Π ye **bağlantısız grafik** denir.

Bir **yönlü grafik** veya **diyagram (directed graph, digraph)** ise köşeler kümesi denen boş olmayan sonlu bir küme ve yönlü kenarlar listesi (oklar) denen sıranın önemli olduğu ikili köşelerin listesinden oluşur. Π bir yönlü grafik olsun. Π

nin köşelerinin kümesi $V(\Pi)$ ile ve okların listesi $\vec{E}(\Pi)$ ile gösterilir. Ayrıca u, v köşelerini birleştiren ok (u, v) veya $u \rightarrow v$ ile gösterilir.

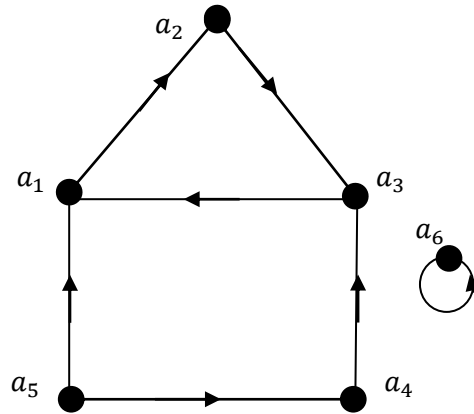
Π bir (yönlü) grafik ve $u_1, u_2, \dots, u_k \in V(\Pi)$ olsun. Eğer

$$u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow \dots \rightarrow u_k$$

şeklinde kenarlarından (oklarından) elde edilen bir dizi varsa bu diziye uzunluğu $k - 1$ olan bir **yol** denir ve $u_1 u_2 \dots u_k$ ile gösterilir. Bir yolda tüm kenarlar (oklar) farklı olduğunda bu yola bir **iz** ve aynı zamanda tüm köşeleri farklı olduğunda da bir **(yönlü) patika** denir.

$k \geq 2$ için farklı köşelerin $u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow \dots \rightarrow u_k$ yönlü patikasına **u_1 den u_k ya yönlü patika** denir. Buna ek olarak, eğer $(u_k, u_1) \in \vec{E}(\Pi)$ ise $u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow \dots \rightarrow u_k \rightarrow u_1$ şeklindeki patikaya u_1 den u_1 e **kapalı (yönlü) patika** veya **k uzunluklu devir (k -cycle)** denir. Özel olarak $k = 1$ ise $u_1 \rightarrow u_1$ devrine **1-devir** denir ve (u_1) ile gösterilir.

Örnek 2.6.1. Aşağıda verilen Π_1 diyagramını ele alalım.



Yukarıdaki Π_1 diyagramı için $V(\Pi_1) = \{a_1, \dots, a_6\}$ ve $\vec{E}(\Pi_1) = \{(a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_1), (a_4, a_3), (a_5, a_4), (a_5, a_1), (a_6, a_6)\}$ dir. Dikkat edilirse

$$a_5 \rightarrow a_4 \rightarrow a_3 \rightarrow a_1 \rightarrow a_2$$

uzunluğu 5 olan bir yönlü patikadır,

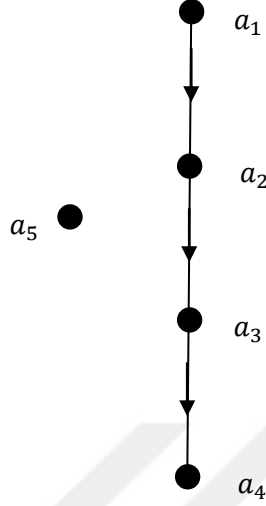
$$a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \rightarrow a_1$$

uzunluğu 3 olan (kapalı yönlü patika) bir devirdir ve (a_1, a_2, a_3) ile gösterilir. Ayrıca (a_6) 1-devirdir.

Tanım 2.6.2. $u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow \dots \rightarrow u_k$ $k - 1$ uzunluklu bir yönlü patika olsun. Eğer $\vec{E}(\Pi) - \{(u_1, u_2), (u_2, u_3), \dots, (u_{k-1}, u_k)\}$ kümesinde $1 \leq i \leq k$ için u_i lerden birini içeren herhangi bir yönlü kenar yoksa bu patikaya **k -uzunluklu bir zincir (k -zincir)** denir ve $[u_1, \dots, u_k]$ ile gösterilir.

Eğer $(u, v) \in \vec{E}(\Pi)$ veya $(v, u) \in \vec{E}(\Pi)$ olacak şekilde $v \in V(\Pi)$ yoksa u ya **1-zincir** denir ve $[u]$ ile gösterilir.

Örnek 2.6.3. Aşağıda verilen Π_2 diyagramını ele alalım.



Yukarıdaki Π_2 diyagramı için $V(\Pi_2) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ ve $\vec{E}(\Pi_2) = \{(a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_4)\}$ dir. Dikkat edilirse $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \rightarrow a_4$ uzunluğu 4 olan bir zincirdir ve $[a_1, a_2, a_3, a_4]$ ile gösterilir. Ayrıca $[a_5]$ bir 1-zincirdir.

Tanım 2.6.4. Π_1 ve Π_2 iki diyagram olsun. Eğer $V(\Pi_1) \cap V(\Pi_2) = \emptyset$ ise Π_1 ve Π_2 diyagramları **ayrık** diyagramlardır denir. Bir diyagramdaki yönler ihmal edilerek elde edilen grafik karşılığı bir bağlantılı grafik ise bu diyagrama **bağlantılı diyagram** denir. Ayrıca herhangi bir bağlantılı diyagramın yönleri ihmal edilerek elde edilen grafik karşılığında bir devir yoksa bu diyagrama **(yönlendirilmiş) ağaç** denir.

Tanım 2.6.5. γ bir sonlu ağaç (sonlu sayıda köşesi ve yönlü kenarı olan ağaç) olsun. O halde $\exists u \in V(\gamma)$ vardır öyle ki $(u, v) \in \vec{E}(\gamma)$ olacak şekilde $v \in V(\gamma)$ yoktur. Bu durumdaki $u \in V(\gamma)$ ye bir kök denir. γ ağacında yönlü bir patika varsa tüm yönlü patikaların maksimum uzunluklu olanının uzunluğuna **γ ağacının boyutu (uzunluğu)** denir. Aksi takdirde bu ağaç sadece kökten oluşuyor olup bu ağacın uzunluğunu 1 olarak tanımlayacağız.

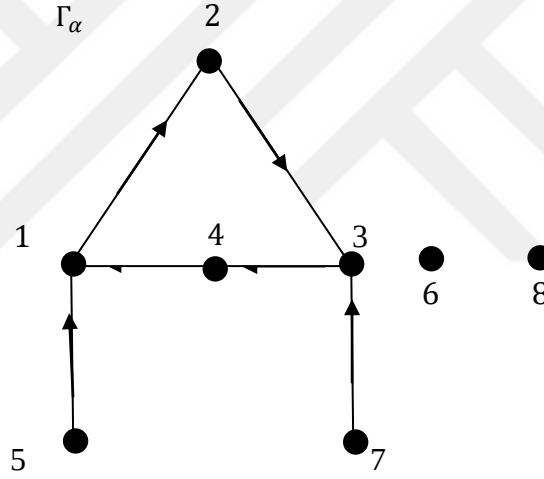
Tanım 2.6.6. Herhangi bir $\alpha \in P_n$ için Γ_α diyagramını

$$V(\Gamma_\alpha) = X_n$$

$$\vec{E}(\Gamma_\alpha) = \{(u, v) \in X_n \times X_n : u \in \text{dom}(\alpha), u\alpha = v\}$$

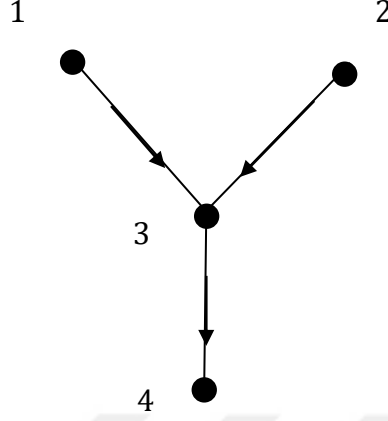
olarak tanımlayalım.

Örnek 2.6.7. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 1 & - & 3 & - \end{pmatrix}$ için Γ_α diyagramı



şeklinde olur. Dikkat edilirse Γ_α diyagramı bağlantılı olmayan bir diyagramdır.

Örnek 2.6.8. $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & - \end{pmatrix}$ için Γ_β diyagramı



şeklinde olur. Dikkat edilirse Γ_β diyagramı uzunluğu 3 olan bağlantılı bir ağaçtır ve bu ağacın tek kökü $4 \in V(\Gamma_\beta)$ dir.

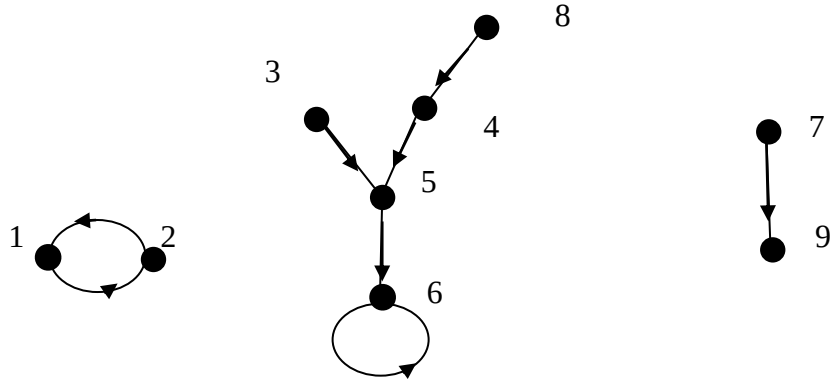
Ganyushkin ve Mazarchuk (2009) da belirtildiği gibi Γ_β diyagramı bağlantılı alt diyagramların (bağlantılı bileşen) ayrık bileşkesi şeklindedir. Her bir bağlantılı bileşene **α -nın bir orbiti** denir. Bir $\alpha \in P_n$ kısmi dönüşümünün orbit yapısı α dönüşümünün yapısı hakkında önemli bilgiler sağlamaktadır. Bir $\alpha \in P_n$ dönüşümünün orbitlerinin 3 tipte olduğu bilinmektedir. Bunlar:

1. Devirler
2. Ağaçlar eklenmiş devirler
3. Tek köklü ağaçlar

Şeklindedir. Özel olarak $\alpha \in T_n$ ise α dönüşümünün orbitleri iki tiptedir. Bunlar:

1. Devirler
2. Ağaçlar eklenmiş devirler

Örnek 2.6.9. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 5 & 5 & 6 & 6 & 9 & 4 & - \end{pmatrix} \in P_9$ elemanının orbit yapısı



şeklindedir.

Grafik ve diyagramlarla ilgili olarak bu tezde verilmeyen tanım ve temel bilgiler için ilgili kaynaklara (örnek olarak, Wilson, Watkins (1990); Wilson (2010)) bakılması tavsiye edilir.



3. BAZI DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA QUASI-İDEMPOTENTLER

Bu bölümde Umar (1993), Garba ve Imam (2016) ve Bugay (2020b) makalelerinde elde edilen önemli sonuçları derleyeceğiz.

3.1. P_n de Quasi-idempotentler

$\alpha \in P_n$ için

$$K(\alpha) = \{x \in \text{dom}(\alpha) : x\alpha^k = x \text{ olacak şekilde } k \in \mathbb{Z}^+ \text{ var}\}$$

olarak tanımlansın. Başka bir ifade ile; $K(\alpha)$, Γ_α diyagramındaki tüm devirler üzerindeki köşelerin oluşturduğu kümelerin birleşimi olsun. Bu notasyonla, idempotent olmayan bir $\alpha \in P_n$ dönüşümünün ne zaman bir quasi-idempotent olduğunu veren aşağıdaki önermeyi inceleyelim.

Önerme 3.1.1. $\alpha \in P_n$ idempotent olmayan bir eleman olsun. α nın bir quasi-idempotent olması için gerek ve yeter koşul

1. $\forall x \in K(\alpha)$ için $x\alpha^2 = x$ olması
2. $\forall x \in \text{dom}(\alpha) - K(\alpha)$ için $x\alpha \notin \text{dom}(\alpha)$ veya $x\alpha^2 \in K(\alpha)$

olmasıdır.

İspat. ($\Rightarrow$) $\alpha \in P_n$ bir quasi-idempotent ve $x \in K(\alpha)$ olsun. Eğer $x\alpha = x$ ise zaten $x\alpha^2 = x$ olduğu açıktır. Kabul edelim ki $x\alpha \neq x$ olsun. α bir quasi-idempotent olup $\alpha \neq \alpha^2 = \alpha^4$ olduğundan;

$$x\alpha^3 = x\alpha^5 = x\alpha^7 = \dots$$

3. BAZI DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA QUASI-İDEMPOTENTLER Gizem KUTLU

$$x\alpha^2 = x\alpha^4 = x\alpha^6 =$$

eşitlikleri elde edilir. $x \in K(\alpha)$ olduğundan $x\alpha^k = x$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}^+$ var olup ya $x\alpha^2 = x$ ya da $x\alpha^3 = x$ olur.

Eğer $x\alpha^3 = x$ ise $x\alpha^2 = x\alpha^3(\alpha^2) = x\alpha^5 = x\alpha^3 = x$ olup $x\alpha = x\alpha^3 = x$ olur. Bu durum $x\alpha \neq x$ olması ile çelişir. O halde $x\alpha^2 = x$ olduğu elde edilir.

Şimdi de $x \in \text{dom}(\alpha) - K(\alpha)$ için ele alalım. Eğer $x\alpha \notin \text{dom}(\alpha)$ ise yapacak bir şey yoktur. Eğer $x\alpha \in \text{dom}(\alpha)$ ise $x\alpha^2 \in \text{dom}(\alpha)$ olur. Aksi halde, yani $x\alpha^2 \notin \text{dom}(\alpha)$ ise $x\alpha^4 \notin \text{dom}(\alpha)$ olur ve bu durumda $x\alpha^2 \neq x\alpha^4$ olup bu durum α nın quasi-idempotent olması ile çelişirdi. Üstelik α bir quasi-idempotent olduğundan $(x\alpha^2)\alpha^2 = x\alpha^4 = x\alpha^2$ olup $x\alpha^2 \in K(\alpha)$ olur.

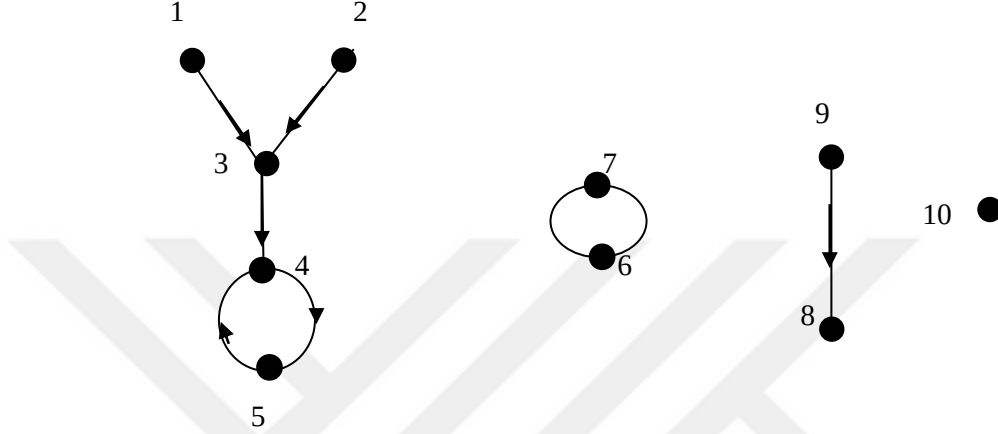
($\Leftarrow$) $\alpha \in P_n$ idempotent olmayan bir eleman olsun, öyle ki $\forall x \in K(\alpha)$ için $x\alpha^2 = x$; $\forall x \in \text{dom}(\alpha) - K(\alpha)$ için $x\alpha \notin \text{dom}(\alpha)$ veya $x\alpha^2 \in K(\alpha)$ olsun. $\forall y \in X_n - \text{dom}(\alpha)$ için $y\alpha^2 = y\alpha^4$ olduğu açıktır. Şimdi $y \in \text{dom}(\alpha)$ düşünelim. Eğer $y \in K(\alpha)$ ise $y\alpha^2 = y$ olup $y\alpha^4 = (y\alpha^2)\alpha^2 = y\alpha^2$ elde edilir. Eğer $\forall y \in \text{dom}(\alpha) - K(\alpha)$ ise hipotezden dolayı $y\alpha \notin \text{dom}(\alpha)$ veya $y\alpha^2 \in K(\alpha)$ olur. $y\alpha \notin \text{dom}(\alpha)$ olması durumunda $y\alpha^2 = y\alpha^4$ olduğu açıktır. Öte yandan $y\alpha^2 \in K(\alpha)$ olması durumunda da hipotezden dolayı $(y\alpha^2)\alpha^2 = y\alpha^2$ olup $y\alpha^4 = y\alpha^2$ olduğu elde edilir. Böylece $\alpha \neq \alpha^2 = \alpha^4$ olup α bir quasi-idempotenttir. ■

Sonuç 3.1.2. $\alpha \in P_n$ idempotent olmayan bir eleman olsun. α nın bir quasi-idempotent olması için gerek ve yeter koşul α nın her bir orbitinin

1. 1-devir veya 2-devir (ağaç eklenmeden)
2. Uzunluğu 2 veya 3 olan bazı ağaçlar eklenmiş 1-devir veya 2-devir
3. Tek kökü olan 1 veya 2 uzunluklu ağaç

formlardan biri şeklinde olmasıdır. ■

Örnek 3.1.3. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 3 & 4 & 5 & 4 & 7 & 6 & - & 8 & - \end{pmatrix} \in Q(P_{10})$ nin orbit yapısı:



Sonuç 3.1.4. $\alpha \in T_n$ idempotent olmayan bir eleman olsun. α nın bir quasi-idempotent olması için gerek ve yeter koşul $\forall x \in K(\alpha)$ için $x\alpha^2 = x$ ve $\forall x \in X_n - K(\alpha)$ için $x\alpha^2 \in K(\alpha)$ olmasıdır. ■

Sonuç 3.1.5. $\alpha \in T_n$ idempotent olmayan bir eleman olsun. α nın bir quasi-idempotent olması için gerek ve yeter koşul α nın her bir orbitinin

1. 1-devir veya 2-devir (ağaç eklenmeden)
2. Uzunluğu 2 veya 3 olan bazı ağaçlar eklenmiş 1-devir veya 2-devir

formlardan biri şeklinde olmasıdır. ■

3.2. I_n , $I_n^- (I_n^+)$ daki Quasi-idempotentler

I_n, X_n kümesi üzerindeki bire-bir örten dönüşümlerden oluşan simetrik inverse yarıgrup olmak üzere I_n de tanım (görüntü) kümesinde en fazla $n - 1$ tane eleman olan tüm kısmi 1-1 dönüşümlerin kümesi SI_n olsun;

$$SI_n = \{\alpha \in I_n : |\text{dom}(\alpha)| \leq n - 1\} = I_n - S_n$$

SI_n in dönüşümlerin bileşkesi işlemiyle I_n nin bir altyarı grubu olduğu açıktır. $\alpha \in I_n$ olmak üzere $\forall x \in \text{dom}\alpha$ için $x\alpha \leq x$ oluyorsa α ya **sıra azaltan kısmi bire-bir dönüşüm**; $\forall x \in \text{dom}\alpha$ için $x\alpha \geq x$ oluyorsa α ya **sıra arttıran kısmi bire-bir dönüşüm** denir. SI_n deki tüm sıra azaltan kısmi bire-bir dönüşümlerin kümesi I_n^- ve SI_n deki tüm sıra arttıran kısmi bire-bir dönüşümlerin kümesi I_n^+ olsun.

$$I_n^- = \{\alpha \in SI_n : x \in \text{dom}\alpha \text{ için } x\alpha \leq x\}$$

$$I_n^+ = \{\alpha \in SI_n : x \in \text{dom}\alpha \text{ için } x\alpha \geq x\}$$

$I_n^- (I_n^+)$, SI_n yarı grubunun bir altyarı grubudur.

Umar (1993) de $I_n^- (I_n^+)$ daki quasi-idempotentleri; Garba ve Imam (2016) da I_n deki quasi-idempotentleri karakterize etmiştir. Bu bölümde ilgili çalışmalardaki önemli sonuçları derleyeceğiz.

Önerme 3.2.1. İdempotent olmayan $\alpha \in I_n$ elemanının bir quasi-idempotent olması için gerek ve yeter koşul her bir orbitinin en fazla 2 uzunluklu olmasıdır.

3. BAZI DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA QUASI-İDEMPOTENTLER Gizem KUTLU

İspat. $(\Rightarrow)$ $\alpha \in I_n$ bir 3-devir (a_1, a_2, a_3) orbitine sahip olsun. O halde α^2 de (a_1, a_3, a_2) 3-devir orbitine sahip olacak ve böylece α^2 idempotent olamayacaktır.

Benzer şekilde, $\alpha \in I_n$ bir 3-zincir $[a_1, a_2, a_3]$ orbitine sahip olsun. O halde α^2 de $[a_1, a_3]$ zincir orbitine sahip olacak ve böylece α^2 idempotent olamayacaktır.

Bu iki durumda da $\alpha^2 \neq \alpha^4$ olup α bir quasi-idempotent olamayacaktır. Benzer şekilde $n \geq 4$ için de gösterilebilir.

$(\Leftarrow)$ $\alpha \in I_n$ de $a, b, a_1, a_2, b_1, b_2 \in X_n$ farklı elemanlar olmak üzere (a) , (a_1, a_2) , $[b]$, $[b_1, b_2]$ devir ve zincir orbitlerini düşünelim.

$$\begin{aligned} a\alpha &= a = a\alpha^2 = a\alpha^3 = a\alpha^4; \\ a_1\alpha^2 &= a_1 \text{ olup } a_1\alpha^4 = (a_1\alpha^2)\alpha^2 = a_1\alpha^2 = a_1; \\ a_2\alpha^2 &= a_2 \text{ olup } a_2\alpha^4 = (a_2\alpha^2)\alpha^2 = a_2\alpha^2 = a_2; \\ b\alpha &\in X_n - \text{dom}\alpha \text{ olup } b\alpha^2, b\alpha^4 \in X_n - \text{dom}\alpha; \\ b_1\alpha &= b_2 \text{ ve } b_1\alpha^2 \in X_n - \text{dom}\alpha \text{ olup } b_1\alpha^2, b_1\alpha^4 \in X_n - \text{dom}\alpha; \\ b_2\alpha &\in X_n - \text{dom}\alpha \text{ olup } b_2\alpha^2, b_2\alpha^4 \in X_n - \text{dom}\alpha \end{aligned}$$

olacağından sonuç açıktır. ■

Sonuç 3.2.2. $\alpha \in Q(I_n)$ olması için gerek ve yeter koşul α nın ayrık 1-devirlerin (genel olarak 1-devirler ihmal edilir), 1-zincirlerin, en az bir 2-devir ve/veya 2-zincirin çarpımı şeklinde yazılabiliyor olmasıdır. ■

Örnek 3.2.3. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & -4 & 3 & 6 & - & \end{pmatrix} = (1)[2](34)[56] = [2](34)[56] \in Q(I_6)$

3. BAZI DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA QUASI-İDEMPOTENTLER Gizem KUTLU

Şimdi de I_n^+ ve I_n^- deki quasi-idempotentleri inceleyelim. Öncelikle gereken bazı önemli bilgileri ve notasyonları verelim.

Önerme 3.2.4. I_n^- ve I_n^+ yarıgrupları izomorfiktir.

İspat. $\alpha \in I_n^-$ için $\bar{\alpha} \in I_n^+$ dönüşümü

$$i\bar{\alpha} = n - (n - i + 1)\alpha + 1 \quad (n - i + 1 \in \text{dom}\alpha)$$

şeklinde tanımlansın. Bu notasyonla

$$\theta: I_n^- \rightarrow I_n^+, \quad \alpha\theta = \bar{\alpha}$$

şeklinde tanımlanan dönüşümün iyi tanımlı, 1-1 ve örten olduğu açıktır. Ayrıca $\alpha, \beta \in I_n^-$ için

$$(\alpha\beta)\theta = \overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta} = (\alpha\theta)(\beta\theta)$$

olup θ bir yarıgrup izomorfizmidir. ■

Bu önermenin açık bir sonucu olarak bundan sonra I_n^- için elde edilen her sonucun I_n^+ daki karşılığı açıkça elde edilebilir.

Önerme 3.2.5. $\alpha \in I_n^-$ bir quasi-idempotent ise $\alpha^2 = \alpha^3$ tür.

İspat. $\alpha \in I_n^-$ ve $x \in \text{dom}(\alpha^2)$ olsun. O halde

$$x\alpha^2 \geq x\alpha^3 \geq x\alpha^4 = x\alpha^2$$

3. BAZI DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA QUASI-İDEMPOTENTLER Gizem KUTLU

olacağından $\alpha^2 = \alpha^3$ tür. ■

$\alpha \in I_n \in P_n$ için $\text{shift}(\alpha) = \{x \in \text{dom}(\alpha) \text{ için } x\alpha \neq x\}$ tanımını hatırlayalım. Buradan $s(\alpha) = |\text{shift}(\alpha)|$ olarak tanımlanır. Bu notasyonlarla I_n^- deki quasi-idempotentler aşağıdaki önermede karakterize edilmiştir.

Önerme 3.2.6. $\alpha \in I_n^-$ olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir.

1. α bir quasi-idempotenttir.
2. $x \in \text{shift}(\alpha)$ ise $x\alpha \notin \text{dom}(\alpha)$
3. $\text{shift}(\alpha)\alpha \cap \text{dom}(\alpha) = \emptyset$
4. $\text{shift}(\alpha) \cap \text{im}(\alpha) = \emptyset$

İspat. $(1 \Rightarrow 2)$ $\alpha \in I_n^-$ bir (idempotent olmayan) quasi-idempotent ve $x \in \text{shift}(\alpha)$ iken $x\alpha \in \text{dom}(\alpha)$ olsun. O halde $x\alpha \neq x$ olup α bire-bir olduğundan $x\alpha \neq x\alpha^2$ dir. Böylece $x > x\alpha > x\alpha^2$ olduğu elde edilir. Ancak $\alpha \in I_n$ bir quasi-idempotent olup her bir orbitinin uzunluğu en fazla 2 olabileceğinden $x\alpha^2 = x$ olmasını gerektirecek olup bu durum $x > x\alpha > x\alpha^2$ olması ile çelişir. O halde $x\alpha \notin \text{dom}(\alpha)$ dir.

$(2 \Rightarrow 3)$ $y \in X_n$ için $y \in \text{shift}(\alpha)\alpha \cap \text{dom}(\alpha)$ olsun. $y \in \text{shift}(\alpha)\alpha$ olup $x\alpha = y$ olacak şekilde $x \in \text{shift}(\alpha)$ vardır. Ancak (2) den dolayı $y = x\alpha \notin \text{dom}(\alpha)$ olup bu durum $y \in \text{dom}(\alpha)$ olması ile çelişir. O halde $\text{shift}(\alpha)\alpha \cap \text{dom}(\alpha) = \emptyset$ dir.

$(3 \Rightarrow 4)$ $y \in \text{shift}(\alpha) \cap \text{im}(\alpha)$ olsun. $y \in \text{im}(\alpha)$ olup $x\alpha = y$ olacak şekilde $x \in \text{dom}(\alpha)$ vardır. $y \in \text{shift}(\alpha)$ olup $y \in \text{dom}(\alpha)$ olacağından (3) ten dolayı $y \notin \text{shift}(\alpha)\alpha$ olacaktır. O halde $x \notin \text{shift}(\alpha)$ olup $x\alpha = x$ ve $y\alpha = y$ olacaktır. Bu durum $y \in \text{shift}(\alpha)$ olması ile çelişiyor olup $\text{shift}(\alpha) \cap \text{im}(\alpha) = \emptyset$ olduğu elde edilir.

3. BAZI DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA QUASI-İDEMPOTENTLER Gizem KUTLU

$(4 \Rightarrow 1)$ $\text{shift}(\alpha) \cap \text{im}\alpha = \emptyset$ ve $y \in \text{dom}(\alpha)$ olsun. O halde $y\alpha \in \text{im}(\alpha)$ ve $y\alpha \notin \text{shift}(\alpha)$ olup ya $y\alpha \in \text{dom}(\alpha)$ ve $y\alpha^2 = y\alpha$ ya da $y\alpha \notin \text{dom}(\alpha)$ dır. 1. durumda $y \in \text{dom}(\alpha^2)$ ve $y\alpha^2 = y$ olur. 2. durumda da $y \notin \text{dom}(\alpha^2)$ olur. Böylece her $y \in \text{dom}(\alpha^2)$ için $y\alpha^2 = y$ olacaktır. Her iki durumda da α^2 bir idempotent olup $\alpha^2 = \alpha^4$ olduğu elde edilir. ■

Sonuç 3.2.7. $\alpha \in I_n^-$ idempotent olmayan bir eleman ve $|\text{im}(\alpha)| = |\text{dom}(\alpha)| = n - 1$ olmak üzere α nın bir quasi-idempotent olması için gerek ve yeter koşuls(α) = 1 olmasıdır. ■

Sonuç 3.2.8. $\alpha \in I_n^-$ idempotent olmayan bir eleman olsun. $s(\alpha) = 1$ ise α bir quasi-idempotenttir. ■

$\alpha \in I_n^-$ bir quasi-idempotent ve $|\text{im}(\alpha)| = |\text{dom}(\alpha)| = n - 1$ ise $\text{dom}(\alpha) = X_n - \{y\}$, $\text{im}(\alpha) = X_n - \{x\}$, $x\alpha = y$ ve $\forall z \in \text{dom}(\alpha) - \{x\}$ için $z\alpha = z$ olacak şekilde $x > y \in X_n$ vardır. Bu durumda $\alpha = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ($x > y$) şeklinde ifade edilebilir. Böylece aşağıdaki sonuç kolayca elde edilir.

Sonuç 3.2.9. $Q_{n-1} = \{\alpha \in Q(I_n^-) : |\text{im}(\alpha)| = n - 1\}$ olmak üzere

$$|Q_{n-1}| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

olur. ■

3.3. S_n deki Quasi-idempotentler

$\alpha \in S_n$ bir quasi-idempotent olsun. O halde $\alpha \neq \alpha^2 = \alpha^4$ olup S_n bir grup olduğundan bu eşitlik $1 \neq \alpha$ olmak üzere $\alpha^2 = 1$ olmasına denktir. Başka bir ifade

3. BAZI DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA QUASI-İDEMPOTENTLER Gizem KUTLU

ile $\alpha \in S_n$ elemanının bir quasi-idempotent olması için gerek ve yeter koşul α nın derecesinin 2 olmasıdır; yani

$$\alpha \in Q(S_n) \Leftrightarrow |\alpha| = 2$$

olmasıdır. Bu aynı zamanda $1 \neq \alpha = \alpha^{-1}$ olması demektir. Dolayısıyla S_n grubunda quasi-idempotent ve involüsyon kavramları denk kavramlardır.

Daha da genel olarak, quasi-idempotent kavramı tüm gruplarda involüsyon kavramına denk gelmektedir. İnvolüsyonların sonlu basit grupların sınıflandırılmasında kullanıldığı iyi bilinmektedir. Isaacs (2008) da vurgulandığı gibi, $m \geq 1$ ve $n \geq 1$ olmak üzere ($m = n = 2$ haricinde) derecesi m ve n olan iki eleman tarafından üretilen altgrupların yapısı hakkında neredeyse hiçbir şey söylememiz mümkün değildir. Ancak, bir grupta iki quasi-idempotentin dihedral altgrubu ürettiği bilinmektedir. Quasi-idempotentler grup takdimleri için de önemli bir kavramdır. Çünkü, gruplarda quasi-idempotentlerin tersleri de kendileri olup bir takdimde üreteç olan bir quasi-idempotentin tersine ihtiyaç yoktur. Bu nedenlerle bazı grup ve yarıgruplardaki quasi-idempotentlerin yapısını belirlemek önemli bir araştırma konusudur.

Bu tezimizin diğer bölümlerinde olduğu gibi bu bölümde de quasi-idempotent terimini kullanacağız.

Önerme 3.3.1. $\alpha \in S_n$ idempotent olmayan bir permütasyon olmak üzere α nın bir quasi-idempotent olması için gerek ve yeter koşul α nın ayrık 2 - devirler şeklinde yazılabiliyor olmasıdır. (Genel olarak 1 - devirler ihmal edilir.)

İspat. $\alpha \in Q(S_n) \Leftrightarrow \alpha \neq \alpha^2 = \varepsilon$ olduğundan sonuç açıktır. ■

Önerme 3.3.2. Herhangi farklı iki quasi-idempotent $\alpha, \beta \in Q(S_n)$ için

3. BAZI DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA QUASI-İDEMPOTENTLER Gizem KUTLU

$$\alpha\beta \in Q(S_n) \Leftrightarrow \alpha\beta = \beta\alpha$$

İspat. $(\Rightarrow)$ $\alpha \neq \beta \in Q(S_n)$ için $\alpha\beta \in Q(S_n)$ olsun. O halde

$$\alpha\beta = (\alpha\beta)^{-1} = \beta^{-1}\alpha^{-1} = \beta\alpha$$

olup iddia doğrudur.

$(\Leftarrow)$ $\alpha \neq \beta \in Q(S_n)$ için $\alpha\beta = \beta\alpha$ olsun. İlk olarak $\alpha\beta = \varepsilon$ olduğunu kabul edelim. O halde $\alpha^{-1}(\alpha\beta) = \alpha^{-1}\varepsilon$ olup $\beta = \alpha^{-1}$ olurdu. Ancak $\alpha, \beta \in Q(S_n)$ olup $\alpha = \alpha^{-1}$ olduğundan $\beta = \alpha$ olurdu ki bu $\alpha \neq \beta$ olması ile çelişir. O halde kabulümüz yanlış olup $\alpha\beta \neq \varepsilon$ dur. Ayrıca,

$$\begin{aligned} (\alpha\beta)^2 &= (\alpha\beta)(\alpha\beta) \\ &= \alpha(\beta\alpha)\beta \\ &= \alpha(\alpha\beta)\beta \\ &= (\alpha\alpha)(\beta\beta) \\ &= \alpha^2\beta^2 \\ &= \varepsilon\varepsilon \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

olur. O halde $\alpha\beta \in Q(S_n)$ dir. ■

Önerme 3.3.3. $\alpha, \beta \in S_n$ olsun. O halde $\text{fix}(\alpha) \cap \text{fix}(\beta) \subseteq \text{fix}(\alpha\beta)$ başka bir ifade ile $\text{shift}(\alpha\beta) \subseteq \text{shift}(\alpha) \cup \text{shift}(\beta)$ olur.

İspat. $x \in \text{fix}(\alpha) \cap \text{fix}(\beta)$ olsun. O halde $x\alpha = x, x\beta = x$ olup $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta = x\beta = x$ olduğundan $x \in \text{fix}(\alpha\beta)$ dir.

3. BAZI DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA QUASI-İDEMPOTENTLER Gizem KUTLU

$x \in \text{shift}(\alpha\beta)$ olsun. O halde $x\alpha\beta = y$ olacak şekilde $x \neq y \in X_n$ vardır. Eğer $x \in \text{shift}(\alpha)$ ise yapacak bir şey yok. Eğer $x \notin \text{shift}(\alpha)$ ise $x \in \text{fix}(\alpha)$ olup $x\alpha = x$ dir. O halde

$$x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta = x\beta = y \neq x$$

olup $x \in \text{shift}(\beta)$ olur. O halde

$$\text{shift}(\alpha\beta) \subseteq \text{shift}(\alpha) \cup \text{shift}(\beta)$$

olur. ■

Önerme 3.3.4. $\alpha \in S_n$ için aşağıdakiler geçerlidir.

1. $\text{fix}(\alpha) \neq \emptyset$ ise $\forall k \in \mathbb{Z}^+$ için α^k n -devir olamaz.
2. α bir n -devir değil ise $\forall k \in \mathbb{Z}^+$ için α^k da bir n -devir olamaz.
3. α bir n -devir ise $\forall k \in \mathbb{Z} - n\mathbb{Z}$ için $\text{shift}(\alpha^k) = \text{shift}(\alpha) = X_n$ ve $\forall k \in n\mathbb{Z}$ için $\text{shift}(\alpha^k) = \emptyset$ olur.

İspat. 1. $\alpha \in S_n$ ve $\exists i \in X_n$ için $i \in \text{fix}(\alpha)$ olsun. O halde $\forall k \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\begin{aligned} i\alpha^k &= (i\alpha)\alpha^{k-1} \\ &= i\alpha^{k-1} \\ &= \dots \\ &= i \end{aligned}$$

olup $i \in \text{fix}(\alpha^k)$ olacaktır. Ancak, $\beta \in S_n$ bir n -devir iken $\text{fix}(\beta) = \emptyset$ olmak zorunda olup α^k bir n -devir olamaz.

3. BAZI DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA QUASI-İDEMPOTENTLER Gizem KUTLU

2. α bir n -devir olmasın. Eğer $\text{fix}(\alpha) \neq \emptyset$ ise 1. den dolayı sonuç açıktır. Kabul edelim ki $\text{fix}(\alpha) = \emptyset$ olsun. O halde α nın ayrık devirlere ayrılışında uzunluğu 1 den büyük olan en az iki ayrık devir vardır. Genelliği bozmaksızın bu iki ayrık devir $(m, t \geq 2$ ve $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_t \in X_n)$ $\sigma = (a_1 \dots a_m), \beta = (b_1 \dots b_t)$ olmak üzere $\alpha = \sigma\beta$ şeklinde olsun. $\{a_1, \dots, a_m\} \cap \{b_1, \dots, b_t\} = \emptyset$ olduğunu hatırlayalım. Ayrık devirlerin çarpımı değişmeli olup $\forall k \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\alpha^k = (\sigma\beta)^k = \sigma^k \beta^k$$

olur. $\forall 1 \leq i \leq m$ için $a_i \alpha^k = a_u$ ($u \equiv k + i \pmod{m}$) olup

$$a_i \alpha^k = a_i \alpha^k \beta^k = a_u \beta^k = a_u \notin \{b_1, \dots, b_t\}$$

ve $\forall 1 \leq j \leq t$ için $b_j \alpha^k = b_v$ ($v \equiv k + j \pmod{t}$) olup

$$b_j \alpha^k = b_j \alpha^k \beta^k = b_j \beta^k = b_v \notin \{a_1, \dots, a_m\}$$

olduğundan α^k bir n -devir olamaz.

3. $\alpha = (a_1 \dots a_n)$ bir n -devir iken $\alpha^n = \varepsilon$ olup $\forall k \in n\mathbb{Z}$ için $\alpha^k = \varepsilon$ olduğundan $\text{shift}(\alpha^k) = \emptyset$ olur. Eğer $k \in \mathbb{Z} - n\mathbb{Z}$ ise $\alpha^k \neq \varepsilon$ dur. Kabul edelim ki $a_i \in \text{fix}(\alpha^k)$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} a_i \alpha^k &= a_i = a_{(i-1)\alpha} = a_i \alpha^{k-1} = a_{(i-1)} \\ a_{(i-1)} \alpha^k &= a_{(i-1)} \alpha \alpha^{k-1} = a_i \alpha^{k-1} = a_{(i-1)} \\ a_{(i-2)} \alpha^k &= a_{(i-1)} \alpha^k = a_{(i-2)} \alpha^2 \alpha^{k-2} = a_{(i-2)}. \end{aligned}$$

3. BAZI DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA QUASI-İDEMPOTENTLER Gizem KUTLU

ve benzer şekilde devam edilirse $\forall 1 \leq j \leq n$ için $a_j \in \text{fix}(\alpha^k)$ olup $\alpha^k = \varepsilon$ olur. Bu durum $\alpha^k \neq \varepsilon$ olması ile çelişir. O halde $\text{fix}(\alpha^k) = \emptyset$ olup $\text{shift}(\alpha^k) = X_n = \text{shift}(\alpha)$ olduğu elde edilir. ■

Tezin bundan sonraki kısmında kullanacağımız yeni bir notasyon tanımlayalım: $2 \leq m \leq n$ olmak üzere $(b_1 \dots b_m)$ herhangi bir sıralı m -li olsun. Bu durumda $i \neq j, 1 \leq i, j \leq m$ için $(b_i b_j)$ bir 2-devir olmak üzere

$$[[b_1, \dots, b_m]] = \begin{cases} (b_1 b_m)(b_2 b_{m-1}) \dots \left(b_{\frac{m}{2}} b_{\frac{m}{2}+1}\right) & m \text{ çift doğal sayı ise} \\ (b_1 b_m)(b_2 b_{m-1}) \dots \left(b_{\frac{m-1}{2}} b_{\frac{m+3}{2}}\right) & m \text{ tek doğal sayı ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Örneğin;

- $[[b_1, b_2, b_3, b_4]] = (b_1 b_4)(b_2 b_3)$
- $[[b_1, b_2, b_3, b_4, b_5]] = (b_1 b_5)(b_2 b_4)$ olur.

Önerme 3.3.5. $\Pi \in S_n$ herhangi bir n –devir ($n \geq 2$) olmak üzere

$$M(\Pi) = \{k \in \mathbb{N} : \Pi = \alpha_1 \dots \alpha_k; \alpha_i \in Q(S_n) (1 \leq i \leq k)\}$$

kümesi tanımlansın. O halde

$$\min(M(\Pi)) = \begin{cases} 1, & n = 2 \text{ için} \\ 2, & n \geq 3 \text{ için} \end{cases}$$

olur.

3. BAZI DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA QUASI-İDEMPOTENTLER Gizem KUTLU

İspat. $\Pi = (a_1 \dots a_n) \in S_n$ herhangi bir n -devir olsun. $n = 2$ için $\Pi = (a_1 a_2) \in Q(S_2)$ olup $\alpha_1 = \Pi$ alınarak $\min(M(\Pi)) = 1$ olduğu görülür. $n \geq 3$ için $\Pi = (a_1 \dots a_n)$ olsun. $\Pi \notin Q(S_n)$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $\min(M(\Pi)) \geq 2$ dir. Şimdi $\alpha = [[a_1, \dots, a_n]]$ ve $\beta = [[a_2, \dots, a_n]]$ alalım. $\alpha, \beta \in Q(S_n)$ ve $\alpha\beta = \Pi$ olduğu kolayca görülmektedir. Dolayısıyla $\min(M(\Pi)) = 2$ dir. ■

Dikkat 3.3.6. Herhangi bir $\alpha, \beta \in Q(S_n)$ için $\alpha^{-1} = \alpha$ ve $\beta^{-1} = \beta$ olup $\forall k \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\begin{aligned} ((\alpha\beta)^k)^{-1} &= (\alpha\beta\alpha\beta \dots \alpha\beta)^{-1} \\ &= \beta^{-1}\alpha^{-1} \dots \beta^{-1}\alpha^{-1} \\ &= \beta\alpha \dots \beta\alpha \\ &= (\beta\alpha)^k \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $(\alpha\beta)^k$ nın derecesi ile $(\beta\alpha)^k$ nın derecesi aynıdır.

Önerme 3.3.7. Herhangi $\alpha, \beta \in Q(S_n)$ için

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \{(\alpha\beta)^k, (\beta\alpha)^k, (\alpha\beta)^k\alpha, (\beta\alpha)^k\beta \mid 1 \leq k \leq m\}$$

olacak şekilde $1 \leq m \leq n!$ vardır.

İspat. $\alpha, \beta \in Q(S_n)$ ve $U = \{(\alpha\beta)^k, (\beta\alpha)^k, (\alpha\beta)^k\alpha, (\beta\alpha)^k\beta; 1 \leq k \leq m\}$ olsun. $U \leq \langle \alpha, \beta \rangle$ olduğu açıktır. Şimdi $\langle \alpha, \beta \rangle \subseteq U$ olduğunu gösterelim. $\gamma \in \langle \alpha, \beta \rangle$ olsun. $\alpha, \beta \in Q(S_n)$ olup $\alpha^2 = \beta^2 = 1$ olduğundan

$$\gamma = \alpha^{k_1} \beta^{t_1} \alpha^{k_2} \beta^{t_2} \dots \alpha^{k_p} \beta^{t_p}$$

3. BAZI DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA QUASI-İDEMPOTENTLER Gizem KUTLU

olacak şekilde $p \in \mathbb{Z}^+$ ve $0 \leq k_1, k_2, \dots, k_p, t_1, t_2 \dots t_p \leq 1$ tamsayıları vardır. Eğer m , $\alpha\beta$ -nın derecesi ise $\beta\alpha$ nın da derecesi m olup $1 \leq m \leq n!$ şeklindedir. O halde $k \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\begin{aligned}\alpha(\beta\alpha)^k &= \alpha(\beta\alpha\beta\alpha \dots \beta\alpha) \\ &= (\alpha\beta\alpha\beta \dots \alpha\beta)\alpha \\ &= (\alpha\beta)^k\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta(\alpha\beta)^k &= \beta(\alpha\beta\alpha\beta \dots \alpha\beta) \\ &= (\beta\alpha\beta\alpha \dots \alpha\beta)\beta \\ &= (\beta\alpha)^k\beta\end{aligned}$$

olur. Ayrıca $\alpha^2 = \beta^2 = \varepsilon$ ve $(\alpha\beta)^m = (\beta\alpha)^m = \varepsilon$ olduğundan $\gamma \in U$ olur. O halde $\langle \alpha, \beta \rangle \subseteq U$ olduğu elde edilir. ■

Dikkat 3.3.8. $\Pi = (a_1 \dots a_n) \in S_n$ bir n -devir iken $\Pi^{-1} = (a_n \dots a_1)$ olup Π^{-1} de bir n -devirdir. Dikkat 3.3.6' dan dolayı $\forall \alpha \neq \beta \in S_n$ ve $k \in \mathbb{Z}^+$ için $(\alpha\beta)^k$ nın bir n -devir olması için gerek ve yeter koşul $(\beta\alpha)^k$ nın da bir n -devir olmasıdır.

Teorem 3.3.9. Herhangi iki $\alpha, \beta \in Q(S_n)$ için $\langle \alpha, \beta \rangle$ nın bir n -devir içermesi için gerek ve yeter koşul $\alpha\beta$ (Dikkat 3.3.8' den dolayı $\beta\alpha$) nın bir n -devir olmasıdır.

İspat. $(\Leftarrow)$ $\alpha, \beta \in Q(S_n)$ için $\alpha\beta$ bir n -devir ise zaten $\alpha\beta \in \langle \alpha, \beta \rangle$ olup $\langle \alpha, \beta \rangle$ bir n -devir içerir.

$(\Rightarrow)$ $\alpha, \beta \in Q(S_n)$ için $\langle \alpha, \beta \rangle$ bir n -devir $\Pi \in S_n$ içeriyor olsun. $\forall k \in \mathbb{Z}^+$ için $((\alpha\beta)^k)^{-1} = (\beta\alpha)^k$ olup

$$((\alpha\beta)^k\alpha)^2 = (\alpha\beta)^k\alpha(\alpha\beta)^k\alpha$$

3. BAZI DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA QUASI-İDEMPOTENTLER Gizem KUTLU

$$\begin{aligned}
 &= (\alpha\beta \dots \alpha\beta)\alpha(\alpha\beta)^k\alpha \\
 &= \alpha(\beta\alpha)^k(\alpha\beta)^k\alpha \\
 &= \alpha\varepsilon\alpha \\
 &= \alpha^2 \\
 &= \varepsilon
 \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde;

$$\begin{aligned}
 ((\beta\alpha)^k\beta)^2 &= (\beta\alpha)^k\beta(\beta\alpha)^k\beta \\
 &= (\beta\alpha \dots \beta\alpha)\beta(\beta\alpha)^k\beta \\
 &= \beta(\alpha\beta)^k(\beta\alpha)^k\beta \\
 &= \beta\varepsilon\beta \\
 &= \beta^2 \\
 &= \varepsilon
 \end{aligned}$$

olup hem $(\alpha\beta)^k\alpha$ hem de $(\beta\alpha)^k\beta$ bir n -devir olamaz. O halde Önerme 3.3.7.' den $\langle\alpha, \beta\rangle$ nın bir Π n -devrini içermesi için gerek ve yeter koşul $(\alpha\beta)^k = \Pi$ veya $(\beta\alpha)^k = \Pi$ olacak şekilde $1 \leq k \leq n!$ tamsayısının var olmasıdır. Dolayısıyla $\alpha\beta$ (ve dolayısıyla $\beta\alpha$) bir n -devirdir. ■

Önerme 3.3.10. Herhangi iki $\alpha, \beta \in Q(S_n)$ için $\alpha\beta$ bir n -devir ise

$$\langle\alpha, \beta\rangle = \{(\alpha\beta)^k, (\alpha\beta)^k\alpha: 1 \leq k \leq n\}$$

şeklindedir.

İspat. $\alpha, \beta \in Q(S_n)$ için $\alpha\beta$ bir n -devir olsun. $(\alpha\beta)^n = \varepsilon$ olup $(\alpha\beta)^{n-1} = (\alpha\beta)^{-1} = \beta\alpha$ olduğundan

3. BAZI DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA QUASI-İDEMPOTENTLER Gizem KUTLU

$$\begin{aligned}
 \beta\alpha &= (\alpha\beta)^{-1} = (\alpha\beta)^{n-1} \\
 (\beta\alpha)^k &= ((\alpha\beta)^{n-1})^k = (\alpha\beta)^{k(n-1)} \\
 (\beta\alpha)^k\beta &= (\alpha\beta)^{k(n-1)}\beta = (\alpha\beta)^{k(n-1)-1}\alpha\beta\beta \\
 &= (\alpha\beta)^{k(n-1)-1}\alpha\beta^2 \\
 &= (\alpha\beta)^{k(n-1)-1}\alpha\varepsilon \\
 &= (\alpha\beta)^{k(n-1)-1}\alpha
 \end{aligned}$$

olur. $\alpha, \beta \in S_n$ bir n -devir olup derecesi n olduğundan Önerme 3.3.7 de bu eşitlikler kullanılırsa

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \{(\alpha\beta)^k, (\alpha\beta)^k\alpha : 1 \leq k \leq n\}$$

olduğu elde edilir. ■

Önerme 3.3.11. $n \geq 4$ olmak üzere $\alpha, \beta \in Q(S_n)$ ve $\alpha\beta = (a_1 \dots a_n)$ şeklinde bir n -devir olsun. O halde $a_{n+1} = a_1$ olmak üzere $\forall 1 \leq i \leq n$ için $(a_i a_{i+1}) \notin \langle \alpha, \beta \rangle$ dir.

İspat. $n \geq 4$, $\alpha, \beta \in Q(S_n)$ ve $\alpha\beta = (a_1 \dots a_n)$ şeklinde n -devir olsun. İlk olarak Önerme 3.3.10. dan dolayı $\langle \alpha, \beta \rangle = \{(\alpha\beta)^k, (\alpha\beta)^k\alpha : 1 \leq k \leq n\}$ olduğunu hatırlayalım. Ayrıca,

$$(a_1 a_2 \dots a_n) = (a_2 a_3 \dots a_n a_1) = \dots = (a_n a_1 \dots a_{n-1})$$

olduğundan $i = 1$ için, yani $(a_1 a_2) \notin \langle \alpha, \beta \rangle$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$(a_1 a_2) \in \langle \alpha, \beta \rangle$ olduğunu kabul edelim.

3. BAZI DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA QUASI-İDEMPOİTENTLER Gizem KUTLU

$\alpha = (a_1 a_2)$ olsaydı $\beta = (a_1 a_3, \dots, a_n)$ olurdu,

$\beta = (a_1 a_2)$ olsaydı $\alpha = (a_2 a_3, \dots, a_n)$ olurdu.

Ancak $n \geq 4$ olup 1. durumda $\alpha, \beta \notin Q(S_n)$ ve 2. durumda $\alpha \notin Q(S_n)$ olurdu ve bu durum $\alpha, \beta \in Q(S_n)$ olması ile çelişirdi. Dolayısıyla $\alpha \neq (a_1 a_2)$ ve $\beta \neq (a_1 a_2)$ dir. Ayrıca, $\alpha\beta$ bir n -devir olup $\forall 1 \leq k \leq n-1$ için $\text{shift}(\alpha\beta)^k = X_n$ olduğundan $(\alpha\beta)^k \neq (a_1 a_2)$; $(\alpha\beta)^n = \varepsilon$ olduğundan $(\alpha\beta)^n \neq (a_1 a_2)$ dir.

Kabul edelim ki $(\alpha\beta)^k \alpha = (a_1 a_2)$ olacak şekilde $1 \leq k \leq n-1$ var olsun. Bu durumda

$$(\alpha\beta)^k = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_{1+k} & a_{2+k} & \dots & a_{n-1+k} & a_{n+k} = a_k \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_{1+k} & a_{2+k} & a_{3+k} & \dots & a_{n-k+k} = a_n & \dots & a_{n-1+k} & a_{n+k} = a_k \\ a_2 & a_1 & a_3 & \dots & a_{n-k} & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

olmak zorunda kalır. (Burada $a_{n+1} = a_1, a_{n+2} = a_2, \dots, a_{2n-1} = a_{n-1}, a_{2n} = a_n$ alınacaktır.) Böylece $a_k \alpha^2 = a_{n-k} = a_k$ olup $a \in Q(S_n)$ olduğundan $k = n-k$ yani $n = 2k$ olur. Ancak $n = 2k$ olduğunda $a_1 \alpha^2 = a_2$ olacaktır ve bu durum $\alpha \in Q(S_n)$ olup $\alpha^2 = \varepsilon$ olması ile çelişir. Dolayısıyla $\forall 1 \leq k \leq n-1$ için de $(\alpha\beta)^k \alpha \neq (a_1 a_2)$ olup iddia sağlanır. ■

Önerme 3.3.12. $n \geq 4$, $\alpha, \beta \in Q(S_n)$ ve $\alpha\beta = (a_1 \dots a_n)$ şeklinde n -devir olsun.

O halde $\forall 1 \leq i \leq n$ için $(a_{n+1} = a_1)$

$$\text{shift}(\alpha) \cap \{a_i, a_{i+1}\} \neq \emptyset$$

3. BAZI DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARINDA QUASI-İDEMPOTENTLER Gizem KUTLU

$$\text{shift}(\beta) \cap \{a_i, a_{i+1}\} \neq \emptyset$$

olur.

İspat. $n \geq 4$, $\alpha, \beta \in Q(S_n)$ ve $\alpha\beta = (a_1 \dots a_n)$ olsun.

$$(a_1 a_2 \dots a_n) = (a_2 a_3 \dots a_n a_1) = \dots = (a_n a_1 \dots a_{n-1})$$

olup $i = 1$ için göstermek yeterlidir. Kabul edelim ki $\{a_1, a_2\} \subseteq \text{fix}(\alpha)$ olsun. $\alpha\beta = (a_1 \dots a_n)$ olduğundan

$$(a_1)\alpha\beta = a_2$$

$$(a_2)\alpha\beta = a_3$$

ve $a_1, a_2 \in \text{fix}(\alpha)$ olup

$$(a_1)\alpha\beta = (a_1)\beta = a_2$$

$$(a_2)\alpha\beta = (a_2)\beta = a_3$$

olduğundan

$$a_1\beta^2 = (a_1\beta)\beta = a_2\beta = a_3$$

olur. Bu durum $\beta \in Q(S_n)$ olması ile çelişir.

Şimdi $\{a_1, a_2\} \subseteq \text{fix}(\beta)$ olduğunu kabul edelim. $\alpha\beta = (a_1 \dots a_n)$ olduğundan

$$(a_n)\alpha\beta = a_1$$

$$(a_1)\alpha\beta = a_2$$

ve $a_1, a_2 \in \text{fix}(\beta)$ olup

$$(a_n)\alpha\beta = (a_1)\beta, \text{ yani } (a_n)\alpha = a_1$$

$$(a_1)\alpha\beta = (a_2)\beta, \text{ yani } (a_1)\alpha = a_2$$

olduğundan

$$a_n\alpha^2 = (a_n\alpha)\alpha = a_1\alpha = a_2$$

olur. Bu durum $\alpha \in Q(S_n)$ olması ile çelişir. Böylece $\{a_1, a_2\} \not\subseteq \text{fix}(\alpha)$ ve $\{a_1, a_2\} \not\subseteq \text{fix}(\beta)$ olduğu elde edilir. ■

Sonuç 3.3.13. $n \geq 4$ ve $(a_1 \dots a_n) \in S_n$ herhangi bir n -devir olsun. O halde $\alpha, \beta \in Q(S_n)$ için $\alpha\beta = (a_1 \dots a_n)$ olması için gerek ve yeter koşul α ve β nın

- $\alpha = [[a_1, \dots, a_{k+1}]] [[a_{k+2}, \dots, a_n]]$,
 $\beta = [[a_1, \dots, a_{k+2}]] [[a_{k+3}, \dots, a_n]]$ ($1 \leq k \leq n-4$ ve $n \geq 5$);
- $\alpha = [[a_1, \dots, a_{n-2}]] (a_{n-1}a_n)$,
 $\beta = [[a_1, \dots, a_{n-1}]]$;
- $\alpha = [[a_1, \dots, a_{n-1}]]$,
 $\beta = [[a_1, \dots, a_n]]$;
- $\alpha = [[a_1, \dots, a_n]]$,
 $\beta = [[a_2, \dots, a_n]]$;
- $\alpha = [[a_2, \dots, a_n]]$,
 $\beta = (a_1a_2) [[a_3, \dots, a_n]]$.

n tane formdan biri olmalarıdır. ■

4. QUASI-İDEMPOTENT DOĞURAY KÜMESİ VE RANKI

Yarıgrupları bazı özel cebirsel yapılarına göre sınıflandırmak ve onları sonlu şekilde ifade edebilecek yöntemler bulmak Yarıgrup teorisindeki önemli problemlerden biridir. Bunlardan biri doğuray kümesi bulma ve bu kümelerin eleman sayılarının minimumunu bularak minimal doğuray kümesini ve böylece rankını belirleme problemidir ve birçok çalışmanın temelini oluşturmuştur. Çalışmalar ilerledikçe özel elemanlarla elde edilen doğuray kümeleri ve özel rankları da ilgi çekmiştir. Örneğin, birçok yarıgrupun idempotent doğuray kümeleri, nilpotent doğuray kümeleri, (m, r) –patika doğuray kümeleri (varsa) belirlenerek idempotent rank, nilpotent rank ve (m, r) – rankları hesaplandı (örnek olarak; Ayık, Ayık, Ünlü, Howie (2008); Ayık, Bugay (2014); Garba (1994); Gomes, Howie (1992); Howie (1978); Howie, Mcfadden (1990)).

Biz de bu bölümde quasi-idempotent doğuray kümesi ve quasi-idempotent rankı kavramlarını tanımlayacağız. Ayrıca bazı dönüşüm yarıgruplarının quasi-idempotent doğuray kümesi ve quasi-idempotent rankını inceleyen özellikle Bugay (2020a) ve Bugay (2020b) çalışmalarda elde edilen önemli sonuçları araştırmacıların bilgisine sunacağız.

S bir yarıgrup, $S = \langle X \rangle$ ve $X \subseteq Q(S_n)$ ise **X e S nin bir quasi-idempotent doğuray kümesi** denir. S sonlu quasi-idempotent doğuray kümesine sahip bir yarıgrup olmak üzere

$$\text{qrank} = \min\{|X| : \langle X \rangle = S, X \subseteq Q(S)\}$$

pozitif tamsayısına da S nin **quasi-idempotent rankı** denir.

4.1. S_n nin Quasi-idempotent Rankı

ncelikle $S_2 = \langle (12) \rangle$, $S_3 = \langle (13), (23) \rangle$ ve $n \geq 3$ için $S_n = \langle (12), (12 \dots n) \rangle$ olduğunu ve

$$\text{rank}(S_n) = \begin{cases} 1 & n = 2 \text{ ise} \\ 2 & n \geq 3 \text{ ise} \end{cases}$$

olduğunu ve ayrıca,

$$\alpha \in Q(S_n) \Leftrightarrow \alpha \neq \alpha^2 = \varepsilon$$

olup $\alpha \in Q(S_n)$ olması için gerek ve yeter koşul α nın ayrık 2 - devirler şeklinde yazılabiliyor olması (Genel olarak 1 - devirler ihmal edilir.) olduğunu hatırlayalım.

Teorem 4.1.1. $n \geq 4$ olmak üzere Sonuç 3.3.13' de verilen n tane formdan biri şeklinde olan $\forall \alpha, \beta \in Q(S_n)$ için $S_n = \langle (a_1 a_2), \alpha, \beta \rangle$ olur.

İspat. Sonuç 3.3.13' de verilen n tane formdan biri şeklinde olan $\forall \alpha, \beta \in Q(S_n)$ için $\alpha\beta = (a_1 \dots a_n)$ ve $S_n = \langle (a_1 a_2), (a_1 a_2 \dots a_n) \rangle$ olduğundan sonuç açıktır. ■

Teorem 4.1.1' in özel bir durumunu aşağıdaki sonuçta verelim.

Sonuç 4.1.2. $n \geq 4$ ve $\alpha, \beta \in Q(S_n)$ aşağıda verilen n tane formdan biri olmak üzere $S_n = \langle (12), \alpha, \beta \rangle$ dır.

- $\alpha = [[1, \dots, k+1]][[k+2, \dots, n]],$
 $\beta = [[1, \dots, k+2]][[k+3, \dots, n]]$ ($1 \leq k \leq n-4$ ve $n \geq 5$);
- $\alpha = [[1, \dots, n+2]](n-1n),$
 $\beta = [[1, \dots, n-1]];$
- $\alpha = [[1, \dots, n-1]],$
 $\beta = [[1, \dots, n]];$
- $\alpha = [[1, \dots, n]],$
 $\beta = [[2, \dots, n]];$
- $\alpha = [[2, \dots, n]],$
 $\beta = (12)[[3, \dots, n]].$

Sonuç 4.1.3. $\text{qrank}(S_n) = \begin{cases} 1 & n = 2 \text{ ise} \\ 2 & n = 3 \text{ ise} \\ 3 & n \geq 4 \text{ ise} \end{cases}$ dir.

İspat. $S_2 = \langle (12) \rangle, S_3 = \langle (13), (23) \rangle; (12), (13), (23) \in Q(S_3)$ olup $\text{rank}(S_2) = 1$ ve $\text{rank}(S_3) = 2$ olduğundan sonuç açıktır.

$n \geq 4$ olsun. Bir gruptaki iki quasi-idempotent dihedral altgrubu üretiyor olduğundan $\text{qrank}(S_n) \geq 3$ olduğu açıktır. Ayrıca Sonuç 4.1.2. den $\text{qrank}(S_n) \leq 3$ olup $\text{qrank}(S_n) = 3$ olduğu elde edilir. ■

4.2. A_n nin Quasi-idempotent Rankı

$A_3 = \langle (123) \rangle$ ve $n \geq 4$ için n tek doğal sayı iken $A_n = \langle (123), (12 \dots n) \rangle$ olduğu, n çift doğal sayı iken $A_n = \langle (123), (23 \dots n) \rangle$ olduğu ve ayrıca,

$$\text{rank}(A_n) = \begin{cases} 1 & n = 3 \text{ ise} \\ 2 & n \geq 4 \text{ ise} \end{cases}$$

olduğu bilinmektedir. (Örneğin; Dey, Wiegold (1971).)

Bu bölümde kullanacağımız yeni bir notasyon tanımlayalım: $4 \leq m \leq n$ ve $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ herhangi bir sıralı m -li olsun. $1 \leq i, j \leq m$ için $(b_i b_j)$ bir 2-devir olmak üzere

$$[[b_1, \dots, b_m]]^\# = \begin{cases} (b_1 b_m)(b_2 b_{m-1}) \cdots \left(b_{\frac{m-2}{2}} b_{\frac{m+4}{2}}\right), & m \text{ çift tamsayı} \\ (b_1 b_m)(b_2 b_{m-1}) \cdots \left(b_{\frac{m-3}{2}} b_{\frac{m+5}{2}}\right), & m \text{ tek tamsayı} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $n \geq 2$ için A_n nin quasi-idempotent doğuray kümelerini bulalım.

$$Q(A_2) = Q(A_3) = \emptyset$$

$$Q(A_3) = \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \text{ ve}$$

$$\langle Q(A_4) \rangle = \{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \cong C_2 \times C_2$$

(Klein-4 grubu) olup A_2, A_3 ve A_4 quasi-idempotent doğuraylı değildirler. Şimdi $n \geq 5$ için inceleyelim.

Teorem 4.2.1. $n \geq 5$ için α, β ve γ aşağıda verilen quasi-idempotentler olmak üzere $A_n = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ dır.

$$\alpha = \begin{cases} (13) [[4, \dots, n]]^\# & n \equiv 0 \pmod{4} \text{ ise} \\ (12) [[4, \dots, n]] & n \equiv 1, 2 \pmod{4} \text{ ise} \\ (12) [[4, \dots, n]]^\# & n \equiv 3 \pmod{4} \text{ ise} \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} (23) \left(\frac{n+2}{2} \frac{n+6}{2}\right) & n \equiv 0 \pmod{4} \text{ ise} \\ (13) [[4, \dots, n]] & n \equiv 1, 2 \pmod{4} \text{ ise} \\ (13) \left(\frac{n+3}{2} \frac{n+5}{2}\right) & n \equiv 3 \pmod{4} \text{ ise} \end{cases}$$

$$\gamma = \begin{cases} (1n)(23) [[4, \dots, n-1]] & n \equiv 0 \pmod{4} \text{ ise} \\ (14)(23) [[5, \dots, n]] & n \equiv 1 \pmod{4} \text{ ise} \\ (24) [[5, \dots, n]] & n \equiv 2 \pmod{4} \text{ ise} \\ (14) [[5, \dots, n]] & n \equiv 3 \pmod{4} \text{ ise} \end{cases}$$

$$\text{İspat. } [[4, \dots, n]]^\# = \begin{cases} (4n)(5n-1) \dots \left(\frac{n}{2} \frac{n+8}{2}\right) & n \equiv 0 \pmod{4} \text{ ise} \\ (4n)(5n-1) \dots \left(\frac{n+1}{2} \frac{n+7}{2}\right) & n \equiv 3 \pmod{4} \text{ ise} \end{cases}$$

olduğuna dikkat edelim.

1. durum: $n \equiv 0 \pmod{4}$ ise

$$(\alpha\beta)^4 = (123) \text{ ve } (\alpha\beta)^4\gamma(\alpha\beta) = (2 \dots n)$$

olur.

2. durum: $n \equiv 1 \pmod{4}$ ise

$$(\alpha\beta) = (123) \text{ ve } \beta\gamma = (12\dots n)$$

olur.

3. durum: $n \equiv 2 \pmod{4}$ ise

$$(\alpha\beta) = (123) \text{ ve } \alpha\beta\alpha\gamma = (2 \dots n)$$

olur.

4. durum: $n \equiv 3 \pmod{4}$ ise

$$(\alpha\beta)^4 = (123) \text{ ve } \alpha\beta\gamma = (12\dots n)$$

olur.

n tek doğal sayı iken $A_n = \langle (123), (12 \dots n) \rangle$ ve n çift doğal sayı iken $A_n = \langle (123), (23 \dots n) \rangle$ olduğundan sonuç açıktır. ■

Sonuç 4.2.2. $n \geq 5$ için $\text{qrank}(A_n)=3$ olur.

İspat. $\forall n \geq 5$ olsun. $\forall \alpha \in Q(A_n)$ için $\alpha^2 = \varepsilon$ ve bir gruptaki iki quasi-idempotent dihedral grubu üretiyor olup $\text{qrank}(A_n) \geq 3$ olduğu açıktır. Ayrıca Teorem 4.2.1. den dolayı $\text{qrank}(A_n) \leq 3$ olduğu görülür. Böylece için $\text{qrank}(A_n)=3$ olduğu elde edilir. ■

4.3. I_n, T_n ve P_n nin Quasi-idempotent Rankı

$\forall \alpha \in I_n$ elemanının ayrık devirlerin (genel olarak 1-devirler ihmal edilir.) ve zincirlerin bir çarpımı şeklinde yazılabilir olduğu bilinmektedir. Ayrıca,

$$\|12\| = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix} \text{ ve } [1] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ - & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

olmak üzere $T_2 = \langle (12), \|12\| \rangle$, $P_2 = \langle (12), \|12\|, [1] \rangle$, $I_2 = \langle (12), (12 \dots n), [1] \rangle$ ve $n \geq 3$ için $T_n = \langle (12), (12 \dots n)\|12\| \rangle$, $P_n = \langle (12), (12 \dots n), \|12\|, [1] \rangle$ ve $I_n = \langle (12), (12 \dots n), [1] \rangle$ olup

$$\text{rank}(I_n) = \text{rank}(T_n) = \begin{cases} 2 & n = 2 \\ 3 & n \geq 3 \end{cases}$$

$$\text{rank}(P_n) = \begin{cases} 3 & n = 2 \\ 4 & n \geq 3 \end{cases}$$

olduğu iyi bilinmektedir. (Örneğin, Howie (1995), Exercises 1.9: 7, 12; Exercises 5.11: 6.)

Önerme 4.3.1. α ve $\beta \in Q(S_n)$, Sonuç 4.1.2’ deki n tane formdan biri şeklinde olmak üzere

$$I_2 = \langle (12), [12] \rangle$$

$$I_3 = \langle (12), (23), [12] \rangle$$

$$I_n = \langle (12), [12], \alpha, \beta \rangle (n \geq 4)$$

olur.

İspat. $(12)[12] = [1]$ ve $(23)(12) = (123)$ olup $I_2 = \langle (12), [12] \rangle$ ve $I_3 = \langle (12), (23), [12] \rangle$ olduğu görülür. $n \geq 4$ ve α ve $\beta \in Q(S_n)$ Sonuç 4.1.2’ de verilen n tane formdan biri şeklinde olsunlar. O halde

$$(12)[12] = [1]$$

$$\alpha\beta = (12 \dots n)$$

olup $I_n = \langle (12), [12], \alpha, \beta \rangle$ olduğu elde edilir. ■

Dikkat edilirse

$$Q(T_2) = \{(12)\} \text{ ve } \langle (12) \rangle \neq T_2$$

$$Q(P_2) = \{(12), [12], [21]\} \text{ ve } \langle Q(P_2) \rangle \neq P_2$$

olup T_2 ve P_2 quasi-idempotent doğuraylı değildirler. $n \geq 3$ için inceleyelim. Notasyonda kolaylık sağlaması için

$$[123 | 2] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 3 & 2 & 4 & \dots & n \end{pmatrix} \in Q(T_n)$$

alalım.

Önerme 4.3.2. $\alpha, \beta \in Q(S_n)$ Sonuç 4.1.2' de verilen n tane formdan biri şeklinde olmak üzere

$$T_3 = \langle (12), (23), [123 | 2] \rangle$$

$$T_n = \langle (12), [123 | 2, \alpha, \beta] \rangle \quad (n \geq 4)$$

şeklindedir.

İspat. $(23)(12) = (123)$ ve $(23)[123 | 2] = \parallel 12 \parallel$ olup $T_3 = \langle (12), (23), [123 | 2] \rangle$ olduğu açıktır. $n \geq 4$ olsun. $(23), [123 | 2] = \parallel 12 \parallel$ olup $\langle S_n \cup \{[123 | 2]\} \rangle = T_n$ ve dolayısıyla $T_n = \langle (12), \alpha, \beta, [123 | 2] \rangle$ olduğu elde edilir. ■

Önerme 4.3.3. $\alpha, \beta \in Q(S_n)$, Sonuç 4.1.2' de verilen n tane formdan biri şeklinde olmak üzere

$$P_3 = \langle (12), (23), [12], [123 \mid 2] \rangle$$

$$P_n = \langle (12), [12], [123 \mid 2], \alpha, \beta \rangle \quad (n \geq 4)$$

şeklindedir.

İspat. $(23)(12) = (123)$, $(12)[12] = [1]$ ve $(23)[123 \mid 2] = \parallel 12 \parallel$ olup $P_3 = \langle (12), (23), [12], [123 \mid 2] \rangle$ olduğu açıktır. $n \geq 4$ olsun. $(12)[12] = [1]$ ve $(23), [123 \mid 2] = \parallel 12 \parallel$ olup $\langle I_n \cup \{[123 \mid 2]\} \rangle = P_n$ ve dolayısıyla $P_n = \langle (12), [12], [123 \mid 2], \alpha, \beta \rangle$ olduğu elde edilir. ■

Şimdi yarıgrup teorisinde çok iyi bilinen bir özelliği hatırlayalım.

Önerme 4.3.4. S bir sonlu yarıgrup ve T , S nin bir alt yarıgrubu olmak üzere $S \setminus T$, S nin bir ideali olsun. O halde bir $\emptyset \neq A \subseteq S$ için $S = \langle A \rangle$ iken $T = \langle T \cap A \rangle$ olur.

İspat. $t \in T$ olsun. $t \in S$ olup $t = a_1 \cdots a_t$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}^+$ ve $a_1, \dots, a_t \in A$ vardır. Kabul edelim ki $\exists 1 \leq i \leq k$ için $a_i \notin T$ ve dolayısıyla $a_i \in S - T$ olsun. O halde $S - T$, S nin bir ideali olduğundan $t = a_1 \cdots a_t \in S - T$ olur ki bu $t \in T$ olması ile çelişir. O halde kabülümüz yanlış olup $\forall 1 \leq i \leq k$ için $a_i \in T$ olduğundan $a_i \in T \cap A$ olur. O halde $T \subseteq \langle T \cap A \rangle$ olur. Ayrıca $\langle T \cap A \rangle \subseteq T$ olup $T = \langle T \cap A \rangle$ olduğu elde edilir. ■

Bu önermenin açık biri sonucu olarak: S bir sonlu yarıgrup, T , S nin bir alt yarıgrubu ve $S \setminus T$, S nin bir ideali iken S nin herhangi bir doğuray kümesi, T nin herhangi bir doğuray kümesinden en az bir tane fazla eleman içermek zorundadır. Dolayısıyla,

$$\text{rank}(S) \geq \text{rank}(T) + 1$$

olur. Benzer şekilde, S ve T quasi-idempotent doğuray kümesine sahiplerse

$$\text{qrang}(S) \geq \text{qrang}(T) + 1$$

olacaktır.

Teorem 4.3.5. $\text{qrang}(I_n) = \begin{cases} 2 & n = 2 \text{ ise} \\ 3 & n = 3 \text{ ise} \\ 4 & n \geq 4 \text{ ise} \end{cases}$

$$\text{qrang}(T_n) = \begin{cases} 3 & n = 3 \text{ ise} \\ 4 & n \geq 4 \text{ ise} \end{cases}$$

$$\text{qrang}(P_n) = \begin{cases} 4 & n = 3 \text{ ise} \\ 5 & n \geq 4 \text{ ise} \end{cases}.$$

İspat. Önerme 4.3.1, Önerme 4.3.2 ve Önerme 4.3.3' ten dolayı $n = 2$ ve $n = 3$ için sonuç açıktır. $n \geq 4$ olsun. $I_n - S_n \trianglelefteq I_n$; $T_n - S_n \trianglelefteq T_n$ ve $P_n - T_n \trianglelefteq P_n$ olup yukarıda verilen hatırlatmadan dolayı

$$\text{qrang}(I_n) \geq \text{qrang}(S_n) + 1$$

$$\text{qrang}(T_n) \geq \text{qrang}(S_n) + 1$$

$$\text{qrang}(P_n) \geq \text{qrang}(T_n) + 1$$

olup Önerme 4.3.1, Önerme 4.3.2 ve Önerme 4.3.3' ten sonuç elde edilir. ■

4.4. I_n de Bazı İdeallerin Quasi-idempotent Rankları

$$n \geq 2 \text{ ve } 1 \leq r \leq n - 1 \text{ için}$$

$$I_{n,r} = \{\alpha \in I_n : |\text{im}(\alpha)| \leq r\}$$

$$SI_{n,r} = I_{n,r} \cup S_n$$

$n \geq 3$ ve $1 \leq r \leq n - 1$ için

$$AI_{n,r} = I_{n,r} \cup A_n$$

olarak tanımlansın. $I_{n,n-1} = I_n \setminus S_n$ ve $SI_{n,n-1} = I_n$ olduğuna dikkat edelim. $\forall \alpha, \beta \in I_{n,r}$ için $\text{im}(\alpha\beta) \subseteq \text{im}(\beta)$ ve $|\text{im}(\beta)| \leq r$ olduğundan $\text{im}(\alpha\beta) \leq r$ olup $\alpha\beta \in I_{n,r}$ dir. Ayrıca $\forall \alpha \in I_{n,r}, \gamma \in I_n$ için $|\text{im}(\alpha\gamma)| \leq r$ ve $|\text{im}(\gamma\alpha)| \leq r$ olup $\alpha\gamma, \gamma\alpha \in I_{n,r}$ olacağından $I_{n,r}, I_n$ nin bir idealidir. Benzer şekilde $SI_{n,r}$ ve $AI_{n,r}$ de I_n grubunun birer idealidir.

Şimdi bu bölümde kullanacağımız temel özellikleri hatırlayalım: $\alpha \in Q(S_n)$ olması için gerek ve yeter koşul α nın ayrık 2-devirlerin çarpımı şeklinde yazılabiliyor olmasıdır; $\alpha \in Q(A_n)$ olması için gerek ve yeter koşul α nın çift sayıda ayrık 2-devirlerin çarpımı şeklinde yazılabiliyor olmasıdır.

Önerme 4.4.1. $n \geq 2$ ve $1 \leq r \leq n - 1$ olmak üzere $\alpha, \beta \in I_{n,r}$ için

1. $(\alpha, \beta) \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta)$
2. $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \text{dom}(\alpha) = \text{dom}(\beta)$
3. $(\alpha, \beta) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow |\text{im}(\alpha)| = |\text{im}(\beta)|$
4. $(\alpha, \beta) \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta) \text{ ve } \text{dom}(\alpha) = \text{dom}(\beta)$

İspat. Ganyushkin, Mazorchuk (2009), Theorem 4.5.1' in sonucudur. ■

Bu önermenin açık bir sonucu olarak, $n \geq 2$ ve $1 \leq r \leq n - 1$ olmak üzere $I_{n,r}$ de $r + 1$ tane $\mathcal{D}$ - sınıfı vardır. Bunlar $0 \leq k \leq r$ için

$$D_k = \{\alpha \in I_{n,r} : |\text{im}(\alpha)| = k\}$$

şeklindedir. $1 \leq k \leq r-1$ için $\alpha \in D_k$ ve $\text{dom}(\alpha) = \{a_1 < \dots < a_k\}$ olsun. O halde α yı

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_k & X_n \setminus \text{dom}(\alpha) \\ a_1\alpha & \dots & a_k\alpha & - \end{pmatrix}$$

veya kısaca

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_k \\ a_1\alpha & \dots & a_k\alpha \end{pmatrix}$$

şeklinde yazarız.

Önerme 4.4.2. $n \geq 2$, $1 \leq r \leq n-1$ ve $0 \leq k \leq r-1$ için $D_k \subseteq \langle D_{k+1} \rangle$ dir.

İspat. $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_k \\ a_1\alpha & \dots & a_k\alpha \end{pmatrix} \in D_k$ olsun. $1 \leq k \leq r-1 \leq n-2$ olup $a, a' \in X_n \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$ ve $b \in X_n \setminus \{a_1\alpha, \dots, a_k\alpha\}$ vardır. Bu notasyonlarla

$$\beta = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_k & a \\ a_1 & \dots & a_k & a \end{pmatrix} \in D_{k+1}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_k & a' \\ a_1\alpha & \dots & a_k\alpha & b \end{pmatrix} \in D_{k+1}$$

şeklinde tanımlansın. $\alpha = \beta\gamma$ olduğundan $\alpha \in \langle D_{k+1} \rangle$ olup $D_k \subseteq \langle D_{k+1} \rangle$ olduğu elde edilir. ■

Sonuç 4.4.3. $n \geq 2$, $1 \leq r \leq n-1$ için $I_{n,r} = \langle D_r \rangle$. ■

Sonuç 4.4.4. $n \geq 2$, $1 \leq r \leq n - 1$ ve $\emptyset \neq A \subseteq I_{n,r}$ olsun. A kümesinin $I_{n,r}$ nin bir doğuray kümesi olması için gerek ve yeter koşul $D_r \subseteq \langle A \rangle$ olmasıdır. ■

$\forall \alpha, \beta \in I_n$ için $|\text{im}(\alpha\beta)| \leq \min\{\text{im}(\alpha), \text{im}(\beta)\}$ olup $0 \leq k \leq r - 1$ için $\bigcup_{i=0}^k D_i$ ile D_{k+1} sınıfındaki elemanları üretemeyiz. O halde $I_{n,r}$ nin minimal doğuray kümelerini incelemek istiyorsak D_r sınıfını üretmemiz gerekli ve yeterli olduğundan sadece D_r sınıfının alt kümelerini düşünmemiz gerekmektedir.

Teorem 4.4.5. $n \geq 2$, $1 \leq r \leq n - 1$ ve

$$\xi = \begin{cases} [12] & n = 2, r = 1 \\ [12][3] \cdots [n] & n \geq 3, r = 1 \\ (1 \ 2)[r+1] \cdots [n] & n \geq 3, 2 \leq r \leq n - 1 \end{cases}$$

olmak üzere $D_r \subseteq \langle S_n \cup \{\xi\} \rangle$ dir.

İspat. $n \geq 2$, $1 \leq r \leq n - 1$ olmak üzere $\alpha \in D_r$, $\text{dom}(\alpha) = \{a_1, \dots, a_r\}$ ve $X_n \setminus \text{im}(\alpha) = \{b_1, \dots, b_{n-r}\}$ olsun. Bu notasyonlarla

$$\beta = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_r & a_{r+1} & \cdots & a_n \\ 1 & \cdots & r & r+1 & \cdots & n \end{pmatrix} \in S_n$$

$$\gamma = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b_1 & a_1\alpha \end{pmatrix} \in S_2 & n = 2, r = 1 \text{ ise} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ b_1 & a_1\alpha & b_2 & \cdots & b_{n-1} \end{pmatrix} \in S_n & n \geq 3, r = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

ve $n \geq 3$, $2 \leq r \leq n - 1$ ise

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & r & r+1 & \cdots & n \\ a_2\alpha & a_1\alpha & a_3\alpha & \cdots & a_r\alpha & b_1 & \cdots & b_{n-r} \end{pmatrix}$$

olarak tanımlansın. Her durumda $\beta, \gamma \in S_n$ ve $\alpha = \beta\xi\gamma$ olup $D_r \subseteq \langle S_n \cup \{\xi\} \rangle$ olduğu elde edilir. ■

Sonuç 4.4.6. $n \geq 3$ ve $1 \leq r \leq n-1$ ve $\xi \in D_r$, Teorem 4.4.5' te tanımlanan eleman olmak üzere $SI_{n,r} = \langle (12), (12 \dots n), \xi \rangle$ şeklindedir.

İspat. $I_{n,r} = \langle D_r \rangle, D_r \subseteq \langle S_n \cup \{\xi\} \rangle$ ve $S_n = \langle (12), (12 \dots n) \rangle$ olup sonuç açıktır. ■

Daha önce verdiğimiz iyi bilinen bir özelliği hatırlayalım. S bir sonlu yarıgrup ve T, S nin bir alt yarıgrubu olmak üzere $S - T, S$ nin bir ideali olsun. O halde bir $\emptyset \neq A \subseteq S$ için $S = \langle A \rangle$ iken $T = \langle T \cap A \rangle$ olur.

Sonuç 4.4.7. $n \geq 2$ ve $1 \leq r \leq n-1$ için $\text{rank}(SI_{n,r}) = \begin{cases} 2, & n = 2 \\ 3, & n \geq 3 \end{cases}$ şeklindedir.

İspat. $SI_{n,r} \setminus S_n = I_{n,r}$, $SI_{n,r}$ nin bir idealidir. Yukarıdaki hatırlatmadan dolayı $\text{rank}(SI_{n,r}) \geq \text{rank}(S_n) + 1$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca $\text{rank}(S_2) = 1$ ve $n \geq 3$ için $\text{rank}(S_n) = 3$ olup $SI_{2,r} = \langle (12), \xi \rangle$ ve $n \geq 3$ için $SI_{n,r} = \langle (12), (12 \dots n), \xi \rangle$ olduğundan sonuç açıktır. ■

Şimdi de daha önce tanımladığımız bir notasyonu ve $\alpha, \beta \in Q(S_n)$ elemanlarını hatırlayalım: $2 \leq m \leq n$ olmak üzere $(b_1, \dots, b_m)$ herhangi bir sıralı m -li olsun. Bu durumda $i \neq j, 1 \leq i, j \leq m$ için $(b_i b_j)$ bir 2-devir olmak üzere

$$[[b_1, \dots, b_m]] = \begin{cases} (b_1 b_m)(b_2 b_{m-1}) \dots \left(b_{\frac{m}{2}} b_{\frac{m}{2}+1} \right) & m \text{ çift doğal sayı ise} \\ (b_1 b_m)(b_2 b_{m-1}) \dots \left(b_{\frac{m-1}{2}} b_{\frac{m+1}{2}} \right) & m \text{ tek doğal sayı ise} \end{cases}$$

şeklindedir. Ayrıca, $n \geq 4$ ve $(a_1 \dots a_n) \in S_n$ herhangi bir n -devir olsun. O halde $\alpha, \beta \in Q(S_n)$ için $\alpha\beta = (a_1 \dots a_n)$ olması için gerek ve yeter koşul α ve β nin aşağıda verilen n tane formdan biri olmalarıdır.

- $\alpha = [[a_1, \dots, a_{k+1}]] [[a_{k+2}, \dots, a_n]]$,
 $\beta = [[a_1, \dots, a_{k+2}]] [[a_{k+3}, \dots, a_n]]$ ($1 \leq k \leq n-4$ ve $n \geq 5$);
- $\alpha = [[a_1, \dots, a_{n-2}]] (a_{n-1} a_n)$,
 $\beta = [[a_1, \dots, a_{n-1}]]$;
- $\alpha = [[a_1, \dots, a_{n-1}]]$,
 $\beta = [[a_1, \dots, a_n]]$;
- $\alpha = [[a_1, \dots, a_n]]$
 $\beta = [[a_2, \dots, a_n]]$;
- $\alpha = [[a_2, \dots, a_n]]$,
 $\beta = (a_1 a_2) [[a_3, \dots, a_n]]$.

Bu notasyonlarla

$$S_n = \langle (12), \alpha, \beta \rangle \text{ ve } \text{qrank}(S_n) = \begin{cases} 1 & n = 2 \text{ ise} \\ 2 & n = 3 \text{ ise} \\ 3 & n \geq 4 \text{ ise} \end{cases}$$

olduğunu biliyoruz.

Sonuç 4.4.8. $1 \leq r \leq n-1$ için $\text{qrank}(SI_{n,r}) = \begin{cases} 2 & n = 2 \text{ ise} \\ 3 & n = 3 \text{ ise} \\ 4 & n \geq 4 \text{ ise} \end{cases}$.

İspat. $SI_{2,1} = \langle (12), \xi \rangle$, $1 \leq r \leq 2$ için $SI_{3,r} = \langle (13), (23), \xi \rangle$, $n \geq 2$ ve $1 \leq r \leq n-1$ için $SI_{n,r} = \langle (12), \alpha, \beta, \xi \rangle$ olduğu açıktır. Ayrıca $SI_{n,r} \setminus S_n = I_{n,r}$, $SI_{n,r}$ nin

ideali olup yukarıdaki hatırlatmadan dolayı $\text{qrank}(SI_{n,r}) \geq \text{qrank}(S_n) + 1$ olduğundan sonuç açıktır. ■

Teorem 4.4.9. $n \geq 3$ ve $1 \leq r \leq n - 1$ için

$$\xi = \begin{cases} [12][3] \cdots [n] & n \geq 3 \text{ ve } r = 1 \text{ ise} \\ (1\ 2)[r+1] \cdots [n] & n \geq 3 \text{ ve } 2 \leq r \leq n - 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanıyor olmak üzere $D_r \subseteq \langle A_n \cup \{\xi\} \rangle$ dir.

İspat. $n \geq 3$ ve $1 \leq r \leq n - 1$ ve $\alpha \in D_r$ olsun. Teorem 4.4.5' te tanımlanan $\beta, \gamma \in S_n$ ile $\alpha = \beta\xi\gamma$ olduğunu hatırlayalım. $n \geq 3$ ve $r = 1$ iken

$$\beta' = \begin{cases} \beta & \beta \in A_n \text{ ise} \\ \beta(n-1\ n) & \beta \notin A_n \text{ ise} \end{cases}$$

$$\gamma' = \begin{cases} \gamma & \gamma \in A_n \text{ ise} \\ \gamma(b_1\ b_2) & \gamma \notin A_n \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa $\beta', \gamma' \in A_n$ ve $\alpha = \beta'\xi\gamma'$ olur.

$n \geq 3$ ve $2 \leq r \leq n - 1$ için

$$\beta' = \begin{cases} \beta, & \beta \in A_n \text{ ise} \\ \beta(12), & \beta \notin A_n \text{ ise} \end{cases}$$

$$\gamma' = \begin{cases} \gamma, & \gamma \in A_n \text{ ise} \\ (12)\gamma, & \gamma \notin A_n \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa $\beta', \gamma' \in A_n$ ve

$$\alpha = \begin{cases} \beta' \xi \gamma', & \beta, \gamma \in A_n \text{ veya } \beta, \gamma \notin A_n \\ \beta' \xi^2 \gamma', & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olur. Her durumda $D_r \subseteq \langle A_n \cup \{\xi\} \rangle$ olduğu elde edilir. ■

Sonuç 4.4.10. $n \geq 3$ için

$$AI_{n,r} = \begin{cases} \langle (123), \xi \rangle & n = 3, 1 \leq r \leq 2 \text{ ise} \\ \langle (123), (12\dots n), \xi \rangle & n \geq 4 \text{ tek tamsayı ve } 1 \leq r \leq n-1 \text{ ise} \\ \langle (123), (23\dots n), \xi \rangle & n \geq 4 \text{ çift tamsayı ve } 1 \leq r \leq n-1 \text{ ise} \end{cases}$$

olur.

İspat. $A_3 = \langle (123) \rangle$; $n \geq 4$ tek tamsayı ise $A_n = \langle (123), (12\dots n) \rangle$ ve $n \geq 4$ çift tamsayı ise $A_n = \langle (123), (23\dots n) \rangle$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca Teorem 4.4.9' dan $D_r \subseteq \langle A_n \cup \{\xi\} \rangle$ olup sonuç elde edilir. ■

Sonuç 4.4.11. $n \geq 3$ için $\text{rank}(AI_{n,r}) = \begin{cases} 2 & n = 3 \text{ ve } 1 \leq r \leq 2 \text{ ise} \\ 3 & n \geq 4 \text{ ve } 1 \leq r \leq n-1 \text{ ise} \end{cases}$

İspat. $AI_{n,r} \setminus A_n = I_{n,r}$, $AI_{n,r}$ nin bir ideali olup $\text{rank}(AI_{n,r}) \geq \text{rank}(A_n) + 1$ olduğu elde edilir. Ayrıca,

$$\text{rank}(A_n) = \begin{cases} 1, & n = 3 \text{ ise} \\ 2, & n \geq 4 \text{ ise} \end{cases}$$

olup Sonuç 4.4.10' dan dolayı sonuç elde edilir. ■

Şimdi de başka bir notasyonu hatırlayalım: $4 \leq m \leq n$ ve $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ herhangi bir sıralı m -li olsun. $1 \leq i, j \leq m$ için $(b_i b_j)$ bir 2-devir olmak üzere

$$[[b_1, \dots, b_m]]^\# = \begin{cases} (b_1 b_m)(b_2 b_{m-1}) \cdots \left(\frac{b_{\frac{m-2}{2}} b_{\frac{m+4}{2}} \right), & m \text{ çift doğal sayı} \\ (b_1 b_m)(b_2 b_{m-1}) \cdots \left(\frac{b_{\frac{m-3}{2}} b_{\frac{m+5}{2}} \right), & m \text{ tek doğal sayı} \end{cases}$$

şeklindedir. Ayrıca Teorem 4.2.1'den

$$\alpha = \begin{cases} (13) [[4, \dots, n]]^\# & n \equiv 0 \pmod{4} \text{ ise} \\ (12) [[4, \dots, n]] & n \equiv 1, 2 \pmod{4} \text{ ise} \\ (12) [[4, \dots, n]]^\# & n \equiv 3 \pmod{4} \text{ ise} \end{cases},$$

$$\beta = \begin{cases} (23) \left(\frac{n+2}{2} \frac{n+6}{2} \right) & n \equiv 0 \pmod{4} \text{ ise} \\ (13) [[4, \dots, n]] & n \equiv 1, 2 \pmod{4} \text{ ise} \\ (13) \left(\frac{n+3}{2} \frac{n+5}{2} \right) & n \equiv 3 \pmod{4} \text{ ise} \end{cases} \text{ ve}$$

$$\gamma = \begin{cases} (1n)(23) [[4, \dots, n-1]] & n \equiv 0 \pmod{4} \text{ ise} \\ (14)(23) [[5, \dots, n]] & n \equiv 1 \pmod{4} \text{ ise} \\ (24) [[5, \dots, n]] & n \equiv 2 \pmod{4} \text{ ise} \\ (14) [[5, \dots, n]] & n \equiv 3 \pmod{4} \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere $A_n = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ olduğunu ve Sonuç 4.2.2' den $n \geq 5$ için $\text{qrang}(A_n)=3$ olduğunu biliyoruz.

Sonuç 4.4.12. $n \geq 5$ ve $1 \leq r \leq n-1$ için $\text{qrang}(AI_{n,r}) = 4$.

İspat. $n \geq 5$ ve $1 \leq r \leq n-1$ için $AI_{n,r} = \langle \alpha, \beta, \gamma, \xi \rangle$ olur. Ayrıca $\alpha, \beta, \gamma, \xi \in Q(A_n)$ ve $\xi \in Q(D_r)$ dir. $AI_{n,r} \setminus A_n = I_{n,r}$, $AI_{n,r}$ nin bir ideali olup ilgili

hatırlatmadan $\text{qrank}(AI_{n,r}) \geq \text{qrank}(A_n) + 1$ olur. Böylece $\text{qrank}(AI_{n,r}) = 4$ olduğu elde edilir. ■

4.5. Quasi-idempotent İlişkili Ranklar

S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq U \subseteq S$ belirlenmiş bir alt küme olsun. Eğer $S = \langle A \cup U \rangle$ olacak şekilde $\emptyset \neq A \subseteq S$ varsa A kümesine modülo U ile S yarı grubunun bir ilişkili doğuray kümesi denir. Modülo U ile S yarı grubunun sonlu bir ilişkili doğuray kümesi varsa S nin ilişkili rankı

$$\text{rerank}(S:U) = \min\{|A|: \langle A \cup U \rangle = S, |A| < \infty\}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu kavramlar özel olarak quasi-idempotent elemanlar için de şöyle uyarlanmıştır: S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq U \subseteq S$ belirlenmiş bir alt küme olsun. Eğer $S = \langle A \cup U \rangle$ olacak şekilde $\emptyset \neq A \subseteq Q(S)$ varsa A kümesine modülo U ile S yarı grubunun bir ilişkili quasi-idempotent doğuray kümesi denir. Modülo U ile S yarı grubunun sonlu bir ilişkili quasi-idempotent doğuray kümesi varsa S nin ilişkili quasi-idempotent rankı

$$\text{reqrank}(S:U) = \min\{|A|: \langle A \cup U \rangle = S, A \subseteq Q(S), |A| < \infty\}$$

şeklinde tanımlanır.

$n \geq 2$ ve $1 \leq r \leq n - 1$ olmak üzere

$$PK_{n,r} = \{\alpha \in P_n: |\text{im}(\alpha)| \leq r\}$$

$$K_{n,r} = \{\alpha \in T_n: |\text{im}(\alpha)| \leq r\}$$

şeklinde tanımlanır. $PK_{n,r}$, P_n yarıgrubunun ve $K_{n,r}$ de T_n yarıgrubunun alt yarıgrubu olduğu açıktır. Gerçekten de $\forall \alpha, \beta \in PK_{n,r} (K_{n,r})$ için $|\text{im} \alpha \beta| \leq |\text{im} \beta| = r$ olduğundan sonuç açıktır. Bu altarıgruplar ele alınarak $1 \leq r \leq n-1$ için

$$\begin{aligned} T_{n,r} &= K_{n,r} \cup S_n \\ PT_{n,r} &= PK_{n,r} \cup S_n \\ A_{n,r} &= K_{n,r} \cup A_n \\ PA_{n,r} &= PK_{n,r} \cup A_n \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n \quad x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_r \geq 1$$

eşitliğinin tamsayı çözümlerinin kümesi $P_r(n)$ olmak üzere $|P_r(n)| = p_r(n)$ olarak tanımlanır. Yiğit, Ayık ve Ayık (2017)

$$\begin{aligned} \text{rerank}(T_{n,r}: S_n) &= p_r(n), \\ \text{rerank}(PT_{n,r}: S_n) &= \sum_{s=0}^{n-r} p_r(n-s), \\ \text{rerank}(A_{n,r}: A_n) &= p_r(n), \\ \text{rerank}(PA_{n,r}: A_n) &= \sum_{s=0}^{n-r} p_r(n-s) \end{aligned}$$

olduğunu gösterdi. Bugay (2020a) modülo S_n ile $SI_{n,r}$ nin ilişkili rankını ve ilişkili quasi-idempotent rankını; modülo A_n ile A_n nin ilişkili rankını ve ilişkili quasi-idempotent rankını elde etti. Şimdi bu sonuçları verelim.

Sonuç 4.5.1. $1 \leq r \leq n-1$ için

$$\text{rerank}(SI_{n,r}:S_n) = \text{reqrank}(SI_{n,r}:S_n) = 1$$

şeklindedir.

İspat. $1 \leq r \leq n-1$ için $SI_{n,r} = \langle S_n \cap \{\xi\} \rangle$ ve $\xi \in Q(D_r)$ olup Sonuç 4.4.7 ve Sonuç 4.4.8' den sonuç elde edilir. ■

Sonuç 4.5.2. $n \geq 3$ ve $1 \leq r \leq n-1$ için $\text{rerank}(AI_{n,r}:A_n) = 1$; $n \geq 5$ ve $1 \leq r \leq n-1$ için $\text{reqrank}(AI_{n,r}:A_n) = 1$ dir.

İspat. $n \geq 3$ ve $1 \leq r \leq n-1$ için $AI_{n,r} = \langle A_n \cap \{\xi\} \rangle$ ve $\xi \in Q(D_r)$ olup Sonuç 4.4.10 ve Sonuç 4.4.12' den sonuç elde edilir. ■



KAYNAKLAR

- Akkaş, S., Hacisalihoğlu, H.H., Özel, Z., Sabuncuoğlu, A., 1998. Soyut Matematik. Gazi Üniversitesi Yayın No:43, Ankara, 549s.
- Asar, A.O., Arıkan, A., Arıkan A., 2009. Cebir. Eflatun Yayınevi, Ankara 373s.
- Ayık, G., Ayık, H., Ünlü, Y., Howie, J.M., 2008. Rank Properties of the Semigroup of Singular Transformations on a Finite Set. Communications in Algebra, 36: 2581-2587.
- Ayık, H., Bugay, L., 2014. Generating Sets of Finite Transformation Semigroups $PK(n, r)$ and $K(n, r)$. Communications in Algebra, 2: 412-422.
- Bugay, L., 2019. Quasi-idempotent Ranks of Some Permutation Groups and Transformation Semigroups. Turkish Journal of Math., 43:2390-2395.
- Bugay, L., 2020a. Certain Ranks of Some Ideals in Symmetric Inverse Semigroups Contains S_n or A_n . Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 22(2):669-678.
- Bugay, L., 2020b. Some Involutions which Generate the Finite Symmetric Group. Mathematical Sciences and Applications E-Notes, 8(1):25-28.
- Bugay, L. Quasi-idempotents in Partial Transformation Semigroups. (Yayınlanmamış)
- Clifford A.H., 1941. Semigroups Admitting Relative Inverses. Annals of Mathematics. 42(2): 1037-1049.
- Dey, I.M.S., Wiegold J., 1971. Generators for Alternating and Symmetric Groups. J. Australian Math. Soc., 12:63–68.
- Dubreil P., 1941. Contribution à la Théorie Des Demi-groupes. Mém. Acad. Sci. Inst. France. 63(3): 1-52.
- Ganyushkin, O., Mazorchuk, V., 2009. Classical Finite Transformation Semigroups. Springer-Verlag, London, 314 s.
- Garba, G.U., 1990. Idempotents in Partial Transformation Semigroups. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 116A: 359-366.

- Garba, G.U., 1994. On the Idempotent Ranks of Certain Semigroups of Order-preserving Transformations. *Portugaliae Mathematica*, 51: 185-204.
- Garba, G.U., Imam, A.T., 2016. Products of Quasi-idempotents in Finite Symmetric Inverse Semigroups. *Semigroup Forum*, 92: 645-658.
- Gomes, G.M.S., Howie, J.M., 1992. On The Ranks of Certain Semigroups of Order-preserving Transformations. *Semigroup Forum*, 45: 272-282.
- Howie, J.M., 1978. Idempotent Generators in Finite Full Transformation Semigroups. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 81A: 317-323.
- Howie, J.M., 1995. *Fundamentals of Semigroup Theory*. Oxford University Press, New York, 351 s.
- Howie, J.M., and McFadden, R.B., 1990. Idempotent Rank in Finite Full Transformation Semigroups. *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, 114A:161--167.
- Isaacs, I.M., 2008. *Finite Group Theory*. Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, New York, 92s.
- Karakaş, H.İ., 2008. *Cebir Dersleri*. Türkiye Bilimler Akademisi, Ankara, 402s.
- Levi, I., 2006. Nilpotent Ranks of Semigroups of Partial Transformations. *Semigroup Forum*, 72: 459-476.
- Lipscomb S., 1996. *Symmetric Inverse Semigroups*. Mathematical Surveys and Monographs. New York, NY, USA: American Mathematical Society.
- Umar, A., 1993. On the Semigroups of Partial One-to-one Order-decreasing Finite Transformations. *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, 123A:355--363.
- Wilson, R.J., 2010. *Introduction to Graph Theory*, London, 181s.
- Wilson, R.J., Watkins, J.J., 1990. *Graphs, An Introductory Approach, A First Course in Discrete Mathematics*. Jon Wiley & Sons Inc. Toronto.
- Yiğit, E., Ayık, G., Ayık, H., 2017. Minimal Relative Generating Sets of Some Partial Transformation Semigroups. *Communications in Algebra*, 45:1239–1245.

ÖZGEÇMİŞ

Gizem KUTLU, ilköğretim, orta ve lise öğrenimini Adana'da tamamladı. Lisans öğrenimine 2008 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi'nde başlayıp yatay geçiş yaparak 2010 yılında Çukurova Üniversitesi Matematik Bölümü'nde başladı ve 2012 yılında mezun oldu. 2018 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladı. Evli ve iki çocuk annesidir.

