



T.C.
KIRŞEHİR AHI EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



BAZI ESNEK ÖRTÜ TABANLI KABA KÜMELERİN YENİ KARAKTERİZASYONLARI

EBRU BOZKURT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KIRŞEHİR

2025



T.C.
KIRŞEHİR AHI EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



BAZI ESNEK ÖRTÜ TABANLI KABA KÜMELERİN YENİ KARAKTERİZASYONLARI

EBRU BOZKURT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Dr. Öğr. Üyesi Zehra GÜZEL ERGÜL

KIRŞEHİR

2025

KIRŞEHİR AHI EVRAN ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZ ÇALIŞMASI
ETİK BEYANI

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesini okuduğumu ve anladığımı ve Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde ve ortaya çıkan sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tez olarak sunduğum bu çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda bu konuda hakkımda yapılacak tüm yasal işlemleri ve aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

16 /06 /2025

Ebru BOZKURT

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa No

İÇİNDEKİLER DİZİNİ	I
TEŞEKKÜR.....	II
ÖZET.....	III
ABSTRACT	IV
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	V
1. GİRİŞ	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	3
3. MATERYAL VE METOT.....	7
3.1. Esnek Kümeler	7
3.2. Kaba Kümeler.....	8
3.3. Esnek Kaba Kümeler	11
3.4. Esnek Örtü Tabanlı Kaba Kümeler	14
4. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	19
4.1. Esnek Minimal Tasvir ile Esnek Maksimal Tasvir Kavramları Arasındaki İlişki	19
4.2. Esnek Maksimal Kavramı Yardımıyla Bazı Esnek Örtü Tabanlı Kaba Kümelerin Yeni Özellikleri	23
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	31
KAYNAKLAR.....	33
EKLER.....	37
EK-1 Kongre Katılım Belgesi.....	37
ÖZGEÇMİŞ.....	39

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim süresince bilgi, tecrübe ve akademik birikimiyle bana yol gösteren, ilham veren ve desteğini her zaman hissettiren, sabrı, anlayışı ve yapıcı yönlendirmeleriyle bu süreci çok daha anlamlı ve öğretici hale getiren çok değerli danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Zehra GÜZEL ERGÜL’e büyük bir içtenlikle teşekkür ederim.

Eğitim hayatım boyunca her zaman yanımda olan, sabırları, sevgileri ve destekleriyle beni motive eden sevgili aileme sonsuz teşekkür ederim.

Haziran, 2025

Ebru BOZKURT



ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI ESNEK ÖRTÜ TABANLI KABA KÜMELERİN YENİ KARAKTERİZASYONLARI

Ebru BOZKURT

KIRŞEHİR AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman:

Dr. Öğr. Üyesi Zehra GÜZEL ERGÜL
Yıl: 2025, Sayfa: 39

Jüri:

Dr. Öğr. Üyesi Zehra GÜZEL ERGÜL
Prof. Dr. Akın Osman ATAGÜN
Doç. Dr. Naime DEMİRTAŞ

Bu tez çalışması, esnek kaba kümelerin genelleştirilmesi olan esnek örtü tabanlı kaba kümelerin bazı türlerinin yeni karakterizasyonlarını vermek amacıyla yapılmıştır. Esnek örtü tabanlı kaba kümelerin bazı türleri esnek maksimal tasvir kavramı kullanılarak yeniden ele alınmıştır. Ayrıca esnek maksimal tasvir ve esnek minimal tasvir kavramları arasındaki ilişki belirlenmiş; bunun yardımıyla esnek örtü tabanlı kaba kümelerin bazı türleri arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Esnek küme, Kaba küme, Esnek örtü tabanlı kaba küme

ABSTRACT

MASTER'S THESIS

NEW CHARACTERIZATIONS OF SOME SOFT COVERING BASED ROUGH SETS

Ebru BOZKURT

**KIRŞEHİR AHI EVRAN UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS**

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Zehra GÜZEL ERGÜL
Year: 2025, Pages: 39
Juries: Assist. Prof. Dr. Zehra GÜZEL ERGÜL
Prof. Dr. Akın Osman ATAGÜN
Assoc. Prof. Dr. Naime DEMİRTAŞ

This thesis study was conducted to give new characterizations of some types of soft covering based rough sets, which are generalizations of soft rough sets. Some types of soft covering based rough sets were reconsidered by using the concept of soft maximal description. In addition, the relationship between the concepts of soft maximal description and soft minimal description was determined; with the help of this, the relationships between some types of soft covering based rough sets were examined.

Key Words: Soft set, Rough set, Soft covering based rough set

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$=$	: Eşittir
$\neq$	: Eşit değildir
$\in$	: Ait
$\notin$	: Ait değil
$\forall$	: Her
$\exists$	: Vardır
$\ni$	: Öyle ki
$\Rightarrow$	: Gerek şart
$\Leftarrow$	: Yeter şart
$\Leftrightarrow$	: Gerek ve yeter şart
$\emptyset$	: Boş küme
X	: Evren küme
$\mathcal{P}(X)$	: Güç kümesi
$\subseteq$	: Alt küme
$\cup$	: Birleşim
$\cap$	: Kesişim
A^c	: Tümleyen
$\mathcal{R}$	: Denklik bağıntısı
$X/\mathcal{R}$	: Bölüm kümesi
$[x]_{\mathcal{R}}$	: x noktasının denklik sınıfı
$(X, \mathcal{R})$	: Yaklaşım uzayı
$com(X, \mathcal{R})$	: Kompoze kümelerin ailesi
$\mathcal{R}_-$	: Alt yaklaşım
$\mathcal{R}^-$	: Üst yaklaşım
POZ	: Pozitif bölge
NEG	: Negatif bölge
SNR	: Sınır bölge
E	: Parametre kümesi
$G = (F, E)$	: Esnek küme
$\mathcal{S}(X, E)$	: Esnek kümelerin ailesi
ϕ_E	: Boş esnek küme
$\tilde{E}$	: Evrensel esnek küme
$\sqsubseteq$	: Esnek alt küme
$Mind_S(x)$	: Esnek minimal tasvir
$Maxd_S(x)$	: Esnek maksimal tasvir
C_G	: Esnek örtü küme
$S = (X, C_G)$	: Esnek örtü yaklaşım uzayı
$S = (X, G)$	: Esnek yaklaşım uzayı

<i>apr</i> ₋	:	<i>S</i> -esnek alt yaklaşım
<i>apr</i> ⁻	:	<i>S</i> -esnek üst yaklaşım
<i>CL</i>	:	Esnek örtü alt yaklaşım
<i>FH</i>	:	1.tip esnek örtü üst yaklaşım
<i>SH</i>	:	2.tip esnek örtü üst yaklaşım
<i>TH</i>	:	3.tip esnek örtü üst yaklaşım
<i>RH</i>	:	4.tip esnek örtü üst yaklaşım



1. GİRİŞ

Klasik küme teorisinde bir elemanın üyeliği "bir eleman ya kümeye aittir ya da değildir" şeklinde net olarak tanımlanır. Belirsizlik teorilerinde ise bir elemanın küme üyeliği genellikle kesin bir "evet" veya "hayır" durumundan farklı olarak, daha esnek ve dereceye bağlı bir şekilde ifade edilir. Bu yüzden günlük hayatta ya da bilimsel çalışmalarda hemen hemen her alanda karşılaşılabilecek olan içerisinde belirsizlik durumları bulunduran problemler klasik küme yaklaşımı ile çözülemez. Bilim insanları bu problemlerin çözümü için tasarlanması gereken sistemlerde kullanılmak üzere belirsizlik teorileri üretmişlerdir. Bunlara örnek olarak; bulanık (fuzzy) küme teorisi (Zadeh, 1965), sezgisel bulanık (intuitionistic fuzzy) küme teorisi (Atanassov, 1986), kaba (rough) küme teorisi (Pawlak, 1982) ve esnek (soft) küme teorisi (Molodtsov, 1999) ve bu teorilerin karma hibrit yapıları verilebilir.

Bu tez çalışmasında belirsizlik durumları bulunduran problemleri çözmek için hibrit küme modeli olarak önerilen esnek kaba kümeler (Feng ve ark., 2010) ve esnek örtü tabanlı kaba kümeler (Yüksel ve ark., 2014; Yüksel ve ark., 2015) üzerinde durulacaktır. Esnek kaba kümeler, iki farklı matematiksel yaklaşım olarak önerilen kaba küme (Pawlak, 1982) ve esnek küme (Molodtsov, 1999) teorilerinin birlikte ele alınmış hali, yani kombinasyonu olarak düşünülebilir. Pawlak (1982) kaba kümeyi, bir evren küme üzerindeki bir denklik bağıntısıyla oluşturulan yaklaşım uzayında, denklik sınıfları yardımıyla elde edilen alt ve üst yaklaşım adı verilen iki küme çifti aracılığıyla tanımlamıştır. Molodtsov (1999) bir esnek kümeyi, bir evren kümesinin alt kümelerinin parametrelendirilmiş bir ailesi olarak tanımlamıştır. Feng ve ark., 2010 yılında Pawlak (1982)'ın kaba küme teorisinde denklik bağıntısı yerine bir esnek kümeyi kullanarak esnek yaklaşım uzayını, esnek alt ve üst yaklaşımlar olarak adlandırılan yapıları tanımlamıştır. 2014 yılında Yüksel ve ark. esnek kümelerin yerine, esnek örtü kümeleri kullanarak esnek örtü yaklaşım uzayını elde etmiş, esnek minimal tasvir kavramı aracılığıyla esnek örtü tabanlı kaba kümeleri tanımlamıştır. Sonraki yıllarda Li ve ark. (2015) ve Zhan ve Alcantud (2019) farklı esnek örtü tabanlı kaba küme modelleri tanımlamıştır. Daha sonra Güzel Ergül ve Yaşar (2025) tarafından esnek maksimal tasvir kavramı verilmiş ve yeni esnek örtü tabanlı kaba kümeler bu kavram yardımıyla tanımlanmıştır.

Bu tez çalışmasında esnek maksimal tasvir ve esnek minimal tasvir kavramları yardımıyla yukarıda bahsedilen bazı esnek örtü tabanlı kaba kümelerin yeni

karakterizasyonları ve aralarındaki ilişkiler incelenmiştir. Esnek kaba kümelerin genelleştirilmesi olan esnek örtü tabanlı kaba küme modelleri birçok karar verme problemine uygulandığı için belirsizlik teorisinde önemli ve faydalı bir araştırma konusu haline gelmiştir. Çünkü hibrit kümeler kendini oluşturan kümelerin tüm özelliklerini kendi bünyesinde barındırdığı için gerçek hayat problemlerinin modellenmesinde daha kullanışlıdır. Bu yüzden bu çalışmanın birçok araştırmacıya modelleme konusunda ve esnek örtü tabanlı kaba kümelerin teorisine katkılar sağlayacağı için yararlı olacağı düşünülmektedir.



2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Günlük yaşamdaki bazı problemler belirsiz ifadeler içerdiğinden klasik mantık araçlarıyla çözülemez. Çünkü klasik mantık kesin ve belirli sınırlar çerçevesinde bir yapıya sahiptir. Klasik mantıkta bir elemanın üyeliği yanlış, yok gibi anlamına gelen 0 veya doğru, var gibi anlamına gelen 1 değerlerinden oluşur. Klasik küme kavramında, bir eleman bir kümeye aittir veya ait değildir mantığı vardır. Kümenin elemanları hakkında ilave hiçbir bilgi bulunmaz.

Birçok bilim insanı klasik matematiğin belirli ve kesin dünyasından çıkarak; belirsizlik problemlerini çözmek için teoriler geliştirmeye çalışmışlardır. Bu yüzden kesin olmayan belirsiz kavramların matematiksel olarak ifade edilmesine ihtiyaç duyulmuştur. Belirsizlik problemlerini doğru bir şekilde ifade etmek için ortaya atılan matematiksel modellerden ilki, Zadeh (1965) tarafından önerilen bulanık küme teorisidir. Elemanları bir kümeye tamamen ait olan veya olmayan olarak kategorize eden klasik kümelerin aksine, bulanık küme teorisinde her elemanın bir üyelik derecesi vardır. Üyelik derecesi $[0,1]$ reel aralığında herhangi bir değer olabilir. Bir eleman bir kümeye belli bir derece üyedir veya belli bir derece üye değildir. Değişen derecelerde belirsizlik veya muğlaklığa uyum sağlayarak kademeli üyeliklere izin veren bu model matematiksel kavramların bulanık mantığa genelleştirilmesinde doğal bir yapı oluşturmuştur. Bulanık mantık, klasik mantıktan daha geniş bir kavramdır. Bulanık mantık, makinelere insana özgü yetenekler ve özellikler kazandıran bir şifreleme yöntemidir. Bulanık mantık kavramı matematik, sosyoloji, mekatronik, yapay zeka, robotik kodlama, tıp ve fen bilimleri gibi birçok alanda kullanılır. Bu yüzden literatürde birçok yazar tarafından klasik mantık kavramının dışında belirsizliğe dayalı teoriler üretilmiştir. Bunlara örnek olarak; sezgisel bulanık küme teorisi (Atanassov, 1986), kaba küme teorisi (Pawlak, 1982) ve esnek küme teorisi (Molodtsov, 1999) verilebilir. Bu teoriler geniş bir alanda birçok uygulamaya sahip olduğundan literatürde birçok yazar tarafından karma hibrit yapıları tanımlanmış ve bu yapılar yardımı ile karar verme problemleri çözülmüştür (Maji ve ark. 2001; Feng ve ark. 2010; Feng ve ark. 2011; Feng, 2011; Meng ve ark. 2011; Shabir ve ark. 2013; Li ve ark. 2015; Çetkin ve ark. 2016; Zhan ve ark. 2017; Zhan ve Alcantud, 2019; Suo ve ark. 2021).

Bu tez çalışmasında kaba kümeler ve esnek kümelerin kombinasyonu olan esnek kaba kümeler ve esnek örtü tabanlı kaba kümeler üzerinde durulacaktır. Şimdi bu kavramlar ile ilgili daha önce yapılan çalışmaları hatırlatacağız.

1982 yılında Pawlak sonlu bir evren küme üzerindeki bir denklik bağıntısı ile yaklaşım uzayını tanımlamıştır. Bu yaklaşım uzayında bir evren kümenin alt kümesi olan kaba kümeyi, denklik bağıntısından üretilen denklik sınıfları aracılığıyla oluşturulan iki yaklaşımla tanımlamış ve temel özelliklerini incelemiştir. Bu yaklaşımlar alt ve üst yaklaşımlar olarak adlandırılır; bir kümenin alt yaklaşımı o küme tarafından kapsanan tüm denklik sınıflarının birleşimi ve bir kümenin üst yaklaşımı o küme ile arakesiti boş kümeden farklı olan tüm denklik sınıflarının birleşimidir. Eğer bir kümenin alt yaklaşımı ile üst yaklaşımı birbirinden farklı ise o kümeye kaba küme adı verilir. Pawlak, ayrıca alt ve üst yaklaşımların sırasıyla topolojik uzaylarda iç ve kapanış operatörleri olduğunu göstermiştir. Böylece Pawlak'ın (1982) bu makalesi topolojik uzaylar ile yaklaşım uzayları arasında ilişki kurulmasına olanak sağlamış ve topolojik kavramların kaba küme teorisinde çalışılması için başlangıç noktası olmuştur. Daha sonra Yao (1996) operatör odaklı ve küme odaklı iki farklı kaba küme teorisi üzerinde çalışmıştır. Operatör odaklı bakış açısına göre iç ve kapanış operatörleri ile alt ve üst yaklaşımlar arasında bağlantı kurmuştur. Küme odaklı bakış açısında ise kaba kümelerin üyelerinin yorumlanmasına ve karakterizasyonuna odaklanmıştır. Yao daha sonra da kaba kümeler üzerinde çalışmalar yapmaya devam etmiştir (Yao, 1998; Yao, 2003).

Zhu ve Wang (2003) yaklaşım uzayında bir denklik bağıntısından üretilen tüm denklik sınıflarından oluşan kümeler ailesi yani denklik bağıntısıyla belirlenmiş parçalanış yerine örtü kavramını kullanarak, örtü yaklaşım uzaylarını tanımlamıştır. Böylece kaba küme teorisini, örtü tabanlı kaba küme teorisine genişletmişlerdir. Zhu (2007) yeni tip örtü tabanlı kümeler tanımlamış ve topolojik uzaylardaki iç ve kapanış kavramları ile örtü yaklaşım uzayındaki alt ve üst yaklaşım kavramları arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Ayrıca aynı alt yaklaşımı ve üst yaklaşımı doğuran iki örtünün hangi koşullar altında elde edileceğini göstermiş, alt ve üst yaklaşım operatörleri için aksiyomatik sistemler de vermiştir. Daha sonra bazı araştırmacılar da benzer çalışmalar yapmışlardır (Zhu ve Wang, 2007; Wu ve ark., 2009).

Kaba küme teorisi, veri madenciliği teknikleri ile birlikte mevcut verilerin verimli bir şekilde kullanılmasını sağlayan önemli bir araç olarak bulanık mantık yaklaşımından türetilmiştir. Dolayısıyla, eksik, yetersiz ve belirsiz bilgileri düzenleyerek veri analizine uygun hale getiren kaba küme yaklaşımı, aynı zamanda kural indirgeme ve sınıflandırma konuları ile birlikte özellikle büyük veri tabanlarının analizi işlemini başarılı bir şekilde günlük hayatta uygulanabilmesine olanak sağlamaktadır.

Kaba küme teorisi, hızla gelişim göstermesine rağmen, parametre değeri hesaba katılmadığı için, bazı belirsizlik içeren problemlerin modellenmesinde yetersiz olmuştur. 1999 yılında Molodtsov tarafından parametre kavramı kullanılarak tanımlanan tam anlamıyla yeni bir yaklaşım metodu olan esnek küme teorisi böyle problemlerin modellenmesine olanak sunmuştur. Molodtsov (1999) seçilecek alternatifler ile istenen parametrelerin eşleşmesini yaparak, esnek kümeyi; parametrelenmiş alternatiflerin kümesi olarak tanımlamıştır. Esnek küme teorisi, özellikle belirsizlik problemlerini pratik bir şekilde ifade edebilmesi, karşılaşılan belirsizlik üzerinde yapılabilecek işlemler için kolaylık sağlaması açısından önemli olduğundan birçok araştırmacının dikkatini çekmeyi başarmıştır ve üzerine birçok çalışma yapılmıştır (Maji ve ark., 2003; Chen ve ark., 2005; Feng ve ark., 2008; Ali ve ark., 2009; Çağman ve Enginoğlu, 2010; Ge ve Yang, 2011; Sezgin ve Atagün, 2011).

Sonraki yıllarda bilim insanları karşılaşılan sorunları en doğru şekilde ifade edebilmek için ve bu sayede ideal çözüme mümkün olabildiğince yaklaşabilmek için belirsizlik problemine karşı geliştirilen tüm küme teorilerini birlikte kullanarak hibrit modeller oluşturmaya başlamışlardır. 2010 yılında Feng ve ark. tarafından kaba kümelerde parametreleme araçlarını kullanılabilir hale getirmek için önemli bir adım atılmış ve esnek kaba kümeler olarak adlandırılan hibrit model tanımlanmıştır. Feng ve ark. (2010) bir kümenin esnek alt ve esnek üst yaklaşımlarını bulmak için kaba küme teorisinde denklik bağıntısı yerine esnek kümeyi kullanarak esnek yaklaşım uzayını elde etmiştir. Esnek yaklaşım uzayında esnek alt ve üst yaklaşım kavramları aracılığıyla, esnek kaba kümeleri tanımlayıp, temel özelliklerini incelemiştir. Ayrıca Pawlak'ın kaba kümelerinin, esnek kaba kümelerin özel bir durumu olduğunu göstermiştir. Daha sonra Yüksel ve ark. (2014; 2015) esnek kümelerin yerine, esnek örtü kümeleri kullanarak esnek örtü yaklaşım uzayını elde etmiş, esnek kaba kümelerin genelleştirilmesi olan esnek örtü tabanlı kaba kümeleri tanımlamıştır. Daha sonra, Li ve ark. (2015) ve Zhan ve Alcantud (2019) farklı esnek örtü tabanlı kaba küme modelleri tanımlamıştır. Bu çalışmalar, belirsizlik teorisinde hızla önemli ve faydalı bir araştırma konusu haline gelen esnek örtü tabanlı kaba küme teorisine ilgi uyandırmıştır. İlerleyen yıllarda araştırmacılar tarafından birçok çalışma yapılmıştır (Güzel Ergül ve Yüksel, 2019; Zhan ve Wang, 2019; Atef ve ark. 2023; Mareay, 2024; Güzel Ergül ve Yaşar, 2025).

Bu tez çalışmasında bazı esnek örtü tabanlı kaba kümelerin yeni karakterizasyonları incelenmiştir. Yüksel ve ark. (2014; 2015) tarafından verilen esnek örtü tabanlı kaba kümeler, esnek minimal tasvir kavramı yardımıyla tanımlanmıştır. Biz

bu çalışmada Güzel Ergül ve Yaşar (2025) tarafından verilen esnek maksimal tasvir kavramını kullanarak esnek örtü tabanlı kaba kümelerin bazı türlerini yeniden ele aldık. Ayrıca esnek maksimal tasvir ve esnek minimal tasvir kavramları arasındaki ilişkiyi belirleyip; bunun yardımıyla esnek örtü tabanlı kaba kümelerin bazı türleri arasındaki ilişkileri inceledik.



3. MATERYAL VE METOT

Bu tez çalışmasında ilk olarak literatür taraması yapılmıştır. Bu çalışma boyunca belirsizlik için önerilen küme teorileri ile ilgili kaynaklar kısmında belirtilen makale ve kitaplardan yararlanılmıştır. Bunlara bağlı olarak elde edilen bulgulardan birtakım sonuçlar çıkarılmıştır.

Bu çalışma boyunca literatürde kullanılan, bazı tanım ve teoremlerden aşağıda kısaca bahsedilmiştir.

3.1. Esnek Kümeler

Bu bölümde esnek kümeler ile ilgili bazı temel kavramlar verilecektir. X , bir başlangıç evreni ve E , tüm parametrelerin kümesi olsun. Genellikle parametreler; özellikler, karakteristikler ya da X evrenindeki nesnelerin özellikleridir. Her bir parametre, bir kelime ya da bir cümle olarak verilebilir. $\mathcal{P}(X)$ ailesi, X kümesinin güç kümesini göstermek üzere esnek küme kavramı aşağıdaki şekilde tanımlanır.

3.1.1.Tanım (Molodtsov, 1999) X evren kümesi, E parametre kümesi ve $A \subseteq E$ olsun. $F: A \rightarrow \mathcal{P}(X)$ küme değerli dönüşüm olmak üzere, (F, A) ikilisine X evreni üzerinde bir esnek küme denir. Buna göre

$$(F, A) = \{(a, F(a)): a \in A, F(a) \in \mathcal{P}(X)\}$$

sıralı ikililerin kümesidir.

3.1.1.Uyarı Bu bölümden itibaren X üzerindeki bütün esnek kümelerin ailesi $\mathcal{S}(X, E)$ ile gösterilecektir.

3.1.1.Örnek (Molodtsov, 1999; Maji ve ark., 2003) $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ altı tane evi içeren evren kümesi ve $e_1 = \text{pahalı}$, $e_2 = \text{güzel}$, $e_3 = \text{ahşap}$, $e_4 = \text{ucuz}$, $e_5 = \text{yeşil çevreli}$ olmak üzere $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametreler kümesi olsun. (F, E) esnek kümesi, Bay A'nın satın almayı düşündüğü ev için “evlerin cazipliği” ni tanımlayan bir küme olarak alınsın. Bu durumda tanımlanacak olan esnek küme; pahalı olan evler, güzel olan evler, ahşap olan evler, ucuz olan evler ve yeşil çevreli olan evler şeklindedir. F dönüşümü “(.) evler” olarak gösterilsin; öyle ki “ nokta ” $e_i \in E$ parametrelerinin

biriyle doldurulsun. Örneğin; $F(e_1)$, “(pahalı) evler” demektir ve fonksiyonel değeri X evrenindeki tüm pahalı evlerdir. Bu durumda

$$F(e_1) = \{x_2, x_4\},$$

$$F(e_2) = \{x_1, x_3\},$$

$$F(e_3) = \{x_3, x_4, x_5\},$$

$$F(e_4) = \{x_1, x_3, x_5\},$$

$$F(e_5) = \{x_1\}$$

olduğu kabul edilsin. O halde (F, E) esnek kümesi, yaklaşımların bir koleksiyonu olarak düşünülebilir, öyle ki her yaklaşım, bir tahmin (parametre) ve yaklaşık değer kümesi olmak üzere iki kısma sahiptir. Örneğin; $(pahalı\ evler, \{x_2, x_4\})$ yaklaşımlardan biridir.

3.1.2.Tanım (Maji ve ark., 2003) (F, A) , X evreni üzerinde bir esnek küme olsun. Eğer her $a \in A$ için $F(a) = \emptyset$ ise (F, A) esnek kümesi, boş esnek küme olarak adlandırılır ve ϕ_A simgesi ile gösterilir. Eğer $A = E$ ise ϕ_E simgesi ile gösterilir.

3.1.3.Tanım (Maji ve ark., 2003) (F, A) , X evreni üzerinde bir esnek küme olsun. Eğer her $a \in A$ için $F(a) = X$ ise (F, A) esnek kümesi, A –evrensel esnek küme olarak adlandırılır ve $\tilde{A}$ simgesi ile gösterilir. Eğer $A = E$ ise $\tilde{E}$ simgesi ile gösterilir.

3.1.4.Tanım (Maji ve ark., 2003) X evreni üzerinde (F, A) ve (G, B) esnek kümeleri verilsin. Eğer $A \subseteq B$ ve her $a \in A$ için $F(a)$ ve $G(a)$ aynı yaklaşımlar ise (F, A) esnek kümesine, (G, B) esnek kümesinin esnek alt kümesi denir ve $(F, A) \sqsubseteq (G, B)$ ile gösterilir.

3.1.5.Tanım (Maji ve ark., 2003) X evreni üzerinde (F, A) ve (G, B) esnek kümeleri verilsin. Eğer $(F, A) \sqsubseteq (G, B)$ ve $(G, B) \sqsubseteq (F, A)$ ise (F, A) ve (G, B) esnek kümelerine, esnek eşit kümeler denir.

3.2. Kaba Kümeler

Bu bölümde kaba küme teori ile ilgili temel kavramları hatırlatacağız. Bu bölümde kullanacağımız X , boş kümeden farklı ve sonlu bir başlangıç evreni olarak kabul edilecektir. $\emptyset$ sembolü ile boş küme ve $A^c = X - A$ sembolü ile $A \subseteq X$ alt kümesinin tümleyeni ifade edilecektir. Ayrıca bir denklik bağıntısı $\mathcal{R}$ sembolü ile ifade edilecektir.

Herhangi bir $x \in X$ için, x noktasının denklik sınıfı, $[x]_{\mathcal{R}}$ sembolü ile ve X kümesinin $\mathcal{R}$ denklik bağıntısına göre oluşan tüm denklik sınıflarının kümesi yani X kümesinin $\mathcal{R}$ denklik bağıntısıyla belirlenmiş parçalanışı, $X/\mathcal{R}$ sembolü ile gösterilecektir.

3.2.1.Tanım (Pawlak, 1982) X bir evren küme ve $\mathcal{R} \subseteq X \times X$ bir denklik bağıntısı olsun. $(X, \mathcal{R})$ ikilisine yaklaşım uzayı denir.

3.2.2.Tanım (Pawlak, 1982) $(X, \mathcal{R})$ yaklaşım uzayı olsun. $\mathcal{R}$ denklik bağıntısının denklik sınıflarına $(X, \mathcal{R})$ yaklaşım uzayında elemanter kümeler (atomlar) denir. $(X, \mathcal{R})$ yaklaşım uzayındaki tüm atomların kümesi $X/\mathcal{R}$ ile gösterilir. Ayrıca boş küme, elemanter küme (atom) olarak kabul edilir.

3.2.3.Tanım (Pawlak, 1982) $(X, \mathcal{R})$ yaklaşım uzayı olsun. $(X, \mathcal{R})$ yaklaşım uzayındaki elemanter kümelerin her sonlu birleşimi, kompoze (oluşmuş) küme olarak adlandırılır. $(X, \mathcal{R})$ yaklaşım uzayındaki bütün kompoze kümelerin ailesi, $com(X, \mathcal{R})$ ile gösterilir.

3.2.4.Tanım (Pawlak, 1982) $(X, \mathcal{R})$ yaklaşım uzayı ve $A \subseteq X$ olsun. A kümesini kapsayan en küçük kompoze kümeye, A kümesinin $(X, \mathcal{R})$ yaklaşım uzayındaki üst yaklaşımı denir ve $\mathcal{R}^-(A)$ ile gösterilir.

$$\mathcal{R}^-(A) = \bigcup_{x \in X} \{[x]_{\mathcal{R}} \in X/\mathcal{R} : [x]_{\mathcal{R}} \cap A \neq \emptyset\}$$

şeklinde yazılır. Yani bir kümenin üst yaklaşımı, kümeyle arakesiti boş kümeden farklı olan denklik sınıflarının birleşiminden oluşur.

3.2.5.Tanım (Pawlak, 1982) $(X, \mathcal{R})$ yaklaşım uzayı ve $A \subseteq X$ olsun. A kümesi tarafından kapsanan en büyük kompoze kümeye, A kümesinin $(X, \mathcal{R})$ yaklaşım uzayındaki alt yaklaşımı denir ve $\mathcal{R}_-(A)$ ile gösterilir.

$$\mathcal{R}_-(A) = \bigcup_{x \in X} \{[x]_{\mathcal{R}} \in X/\mathcal{R} : [x]_{\mathcal{R}} \subseteq A\}$$

şeklinde yazılır. Yani bir kümenin alt yaklaşımı, küme tarafından kapsanan denklik sınıflarının birleşiminden oluşur.

3.2.6.Tanım (Pawlak, 1982) $(X, \mathcal{R})$ yaklaşım uzayı ve $A \subseteq X$ olsun.

$$POZ_{\mathcal{R}}(A) = \mathcal{R}_-(A)$$

$$NEG_{\mathcal{R}}(A) = X - \mathcal{R}^-(A)$$

$$SNR_{\mathcal{R}}(A) = \mathcal{R}^-(A) - \mathcal{R}_-(A)$$

sırasıyla A kümesinin pozitif, negatif ve sınır bölgeleridir.

3.2.7.Tanım (Pawlak, 1982) $(X, \mathcal{R})$ yaklaşım uzayı ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer

$$SNR_{\mathcal{R}}(A) = \emptyset \text{ yani } \mathcal{R}^-(A) = \mathcal{R}_-(A)$$

ise A kümesine $\mathcal{R}$ denklik bağıntısına bağlı tanımlanabilir küme; aksi halde

$$SNR_{\mathcal{R}}(A) \neq \emptyset \text{ yani } \mathcal{R}^-(A) \neq \mathcal{R}_-(A)$$

ise A kümesine $\mathcal{R}$ denklik bağıntısına bağlı bir kaba küme denir.

3.2.1.Örnek $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ evren kümesi ve $\mathcal{R}$ denklik bağıntısı da aşağıdaki şekilde verilsin.

$$\mathcal{R} = \{(x_1, x_1), (x_1, x_5), (x_2, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_6), (x_3, x_2), (x_3, x_3), \\ (x_3, x_6), (x_4, x_4), (x_5, x_1), (x_5, x_5), (x_6, x_2), (x_6, x_3), (x_6, x_6)\}.$$

$(X, \mathcal{R})$ ikilisi bir yaklaşım uzayıdır. $(X, \mathcal{R})$ yaklaşım uzayındaki atomların kümesi, yani $\mathcal{R}$ denklik bağıntısının denklik sınıflarının kümesi,

$$X/\mathcal{R} = \{\{x_1, x_5\}, \{x_2, x_3, x_6\}, \{x_4\}\}$$

şeklindedir.

$A = \{x_1, x_2, x_3, x_5\} \subseteq X$ kümesini seçelim.

$$\mathcal{R}^-(A) = \bigcup_{x \in X} \{[x]_{\mathcal{R}} \in X/\mathcal{R} : [x]_{\mathcal{R}} \cap A \neq \emptyset\} = \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6\},$$

$$\mathcal{R}_-(A) = \bigcup_{x \in X} \{[x]_{\mathcal{R}} \in X/\mathcal{R} : [x]_{\mathcal{R}} \subseteq A\} = \{x_1, x_5\}$$

olarak bulunur. $\mathcal{R}_-(A) \neq \mathcal{R}^-(A)$ olduğundan $A = \{x_1, x_2, x_3, x_5\} \subseteq X$ kümesi bir kaba kümedir.

$B = \{x_2, x_3, x_4, x_6\} \subseteq X$ kümesini seçelim.

$$\mathcal{R}^-(B) = \bigcup_{x \in X} \{[x]_{\mathcal{R}} \in X/\mathcal{R} : [x]_{\mathcal{R}} \cap B \neq \emptyset\} = \{x_2, x_3, x_4, x_6\},$$

$$\mathcal{R}_-(B) = \bigcup_{x \in X} \{[x]_{\mathcal{R}} \in X/\mathcal{R} : [x]_{\mathcal{R}} \subseteq B\} = \{x_2, x_3, x_4, x_6\}$$

olarak bulunur. $\mathcal{R}_-(B) = \mathcal{R}^-(B)$ olduğundan $B = \{x_2, x_3, x_4, x_6\} \subseteq X$ alt kümesi tanımlanabilir kümedir.

3.2.1.Teorem (Pawlak, 1982) $(X, \mathcal{R})$ yaklaşım uzayı ve $A, B \subseteq X$ olsun. Pawlak alt ve üst yaklaşım operatörleri aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- i)* $\mathcal{R}_-(X) = X = \mathcal{R}^-(X)$,
- ii)* $\mathcal{R}_-(\emptyset) = \emptyset = \mathcal{R}^-(\emptyset)$,
- iii)* $\mathcal{R}_-(A) \subseteq A \subseteq \mathcal{R}^-(A)$,
- iv)* $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{R}_-(A) \subseteq \mathcal{R}_-(B)$,
- v)* $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{R}^-(A) \subseteq \mathcal{R}^-(B)$,
- vi)* $\mathcal{R}_-(A \cap B) = \mathcal{R}_-(A) \cap \mathcal{R}_-(B)$,
- vii)* $\mathcal{R}^-(A \cup B) = \mathcal{R}^-(A) \cup \mathcal{R}^-(B)$,
- viii)* $\mathcal{R}_-[\mathcal{R}_-(A)] = \mathcal{R}_-(A)$,
- ix)* $\mathcal{R}^-[\mathcal{R}^-(A)] = \mathcal{R}^-(A)$,
- x)* $\mathcal{R}_-(A^c) = [\mathcal{R}^-(A)]^c$,
- xi)* $\mathcal{R}^-(A^c) = [\mathcal{R}_-(A)]^c$,
- xii)* $\mathcal{R}_-([\mathcal{R}_-(A)]^c) = [\mathcal{R}_-(A)]^c$,
- xiii)* $\mathcal{R}^-([\mathcal{R}^-(A)]^c) = [\mathcal{R}^-(A)]^c$,
- xiv)* $\forall A \in X/\mathcal{R}$ için $\mathcal{R}_-(A) = A$,
- xv)* $\forall A \in X/\mathcal{R}$ için $\mathcal{R}^-(A) = A$.

Pawlak, kaba küme teorisinde topolojik açıdan da bazı önemli sonuçlar elde etmiştir. İç ve kapanış operatörleri, klasik topolojide iki temel kavramdır ve Pawlak bir küme üzerindeki alt ve üst yaklaşımların sırasıyla bu küme üzerindeki iç ve kapanış operatörleri olduğunu göstermiştir.

3.2.1.Önerme (Pawlak, 1982) X bir evren küme ve $\mathcal{R} \subseteq X \times X$ bir denklik bağıntısı olsun. $\mathcal{R}$ denklik bağıntısından üretilen alt ve üst yaklaşımlar sırasıyla iç ve kapanış operatörleridir.

3.3. Esnek Kaba Kümeler

2010 yılında Feng ve ark. tarafından verilen esnek kaba kümeler, belirsizlik içeren problemlerin çözümü için iki farklı matematiksel yaklaşım olarak önerilen kaba kümeler ile esnek kümelerin birlikte ele alınmış halidir. Feng ve ark. (2010) kaba küme teorisinde denklik bağıntısı ile tanımlanan yaklaşım uzayını, esnek küme kavramını kullanarak tanımladılar. Esnek kümeler üzerinde esnek yaklaşım uzayı olarak adlandırılan bu yeni yaklaşım uzayında, esnek alt ve üst yaklaşım tanımlarını verdiler. Esnek alt ve üst yaklaşım kavramları aracılığıyla, esnek kaba kümeleri tanımlayıp, temel özelliklerini

incelediler. Ayrıca Pawlak'ın kaba kümelerinin, esnek kaba kümelerin özel bir durumu olduğunu gösterdiler. Şimdi esnek kaba küme teori ile ilgili temel kavramları hatırlatacağız.

3.3.1.Tanım (Feng ve ark., 2010) $G = (F, A)$, X evreni üzerinde bir esnek küme olsun. $S = (X, G)$ ikilisine bir esnek yaklaşım uzayı denir. S -esnek yaklaşım uzayını temel alarak $U \subseteq X$ alt kümesi için S -esnek alt ve S -esnek üst yaklaşım operatörleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} apr_-(U) &= \{x \in X: \exists a \in A, [x \in F(a) \subseteq U]\}, \\ apr^-(U) &= \{x \in X: \exists a \in A, [x \in F(a) \cap U \neq \emptyset]\}. \end{aligned}$$

Keyfi bir $U \subseteq X$ alt kümesinin S -esnek pozitif, S -esnek negatif ve S -esnek sınır bölgeleri sırasıyla aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned} POZ_S(U) &= apr_-(U), \\ NEG_S(U) &= X - apr^-(U), \\ SNR_S(U) &= apr^-(U) - apr_-(U). \end{aligned}$$

Eğer $apr^-(U) = apr_-(U)$ ise U kümesi, S -esnek yaklaşım uzayında S -tanımlanabilir küme; $apr^-(U) \neq apr_-(U)$ ise U kümesi, S -esnek yaklaşım uzayında S -esnek kaba küme olarak adlandırılır.

3.3.1.Önerme (Feng ve ark., 2010) $G = (F, A)$, X evreni üzerinde bir esnek küme ve $S = (X, G)$ esnek yaklaşım uzayı olsun. Her $U \subseteq X$ alt kümesi için aşağıdakiler sağlanır:

$$\begin{aligned} apr_-(U) &= \bigcup_{a \in A} \{F(a): F(a) \subseteq U\}, \\ apr^-(U) &= \bigcup_{a \in A} \{F(a): F(a) \cap U \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

3.3.1.Teorem (Feng ve ark., 2010; Feng ve ark., 2011) $G = (F, A)$, X evreni üzerinde bir esnek küme, $S = (X, G)$ esnek yaklaşım uzayı ve $U, V \subseteq X$ olsun. S -esnek alt ve S -esnek üst yaklaşım operatörleri aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- i) $apr_-(X) = apr^-(X) = \bigcup_{a \in A} F(a)$,
- ii) $apr_-(\emptyset) = apr^-(\emptyset) = \emptyset$,
- iii) $apr_-(U) \subseteq U$,
- iv) $apr_-(U) \subseteq apr^-(U)$,
- v) $U \subseteq V \Rightarrow apr_-(U) \subseteq apr_-(V)$,

- vi*) $U \subseteq V \Rightarrow apr^-(U) \subseteq apr^-(V)$,
- vii*) $apr_-(U \cap V) \subseteq apr_-(U) \cap apr_-(V)$,
- viii*) $apr_-(U \cup V) \supseteq apr_-(U) \cup apr_-(V)$,
- ix*) $apr^-(U \cup V) = apr^-(U) \cup apr^-(V)$,
- x*) $apr^-(U \cap V) \subseteq apr^-(U) \cap apr^-(V)$,
- xi*) $apr^-(apr^-(U)) \supseteq apr^-(U)$,
- xii*) $apr_-(apr_-(U)) = apr_-(U)$.

3.3.1.Uyarı Feng ve ark. (2011) aşağıdaki teoremlerde Pawlak'ın kaba kümelerinin, esnek kaba kümelerin özel bir durumu olduğunu gösterdiler.

3.3.2.Teorem (Feng ve ark., 2011) X evren küme ve $G = (F, A) \in \mathcal{S}(X, A)$ olsun. Buradan $G = (F, A)$ esnek kümesi, $\mathcal{R}_G \subseteq A \times X$ ikili bağıntısını oluşturur ve bu bağıntı; her $x \in A, y \in X$ için

$$(x, y) \in \mathcal{R}_G \Leftrightarrow y \in F(x)$$

şeklinde tanımlanır.

Tersine, $\mathcal{R}$ bağıntısı, A parametre kümesinden X evrenine bir ikili bağıntı olsun. Her $x \in A$ için

$$F_{\mathcal{R}}: A \rightarrow \mathcal{P}(X) \ni F_{\mathcal{R}}(x) = \{y \in X: (x, y) \in \mathcal{R}\}$$

küme değerli dönüşümü tanımlansın. Bu durumda $G_{\mathcal{R}} = (F_{\mathcal{R}}, A)$, X üzerinde bir esnek kümedir. Üstelik $G_{\mathcal{R}_G} = G$ ve $\mathcal{R}_{G_{\mathcal{R}}} = \mathcal{R}$ olur. Ayrıca $\mathcal{R}_G$, $G = (F, A)$ esnek kümesinin kanonik bağıntısı ve $G_{\mathcal{R}}$, $\mathcal{R}$ ikili bağıntısının kanonik esnek kümesi olarak adlandırılır.

3.3.3.Teorem (Feng ve ark., 2011) $\mathcal{R}$ bağıntısı, X evreni üzerinde bir denklik bağıntısı $G_{\mathcal{R}} = (F_{\mathcal{R}}, X)$ esnek kümesi, $\mathcal{R}$ denklik bağıntısının kanonik esnek kümesi ve $S = (X, G_{\mathcal{R}})$ bir esnek yaklaşım uzayı olsun. O halde her $U \subseteq X$ kümesi için $\mathcal{R}_-(U)$ ve $\mathcal{R}^-(U)$ Pawlak yaklaşım operatörleri olmak üzere,

$$\mathcal{R}^-(U) = apr^-(U) \text{ ve } \mathcal{R}_-(U) = apr_-(U)$$

olur. Bu koşullarda $U \subseteq X$ kümesinin, bir kaba küme (Pawlak anlamında) olması için gerek ve yeter şart S -esnek kaba küme olmasıdır.

3.4. Esnek Örtü Tabanlı Kaba Kümeler

Yüksel ve ark. (2014; 2015) esnek yaklaşım uzayında kaba kümeyi tanımlamak için bir esnek küme yerine, esnek örtü kümeyi kullanıp, esnek örtü tabanlı kaba kümeleri tanımladılar. Böylece esnek yaklaşım uzaylarını, esnek örtü yaklaşım uzayları olarak adlandırılan yapılara genişlettiler. Esnek örtü yaklaşım uzayında, esnek örtü alt ve üst yaklaşımları tanımladılar. Bu yapılar aracılığıyla, esnek örtü yaklaşım uzayında kaba kümeleri ve çeşitlerini incelediler. Esnek örtü tabanlı kaba kümelerin temel özelliklerini yani Pawlak (1982) tarafından incelenen klasik kaba kümelerin hangi özelliklerinin sağlanıp sağlanmadığını araştırdılar. Sağlanmayan özellikler için karşıt örnekler verdiler. Daha sonra, Li ve ark. (2015), Zhan ve Alcantud (2019), Güzel Ergül ve Yüksel (2019), Zhan ve Wang (2019), Atef ve ark. (2023), Mareay (2024), Güzel Ergül ve Yaşar (2025) farklı esnek örtü tabanlı kaba küme modellerini tanımladılar. Şimdi esnek örtü tabanlı kaba küme teori ile ilgili temel kavramları hatırlatacağız.

3.4.1.Tanım (Feng ve ark., 2010) $G = (F, A)$, X evreni üzerinde bir esnek küme olsun. Eğer $\bigcup_{a \in A} F(a) = X$ ise $G = (F, A)$ esnek kümesine, tam esnek küme denir.

3.4.2.Tanım (Feng ve ark., 2011) $G = (F, A)$, X evreni üzerinde bir esnek küme olsun. Eğer $\{F(a): a \in A\}$ ailesi, X evreninin bir parçalanışı oluşturuyorsa $G = (F, A)$ esnek kümesine, parçalı esnek küme denir.

3.4.1.Uyarı 3.4.1.Tanım ve 3.4.2.Tanım gereği her parçalı esnek kümenin, bir tam esnek küme olduğu açıktır.

3.4.3.Tanım (Feng ve ark., 2010) X evren küme ve $G = (F, A) \in \mathcal{S}(X, A)$ tam esnek küme olsun. Eğer her $a \in A$ için $F(a) \neq \emptyset$ ise $G = (F, A)$ esnek kümesine bir esnek örtü küme denir.

3.4.2.Uyarı Bundan sonra, esnek örtü küme C_G ile gösterilecektir. Buna bağlı olarak $(a, F(a)) \in C_G \Leftrightarrow F(a) \tilde{\in} C_G$ şeklinde ifade edilecektir.

3.4.4.Tanım (Yüksel ve ark., 2014) X evren küme ve $G = (F, A) \in \mathcal{S}(X, A)$ esnek örtü küme olsun. $S = (X, C_G)$ ikilisine, esnek örtü yaklaşım uzayı denir.

3.4.5.Tanım (Yüksel ve ark., 2014) $S = (X, C_G)$ bir esnek örtü yaklaşım uzayı ve $x \in X$ olsun.

$Mind_S(x) = \{F(a): a \in A \wedge x \in F(a) \wedge (\forall e \in A \wedge x \in F(e) \subseteq F(a) \implies F(a) = F(e))\}$ ailesi, C_G esnek örtüsüne göre, x noktasının esnek minimal tasviri olarak adlandırılır.

Bu tez çalışması, esnek örtü tabanlı kaba kümelerin bazı türlerinin yeni karakterizasyonlarını vermek amacıyla yapılmıştır. Bu yüzden şimdi bu çalışmada inceleyeceğimiz; Yüksel ve ark. (2014; 2015), Li ve ark. (2015) ve Zhan ve Alcantud (2019) tarafından verilen esnek örtü tabanlı kaba küme modellerini hatırlatalım. Yüksel ve ark. (2014; 2015) tarafından verilen esnek örtü tabanlı kaba kümeler, esnek minimal tasvir kavramı yardımıyla tanımlanmıştır. Daha sonra, Li ve ark. (2015) ve Zhan ve Alcantud (2019) farklı esnek örtü tabanlı kaba küme modellerini tanımlamıştır.

3.4.6.Tanım (Yüksel ve ark., 2015) $S = (X, C_G)$ bir esnek örtü yaklaşım uzayı olsun. $U \subseteq X$ alt kümesi için 1.tip esnek örtü alt ve üst yaklaşımları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$CL(U) = \bigcup_{a \in A} \{F(a): F(a) \subseteq U\},$$

$$FH(U) = CL(U) \cup (\bigcup \{Mind_S(u): u \in U - CL(U)\}).$$

Keyfi bir $U \subseteq X$ alt kümesinin esnek örtü pozitif, esnek örtü negatif ve esnek örtü sınır bölgeleri sırasıyla aşağıdaki şekildedir:

$$POZ_S(U) = CL(U),$$

$$NEG_S(U) = X - FH(U),$$

$$SNR_S(U) = FH(U) - CL(U).$$

Eğer $FH(U) = CL(U)$ ise U kümesi, esnek örtü yaklaşım uzayında 1.tipe göre esnek örtü tabanlı tanımlanabilir küme; $FH(U) \neq CL(U)$ ise U kümesi, esnek örtü yaklaşım uzayında 1.tipe göre esnek örtü tabanlı kaba küme olarak adlandırılır.

3.4.7.Tanım (Li ve ark., 2015) $S = (X, C_G)$ bir esnek örtü yaklaşım uzayı olsun. $U \subseteq X$ alt kümesi için 2.tip esnek örtü alt ve üst yaklaşımları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$CL(U) = \bigcup_{a \in A} \{F(a): F(a) \subseteq U\},$$

$$SH(U) = \bigcup_{a \in A} \{F(a): F(a) \cap U \neq \emptyset\}.$$

Keyfi bir $U \subseteq X$ alt kümesinin esnek örtü pozitif, esnek örtü negatif ve esnek örtü sınır bölgeleri sırasıyla aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned}
POZ_S(U) &= CL(U), \\
NEG_S(U) &= X - SH(U), \\
SNR_S(U) &= SH(U) - CL(U).
\end{aligned}$$

Eğer $SH(U) = CL(U)$ ise U kümesi, esnek örtü yaklaşım uzayında 2.tipe göre esnek örtü tabanlı tanımlanabilir küme; $SH(U) \neq CL(U)$ ise U kümesi, esnek örtü yaklaşım uzayında 2.tipe göre esnek örtü tabanlı kaba küme olarak adlandırılır.

3.4.3.Uyarı (Zhan ve ark. 2019) Feng ve ark. (2010) tarafından verilen esnek kaba küme, esnek yaklaşım uzayında ifade edilirken, Li ve ark. (2015) tarafından verilen 2.tip esnek örtü tabanlı kaba küme, esnek örtü yaklaşım uzayında ifade edilir. Aslında Feng ve ark. (2010) tarafından verilen alt ve üst yaklaşım operatörleri ile Li ve ark. (2015) tarafından verilen alt ve üst yaklaşım operatörlerinin aynı olduğunu görmek, 3.3.1.Tanım, 3.3.1.Önerme ve 3.4.7.Tanım gereği kolaydır. Buradaki tek fark kullanılan kümenin tam esnek küme olmasıdır.

3.4.8.Tanım (Yüksel ve ark., 2014) $S = (X, C_G)$ bir esnek örtü yaklaşım uzayı olsun. $U \subseteq X$ alt kümesi için 3.tip esnek örtü alt ve üst yaklaşımları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned}
CL(U) &= \bigcup_{a \in A} \{F(a) : F(a) \subseteq U\}, \\
TH(U) &= \bigcup \{ \bigcup Mind_S(u) : u \in U \}.
\end{aligned}$$

Keyfi bir $U \subseteq X$ alt kümesinin esnek örtü pozitif, esnek örtü negatif ve esnek örtü sınır bölgeleri sırasıyla aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned}
POZ_S(U) &= CL(U), \\
NEG_S(U) &= X - TH(U), \\
SNR_S(U) &= TH(U) - CL(U).
\end{aligned}$$

Eğer $TH(U) = CL(U)$ ise U kümesi, esnek örtü yaklaşım uzayında 3.tipe göre esnek örtü tabanlı tanımlanabilir küme; $TH(U) \neq CL(U)$ ise U kümesi, esnek örtü yaklaşım uzayında 3.tipe göre esnek örtü tabanlı kaba küme olarak adlandırılır.

3.4.9.Tanım (Zhan ve Alcantud, 2019) $S = (X, C_G)$ bir esnek örtü yaklaşım uzayı olsun. $U \subseteq X$ alt kümesi için 4.tip esnek örtü alt ve üst yaklaşımları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$CL(U) = \bigcup_{a \in A} \{F(a) : F(a) \subseteq U\},$$

$$RH(U) = CL(U) \cup (\bigcup_{a \in A} \{F(a) : F(a) \cap (U - CL(U)) \neq \emptyset\}).$$

Keyfi bir $U \subseteq X$ alt kümesinin esnek örtü pozitif, esnek örtü negatif ve esnek örtü sınır bölgeleri sırasıyla aşağıdaki şekildedir:

$$POZ_S(U) = CL(U),$$

$$NEG_S(U) = X - RH(U),$$

$$SNR_S(U) = RH(U) - CL(U).$$

Eğer $RH(U) = CL(U)$ ise U kümesi, esnek örtü yaklaşım uzayında 4.tipe göre esnek örtü tabanlı tanımlanabilir küme; $RH(U) \neq CL(U)$ ise U kümesi, esnek örtü yaklaşım uzayında 4.tipe göre esnek örtü tabanlı kaba küme olarak adlandırılır.

3.4.4.Uyarı 3.4.6.Tanım, 3.4.7.Tanım, 3.4.8.Tanım ve 3.4.9.Tanım gereği verilen esnek örtü tabanlı kaba kümelerin alt yaklaşımları aynıdır. Fakat üst yaklaşımları farklıdır.



4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, ilk olarak esnek minimal tasvir ve esnek maksimal tasvir kavramları arasındaki ilişki belirlenmiştir. Daha sonra bunun yardımıyla esnek örtü tabanlı kaba kümelerin bazı türleri arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Ayrıca bazı esnek örtü tabanlı kaba kümelerin yeni karakterizasyonları elde edilmiştir.

4.1. Esnek Minimal Tasvir ile Esnek Maksimal Tasvir Kavramları Arasındaki İlişki

Yüksel ve ark. (2014; 2015) tarafından esnek örtü tabanlı kaba kümeler ve çeşitleri esnek minimal tasvir kavramı yardımıyla tanımlanmıştır. Daha sonra Güzel Ergül ve Yaşar (2025) tarafından esnek maksimal tasvir kavramı verilmiş ve yeni esnek örtü tabanlı kaba kümeler bu kavram yardımıyla tanımlanmıştır. Bu bölümde ilk olarak esnek maksimal tasvir kavramını hatırlattık. Ayrıca esnek maksimal tasvir ve esnek minimal tasvir kavramları arasındaki ilişkiyi belirledik.

4.1.1.Tanım (Güzel Ergül ve Yaşar, 2025) $S = (X, C_G)$ bir esnek örtü yaklaşım uzayı ve $x \in X$ olsun.

$Maxd_S(x) = \{F(a): a \in A \wedge x \in F(a) \wedge (\forall e \in A \wedge x \in F(a) \subseteq F(e) \Rightarrow F(a) = F(e))\}$ ailesi, C_G esnek örtüsüne göre, x noktasının esnek maksimal tasviri olarak adlandırılır.

Minimal tasvir kavramı esnek örtü tabanlı kaba kümelerin tanımlanmasında önemli rol oynamaktadır. Bu çalışmada bir elemanın maksimal tasvir tanımı kullanılarak bazı esnek örtü tabanlı kaba kümeler yeniden ele alınmıştır. Bir nesneyi ifade etmek için nesnenin tüm özelliklerine değil yalnızca o nesneye ilişkin temel özelliklere ihtiyacımız vardır. Minimal tasvir ve maksimal tasvir kavramlarının amacı budur.

Esnek maksimal tasvir ve esnek minimal tasvir kavramlarının daha iyi anlaşılması için bunu aşağıdaki örnekler ile gösterelim.

4.1.1.Örnek (Güzel Ergül ve Yaşar, 2025) $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ evren küme, $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ parametreler kümesi ve

$$F(a_1) = \{x_1, x_2\},$$

$$F(a_2) = \{x_1, x_3\},$$

$$F(a_3) = \{x_1, x_3, x_4\},$$

$$F(a_4) = \{x_1, x_3, x_4, x_5\}$$

olmak üzere X üzerinde $G = (F, A)$ esnek örtü kümesi verilsin. Bu durumda $S = (X, C_G)$ ikilisi bir esnek örtü yaklaşım uzayıdır. C_G esnek örtüsüne göre, sırayla $x \in X$ noktalarının esnek minimal tasvirleri aşağıdaki şekildedir:

$$Mind_S(x_1) = \{F(a_1), F(a_2)\},$$

$$Mind_S(x_2) = \{F(a_1)\},$$

$$Mind_S(x_3) = \{F(a_2)\},$$

$$Mind_S(x_4) = \{F(a_3)\},$$

$$Mind_S(x_5) = \{F(a_4)\}.$$

C_G esnek örtüsüne göre, sırayla $x \in X$ noktalarının esnek maksimal tasvirleri aşağıdaki şekildedir:

$$Maxd_S(x_1) = \{F(a_1), F(a_4)\},$$

$$Maxd_S(x_2) = \{F(a_1)\},$$

$$Maxd_S(x_3) = \{F(a_4)\},$$

$$Maxd_S(x_4) = \{F(a_4)\},$$

$$Maxd_S(x_5) = \{F(a_4)\}$$

elde ederiz.

4.1.2.Örnek $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ evren küme ve $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ parametreler kümesi olmak üzere 4.1.1.Örnekteki $S = (X, C_G)$ esnek örtü yaklaşım uzayı verilsin.

$$\cup \{Mind_S(x) : x \in X\} = \{F(a_1), F(a_2), F(a_3), F(a_4)\}$$

$$\cup \{Maxd_S(x) : x \in X\} = \{F(a_1), F(a_4)\}$$

olduğunu görmek kolaydır.

4.1.3.Örnek $X = \{x_1, x_2\}$ evren küme, $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ ve $B = \{a_1, a_2\}$ parametreler kümesi ve

$$F_1(a_1) = \{x_1\},$$

$$F_1(a_2) = \{x_2\},$$

$$F_1(a_3) = \{x_1, x_2\}$$

olmak üzere X üzerinde $G_1 = (F_1, A)$ esnek örtü kümesi ve $S = (X, C_{G_1})$ esnek örtü yaklaşım uzayı

$$F_2(a_1) = \{x_1\},$$

$$F_2(a_2) = \{x_2\}$$

olmak üzere X üzerinde $G_2 = (F_2, B)$ esnek örtü kümesi ve $S = (X, C_{G_2})$ esnek örtü yaklaşım uzayı verilsin. Açıktır ki $G_1 \neq G_2$ olup yani X evreni üzerindeki iki farklı esnek örtü kümeleridir. Ancak $S = (X, C_{G_1})$ ve $S = (X, C_{G_2})$ esnek örtü yaklaşım uzayında

$$\cup \{Mind_S(x): x \in X\} = \{F_1(a_1) = F_2(a_1), F_1(a_2) = F_2(a_2)\}$$

olduğunu görmek kolaydır.

4.1.4.Örnek $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ evren küme, $A = \{a_1, a_3\}$ ve $B = \{a_1, a_2, a_3\}$ parametreler kümesi ve

$$F_1(a_1) = \{x_1\},$$

$$F_1(a_3) = \{x_1, x_2, x_3\}$$

olmak üzere X üzerinde $G_1 = (F_1, A)$ esnek örtü kümesi ve $S = (X, C_{G_1})$ esnek örtü yaklaşım uzayı

$$F_2(a_1) = \{x_1\},$$

$$F_2(a_2) = \{x_2\},$$

$$F_2(a_3) = \{x_1, x_2, x_3\}$$

olmak üzere X üzerinde $G_2 = (F_2, B)$ esnek örtü kümesi ve $S = (X, C_{G_2})$ esnek örtü yaklaşım uzayı verilsin. Açıktır ki $G_1 \neq G_2$ olup yani X evreni üzerindeki iki farklı esnek örtü kümeleridir. Ancak $S = (X, C_{G_1})$ ve $S = (X, C_{G_2})$ esnek örtü yaklaşım uzaylarında

$$\cup \{Maxd_S(x): x \in X\} = \{F_1(a_3) = F_2(a_3)\}$$

olduğunu görmek kolaydır.

Şimdi esnek minimal tasvir ile esnek maksimal tasvir kavramları arasındaki ilişkiyi belirlemek için aşağıdaki teoremleri verelim.

4.1.1. Teorem $S = (X, C_G)$ bir esnek örtü yaklaşım uzayı olsun. Bu durumda herhangi bir $\{F(e): e \in A \wedge x \in F(e)\} \tilde{\in} C_G$ için $F(e) \subseteq F(a)$ olacak şekilde en az bir $\{F(a): a \in A \wedge F(a) \in Maxd_S(x)\}$ vardır, dolayısıyla $F(e) \subseteq \cup Maxd_S(x)$ olur.

İspat: $\{F(e): e \in A \wedge x \in F(e)\} \tilde{\in} C_G$ olsun. Kabul edelim ki herhangi bir $\{F(a): a \in A \wedge F(a) \in Maxd_S(x)\}$ için $F(e) \not\subseteq F(a)$ olsun. $F(e) \notin Maxd_S(x)$ olup dolayısıyla 4.1.1.Tanım gereği $F(e) \subseteq F(a_1)$ olacak şekilde $F(a_1) \tilde{\in} C_G$ vardır. Hipotez

ve $F(e) \subseteq F(a_1)$ gereği $F(a_1) \notin \text{Maxd}_S(x)$ olur ve bu yüzden tekrar 4.1.1.Tanım gereği $F(a_1) \subseteq F(a_2)$ olacak şekilde $F(a_2) \in C_G$ vardır. Dolayısıyla $F(e) \subseteq F(a_2)$ elde edilir. Hipotez gereği $F(a_2) \notin \text{Maxd}_S(x)$ olduğundan ve bu yüzden tekrar 4.1.1.Tanım gereği $F(a_2) \subseteq F(a_3)$ olacak şekilde $F(a_3) \in C_G$ vardır. Bu şekilde tekrar devam edildiğinde $F(e) \subseteq F(a_1) \subseteq F(a_2) \subseteq \dots \subseteq F(a_m) \subseteq \dots$ olacak şekilde C_G esnek örtüsü içinde $F(e), F(a_1), F(a_2), \dots, F(a_m) \dots$ sonsuz bir dizi elde ederiz. Fakat C_G esnek örtü kümesi, sonlu elemanlara sahip olması nedeniyle bu durum mümkün değildir. Dolayısıyla $F(e) \subseteq F(a)$ olacak şekilde $F(a) \in \text{Maxd}_S(x)$ vardır. Açıktır ki $F(e) \subseteq \bigcup \text{Maxd}_S(x)$ olur.

4.1.2.Teorem $S = (X, C_G)$ bir esnek örtü yaklaşım uzayı ve $F(a) \in C_G$ olsun. Bu durumda $\forall x \in F(a)$ için $F(e) \subseteq F(a)$ ve $F(e) \in \text{Mind}_S(x)$ olacak şekilde en az bir $F(e) \in C_G$ vardır.

İspat: Bu teoremin ispatı 4.1.1.Teoremin ispatı ile aynıdır.

Şimdi esnek minimal tasvir ile esnek maksimal tasvir kavramlarının hangi koşullar altında eşit olduğunu belirlemek için aşağıdaki teoremi verelim.

4.1.3.Teorem $S = (X, C_G)$ bir esnek örtü yaklaşım uzayı olsun. Bu durumda herhangi bir $x \in X$ için $\text{Maxd}_S(x) = \text{Mind}_S(x)$ olması için gerek ve yeter şart herhangi bir $F(a), F(b) \in C_G$ için eğer $F(a) \neq F(b)$ ise $F(a) \not\subseteq F(b)$ olmasıdır.

İspat: $F(a) \subseteq F(b)$ olacak şekilde $F(a), F(b) \in C_G$ ve $F(a) \neq F(b)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $F(a) \in C_G$ ve $x \in F(a)$ için 4.1.2.Teorem gereği $F(e) \subseteq F(a)$ ve $F(e) \in \text{Mind}_S(x)$ olacak şekilde en az bir $F(e) \in C_G$ vardır. Hipotez gereği $\text{Maxd}_S(x) = \text{Mind}_S(x)$ olduğundan $F(e) \in \text{Maxd}_S(x)$ elde edilir. $F(e) \subseteq F(a)$ ve $F(e) \subseteq F(b)$ olduğundan 4.1.1.Tanım gereği $F(e) = F(a)$ ve $F(e) = F(b)$ elde edilir ve dolayısıyla $F(a) = F(b)$ olur. Bu da $F(a) \neq F(b)$ ifadesi ile çelişmektedir. Bu, gerekliliğin ispatını tamamlamaktadır.

Tersine $x \in X$ olsun. Herhangi bir $F(a) \in \text{Mind}_S(x)$ için $F(a) \notin \text{Maxd}_S(x)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda 4.1.1.Tanım gereği $F(a) \subseteq F(b)$ olacak şekilde koşullarla çelişen bir $F(b) \in C_G$ vardır. Dolayısıyla $F(a) \in \text{Maxd}_S(x)$ olur ve böylece

$Mind_S(x) \subseteq Maxd_S(x)$ elde edilir. Diğer yandan herhangi bir $F(a) \in Maxd_S(x)$ için $F(a) \notin Mind_S(x)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda 3.4.5.Tanım gereği $F(b) \subseteq F(a)$ olacak şekilde koşullarla çelişen bir $F(b) \in C_G$ vardır. Buna göre $F(a) \in Mind_S(x)$ ve dolayısıyla $Maxd_S(x) \subseteq Mind_S(x)$ olur. Sonuç olarak $Maxd_S(x) = Mind_S(x)$ elde edilir.

4.1.1.Sonuç $S = (X, C_G)$ bir esnek örtü yaklaşım uzayı olsun. O zaman herhangi bir $x \in X$ için $Maxd_S(x) = Mind_S(x)$ olması için gerek ve yeter şart herhangi bir $F(a), F(b) \in C_G$ için eğer $F(a) \subseteq F(b)$ ise $F(a) = F(b)$ olmasıdır.

İspat: Herhangi bir $F(a), F(b) \in C_G$ için eğer $F(a) \subseteq F(b)$ ise $F(a) = F(b)$ olmasıdır $\Leftrightarrow$ Herhangi bir $F(a), F(b) \in C_G$ için eğer $F(a) \neq F(b)$ ise $F(a) \not\subseteq F(b)$ olmasıdır. Dolayısıyla 4.1.3.Teorem gereği ispat açıktır.

4.2. Esnek Maksimal Kavramı Yardımıyla Bazı Esnek Örtü Tabanlı Kaba Kümelerin Yeni Özellikleri

Biz bu çalışmada esnek maksimal tasvir kavramını kullanarak 1.tip, 2.tip, 3.tip ve 4.tip esnek örtü üst yaklaşımları dolayısıyla esnek örtü tabanlı kaba kümeleri yeniden inceleyeceğiz. İlk olarak bu esnek örtü tabanlı kaba kümelerin karşılaştırmasını verelim. Bu çalışmada inceleyeceğimiz esnek örtü tabanlı kaba kümelerin alt yaklaşımları aynıdır. Ancak üst yaklaşım operatörleri farklıdır. Bu yüzden karşılaştırmalar yapılırken üst yaklaşım operatörleri dikkate alınır. Yüksel ve ark. (2014) ve Zhan ve Alcantud (2019) tarafından yapılan karşılaştırmalar aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir.

4.2.1.Önerme Herhangi bir $S = (X, C_G)$ bir esnek örtü yaklaşım uzayı ve $U \subseteq X$ alt kümesi için

i) $TH(U) \subseteq SH(U)$ (Yüksel ve ark., 2014).

ii) $RH(U) \subseteq SH(U)$ (Zhan ve Alcantud, 2019).

iii) $FH(U) \subseteq TH(U) \subseteq SH(U)$ (Zhan ve Alcantud, 2019).

Biz yukarıdaki karşılaştırmaları dikkate alarak bu çalışmada inceleyeceğimiz esnek örtü tabanlı kaba kümelerin karşılaştırmalarını yeniden ele aldık ve aşağıdaki sonucu elde ettik.

4.2.1.Sonuç Herhangi bir $S = (X, C_G)$ bir esnek örtü yaklaşım uzayı ve $U \subseteq X$ alt kümesi için

$$FH(U) \subseteq RH(U) \subseteq SH(U).$$

Şimdi esnek örtü tabanlı kaba kümelerin karşılaştırmalarını yapmak için aşağıdaki örnekleri verelim:

4.2.1.Örnek $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ evren küme, $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ parametreler kümesi ve

$$F(a_1) = \{x_1, x_6\},$$

$$F(a_2) = \{x_1, x_6, x_8\},$$

$$F(a_3) = \{x_2, x_4\},$$

$$F(a_4) = \{x_2, x_4, x_5\},$$

$$F(a_5) = \{x_3, x_7\}$$

olmak üzere X üzerinde $G = (F, A)$ esnek örtü kümesi verilsin. Bu durumda $S = (X, C_G)$ ikilisi bir esnek örtü yaklaşım uzayıdır. $X_1 = \{x_2, x_4, x_6\} \subseteq X$ alt kümesini ele alalım.

$$FH(X_1) = \{x_1, x_2, x_4, x_6\}$$

$$RH(X_1) = \{x_1, x_2, x_4, x_6, x_8\}$$

$$SH(X_1) = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_8\}$$

olup $FH \subseteq RH \subseteq SH$ şeklinde aralarında alt küme ilişkisi vardır.

4.2.2.Örnek $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ evren küme, $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ parametreler kümesi ve

$$F(a_1) = \{x_1, x_3\},$$

$$F(a_2) = \{x_2, x_4\},$$

$$F(a_3) = \{x_2, x_5\},$$

$$F(a_4) = \{x_1, x_3, x_4\},$$

$$F(a_5) = \{x_2, x_4, x_6\}$$

olmak üzere X üzerinde $G = (F, A)$ esnek örtü kümesi verilsin. Bu durumda $S = (X, C_G)$ ikilisi bir esnek örtü yaklaşım uzayıdır. $X_1 = \{x_2, x_4\} \subseteq X$ alt kümesini ele alalım.

$$FH(X_1) = \{x_2, x_4\}$$

$$TH(X_1) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

$$SH(X_1) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\} = X$$

olup $FH \subseteq TH \subseteq SH$ şeklinde aralarında alt küme ilişkisi vardır.

4.2.3.Örnek 4.2.2. Örnekte $X_1 = \{x_2, x_4, x_6\} \subseteq X$ alt kümesini ele alalım.

$$RH(X_1) = \{x_2, x_4, x_6\}$$

$$TH(X_1) = X$$

olup $RH \subseteq TH$ şeklindedir. 4.1.1. Örnekte $X_1 = \{x_2, x_4\} \subseteq X$ alt kümesini ele alalım.

$$RH(X_1) = X$$

$$TH(X_1) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

olup $TH \subseteq RH$ şeklindedir. Dolayısıyla RH üst yaklaşım operatörü ile TH üst yaklaşım operatörü karşılaştırılmaz.

Önceki bölümde esnek maksimal tasvir ve esnek minimal tasvir kavramları arasındaki ilişki belirlenmiştir. Şimdi bu bulgular yardımıyla bazı esnek örtü tabanlı kaba kümelerin yeni karakterizasyonlarını ve bazı türleri arasındaki ilişkileri verelim.

İlk olarak 2. tip ve 4. tip esnek örtü üst yaklaşımlarını esnek maksimal tasvir kavramı yardımı ile yeniden tanımlayabilmek için aşağıdaki teoremi verelim:

4.2.1.Teorem $S = (X, C_G)$ bir esnek örtü yaklaşım uzayı olsun. O zaman herhangi bir $U \subseteq X$ için $\cup\{F(a): F(a) \tilde{\in} C_G, F(a) \cap U \neq \emptyset\} = \cup\{\cup Maxd_S(x): x \in U\}$ sağlanır.

İspat: $U \subseteq X$ olsun. Herhangi bir $y \in \cup\{F(a): F(a) \tilde{\in} C_G, F(a) \cap U \neq \emptyset\}$ için $F(a) \cap U \neq \emptyset$ olmak üzere $F(a) \tilde{\in} C_G$ ve $y \in F(a)$ vardır. $x \in F(a) \cap U$ olarak alırsak 4.1.1.Teorem gereği $F(a) \subseteq \cup Maxd_S(x)$ olur. Böylece $y \in \cup Maxd_S(x)$ ve $x \in U$ olur. Buradan $y \in \cup\{\cup Maxd_S(x): x \in U\}$ elde edilir. Dolayısıyla

$$\cup\{F(a): F(a) \tilde{\in} C_G, F(a) \cap U \neq \emptyset\} \subseteq \cup\{\cup Maxd_S(x): x \in U\}$$

olur. Diğer yandan 4.1.1.Tanım gereği herhangi bir $x \in U$ ve $F(a) \in Maxd_S(x)$ için açıktır ki $x \in F(a) \cap U$, yani $F(a) \cap U \neq \emptyset$ olur. Dolayısıyla

$$\cup\{\cup Maxd_S(x): x \in U\} \subseteq \cup\{F(a): F(a) \tilde{\in} C_G, F(a) \cap U \neq \emptyset\}$$

olup, böylece

$$\cup\{F(a): F(a) \tilde{\in} C_G, F(a) \cap U \neq \emptyset\} = \cup\{\cup Maxd_S(x): x \in U\}$$

sağlanır.

Şimdi 2. tip ve 4. tip esnek örtü tabanlı kaba kümelerin yeni karakterizasyonlarını verebiliriz.

4.2.2.Teorem $S = (X, C_G)$ bir esnek örtü yaklaşım uzayı olsun. Bu durumda herhangi bir $U \subseteq X$ için $SH(U) = \bigcup \{ \bigcup Maxd_S(x) : x \in U \}$ sağlanır.

İspat: 4.2.1.Teorem ve 3.4.7.Tanım gereği açıktır.

4.2.3.Teorem $S = (X, C_G)$ bir esnek örtü yaklaşım uzayı olsun. Bu durumda herhangi bir $U \subseteq X$ için $RH(U) = CL(U) \cup (\bigcup \{ \bigcup Maxd_S(x) : x \in U - CL(U) \})$ sağlanır.

İspat: 4.2.1.Teorem ve 3.4.9.Tanım gereği açıktır.

2. tip ve 3. tip esnek örtü üst yaklaşımları arasındaki ilişkiyi göstermek için aşağıdaki teoremi verelim:

4.2.4.Teorem $S = (X, C_G)$ bir esnek örtü yaklaşım uzayı olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar eşdeğerdir.

i) $SH = TH$

ii) Herhangi bir $x \in X$ için $\bigcup Maxd_S(x) = \bigcup Mind_S(x)$.

İspat: *i*) $\Rightarrow$ *ii*) Herhangi bir $x \in X$ için $SH = TH$ ise $SH(\{x\}) = TH(\{x\})$ olur. Böylece 4.2.2.Teorem, 3.4.7.Tanım ve 3.4.8.Tanım gereği $\bigcup Maxd_S(x) = \bigcup Mind_S(x)$ elde edilir.

ii) $\Rightarrow$ *i*) 4.2.2.Teorem, 3.4.7.Tanım ve 3.4.8.Tanım gereği açıktır.

4.2.1.Uyarı Açıktır ki herhangi bir $x \in X$ için $Maxd_S(x) = Mind_S(x)$ ise herhangi bir $x \in X$ için $\bigcup Maxd_S(x) = \bigcup Mind_S(x)$ olur. Ancak aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi bu durumun tersi geçerli değildir.

4.2.4.Örnek $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ evren küme, $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ parametreler kümesi ve

$$F(a_1) = \{x_1, x_2\},$$

$$F(a_2) = \{x_1, x_3\},$$

$$F(a_3) = \{x_2, x_3\},$$

$$F(a_4) = \{x_1, x_2, x_3\},$$

$$F(a_5) = \{x_4, x_5\}$$

olmak üzere X üzerinde $G = (F, A)$ esnek örtü kümesi verilsin. Bu durumda $S = (X, C_G)$ ikilisi bir esnek örtü yaklaşım uzayıdır. C_G esnek örtüsüne göre, sırayla $x \in X$ noktalarının esnek minimal tasvirleri aşağıdaki şekildedir:

$$Mind_S(x_1) = \{F(a_1), F(a_2)\},$$

$$Mind_S(x_2) = \{F(a_1), F(a_3)\},$$

$$Mind_S(x_3) = \{F(a_2), F(a_3)\},$$

$$Mind_S(x_4) = \{F(a_5)\},$$

$$Mind_S(x_5) = \{F(a_5)\}.$$

C_G esnek örtüsüne göre, sırayla $x \in X$ noktalarının esnek maksimal tasvirleri aşağıdaki şekildedir:

$$Maxd_S(x_1) = \{F(a_4)\},$$

$$Maxd_S(x_2) = \{F(a_4)\},$$

$$Maxd_S(x_3) = \{F(a_4)\},$$

$$Maxd_S(x_4) = \{F(a_5)\},$$

$$Maxd_S(x_5) = \{F(a_5)\}$$

elde edilir.

$$\cup Mind_S(x_1) = \cup Mind_S(x_2) = \cup Mind_S(x_3) = \{x_1, x_2, x_3\} = F(a_4),$$

$$\cup Mind_S(x_4) = \cup Mind_S(x_5) = \{x_4, x_5\} = F(a_5),$$

$$\cup Maxd_S(x_1) = \cup Maxd_S(x_2) = \cup Maxd_S(x_3) = \{x_1, x_2, x_3\} = F(a_4),$$

$$\cup Maxd_S(x_4) = \cup Maxd_S(x_5) = \{x_4, x_5\} = F(a_5)$$

olduğunu görmek kolaydır. Yani $x_1 \in X$, $\cup Maxd_S(x_1) = \cup Mind_S(x_1)$ iken $Maxd_S(x_1) \neq Mind_S(x_1)$ dir.

Yukarıdaki örneğe göre, 2. tip ve 3. tip esnek örtü üst yaklaşımlarının hangi koşullar altında eşit olduğunu göstermek için aşağıdaki sonucu verelim.

4.2.2.Sonuç $S = (X, C_G)$ bir esnek örtü yaklaşım uzayı olsun. Herhangi bir $F(a), F(b) \in C_G$ için eğer $F(a) \neq F(b)$ ise $F(a) \not\subseteq F(b)$ koşulunu sağlıyorsa $SH = TH$ olur.

İspat: 4.1.3.Teorem ve 4.1.1.Sonuç gereği açıktır.

Şimdi 1. tip ve 4. tip esnek örtü üst yaklaşımları arasındaki ilişkiyi verelim:

4.2.5.Teorem $S = (X, C_G)$ bir esnek örtü yaklaşım uzayı olsun. Herhangi bir için $x \in X$ için $\cup \text{Maxd}_S(x) = \cup \text{Mind}_S(x)$ koşulu sağlanıyorsa $FH = RH$ olur.

İspat: 4.2.3.Teorem, 3.4.6.Tanım ve 3.4.9.Tanım gereği açıktır.

4.2.2.Uyarı Aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi bu durumun tersi geçerli değildir.

4.2.5.Örnek $X = \{x_1, x_2\}$ evren küme, $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ parametreler kümesi ve

$$F(a_1) = \{x_1\},$$

$$F(a_2) = \{x_2\},$$

$$F(a_3) = \{x_1, x_2\}$$

olmak üzere X üzerinde $G = (F, A)$ esnek örtü kümesi verilsin. Bu durumda $S = (X, C_G)$ ikilisi bir esnek örtü yaklaşım uzayıdır. C_G esnek örtüsüne göre, sırayla $x \in X$ noktalarının esnek minimal tasvirleri aşağıdaki şekildedir:

$$\text{Mind}_S(x_1) = \{F(a_1)\}$$

$$\text{Mind}_S(x_2) = \{F(a_2)\}.$$

C_G esnek örtüsüne göre, sırayla $x \in X$ noktalarının esnek maksimal tasvirleri aşağıdaki şekildedir:

$$\text{Maxd}_S(x_1) = \{F(a_3)\}$$

$$\text{Maxd}_S(x_2) = \{F(a_3)\}.$$

$\{x_1\} \subseteq X$ için

$$FH(\{x_1\}) = CL(\{x_1\}) \cup (\cup \{ \cup \text{Mind}_S(u) : u \in \{x_1\} - CL(\{x_1\}) \}),$$

$$FH(\{x_1\}) = \{x_1\} \cup (\cup \{ \cup \text{Mind}_S(u) : u \in \{x_1\} - \{x_1\} \}) = \{x_1\}$$

ve

$$RH(\{x_1\}) = CL(\{x_1\}) \cup (\cup_{a \in A} \{F(a) : F(a) \cap (\{x_1\} - CL(\{x_1\})) \neq \emptyset\}),$$

$$RH(\{x_1\}) = \{x_1\} \cup (\cup_{a \in A} \{F(a) : F(a) \cap (\{x_1\} - \{x_1\}) = \emptyset\}) = \{x_1\}$$

şeklindedir. Benzer şekilde X kümesinin bütün alt kümeleri için aşağıdakiler gösterilebilir.

$$FH(\{x_1\}) = \{x_1\} = RH(\{x_1\}),$$

$$FH(\{x_2\}) = \{x_2\} = RH(\{x_2\}),$$

$$FH(\{x_1, x_2\}) = \{x_1, x_2\} = RH(\{x_1, x_2\}),$$

$$FH(\emptyset) = \emptyset = RH(\emptyset)$$

olduğunu görmek kolaydır. Dolayısıyla $FH = RH$ olur. Ancak,

$$\cup \text{Maxd}_S(x_1) = \{x_1, x_2\} \neq \{x_1\} = \cup \text{Mind}_S(x_1)$$

şeklindedir.

Şimdi 1. tip ve 4. tip esnek örtü tabanlı üst yaklaşımların hangi koşullar altında birbirlerine eşit olduğunu göstermek için öncelikle gerekli olan bir yardımcı önerme verelim:

4.2.2.Önerme $S = (X, C_G)$ bir esnek örtü yaklaşım uzayı olsun ve $U \subseteq X$ olsun. Bu durumda, herhangi bir $x \in U - CL(U)$ için $\{x\} \not\approx C_G$.

İspat: $x \in U - CL(U)$ olsun. Bu durumda, $x \in U$ ve $x \notin CL(U)$ olur. Eğer $\{x\} \approx C_G$ ise $\{x\} \subseteq U$ ve 3.4.6.Tanım gereği $x \in CL(U)$ biçiminde bir çelişki vardır. Dolayısıyla $\{x\} \not\approx C_G$ olur.

4.2.6.Teorem $S = (X, C_G)$ bir esnek örtü yaklaşım uzayı olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar eşdeğerdir.

i) $FH = RH$

ii) Her $x \in X$ için $\{x\} \approx C_G$ ise $\cup \text{Maxd}_S(x) = \cup \text{Mind}_S(x)$ olur.

İspat: $x \in X$ ve $\{x\} \approx C_G$ olsun. 3.4.6.Tanım gereği $CL(\{x\}) = \emptyset$ olur. Dolayısıyla 3.4.6.Tanım ve 4.2.3.Teorem gereğince, $FH(\{x\}) = \cup \text{Mind}_S(x)$ ve $RH(\{x\}) = \cup \text{Maxd}_S(x)$ elde edilir. Hipotez gereği $FH = RH$ olduğundan, $\cup \text{Mind}_S(x) = FH(\{x\}) = RH(\{x\}) = \cup \text{Maxd}_S(x)$ olup, $\cup \text{Maxd}_S(x) = \cup \text{Mind}_S(x)$ elde edilir.

Tersine, $U \subseteq X$ olsun. Herhangi bir $x \in U - CL(U)$ için 4.2.2.Önerme gereği, $\{x\} \not\approx C_G$ şeklindedir. Dolayısıyla hipotez gereği, $\cup \text{Maxd}_S(x) = \cup \text{Mind}_S(x)$ olur. Böylece $\cup \{\text{Maxd}_S(x) : x \in U - CL(U)\} = \cup \{\text{Mind}_S(x) : x \in U - CL(U)\}$ sağlanır. FH tanımı ve 4.2.3.Teorem gereği, herhangi bir $U \subseteq X$ için $FH(U) = RH(U)$ elde edilir. Dolayısıyla $FH = RH$ sağlanır.

4.2.3.Sonuç $S = (X, C_G)$ bir esnek örtü yaklaşım uzayı olsun. Her $F(a), F(b) \approx C_G$ için eğer $F(a) \neq F(b)$ ise $F(a) \not\subseteq F(b)$ koşulunu sağlıyorsa $FH = RH$ olur.



5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında esnek kaba kümelerin genelleştirilmesi olan esnek örtü tabanlı kaba kümelerin bazı türlerinin yeni karakterizasyonları incelenmiştir. Esnek örtü tabanlı kaba kümelerin bazı türleri esnek maksimal tasvir kavramı kullanılarak yeniden ele alınmıştır. Ayrıca esnek maksimal tasvir ve esnek minimal tasvir kavramları arasındaki ilişki incelenmiş; bunun yardımıyla esnek örtü tabanlı kaba kümelerin bazı türleri arasındaki ilişkiler belirlenmiştir.

Esnek örtü tabanlı kaba küme modelleri birçok karar verme problemine uygulandığı için belirsizlik teorisinde hızla önemli ve faydalı bir araştırma konusu haline gelmiştir. Bu tez çalışmasının literatürde esnek örtü tabanlı kaba küme modellerinin teorisine katkılar sağladığından araştırmacılara yararlı olacağı düşünülmektedir. Gelecekteki çalışmalarda esnek örtü tabanlı kaba kümelerin farklı türlerinin yeni karakterizasyonları incelenebilir ve bu elde edilen karakterizasyonlar karar verme problemlerinde kullanılabilir.



KAYNAKLAR

- Ali, M. I., Feng, F., Liu, X., Min, W. K., & Shabir, M. (2009). On some new operations in soft set theory. *Computers and Mathematics with Applications*, 57, 1547-1553.
- Atanassov, K. (1986). Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 20, 87-96.
- Atef, M., Nada, S., & Nawar, A. (2023). Covering soft rough sets and its topological properties with application. *Soft Computing*, 27, 4451-4461.
- Chen, D. Tsang, E. C. C., Yeung, D. S., & Wang, X. (2005). The parameterization reduction of soft sets and its applications. *Computers and Mathematics with Applications*, 49, 757-763.
- Çağman, N., & Enginoğlu, S. (2010). Soft set theory and uni-int decision making. *European Journal of Operational Research*, 207, 848-855.
- Çetkin, V., Aygünoğlu, A., & Aygün, H. (2016). A new approach in handling soft decision making problems. *Journal of Nonlinear Science and Applications*, 9, 231-239.
- Feng, F. (2011). Soft rough sets applied to multicriteria group decision making. *Ann. Fuzzy Math. Inform.*, 2(1), 69-80.
- Feng, F., Changxing, L., Davvaz, B., & Ali, M. I. (2010). Soft sets combined with fuzzy sets and rough sets: A tentative approach. *Soft Comput.*, 14, 899-911.
- Feng, F., Jun, Y. B., & Zhao, X. (2008). Soft semirings. *Computers and Mathematics with Applications*, 56, 2621-2628.
- Feng, F., Liu, X., Violeta, F. L., & Young, J. B. (2011). Soft sets and soft rough sets. *Information Sciences*, 181, 1125-1137.
- Ge, X., & Yang, S. (2011). Investigations on some operations of soft sets. *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 5(3), 869-872.
- Güzel Ergül, Z., & Yaşar, K. (2025). New kinds of soft covering based rough sets via the concept of soft maximal description. *Advanced Studies: Euro-Tbilisi Mathematical Journal*, In press.
- Güzel Ergül, Z., & Yüksel, Ş. (2019). A new type of soft covering based rough sets applied to multicriteria group decision making for medical diagnosis. *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*, 7(1), 28-38.
- Li, Z., Xie, N., & Wen, G. (2015). Soft coverings and their parameter reductions. *Appl. Soft Comput.*, 31, 48-60.

- Maji, P.K., Biswas, R., & Roy, A. (2003). Soft set theory. *Computers & Mathematics with Applications*, 45 (4), 555-562.
- Maji, P. K., Roy, A. R., & Biswas, R. (2001). Fuzzy soft sets. *Journal of Fuzzy Math.*, 9(3), 589-602.
- Mareay, R. (2024). Soft rough sets based on covering and their applications. *Journal of Mathematics in Industry*, 14 (4), 1-11.
- Meng, D., Zhang, X. H., & Qin, K. Y. (2011). Soft rough fuzzy sets and soft fuzzy rough sets. *Computers and Mathematics with Applications*, 62, 4635-4645.
- Molodtsov, D. (1999). Soft set theory first results. *Computers & Mathematics with Applications*, 37(4), 19-31.
- Pawlak, Z. (1982). Rough sets. *International Journal of Computer & Information Sciences* 11(5), 341-356.
- Shabir, M., Ali, M. I., & Shaheen, T. (2013). Another approach to soft rough sets. *Knowl-Based Syst*, 40(1), 72-80.
- Sezgin, A., & Atagun, A. O. (2011). On operations of soft sets. *Computers and Mathematics with Applications*, 61, 1457-1467.
- Suo, C. F., Li, Y. M., & Li, Z. H. (2021). A series of information measures of hesitant fuzzy soft sets and their application in decision making. *Soft Computing*, 25, 4771-4784.
- Wu, M., Wu, X., Shen, T., & Cao, C. (2009). A new type of covering approximation operators. *2009 International Conference on Electronic Computer Technology*, 334-338.
- Yao, Y. Y. (1996). Two views of the theory of rough sets in finite universes. *International Journal of Approximate Reasoning*, 15, 291-317.
- Yao, Y. Y. (1998). Relational interpretations of neighborhood operators and rough set approximation operators. *Information Sciences*, 111, 239-259.
- Yao, Y. Y. (2003). On generalizing rough set theory. *Proc. Int. Conf. Rough Fuzzy Sets Data Mining Granular Computing*, 44-51.
- Yüksel, Ş., Güzel Ergül, Z., & Tozlu, N. (2014). Soft covering based rough sets and their application. *The Scientific World Journal*, Article ID 970893, 9 pages.
- Yüksel, Ş., Tozlu, N., & Dizman, T. (2015). An application of multicriteria group decision making by soft covering based rough sets. *Filomat*, 29, 209-219.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3), 338-353.

- Zhan, J., & Alcantud, J. C. R. (2019). A novel type of soft rough covering and its application to multicriteria group decision making. *Artif Intell Rev*, 52, 2381-2410.
- Zhan, J., & Wang, Q. (2019). Certain types of soft coverings based rough sets with applications. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 10, 1065-1076.
- Zhu, W., & Wang, F. Y. (2003). Reduction and axiomization of covering generalized rough sets. *Information Sciences*, 152-217.
- Zhan, J., Liu, Q., & Herewan, T. (2017). A novel soft rough set: Soft rough hemirings and corresponding multicriteria group decision making. *Appl. Soft Comput.*, 54, 393-402.
- Zhu, W. (2007). Topological approaches to covering rough sets. *Information Sciences*, 177, 1499-1508.
- Zhu, W., & Wang, F. Y. (2007). On three types of covering based rough sets. *IEEE Mining Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 19(8), 1131-1144.



EKLER

EK-1

Kongre Katılım Belgesi



KATILIM BELGESİ

Sayın Ebru BOZKURT

9-12 Eylül 2024 tarihleri arasında Amasya Üniversitesi Matematik Bölümünde düzenlenen 36. Ulusal Matematik Sempozyumu'nda 'Bazı Soft Örtü Tabanlı Rough Kümelerin Yeni Karakterizasyonları' başlıklı bildirinizle verdiğiniz katkı için teşekkür eder, başarılarınızın devamını dilerim.

Prof.Dr. Ergül TÜRKMEN
Düzenleme Komitesi Adına

Prof.Dr. Ahmet Hakkı TURABI
Rektör



ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER	
Adı Soyadı:	Ebru BOZKURT
Uyruğu:	T.C.
Orcid Numarası:	0009-0000-4717-4946

EĞİTİM BİLGİLERİ	
Lisans	
Üniversite:	Marmara
Fakülte:	Atatürk Eğitim
Bölümü:	Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği
Mezuniyet Yılı:	2017
Yüksek Lisans	
Üniversite:	Kırşehir Ahi Evran
Enstitü:	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı:	Matematik
Mezuniyet Yılı:	2025

Tezden Üretilen Makaleler ve Bildiriler
Ulusal Konferans ve Sempozyumlarda Sunulan Bildiriler
Bozkurt, E. ve Güzel Ergül Z., (9-12 Eylül 2024), Bazı Soft Örtü Tabanlı Rough Kümelerin Yeni Karakterizasyonları. 36. Ulusal Matematik Sempozyumu, Amasya-Türkiye. https://ums2024.amasya.edu.tr/event/2/attachments/347/428/36_ums_2024_ozet_kitapcigi.pdf