



**T.C.
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BAZI FONKSİYON UZAYLARINDA MULTİLİNEER KESİRLİ
DALGACIK DÖNÜŞÜMLERİN ÖZELLİKLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ELİF GÜRBÜZ

MAYIS

ELİF GÜRBÜZ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

MAYIS 2024

**BAZI FONKSİYON UZAYLARINDA MULTİLİNEER KESİRLİ DALGACIK
DÖNÜŞÜMLERİN ÖZELLİKLERİ**

Elif GÜRBÜZ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**Danışman
Prof. Dr. Öznur KULAK**

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MAYIS 2024

Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Elif GÜRBÜZ tarafından hazırlanan “Bazı Fonksiyon Uzaylarında Multilineer Kesirli Dalgacık Dönüşümlerin Özellikleri” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Öznur KULAK

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Başkan: Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Seçil BİLGİÇ

Matematik Anabilim Dalı, İstanbul Aydın Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 29/05/2024

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

(İmza)

Elif GÜRBÜZ

(Tarih)

BAZI FONKSİYON UZAYLARINDA MULTİLİNEER KESİRLİ DALGACIK
DÖNÜŞÜMÜ
(Yüksek Lisans Tezi)

Elif GÜRBÜZ

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Mayıs 2024

ÖZET

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tez konusunun literatür özeti, ikinci bölümde tezde kullandığımız temel tanım ve teoremler ifade edilmiştir. Bulguların yer aldığı üçüncü bölümde ilk olarak multilineer kesirli dalgacık dönüşümü ile kesirli multilineer Fourier dönüşümü arasındaki ilişki verilmiş olup bu dönüşüm için yeni bir formda diklik bağıntısı ispatlanmıştır. Sonrasında kesirli multilineer dalgacık dönüşümünün eşlenik operatörü bulunmuştur. Ayrıca çeşitli fonksiyon uzaylarında multilineer kesirli dalgacık dönüşümü ve eşlenik operatörünün sürekliliği (sınırlılığı) incelenmiştir. Son olarak da bu dönüşümün n - boyutlu düzgün uzaylarda önemi araştırılmıştır.

Sayfa Adedi : 55
Anahtar Kelimeler : Kesirli dalgacık dönüşümü, Multilineer kesirli dalgacık dönüşümü, Eşlenik operatörü
Danışman : Prof. Dr. Öznur KULAK

MULTILINEAR FRACTIONAL WAVELET TRANSFORM IN SOME FUNCTIONAL SPACES

(M. Sc. Thesis)

Elif GÜRBÜZ

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

May 2024

ABSTRACT

This thesis consist of four chapters. In the first part, the literature summary of the thesis topic is given, and in the second part, the fundamental definitions and theorems we use in the thesis are stated. In the third section where the findings are included, firstly, the relationship between the multilinear fractional wavelet transform and the fractional multilinear Fourier transform is given, and a new orthogonality relation for this transform is proven. Afterwards, the adjoint operator of the fractional multilinear wavelet transform is found. Additionally, multilinear fractional wavelet transform and continuity (boundedness) of the adjoint operator in various function spaces are examined. Finally, the importance of this transformation in n - dimensional smooth spaces is investigated.

Number of pages : 55

Keywords : Fractional wavelet transform, Multilineer wavelet transform, Adjoint operator

Supervisor : Prof. Dr. Öznur KULAK

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın planlanması ve yürütülmesi sürecinde bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen, değerli fikirleriyle beni yönlendiren çok kıymetli hocam, danışmanım sayın Prof. Dr. Öznur KULAK' a en içten teşekkürlerimi sunarım. Tüm hayatım boyunca benim için her zaman ellerinden gelenin en iyisini yapan canım annem Türkan Hatice GÜRBÜZ'e , babam Celal GÜRBÜZ'e ve beni destekleyen aileme çok teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
1.GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	2
2.1. Temel Bilgiler.....	2
2.2. Çoklu Doğrusal Kesirli Fourier Dönüşümü Ve Çoklu Doğrusal Kesirli Dalgacık Dönüşümü.....	14
3. BULGULAR.....	21
3.1. Bazı Fonksiyon Uzayları Üzerinde Multilineer Kesirli Dalgacık Dönüşümlerin Sınırlılığı.....	21
4. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	51
KAYNAKLAR	52
ÖZGEÇMİŞ	55

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

Simgeler	Açıklama
$f * g$	f ve g fonksiyonlarının girişim işlemi
$f *_\theta g$	Kesirli Girişim Operatörü
$\hat{f}$	Fourier Dönüşümü
$F^\alpha f$	Kesirli Fourier Dönüşümü
T_x	Öteleme Operatörü
D_s	Açılma (Dilation) Operatörü
$\psi_{b,a,\theta}(t)$	Kesirli Ana Dalga Fonksiyonu
$\boldsymbol{\psi}_{b,a,\theta}(t)$	Multilineer Kesirli Ana Dalga Fonksiyonu
$W_\psi^\theta f(b, a)$	Kesirli Dalgacık Dönüşümü
$W_\psi^\theta \boldsymbol{f}(b, a)$	Multilineer Kesirli Dalgacık Dönüşümü
$L^p(\mathbb{R})$	Lebesgue Uzayı
$L_\omega^p(\mathbb{R})$	Ağırlıklı Lebesgue Uzayı
$S(\mathbb{R})$	Schwartz Uzayı
$H^1(\mathbb{R})$	Hardy Uzayı
$B_p^{\alpha,a}(\mathbb{R})$	Besov Uzayı
$\otimes$	Tensör Çarpımı

1. GİRİŞ

Dalgacık dönüşümü frekans alanında bozuk ve karışık sinyalleri işlemek için yetersiz kalmaktadır (Flandrin, 2001). Bu nedenle bu tür sinyalleri analiz etmek için kesirli Fourier dönüşümü ve kesirli dalgacık dönüşümü gibi bir dizi yeni sinyal işleme aracı önerilmiştir. Ancak kesirli Fourier dönüşümü kesirli alanda sinyal temsilleri sağlamasına rağmen sinyalin yerel yapısını belirlemede başarısız olur. Kesirli dalgacık dönüşümü ise kesirli Fourier dönüşümünün avantajlarından faydalananarak karşılaşılan sınırlamalara bir çözüm bulmaktadır. Aynı zamanda kesirli alanda çoklu analiz ve sinyalleri temsil etme yeteneğine sahiptir. Konuşma, görme, iletişim ve radar gibi birçok sinyalin kesirli alanda uygulanmasına izin verir (Gargour, Gabrea, Ramachandran ve Lina, 2009). Bu nedenle kesirli dalgacık dönüşümü, sinyal analizi konusunda potansiyel bir şekilde yararlıdır (Shi, Zhang ve Liu, 2012). Multilineer kesirli dönüşümler sayesinde kesirli dalgacık dönüşümünün ve kesirli Fourier dönüşümünün birçok özelliğini çoklu doğrusal bir forma aktararak n- boyutlu kesirli uzayda sinyal temsillerini ve sinyallerin yerel yapılarını incelemek mümkündür (Kulak, 2021).

Kulak (2021) çalışmasında Schwartz fonksiyonlarını kullanarak $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ üzerinde multilineer kesirli dalgacık dönüşümünü ve multilineer kesirli Fourier dönüşümünü tanımlamış ve bazı özelliklerini ve sınırlılığını incelemiştir. Bu yeni multilineer kesirli dönüşümler sayesinde n- boyutlu kesirli alanda sinyal temsillerini ve sinyallerin yerel yapılarını incelemek mümkündür. Bu özellikler konuşma, görme, iletişim, sinyal işleme, radar gibi alanlarda sinyallerle çalışırken bu dönüşümleri değerli kılma şansı verecektir (Kulak, 2021). Bu çalışmada multilineer kesirli dalgacık dönüşümünün bazı fonksiyon uzayları üzerinde sürekliliği ve sınırlılığı araştırılmıştır.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Temel Bilgiler

2.1.1. Tanım $1 \leq p < \infty$ ve f , $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı, karmaşık değerli, ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx < \infty$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının denklik sınıflarının vektör uzayına Lebesgue uzayı denir ve $L^p(\mathbb{R})$ ile gösterilir. $L^p(\mathbb{R})$ uzayı üzerinde tanımlanan

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

normuna göre Banach uzayıdır (Rudin, 1966).

2.1.2. Tanım $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı reel değerli ölçülebilir ω fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bu ω fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu denir (Reither, 1968).

- i) Her $x \in \mathbb{R}$ için $\omega(x) \geq 1$,
- ii) Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $\omega(x+y) \leq \omega(x)\omega(y)$,
- iii) ω yerel sınırlı.

2.1.3. Tanım Her $x \in \mathbb{R}$ için $s \geq 0$ olmak üzere;

$$f_s(x) = (1 + |x|)^s$$

biçiminde tanımlanan f fonksiyonuna polinom tipli ağırlık fonksiyon denir (Reiter, 1968).

2.1.4. Tanım $1 \leq p < \infty$ ve ω fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere ağırlıklı Lebesgue uzayı

$$L^p_{\omega}(\mathbb{R}) = \{f \mid f\omega \in L^p(\mathbb{R})\}$$

biçiminde tanımlanır ve $L^p_\omega(\mathbb{R})$ bir vektör uzayı olup

$$\|f\|_{p,\omega} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \omega(x)^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

normuna göre Banach uzayıdır (Reither, 1968: 200).

2.1.5. Tanım V, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere $V \times V \rightarrow V, (x, y) \rightarrow xy$ işlemi verilsin. Eğer

- i) Her $x, y, z \in V$ için $x(yz) = (xy)z$,
- ii) Her $x, y, z \in V$ için $x(y + z) = (xy) + (xz)$,
- iii) Her $x, y \in V$ ve her $\alpha, \beta \in K$ için $(\alpha\beta)(xy) = (\alpha x)(\beta y)$

koşulları sağlanıyorsa V, K cismi üzerinde bir cebirdir denir. Eğer her $x \in V$ için $ex = xe = x$ olacak şekilde bir $e \in V$ varsa V cebirine birimli cebir denir, e elemanına da cebirin birimi denir. Ayrıca her $x, y \in V$ için $xy = yx$ ise V cebirine değişmeli cebir denir. V, K cismi üzerinde bir cebir olsun. Eğer $(V, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı ve her $x, y \in V$ için

$$\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$$

oluyorsa V, K cismi üzerinde bir Banach cebiridir (Lanser, 1971, 1973).

2.1.6. Tanım $(E, \|\cdot\|_E)$ bir Banach uzayı ve $(F, \|\cdot\|_F)$ bir Banach cebiri olsun. Bir $\odot$ işlemi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa E, F üzerinde bir Banach modülü veya Banach F - modül denir (Wang, 1977).

- i) Her $f, g \in F$ ve her $h, k \in E$ için

$$(f + g) \odot h = f \odot h + g \odot h$$

$$f \odot (h + k) = f \odot h + f \odot k$$

- ii) Her $f, g \in F$ ve her $h \in E$ için $(f * g) \odot h = f \odot (g \odot h)$,

(* işlemi F uzayındaki çarpma işlemidir).

- iii) Her $f, g \in F$ ve her $h \in E$ ve her $a \in \mathbb{C}$ için

$$a(f \odot h) = (af) \odot h = f \odot (ah),$$

iv) Her $f \in F$ ve her $h \in E$ için

$$\|f \odot h\|_E \leq \|f\|_F \|h\|_E.$$

μ ve ϑ , $\mathbb{R}$ üzerinde iki Borel ölçüm olsun ve $\mu \times \vartheta$ de bu ölçümün $\mathbb{R}^2$ üzerinde çarpım ölçümü olsun.

2.1.7. Teorem (Tonelli) Eğer $f \geq 0$ ise

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, w) d(\mu \times \vartheta) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, \vartheta) d\mu(x) \right) d\vartheta(w) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, w) d\vartheta(w) \right) d\mu(x) \end{aligned} \quad (2.1)$$

olur. Bunun anlamı (2.1) eşitliğindeki integraller sonlu ve birbirine eşittir veya hepsi sonsuzdur (Rudin, 1966).

2.1.8. Teorem (Fubini) Eğer $f \in L^1(\mathbb{R}^2, \mu \times \vartheta)$ ise (2.1) eşitliği sağlanır. Bundan başka hemen hemen $w \in \mathbb{R}$ için $x \rightarrow f(x, w)$ fonksiyonu $L^1(\mathbb{R}, \mu)$ dedir ve hemen hemen her $x \in \mathbb{R}$ için $w \rightarrow f(x, w)$ fonksiyonu da $L^1(\mathbb{R}, \vartheta)$ uzayındadır. Eğer

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, w) d\vartheta(w) \text{ ve } \psi(w) = \int_{\mathbb{R}} f(x, \vartheta) d\mu(x)$$

ise $\varphi \in L^1(\mathbb{R}, \mu)$ ve $\psi \in L^1(\mathbb{R}, \vartheta)$ olur (Rudin, 1966).

2.1.9. Tanım $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu $\forall p \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x^p f(x)| = 0$$

ise f fonksiyonuna sonsuzda çabuk sıfıra gidiyor denir. Sonsuzda çabuk sıfıra giden ve sonsuz mertebeden türevlenen fonksiyonların uzayı Schwartz uzayı olarak isimlendirilir ve $S(\mathbb{R})$ ile gösterilir (Gasquet, 1999).

2.1.10. Tanım $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ uzayı, $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı ölçülebilir ve $\forall K \subset \mathbb{R}$ kompakt alt kümesi üzerinde

$$\int_K |f(x)| dx < \infty$$

olan fonksiyonların uzayıdır (Rudin, 1973: 397).

2.1.11. Tanım Herhangi bir $f \in L^1(\mathbb{R})$ ve $\varphi \in S(\mathbb{R})$ olmak üzere,

$$\|f\|_{H^1} = \int_{\mathbb{R}} \sup_{t>0} |(f * \varphi_t)(x)| dx < \infty$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının uzayı Hardy uzayı olarak bilinir ve $H^1(\mathbb{R})$ ile gösterilir (Chuong ve Duong, 2013). Burada

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx \neq 0, \quad \varphi_t(x) = t^{-1} \varphi(x/t)$$

dir. $H^1(\mathbb{R})$ uzayı yansımali olmayan ayrılabilir Banach uzayıdır.

2.1.12. Tanım Herhangi $f \in L^p(\mathbb{R})$ ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere, bir ω_p fonksiyonu

$$\omega_p(f, h) = \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_p$$

şeklinde tanımlanır (Chuong ve Duong, 2013).

2.1.13. Tanım $0 < a < 1$, $1 \leq p < \infty$ ve $1 \leq q < \infty$ olsun. Herhangi $f \in L^p(\mathbb{R})$ olmak üzere

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\left(\omega_p(f, h) \right) \right]^q \frac{dh}{|h|^{n+\alpha q}} < \infty$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının uzayına Besov uzayı denir ve $B_p^{\alpha, q}(\mathbb{R})$ sembolü ile gösterilir. Bu uzay

$$\|f\|_{B_p^{\alpha, q}} = \|f\|_p + \left(\int_{\mathbb{R}} \left[\left(\omega_p(f, h) \right) \right]^q \frac{dh}{|h|^{n+\alpha q}} \right)^{\frac{1}{q}}$$

normuna göre Banach uzayıdır (Chuong ve Duong, 2013).

2.1.14. Tanım Herhangi bir $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ ve $f_B = |B|^{-1} \int_B f(x) dx$ olmak üzere ($B \subset \mathbb{R}$ yuvar ve $|B|$, B 'nin ölçümü)

$$\|f\|_{BMO} = \sup_{B \subset \mathbb{R}^n} \frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - f_B| dx < \infty,$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının uzayı $BMO(\mathbb{R})$ ile gösterilir (Chuong ve Duong, 2013). $BMO(\mathbb{R})$ uzayı $H^1(\mathbb{R})$ uzayının dualidir.

2.1.15. Tanım f ve $g \in L^1(\mathbb{R})$ olsun. Bu fonksiyonların girişimi $f * g$ simgesi ile gösterilir ve

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y) g(y) dy$$

biçiminde tanımlanır. Bu girişimin tanımlı olması için

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)g(y)| dy < \infty$$

olmalıdır (Rudin, 1966).

2.1.16. Tanım Herhangi bir $f \in L^1(\mathbb{R})$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü, $\omega \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \omega} dx$$

biçiminde tanımlanır (Bracewell, 1965: 381).

2.1.17. Teorem (Plancherel) Herhangi bir $f \in (L^1 \cap L^2)(\mathbb{R})$ olsun. Bu durumda

$$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$$

olur. Ayrıca $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ ise

$$\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$$

eşitliği vardır (Gröchenig, 2001; Katnelson, 1968; Schwartz, 1966).

2.1.18. Tanım Herhangi bir $t \in \mathbb{R}$ için

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$$

olmak üzere,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

biçiminde tanımlanan δ fonksiyonuna Dirac delta fonksiyonu denir (Raising hania., 2008).

2.1.19. Teorem $f \in L^1(\mathbb{R})$ olmak üzere Dirac delta fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlamaktadır.

$$i) \int_{\mathbb{R}} f(t) \delta(t - \varepsilon) dt = f(\varepsilon) \quad (\text{Kaydırma özelliği}),$$

$$ii) \int_{\mathbb{R}} f(u - \varepsilon) \delta(u - t) dt = \delta(\varepsilon - t),$$

iii) δ , Dirac delta fonksiyonu çifttir (Hartman, 1998).

2.1.20. Tanım Herhangi $(t, w) \in \mathbb{R}^2$ için $C^\theta = \sqrt{\frac{1 - i \cot \theta}{2\pi}}$ olmak üzere,

$$K^\theta(t, w) = \begin{cases} C^\theta e^{i(t^2 + w^2) \frac{\cot \theta}{2} - itw \csc \theta}, & \theta \neq n\pi \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-itw}, & \theta = \frac{\pi}{2} \\ \delta(t - w), & \theta = 2n\pi \\ \delta(t + w), & \theta = (2n + 1)\pi, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (2.2)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona çekirdek fonksiyonu denir ve

- i) $K^\theta(t, w) = K^\theta(w, t)$ (Simetri),
- ii) $K^{-\theta}(t, w) = \overline{K^\theta(t, w)}$ (Kompleks Eşlenik),
- iii) $K^\theta(-t, w) = K^\theta(t, -w)$,
- iv) $\int_{\mathbb{R}} K^a(t, w) K^b(w, x) dw = K^{a+b}(t, x)$ (Toplanabilirlik),
- v) $\int_{\mathbb{R}} K^a(t, w) \overline{K^a(t, u)} dt = \delta(u - w)$

özelliklerini sağlar (Bultheel ve Martinez, 2002).

2.1.21. Tanım Herhangi bir $f \in L^1(\mathbb{R})$ fonksiyonunun kesirli Fourier dönüşümü;

$$F^\theta f(t) = \hat{f}^\theta(t) = \int_{\mathbb{R}} K^\theta(t, w) f(w) dw$$

$$= \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{1 - i \cot \theta}{2\pi}} f(\omega) e^{\frac{i}{2}(t^2 + w^2) \cot \theta - i \omega t \csc \theta} d\omega, & \theta \neq n\pi \\ f(t), & \theta = 2n\pi \\ f(-t), & \theta = (2n + 1)\pi, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Bu dönüşüm çekirdek fonksiyonu $K^\theta(t, w)$ tarafından elde edilen bir integral operatörüdür. Eğer $\theta = \frac{\pi}{2}$ alınırsa $F^\theta f = Ff$ olup kesirli Fourier dönüşümü Fourier dönüşümüne denk gelir (Bultheel ve Martinez, 2002; Almeida, 1997). Ters kesirli Fourier dönüşümü ise şu şekildedir:

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}^\theta(w) \overline{K^\theta(t, w)} dw,$$

burada $\overline{K^\theta(t, w)} = K^{-\theta}(t, w)$ ve $\overline{C^\theta} = C^{-\theta}$ dir.

2.1.22. Teorem (Parseval Bağıntısı) Herhangi $f, \psi \in L^2(\mathbb{R})$ için, F^a ve F^θ sırasıyla $f(t)$ ve $\psi(t)$ fonksiyonlarının kesirli Fourier dönüşümleri olmak üzere;

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi(t)} dt = \int_{\mathbb{R}} F^a f(\omega) F^\theta \psi(\omega) d\omega \\ \text{ii)} \quad & \int_{\mathbb{R}} F^a f(t) \psi(t) dt = \int_{\mathbb{R}} F^a \psi(\omega) f(\omega) d\omega \\ \text{iii)} \quad & \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |F^a f(\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

eşitlikleri vardır (Pathak, Prasad ve Kumar, 2012: 239-254).

2.1.23. Tanım $f, \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı herhangi bir fonksiyon olsun. Herhangi $x \in \mathbb{R}$ için

$$T_x f(t) = f(t - x)$$

operatörüne öteleme operatörü denir (Gröchenig, 2001: 359).

2.1.24. Tanım $f, \mathbb{R}$ üzerinde herhangi bir fonksiyon ve $s \neq 0, s \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$D_s f(x) = |s|^{-1/2} f(s^{-1}x), \quad x \in \mathbb{R}$$

biçiminde tanımlanan D_s operatörüne f fonksiyonunun açılma (dilation) operatörü denir (Gröchenig, 2001: 359).

2.1.25. Tanım Herhangi bir $f \in L^2(\mathbb{R})$ fonksiyonunun $0 \neq g \in L^2(\mathbb{R})$ dalga fonksiyonuna bağlı dalgacık (wavelet) dönüşümü;

$$W_g f(x, s) = |s|^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} f(t) \bar{g}(s^{-1}(t - x)) dt \quad (x \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R} - \{0\})$$

biçiminde tanımlanır (Gröchenig, 2001: 203).

$W_g f(x, s)$ dönüşümü f fonksiyonunun herhangi x anındaki yerel bilgilerini s büyüklüğünde vermektedir. Burada ölçek s yerel ayrıntıların çözünürlüğünü gösterir. Sabit x ve $s \rightarrow 0$ için $W_g f(x, \cdot)$, x anındaki yerel bilgileri bir mikroskop gibi çözer. Kısa zamanlı fourier dönüşümü (Gabor dönüşümü) ve Fourier dönüşümü bu mikrolokal özellikten yoksundur (Gröchenig, 2001).

2.1.26. Tanım Dalgacık teorisinde a , sinyalin açılma ölçeğini veren parametre, b ise zaman parametresi olarak işlevini yürütmektedir. Ana dalga fonksiyonu

$$\psi_{b,a}(t) = T_b \psi^a(t) = a^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad b \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_+$$

şeklinde tanımlanmaktadır (Prasad ve Kumar, 2015: 201-210).

2.1.27. Tanım $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ dalga fonksiyonunun kesirli ana dalga fonksiyonu;

$$\psi_{b,a,\theta}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) e^{-\frac{i}{2}(t^2-b^2)\cot\theta}, \quad (a > 0, b \in \mathbb{R})$$

biçiminde tanımlanır (Prasad ve Kumar, 2015: 201-210). Burada a ölçü parametresini, b de öteleme parametresini göstermektedir.

Eğer $\theta = \frac{\pi}{2}$ alınırsa $\psi_{b,a,\frac{\pi}{2}}(t) = T_b D_a f(x)$ eşitliği elde edilir. (T öteleme operatörü, D açılma operatörü)

2.1.28. Teorem $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ dalga fonksiyonu olmak üzere, $\psi_{b,a,\theta}$ fonksiyonunun kesirli Fourier dönüşümü;

$$\hat{\psi}_{b,a,\theta}^\theta(\omega) = \sqrt{a} e^{\frac{i}{2}(b^2 + \omega^2) \cot \theta - i b \omega \csc \theta - \frac{i}{2} a^2 \omega^2 \cot \theta} F^\theta \left(e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi \right) (a\omega)$$

biçimindedir (Prasad ve Kumar, 2015: 201-210).

2.1.29. Tanım $a \in \mathbb{R}^+$ ve $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere herhangi bir $f \in L^2(\mathbb{R})$ fonksiyonunun kesirli dalgacık dönüşümü (fractional wavelet dönüşümü);

$$W_\psi^\theta f(b, a) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi_{b,a,\theta}(t)} dt = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \bar{\psi} \left(\frac{t-b}{a} \right) e^{\frac{i}{2}(t^2 - b^2) \cot \theta} dt,$$

biçiminde tanımlanır (Prasad ve Kumar, 2015: 201-210).

Eğer $\theta = \frac{\pi}{2}$ alınırsa kesirli dalgacık dönüşümü klasik dalgacık dönüşümü ile çakışır. Diğer bir ifadeyle $W_\psi^{\frac{\pi}{2}} f(b, a) = W_\psi f(b, a)$ olur.

2.1.30. Tanım Herhangi $f, \psi \in L^2(\mathbb{R})$ fonksiyonlarının kesirli girişimi

$$(f *_\theta \psi)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(\xi) \psi(t - \xi) e^{-\frac{i}{2}(t^2 - \xi^2) \cot \theta} d\xi$$

biçiminde tanımlanır ve $*_\theta$ ile gösterilir. Burada özel olarak $\theta = \frac{\pi}{2}$ alınırsa alışılmış girişim tanımı elde edilir (Prasad ve Kumar, 2015: 201-210).

2.1.31. Tanım $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ dalga fonksiyonu olmak üzere

$$C_{\psi,\theta} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\left| F^\theta \left(e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi \right) (v) \right|^2}{|v|} dv < \infty \text{ ise}$$

ise ψ uyuşabilirlik koşulunu (admissibility condition) sağlar denir (Prasad ve Kumar, 2015: 201-210).

Bu tez çalışmasında dalga fonksiyonlarının uyuşabilirlik koşulunu sağladığı kabul edilecektir.

2.1.32. Teorem Her $(b, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ için $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ dalga fonksiyonu ve $f \in L^2(\mathbb{R})$ olmak üzere;

$$W_\psi^\theta f(b, a) = \sqrt{a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i}{2}(b^2 + \omega^2) \cot \theta + ib\omega \csc \theta + \frac{i}{2}a^2\omega^2 \cot \theta} \overline{F^\theta \left(e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} \psi \right) (a\omega)} \hat{f}^\theta(\omega) d\omega$$

eşitliği vardır (Prasad ve Kumar, 2015: 201-210).

2.1.33. Teorem Eğer $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ dalga fonksiyonu ise herhangi bir $f \in L^2(\mathbb{R})$ fonksiyonunun kesirli dalgacık dönüşümü her $(b, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ için

$$W_\psi^\theta f(b, a) = e^{-\frac{i}{2}b^2 \cot \theta} \left(e^{\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta} f * \overline{\psi_a^*} \right) (b)$$

ve

$$W_\psi^\theta f(b, a) = f *_\theta \psi_a(b)$$

biçiminde yazılır (Prasad, Manna, Mahato ve Singh, 2014).

2.1.34. Teorem ψ uyuşabilirlik koşullarını sağlayan bir dalga fonksiyonu ve $f \in L^2(\mathbb{R})$ olsun. Bu durumda

$$f(t) = \frac{1}{2\pi \sin \theta C_{\psi, \theta}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (W_{\psi}^{\theta} f)(b, a) \psi_{b, a, \theta} \frac{db da}{a^2}$$

eşitliği vardır. Bundan başka f fonksiyonunun kesirli Fourier dönüşümü;

$$\hat{f}^{\theta}(\omega) = \frac{1}{2\pi \sin \theta C_{\psi, \theta}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} (W_{\psi}^{\theta} f)(b, a) \hat{\psi}_{b, a, \theta}(\omega) \frac{db da}{a^2}$$

biçimindedir (Prasad ve diğerleri, 2014).

2.1.35. Tanım (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği) Eğer $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ ise $fg \in L^1(\mathbb{R})$ olup

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

eşitsizliği sağlanır (Fitzpatrick ve Royden, 2010: 142).

2.1.36. Teorem (Ters Schwartz Eşitsizliği) Her $h \in L^2(\mathbb{R})$ için $\|Gh\|_1 \leq A\|h\|_2$ ise $G \in L^2(\mathbb{R})$ ve $\|G\|_2 \leq A$ olur (Goldberg, 1938: 385).

2.2. Multilineer Kesirli Fourier Dönüşümü Ve Multilineer Kesirli Dalgacık Dönüşümü

Bu bölümde multilineer kesirli dalgacık dönüşümünü ve multilineer kesirli Fourier dönüşümünü tanıttacağız.

ψ_j ($j = 1, \dots, n$) dalga fonksiyonları olmak üzere $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ fonksiyonuna multi dalga ismi verilir (Kulak, 2021). Şimdi, multilineer ana dalga ve multilineer kesirli ana dalga fonksiyonları tanımlarını vereceğiz.

2.2.1. Tanım $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n$ bir çoklu ölçü parametresi ve $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ de bir multi öteleme parametresi olsun. Yani, $j = 1, \dots, n$ için a_j ölçü parametresi ve b_j öteleme parametresi olsun. Bu durumda multilineer ana dalga fonksiyonu şu şekilde tanımlanır:

$$\boldsymbol{\psi}_{b,a}(t) = \prod_{j=1}^n T_{b_j} \psi_j^{a_j}(t_j) = |a|_n^{-\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^n \psi_j\left(\frac{t_j - b_j}{a_j}\right), \quad t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$$

Multilineer ana dalga fonksiyonu, bir dalga fonksiyonunun açılma ve ötelemesinin n- katlı çarpımı ile elde edilir. Bu çalışma boyunca $a \in \mathbb{R}_+^n$ ve $b \in \mathbb{R}^n$ parametrelerini sırasıyla multi ölçü parametresi ve multi öteleme parametresi olarak alacağız.

Herhangi $b = (b_1, \dots, b_n)$, $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n$ için $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ multi açılı multilineer kesirli ana dalga fonksiyonu;

$$\boldsymbol{\psi}_{b,a,\theta}(t) = \prod_{j=1}^n T_{b_j} \psi_j^{a_j}(t_j) = |a|_n^{-\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^n \psi_j\left(\frac{t_j - b_j}{a_j}\right) e^{-\frac{i}{2}(t_j^2 - b_j^2) \cot \theta_j}, \quad (2.3)$$

biçiminde tanımlanır. Bu çalışmada $|a|_n = a_1 a_2 \dots a_n$ notasyonunu kullanacağız.

Tez çalışmasında $\boldsymbol{f}(t) = f_1(t_1) \dots f_n(t_n) = \bigotimes_{j=1}^n f_j(t_j)$, $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\boldsymbol{f}$ hem $\boldsymbol{f} = (f_1, \dots, f_n)$ vektörünü hem de $\boldsymbol{f} = f_1 \otimes \dots \otimes f_n$ tensör çarpımını

göstermektedir. Buna ilaveten $\mathbb{R}^n$ deki iç çarpım $x \cdot y = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ ve $x^2 = (x_1^2, \dots, x_n^2)$ notasyonu kullanılacaktır. Ayrıca çalışma boyunca eğer, $\|\cdot\| \leq c\|\cdot\|$ olacak biçimde $c > 0$ var ise $\|\cdot\| \lesssim \|\cdot\|$ gösterimi kullanılacaktır (Kulak, 2021).

2.2.2. Tanım $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ ve $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n) \in S(\mathbb{R})^n = S(\mathbb{R}) \times \dots \times S(\mathbb{R})$ olsun. Her $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ için $\mathbf{f}$ ve $\mathbf{g}$ 'nin multilineer kesirli girişimi şu şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned} (\mathbf{f} *_{\theta} \mathbf{g})(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n f_j(x_j) g_j(t_j - x_j) e^{-\frac{i}{2}(t_j^2 - x_j^2) \cot \theta_j} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_1(x_1) g_1(t_1 - x_1) e^{-\frac{i}{2}(t_1^2 - x_1^2) \cot \theta_1} dx_1 \dots \\ &\quad \dots \int_{\mathbb{R}} f_n(x_n) g_n(t_n - x_n) e^{-\frac{i}{2}(t_n^2 - x_n^2) \cot \theta_n} dx_n \\ &= \prod_{j=1}^n (f_j *_{\theta_j} g_j)(t_j), \end{aligned}$$

olup burada $*_{\theta_j}, j = (1, \dots, n)$ kesirli girişimi ifade etmektedir (Kulak, 2021).

2.2.3. Tanım $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ ve $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_n) \in S(\mathbb{R})^n$ olmak üzere $\boldsymbol{\psi}_{b,a,\theta}$, (2.3) ile verilen bir multilineer kesirli ana dalga fonksiyonu olsun. $\mathbf{f}$ nin θ - multi açılı, multilineer kesirli dalgacık dönüşümü

$$\begin{aligned} W_{\boldsymbol{\psi}}^{\theta} \mathbf{f}(b, a) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{f}(t) \overline{\boldsymbol{\psi}_{b,a,\theta}(t)} dt = \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\psi}_{b,a,\theta} \rangle \\ &= |a|_n^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{f}(t) \prod_{j=1}^n \overline{\psi_j\left(\frac{t_j - b_j}{a_j}\right)} e^{\frac{i}{2}(t_j^2 - b_j^2) \cot \theta_j} dt \end{aligned}$$

biçimimde tanımlanır (Kulak, 2021).

2.2.4. Tanım $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ bir multi dalga fonksiyonu olsun. Eğer

$$C_{\boldsymbol{\psi}, \theta} = \int_{\mathbb{R}} \prod_{j=1}^n \frac{\left| F^{\theta_j} \left(e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta_j} \psi_j \right) (w_j) \right|^2}{|w_j|} dw < \infty$$

ise ψ multi kesirli kabul edilebilirlik koşulunu sağlar denir (Kulak, 2021).

Bu tez çalışmasında multi dalgacık ψ fonksiyonu muti kesirli kabul edilebilirlik koşulunu sağladığını ve $\psi_{b,a,\theta}$ nin multilineer kesirli ana dalga fonksiyonu olduğunu kabul edeceğiz.

2.2.5. Teorem $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n) \in S(\mathbb{R})^n$ olsun. O halde her $(b, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ ve her $f = (f_1, \dots, f_n) \in L^p(\mathbb{R})^n = L^p(\mathbb{R}) \times \dots L^p(\mathbb{R})$ için

$$W_{\psi}^{\theta} f(b, a) = e^{-\frac{i}{2}b^2 \cot \theta} \prod_{j=1}^n \left(e^{\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta_j} f_j * \psi_j^{a_j} \right) (b_j)$$

ve

$$W_{\psi}^{\theta} f(b, a) = \prod_{j=1}^n \left(f_j *_{\theta_j} \psi_j^{a_j} \right) (b_j) = (f *_{\theta} \psi^a)(b)$$

olur (Kulak, 2021).

2.2.6. Tanım $f = (f_1, \dots, f_n) \in S(\mathbb{R})^n$ olsun. θ multi açılı multilineer kesirli Fourier dönüşümü

$$\begin{aligned} F^{\theta} f(w) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(t) K^{\theta}(t, w) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \prod_{j=1}^n K_j^{\theta_j}(t_j, w_j) dt \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır. Burada, $K_j^{\theta_j}(t_j, w_j)$, (2.2) tarafından verilen çekirdektir (Kulak, 2021).

Multilineer kesirli Fourier dönüşümü $\hat{f}^{\theta}$ sembolü ile de gösterilmektedir. Klasik kesirli Fourier dönüşümü, $S(\mathbb{R})$ den $S(\mathbb{R})$ ye birebir ve örten olduğundan, multilineer kesirli

Fourier dönüşümü, $S(\mathbb{R})^n$ den $S(\mathbb{R}^n)$ ye birebir ve örtendir (Pathak, Prasad ve Kumar, 2012).

Şimdi, $\mathbf{f}$ 'nin ters multilineer kesirli Fourier dönüşümünün tanımını verelim;

$$\begin{aligned} F^{-1_\theta} \mathbf{f}(t) &= \int_{\mathbb{R}} F^\theta \mathbf{f}(u) \overline{\mathbf{K}^\theta(t, u)} du \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} F^\theta \mathbf{f}(u) \prod_{j=1}^n \overline{K_j^{\theta_j}(t_j, u_j)} du \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} F^\theta \mathbf{f}(u) \prod_{j=1}^n K_j^{-\theta_j}(t_j, u_j) du. \end{aligned}$$

Ayrıca, $\mathbf{f}$ 'in multi açılı ters kesirli Fourier dönüşümü $\widetilde{\mathbf{f}^\theta}$ sembolü ile de gösterilmektedir. Yine $F^\theta \mathbf{f}(u) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ olduğundan (Pathak, Prasad ve Kumar, 2012) çalışmasında Teorem 3.1'den , $F^{-1_\theta}(F^\theta \mathbf{f}) = \mathbf{f}$ ve $F^\theta(F^{-1_\theta} \mathbf{f}) = \mathbf{f}$ olduğu kolayca görülür (Kulak, 2021).

2.2.7. Teorem $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$, $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n) \in L^2(\mathbb{R})^n$ olsun. Eğer, $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_n)$, $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ $S(\mathbb{R})^n$ de bir multi dalga fonksiyonu ise,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}_+^n} W_{\boldsymbol{\psi}}^\theta \mathbf{f}(b, a) \overline{W_{\boldsymbol{\varphi}}^\theta \mathbf{g}(b, a)} \frac{db da}{|a|_n^2} = (2\pi)^n \prod_{j=1}^n \sin \theta_j C_{\psi_j, \varphi_j} \langle f_j, g_j \rangle$$

olur. Burada,

$$C_{\psi_j, \varphi_j} = \int_{\mathbb{R}_+} \overline{F^{\theta_j} \left(e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta_j} \psi_j \right) (a_j)} F^{\theta_j} \left(e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta_j} \varphi_j \right) (a_j) a_j^{-1} da_j < \infty$$

$j = 1, \dots, n$ (Kulak, 2021).

2.2.8. Teorem $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$, $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n) \in L^2(\mathbb{R})^n$ olsun. Eğer, $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_n) \in S(\mathbb{R})^n$ de bir multi dalga fonksiyonu ise,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}_+^n} W_{\boldsymbol{\psi}}^{\theta} \mathbf{f}(b, a) \overline{W_{\boldsymbol{\psi}}^{\theta} \mathbf{g}(b, a)} \frac{db da}{|a|_n^2} = (2\pi)^n \prod_{j=1}^n \sin \theta_j C_{\psi_j, \theta_j} \langle f_j, g_j \rangle$$

olur (Kulak, 2021).

2.2.9. Teorem $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n) \in L^2(\mathbb{R})^n$ olsun. Eğer, $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_n) \in S(\mathbb{R})^n$ de bir multi dalga fonksiyonu ise

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}_+^n} |W_{\boldsymbol{\psi}}^{\theta} \mathbf{f}(b, a)|^2 \frac{db da}{|a|_n^2} = (2\pi)^n \prod_{j=1}^n \sin \theta_j C_{\psi_j, \theta_j} \|f_j\|_2^2$$

olur (Kulak, 2021).

Şimdi ters multilinear kesirli dalgacık dönüşümü veren teoremi verelim;

2.2.10. Teorem $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n) \in L^2(\mathbb{R})^n$ olsun. Eğer, $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_n) \in S(\mathbb{R})^n$ de bir multi dalga fonksiyonu ise

$$\mathbf{f}(t) = (2\pi)^{-n} \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sin \theta_j C_{\psi_j, \theta_j}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}_+^n} W_{\boldsymbol{\psi}}^{\theta} \mathbf{f}(b, a) \boldsymbol{\psi}_{b, a, \theta}(t) \frac{db da}{|a|_n^2}$$

olur (Kulak, 2021).

2.2.11. Teorem $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_n) \in S(\mathbb{R})^n$ de bir multi dalga fonksiyonu ve $a \in \mathbb{R}_+^n$ olsun. Her $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n) \in L^p(\mathbb{R})^n$ için

$$\|W_{\boldsymbol{\psi}}^{\theta} \mathbf{f}(\cdot, a)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq |a|_n^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^n \|f_j\|_{L^p(\mathbb{R})} \prod_{j=1}^n \|\psi_j\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

olur (Kulak, 2021).

2.2.12. Teorem $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_n), \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in S(\mathbb{R})^n$ multi dalga fonksiyonu herhangi bir $a \in \mathbb{R}_+^n$ verisin. Her $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n) \in L^p(\mathbb{R})^n$ için

$$\|W_{\boldsymbol{\psi}}^{\theta} \mathbf{f}(\cdot, a) - W_{\boldsymbol{\varphi}}^{\theta} \mathbf{f}(\cdot, a)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq |a|_n^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^n \|f_j\|_{L^p(\mathbb{R})} \prod_{j=1}^n \|\psi_j - \varphi_j\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

olur (Kulak, 2021).

2.2.13. Teorem $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_n) \in S(\mathbb{R})^n$ multi dalga ve herhangi bir $a \in \mathbb{R}_+^n$ verilsin. O halde, her $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n), \mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n) \in L^p(\mathbb{R})^n$ için

$$\|W_{\boldsymbol{\psi}}^{\theta} \mathbf{f}(\cdot, a) - W_{\boldsymbol{\psi}}^{\theta} \mathbf{g}(\cdot, a)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq |a|_n^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^n \|f_j - g_j\|_{L^p(\mathbb{R})} \prod_{j=1}^n \|\psi_j\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

eşitsizliği vardır (Kulak, 2021).

2.2.14. Sonuç $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_n), \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in S(\mathbb{R})^n$ multi dalga fonksiyonu ve herhangi bir $a \in \mathbb{R}_+^n$ verilsin. Bu durumda her $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n), \mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n) \in L^p(\mathbb{R})^n$ için

$$\|W_{\boldsymbol{\psi}}^{\theta} \mathbf{f}(\cdot, a) - W_{\boldsymbol{\varphi}}^{\theta} \mathbf{g}(\cdot, a)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq |a|_n^{\frac{1}{2}} \left\{ \prod_{j=1}^n \|f_j - g_j\|_{L^p(\mathbb{R})} \prod_{j=1}^n \|\psi_j\|_{L^1(\mathbb{R})} + \prod_{j=1}^n \|g_j\|_{L^p(\mathbb{R})} \prod_{j=1}^n \|\psi_j - \varphi_j\|_{L^1(\mathbb{R})} \right\}$$

eşitsizliği vardır (Kulak, 2021).

2.2.15. Tanım $0 < r \leq 1$ ve $x_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere, eğer x_0 noktasının bir komşuluğundaki her x için

$$|f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0|^r \quad (2.4)$$

olacak biçimde $C > 0$ sayısı var ise f fonksiyonuna $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında r -Hölder süreklidir denir. Bu fonksiyonların kümesi $C^r(x_0)$ ile gösterilir. Özel olarak $r = 1$ ise bu süreklilik Lipschitz sürekliliği olarak isimlendirilir. Eğer (2.4) eşitsizliği $\mathbb{R}$ nin tamamında aynı $C > 0$ sabiti ile sağlanırsa f fonksiyonuna evrensel (globally) r -Hölder süreklidir denir ve bu fonksiyonların kümesi $C^r(\mathbb{R})$ ile gösterilir (Gröchening, 2001: 207).

3. BULGULAR

3.1. Bazı Fonksiyon Uzayları Üzerinde Multilineer Kesirli Dalgacık Dönüşümlerin Sınırlılığı

3.1.1. Teorem $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n) \in L^2(\mathbb{R})^n$ ve $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_n) \in S(\mathbb{R})^n$ bir multi dalga fonksiyon olsun. Bu durumda

$$F^\theta \mathbf{f}(w) = (2\pi)^{-n} \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sin \theta_j C_{\psi_j, \theta_j}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}_+^n} W_{\boldsymbol{\psi}}^\theta \mathbf{f}(b, a) F^\theta \boldsymbol{\psi}_{b, a, \theta}(w) \frac{db da}{|a|_n^2}$$

eşitliği vardır.

İspat Herhangi bir $\mathbf{f} \in S(\mathbb{R})^n$ alalım. O halde,

$$\begin{aligned} F^\theta \mathbf{f}(w) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{f}(t) K^\theta(t, w) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{f}(t) \prod_{j=1}^n K_j^{\theta_j}(t_j, w_j) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} f_1(t_1) \dots f_n(t_n) K_1^{\theta_1}(t_1, w_1) \dots K_n^{\theta_n}(t_n, w_n) dt_1 \dots dt_n \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} f_1(t_1) K_1^{\theta_1}(t_1, w_1) dt_1 \right) \dots \left(\int_{\mathbb{R}} f_n(t_n) K_n^{\theta_n}(t_n, w_n) dt_n \right) \\ &= F^{\theta_1} f_1(w_1) \dots F^{\theta_n} f_n(w_n) \\ &= \prod_{j=1}^n F^{\theta_j} f_j(w_j) \end{aligned} \tag{3.1}$$

yazılır. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} F^{\theta_j} f_j(w_j) &= (2\pi)^{-1} \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sin \theta_j C_{\psi_j, \theta_j}} \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty W_{\boldsymbol{\psi}}^{\theta_j} f_j(b_j, a_j) F^{\theta_j} \psi_j^{b_j, a_j, \theta_j}(w_j) \frac{db_j da_j}{a_j^2} \end{aligned} \tag{3.2}$$

($j = 1, \dots, n$) olup (3.1) ve (3.2) eşitlikleri kullanılır ise

$$\begin{aligned}
F^\theta \mathbf{f}(w) &= \prod_{j=1}^n F^{\theta_j} f_j(w_j) \\
&= F^{\theta_1} f_1(w_1) \dots F^{\theta_n} f_n(w_n) \\
&= (2\pi)^{-1} \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sin \theta_j C_{\psi_j, \theta_j}} \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty W_{\psi_j}^{\theta_j} f_j(b_j, a_j) F^{\theta_j} \psi_j^{b_j, a_j, \theta_j}(w_j) \frac{db_j da_j}{a_j^2} \times \\
&\dots \times (2\pi)^{-1} \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sin \theta_n C_{\psi_n, \theta_n}} \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty W_{\psi_n}^{\theta_n} f_n(b_n, a_n) F^{\theta_n} \psi_n^{b_n, a_n, \theta_n}(w_n) \frac{db_n da_n}{a_n^2} \\
&= (2\pi)^{-n} \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sin \theta_j C_{\psi_j, \theta_j}} \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty W_{\psi_1}^{\theta_1} f_1(b_1, a_1) \dots W_{\psi_n}^{\theta_n} f_n(b_n, a_n) \\
&\times F^{\theta_1} \psi_1^{b_1, a_1, \theta_1}(w_1) \dots F^{\theta_n} \psi_n^{b_n, a_n, \theta_n}(w_n) db_1 \dots db_n \frac{da_1}{a_1^2} \dots \frac{da_n}{a_n^2} \\
&= (2\pi)^{-n} \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sin \theta_j C_{\psi_j, \theta_j}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}_+^n} \left(\prod_{j=1}^n W_{\psi_j}^{\theta_j} f_j(b_j, a_j) \right) \left(\prod_{j=1}^n F^{\theta_j} \psi_j^{b_j, a_j, \theta_j}(w_j) \right) \frac{db da}{|a|_n^2} \\
&= (2\pi)^{-n} \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sin \theta_j C_{\psi_j, \theta_j}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}_+^n} W_{\psi}^\theta \mathbf{f}(b, a) F^\theta \boldsymbol{\psi}_{b, a, \theta}(w) \frac{db da}{|a|_n^2}
\end{aligned}$$

elde edilir.

3.1.2. Teorem $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$, $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n) \in L^2(\mathbb{R})^n$ olsun. Eğer $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_n)$, $S(\mathbb{R})^n$ de bir multi dalgacık fonksiyon ise,

$$\int_{\mathbb{R}^n} W_{\psi}^\theta \mathbf{f}(b, a) \overline{W_{\psi}^\theta \mathbf{g}(b, a)} db = (2\pi)^n |a|_n \prod_{j=1}^n \sin \theta_j \langle u_{\theta_j}, v_{\theta_j} \rangle$$

eşitliği vardır. Burada u_{θ_j} ve v_{θ_j} fonksiyonları

$$\begin{aligned}
u_{\theta_j}(w_j) &= \hat{f}^{\theta_j}(w_j) e^{\frac{i}{2} a_j^2 w_j^2 \cot \theta_j} \overline{F^{\theta_j} \left[e^{-\frac{i}{2} (\cdot)^2 \cot \theta_j} \psi_j \right]}(a_j w_j), \\
v_{\theta_j}(w_j) &= \hat{g}^{\theta_j}(w_j) e^{\frac{i}{2} a_j^2 w_j^2 \cot \theta_j} \overline{F^{\theta_j} \left[e^{-\frac{i}{2} (\cdot)^2 \cot \theta_j} \psi_j \right]}(a_j w_j)
\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanmaktadır.

İspat Herhangi $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in S(\mathbb{R})^n$ verilsin. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} W_{\psi}^{\theta} f(b, a) \overline{W_{\psi}^{\theta} g(b, a)} db &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n W_{\psi_j}^{\theta_j} f_j(b_j, a_j) \overline{W_{\psi_j}^{\theta_j} g_j(b_j, a_j)} db \\
&= \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} W_{\psi_1}^{\theta_1} f_1(b_1, a_1) \dots W_{\psi_n}^{\theta_n} f_n(b_n, a_n) \overline{W_{\psi_1}^{\theta_1} g_1(b_1, a_1) \dots W_{\psi_n}^{\theta_n} g_n(b_n, a_n)} db_1 \dots db_n \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} W_{\psi_1}^{\theta_1} f_1(b_1, a_1) \overline{W_{\psi_1}^{\theta_1} g_1(b_1, a_1)} db_1 \right) \dots \left(\int_{\mathbb{R}} W_{\psi_n}^{\theta_n} f_n(b_n, a_n) \overline{W_{\psi_n}^{\theta_n} g_n(b_n, a_n)} db_n \right) \quad (3.3)
\end{aligned}$$

bulunur. Aynı zamanda,

$$\int_{\mathbb{R}} W_{\psi_j}^{\theta_j} f_j(b_j, a_j) \overline{W_{\psi_j}^{\theta_j} g_j(b_j, a_j)} db_j = 2\pi a_j \sin \theta_j \langle u_{\theta_j}, v_{\theta_j} \rangle \quad (3.4)$$

($j = 1, \dots, n$) olup (3.3) ve (3.4) eşitlikleri kullanılır ise;

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} W_{\psi}^{\theta} f(b, a) \overline{W_{\psi}^{\theta} g(b, a)} db &= 2\pi a_1 \sin \theta_1 \langle u_{\theta_1}, v_{\theta_1} \rangle \dots 2\pi a_n \sin \theta_n \langle u_{\theta_n}, v_{\theta_n} \rangle \\
&= (2\pi)^n |a|_n \prod_{j=1}^n \sin \theta_j \langle u_{\theta_j}, v_{\theta_j} \rangle
\end{aligned}$$

elde edilir.

3.1.3. Yardımcı Teorem ψ , $S(\mathbb{R})^n$ de bir multi dalga fonksiyon olmak üzere, $f \in L^2(\mathbb{R})^n$ fonksiyonun a 'ya bağlı b 'deki sürekli multilineer kesirli girişim dönüşümü $(W_b^{\theta} f)(a)$ ile gösterilir ve şu şekilde tanımlanır:

$$(W_b^{\theta} f)(a) = (f *_{\theta} \psi_a)(b).$$

Bu durumda aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$(W_{\psi}^{\theta} f)(b, a) = |a|_n^{\frac{1}{2}} (W_b^{\theta} f)(a).$$

Burada ψ_a fonksiyonu

$$\psi_a(t) = \frac{1}{|a|_n} \bar{\psi}\left(-\frac{t}{a}\right) = \frac{1}{a_1 \dots a_n} \bar{\psi}\left(-\frac{t_1}{a_1}\right) \dots \bar{\psi}\left(-\frac{t_n}{a_n}\right).$$

biçiminde tanımlanmaktadır.

İspat Herhangi $\mathbf{f} \in S(\mathbb{R})^n$ verilsin. Öte yandan (Ö. Kulak, 2021) çalışmasında

$$(\mathbf{f} *_{\theta} \boldsymbol{\psi}_a)(b) = \prod_{j=1}^n (f_j *_{\theta_j} \psi_{a_j})(b_j) \quad (3.5)$$

ve

$$\begin{aligned} (W_{\psi_j}^{\theta_j} f_j)(b_j, a_j) &= \sqrt{a_j} (W_{b_j}^{\theta_j} f_j)(a_j), \\ (W_{b_j}^{\theta_j} f_j)(a_j) &= (f_j *_{\theta_j} \psi_{a_j})(b_j) \end{aligned} \quad (3.6)$$

($j = 1, \dots, n$) eşitlikleri biliniyor. Eğer (3.5) ve (3.6) eşitlikleri kullanılır ise,

$$\begin{aligned} (W_b^{\theta} \mathbf{f})(a) &= (\mathbf{f} *_{\theta} \boldsymbol{\psi}_a)(b) \\ &= \prod_{j=1}^n (f_j *_{\theta_j} \psi_{a_j})(b_j) = \prod_{j=1}^n (W_{b_j}^{\theta_j} f_j)(a_j) \\ &= \prod_{j=1}^n \sqrt{a_j}^{-1} (W_{\psi_j}^{\theta_j} f_j)(b_j, a_j) = |a|_n^{-\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^n (W_{\psi_j}^{\theta_j} f_j)(b_j, a_j) \\ &= |a|_n^{-\frac{1}{2}} (W_{\boldsymbol{\psi}}^{\theta} \mathbf{f})(b, a) \end{aligned}$$

olup böylece

$$(W_{\boldsymbol{\psi}}^{\theta} \mathbf{f})(a) = |a|_n^{\frac{1}{2}} (W_b^{\theta} \mathbf{f})(a)$$

elde edilir.

Teorem 2.1.30 ve Yardımcı Teorem 3.1.3 kullanılarak aşağıdaki sonuç kolaylıkla yazılabilir:

3.1.4. *Sonuç* Herhangi bir $\mathbf{f} \in S(\mathbb{R})^n$ olsun. O halde,

$$\begin{aligned} (W_b^\theta \mathbf{f})(b, a) \\ = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\mathbf{f}}^\theta(w) \prod_{j=1}^n e^{-\frac{i}{2}(b_j^2 + w_j^2) \cot \theta_j + i b_j w_j \csc \theta_j + \frac{i}{2} a_j^2 w_j^2 \cot \theta_j} F^{\theta_j} \left(e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta_j} \psi_j \right) (a_j w_j) dw \end{aligned}$$

eşitliği vardır.

3.1.5. *Tanım* Bir $(W_b^\theta)^*$ operatörü şu şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned} (W_b^\theta)^* \mathbf{f}(t) &= |a|_n^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{f}(a) \overline{\psi_{b,a,\theta}(t)} da \\ &= |a|_n^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{f}(a) \prod_{j=1}^n \overline{\psi_j} \left(\frac{t_j - b_j}{a_j} \right) e^{\frac{i}{2}(t_j^2 - b_j^2) \cot \theta_j} da. \end{aligned}$$

3.1.6. *Teorem* $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$, $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n) \in L^2(\mathbb{R})^n$ olsun. O halde $(W_b^\theta)^*$ operatörü (W_b^θ) nın eşlenik (adjoint) operatörüdür.

İspat Herhangi bir $\mathbf{f}$ ve $\mathbf{g} \in S(\mathbb{R})^n$ verilsin. Yardımcı teorem 3.1.3 den

$$\begin{aligned} \langle W_b^\theta \mathbf{g}, \mathbf{f} \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{f}(a) (W_b^\theta \mathbf{g})(b, a) da \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{f}(a) |a|_n^{-\frac{1}{2}} (W_\psi^\theta \mathbf{g})(b, a) da \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{f}(a) |a|_n^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{g}(t) \prod_{j=1}^n \overline{\psi_j} \left(\frac{t_j - b_j}{a_j} \right) e^{\frac{i}{2}(t_j^2 - b_j^2) \cot \theta_j} dt da \end{aligned}$$

bulunur. Eğer son eşitlik kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{g}, (W_b^\theta)^* \mathbf{f} \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{g}(t) (W_b^\theta)^* \mathbf{f}(t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{g}(t) |a|_n^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{f}(a) \prod_{j=1}^n \overline{\psi_j} \left(\frac{t_j - b_j}{a_j} \right) e^{\frac{i}{2}(t_j^2 - b_j^2) \cot \theta_j} da dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{f}(a) |a|_n^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{g}(t) \prod_{j=1}^n \overline{\psi_j} \left(\frac{t_j - b_j}{a_j} \right) e^{\frac{i}{2}(t_j^2 - b_j^2) \cot \theta_j} dt da \end{aligned}$$

$$= \langle W_b^\theta g, f \rangle$$

elde edilir. Böylece ispat biter.

3.1.7. Yardımcı Teorem $f \in S(\mathbb{R})^n$ olsun. Eğer kesirli ana girişim operatörü W_b^θ kendine eşlenik (self adjoint) ise, her $t \in \mathbb{R} - \{0\}$ için kesirli ana dalga fonksiyonları

$$\bar{\psi}_{b,a,\theta}(t) = |t|_n^{-\frac{1}{2}} \bar{\psi}_{b,t,\theta}(a)$$

biçimindedir.

İspat Yardımcı teorem 3.1.3 kullanılır ise,

$$\begin{aligned} (W_b^\theta f)(a) &= |a|_n^{-\frac{1}{2}} (W_\psi^\theta f)(b, a) \\ &= |a|_n^{-\frac{1}{2}} |a|_n^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \prod_{j=1}^n \bar{\psi}_j \left(\frac{t_j - b_j}{a_j} \right) e^{\frac{i}{2}(t_j^2 - b_j^2) \cot \theta_j} dt \\ &= |a|_n^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \prod_{j=1}^n \bar{\psi}_j \left(\frac{t_j - b_j}{a_j} \right) e^{\frac{i}{2}(t_j^2 - b_j^2) \cot \theta_j} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \overline{\psi_{b,a,\theta}(t)} dt \end{aligned} \tag{3.7}$$

bulunur. Öte yandan Tanım 3.1.5 kullanılır ise,

$$[(W_b^\theta)^* f](a) = |t|_n^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \overline{\psi_{b,t,\theta}(a)} dt \tag{3.8}$$

yazılır. Böylece hipotezden $(W_b^\theta f)(a) = [(W_b^\theta)^* f](a)$ olması ve (3.7) ve (3.8) eşitlikleri kullanılır ise,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(t) \overline{\psi_{b,a,\theta}(t)} dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) |t|_n^{-\frac{1}{2}} \overline{\psi_{b,t,\theta}(a)} dt$$

olup istenen eşitlik elde edilir.

3.1.8. Teorem Eğer ψ kesirli dalga fonksiyonu kabul edilebilirlik koşulunu sağlıyor ise, $(W_b^\theta)^* \in L^2(\mathbb{R})$ olup

$$\|(W_b^\theta)^* f\|_2 \leq \sqrt{aC_{\psi,\theta}} \|f\|_2$$

eşitsizliği vardır. Bundan başka, W_b^θ operatörü kendine eşlenik ise ,

$$\|(W_b^\theta) f\|_1 \leq \sqrt{tC_{\psi,\theta}} \|f\|_2$$

bulunur.

İspat Herhangi bir $h \in L^2(\mathbb{R})^n$ alalım. Eğer Fubini Teoremi kullanılır ise;

$$\begin{aligned} \|[(W_b^\theta)^* f] h\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} |[(W_b^\theta)^* f](t) h(t)| dt = \int_{\mathbb{R}^n} |h(t)| |[(W_b^\theta)^* f](t)| dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |h(t)| \left| |a|_n^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(a) \overline{\psi_{b,a,\theta}(t)} da \right| dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(a)| \left| |a|_n^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} h(t) \overline{\psi_{b,a,\theta}(t)} dt \right| da \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(a)| |(W_b^\theta h)(a)| da \end{aligned}$$

bulunur. Bu son ifadeye Cauchy- Schwartz eşitsizliği uygulanırsa,

$$\|[(W_b^\theta)^* f] h\|_1 \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(a)|^2 da \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(W_b^\theta h)(a)|^2 da \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.9)$$

eşitsizliği yazılır. Eğer (3.9) eşitsizliğinde Sonuç 3.1.5 kullanılır ise,

$$\begin{aligned}
& \left\| \left[(W_b^\theta)^* \mathbf{f} \right] \mathbf{h} \right\|_1 \leq \|\mathbf{f}\|_2 \times \\
& \times \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\mathbf{h}}^\theta(w) \prod_{j=1}^n e^{-\frac{i}{2}(b_j^2 + w_j^2) \cot \theta_j + i b_j w_j \csc \theta_j + \frac{i}{2} a_j^2 w_j^2 \cot \theta_j} F^{\theta_j} \left(e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta_j} \psi_j \right) (a_j w_j) dw \right|^2 da \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \|\mathbf{f}\|_2 \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n \left| F^{\theta_j} \left(e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta_j} \psi_j \right) (a_j w_j) \right|^2 da \right] \left| \widehat{\mathbf{h}}^\theta(w) \right|^2 dw \right)^{\frac{1}{2}} \\
& = \|\mathbf{f}\|_2 \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n \frac{\left| F^{\theta_j} \left(e^{-\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta_j} \psi_j \right) (a_j w_j) \right|^2}{|a_j w_j|} |a w|_n da \right] \left| \widehat{\mathbf{h}}^\theta(w) \right|^2 dw \right)^{\frac{1}{2}} \\
& = \|\mathbf{f}\|_2 |a|_n^{\frac{1}{2}} (C_{\psi, \theta})^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \widehat{\mathbf{h}}^\theta(w) \right|^2 dw \right)^{\frac{1}{2}} \\
& = \|\mathbf{f}\|_2 |a|_n^{\frac{1}{2}} (C_{\psi, \theta})^{\frac{1}{2}} \left\| \widehat{\mathbf{h}}^\theta \right\|_2
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada Parseval bağıntısı kullanılır ise,

$$\left\| \left[(W_b^\theta)^* \mathbf{f} \right] \mathbf{h} \right\|_1 \leq \sqrt{|a|_n C_{\psi, \theta}} \|\mathbf{f}\|_2 \|\mathbf{h}\|_2$$

olup Teorem 2.1.34. deki ters Schwartz eşitsizliğinden

$$\left\| \left[(W_b^\theta)^* \mathbf{f} \right] \right\|_2 \leq \sqrt{|a|_n C_{\psi, \theta}} \|\mathbf{f}\|_2$$

bulunur.

3.1.9. Teorem $w_j, (j = 1, \dots, n)$ polinom tipi ağırlık fonksiyonları ve $w(b) = \prod_{j=1}^n w_j(b_j)$ verilsin. $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_n) \in S(\mathbb{R})^n$ multi dalga fonksiyon ise her $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n) \in L_w^p(\mathbb{R})^n$ ve herhangi bir $a \in \mathbb{R}_+^n$ için,

$$\left\| (W_{\boldsymbol{\psi}}^\theta \mathbf{f})(\cdot, a) \right\|_{L_w^p(\mathbb{R}^n)} \leq |a|_n^{\frac{1}{2}} w(a) \prod_{j=1}^n \|f_j\|_{L_{w_j}^p(\mathbb{R})} \prod_{j=1}^n \|\psi_j\|_{L_{w_j}^1(\mathbb{R})}$$

eşitsizliği vardır.

İspat Herhangi bir $a \in \mathbb{R}_+^n$ ve $f \in S(\mathbb{R})^n$ verilsin. Eğer Teorem 2.2.5 kullanılır ise,

$$\begin{aligned}
\|(W_\psi^\theta f)(\cdot, a)\|_{L_w^p(\mathbb{R}^n)}^p &= \left\| e^{-\frac{i}{2}b^2 \cot \theta} \prod_{j=1}^n \left(e^{\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta_j} f_j * \psi_j^{a_j} \right) \right\|_{L_w^p(\mathbb{R}^n)}^p \\
&= \left\| \prod_{j=1}^n \left(e^{\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta_j} f_j * \psi_j^{a_j} \right) \right\|_{L_w^p(\mathbb{R}^n)}^p \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \prod_{j=1}^n \left(e^{\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta_j} f_j * \psi_j^{a_j} \right) \right|^p w(b) db \\
&= \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \left| \prod_{j=1}^n \left(e^{\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta_j} f_j * \psi_j^{a_j} \right)(b_j) \right|^p w(b_1) \dots w(b_n) db_1 \dots db_n \\
&= \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \left| e^{\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta_1} f_1 * \psi_1^{a_1} \right|^p \dots \left| e^{\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta_n} f_n * \psi_n^{a_n} \right|^p w_1(b_1) \dots w_n(b_n) db_1 \dots db_n \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} \left| e^{\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta_1} f_1 * \psi_1^{a_1} \right|^p w_1(b_1) db_1 \right) \dots \left(\int_{\mathbb{R}} \left| e^{\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta_n} f_n * \psi_n^{a_n} \right|^p w_n(b_n) db_n \right) \\
&= \left\| e^{\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta_1} f_1 * \psi_1^{a_1} \right\|_{L_{w_1}^p(\mathbb{R})}^p \dots \left\| e^{\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta_n} f_n * \psi_n^{a_n} \right\|_{L_{w_n}^p(\mathbb{R})}^p \\
&= \prod_{j=1}^n \left\| e^{\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta_j} f_j * \psi_j^{a_j} \right\|_{L_{w_j}^p(\mathbb{R})}^p
\end{aligned}$$

elde edilir.

Burada $L_{w_j}^p(\mathbb{R})$ ($j = 1, \dots, n$) uzayı, $L_{w_j}^1(\mathbb{R})$ üzerinde Banach modülü olduğundan son eşitlik kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\|(W_\psi^\theta f)(\cdot, a)\|_{L_w^p(\mathbb{R}^n)}^p &= \prod_{j=1}^n \left\| e^{\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta_j} f_j * \psi_j^{a_j} \right\|_{L_{w_j}^p(\mathbb{R})}^p \\
&\leq \prod_{j=1}^n \left\| e^{\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta_j} f_j \right\|_{L_{w_j}^p(\mathbb{R})}^p \left\| \psi_j^{a_j} \right\|_{L_{w_j}^1(\mathbb{R})} \\
&= \prod_{j=1}^n \|f_j\|_{L_{w_j}^p(\mathbb{R})}^p \prod_{j=1}^n \|\psi_j^{a_j}\|_{L_{w_j}^1(\mathbb{R})}^p \quad (3.10)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada w_j ağırlık fonksiyonun polinom tipi olduğu kullanılırsa ve $\frac{x}{a_j} = u_j$, ($j = 1, \dots, n$) değişken değiştirilmesi yapılırsa,

$$\begin{aligned}
 \|\psi_j^{a_j}\|_{L_{w_j}^1(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} |\psi_j^{a_j}(x)| w_n dx = \int_{\mathbb{R}} a_j^{-\frac{1}{2}} \left| \psi_j \left(\frac{x}{a_j} \right) \right| w_j(x) dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}} a_j^{-\frac{1}{2}} |\psi_j(u_j)| w_j(a_j u_j) a_j du_j \\
 &= a_j^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} |\psi_j(u_j)| w_j(a_j u_j) du_j \\
 &\leq a_j^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} |\psi_j(u_j)| w_j(a_j) w_j(u_j) du_j \\
 &= a_j^{\frac{1}{2}} w_j(a_j) \int_{\mathbb{R}} |\psi_j(u_j)| w_j(u_j) du_j \\
 &= a_j^{\frac{1}{2}} w_j(a_j) \|\psi_j\|_{L_{w_j}^1(\mathbb{R})}
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

elde edilir. Eğer (3.10) ve (3.11) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
 \|(W_{\psi}^{\theta} \mathbf{f})(\cdot, a)\|_{L_w^p(\mathbb{R}^n)}^p &\leq \prod_{j=1}^n \|f_j\|_{L_{w_j}^p(\mathbb{R})}^p \prod_{j=1}^n a_j^{\frac{1}{2}} w_j(a_j) \|\psi_j\|_{L_{w_j}^1(\mathbb{R})} \\
 &= \prod_{j=1}^n a_j^{\frac{1}{2}} w_j(a_j) \prod_{j=1}^n \|f_j\|_{L_{w_j}^p(\mathbb{R})}^p \prod_{j=1}^n \|\psi_j\|_{L_{w_j}^1(\mathbb{R})} \\
 &= \prod_{j=1}^n a_j^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^n w_j(a_j) \prod_{j=1}^n \|f_j\|_{L_{w_j}^p(\mathbb{R})}^p \prod_{j=1}^n \|\psi_j\|_{L_{w_j}^1(\mathbb{R})} \\
 &= |a|_n^{\frac{1}{2}} w(a) \prod_{j=1}^n \|f_j\|_{L_{w_j}^p(\mathbb{R})}^p \prod_{j=1}^n \|\psi_j\|_{L_{w_j}^1(\mathbb{R})}
 \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

3.1.10. Teorem $w_j, (j = 1, \dots, n)$ polinom tipi ağırlık fonksiyonları ve $w(b) = \prod_{j=1}^n w_j(b_j)$ verilsin. $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n), \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in S(\mathbb{R})^n$ multi dalga fonksiyonları ise her $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n) \in L_w^p(\mathbb{R})^n$ ve herhangi bir $a \in \mathbb{R}_+^n$ için,

$$\|W_{\psi}^{\theta} f(\cdot, a) - W_{\varphi}^{\theta} f(\cdot, a)\|_{L_w^p(\mathbb{R}^n)} \leq |a|_n^{\frac{1}{2}} w(a) \prod_{j=1}^n \|f_j\|_{L_{w_j}^p(\mathbb{R})} \prod_{j=1}^n \|\psi_j - \varphi_j\|_{L_{w_j}^1(\mathbb{R})}$$

eşitsizliği vardır.

İspat $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n), \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in S(\mathbb{R})^n$ multi dalga fonksiyonları verilsin. O halde herhangi bir $a \in \mathbb{R}_+^n$ için

$$W_{\psi}^{\theta} f(\cdot, a) - W_{\varphi}^{\theta} f(\cdot, a) = W_{\psi-\varphi}^{\theta} f(\cdot, a)$$

eşitliği yazılır (Kulak, 2021). Eğer Teorem 3.1.9 tekniği kullanılır ise,

$$\begin{aligned} \|W_{\psi}^{\theta} f(\cdot, a) - W_{\varphi}^{\theta} f(\cdot, a)\|_{L_w^p(\mathbb{R}^n)} &= \|W_{\psi-\varphi}^{\theta} f(\cdot, a)\|_{L_w^p(\mathbb{R}^n)} \\ &= \left\| e^{-\frac{i}{2}b^2 \cot \theta} \prod_{j=1}^n \left(e^{\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta_j} f_j * (\psi_j - \varphi_j)^{a_j} \right) \right\|_{L_w^p(\mathbb{R}^n)} \\ &= \left\| \prod_{j=1}^n \left(e^{\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta_j} f_j * (\psi_j - \varphi_j)^{a_j} \right) \right\|_{L_w^p(\mathbb{R}^n)} \\ &= \prod_{j=1}^n \left\| e^{\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta_j} f_j * (\psi_j - \varphi_j)^{a_j} \right\|_{L_{w_j}^p(\mathbb{R})} \end{aligned} \quad (3.12)$$

eşitliği elde edilir.

Burada yine $L_{w_j}^p(\mathbb{R})$ ($j = 1, \dots, n$) uzayı, $L_{w_j}^1(\mathbb{R})$ üzerinde Banach modülü olması ve (3.12) eşitliği kullanılır ise,

$$\begin{aligned} \|W_{\psi}^{\theta} f(\cdot, a) - W_{\varphi}^{\theta} f(\cdot, a)\|_{L_w^p(\mathbb{R}^n)} &\leq \prod_{j=1}^n \left\| e^{\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta_j} f_j \right\|_{L_{w_j}^p(\mathbb{R})} \|(\psi_j - \varphi_j)^{a_j}\|_{L_{w_j}^1(\mathbb{R})} \\ &= \prod_{j=1}^n \left\| e^{\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta_j} f_j \right\|_{L_{w_j}^p(\mathbb{R})} \prod_{j=1}^n \|(\psi_j - \varphi_j)^{a_j}\|_{L_{w_j}^1(\mathbb{R})} \\ &= |a|_n^{\frac{1}{2}} w(a) \prod_{j=1}^n \|f_j\|_{L_{w_j}^p(\mathbb{R})} \prod_{j=1}^n \|\psi_j - \varphi_j\|_{L_{w_j}^1(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

3.1.11. Teorem $w_j, (j = 1, \dots, n)$ polinom tipi ağırlık fonksiyonları ve $w(b) = \prod_{j=1}^n w_j(b_j)$ verilsin. Eğer $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_n) \in S(\mathbb{R})^n$ multi dalga fonksiyonu ise her $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n), \mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n) \in L_w^p(\mathbb{R})^n$ ve herhangi bir $a \in \mathbb{R}_+^n$ için,

$$\|W_{\boldsymbol{\psi}}^{\theta} \mathbf{f}(\cdot, a) - W_{\boldsymbol{\psi}}^{\theta} \mathbf{g}(\cdot, a)\|_{L_w^p(\mathbb{R}^n)} \leq |a|_n^{\frac{1}{2}} w(a) \prod_{j=1}^n \|f_j - g_j\|_{L_{w_j}^p(\mathbb{R})} \prod_{j=1}^n \|\psi_j\|_{L_{w_j}^1(\mathbb{R})}$$

eşitsizliği vardır.

İspat Her $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n), \mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n) \in L_w^p(\mathbb{R}^n)$ ve herhangi bir $a \in \mathbb{R}_+^n$ için aşağıdaki eşitlik şu şekildedir:

$$W_{\boldsymbol{\psi}}^{\theta} \mathbf{f}(\cdot, a) - W_{\boldsymbol{\psi}}^{\theta} \mathbf{g}(\cdot, a) = W_{\boldsymbol{\psi}}^{\theta} (\mathbf{f} - \mathbf{g})(\cdot, a).$$

eşitliği kolaylıkla yazılır. O halde,

$$\begin{aligned} \|W_{\boldsymbol{\psi}}^{\theta} \mathbf{f}(\cdot, a) - W_{\boldsymbol{\psi}}^{\theta} \mathbf{g}(\cdot, a)\|_{L_w^p(\mathbb{R}^n)} &= \|W_{\boldsymbol{\psi}}^{\theta} (\mathbf{f} - \mathbf{g})(\cdot, a)\|_{L_w^p(\mathbb{R}^n)} \\ &= \left\| e^{-\frac{i}{2}b^2 \cot \theta} \prod_{j=1}^n \left(e^{\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta_j} (f_j - g_j) * \psi_j^{a_j} \right) \right\|_{L_w^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \prod_{j=1}^n \|e^{\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta_j} (f_j - g_j)\|_{L_{w_j}^p(\mathbb{R})} \|\psi_j^{a_j}\|_{L_{w_j}^1(\mathbb{R})} \\ &= |a|_n^{\frac{1}{2}} w(a) \prod_{j=1}^n \|f_j - g_j\|_{L_{w_j}^p(\mathbb{R})} \prod_{j=1}^n \|\psi_j\|_{L_{w_j}^1(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

eşitliği bulunur.

3.1.12. Sonuç $w_j, (j = 1, \dots, n)$ polinom tipi ağırlık fonksiyonları ve $w(b) = \prod_{j=1}^n w_j(b_j)$ verilsin. Eğer $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_n), \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in S(\mathbb{R})^n$ multi dalga fonksiyonları ise her $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n), \mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n) \in L_w^p(\mathbb{R}^n)$ ve herhangi bir $a \in \mathbb{R}_+^n$ için,

$$\begin{aligned} & \|W_{\psi}^{\theta} f(\cdot, a) - W_{\varphi}^{\theta} g(\cdot, a)\|_{L_w^p(\mathbb{R}^n)} \\ & \leq |a|_n^{\frac{1}{2}} w(a) \left\{ \prod_{j=1}^n \|f_j - g_j\|_{L_{w_j}^p(\mathbb{R})} \prod_{j=1}^n \|\psi_j\|_{L_{w_j}^1(\mathbb{R})} + \prod_{j=1}^n \|g_j\|_{L_{w_j}^p(\mathbb{R})} \prod_{j=1}^n \|\psi_j - \varphi_j\|_{L_{w_j}^1(\mathbb{R})} \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği vardır.

İspat $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n), \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in S(\mathbb{R})^n$ multi dalga fonksiyonları ve herhangi bir $a \in \mathbb{R}_+^n$ verilsin. O halde, Teorem 3.1.10 ve Teorem 3.1.11 kullanılır ise,

$$\begin{aligned} & \|W_{\psi}^{\theta} f(\cdot, a) - W_{\varphi}^{\theta} g(\cdot, a)\|_{L_w^p(\mathbb{R}^n)} \\ & = \|W_{\psi}^{\theta} f(\cdot, a) - W_{\psi}^{\theta} g(\cdot, a) + W_{\psi}^{\theta} g(\cdot, a) - W_{\varphi}^{\theta} g(\cdot, a)\|_{L_w^p(\mathbb{R}^n)} \\ & \leq \|W_{\psi}^{\theta} f(\cdot, a) - W_{\psi}^{\theta} g(\cdot, a)\|_{L_w^p(\mathbb{R}^n)} + \|W_{\psi}^{\theta} g(\cdot, a) - W_{\varphi}^{\theta} g(\cdot, a)\|_{L_w^p(\mathbb{R}^n)} \\ & \leq |a|_n^{\frac{1}{2}} w(a) \left\{ \prod_{j=1}^n \|f_j - g_j\|_{L_{w_j}^p(\mathbb{R})} \prod_{j=1}^n \|\psi_j\|_{L_{w_j}^1(\mathbb{R})} + \prod_{j=1}^n \|g_j\|_{L_{w_j}^p(\mathbb{R})} \prod_{j=1}^n \|\psi_j - \varphi_j\|_{L_{w_j}^1(\mathbb{R})} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir.

3.1.13. Teorem Herhangi bir $a \in \mathbb{R}_+^n$ ve $\theta = \left(\frac{\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2}\right)$ için,

$W_{\psi}^{\theta}: H^1(\mathbb{R})^n \rightarrow H^1(\mathbb{R}^n), f \rightarrow W_{\psi}^{\theta} f(\cdot, a)$ dönüşümü sınırlıdır. Ayrıca,

$$\|(W_{\psi}^{\theta} f)(\cdot, a)\|_{H^1} \leq |a|_n^{\frac{1}{2}} \|f\|_{H^1} \prod_{j=1}^n \|\psi_j\|_1$$

eşitsizliği vardır.

İspat Herhangi bir $b \in \mathbb{R}^n$ ve $f \in S(\mathbb{R})^n$ verilsin. Eğer $x_j = \frac{t_j - b_j}{a_j}$ değişken değiştirmesi yapılırsa $t_j = a_j x_j + b_j$, $dt_j = a_j dx_j$, $j = 1, \dots, n$ olup,

$$\begin{aligned} W_{\psi}^{\theta} f(\cdot, a) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \overline{\psi_{b,a,\theta}(t)} dt \\ &= |a|_n^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \prod_{j=1}^n \overline{\psi_j\left(\frac{t_j - b_j}{a_j}\right)} e^{\frac{i}{2}(t_j^2 - b_j^2) \cot \theta_j} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |a|_n^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{f}(ax + b) \prod_{j=1}^n \overline{\psi_j(x_j)} |a|_n dx \\
&= |a|_n^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{f}(ax + b) \prod_{j=1}^n \overline{\psi_j(x_j)} dx
\end{aligned} \tag{3.13}$$

$(d_t = dt_1, \dots, dt_n, |a|_n dx = a_1 \cdots a_n dx_1 \cdots dx_n).$

Eğer (3.13) eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&(W_{\psi}^{\theta} \mathbf{f}(\cdot, a) * \varphi_t)(b) = \\
&= |a|_n^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{f}(ax + b - y) \prod_{j=1}^n \overline{\psi_j(x_j)} dx \right) \varphi_t(y) dy \\
&= |a|_n^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{f}(ax + b - y) \varphi_t(y) dy \right) \prod_{j=1}^n \overline{\psi_j(x_j)} dx \\
&= |a|_n^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathbf{f} * \varphi_t)(ax + b) \overline{\psi(x)} dx
\end{aligned} \tag{3.14}$$

olur. Böylece (3.14) eşitliğinden,

$$\begin{aligned}
|(W_{\psi}^{\theta} \mathbf{f}(\cdot, a) * \varphi_t)(b)| &= |a|_n^{\frac{1}{2}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (\mathbf{f} * \varphi_t)(ax + b) \overline{\psi(x)} dx \right| \\
&\leq |a|_n^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |(\mathbf{f} * \varphi_t)(ax + b)| |\psi(x)| dx
\end{aligned}$$

olup bu son ifadeden,

$$\begin{aligned}
\|(W_{\psi}^{\theta} \mathbf{f})(\cdot, a)\|_{H^1} &= \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{t>0} |(W_{\psi}^{\theta} \mathbf{f}(\cdot, a) * \varphi_t)(b)| db \\
&\leq |a|_n^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{t>0} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{f} * \varphi_t(ax + b)| |\psi(x)| dx \right) db \\
&\leq |a|_n^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\psi(x)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{t>0} |(\mathbf{f} * \varphi_t)(ax + b)| db \right) dx \\
&= |a|_n^{\frac{1}{2}} \|\psi\|_1 \|\mathbf{f}\|_{H^1}
\end{aligned}$$

$$= |a|_n^{\frac{1}{2}} \|f\|_{H^1} \prod_{j=1}^n \|\psi_j\|_1$$

elde edilir.

3.1.14. Teorem $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_n)$, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in S(\mathbb{R})^n$ multi dalga fonksiyonları ve herhangi bir $a \in \mathbb{R}_+^n$ olsun. Bu durumda her $\boldsymbol{f} = (f_1, \dots, f_n) \in H^1(\mathbb{R})^n$ ve $\theta = (\frac{\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2})$ olmak üzere,

$$\|(W_{\boldsymbol{\psi}}^{\theta} \boldsymbol{f})(\cdot, a) - (W_{\boldsymbol{\gamma}}^{\theta} \boldsymbol{f})(\cdot, a)\|_{H^1} \leq |a|_n^{\frac{1}{2}} \|f\|_{H^1} \prod_{j=1}^n \|\psi_j - \gamma_j\|_1$$

eşitsizliği vardır.

İspat Herhangi $\boldsymbol{f} \in S(\mathbb{R})^n$ verisin. O halde,

$$\begin{aligned} W_{\boldsymbol{\psi}}^{\theta} \boldsymbol{f}(\cdot, a) - W_{\boldsymbol{\gamma}}^{\theta} \boldsymbol{f}(\cdot, a) &= |a|_n^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{f}(ax + b) \prod_{j=1}^n \overline{(\psi_j - \gamma_j)(x_j)} e^{\frac{i}{2} a_j x_j (a_j x_j + 2b_j) \cot \theta_j} dx \\ &= |a|_n^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{f}(ax + b) \prod_{j=1}^n \overline{(\psi_j - \gamma_j)(x_j)} dx \\ &= W_{\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\gamma}}^{\theta} \boldsymbol{f}(\cdot, a) \end{aligned}$$

olup Teorem 3.1.13 deki ispat yöntemi ile;

$$W_{\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\gamma}}^{\theta} \boldsymbol{f}(\cdot, a) * \varphi_t(b) = |a|_n^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} (\boldsymbol{f} * \varphi_t)(ax + b) \overline{(\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\gamma})(x)} dx$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned} \|W_{\boldsymbol{\psi}}^{\theta} \boldsymbol{f}(\cdot, a) - W_{\boldsymbol{\gamma}}^{\theta} \boldsymbol{f}(\cdot, a)\|_{H^1} &= \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{t>0} |(W_{\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\gamma}}^{\theta} \boldsymbol{f}(b, a) * \varphi_t)(b)| db \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{t>0} \left| |a|_n^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} (\boldsymbol{f} * \varphi_t)(ax + b) \overline{(\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\gamma})(x)} dx \right| db \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq |a|_n^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{t>0} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(f * \varphi_t)(ax + b)| |(\overline{\psi - \gamma})(x)| dx \right) db \\
&\leq |a|_n^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |(\psi - \gamma)(x)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{t>0} |(f * \varphi_t)(ax + b)| db \right) dx \\
&= |a|_n^{\frac{1}{2}} \|f\|_{H^1} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \prod_{j=1}^n (\psi_j - \gamma_j)(x_j) \right| dx \\
&= |a|_n^{\frac{1}{2}} \|f\|_{H^1} \prod_{j=1}^n \|\psi_j - \gamma_j\|_1
\end{aligned}$$

elde edilir.

3.1.15. Teorem Herhangi bir $a \in \mathbb{R}_+^n$ için $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n) \in S(\mathbb{R})^n$ multi dalga fonksiyonu verilsin. O halde her $f = (f_1, \dots, f_n), g = (g_1, \dots, g_n) \in H^1(\mathbb{R})^n$ için ve $\theta = (\frac{\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2})$ olmak üzere,

$$\|(W_\psi^\theta f)(\cdot, a) - (W_\psi^\theta g)(\cdot, a)\|_{H^1} \leq |a|_n^{\frac{1}{2}} \|f - g\|_{H^1} \|\psi\|_1$$

eşitsizliği vardır.

İspat Herhangi $f, g \in S(\mathbb{R})^n$ ve $b \in \mathbb{R}^n$ verilsin. Yine benzer şekilde

$$\begin{aligned}
&W_\psi^\theta (f - g)(\cdot, a) * \varphi_t(b) \\
&= |a|_n^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (f - g)(ax + b - y) \prod_{j=1}^n \overline{(\psi_j)(x_j)} e^{\frac{i}{2} a_j x_j (a_j x_j + 2b_j) \cot \theta_j} dx \right) \varphi_t(y) dy \\
&= |a|_n^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (f - g)(ax + b - y) \varphi_t(y) dy \right) \prod_{j=1}^n \overline{(\psi_j)(x_j)} dx \\
&= |a|_n^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} (f - g) * \varphi_t(ax + b) \overline{\psi(x)} dx
\end{aligned}$$

yazılır. Böylece Fubini Teoreminden,

$$\|(W_\psi^\theta f)(\cdot, a) - (W_\psi^\theta g)(\cdot, a)\|_{H^1} = \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{t>0} |(W_\psi^\theta (f - g)(b, a) * \varphi_t)(b)| db$$

$$\begin{aligned}
&\leq |a|_n^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{t>0} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(\mathbf{f} - \mathbf{g}) * \varphi_t(ax + b)| |\overline{(\boldsymbol{\psi})(x)}| dx \right) db \\
&\leq |a|_n^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\boldsymbol{\psi}(x)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{t>0} |((\mathbf{f} - \mathbf{g}) * \varphi_t)(ax + b)| db \right) dx \\
&= |a|_n^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_{H^1} \|\boldsymbol{\psi}\|_1
\end{aligned}$$

elde edilir.

3.1.16. Sonuç Eğer $\boldsymbol{\psi}$ and $\boldsymbol{\gamma}$ iki multi dalga fonksiyonu ve $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in H^1(\mathbb{R})^n$ ise $\theta = (\frac{\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2})$ olmak üzere,

$$\|(W_{\boldsymbol{\psi}}^{\theta} \mathbf{f})(\cdot, a) - (W_{\boldsymbol{\gamma}}^{\theta} \mathbf{g})(\cdot, a)\|_{H^1} \leq |a|_n^{\frac{1}{2}} \left(\prod_{j=1}^n \|\psi_j - \gamma_j\|_1 \|\mathbf{f}\|_{H^1} + \prod_{j=1}^n \|\gamma_j\|_1 \|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_{H^1} \right)$$

eşitsizliği vardır.

İspat Eğer Teorem 3.1.14 ve Teorem 3.1.15 kullanılır ise,

$$\begin{aligned}
&\|(W_{\boldsymbol{\psi}}^{\theta} \mathbf{f})(\cdot, a) - (W_{\boldsymbol{\gamma}}^{\theta} \mathbf{g})(\cdot, a)\|_{H^1} \\
&= \|(W_{\boldsymbol{\psi}}^{\theta} \mathbf{f})(\cdot, a) - (W_{\boldsymbol{\gamma}}^{\theta} \mathbf{f})(\cdot, a) + (W_{\boldsymbol{\gamma}}^{\theta} \mathbf{f})(\cdot, a) - (W_{\boldsymbol{\gamma}}^{\theta} \mathbf{g})(\cdot, a)\|_{H^1} \\
&\leq \|(W_{\boldsymbol{\psi}}^{\theta} \mathbf{f})(\cdot, a) - (W_{\boldsymbol{\gamma}}^{\theta} \mathbf{f})(\cdot, a)\|_{H^1} + \|(W_{\boldsymbol{\gamma}}^{\theta} \mathbf{f})(\cdot, a) - (W_{\boldsymbol{\gamma}}^{\theta} \mathbf{g})(\cdot, a)\|_{H^1} \\
&\leq |a|_n^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{f}\|_{H^1} \prod_{j=1}^n \|\psi_j - \gamma_j\|_1 + |a|_n^{\frac{1}{2}} \|\boldsymbol{\psi}\|_1 \|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_{H^1} \\
&= |a|_n^{\frac{1}{2}} \left(\prod_{j=1}^n \|\psi_j - \gamma_j\|_1 \|\mathbf{f}\|_{H^1} + \prod_{j=1}^n \|\gamma_j\|_1 \|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_{H^1} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

3.1.17. Teorem Herhangi bir $a \in \mathbb{R}_+^n$ ve $\theta = \left(\frac{\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2}\right)$ için W_ψ^θ dönüşümü $B_p^{\alpha,q}(\mathbb{R})^n$ uzayından $B_p^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır. Bundan başka

$$\|W_\psi^\theta f(b, a)\|_{B_p^{\alpha,q}} \leq |a|_n^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^n \|\psi_j\|_1 \|f\|_{B_p^{\alpha,q}}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat $\psi \in S(\mathbb{R})^n$ multi dalga fonksiyonu ve $f \in S(\mathbb{R})^n$ olmak üzere, herhangi bir $b \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\begin{aligned} \|W_\psi^\theta f(b, a)\|_p^p &= \left\| e^{-\frac{i}{2}b^2 \cot \frac{\theta}{2}} \prod_{j=1}^n \left(e^{\frac{i}{2}(\cdot)^2 \cot \theta_j} f_j * \psi_j^{a_j} \right) (b_j) \right\|_p^p \\ &= \left\| \prod_{j=1}^n (f_j * \psi_j^{a_j})(b_j) \right\|_p^p \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \prod_{j=1}^n (f_j * \psi_j^{a_j})(b_j) \right|^p db \\ &= \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} \left| \prod_{j=1}^n (f_j * \psi_j^{a_j})(b_j) \right|^p db_1 \dots db_n \\ &= \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} |(f_1 * \psi_1^{a_1})(b_1)|^p \dots |(f_n * \psi_n^{a_n})(b_n)|^p db_1 \dots db_n \end{aligned}$$

olup eğer Fubini teoremi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \|W_\psi^\theta f(b, a)\|_p^p &= \left(\int_{\mathbb{R}} |(f_1 * \psi_1^{a_1})(b_1)|^p db_1 \right) \dots \left(\int_{\mathbb{R}} |(f_n * \psi_n^{a_n})(b_n)|^p db_n \right) \\ &= \|f_1 * \psi_1^{a_1}\|_p^p \dots \|f_n * \psi_n^{a_n}\|_p^p \\ &= \prod_{j=1}^n \|f_j * \psi_j^{a_j}\|_p^p \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan $L^p(\mathbb{R})$ uzayı, $L^1(\mathbb{R})$ üzerinde Banach modülü ve $\|\psi_j^{a_j}\|_1 = a_j^{\frac{1}{2}} \|\psi_j\|_1$ (Kulak, 2021) olduğundan,

$$\begin{aligned}\|f_j * \psi_j^{a_j}\|_p &\leq \|f_j\|_p \|\psi_j^{a_j}\|_1, \quad (j = 1, \dots, n) \\ &= \|f_j\|_p a_j^{\frac{1}{2}} \|\psi_j\|_1\end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$\begin{aligned}\|W_{\psi}^{\theta} f(b, a)\|_p &= \prod_{j=1}^n \|f_j * \psi_j^{a_j}\|_p \\ &\leq \prod_{j=1}^n \|f_j\|_p a_j^{\frac{1}{2}} \|\psi_j\|_1 < \infty\end{aligned}\tag{3.15}$$

olup $W_{\psi}^{\theta} f(b, a) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ elde edilir. Burada $\theta = \frac{\pi}{2}$ için $(j = 1, \dots, n)$,

$$\begin{aligned}W_j^{\theta_j} f_j(b_j, a_j) &= a_j^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} f_j(t_j) \psi_j\left(\frac{t_j - b_j}{a_j}\right) e^{-\frac{i}{2}(t_j^2 - b_j^2) \cot \theta_j} dt_j \\ &= a_j^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} f_j(t_j) \psi_j\left(\frac{t_j - b_j}{a_j}\right) dt_j\end{aligned}$$

olup $\frac{t_j - b_j}{a_j} = x_j$, $t_j = a_j x_j + b_j$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\begin{aligned}W_j^{\theta_j} f_j(b_j, a_j) &= a_j^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} f_j(a_j x_j + b_j) \psi_j(x_j) a_j dx_j \\ &= a_j^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} f_j(a_j x_j + b_j) \psi_j(x_j) dx_j\end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned}\omega_p(W_{\psi}^{\theta} f(b, a), h) &= \left\| (W_{\psi}^{\theta} f)(b + h, a) - W_{\psi}^{\theta} f(b, a) \right\|_p \\ &= \left\| \prod_{j=1}^n W_j^{\theta_j} f_j(b_j + h_j, a_j) - \prod_{j=1}^n W_j^{\theta_j} f_j(b_j, a_j) \right\|_p \\ &= \left\| \prod_{j=1}^n a_j^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f_j(a_j x_j + b_j + h_j) \psi_j(x_j) dx_j - \prod_{j=1}^n a_j^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f_j(a_j x_j + b_j) \psi_j(x_j) dx_j \right\|_p\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |a|_n^{\frac{1}{2}} \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{j=1}^n f_j(a_j x_j + b_j + h_j) - \prod_{j=1}^n f_j(a_j x_j + b_j) \right) \psi_j(x_j) dx_j \right\|_p \\
&= |a|_n^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} |\psi_j(x_j)| \left(\left| \int_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{j=1}^n f_j(a_j x_j + b_j + h_j) - \prod_{j=1}^n f_j(a_j x_j + b_j) \right) \right|^p dt_j \right)^{\frac{1}{p}} dx_j \\
&\leq |a|_n^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} |\psi_j(x_j)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_j(t_j + h_j) - f_j(t_j)|^p dt_j \right)^{\frac{1}{p}} dx_j \\
&= |a|_n^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^n \|\psi_j\|_1 \omega_p(f_j, h_j)
\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}
\omega_p(W_{\psi}^{\theta} f(b, a), h) &= \left\| (W_{\psi}^{\theta} f)(b + h, a) - W_{\psi}^{\theta} f(b, a) \right\|_p \\
&\leq |a|_n^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^n \|\psi_j\|_1 \omega_p(f, h)
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $q < \infty$ için,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} [\omega_p(W_{\psi}^{\theta} f(b, a), h)]^q \frac{dh}{|h|^{n+\alpha q}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq |a|_n^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^n \|\psi_j\|_1 \left(\int_{\mathbb{R}} [\omega_p(f, h)]^q \frac{dh}{|h|^{n+\alpha q}} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (3.16)$$

bulunur. Buradan (3.15) ve (3.16) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
\|W_{\psi}^{\theta} f(b, a)\|_{B_p^{\alpha, q}} &= \|W_{\psi}^{\theta} f(b, a)\|_p + \left(\int_{\mathbb{R}} [\omega_p(f, h)]^q \frac{dh}{|h|^{n+\alpha q}} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \prod_{j=1}^n \|f_j\|_p a_j^{\frac{1}{2}} \|\psi_j\|_1 + |a|_n^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^n \|\psi_j\|_1 \left(\int_{\mathbb{R}} [\omega_p(f, h)]^q \frac{dh}{|h|^{n+\alpha q}} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= |a|_n^{\frac{1}{2}} \|f\|_p \prod_{j=1}^n \|\psi_j\|_1 + |a|_n^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^n \|\psi_j\|_1 \left(\int_{\mathbb{R}} [\omega_p(f, h)]^q \frac{dh}{|h|^{n+\alpha q}} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= |a|_n^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^n \|\psi_j\|_1 \|f\|_{B_p^{\alpha, q}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

3.1.18. Teorem ψ and φ iki dalga fonksiyonu ve $f \in B_p^{\alpha,q}(\mathbb{R})^n$ verilsin. O halde $\theta = (\frac{\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2})$ ve $a \in \mathbb{R}_+^n$ için

$$\|(W_\psi^\theta f)(., a) - (W_\varphi^\theta f)(., a)\|_{B_p^{\alpha,q}} \leq |a|_n^{\frac{1}{2}} \|f\|_{B_p^{\alpha,q}} \prod_{j=1}^n \|\psi_j - \varphi_j\|_1$$

eşitsizliği vardır.

İspat $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n), \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ multi dalgacık fonksiyonları verilsin. O halde herhangi bir $a \in \mathbb{R}_+^n$ için

$$W_\psi^\theta f(., a) - W_\varphi^\theta f(., a) = W_{\psi-\varphi}^\theta f(., a)$$

eşitliği yazılır (Kulak, 2021). Herhangi bir $b \in \mathbb{R}^n$ ve $\theta = (\frac{\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2})$ için

$$\begin{aligned} \|(W_\psi^\theta f)(b, a) - (W_\varphi^\theta f)(b, a)\|_{B_p^{\alpha,q}} &= \|\langle f, \psi_{b,a,\theta} \rangle - \langle f, \varphi_{b,a,\theta} \rangle\|_{B_p^{\alpha,q}} \\ &= \|\langle f, \psi_{b,a,\theta} - \varphi_{b,a,\theta} \rangle\|_{B_p^{\alpha,q}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

eşitliği elde edilir. Öte yandan,

$$\begin{aligned} (\psi_{b,a,\theta} - \varphi_{b,a,\theta})(t) &= |a|_n^{-\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^n \psi_j \left(\frac{t_j - b_j}{a_j} \right) e^{-\frac{i}{2}(t_j^2 - b_j^2) \cot \theta_j} \\ &\quad - |a|_n^{-\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^n \varphi_j \left(\frac{t_j - b_j}{a_j} \right) e^{-\frac{i}{2}(t_j^2 - b_j^2) \cot \theta_j} \\ &= |a|_n^{-\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^n (\psi_j - \varphi_j) \left(\frac{t_j - b_j}{a_j} \right) \\ &= (\psi - \varphi)_{b,a,\theta}(t) \end{aligned} \quad (3.18)$$

olup burada (3.17) ve (3.18) eşitlikleri ve Teorem 3.1.17 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\|W_{\psi}^{\theta} f(\cdot, a) - W_{\phi}^{\theta} f(\cdot, a)\|_{B_p^{\alpha, q}} &= \|\langle f, (\psi - \phi)_{b, a, \theta} \rangle\|_{B_p^{\alpha, q}} = \|W_{\psi - \phi}^{\theta} f(b, a)\|_{B_p^{\alpha, q}} \\
&\leq |a|_n^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^n \|\psi_j - \phi_j\|_1 \|f\|_{B_p^{\alpha, q}}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

bulunur.

3.1.19. Teorem Herhangi bir $a \in \mathbb{R}_+^n$ için $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n) \in S(\mathbb{R})^n$ multi dalga fonksiyonu verilsin. O halde her $f = (f_1, \dots, f_n), g = (g_1, \dots, g_n) \in B_p^{\alpha, q}(\mathbb{R})^n$ için ve $\theta = (\frac{\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2})$ olmak üzere,

$$\|(W_{\psi}^{\theta} f)(\cdot, a) - (W_{\psi}^{\theta} g)(\cdot, a)\|_{B_p^{\alpha, q}} \leq |a|_n^{\frac{1}{2}} \|f - g\|_{B_p^{\alpha, q}} \prod_{j=1}^n \|\psi_j\|_1$$

eşitsizliği vardır.

İspat Herhangi $f, g \in S(\mathbb{R})^n$ ve $b \in \mathbb{R}^n$ verilsin. Yine Teorem 3.1.17 den,

$$\begin{aligned}
\|(W_{\psi}^{\theta} f)(b, a) - (W_{\psi}^{\theta} g)(b, a)\|_{B_p^{\alpha, q}} &= \|\langle f, \varphi_{b, a, \theta} \rangle - \langle g, \varphi_{b, a, \theta} \rangle\|_{B_p^{\alpha, q}} \\
&= \|\langle f - g, \varphi_{b, a, \theta} \rangle\|_{B_p^{\alpha, q}} \\
&= \|W_{\varphi}^{\theta} (f - g)(b, a)\|_{B_p^{\alpha, q}} \\
&\leq |a|_n^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^n \|\varphi_j\|_1 \|f - g\|_{B_p^{\alpha, q}}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

eşitsizliği elde edilir.

3.1.20. Sonuç Eğer ψ and ϕ iki multi dalga fonksiyonu ve $f, g \in B_p^{\alpha, q}(\mathbb{R})^n$ ise $\theta = (\frac{\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2})$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
&\|(W_{\psi}^{\theta} f)(\cdot, a) - (W_{\phi}^{\theta} g)(\cdot, a)\|_{B_p^{\alpha, q}} \\
&\leq |a|_n^{\frac{1}{2}} \left(\prod_{j=1}^n \|\psi_j - \phi_j\|_1 \|f\|_{B_p^{\alpha, q}} + \prod_{j=1}^n \|\phi_j\|_1 \|f - g\|_{B_p^{\alpha, q}} \right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği vardır.

İspat Eğer (3.19) ve (3.20) eşitsizlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \| (W_{\psi}^{\theta} f)(\cdot, a) - (W_{\varphi}^{\theta} g)(\cdot, a) \|_{B_p^{\alpha, q}} \\
&= \| (W_{\psi}^{\theta} f)(\cdot, a) - (W_{\varphi}^{\theta} f)(\cdot, a) + (W_{\varphi}^{\theta} f)(\cdot, a) - (W_{\varphi}^{\theta} g)(\cdot, a) \|_{B_p^{\alpha, q}} \\
&\leq |a|_n^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^n \| \psi_j - \varphi_j \|_1 \| f \|_{B_p^{\alpha, q}} + |a|_n^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^n \| \varphi_j \|_1 \| f - g \|_{B_p^{\alpha, q}} \\
&= |a|_n^{\frac{1}{2}} \left(\prod_{j=1}^n \| \psi_j - \varphi_j \|_1 \| f \|_{B_p^{\alpha, q}} + \prod_{j=1}^n \| \varphi_j \|_1 \| f - g \|_{B_p^{\alpha, q}} \right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

3.1.21. Teorem Herhangi bir $a \in \mathbb{R}_+^n$ için ψ kompakt destekli ana dalga fonksiyonu verilsin. O halde $\theta = \left(\frac{\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2}\right)$ için W_{ψ}^{θ} dönüşümü $BMO(\mathbb{R}^n)$ uzayından $BMO(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır. Bundan başka

$$\| (W_{\psi}^{\theta} f)(b, a) \|_{BMO} \leq |a|_n^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^n \| \psi_j \|_1 \| f \|_{BMO}$$

eşitsizliği vardır.

İspat Herhangi $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ ve $b \in \mathbb{R}^n$ verilsin.

$$W_{\psi}^{\theta} f(b, a) = |a|_n^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \prod_{j=1}^n \overline{\psi_j \left(\frac{t_j - b_j}{a_j} \right)} e^{\frac{i}{2}(t_j^2 - b_j^2) \cot \theta_j} dt$$

Eğer $t = ax + b$ ve $\frac{t_j - b_j}{a_j} = x_j$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$W_{\psi}^{\theta} f(b, a) = |a|_n^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(ax + b) \prod_{j=1}^n \overline{\psi_j(x_j)} dx$$

olup

$$|W_{\psi}^{\theta} f(b, a)| \leq |a|_n^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(ax + b)| \prod_{j=1}^n |\psi_j(x_j)| dx$$

yazılır. Buradan $B \subset \mathbb{R}^n$ yuvarı üzerinden taraf tarafa integral alınır,

$$\int_B |(W_{\psi}^{\theta} f)(b, a)| db \leq |a|_n^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n \psi_j(x_j) \left(\int_B |f(ax + b)| db \right) dx$$

yazılır. Şimdi de $ax + b = y$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned} \int_B |(W_{\psi}^{\theta} f)(b, a)| db &\leq |a|_n^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n \psi_j(x_j) \left(\int_{ax+B} |f(y)| dy \right) dx \\ &= |a|_n^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n \psi_j(x_j) \left(\int_K |f(y)| dy \right) dx \end{aligned}$$

olur. Burada $K = ax + B$ ve $K \subset asupp\psi + B$, $\mathbb{R}^n$ de kompakt bir küme ve $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R})^n$ olduğundan

$$\int_B |(W_{\psi}^{\theta} f)(b, a)| db \leq C |a|_n^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^n \|\psi_j\|_1 < \infty$$

olup böylece $(W_{\psi}^{\theta} f)(b, a) \in L_{loc}^1(\mathbb{R})^n$ elde edilir. O halde, Fubini teoremi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} (W_{\psi}^{\theta} f)_B(b, a) &= |a|_n^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|B|} \int_B f(ax + b) db \prod_{j=1}^n \overline{\psi_j(x_j)} \right) dx \\ &= |a|_n^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f_K \prod_{j=1}^n \overline{\psi_j(x_j)} dx \end{aligned}$$

elde edilir. Burada Minkowski eşitsizliği ve son ifade kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& |B|^{-1} \int_B \left| (W_{\psi}^{\theta} f)(b, a) - (W_{\psi}^{\theta} f)_B(b, a) \right| db \\
& \leq |a|^{\frac{1}{2}} |B|^{-1} \int_B \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(ax + b) - f_K| \prod_{j=1}^n \psi_j(x_j) dx \right) db \\
& \leq |a|^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n \psi_j(x_j) \left(|B|^{-1} \int_B |f(ax + b) - f_K| db \right) dx
\end{aligned}$$

olup yine $ax + b = y$ değişken değiştirmesi yapılırsa $K = ax + B$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
& |B|^{-1} \int_B \left| (W_{\psi}^{\theta} f)(b, a) - (W_{\psi}^{\theta} f)_B(\cdot, a) \right| db \\
& \leq |a|^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n \psi_j(x_j) \left(|K|^{-1} \int_K |f(y) - f_K| dy \right) dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
\|(W_{\psi}^{\theta} f)(b, a)\|_{BMO} &= \sup_{B \subset \mathbb{R}^n} |B|^{-1} \int_B \left| (W_{\psi}^{\theta} f)(b, a) - (W_{\psi}^{\theta} f)_B(\cdot, a) \right| db \\
&\leq |a|^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{K \subset \mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n \psi_j(x_j) \left(|K|^{-1} \int_K |f(y) - f_K| dy \right) dx \\
&\leq |a|^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n \psi_j(x_j) \left(\sup_{K \subset \mathbb{R}^n} |K|^{-1} \int_K |f(y) - f_K| dy \right) dx \\
&= |a|^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^n \|\psi_j\|_1 \|f\|_{BMO}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

3.1.22. Teorem ψ and φ kompakt destekli iki ana dalga fonksiyonu ve $f \in BMO(\mathbb{R})^n$ verilsin. O halde $\theta = \left(\frac{\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2}\right)$ ve $a \in \mathbb{R}_+^n$ için

$$\|(W_{\psi}^{\theta} f)(\cdot, a) - (W_{\varphi}^{\theta} f)(\cdot, a)\|_{BMO} \leq |a|^{\frac{1}{2}} \|f\|_{BMO} \prod_{j=1}^n \|\psi_j - \varphi_j\|_1$$

eşitsizliği vardır.

İspat $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_n), \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ multi dalga fonksiyonları verilsin. O halde herhangi bir $a \in \mathbb{R}_+^n$ için

$$W_{\boldsymbol{\psi}}^{\theta} \mathbf{f}(\cdot, a) - W_{\boldsymbol{\varphi}}^{\theta} \mathbf{f}(\cdot, a) = W_{\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\varphi}}^{\theta} \mathbf{f}(\cdot, a)$$

eşitliği yazılır (Kulak, 2021). Herhangi bir $b \in \mathbb{R}^n$ ve $\theta = (\frac{\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2})$ için

$$\begin{aligned} \|(W_{\boldsymbol{\psi}}^{\theta} \mathbf{f})(b, a) - (W_{\boldsymbol{\varphi}}^{\theta} \mathbf{f})(b, a)\|_{BMO} &= \|\langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\psi}_{b,a,\theta} \rangle - \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}_{b,a,\theta} \rangle\|_{BMO} \\ &= \|\langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\psi}_{b,a,\theta} - \boldsymbol{\varphi}_{b,a,\theta} \rangle\|_{BMO} \end{aligned} \quad (3.21)$$

eşitliği elde edilir. Öte yandan

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\psi}_{b,a,\theta} - \boldsymbol{\varphi}_{b,a,\theta})(t) &= |a|_n^{-\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^n \psi_j \left(\frac{t_j - b_j}{a_j} \right) e^{-\frac{i}{2}(t_j^2 - b_j^2) \cot \theta_j} \\ &\quad - |a|_n^{-\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^n \varphi_j \left(\frac{t_j - b_j}{a_j} \right) e^{-\frac{i}{2}(t_j^2 - b_j^2) \cot \theta_j} \\ &= |a|_n^{-\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^n (\psi_j - \varphi_j) \left(\frac{t_j - b_j}{a_j} \right) \\ &= (\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\varphi})_{b,a,\theta}(t) \end{aligned} \quad (3.22)$$

olup burada (3.21) ve (3.22) eşitlikleri ve Teorem 3.1.21 kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \|W_{\boldsymbol{\psi}}^{\theta} \mathbf{f}(\cdot, a) - W_{\boldsymbol{\varphi}}^{\theta} \mathbf{f}(\cdot, a)\|_{BMO} &= \|\langle \mathbf{f}, (\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\varphi})_{b,a,\theta} \rangle\|_{BMO} \\ &= \|W_{\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\varphi}}^{\theta} \mathbf{f}(b, a)\|_{BMO} \\ &\leq |a|_n^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{f}\|_{BMO} \prod_{j=1}^n \|\psi_j - \varphi_j\|_1 \end{aligned} \quad (3.23)$$

bulunur.

3.1.23. Teorem Herhangi bir $a \in \mathbb{R}_+^n$ için $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_n) \in S(\mathbb{R})^n$ multi dalga fonksiyonu verilsin. O halde her $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n), \mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n) \in BMO(\mathbb{R})^n$ için ve $\theta = (\frac{\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2})$ olmak üzere,

$$\|(W_{\psi}^{\theta}f)(.,a) - (W_{\psi}^{\theta}g)(.,a)\|_{BMO} \leq |a|_n^{\frac{1}{2}} \|f - g\|_{BMO} \prod_{j=1}^n \|\psi_j\|_1$$

eşitsizliği vardır.

İspat Herhangi $f, g \in S(\mathbb{R})^n$ ve $b \in \mathbb{R}^n$ verilsin. Yine Teorem 3.1.22 den,

$$\begin{aligned} \|(W_{\varphi}^{\theta}f)(.,a) - (W_{\varphi}^{\theta}g)(.,a)\|_{BMO} &= \|\langle f, \varphi_{b,a,\theta} \rangle - \langle g, \varphi_{b,a,\theta} \rangle\|_{BMO} \\ &= \|\langle f - g, \varphi_{b,a,\theta} \rangle\|_{BMO} \\ &= \|W_{\varphi}^{\theta}(f - g)(b, a)\|_{BMO} \\ &\leq |a|_n^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^n \|\varphi_j\|_1 \|f - g\|_{BMO} \end{aligned} \quad (3.24)$$

eşitsizliği elde edilir.

3.1.24. *Sonuç* $f, g \in BMO(\mathbb{R})^n$ olmak üzere ψ and φ iki kompakt destekli dalga fonksiyonu ve $\theta = \left(\frac{\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2}\right)$ verilsin. O halde,

$$\begin{aligned} \|(W_{\psi}^{\theta}f)(.,a) - (W_{\varphi}^{\theta}g)(.,a)\|_{BMO} \\ \leq |a|_n^{\frac{1}{2}} \left(\prod_{j=1}^n \|\psi_j - \varphi_j\|_1 \|f\|_{BMO} + \prod_{j=1}^n \|\varphi_j\|_1 \|f - g\|_{BMO} \right) \end{aligned}$$

eşitsizliği vardır.

İspat Herhangi $f, g \in L_{loc}^1(\mathbb{R})^n$ olmak üzere eğer (3.23) ve (3.24) eşitsizlikleri ve Teorem 3.1.22 kullanılırsa

$$\begin{aligned} \|(W_{\psi}^{\theta}f)(.,a) - (W_{\varphi}^{\theta}g)(.,a)\|_{BMO} \\ &= \|(W_{\psi}^{\theta}f)(.,a) - (W_{\varphi}^{\theta}f)(.,a) + (W_{\varphi}^{\theta}f)(.,a) - (W_{\varphi}^{\theta}g)(.,a)\|_{BMO} \\ &\leq \|\langle f, \psi_{b,a,\theta} \rangle - \langle f, \varphi_{b,a,\theta} \rangle\|_{BMO} + \|\langle f, \varphi_{b,a,\theta} \rangle - \langle g, \varphi_{b,a,\theta} \rangle\|_{BMO} \\ &= \|\langle f, (\psi - \varphi)_{b,a,\theta} \rangle\|_{BMO} + \|\langle f - g, \varphi_{b,a,\theta} \rangle\|_{BMO} \\ &= \|(W_{\psi-\varphi}^{\theta}f)(.,a)\|_{BMO} + \|(W_{\varphi}^{\theta}(f - g))(.,a)\|_{BMO} \end{aligned}$$

$$\leq |a|_n^{\frac{1}{2}} \left(\prod_{j=1}^n \|\psi_j - \varphi_j\|_1 \|f\|_{BMO} + \prod_{j=1}^n \|\varphi_j\|_1 \|f - g\|_{BMO} \right)$$

bulunur.

3.1.25. Teorem $0 < r \leq 1$ olmak üzere,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi_{b,a,\theta}(t) dt = 0 \quad \text{ve} \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\psi(t)| (1 + |t|_n) dt < \infty$$

olsun. Eğer $f \in C^r(\widetilde{b_0})^n$ ($\widetilde{b_0} = (b_0, \dots, b_0)$)

$$|W_\psi^\theta f(\widetilde{b_0}, a)| \leq C_1 |a|_n^{r+1}$$

olacak şekilde $C_1 > 0$ sayısı vardır. Bundan başka eğer $f \in C^r(\mathbb{R})^n$ ise

$$\sup_{b \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}_n^+} |a|_n^{-r-1} |W_\psi^\theta f(b, a)| < \infty$$

bulunur.

İspat Herhangi bir $f \in C^r(\widetilde{b_0})^n$ verilsin. Bu durumda,

$$|W_\psi^\theta f(\widetilde{b_0}, a)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \overline{\psi_{\widetilde{b_0}, a, \theta}(t)} dt \right|$$

olup ve hipotezden elde edilen

$$f(\widetilde{b_0}) \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi_{b_0, a, \theta}(t)} dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(\widetilde{b_0}) \overline{\psi_{\widetilde{b_0}, a, \theta}(t)} dt = 0$$

eşitliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
|W_{\psi}^{\theta} f(\widetilde{b}_0, a)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \overline{\psi_{\widetilde{b}_0, a, \theta}(t)} dt - \int_{\mathbb{R}^n} f(\widetilde{b}_0) \overline{\psi_{\widetilde{b}_0, a, \theta}(t)} dt \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(t) - f(\widetilde{b}_0)) \overline{\psi_{\widetilde{b}_0, a, \theta}(t)} dt \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(t) - f(\widetilde{b}_0)| |\psi_{\widetilde{b}_0, a, \theta}(t)| dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |f(t) - f(\widetilde{b}_0)| \left| \prod_{j=1}^n \psi_j \left(\frac{t_j - b_0}{a_j} \right) e^{\frac{i}{2}(t_j^2 - b_j^2) \cot \theta_j} \right| dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |f(t) - f(\widetilde{b}_0)| \left| \prod_{j=1}^n \psi_j \left(\frac{t_j - b_0}{a_j} \right) \right| dt
\end{aligned}$$

bulunur. Öte yandan bu son ifadeye $f \in C^r(\widetilde{b}_0)^n$ olması kullanılır ve $\frac{t_j - b_0}{a_j} = u_j, (j = 1, \dots, n)$ değişken değiştirmesi yapılırsa;

$$\begin{aligned}
|W_{\psi}^{\theta} f(\widetilde{b}_0, a)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n |f_j(t_j) - f_j(b_0)| \prod_{j=1}^n \left| \psi_j \left(\frac{t_j - b_0}{a_j} \right) \right| dt \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} C^n \prod_{j=1}^n |t_j - b_0|^r \prod_{j=1}^n \left| \psi_j \left(\frac{t_j - b_0}{a_j} \right) \right| dt \\
&= C^n \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n |a_j u_j|^r \prod_{j=1}^n |\psi_j(u_j)| |a|_n du \\
&= C^n |a|_n \int_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{j=1}^n |a_j| \right)^r \left(\prod_{j=1}^n |u_j| \right)^r |\psi(u)| du \\
&= C^n |a|_n \int_{\mathbb{R}^n} |a|_n^r |u|_n^r |\psi(u)| du \\
&= C^n |a|_n^{r+1} \int_{\mathbb{R}^n} |\psi(u)| |u|_n^r du
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $0 < r \leq 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\psi(u)| |u|_n^r du &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\psi(u)| (1 + |u|_n)^r du \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\psi(u)| (1 + |u|_n) du < \infty
\end{aligned}$$

olup burada

$$C_1 = C^n \int_{\mathbb{R}^n} |\psi(u)| |u|_n^r du$$

denirse ;

$$|W_\psi^\theta f(\widetilde{b}_0, a)| \leq C_1 |a|_n^{r+1}$$

yazılır. Şimdi kabul edelim ki $f \in C^r(\mathbb{R})^n$ olsun. Yukarıdaki ispat teknikleri kullanılır ise $\forall b \in \mathbb{R}^n$ ve $a \in \mathbb{R}_n^+$ için

$$|W_\psi^\theta f(b, a)| \leq C_1 |a|_n^{r+1}$$

olup her iki tarafta supremum alınırsa

$$\sup_{b \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}_n^+} |a|_n^{-r-1} |W_\psi^\theta f(b, a)| < \infty$$

elde edilir. Böylece ispat biter.

Dalgacık dönüşümü fonksiyonların (sinyallerin) yerel ve noktasal özelliklerini kodlar. Bu özelliğini $T_x D_s$ operatöründen almaktadır. Bu operatör verilen bir x anında s ölçeğinde bilgi sağlamaya yarar. Bu nedenle dalgacık dönüşümü bir matematiksel mikroskoba benzetilebilir. Kesirli dalgacık dönüşümleri ile n - boyutlu kesirli uzaylarda sinyallerin yerel özelliklerini gözlemlememize olanak sağlar. Bu bağlamda bakılırsa Teorem 3.1.25, düzgün uzaylar için kesirli multilineer dalgacık dönüşümünü önemli hale getirmektedir. Böylece n - boyutlu düzgün uzaylar kesirli multilineer dalgacık dönüşümü ile karakterize edilebilirler.

3. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında multilineer kesirli dalgacık dönüşümü ile kesirli Fourier dönüşümü arasındaki ilişki incelenmiştir. Aynı zamanda bu dönüşüm için diklik bağıntısı ispatlanmıştır. Daha sonra kesirli multilineer dalgacık dönüşümünün eşlenik operatörü bulunmuştur. Ayrıca çeşitli fonksiyon uzaylarında multilineer kesirli dalgacık dönüşümü ve eşlenik operatörünün sürekliliği (sınırlılığı) incelenmiştir. Son olarak da bu dönüşümün n - boyutlu düzgün uzaylarında öneminden bahsedilmiştir. Başka fonksiyon uzaylarında da multilineer kesirli dalgacık dönüşümünün özellikleri ve sürekliliği (sınırlılığı) araştırılabilir.



KAYNAKLAR

- Almedia, L. B. (1997). Product and Convolution Theorems for the Fractional Fourier Transform. *Institute of Electrical and Electronics Engineers Signal Processing Letters*, 4(1), 15-17.
- Bracewell, R. (1965). *The Fourier Transform and It's Applications*. Mc Graw-Hill, Inc., New York, 381.
- Bultheel, A. and Martinez, H. (2002). *A shattered survey of the Fractional Fourier Transform*, Department of Computer Science, K. U. Leuven, Report TW337.
- Chuong, N. M. and Duong, D.V. (2013). Boundedness of the Wavelet Integral Operator on Weighted Function Spaces. *Russian Journal of Mathematical Physics*, 20(3), 268-275.
- Daubechies, I. (1992). *Ten Lectures on Wavelets*; Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM: Philadelphia, PA, USA.
- Doran, R. S. and Wichman, J. (1979). Approximate Identity and Factorization in Banach Modules, *Lectures Notes in Mathematics*. 768 Springer- Verlag.
- Flandrin, P. (2001). Time- Frequency and Chirps. In *Wavelet Applications VIII; International Society for Optics and Photonics: Orlando, FL, USA; Volume 4391*, 161-175.
- Fitzpatrick, P. M. and Royden, H. L. (2010). *Real Analysis*, Fourth Edition (ISBN 978-0-13-143747-0), 142.
- Gargour, C., Gabrea, M., Ramachandran, V. and Lina, J. M. (2009). A short introduction to wavelets and their applications. *Institute of Electrical and Electronics Engineers Circuits and Systems Magazine*, 2, 57-68.
- Gasquet, C and Witomski, P. (1999). *Fourier Analysis and Applications, Filtering, Numerial Computation, Wavelets*; Springer: New York, NY, USA.
- Goldberg, R. R. (1958). *Certain Operators and Fourier Transforms on L^2* , 385.
- Gröchening, K. (2001). *Foundations of Time- Frequency Analyysis*. Birkhauser: Baston, MA, USA; Basel, Switzerland; Berlin, Germany, 207.
- Hartman, W. M. (1998). *Signals, Sound and Sensation*. Springer Science+ Business Media. Inc. United States of America.
- Katznelson, Y. (1968). *An Introduction to Harmonic Analysis*. New York: Dover Publications.

- Kulak, Ö. ve I, Aydın, I. (2020). Inverse continuous wavelet transform in weighted variable exponent amalgam spaces. *Communications Faculty Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statics*, 69, 1171-1183.
- Kulak, Ö. (2021). On the multilinear fractional transforms, *Symmetry*, 13, 740.
- Larsen, R. (1971). *Introduction to the Theory of Multipliers*. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlay.
- Larsen, R. (1973). *Banach Algebras an Introduction*. New York: Marcel Dekker Inc.
- Pathak, R. S., Prasad, A. ve Kumar, P. (2012). M. Fractional Fourier transform of tempered distributions and generalized pseudo-differential operator. *Journal of Pseudo Differential Operators Applications*, 3, 239-254.
- Prasad, A., Manna, S., Mahato, A. and Singh, V. K. (2014). The generalized continuous wavelet transform associated with the fractional Fourier transform. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 259, 660-671.
- Prasad, A. and Kumar, P. (2015). Fractional wavelet transform in terms of fractional convolution. *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, 3, 201-210.
- Prasad, A. and Kumar, P. (2016). The continuous fractional wavelet transform on a generalized sobolev space. *International Journal Wavelets Multiresolution and Information Processing*, 14, 1650046.
- Prasad, A. and Kumar, P. (2016). Fractional wavelet transform on some function spaces. *Proceedings of the National Academy of Sciences India Section A Physical Sciences*, 86, 57-64.
- Raising hania, M. D. (2008). *Integral Equation & Boundary Value Problems*, S Chand and Company Pvt. Limited., New Delhi.
- Reiter, H. (1968). *Classical Harmonic Analysis and Locally Compact Group*, Oxford Universty Pres, Oxford.
- Rudin, W. (1966). *Real and Complex Analysis*. Mc Graw-Hill: New York, 65.
- Rudin, W. (1973). *Functional Analysis*. Mc Graw-Hill, Inc., 397.
- Sandıkçı, A. (2020). Multilinear τ -wigner transform. *J. Pseudo-Differ. Oper. Appl.* 11, 1465-1487.
- Schwartz, L., (1966). *Matematics for the Physical Science*. Addison-Wesley Publishing Company.
- Shi, J., Zhang, N. ve Liu, X. (2012). A novel fractional wavelet transform and its applications. *Science China Information Sciences*, 55, 1270-1279.

- Teofanov, N. (2019). Continuity properties of multilinear localization operators on modulation spaces. In *Landscapes of Time-Frequency Analysis*; Boggiatto P., Ed.; *Applied and Numerical Harmonic Analysis*; Birkhauser: Cham, Switzerland; pp. 291-307.
- Wang, H. C. (1977). *Homogeneous Banach Algebras*. Marcel Dekker INC. New York, 204s.



ÖZGEÇMİŞ

Adı- Soyadı: Elif GÜRBÜZ

Lisans: Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi

Tezsiz Yüksek Lisans: Pamukkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Çalıştığı kurum: MEB (Macit Zeren Fen Lisesi, Matematik Öğretmeni)

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

1-) Gürbüz, E. ve Kulak, Ö. (2024, 18-21 Ocak). *Properties of Multilinear Fractional Wavelet Transforms on Some Function Spaces*. The 14th Symposium on Generating Functions of Special Numbers and Polynomials and their Applications.

2-) Gürbüz, E. ve Kulak, Ö. (2024, 28 Mart). *Properties of Multilinear Fractional Wavelet Transforms on Some Function Spaces*. Proceedings Book of the 14th Symposium on Generating Functions of Special Numbers and Polynomials and their Applications (GFSNP 2024). ISBN: 978-625-00-1915-3. 86-91.