

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ CEBİRSEL YAPILAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Goncagül ERDOĞAN

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mustafa Habil GÜRSOY

AĞUSTOS 2025

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ CEBİRSEL YAPILAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Goncagül ERDOĞAN
(36223614009)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mustafa Habil GÜRSOY

AĞUSTOS 2025

İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

Bazı Genelleştirilmiş Cebirsel Yapılar

Tezi Hazırlayan: Goncagül ERDOĞAN
Yüksek Lisans Tezi

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Yüksek lisans tez çalışmamı yöneten, tezin hazırlanması aşamasında bana yol gösteren, akademik bakış açımı geliştirmemde ve araştırma disiplini kazanmamda katkısı çok büyük olan saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Mustafa Habil GÜRSOY' a teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans boyunca bilgi ve birikimlerinden faydalandığım hocalarıma, motivasyonumu kaybettiğim anlarda moral veren ablalarım, abime ve tüm arkadaşlarıma da ayrıca teşekkür ederim.

Son olarak, bu tezin hazırlanmasında emeği geçen herkese teşekkür eder; bu çalışmanın alana katkı sağlamasını temenni ederim.



ONUR SÖZÜ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum “Bazı Genelleştirilmiş Cebirsel Yapılar” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Goncagül ERDOĞAN



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ.....	i
ONUR SÖZÜ.....	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
SEMBOLLER VE KISALTMALAR.....	iv
ÖZET.....	v
ABSTRACT.....	vi
1.GİRİŞ.....	1
2.CEBİRSEL YAPILAR.....	4
2.1.Cebirsel Yapı.....	4
2.2.Yarı-Grup ve Monoid.....	5
2.3.Grup.....	10
2.4.Çaprazlanmış Modül.....	13
2.5.Halka.....	16
3.BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ CEBİRSEL YAPILAR.....	19
3.1.Genelleştirilmiş Monoidler.....	19
3.2.Genelleştirilmiş Gruplar.....	26
3.3.Genelleştirilmiş Çaprazlanmış Modüller.....	42
3.4.Genelleştirilmiş Halkalar.....	45
SONUÇ VE ÖNERİLER.....	48
KAYNAKLAR.....	49
ÖZGEÇMİŞ.....	51

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

$\forall$	: Her
$\exists$	: Bazı
$\neq$	: Eşit değildir
$\in$	: Elemanıdır
$\notin$	: Elemanı değildir
$\Rightarrow$	: Gerek şart
$\Leftarrow$	: Yeter şart
$(A,*)$	: Grup
$(R, +, \cdot)$	: Halka
$H < G$	: Altgrup
$H \leq G$	: Genelleştirilmiş altgrup
$\emptyset$	: Boş küme
Ker	: Çekirdek
$N \triangleleft G$	: Normal altgrup
$N \trianglelefteq G$	: Normal genelleştirilmiş altgrup

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ CEBİRSEL YAPILAR

Goncagül ERDOĞAN

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

53+vi sayfa

2025

Danışman: Prof. Dr. Mustafa Habil GÜRSOY

Bu tez 3 bölümden oluşmaktadır.

Bu tezin giriş bölümünde tezde yer alacak konular hakkında kısa bilgi verilmiştir.

İkinci bölümünde cebirsel yapılar, grup, monoid, halka ve çaprazlanmış modül konularına yer verilmiştir.

Üçüncü bölümünde genelleştirilmiş cebirsel yapılara yer verilerek özel olarak genelleştirilmiş gruplar, genelleştirilmiş monoidler, genelleştirilmiş halkalar, genelleştirilmiş çaprazlanmış modüller ayrıntılı olarak işlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş monoidler, genelleştirilmiş gruplar, genelleştirilmiş halkalar, genelleştirilmiş çapraz modüller

ABSTRACT

Master Thesis

SOME GENERALIZED ALGEBRAIC STRUCTURES

Goncagül ERDOĞAN

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

53+vi pages

2025

Supervisor: Prof. Dr. Mustafa Habil GÜRSOY

This thesis consists of 3 parts.

In the introduction part of this thesis, brief information about the topics to be included in the thesis is given.

In the second part, algebraic structures, group, monoid, ring and crossed module topics are included.

In the third part, generalized algebraic structures; generalized groups, generalized monoids, generalized rings, generalized crossed modules are discussed in detail.

Keywords: Generalized monoids, generalized groups, generalized rings, generalized crossed modules

1.GİRİŞ

Cebir, matematiğin en temel disiplinlerinden biridir ve çeşitli soyut yapılar aracılığıyla sayılar, işlemler ve yapıların doğasını inceleme olanağı sunar. Grup, monoid ve halka gibi cebirsel yapılar simetri, dönüşüm, yapı koruma ve işlem sistematikliği gibi kavramların ifadesinde önemli rol oynar [3]. Cebirsel yapılar yalnızca matematiksel düşüncenin soyut düzleminde değil, aynı zamanda fizik, bilgisayar bilimi, kriptografi ve topoloji gibi çok çeşitli alanlarda da kullanılmaktadır. Cebirsel yapıların gücü, onların formel kurallara dayanması ve bu kurallar aracılığıyla çok karmaşık sistemlerin dahi çözümlenebilmesine imkân tanınmasında yatar.

Grup, cebirin temel yapı taşlarından biridir. Bir grup, kapalı bir ikili işlem altında birleşme özelliğini sağlayan, birim elemana ve her elemanın tersine sahip olan bir küme olarak tanımlanır. Grup teorisi, Galois'in çalışmalarından başlayarak topoloji, geometri ve fizik gibi alanlara kadar uzanan geniş bir uygulama alanına sahiptir. Örneğin, döndürme ve yansıma gibi simetrilerle tanımlanan dönüşümler kümesi, grup yapısına örnek teşkil eder. 3 –boyutlu uzayda bir cismin kendi etrafında döndürülmesiyle oluşan dönüşümler kümesi, özel ortogonal grup adı verilen bir yapıyı oluşturur [18].

Grup aksiyomlarının belirli yönlerden gevşetilmesiyle ortaya çıkan yapılardan biri olan monoid, ters eleman zorunluluğunu ortadan kaldırarak daha geniş bir küme sistemini tanımlar. Bir monoid, kapalı bir ikili işlem altında birleşmeli ve birim eleman içeren ancak ters eleman koşulu olmayan bir yapıdır. Örneğin, doğal sayılar kümesi $(\mathbb{N}, +)$ bir monoid oluşturur; çünkü herhangi iki doğal sayının toplamı yine doğal sayıdır, toplama işlemi birleşmelidir ve 0 birim eleman olarak görev yapar. Ancak her doğal sayının toplama işlemine göre ters elemanı yoktur. Bu da grubun aksine monoidin daha genel bir yapı olduğunu gösterir.

Bir diğer önemli cebirsel yapı olan halka yapısı ise hem toplama hem çarpma işlemlerini içererek iki işlemi aynı anda barındıran daha karmaşık bir yapıdır. Halka, toplama işlemi altında abelyen grup, çarpma işlemi altında ise kapalı ve birleşmeli bir yapı sunar. Örneğin, tam sayılar kümesi $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ halka yapısının klasik bir örneğidir. Halkalar, özellikle modül, cebirsel sayı kuramı ve soyut cebirsel geometri gibi alanlarda temel rol oynar [9].

Halkalarda çarpmanın toplama üzerinde dağılma özelliği (distributivity) bulunması da önemli bir aksiyomdur.

Zamanla bu klasik yapıların bazı matematiksel bağlamlarda yetersiz kaldığı ve daha esnek modellere ihtiyaç duyulduğu görülmüştür. Özellikle homotopi teorisi, kategorik cebir ve cebirsel topoloji gibi alanlarda klasik aksiyomları tam olarak karşılamayan ama benzer davranışlar sergileyen yapılar incelenmek istenmiştir. Bu doğrultuda genelleştirilmiş cebirsel yapılar tanımlanmıştır.

İlk defa 1999’ da İran’ lı matematikçi Molaei tarafından tanımlanan genelleştirilmiş grup kavramı, grupların ilginç ve büyüleyici bir genişlemesidir [17]. Bir grup, yegâne birim elemana sahipken bir genelleştirilmiş grupta her eleman için bir birim eleman vardır. Dolayısıyla her grup bir genelleştirilmiş gruptur. Molaei’nin genelleştirilmiş grup kavramı vermesinden sonra bu kavram matematiğin çeşitli branşlarında cebirsel, topolojik ve diferansiyellenebilir açıdan ele alınarak çalışılmıştır [8,11,16,18]. Ayrıca genelleştirilmiş gruplar genetikte ve dinamik sistemlerde de kullanılmaktadır [1].

Molaei’nin ortaya koymuş olduğu bu yeni cebirsel yaklaşım daha sonra monoid, halka, crossed modül vb. gibi bazı cebirsel kavramlar için ele alınarak özellikle cebirsel ve topolojik olarak yoğun bir şekilde çalışılmıştır. Adina Pop ve Maria S. Pop 2010 yılında Molaei’nin bu yaklaşımını monoidler üzerinde uygulamışlardır [20]. Genelleştirilmiş monoidlerin altmonoidleri ve homomorfizmleri ile ilgili önemli sonuçlar elde etmişlerdir. İlk defa 2002’de Molaei tarafından tanımlanan genelleştirilmiş halka kavramı da evrensel cebirdeki özellikler açısından hem Molaei [19] tarafından hem de sonrasında başta matematikçiler tarafından incelenmiştir [9,12]. Özellikle 2017 yılında Fatehi ve Molaei genelleştirilmiş halkalar için izomorfizm teoremlerini çalışmışlardır [9].

Cebirsel bir kavram olan genelleştirilmiş grup ile kategorik bir kavram olan grupoid kavramı 2017 yılında Gürsoy tarafından genelleştirilmiş grup-grupoid ve devam çalışması olan genelleştirilmiş halka-grupoid kavramlarının verilmesiyle kategorik açıdan çalışılmıştır [11,12]. Yine cebirde önemli bir yeri olan “gruplar üzerinde çaprazlanmış modül” kavramı genelleştirilmiş gruplar üzerinde Gürsoy ve arkadaşları tarafından verilmiştir [13].

Bu tezde amaç, grup, monoid, halka ve çaprazlanmış modül gibi klasik cebirsel yapıların tanıtımını yapmak ve ardından bu yapıların genelleştirilmiş versiyonlarını tanımlayarak bunlar arasındaki ilişkileri analiz etmektir.



2. CEBİRSEL YAPILAR

Bu bölümde tezde ele alınan genelleştirilmiş cebirsel yapıların klasik cebirdeki versiyonları hatırlatılacaktır. Ayrıca bu cebirsel kavramlar ile ilgili temel bilgiler verilecektir.

2.1 Cebirsel Yapı

Cebirsel yapı, bir küme üzerinde tanımlanan bir veya birden fazla işlemle oluşturulan ve belirli özellikleri (aksiyomları) sağlayan matematiksel yapılardır. Daha formal olarak bir cebirsel yapı şu şekilde tanımlanır.

Tanım 2.1.1 [5] $A \neq \emptyset$ olmak üzere, bir $*$: $A \times A \rightarrow A$ fonksiyonuna A üzerinde bir ikili işlem denir.

$$\begin{aligned} * : A \times A &\rightarrow A \\ (a, b) &\rightarrow a * b \end{aligned}$$

- i. Her $a, b \in A$ için $a * b \in A$ dır. (Kapalılık özelliği)
- ii. Her $a \in A$ için $a * b$ tek türlü belirlenir. (İyi tanımlılık)

Üzerinde en az bir tane ikili işlem tanımlı bir $A \neq \emptyset$ kümesine bir cebirsel yapı denir ve $(A, *)$ ikilisi ile gösterilir.

Bir cebirsel yapı, üzerinde tanımlı $*$ işleminin aşağıdaki aksiyomları sağlamasına göre karakterize edilir.

Tanım 2.1.2 [5] $A \neq \emptyset$ ve $*$, A üzerinde bir ikili işlem olsun.

- i. $\forall a, b, c \in A$ için $(a * b) * c = a * (b * c)$ ise $*$ işlemi birleşmelidir denir,
- ii. $\forall a, b \in A$ için $a * b = b * a$ oluyorsa $*$ değişme özelliğine sahiptir denir,
- iii. $\exists e \in A, \forall a \in A$ için $e * a = a$ ve $a * e = a$ ise e elemanı $*$ işleminin birim elemanı vardır denilir,
- iv. $\forall a \in A$ için $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ eşitliği sağlanıyorsa a^{-1} elemanına a nın tersi denir.

Teorem 2.1.1 [5] $(A,*)$ bir cebirsel yapı olsun. A nın $*$ işlemine göre birim elemanı varsa tektir.

İspat e_1 ve e_2 gibi iki tane birim elemanı olduğunu varsayalım. Bu takdirde, e_1 birim eleman olduğundan $e_1 * e_2 = e_2$

ve

e_2 birim eleman olduğundan $e_1 * e_2 = e_1$

olup buradan $e_1 = e_2$ olduğu görülür. Böylece birim eleman tektir.

Teorem 2.1.2 [5] $*$, A kümesi üzerinde birleşmeli ve e birim elemanına sahip bir ikili işlem olsun. Bu durumda eğer a nın tersi varsa tektir.

İspat $a \in A$ alalım. a nın a' ve a'' gibi iki tersi olduğunu varsayalım. a' , a nın bir tersi olduğundan

$$a * a' = a' * a = e \quad (2.1)$$

a'' , a nın bir tersi olduğundan

$$a * a'' = a'' * a = e \quad (2.2)$$

dir. (2.1) den $a' * a = e$ eşitliğini ele alalım. Bu eşitliğin her iki tarafı a'' ile sağdan işleme tabi tutulursa,

$$(a' * a) * a'' = e * a$$

olur. Bu durumda, birleşme özelliği ile

$$a' * (a * a'') = a' * e = a'$$

$$a' * e = e * a''$$

$$a' = a''$$

elde edilir. Dolayısıyla a nın tersi tektir.

2.2 Yarı-Grup ve Monoid

Tanım 2.2.1 [4] Sadece birleşme aksiyomunu sağlayan bir $(A, \cdot)$ cebirsel yapısına bir yarı-grup denir.

Örnek 2.2.1 [4] Tam sayıların $\mathbb{Z}$ kümesi çarpma işlemi altında bir yarı-gruptur.

Örnek 2.2.2 [4] $\{a\}$ tek nokta kümesi üzerinde tanımlanan $a * a = a$ işlemi ile birlikte bir yarı-gruptur. Buna aşikâr (trivial) yarı-grup adı verilir.

Tanım 2.2.2 [4] $(S, *)$ ve $(T, \cdot)$ iki yarı-grup olmak üzere bir $f: S \rightarrow T$ dönüşümü her $s_1, s_2 \in S$ için $f(s_1 * s_2) = f(s_1) \cdot f(s_2)$ eşitliğini sağlıyorsa f ye bir yarı-grup homomorfizmi denir.

Teorem 2.2.1 [4] İki yarı-grup homomorfizminin bileşkesi bir yarı-grup homomorfizmidir.

İspat $(S, *)$, $(T, \cdot)$ ve $(V, \oplus)$ üç yarı-grup olsun. $f: (S, *) \rightarrow (T, \cdot)$ ve $g: (T, \cdot) \rightarrow (V, \oplus)$ yarı-grup homomorfizmlerini ele alalım. Bu durumda, her $s_1, s_2 \in S$ için

$$\begin{aligned} (g \circ f)(s_1 * s_2) &= g(f(s_1 * s_2)) \\ &= g(f(s_1) \cdot f(s_2)) \\ &= g(f(s_1)) \oplus g(f(s_2)) \\ &= (g \circ f)(s_1) \oplus (g \circ f)(s_2) \end{aligned}$$

olup buradan $g \circ f: (S, *) \rightarrow (V, \oplus)$ bileşke dönüşümü bir yarı-grup homomorfizmidir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Tanım 2.2.3 [4] Bir yarı-gruptan kendisine giden bir yarı-grup homomorfizmine bir yarı-grup endomorfizmi denir.

Tanım 2.2.4 [4] $(A, \cdot)$ cebirsel yapısı aşağıdaki üç koşulu sağlıyorsa $(A, \cdot)$ çiftine bir monoid denir:

- i. Her $a, b, c \in A$ için $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ olmalı (Birleşme)
- ii. Her $a \in A$ için $e \in A$ olacak şekilde $e \cdot a = a \cdot e = a$ olmalı (Birim eleman)

Diğer bir ifadeyle birim elemanı olan bir yarı-grup, monoid olarak adlandırılır.

Örnek 2.2.3 [4] X herhangi bir küme ve $P(X)$ onun kuvvet kümesi olsun.

$P(X)$ kümesi üzerinde $\cap$ işleminin birleşme özelliğini sağladığı açıktır. Kesişim işlemine göre birim eleman X kümesinin kendisi olup $(P(X), \cap)$ bir monoiddir.

$P(X)$ kümesi üzerinde birleşme işleminin birleşme aksiyomunu sağladığı açıktır. Birim eleman ise $\emptyset$ dir. Böylece $(P(X), \cup)$ ikilisi bir monoiddir.

Örnek 2.2.4 [4] $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi üzerinde $x * y = \max\{x, y\}$ işlemi tanımlansın. $(\mathbb{N}, *)$ bir monoiddir. Öncelikle birleşme aksiyomunun sağlandığını gösterelim. $\mathbb{N}$ de seçilen keyfi üç sayı için 6 farklı durum mevcuttur.

1. $x < y < z$ olsun.

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

$$y * z = x * z$$

$$z = z.$$

2. $y < x < z$ olsun.

$$(y * x) * z = y * (x * z)$$

$$x * z = y * z$$

$$z = z.$$

3. $z < y < x$ olsun.

$$(z * y) * x = z * (y * x)$$

$$y * x = z * x$$

$$x = x.$$

Diğer 3 durumda da birleşme özelliğinin sağlandığı kolayca gösterilir. Bu nedenle $(\mathbb{N}, *)$ yarı-gruptur. $(\mathbb{N}, *)$ nin e birim elemanı 0 dır. Çünkü herhangi $x \in \mathbb{N}$ için $x * e = e * x = x$ aksiyomu ancak $e = 0$ ile sağlamaktadır. Dolayısıyla $(\mathbb{N}, *)$ bir monoiddir.

Tanım 2.2.5 [4] $(A, *)$, e birim elemanı ile bir monoid olsun. e yi içeren bir $B \subseteq A$ altkümesi $*$ işlemi ile bir monoid oluyorsa $(B, *)$ ikilisine $(A, *)$ ın bir altmonoidi denir.

Tanım 2.2.6 [4] $(A, *)$ ve (B, Δ) iki monoid olsun. Bu durumda bir $f: (A, *) \rightarrow (B, \Delta)$ dönüşümü

$$f(a * b) = f(a) \Delta f(b), \forall a, b \in A$$

şartını sağlıyorsa f ye bir monoid homomorfizmi adı verilir.

Uyarı 2.2.1 [4] Birimin tekliğinden dolayı e_A A nın birimi ve e_B B nin birimi ise $f(e_A) = e_B$ olduğu aşikârdır.

Teorem 2.2.2 [4] Bir yarı-grubun tüm yarı-grup endomorfizmlerinin kümesi, dönüşümlerin bileşkesi işlemi altında bir yarı-gruptur.

İspat $(S,*)$ bir yarı-grup olmak üzere tüm $f: (S,*) \rightarrow (S,*)$ yarı-grup homomorfizmlerinin kümesi F olsun. $(F, \circ)$ ikilisinin bir yarı-grup olduğunu göstermeliyiz. Her $f, g \in F$ için $f \circ g \in F$ olduğu açıktır. Dolayısıyla kapalılık özelliği sağlanır. Her $f, g, h \in F$ ve $s \in S$ için

$$\begin{aligned} ((f \circ g) \circ h)(s) &= (f \circ g)(h(s)) \\ &= f(g(h(s))) \\ &= f((g \circ h)(s)) \\ &= (f \circ (g \circ h))(s) \end{aligned}$$

olup birleşme özelliği de sağlanır. Böylece $(F, \circ)$ bir yarı-gruptur.

Uyarı 2.2.2 [4] Esasen, $(F, \circ)$ bir monoiddir. Çünkü I birim dönüşümü $\circ$ bileşke işlemine göre birim elemandır. Dolayısıyla, bir yarı-grubun tüm yarı-grup homomorfizmlerinin kümesi bir monoiddir.

Teorem 2.2.3 [4] $(S,*)$ bir yarı-grup olsun. Bu durumda bir $\varphi: S \rightarrow S^S$ homomorfizmi vardır, burada S^S , S den S ye fonksiyonların kümesini göstermektedir ve $\circ$ bileşke işlemi ile bir yarı-gruptur.

İspat Herhangi bir $a \in S$ için $f_a: S \rightarrow S$ fonksiyonunu her $b \in S$ için $f_a(b) = a * b$ şeklinde tanımlayalım. Şimdi $\varphi: S \rightarrow S^S$ fonksiyonu her $a \in S$ için $\varphi(a) = f_a$ ile tanımlansın. Açıkça $a, b \in S$ ise $a * b \in S$ dir. Bu durumda $\varphi(a * b) = f_{a*b}$ dir. Buradan her $c \in S$ için

$$f_{a*b}(c) = (a * b) * c = a * (b * c) = f_a(b * c) = f_a(f_b(c)) = f_a \circ f_b(c)$$

olup $f_{a*b} = f_a \circ f_b$ gelir. Yani $\varphi(a * b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$ olup ispat böylece tamamlanmış olur.

Tanım 2.2.7 [4] $(X,*)$ bir cebirsel yapı ve X üzerinde bir denklik bağıntısı R olsun. Her $x, y, z, t \in X$ için xRz ve yRt olması $x * yRz * t$ olmasını gerektiriyorsa R ye X üzerinde bir kongrüans denir.

Teorem 2.2.4 [4] $(S,*)$ ve $(T, \oplus)$ iki yarı-grup ve $g: (S,*) \rightarrow (T, \oplus)$ bir yarı-grup homomorfizmi olsun. Bu durumda g homomorfizmine karşılık $(S,*)$ üzerinde aşağıdaki gibi tanımlı bir R kongrüans bağıntısı vardır:

$$xRy \Leftrightarrow g(x) = g(y), \quad \forall x, y \in S$$

İspat R nin S üzerinde bir denklik bağıntısı olduğu kolayca görülür. $x_1, x_2, x'_1, x'_2 \in S$ için $x_1 R x'_1$ ve $x_2 R x'_2$ olsun. Buradan

$$g(x_1 * x_2) = g(x_1) \oplus g(x_2) = g(x'_1) \oplus g(x'_2) = g(x'_1 * x'_2)$$

olup R nin $(S, *)$ üzerinde bir kongrüans bağıntısı olduğu gelir.

Aşağıdaki teorem bir yarı-grup homomorfizminin sağladığı özellikleri bir arada vermektedir.

Teorem 2.2.5 [4] Bir $g: (S, *) \rightarrow (T, \circ)$ yarı-grup homomorfizmi

- i. Birleşimlilik özelliğini korur.
- ii. Eşgüçlülüğü korur.
- iii. Değişimliliği korur.

İspat $a, b, c \in S$ olsun.

$$\begin{aligned} \text{i. } g[(a * b) * c] &= g(a * b) \circ g(c) \\ &= (g(a) \circ g(b)) \circ g(c) \end{aligned} \quad (2.3)$$

ve

$$\begin{aligned} g[a * (b * c)] &= g(a) \circ g(b * c) \\ &= g(a) \circ (g(b) \circ g(c)) \end{aligned} \quad (2.4)$$

dir. Diğer taraftan S bir yarı-grup olduğundan her $a, b, c \in S$ için

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

dir. Buradan $g[(a * b) * c] = g[a * (b * c)]$ olup

$$[g(a) \circ g(b)] \circ g(c) = g(a) \circ [g(b) \circ g(c)]$$

elde edilir. Yani birleşimlilik korunur.

- ii. $a \in S$ bir eşgüçlü eleman olsun. Bu durumda

$$a * a = a \Rightarrow g(a * a) = g(a) \Rightarrow g(a) \circ g(a) = g(a)$$

olup bu da $g(a)$ nın T de eşgüçlü olması demektir.

iii. $a, b \in S$ olsun. $a * b = b * a$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$g(a * b) = g(b * a)$$

$$g(a) \circ g(b) = g(b) \circ g(a)$$

dir. Bu da “ $\circ$ ” işleminin T de değişimli olduğunu gösterir.

2.3 Grup

Bu bölümde bilimin pek çok alanında yaygın bir şekilde kullanılan grup kavramı ile ilgili temel bilgilere yer verilecektir.

Tanım 2.3.1 [21] A bir küme ve $*$, A üzerinde bir ikili işlem olsun. Eğer aşağıdaki 4 koşul sağlanıyorsa $(A, *)$ bir gruptur:

- i. $\forall a, b \in A$ için $a * b \in A$ ve $b * a \in A$ (Kapalılık)
- ii. $\forall a, b, c \in A$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$ (Birleşme)
- iii. $\forall a \in A$ için $a * e = e * a = a$ olacak şekilde $e \in A$ vardır. (Birim eleman)
- iv. e elemanı A nın birim elemanı olsun. $\forall a \in A$ için $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ olacak şekilde $\exists a^{-1} \in A$ vardır. (Ters eleman)

Teorem 2.3.1 [21] Bir $(A, *)$ grubunun birim elemanı tektir.

İspat e_1 ve e_2 iki birim eleman olsun. e birim eleman olduğundan $\forall a \in A$ için $a * e = e * a = a$ olur. $a = e_1$ olarak alınırsa $e_1 * e = e * e_1 = e_1$ olur. Aynı şekilde $a = e_2$ olarak alınırsa $e_2 * e = e * e_2 = e_2$ olur. Buradan $e_1 = e_2$ olduğu görülür, yani birim eleman tektir.

Teorem 2.3.2 [21] Bir grupta her elemanın sadece bir tersi vardır.

İspat $(A, *)$ grubunun birim elemanı e olsun. Her $a \in A$ için a elemanının a_1 ve a_2 gibi iki tane tersi olduğunu varsayalım. O halde $a * a_1 = a_1 * a = a * a_2 = a_2 * a = e$ olur. Buradan $a_1 = a_2$ olur. Yani her elemanın tersi tektir.

Tanım 2.3.2 [15] Bir $(A, *)$ grubu her $x, y \in A$ için $x * y = y * x$ eşitliğini sağlarsa ona abelyan grup denilir.

Örnek 2.3.1 $(\mathbb{Z}, +), (Q, +), (\mathbb{R}, +)$ birer abelyen gruptur. Ayrıca $(Q \setminus \{0\}, \cdot), (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot), (C \setminus \{0\}, \cdot)$ birer abelyen gruptur.

Teorem 2.3.3 [15] $(A, \cdot)$ bir grup $a \in A$ ise $(a^{-1})^{-1} = a$ dır.

İspat A nın çarpma işlemine göre birim eleman e olsun. Buna göre,

$$a \cdot a^{-1} = e \text{ ve } (a^{-1})^{-1} \cdot a^{-1} = e$$

önergeleri doğru olur. Buradan,

$$a \cdot a^{-1} = (a^{-1})^{-1} \cdot a^{-1}$$

elde edilir. Son önermede eşitliğin her iki tarafı da sağdan a ile işleme tabi tutulursa,

$$a = (a^{-1})^{-1}$$

bulunur.

Teorem 2.3.4 [15] $(A, \cdot)$ bir grup olsun. Bu durumda, $a, b \in A$ ise $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$ dir.

İspat $a \cdot b$ nin çarpma işlemine göre tersinin $(a \cdot b)^{-1}$ olduğu biliniyor. Öte yandan,

$$(a \cdot b) \cdot (b^{-1} \cdot a^{-1}) = a \cdot (b \cdot b^{-1}) \cdot a^{-1} = (a \cdot e) \cdot a^{-1} = a \cdot a^{-1} = e$$

ve

$$(b^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot (a \cdot b) = b^{-1} \cdot (a^{-1} \cdot a) \cdot b = b^{-1} \cdot (e \cdot b) = b^{-1} \cdot b = e$$

olduğundan $a \cdot b$ nin çarpma işlemine göre tersi $b^{-1} \cdot a^{-1}$ dir.

Bir $(A, \cdot)$ grubunda A nın her elemanının bir tek tersi olduğundan,

$$(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$$

elde edilir.

Tanım 2.3.3 [21] A bir grup ve B de A nın boş olmayan bir altkümesi olsun. Eğer B kümesi A da tanımlanan grup işlemi ile bir grup oluyorsa B ye A nın bir altgrubu denir ve $B \leq A$ şeklinde yazılır.

Örnek 2.3.2 [21] $A = \{1, -1, i, -i\}$ kümesi çarpma işlemine göre bir gruptur. $B = \{1, -1\} \subseteq A$ olsun. B kümesi çarpma işlemine göre kapalıdır, birleşme özelliğini sağlar ve

$e = 1$ birim elemandır. Ayrıca $1^{-1} = 1, (-1)^{-1} = -1$ dir. Böylece B çarpma işlemine göre A nın bir altgrubudur.

Örnek 2.3.3 [15] $(A, *)$ ikilisi e birim elemanına sahip bir grup olsun. Bu durumda $\{e\} \subseteq A$ ve $A \subseteq A$ olduğundan $(\{e\}, *)$ ve $(A, *)$ birer altgrup olup bunlara aşikâr altgruplar denilir.

Teorem 2.3.5 [21] $(A, .)$ bir grup ve $B \subseteq A$ olsun. Bu takdirde,

$$(H, .) \text{ altgruptur.} \Leftrightarrow \forall a, b \in B \text{ için } a \cdot b^{-1} \in B$$

dir.

İspat ($\Rightarrow$): $(B, .)$ altgrup olsun. Her $a, b \in B$ için $a \cdot b^{-1} \in B$ olduğunu göstereceğiz. B altgrup olduğundan $b \in B$ için $b^{-1} \in B$ dir. Kapalılık özelliği gereğince de $a \cdot b^{-1} \in B$ olur. ($\Leftarrow$): Her $a, b \in B$ için $a \cdot b^{-1} \in B$ olsun. B nin grup aksiyomlarını sağladığını göstermeliyiz.

Hipotezde b yerine a alınırsa, $a \cdot a^{-1} \in B$, yani $e \in B$ elde edilir. Dolayısıyla birim eleman özelliği sağlanır.

$a \cdot b^{-1} \in B$ ifadesinde a yerine e alınırsa $\forall b \in B$ için $b^{-1} \in B$ gelir. Yani ters eleman özelliği de sağlanır.

Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} \forall a, b \in B &\Rightarrow a \in B \text{ ve } b^{-1} \in B \\ &\Rightarrow a \cdot (b^{-1})^{-1} \in B \\ &\Rightarrow a \cdot b \in B \end{aligned}$$

olup $B, \cdot$ işlemine göre kapalıdır. Birleşme özelliğinin sağladığı da kolayca gösterilir. Böylece $(H, \cdot)$ bir gruptur. Dolayısıyla da G nin altgrubudur.

Tanım 2.3.4 [15] $(A, *)$ ve (B, Δ) iki grup olsun. Bir $f(A, *) \rightarrow (B, \Delta)$ dönüşümü

$$f(a * b) = f(a) \Delta f(b), \quad \forall a, b \in A$$

şartını sağlıyorsa f ye bir grup homomorfizmi adı verilir.

Örnek 2.3.4 [15] $f: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R} - \{0\}, \cdot), x \rightarrow f(x) = 2^x$ ile tanımlı fonksiyonu verilsin. Bu durumda $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $f(x + y) = 2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y = f(x) \cdot f(y)$ olduğundan f bir homomorfizmidir.

Tanım 2.3.5 [21] A bir grup, N de A nın bir altgrubu olsun. Eğer her $a \in A$ için $aN = Na$ ise N ye A nın bir normal altgrubu denir ve $N \triangleleft A$ yazılır.

Örnek 2.3.5 [21] Bir A grubunun A ve $\{e_A\}$ aşikâr altgrupları normal altgruplarıdır. Gerçekten, her $a \in A$ için $aA = Aa = A$ ve $a\{e_A\} = \{e_A\}a = \{a\}$ dır.

Tanım 2.3.6 [15] N , bir G grubunun bir normal altgrubu olsun. G de N nin G/N bölüm grubu,

$$Nx \cdot Ny = N(xy)$$

grup işlemi ile donatılmış G de N nin tüm kosetlerinin kümesidir.

Tanım 2.3.7 [15] G ve H iki grup olsun. $G \times H$ çarpım kümesi

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1g_2, h_1h_2), \forall g_1, g_2 \in G, \forall h_1, h_2 \in H$$

işlemi ile bir gruptur. Bu gruba G ile H nın çarpım grubu denir. Birim eleman $e = (e_G, e_H)$ dır.

Tanım 2.3.8 [15] $f: G \rightarrow H$ bir grup homomorfizmi olsun. $\text{Ker}f = \{a \in G \mid f(a) = e_H\}$ kümesine f homomorfizminin çekirdeği (Kernel) denir.

2.4 Çaprazlanmış Modül

Çaprazlanmış modül, cebirsel topoloji ve kategori teorisinde kendisine oldukça geniş bir uygulama alanı bulan bir cebirsel yapıdır ve özellikle homotopi teorisinin daha yüksek boyutlu versiyonlarında önemli bir rol oynamaktadır. İlk olarak J.H.C. Whitehead tarafından homotopi 2-tiplerini tanımlamak için geliştirilmiştir.

Çaprazlanmış modül tanımını vermeden önce bir grubun bir küme üzerine etkisi kavramını hatırlatalım.

Tanım 2.4.1 [10] X bir küme ve G bir grup olsun. G nin X üzerine etkisi aşağıdaki iki şartı sağlayan bir

$$\begin{aligned} \cdot : G \times X &\rightarrow X, \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

dönüşümüdür:

- i. $e \cdot x = x, \forall x \in X$
- ii. $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x, \forall g, h \in G, \forall x \in X.$

Bu durumda X e bir G -küme denir.

Örnek 2.4.1 [10] G bir çarpımsal grup, $H \leq G$ olsun. Her $h \in H$ ve $x \in G$ için

$$\begin{aligned} * : H \times G &\rightarrow G \\ (h, x) &\rightarrow h * x = h x h^{-1} \end{aligned}$$

ile tanımlanan fonksiyon H nin G üzerine bir etkisini verir.

- i. $H \leq G$ olduğundan $e \in H$ tır. Böylece $e \in H$ ve $g \in G$ için $e * g = e g e^{-1} = g$ dir.
- ii. Her $h_1, h_2 \in H$ ve $g \in G$ için $(h_1 h_2) * g = (h_1 h_2) g (h_1 h_2)^{-1} = h_1 h_2 g h_2^{-1} h_1^{-1} = h_1 (h_2 * g) h_1^{-1} = h_1 * (h_2 * g)$

İki koşulu da sağladığından H nin G üzerine etkisi vardır. H nin G üzerindeki bu etkisine eşlenik etkisi denir. G nin kendi üzerine de eşlenik etkisi vardır.

Uyarı 2.4.1 [10] Bir $\varphi: G \times X \rightarrow X$ etkisi verildiğinde her $g \in G$ için bir

$$\begin{aligned} \varphi_g : X &\rightarrow X \\ x &\mapsto \varphi_g(x) = g \cdot x, \forall x \in X \end{aligned}$$

fonksiyonu tanımlıdır. φ_g fonksiyonu $\varphi_{g^{-1}}$ ters fonksiyonuna sahiptir. Şöyle ki

$$\varphi_{g^{-1}}(\varphi_g(x)) = \varphi_{g^{-1}}(g \cdot x) = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = (g^{-1}g) \cdot x = e \cdot x = x$$

olup $\varphi_{g^{-1}} \circ \varphi_g = I_X$ dir. Benzer şekilde $\varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}} = I_X$ olduğu gösterilir. Dolayısıyla φ bir bire-bir örten dönüşüm olup X in bir permütasyonudur. Ayrıca $\varphi_g \circ \varphi_h = \varphi_{gh}$ olduğu kolayca gösterilir. Böylece G grubundan X in permütasyonlarının $\mathfrak{S}_X$ grubuna giden ve yine φ ile gösterilen $\varphi: G \rightarrow \mathfrak{S}_X, \varphi(g) = \varphi_g$ grup homomorfizmi vardır.

Tersine, herhangi bir $\varphi: G \rightarrow \mathfrak{S}_X$ grup homomorfizmi verildiğinde bir

$$\begin{aligned} \cdot : G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x = \varphi(g)(x) \end{aligned}$$

grup etkisinin doğal olarak var olduğu kolayca görülür.

Tanım 2.4.2 [10] X ve Y herhangi iki G – kümesi olsun. Bir $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonuna, eşdeğerdir (ya da bir G – dönüşümdür) denir; eğer tüm $x \in X$ ve $g \in G$ için

$$f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$$

eşitliği sağlanıyorsa.

Artık çaprazlanmış modül tanımını verebiliriz.

Tanım 2.4.3 [10] Bir (G, K, ∂) çaprazlanmış modül (crossed module), aşağıdaki iki eşitliği sağlayan şu verilerden oluşur:

- i. Bir G grubu ve bir K grubu,
- ii. Bir $\partial: K \rightarrow G$ grup homomorfizmi (sınır dönüşümü adı verilen),
- iii. G grubunun, K üzerine etkisi (bu etkiyi ${}^g k$ ile gösteririz).

1.Peiffer Eşitliği I: $\partial({}^g k) = g\partial(k)g^{-1}, \forall g \in G, k \in K$.

2.Peiffer Eşitliği II: $\partial({}^{k'} k) = kk'k^{-1}, \forall k, k' \in K$.

Örnek 2.4.2 [10] Bir G grubu verildiğinde sınır dönüşümü olarak $I: G \rightarrow G$ birim dönüşümü (veya $i: G \rightarrow G$ dahil etme dönüşümü) alınarak adı verilen (G, G, I) çaprazlanmış modülü elde edilir. Bu çaprazlanmış modülde etki G nin işlemidir.

Örnek 2.4.3 [10] G bir grup ve N onun normal altgrubu olsun ∂ sınır dönüşümü olarak $i: N \rightarrow G$ dahil etme dönüşümünü ve G nin N üzerine

$$\cdot : G \times N \rightarrow N,$$

$$(g, x) \mapsto g \cdot x = gxg^{-1}$$

eşlenik (konjuge) etkisini ele alalım. Bu durumda Peiffer eşitlikleri açıkça sağlanır.

Böylece (G, N, i) bir çaprazlanmış modüldür.

Tanım 2.4.4 [10] Bir (G, K, ∂) çaprazlanmış modülünün (G', K', ∂') alt çaprazlanmış modülü aşağıdakilerle belirlenen bir çaprazlanmış modüldür:

- i. G', G nin ve K', K nin alt grubudur.
- ii. ∂', ∂ nin K' ne kısıtlamasıdır.
- iii. G' nin K' üzerine etkisi G nin K üzerine etkisinden indirgenir.

Örnek 2.4.4 [10] Örnek 2.4.3 deki (G, N, i) çaprazlanmış modülü Örnek 2.4.2 deki (G, G, I) çaprazlanmış modülünün bir alt çaprazlanmış modülüdür.

Tanım 2.4.5 [10] Bir $(\pi, \rho)(G, K, \partial) \rightarrow (H, N, \delta)$ çaprazlanmış modül homomorfizmi $\pi: G \rightarrow H$ ve $\rho: K \rightarrow N$ grup homomorfizmlerinin bir ikilisidir öyle ki her $g \in G$ ve her $k \in K$ için

$$\delta(\pi(g)) = \rho(\partial(g)) \quad \text{ve} \quad \rho(g \cdot k) = \pi(g) \cdot \rho(k)$$

eşitlikleri sağlanır.

2.5 Halka

Tanım 2.5.1 [21] Boştan farklı bir R kümesi üzerinde “+” toplama ve “ $\cdot$ ” çarpma işlemleri tanımlı olsun. $(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısı

- i. $(R, +)$ değişmeli grup
- ii. $(R, \cdot)$ yarı grup
- iii. Her $r, s, t \in R$ için

$$r \cdot (s + t) = r \cdot s + r \cdot t$$

$$(r + s) \cdot t = r \cdot t + s \cdot t$$

koşullarını gerçekleştiriyorsa $(R, +, \cdot)$ üçlüsüne bir halka denir.

Genellikle “ $(R, +, \cdot)$ ” halkası yerine “ R halkası” ifadesi kullanılır.

Tanım 2.5.2 [21] $(R, +, \cdot)$ bir halka olsun.

- i. Keyfi $r \in R$ için $e \cdot r = r \cdot e = r$ olacak biçimde $e \in R$ varsa, e ye R halkasının birimi denir ve R ye bir birimli halka adı verilir.
- ii. Keyfi $r, s \in R$ için $r \cdot s = s \cdot r$ ise R ye değişmeli halka denir.

R bir halka ve $r, s \in R$ olmak üzere $r + (-s)$ elemanı $r - s$ ile, $r \cdot s$ elemanı da rs ile gösterilir. Halkanın toplamaya göre birimi 0 ile gösterilir ve bu elemana halkanın sıfırı denir. Ayrıca birimli halkada birim eleman tektir. Birimli bir R halkasının birimi bazen e yerine 1_R ile de gösterilir.

Örnek 2.5.1 [21] $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi, Q rasyonel sayılar kümesi, IR reel sayılar kümesi ve

C kompleks sayılar kümesi bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre birer birimli ve değişmeli halkadır.

Tanım 2.5.3 [21] R bir halka olsun. $C(R) = \{a \in R \mid \text{her } b \in R \text{ için } ab = ba\}$ kümesine halkanın merkezi adı verilir. Bu durumda,

$$R \text{ halkası değişmelidir ancak ve ancak } C(R) = R$$

dir.

Tanım 2.5.4 [21] R ve S iki halka olmak üzere $R \times S$ kartezyen kümesi üzerinde toplama ve çarpma işlemleri sırasıyla:

$$(r_1, s_1) + (r_2, s_2) = (r_1 + r_2, s_1 + s_2)$$

$$(r_1, s_1) \cdot (r_2, s_2) = (r_1 r_2, s_1 s_2)$$

ile tanımlansın. Bu durumda $R \times S$ kümesi bir halka olup, bu halkaya R ile S nin direkt çarpımı denir.

Tanım 2.5.5 [21] R birimli halka ve $1_R \neq 0_R$ olsun. $a \neq 0_R \in R$ için $ab = ba = 1_R$ olacak şekilde bir $b \in R$ varsa b ye a nın çarpımsal tersi denir.

Birimli bir R halkasında $a \neq 0_R \in R$ elemanının çarpımsal tersi varsa tektir. $a \in R$ nin çarpımsal tersi a^{-1} ile gösterilir.

Teorem 2.5.1 [21] R bir halka olsun. Her $r \in R$ için $0_R \cdot r = r \cdot 0_R = 0_R$ dir.

Teorem 2.5.2 [21] R bir halka ve $r, s, t \in R$ olmak üzere

i. $(-r) \cdot s = -(r \cdot s)$

ii. $r \cdot (-s) = -(r \cdot s)$

iii. $(-r) \cdot (-s) = r \cdot s$

iv. $r \cdot (s - t) = r \cdot s - r \cdot t$

v. $(r - s) \cdot t = r \cdot t - s \cdot t$

özellikleri sağlanır.

Tanım 2.5.6 [21] Bir R bir halkasının boş olmayan bir S altkümesi R nin işlemlerine göre halka aksiyomlarını sağlarsa S ye R nin bir alt halkası adı verilir.

Örnek 2.5.2 [21] $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $n\mathbb{Z} = \{nx | x \in \mathbb{Z}\}$ kümesi $\mathbb{Z}$ nin bir alt halkasıdır. Tek tamsayılar kümesi toplamaya göre kapalı olmadığından $\mathbb{Z}$ nin bir alt halkası değildir.

Uyarı 2.5.1 Değişmeli bir halkanın her alt halkası değişmelidir. Fakat birimli bir halkanın her alt halkası birimli olmak zorunda değildir.

Teorem 2.5.3 [21] Bir R halkasının boş olmayan bir $S \subseteq R$ altkümesi R nin bir alt halkasıdır gerek ve yeter şart keyfi $r, s \in S$ için $r-s, r \cdot s \in S$ dir.

Tanım 2.5.7 [21] $(R, +, \cdot)$ ve $(R', +', \cdot')$ iki halka olmak üzere $f: R \rightarrow R'$ dönüşümü her $r, s \in R$ için

$$f(r + s) = f(r) + f'(s)$$

$$f(r \cdot s) = f(r) \cdot f'(s)$$

eşitliklerini sağlıyorsa f ye bir halka homomorfizmi adı verilir.

Örnek 2.5.3 [21] R ve S iki halka olmak üzere $\forall a \in R$ için $f(a) = 0_S$ ile tanımlı $f: R \rightarrow S$ dönüşümü bir halka homomorfizmidir. Gerçekten de $\forall a, b \in R$ için $f(a) = f(b) = 0_S$ olup $f(a + b) = 0_S = 0_S + 0_S = f(a) + f(b)$ ve $f(ab) = 0_S = 0_S \cdot 0_S = f(a)f(b)$ olur.

Tanım 2.5.8 [21] Bir $f: R \rightarrow R'$ halka homomorfizmi

- i. Eğer f bire-bir ise monomorfizm
- ii. Eğer f örten ise epimorfizm
- iii. Eğer f bire-bir ve örten ise izomorfizm

adı verilir. Ayrıca bir $f: R \rightarrow R$ halka izomorfizmine R halkasının otomorfizmi denir.

Örnek 2.5.4 [21] $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n, x \rightarrow f(x) = \bar{x}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ için $f(x + y) = \overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y} = f(x) + f(y)$ ve $f(xy) = \overline{xy} = \bar{x} \cdot \bar{y} = f(x)f(y)$ olduğundan f bir halka homomorfizmi olur. Ayrıca $\forall \bar{x} \in \mathbb{Z}_n$ için $f(x) = \bar{x}$ olduğundan f örtendir.

3. BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ CEBİRSEL YAPILAR

Bu bölümde, önceki bölümde yer verilen cebirsel yapıların genelleştirilmiş versiyonları verilmektedir. Ayrıca bu yapılarla ilgili temel bilgiler örnekler ile birlikte detaylandırılmıştır.

3.1 Genelleştirilmiş Monoidler

Tanım 3.1.1 [20] Bir genelleştirilmiş monoid çarpım denilen bir “ $\cdot$ ” birleşimli ikili işlem ile birlikte boştan farklı bir A kümesidir öyle ki her $x \in A$ için için $x \cdot e(x) = e(x) \cdot x = x$ olacak şekilde tek bir $e(x) \in A$ vardır. Bu $e(x)$ elemanına bir lokal birim (lokal nötr eleman) denir.

Tanım 3.1.2 [20] Bir $(A, \cdot)$ genelleştirilmiş monoidi tüm $x, y \in A$ için $e(xy) = e(x) \cdot e(y)$ şartını sağlıyorsa normal olarak adlandırılır.

Önerme 3.1.1 [20] A bir genelleştirilmiş monoid olsun. Eğer $a \in A$, A nın bir tersi alınabilir elemanı ise, o zaman a elemanı A da bir tek ters elemana sahiptir.

a nın tersi a^{-1} ile ve A nın tersi alınabilir elemanlarının kümesi

$$U(A) = \{x \in A \mid \exists x^{-1} \text{ vardır öyle ki } x^{-1} x = x^{-1} x = e(x)\}$$

ile gösterilir.

Önerme 3.1.2 [20] Eğer A bir genelleştirilmiş monoid ve $a \in A$ ise, $e(e(a)) = e(a)$ ve $e(a)$ eş güçlüdür (idempotenttir).

İspat $a \in A$ verilmiş olsun. O zaman $a = ae(a) = e(a)a$ olacak şekilde tek bir $e(a) \in A$ elemanı vardır.

Ayrıca $e(e(a))e(a) = e(a)$ dir. Son eşitliğin her iki tarafını sağdan a ile çarparsak şunu elde ederiz:

$$[e(e(a))e(a)]a = e(a)a$$

Buradan, birleşme özelliği yardımıyla $e(e(a))[e(a)a] = a$ elde edilir.

Böylece $e(e(a))a = a$ dır. Benzer şekilde, $ae(e(a)) = a$ elde edilir. $e(a)$ nın tekliği $e(e(a)) = e(a)$ olduğunu verir.

Diğer taraftan

$$[e(a)]^2 = e(a)e(a) = e(a), \quad e(e(a)) = e(a)$$

dır. Dolayısıyla $e(a)$ eşgüçlüdür.

Önerme 3.1.3 [20] $(A, \cdot)$ bir genelleştirilmiş monoid ve $a \in U(A)$ olsun.

Bu durumda,

- a) $e(a^{-1}) = e(a)$
- b) $(a^{-1})^{-1} = a$

dir.

Önerme 3.1.4 [20] $(A, \cdot)$ bir normal genelleştirilmiş monoid ve $a, b \in U(A)$ olsun. Eğer $e(a)b^{-1} = b^{-1}e(a)$ ise o zaman $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ dir.

Bir genelleştirilmiş monoidin altmonoidi ve genelleştirilmiş monoid homomorfizmi kavramları klasik cebir teorisindeki benzer olarak aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

Tanım 3.1.3 [20] $(A, \cdot)$ bir genelleştirilmiş monoid olsun. Boş olmayan bir $B \subseteq A$ altkümesine A nın bir genelleştirilmiş altmonoidi denir. Eğer keyfi $x, y \in B$ için $xy \in B$ ve keyfi $x \in B$ için $e(x) \in B$ ise.

Teorem 3.1.1 [20] $(A, \cdot)$ genelleştirilmiş monoidinin genelleştirilmiş altmonoidlerinin bir ailesi $\{B_i; i \in I\}$ ve $\bigcap_{i \in I} B_i \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $\bigcap_{i \in I} B_i$, A nın bir genelleştirilmiş altmonoididir.

Önerme 3.1.5 [20] Eğer $(A, \cdot)$ bir genelleştirilmiş monoid ve $a \in A$ belirli bir eleman olsun. Bu durumda $A_a = \{x \in A | e(x) = e(a)\}$ ile gösterilen küme A nın bir genelleştirilmiş altmonoididir. Aslında A_a bir monoiddir.

İspat Tüm $x, y \in A_a$ için $e(x) = e(y) = e(a)$ dır. Buradan

$$(xy)e(a) = x(ye(a)) = xy$$

dir. Benzer şekilde

$$e(a)xy = (e(a)x)y = (e(x)x)y = xy$$

dir. Böylece $e(xy) = e(a)$, yani $xy \in A_a$ dir. Önerme 3.1.2 den dolayı eğer $x \in A_a$ ise $e(e(x)) = e(x) = e(a)$ dir. Dolayısıyla $e(x) \in A_a$ dir.

Uyarı 3.1.1 [20] Bir A normal genelleştirilmiş monoidinde lokal birimlerin kümesi $E(A) = \{e(x)|x \in A\}$, A genelleştirilmiş monoidinin bir genelleştirilmiş altmonoididir.

Uyarı 3.1.2 [20] Her monoid bir genelleştirilmiş monoid değildir. Örneğin, mod 6 ya göre kalan sınıflarının kümesi $\mathbb{Z}_6$, $\hat{x}.\hat{y} = \widehat{x.y}$ şeklinde tanımlanan çarpım ile bir monoid olmasına rağmen bir genelleştirilmiş monoid değildir. Çünkü

$$\hat{3}.\hat{1} = \hat{3}.\hat{3} = \hat{3}.\hat{5} = \hat{3}$$

olup $\hat{3}$ elemanının lokal birim elemanı tek değildir. Dolayısıyla genelleştirilmiş monoid olamaz.

Eğer $(M,.,1)$ monoidi $E(M) = \{1\}$ lokal birimlerin kümesine sahip ise o zaman bir genelleştirilmiş monoiddir.

Örnek 3.1.1 [20] $\mathbb{N}^3$ kümesini

$$(a, b, c) * (a', b', c') = (a, b + b', c')$$

İkili işlemi ile birlikte düşünelim. Bu durumda $(\mathbb{N}^3, *)$ bir normal genelleştirilmiş monoiddir. Birim eleman keyfi bir $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ için $e((a, b, c)) = (a, 0, c)$ şeklindedir. $\mathbb{N} \times 2\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ve $\mathbb{N} \times \{0\} \times \mathbb{N}$ altkümeleri, $(\mathbb{N}^3, *)$ genelleştirilmiş monoidinin genelleştirilmiş altmonoidleridir.

Örnek 3.1.2 [20] $\mathbb{N} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \times \mathbb{N}$ kümesi

$$(a, b, c) \circ (a', b', c') = (a, b + b', c').$$

işlemi ile bir normal genelleştirilmiş monoid olup birim eleman $e((a, b, c)) = (a, 1, c)$ şeklindedir.

Tanım 3.1.4 [20] $(A, *)$ ve $(B, \circ)$ iki genelleştirilmiş monoid olsun, bir $f: A \rightarrow B$ dönüşümü herhangi $a_1, a_2 \in A$ için $f(a_1 * a_2) = f(a_1) \circ f(a_2)$ eşitliğini sağlıyorsa ona bir genelleştirilmiş monoid homomorfizmi denir.

Eğer f bir birebir homomorfizm ise, o zaman f nin $(B, \circ)$ da gömülü (embedded) olduğu söylenir.

Eğer f bir bire-bir ve örten homomorfizm ise, o zaman f ye izomorfizm denir.

Uyarı 3.1.3 [20] $f: A \rightarrow B$ genelleştirilmiş monoidlerin bir homomorfizmi olsun. Lokal birimin tekliğinden, herhangi bir $a \in A$ için $f(e_A(a)) = e_B(f(a))$ nın B genelleştirilmiş monoidinde bir lokal birim olduğu gelir.

Uyarı 3.1.4 [20] $(A, *)$ ve $(B, \circ)$ iki genelleştirilmiş monoid, $f: A \rightarrow B$ genelleştirilmiş monoid homomorfizmi ve $a \in A$ tersinir bir eleman olsun. Bu durumda $f(a)$ tersinirdir ve $[f(a)]^{-1} = f(a^{-1})$ dir.

Uyarı 3.1.5 [20] $f: A \rightarrow B$ bir genelleştirilmiş monoid homomorfizmi ve $a \in A$ olsun. Bu durumda $(Kerf)_a = \{x \in A \mid f(x) = e_B(f(a))\}$ ile gösterilen kümeye f nin a daki çekirdeği denir. Açıkça

$$(Kerf)_a = \{x \in A \mid f(x) = f(e_A(a))\}$$

dir.

Tanım 3.1.5 [20] $f: A \rightarrow B$ bir genelleştirilmiş monoid homomorfizmi olsun. Bu durumda $Kerf = \bigcup_{a \in A} (Kerf)_a$ ile gösterilen kümeye f nin çekirdeği denir.

$Kerf = E(A)$ olduğu açıktır.

Örnek 3.1.3 [20] $f: (\mathbb{N}^3, +) \rightarrow (\mathbb{N} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \times \mathbb{N}, \circ)$, $f((a, b, c)) = (a, 2^b, c)$ fonksiyonu bir bire-bir genelleştirilmiş monoid homomorfizmidir. Ayrıca $(Kerf)_{(a,b,c)} = \{(a, 0, c)\}$ ve $Kerf = \mathbb{N} \times \{0\} \times \mathbb{N}$ dir.

Önerme 3.1.6 [20] Bir sadeleştirilebilir genelleştirilmiş monoid bir monoiddir.

İspat $a, b \in A$ olsun ve $e(a)$, $e(b)$ sırasıyla onların lokal birimleri olsun. Birleşme aksiyomundan

$$abe(ab) = ab = a(be(b)) = abe(b)$$

dir. Sadeleştirme aksiyomu sağlandığından $b = be(ab)$ ve $e(ab) = e(b)$ elde edilir. Benzer şekilde $e(ab)ab = ab = e(a)ab$ olup $e(ab) = e(a)$ olduğu gelir. Böylece her $a, b \in A$ için $e(a) = e(b) = e$ dir.

Önerme 3.1.7 [20] $(A,*)$ bir genelleştirilmiş monoid ve $x \in A$ eşgüçlü bir eleman olsun. Bu durumda $e(x) = x$ ve $x \in U(A)$ dır, yani x tersinir bir elemandır.

İspat $x^2 = x$ olduğundan, $xx = x = xe(x)$ yazılır. x in lokal birim elemanı tek olduğundan $x = e(x)$ olur. Dolayısıyla,

$$xx = x = e(x)$$

dir. x in tersi de tek olduğundan,

$$x^{-1} = x$$

olup $x \in U(A)$ elde edilir.

Önerme 3.1.8 [20] $(A, \cdot)$ ve $(B, \circ)$ iki genelleştirilmiş monoid ve $f: A \rightarrow B$ bir homomorfizm olsun.

- Eğer M, A nın bir genelleştirilmiş altmonoidiyse, $f(M)$ de B nin bir genelleştirilmiş altmonoididir.
- Eğer N, B nin bir genelleştirilmiş altmonoidiyse ve $f^{-1}(N) \neq \emptyset$ ise $f^{-1}(N)$, A nın genelleştirilmiş bir altmonoididir.
- Eğer A bir normal genelleştirilmiş monoid ise, $X = \{(e_A(a), f(a)) | a \in A\}$ kümesi,
$$(e_A(a), f(a)) * (e_A(b), f(b)) = (e_A(a \cdot b), f(a \cdot b))$$
 işlemi ile bir genelleştirilmiş monoiddir.

İspat

- Eğer M, A nın bir genelleştirilmiş altmonoidiyse, o zaman her $a, b \in M$ için $a \cdot b \in M$ ve herhangi $a \in M$ için $e(a) \in M$ dir.
Her $x, y \in f(M)$ için $f(a) = x$, $f(b) = y$ olacak şekilde $a, b \in M$ vardır. Dolayısıyla $x \circ y = f(a) \circ f(b) = f(a \cdot b) \in f(M)$ dir. Eğer $a \in M$ ise, o zaman $e(a) \in M$ dir ve ayrıca, $f(a) \in f(M)$, $f(e_A(a)) \in f(M)$ olup buradan $e_B(f(a)) \in f(M)$ dir.
- $f^{-1}(N) = \{a \in A | f(a) \in N\}$ dir. Eğer $a, b \in f^{-1}(N)$ ise, $f(a), f(b) \in N$ dir. N, B nin bir genelleştirilmiş altmonoidi olduğundan, $f(a) \circ f(b) = f(a \cdot b) \in N$ ve dolayısıyla $a \cdot b \in f^{-1}(N)$ elde edilir.

Ayrıca $a \in f^{-1}(N)$ yani $f(a) \in N$ bir eleman olsun. N, B nin genelleştirilmiş bir altmonoidi olduğundan $e_B(f(a)) = f(e_A(a)) \in N$ dır. Böylece $e_A(a) \in f^{-1}(N)$ olup dolayısıyla $f^{-1}(N)$, A nın bir genelleştirilmiş altmonoididir.

c) A nın bir normal genelleştirilmiş monoid olduğunu varsayalım, yani tüm $a, b \in A$ için $e_A(a \cdot b) = e_A(a)e_A(b)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} [(e_A(a), f(a)) * (e_A(b), f(b))] * (e_A(c), f(c)) &= (e(ab), f(ab)) * (e(c), f(c)) \\ (e_A(abc), f(abc)) &= (e_A(a), f(a)) * (e_A(bc), f(bc)) \\ (e_A(a), f(a)) * [(e_A(b), f(b)) * (e_A(c), f(c))] \end{aligned}$$

olup “ $*$ ” işleminin birleşimli olduğu görülür.

Her $(e_A(a), f(a)) \in X$ için

$$\begin{aligned} (e_A(a), f(a)) * (e_A(e_A(a)), f(e_A(a))) \\ = (e_A(a \cdot e_A(a)), f(a \cdot e_A(a))) = (e_A(a), f(a)) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (e_A(e_A(a)), f(e_A(a))) * (e_A(a), f(a)) \\ = (e_A(e_A(a)a), f(e_A(a)a)) = (e_A(a), f(a)) \end{aligned}$$

dir. $e_A(a)$ ve $e_B(f(a)) = f(e_A(a))$ lokal birim elemanların tekliğinden

$$e((e_A(a), f(a))) = (e_A(e_A(a)), f(e_A(a))) = (e_A(a), f(e_A(a)))$$

elde edilir.

Önerme 3.1.9 [20] $(A, *)$ ve $(B, \circ)$ iki genelleştirilmiş monoid ve $f: A \rightarrow B$ genelleştirilmiş homomorfizm olsun.

- a) Eğer $a \in A$ ise $(Kerf)_a$ kümesi A kümesinin bir genelleştirilmiş altmonoididir.
- b) Eğer f birebir bir homomorfizm ve $a \in A$ ise, bu durumda $(Kerf)_a = \{e_a(a)\}$ olur.

İspat

a) $f(e_A(a)) = e_B(f(a))$ olduğundan $e_A(a) \in (Kerf)_a$ dır ve dolayısıyla $(Kerf)_a \neq \emptyset$ olur.

Her $x, y \in (Kerf)_a$ için;

$$f(x * y) = f(x) \circ f(y) = e_B(f(a)) \circ e_B(f(a))$$

$$= f(e_A(a)) \circ f(e_A(a)) = f(e_A(a) * e_A(a)) = f(e_A(a)),$$

olup Önerme 3.1.2 den $f(x * y) = f(e_A(a)) = e_B(f(a))$ gelir. Dolayısıyla $x * y \in (Kerf)_a$ dır. Ayrıca $x \in (Kerf)_a$ ise

$$f(e_A(x)) = e_B(f(x)) = e_B(f(e_A(a))) = f(e_A(e_A(a)))$$

dır.

Önerme 3.1.2 den $f(e_A(x)) = f(e_A(a))$ dır ve dolayısıyla $f(e_A(x)) = e_B(f(a))$ dır. Böylece $e_A(x) \in (Kerf)_a$ olup $(Kerf)_a$, A nın bir genelleştirilmiş altmonoididir.

b) Eğer f bir birebir homomorfizm ve $x \in (Kerf)_a$ ise $f(x) = e_B(f(a)) = f(e_A(a))$ olup buradan $x = e_A(a)$ dır. Böylece $(Kerf)_a \subseteq \{e_A(a)\}$ olduğu gelir. Diğer taraftan $f(e_A(a)) = e_B(f(a))$ olduğundan $\{e_A(a)\} \subseteq (Kerf)_a$ dır. Sonuç olarak, $(Kerf)_a = \{e_A(a)\}$ dır.

Önerme 3.1.10 [20] $(A, \cdot, 1)$ üçlüsü $E(A) = \{1\}$ ile bir monoid ve $(B, *)$ bir genelleştirilmiş monoid olsun. Eğer $f: A \rightarrow B$ bir genelleştirilmiş monoid homomorfizmi ise, o zaman $B_{f(1)}$ kümesi bir monoiddir ve $f(A)$, $B_{f(1)}$ in bir genelleştirilmiş altmonoididir.

İspat: $B_{f(1)}$ kümesi açık olarak

$$B_{f(1)} = \{b \in B \mid e_B(b) = e_B(f(1))\} = \{b \in B \mid e_B(b) = f(e_A(1))\}$$

şeklindedir. 1 elemanı A da birim olduğundan $e_A(1) = 1$ dir. Dolayısıyla

$$B_{f(1)} = \{b \in B \mid e_B(b) = f(1)\}$$

olur. Önerme 3.1.5 e göre $B_{f(1)}$ kümesi bir monoiddir.

Eğer $a' \in f(A)$ ise, o zaman $f(a) = a'$ olacak şekilde bir $a \in A$ elemanı vardır. Dolayısıyla

$$a' * f(1) = f(a) * f(1) = f(a \cdot 1) = f(a) = a'$$

ve

$$f(1) * a' = f(1) * f(a) = f(1 \cdot a) = f(a) = a'$$

dür. Buradan $e(a') = f(1)$ olup $a' \in B_{f(1)}$ olduğu gelir.

Sonuç olarak $f(A) \subseteq B_{f(1)}$ dir. Eğer $a', b' \in f(A)$ ise $f(a) = a'$, $f(b) = b'$ ve $a \cdot b \in A$ olacak şekilde $a, b \in A$ vardır.

$$a' * b' = f(a) * f(b) = f(a \cdot b) \in f(A)$$

dır. Ayrıca $a' \in f(A)$ ise

$$e_B(a') = e_B(f(a)) = f(e_A(a)) = f(1) \in f(A)$$

dır. Böylece $f(A)$ görüntü kümesi $B_{f(1)}$ in bir genelleştirilmiş altmonoididir.

3.2 Genelleştirilmiş Gruplar

Tanım 3.2.1 [17] Bir G genelleştirilmiş grubu, bir $: G \times G \rightarrow G, (g, k) \rightarrow gk$ çarpma işlemi ile birlikte aşağıdaki aksiyomları gerçekleyen bir kümedir.

- i. Keyfi $g, k, n \in G$ için $(gk)n = g(kn)$ (birleşme aksiyomu)
- ii. Keyfi $g \in G$ için yegâne $e(g) \in G$ elemanı vardır öyle ki $ge(g) = e(g)g = g$ (birim eleman aksiyomu)
- iii. Keyfi $g \in G$ için $g^{-1} \in G$ vardır öyle ki $gg^{-1} = e(g) = g^{-1}g$ (ters eleman aksiyomu)

Bir genelleştirilmiş grubu karakterize eden şu önerme önemlidir.

Önerme 3.2.1 [17] Bir G genelleştirilmiş grubu için şu özellikler vardır:

- i. $e(e(g)) = e(g)$ ve $e(g^{-1}) = e(g), \forall g \in G$
- ii. $(g^{-1})^{-1} = g, \forall g \in G$.

İspat

i. Bir G genelleştirilmiş grubunda keyfi bir g elemanı için $g = ge(g) = e(g)g$ olacak şekilde yegâne $e(g)$ birimi vardır. Bu eşitlikte g elemanı yerine $e(g)$ yazılırsa $e(e(g))e(g) = e(g)$ eşitliği elde edilir. Son ifadenin her iki tarafı sağdan g ile işleme tabi tutulursa

$$[e(e(g))e(g)]g = e(g)g$$

bulunur.

Birleşme özelliği gereğince $e(e(g))[e(g)g] = g$ olur. Buradan $e(e(g))g = g$ gelir. Aynı adımlar soldan uygulanırsa $ge(e(g)) = g$ elde edilir. Birim elemanın tekliğinden dolayı $e(e(g)) = e(g)$ gelir.

İkinci olarak keyfi bir $g \in G$ için $e(g^{-1}) = e(g)$ eşitliğinin sağlandığını gösterelim. $g \in G$ için,

$$g = ge(g) = g(g^{-1}g) = g(g^{-1}e(g^{-1}))g = (e(g)e(g^{-1}))g$$

dır. Benzer şekilde

$$g = g(e(g^{-1}))e(g)$$

olur. $e(g)$ yegâne olduğu için

$$e(g)e(g^{-1}) = e(g^{-1}) = e(g)$$

olup

$$e(g^{-1}) = e(g)$$

bulunur.

ii. Ters eleman aksiyomu gereğince,

$$(g^{-1})^{-1}g^{-1} = e(g^{-1}) = e(g)$$

dir. Bu ifadenin her iki tarafı sağdan g ile işleme tabi tutulursa

$$[(g^{-1})^{-1}g^{-1}]g = e(g)g$$

bulunur. Bu ifadenin sol tarafına birleşme aksiyomu uygulanırsa

$$((g^{-1})^{-1}(g^{-1}g)) = (g^{-1})^{-1}(e(g)) = (g^{-1})^{-1}(e(g^{-1})) = (g^{-1})^{-1}e(g^{-1})^{-1} = (g^{-1})^{-1}$$

elde edilir. Böylece $(g^{-1})^{-1} = g$ olduğu gelir.

Teorem 3.2.1 [17] Bir G genelleştirilmiş grubunda her elemanın bir tek tersi vardır.

İspat $g \in G$ nin iki farklı ters elemanı m ve n olsun. O halde, $mg = gm = e(g)$ ve $ng = gn = e(g)$ dır. Bu iki eşitlikten $m(gn) = m(e(g))$ olduğu gelir. Böylece $e(g)n = me(g)$ olup buradan $m = n$ elde edilir.

Örnek 3.2.1 [17] IR reel sayılar kümesini göstermek üzere $G = IR \times IR \setminus \{0\} \times IR$ çarpım kümesini düşünelim. G kümesi

$$(g_1, h_1, k_1)(g_2, h_2, k_2) = (h_1g_2, h_1h_2, h_1k_2)$$

çarpma işlemi ile birlikte bir genelleştirilmiş gruptur.

Tanım 3.2.1 deki aksiyomları sağlatalım.

i. $(g_1, h_1, k_1), (g_2, h_2, k_2), (g_3, h_3, k_3) \in G$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} [(g_1, h_1, k_1)(g_2, h_2, k_2)](g_3, h_3, k_3) &= (h_1g_2, h_1h_2, h_1k_2)(g_3, h_3, k_3) \\ &= [(h_1h_2)g_3, (h_1h_2)h_3, (h_1h_2)k_3] \\ &= [h_1(h_2g_3), h_1(h_2h_3), h_1(h_2k_3)] \\ &= (g_1, h_1, k_1)(h_2g_3, h_2h_3, h_2k_3) \\ &= [(g_1, h_1, k_1)(g_2, h_2, k_2)](g_3, h_3, k_3) \end{aligned}$$

olduğundan birleşme özelliği sağlanır.

- ii. $(g_1, h_1, k_1) \in G$ için birim eleman $e(g_1, h_1, k_1) = \left(\frac{g_1}{h_1}, 1, \frac{k_1}{h_1}\right)$ şeklindedir.

Gerçekten,

$$\begin{aligned}(g_1, h_1, k_1)e(g_1, h_1, k_1) &= e(g_1, h_1, k_1) \left(\frac{g_1}{h_1}, 1, \frac{k_1}{h_1}\right) \\ &= \left(\frac{h_1 g_1}{h_1}, h_1 1, \frac{h_1 k_1}{h_1}\right) \\ &= (g_1, h_1, k_1)\end{aligned}$$

Diğer taraftan

$$e(g_1, h_1, k_1)(g_1, h_1, k_1) = \left(\frac{g_1}{h_1}, 1, \frac{k_1}{h_1}\right)(g_1, h_1, k_1)$$

eşitliği sağlanır.

- iii. $(g_1, h_1, k_1) \in G$ ters eleman $(g_1, h_1, k_1)^{-1} = \left(\frac{g_1}{h_1^2}, \frac{1}{h_1}, \frac{k_1}{h_1^2}\right)$ kuralı ile verilir.

Gerçekten,

$$\begin{aligned}(g_1, h_1, k_1)(g_1, h_1, k_1)^{-1} &= (g_1, h_1, k_1) \left(\frac{g_1}{h_1^2}, \frac{1}{h_1}, \frac{k_1}{h_1^2}\right) \\ &= \left(\frac{h_1 g_1}{h_1^2}, \frac{1}{h_1}, \frac{h_1 k_1}{h_1^2}\right) \\ &= \left(\frac{g_1}{h_1}, 1, \frac{k_1}{h_1}\right) \\ &= e(g_1, h_1, k_1)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(g_1, h_1, k_1)^{-1}(g_1, h_1, k_1) &= \left(\frac{g_1}{h_1^2}, \frac{1}{h_1}, \frac{k_1}{h_1^2}\right)(g_1, h_1, k_1) \\ &= \left(\frac{1}{h_1 g_1}, \frac{1}{h_1 h_1}, \frac{1}{h_1 k_1}\right) \\ &= \left(\frac{g_1}{h_1}, 1, \frac{k_1}{h_1}\right) \\ &= e(g_1, h_1, k_1)\end{aligned}$$

olup, üçüncü aksiyom da sağlanmış olur.

Sonuç olarak G bir genelleştirilmiş gruptur.

Örnek 3.2.2 [17] G , m işlemi ile birlikte bir genelleştirilmiş grup olmak üzere, $G \times G$ çarpım kümesi,

$$m_1((g, k), (h, r)) = (m(g \cdot h), m(k \cdot r))$$

şeklinde tanımlanan m_1 işlemi ile birlikte bir genelleştirilmiş gruptur. Keyfi bir (g, k) elemanı için birim $e_1((g, k)) = (e(g), e(k))$ ve ters $(g, k)^{-1} = (g^{-1}, k^{-1})$ şeklindedir.

Uyarı 3.2.1 Tanım 3.2.1 den her grup bir genelleştirilmiş grup olmasına rağmen bunun aksi her zaman geçerli değildir. Aşağıdaki teorem bu durumun aksinin ne zaman geçerli olduğunu belirtmektedir.

Teorem 3.2.2 [17] Her G abelyen genelleştirilmiş grubu bir gruptur.

İspat Grup ile genelleştirilmiş grup arasındaki en belirgin fark birim elemanın tekliğidir. Dolayısıyla bir G abelyen genelleştirilmiş grubundaki keyfi seçilen $g, h \in G$ elemanları için birimin aynı olduğunu göstermek, yani $e(g) = e(h)$ olduğunu ispatlamak yeterlidir.

$g, h \in G$ için

$$ge(g) = e(g)g \text{ ve } he(h) = e(h)h$$

ifadeleri doğrudur. Bu ifadeler sırasıyla h ve g ile sağdan işleme tabi tutulursa

$$\begin{aligned} e(g)g = g &\Rightarrow (e(g)g)h = gh \\ &\Rightarrow e(g)(gh) = gh \\ &\Rightarrow e(g) = e(gh) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} e(h)h = h &\Rightarrow (e(h)h)g = hg \\ &\Rightarrow e(h)(hg) = hg \\ &\Rightarrow e(h) = e(hg) \end{aligned}$$

bulunur. G değişimli olduğundan, $gh = hg$ için $e(gh) = e(hg)$ yazılır.

Diğer taraftan birim eleman tek olduğundan $e(g) = e(gh) = e(hg) = e(h)$ elde edilir. Bu sonuç G abelyen genelleştirilmiş grubunda birim elemanın tek olduğunu söyler. O halde G bir gruptur.

Tanım 3.2.2 [17] G genelleştirilmiş grubu keyfi $g, h \in G$ elemanları için $e(gh) = e(g)e(h)$ eşitliğini sağlıyorsa G ye normal genelleştirilmiş grup denir.

Örnek 3.2.3 [20] Mod 6 ya göre kalan sınıflarının kümesi $\mathbb{Z}_6$

$$\hat{x} * \hat{y} = 3\hat{x} + 4\hat{y}$$

ikili işlemi ile her elemanın eşgüçlü olduğu bir normal genelleştirilmiş gruptur.

Uyarı 3.2.2 [17] Bütün elemanları eşgüçlü olan bir genelleştirilmiş monoid bir genelleştirilmiş gruptur.

Önceki bölümde gruplar için verilen Teorem 2.3.4 genelleştirilmiş gruplar söz konusu olduğunda geçerli değildir. Bununla birlikte benzer bir durum genelleştirilmiş gruplar için aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 3.2.3 [13] G , her $a, b \in G$ için $e(a)b^{-1} = b^{-1}e(a)$ eşitliğinin sağlandığı bir normal genelleştirilmiş grup olsun. Bu takdirde her $a, b \in G$ için $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ dir.

Teorem 3.2.4 [17] Bir G genelleştirilmiş grubunun boş olmayan bir H altkümesi genelleştirilmiş altgruptur gerek ve yeter şart her $h, k \in H$ için $hk^{-1} \in H$ dir.

İspat

($\Rightarrow$) H genelleştirilmiş altgrup olsun. Bu durumda her $h, k \in H$ için $k^{-1} \in H$ ve $hk^{-1} \in H$ dir.

($\Leftarrow$) Keyfi $h, k \in H$ için $hk^{-1} \in H$ olsun. Bu takdirde $kk^{-1} = e(k) \in H$, $e(k)k^{-1} = k^{-1} \in H$ ve $hk = h(k^{-1})^{-1} \in H$ olup H bir genelleştirilmiş gruptur. Bu sebeple de genelleştirilmiş altgruptur.

Teorem 3.2.5 [17] G bir genelleştirilmiş grup olmak üzere G nin kesişimleri boş olmayan genelleştirilmiş altgruplarının $\{H_i | i \in I\}$ ailesi verilsin. Bu durumda $H = \bigcap_{i \in I} H_i \neq \emptyset$ ise G nin bir genelleştirilmiş altgrubudur.

İspat Önceki teoremden keyfi $h, k \in H$ için $hk^{-1} \in H$ olduğunu ispatlamak yeterli olacaktır.

$$h, k \in H \Rightarrow \forall i \in I \text{ için } h, k \in H_i$$

$$\Rightarrow \forall i \in I \text{ için } hk^{-1} \in H_i \text{ (çünkü her bir } H_i \text{ genelleştirilmiş alt grup)}$$

$$\Rightarrow hk^{-1} \in H = \bigcap_{i \in I} H_i$$

olur. İspat tamamlanmış olur.

Klasik cebirde bir grubun herhangi iki altgrubunun kesişimi boş olamaz. Arakesit kümesi en azından birim elemanı içermek zorundadır. Fakat genelleştirilmiş gruplarda bu durum geçerli değildir. Bunu bir örnekle gösterelim.

Örnek 3.2.4 [17] $G = IR \times (IR \setminus \{0\}) \times IR$ kümesi, $(m, n, k)(u, v, z) = (nu, nv, nz)$ çarpımı ile bir normal genelleştirilmiş gruptur.

$$H_1 = \{0\} \times \{1\} \times (IR \setminus \{0\})$$

ve

$$H_2 = (IR \setminus \{0\}) \times \{1\} \times \{0\}$$

kümeleri yukarıda tanımlanan işlem ile G nin iki genelleştirilmiş altgrubudur ve açıkça kesişimleri boş kümedir.

Teorem 3.2.6 [17] G genelleştirilmiş grubundaki keyfi bir g elemanı için

$$G_g = \{x \in G : e(x) = e(g)\}$$

kümesi, bir genelleştirilmiş altgruptur. Esasen, G_g bir gruptur.

İspat Keyfi $x, y \in G_g$ için

$$(xy)e(g) = (xy)e(y) = xy$$

ve

$$e(g)(xy) = e(x)(xy) = xy$$

eşitliğini yazabiliriz. Buradan $e(xy) = e(g)$ olduğu açıktır.

Ayrıca $e(y) = e(y^{-1})$ dir. Böylece $xy^{-1} \in G_g$ olup $xy^{-1} \in G_g$ dır. Sonuç olarak G_g , G nin genelleştirilmiş altgrubudur.

Diğer taraftan birim dönüşüm G_g üzerinde bir sabit dönüşüm olduğu için G_g aslında bir gruptur.

Tanım 3.2.3 [17] İki genelleştirilmiş grup G ve H olmak üzere $\psi: G \rightarrow H$ morfizmi keyfi $g, k \in G$ için $\psi(gk) = \psi(g)\psi(k)$ eşitliğini gerçekliyorsaa ψ morfizmine genelleştirilmiş grup homomorfizmi adı verilir.

Örnek 3.2.5 [17] $G = IR \times (IR \setminus \{0\})$ kümesi, $(g, k)(m, n) = (km, kn)$ işlemi ile açıkça bir genelleştirilmiş grup olup keyfi bir (g, k) elemanı için birim ve ters elemanlar

$$e(g, k) = \left(\frac{g}{k}, 1\right)$$

ve

$$(g, k)^{-1} = \left(\frac{g}{k^2}, \frac{1}{k}\right)$$

olarak tanımlıdır.

$K = IR$ kümesi de $mn = n$ çarpımı ile genelleştirilmiş grup olup keyfi bir $m \in K$ elemanı için birim ve ters elemanlar $e(m) = (m)$ ve $m^{-1} = m$ olarak tanımlıdır.

Bu yollarla belli olan G ve K arasında

$$\psi: G \rightarrow K,$$

$$(g, k) \mapsto \frac{g}{k}$$

morfizmi bir genelleştirilmiş grup homomorfizmidir.

Gerçekten, keyfi $(g, k), (m, n) \in G$ için

$$\psi((g, k)(m, n)) = \psi(km, kn) = \frac{km}{kn} = \frac{m}{n}$$

ve

$$\psi(g, k)\psi(m, n) = \frac{g}{k} \cdot \frac{m}{n} = \frac{gm}{kn}$$

dir. Dolayısıyla $\psi((g, k)(m, n)) = \psi(g, k)\psi(m, n)$ olduğu görülür.

Teorem 3.2.7 [17] G ve H iki ayrık genelleştirilmiş grup ve $\psi: G \rightarrow H$ onlar arasında bir homomorfizmi olsun. Bu durumda,

- i. Keyfi $g \in G$ için $\psi(e(g)) = e(\psi(g))$, H de birim elemandır.
- ii. Keyfi $g \in G$ için $\psi(g^{-1}) = [\psi(g)]^{-1}$
- iii. Bir K genelleştirilmiş alt grubunun görüntüsü $\psi(K)$ de bir genelleştirilmiş alt gruptur.
- iv. G normal ise $\{(e(g), \psi(g)) \mid g \in G\}$ kümesi

$$(e(g), \psi(g))(e(k), \psi(k)) = (e(gk), \psi(gk))$$

çarpımı ile $\cup_{e(g) \in G} \psi(G_{e(g)})$ şeklinde gösterilen bir genelleştirilmiş gruptur.

İspat

- i. Keyfi $g \in G$ için $\psi(e(g)) = e(\psi(g))$ ile tanımlı olan $e(\psi(g))$ nın H de birim olduğunu ispatlayalım. Şöyle ki, $e(\psi(g))\psi(g) = \psi(g)$ eşitliğinin sağladığını göstermeliyiz:

$$e(\psi(g))\psi(g) = \psi(e(g))\psi(g) = \psi(e(g)g) = \psi(g)$$

ve

$$\psi(g)e(\psi(g)) = \psi(g)\psi(e(g)) = \psi(ge(g)) = \psi(g)$$

olup $\psi(e(g)) = e(\psi(g))$ H de birimdir. Diğer bir ifadeyle her genelleştirilmiş grup homomorfizmi birimi birime dönüştürür.

- ii. Keyfi bir $g \in G$ için

$$\begin{aligned}\psi(g^{-1}) &= \psi(e(g^{-1})g^{-1}) \\ &= \psi(e(g)g^{-1}) \\ &= \psi(e(g))\psi(g^{-1}) \\ &= e(\psi(g))\psi(g^{-1}) \\ &= [\psi(g)]^{-1}\psi(g)\psi(g^{-1}) \\ &= [\psi(g)]^{-1}\psi(gg^{-1}) \\ &= [\psi(g)]^{-1}\psi(e(g)) \\ &= [\psi(g)]^{-1}e(\psi(g)) \\ &= [\psi(g)]^{-1}e([\psi(g)]^{-1}) \\ &= [\psi(g)]^{-1}\end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

- iii. Herhangi keyfi $m, n \in \psi(K)$ elemanlarını ele alalım. Bu durumda açıkça $\psi(g) = m$, ve $\psi(k) = n$ olacak şekilde K da g ve k elemanları mevcuttur.

K genelleştirilmiş altgrup olduğundan Teorem 3.2.5 gereğince $gk^{-1} \in K$ dır. Buradan

$$\psi(gk^{-1}) = \psi(g)\psi(k^{-1}) = \psi(g)[\psi(k)]^{-1} = mn^{-1} \in \psi(K)$$

dir. Dolayısıyla yine Teorem 3.2.3 gereğince $\psi(K)$, H nin bir genelleştirilmiş altgrupudur.

- iv. Tanım 3.2.1 deki aksiyomların gerçekleştiğini gösterelim.

• Her $g, k, n \in G$ için

$$\begin{aligned} [(e(g), \psi(g))(e(k), \psi(k))](e(n), \psi(n)) &= (e(gk), \psi(gk))(e(n), \psi(n)) \\ &= (e(gkn), \psi(gkn)) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (e(g), \psi(g))[(e(k), \psi(k))(e(n), \psi(n))] &= (e(g), \psi(g))(e(kn), \psi(kn)) \\ &= (e(gkn), \psi(gkn)) \end{aligned}$$

olup bu iki eşitlikten

$$[e(g), \psi(g)(e(k), \psi(k))](e(n), \psi(n)) = (e(g), \psi(g))[(e(k), \psi(k))(e(n), \psi(n))]$$

olduğu gelir. Yani ilk aksiyom olan birleşme özelliği aksiyomu gerçekleşir.

- Keyfi bir $g \in G$ elemanı alalım. Bu durumda $(e(g), \psi(g)) \in \cup_{e(g) \in G} \psi(G_{e(g)})$ elemanı için birim

$$e(e(g), \psi(g)) = (e(g), \psi(e(g)))$$

ile tanımlı olup buradan

$$\begin{aligned} (e(g), \psi(g))e(e(g), \psi(g)) &= e(e(g), \psi(g))(e(g), \psi(g)) \\ &= (e(g), \psi(g)) \end{aligned}$$

olduğu elde edilir.

- Keyfi bir $g \in G$ elemanı alalım. Bu durumda $(e(g), \psi(g)) \in \cup_{e(g) \in G} \psi(G_{e(g)})$ elemanı için ters eleman

$$(e(g), \psi(g))^{-1} = (e(g), \psi(g))^{-1}$$

şeklinde tanımlı olup buradan

$$\begin{aligned} (e(g), \psi(g))(e(g), \psi(g))^{-1} &= (e(g), \psi(g))^{-1}(e(g), \psi(g)) \\ &= e(e(g), \psi(g)) \end{aligned}$$

olduğu elde edilir.

Tanım 3.2.4 [17] Bir $\psi: G \rightarrow K$ genelleştirilmiş grup homomorfizmi ve keyfi bir $g \in G$ elemanı verilsin. Bu durumda ψ nin g deki çekirdeği

$$\ker\psi_{(g)} = \{x \in G \mid \psi(x) = \psi(e(g))\}$$

şeklinde tanımlanan G nin altkümesidir.

Teorem 3.2.8 [17] Bir $\psi: G \rightarrow K$ bir genelleştirilmiş grup homomorfizmi ve keyfi bir $g \in G$ elemanı verilsin. Bu durumda yukarıdaki gibi tanımlanan ψ nin g deki çekirdeği

$$\ker\psi_{(g)} = \{x \in G \mid \psi(x) = \psi(e(g))\}$$

kümesi G nin bir genelleştirilmiş altgrubudur. Üstelik ψ birebirdir ancak ve ancak herhangi $g \in G$ elemanı için $\ker\psi_{(g)} = \{e(g)\}$ dir.

İspat Önce $\ker\psi_{(g)}$ nin bir genelleştirilmiş altgrup olduğunu gösterelim. Bunun için herhangi iki $x, y \in \ker\psi_{(g)}$ elemanı alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} \psi(xy^{-1}) &= \psi(x)\psi(y)^{-1} \\ &= \psi(e(g))\psi(e(g))^{-1} \\ &= \psi(e(g))\psi(e(g))^{-1} \\ &= \psi(e(g))\psi(e(g)) \end{aligned}$$

olup Teorem 3.2.3 gereğince $xy^{-1} \in \ker\psi_{(g)}$ dir. Yani $\ker\psi_{(g)}$, G nin genelleştirilmiş altgrubudur.

Şimdi teoremin ikinci kısmını ispatlayalım.

ψ birebir olsun. Bu durumda açıkça herhangi bir $g \in G$ için $\ker\psi_{(g)} = \{e(g)\}$ dir.

Diğer taraftan $\ker\psi_{(g)} = \{e(g)\}$ olduğunu kabul ederek ψ nın birebir olduğunu ispatlayalım. Bunun için $\psi(x) = \psi(y)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\psi(x)\psi(y^{-1}) = \psi(y)\psi(y)^{-1} = \psi(e(y))$$

dir. Buradan

$$\psi(xy^{-1}) = \psi(e(y))$$

elde edilir. $\ker\psi_{(y)} = \{e(y)\}$ olduğundan

$$xy^{-1} = e(y) = e(y)^{-1}$$

dir. Aynı şekilde $\psi(y^{-1}x) = \psi(e(y))$ dir. Böylece

$$y^{-1}x = e(y) = e(y^{-1})$$

dir. Böylece $x = (y^{-1})^{-1} = y$ elde edilir. Yani ψ birebirdir.

Teorem 3.2.9 [17] G, e birim elemanı ile bir grup olmak üzere $\psi: G \rightarrow K$ genelleştirilmiş grup homomorfizmi verilsin. Bu durumda $\psi(G)$ görüntüsü $K_{\psi(e)}$ nin bir genelleştirilmiş altgrubudur. Üstelik, $\psi(G)$ esasen bir gruptur.

İspat: Herhangi bir $h \in \psi(G)$ alalım. Bu durumda $\psi(g) = h$ olacak şekilde bir $g \in G$ mevcuttur. Buradan

$$h\psi(e) = \psi(g)\psi(e) = \psi(ge) = \psi(g) = h$$

ve

$$\psi(e)h = \psi(e)\psi(g) = \psi(eg) = \psi(g) = h$$

dir. O halde $e(h) = \psi(e)$ olup buradan $h \in H_{\psi(e)}$ elde edilir.

Tanım 3.2.5 [16] Bir G genelleştirilmiş grubunun N genelleştirilmiş altgrubu verilsin.

Herhangi bir $a \in G$ için

$$G_a = \{g \in G | e(g) = e(a)\}, N_0 = N \cap G_a \text{ ve } \psi_a = \psi|_{G_a}$$

olmak üzere eğer $N_a = \emptyset$ ise ya da $N_a \geq \ker \psi_{(a)}$ olacak şekilde bir E genelleştirilmiş grubu ve $\psi: G \rightarrow E$ genelleştirilmiş grup homomorfizmi mevcutsa N ye bir genelleştirilmiş normal altgrup adı verilir.

Örnek 3.2.6 [17] Bir önceki örnekte ayrıntıları verilen $G = IR \times (IR \setminus \{0\})$ genelleştirilmiş grubunu ele alalım. Bu durumda $N = \{(m, n) | m \in IR \text{ veya } m = n\}$ kümesi G nin bir genelleştirilmiş normal altgrubudur.

Tanım 3.2.5 deki ilgili E genelleştirilmiş grubu, $G = IR \times (IR \setminus \{0\})$ genelleştirilmiş grubunun kendisi olarak alınır ve $\psi: G \rightarrow E$ genelleştirilmiş grup homomorfizmi de

$$\psi(m, n) = \left(\frac{m}{n}, 1\right)$$

ile verilir.

Teorem 3.2.10 [17] Bir G normal genelleştirilmiş grubu ve onun bir N genelleştirilmiş normal altgrubu verilsin. Bu durumda $G/N = \bigcup_{g \in G} G_g / N_g$ kümesi

$$: G/N \times G/N \rightarrow G/N, [(xN_g, yN_k)] \mapsto xyN_{gk}$$

çarpımı ile bir normal genelleştirilmiş gruptur.

İspat G/N nin tanımından, eğer $G_g = G_k$ ise o zaman $N_g = N_k$ dır, dolayısıyla $G_g/N_g = G_k/N_k$ dır. Böylece G/N birleşim kümesi, ayrık G_g ler üzerinden alınabilir.

İkinci olarak çarpımın iyi tanımlandığını gösterelim. N ye karşılık gelen genelleştirilmiş grup homomorfizmi $\psi: G \rightarrow E$ olsun.

Bu durumda $g \in G$ için $N_g = \ker \psi_g$ ve $N_g \neq \emptyset$ dir. Eğer $x_1 N_g = x_2 N_g$ ve $y_1 N_k = y_2 N_k$ ise o zaman $n_g \in N_g$ ve $n_k \in N_k$ mevcuttur öyle ki $x_1 = x_2 \psi_g$ ve $y_1 = y_2 \psi_k$ dır. G bir normal genelleştirilmiş grup olduğundan $i = 1, 2$ için

$$e(x_i y_i) = e(x_i) e(y_i) = e(g) e(k) = e(gk)$$

dir. Dolayısıyla $x_1 y_1, x_2 y_2 \in G_{gk}$ dır ve

$$\begin{aligned} \psi_{gk}(x_1 y_1) &= \psi(x_2 n_g, y_2 n_k) \\ &= \psi(x_2) \psi(n_g) \psi(y_2) \psi(n_k) \\ &= \psi(x_2) \psi(e(g)) \psi(y_2) \psi(e(k)) \\ &= \psi(x_2 e(g)) \psi(y_2 e(k)) \\ &= \psi(x_2) \psi(y_2) \\ &= \psi_{gk}(x_2 y_2) \end{aligned}$$

dir.

Buradan $x_1 y_1 \ker \psi_{gk} = x_2 y_2 \psi_k$ ya da $x_1 y_1 N_{gk} = x_2 y_2 N_{gk}$ olduğu gelir.

Şimdi $e(x N_g) = e(x) N_g$ olduğunu gösterelim. $(x N_g)(y N_k) = (y N_k)(x N_g) = x N_{gk}$ olsun. Böylece

$$e(k) e(g) = e(kg) = e(g) = e(gk) = e(g) e(k)$$

dır. Dolayısıyla $e(k) = e(e(g)) = e(g)$ ve $N_g = N_k$ dır. Böylece G_g/N_k , $e(x) N_g = e(g) N_g$ birim elemanı ile bir gruptur ve dolayısıyla $y N_k = y N_g = e(x) N_g$ dir. Diğer özelliklerin ispatı kolayca gösterilir.

Ayrıntıları bu şekilde tanımlanan G/N genelleştirilmiş grubuna bölüm genelleştirilmiş grubu adı verilir.

Tanım 3.2.6 [17] Herhangi iki G ve K genelleştirilmiş gruplarının çarpımı

$$G \times K = \{(g, k) | g \in G, k \in K\}$$

kümesidir.

Teorem 3.2.11 [17] Herhangi iki G ve K genelleştirilmiş grubunun

$$G \times K = \{(g_1, k_1) | g_1 \in G, k_1 \in K\}$$

çarpımı

$$(g_1, k_1)(g_2, k_2) = (g_1 g_2, k_1 k_2)$$

ile tanımlanan çarpım ile bir genelleştirilmiş gruptur.

İspat Çarpım işleminin kapalı olduğu ve birleşimlilik aksiyomunu sağladığı açıktır. Diğer taraftan keyfi bir $(g, k) \in G \times K$ elemanı için birim eleman $e(g, k) = (e_G(g), e_K(k))$ ve ters de $(g, k)^{-1} = (g^{-1}, k^{-1})$ şeklinde tanımlıdır. Tanım 3.2.1 deki (ii) ve (iii) aksiyomlarının sağlandığı kolayca görülür.

Tanım 3.2.7 [12] Bir G genelleştirilmiş grubunun bir S kümesi üzerine genelleştirilmiş etkisi aşağıdaki iki şartı sağlayan bir

$$\begin{aligned} \cdot : G \times S &\rightarrow S \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

dönüşümüdür.

- i. Her $g_1, g_2 \in G$ ve $x \in S$ için $(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$
- ii. Her $x \in S$ için $e(g) \in G$ vardır öyle ki $e(g) \cdot x = x$

Bu durumda S kümesine, bir (sol) G - kümesi denir.

Örnek 3.2.7 [13] $S = IR \times (IR \setminus \{0\})$ kümesini ve $(a, 1)(b, 1) = (b, 1)$ çarpma işlemi ile birlikte $G = IR \times \{1\}$ genelleştirilmiş grubunu ele alalım. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \cdot : G \times S &\rightarrow S \\ ((a, 1), (c, d)) &\mapsto (c, d) \end{aligned}$$

dönüşümü bir genelleştirilmiş etkidir. Gerçekten,

- i. Her $(a, 1), (b, 1) \in G$ ve $(c, d) \in S$ için

$$((a, 1)(b, 1)) \cdot (c, d) = (b, 1) \cdot (c, d) = (c, d)$$

ve

$$(a, 1) \cdot ((b, 1)(c, d)) = (a, 1) \cdot (c, d) = (c, d)$$

olup etkinin ilk şartı sağlanmış olur.

- ii. G genelleştirilmiş grubunda herhangi bir $(a, 1)$ elemanı için birim eleman kendisidir. Yani $e(a, 1) = (a, 1)$ dir. Diğer taraftan etkinin tanımlanmasından dolayı her $(c, d) \in S$ için her zaman $e(a, 1) \cdot (c, d) = (c, d)$ olacak şekilde bir $e(a, 1) = (a, 1) \in G$ vardır. Dolayısıyla etkinin ikinci şartı aşikârdır.

Böylece G genelleştirilmiş grubu S üzerine etki eder.

Teorem 3.2.12 [13] $f: G \rightarrow E$ bir genelleştirilmiş grup homomorfizmi olsun. Bu takdirde

$$\varphi: G \times E \rightarrow E, (a, b) \mapsto f(a)b$$

bir genelleştirilmiş etkidir.

İspat $a, a' \in G$ ve $a \in E$ olsun. Bu durumda

$$\varphi(a, f(a', b)) = f(a)\varphi(a', b) = f(a)(f(a')b) = f(aa')b = \varphi(aa', b)$$

dir. Ayrıca, eğer $a \in f^{-1}(\{e(b)\})$ ise o zaman

$$\varphi(e(a), b) = f(e(a))b = e(f(a))b = e(e(b))b = e(b)b = b$$

dir. Böylece φ bir genelleştirilmiş etkidir.

Örnek 3.2.8 [13] $G = IR \times (IR \setminus \{0\})$ kümesi, üzerinde tanımlanan $(a, b) \cdot (c, d) = (bc, bd)$ çarpma işlemi ile ve IR de üzerinde tanımlanan $ab = b$ çarpma işlemi ile birer genelleştirilmiş gruptur. Ayrıca

$$f: G \rightarrow IR, (a, b) \mapsto \frac{a}{b}$$

bir genelleştirilmiş grup homomorfizmidir. Bu takdirde

$$: G \times IR \rightarrow IR$$

$$((a, b), c) \mapsto \frac{ac}{b}$$

dönüşümü yukarıdaki teoreme göre bir genelleştirilmiş etkidir.

Bir genelleştirilmiş grup etkisi ile bir grup etkisi arasındaki ilişkiyi bir sonuç ile ifade edelim.

Sonuç 3.2.1 [13] Tanım 3.2.7 deki G grubu, abelyen bir genelleştirilmiş grup olarak alınırsa, G grubunun S kümesi üzerindeki bilinen grup etkisi elde edilir.

Eğer Tanım 3.2.7 deki S kümesi, bir genelleştirilmiş grup olarak alınırsa, bir G genelleştirilmiş grubunun bir S genelleştirilmiş grubu üzerine genelleştirilmiş etkisi aşağıdaki şekilde tanımlanabilir. Bu tanım, bir sonraki bölümde genelleştirilmiş çapraz modül kavramının tanımlanmasında kullanılacaktır.

Tanım 3.2.8 [13] G ve S iki genelleştirilmiş grup olsun. Bu durumda bir G genelleştirilmiş grubunun bir S genelleştirilmiş grubu üzerine genelleştirilmiş etkisi aşağıdaki şartları sağlayan bir

$$\cdot : G \times S \rightarrow S$$

$$(g, x) \mapsto g \cdot x$$

dönüşümüdür.

- i. Her $g_1, g_2 \in G$ ve $x \in S$ için $(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$,
- ii. Her $g \in G$ ve $x_1, x_2 \in S$ için $g \cdot (x_1 x_2) = (g \cdot x_1)(g \cdot x_2)$,
- iii. Her $x \in S$ için $e(g) \in G$ elemanı vardır öyle ki $e(g) \cdot x = x$

Ayrıca, aşağıdaki şart da bu şartlara eklenebilir. Bununla birlikte bu şart diğerlerinden kolayca elde edilebilir.

- iv. Her $g \in G$ ve $x \in S$ için $g \cdot e(x) = e(x)$.

Örnek 3.2.9 [13] Herhangi bir G genelleştirilmiş grubu, kendisi üzerine $g \cdot h = h$ çarpımı ile etki eder. Gerçekten, Tanım 3.2.8 de verilen koşulların sağlandığını gösterelim.

- i. Keyfi $g, h, k \in G$ elemanları için $(gh) \cdot k = k$ ve $g \cdot (h \cdot k) = g \cdot k = k$ dir. Buradan $(gh) \cdot k = g \cdot (h \cdot k)$ olup ilk koşul sağlanır.
- ii. Keyfi $g, h, k \in G$ elemanları için $g \cdot (hk) = hk$ ve $(g \cdot h)(g \cdot k) = hk$ olup buradan $g \cdot (hk) = (g \cdot h)(g \cdot k)$ eşitliği elde edilir.
- iii. Keyfi $h \in G$ için $e(g) \cdot h = h$ olduğundan, $e(g) \in G$ birim elemanı mevcuttur. Yani, $e(g)$ nin varlığı doğrudan etkinin tanımlanmasından gelir.
- iv. Keyfi $g, h \in G$ için $g \cdot e(h) = e(h)$ olduğundan, dördüncü koşul da doğrulanmış olur.

Şimdi genelleştirilmiş etki yardımıyla tanımlanan iki genelleştirilmiş grubun yarı direkt çarpımının da bir genelleştirilmiş grup yapısına sahip olduğunu bir önerme ile verelim.

Önerme 3.2.2 [13] İki genelleştirilmiş grubun yarı direkt çarpımı da bir genelleştirilmiş gruptur.

İspat G ve H iki genelleştirilmiş grup olsun. H nin G üzerine genelleştirilmiş etkisini ele alalım. Şöyle ki, Tanım 3.2.8 de verilen koşulları sağlayan bir

$$\cdot : H \times G \rightarrow G, (b, a) \mapsto b \cdot a$$

dönüşümü mevcuttur.

$H \rtimes G$ ile gösterilen G ve H nin yarı direkt çarpımı üzerinde aşağıdaki gibi bir çarpım işlemi tanımlayalım:

$$(b, a)(bb_1, a(b \cdot a_1))$$

Bu çarpıma göre, $(b, a) \in H \rtimes G$ çiftinin birim elemanı $e(b, a) = (e(b), e(a))$ ve $(b, a) \in H \rtimes G$ çiftinin tersi ise $(b, a)^{-1} = (b^{-1}, b^{-1} \cdot a^{-1})$ şeklindedir.

Gerçekten,

$$\begin{aligned} (b, a)(e(b, a)) &= (b, a)(e(b), e(a)) \\ &= (be(b), a(b \cdot e(a))) \\ &= (b, ae(a)) \\ &= (b, a) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (e(b, a))(b, a) &= (e(b), e(a))(b, a) \\ &= (e(b)b, e(a)(e(b) \cdot a)) \\ &= (b, e(a)a) \\ &= (b, a). \end{aligned}$$

dir. Diğer yandan,

$$\begin{aligned} (b, a)(b, a)^{-1} &= (b, a)(b^{-1}, b^{-1} \cdot a^{-1}) \\ &= (bb^{-1}, a(b \cdot (b^{-1} \cdot a^{-1}))) \\ &= (e(b), a((bb^{-1}) \cdot a^{-1})) \\ &= (e(b), a(e(b) \cdot a^{-1})) \\ &= (e(b), aa^{-1}) \\ &= (e(b), e(a)) \\ &= e(a, b) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (b, a)^{-1}(b, a) &= (b^{-1}, b^{-1} \cdot a^{-1})(b, a) \\ &= (b^{-1}b, (b^{-1} \cdot a^{-1})(b^{-1} \cdot a)) \\ &= (e(b), b^{-1} \cdot (a^{-1}a)) \\ &= (e(b), b^{-1} \cdot e(a)) \\ &= (e(b), e(a)) \\ &= e(b, a). \end{aligned}$$

Son olarak, birleşme (associativity) özelliğinin sağlandığı gösteririlirse ispat tamamlanmış olur.

Keyfi $(b, a), (b_1, a_1), (b_2, a_2) \in H \times G$ elemanları için,

$$\begin{aligned} ((b, a), (b_1, a_1))(b_2, a_2) &= (bb_1, a(b \cdot a_1))(b_2, a_2) \\ &= ((bb_1)b_2, a(b \cdot a_1)((bb_1) \cdot a_2)) \\ &= (bb_1b_2, a(b \cdot (a_1(b_1 \cdot a_2)))) \end{aligned} \quad (3.1)$$

ve

$$\begin{aligned} (b, a)((b_1, a_1), (b_2, a_2)) &= (b, a)(b_1b_2, a_1(b_1 \cdot a_2)) \\ &= (b(b_1b_2), a(b \cdot (a_1(b_1 \cdot a_2)))) \end{aligned} \quad (3.2)$$

dir. (3.1) ve (3.2) den $((b, a)(b_1, a_1))(b_2, a_2) = (b, a)((b_1, a_1)(b_2, a_2))$ elde edilir.

Böylece $H \bowtie G$ yarı direkt çarpımı bir genelleştirilmiş gruptur.

3.3 Genelleştirilmiş Çaprazlanmış Modüller

Bu bölümde, genelleştirilmiş gruplar üzerinde genelleştirilmiş çaprazlanmış modül kavramı tanımlanmaktadır. Genelleştirilmiş çaprazlanmış modül, klasik gruplar üzerinde tanımlanan çaprazlanmış modül yapısının daha kapsamlı bir genellemesidir.

Tanım 3.3.1 [13] Bir (M, P, δ) genelleştirilmiş çaprazlanmış modülü, M ve P genelleştirilmiş gruplarından, sınır dönüşümü denilen bir $\delta: M \rightarrow P$ genelleştirilmiş grup homomorfizminden ve P nin M üzerindeki bir genelleştirilmiş etkisinden oluşan bir cebirsel yapıdır öyle ki aşağıdaki koşullar sağlanır:

GCM1) $\delta(m \cdot p) = p\delta(m)p^{-1}$, her $m \in M$ ve $p \in P$ için.

GCM2) $\delta(m) \cdot n = mn m^{-1}$, her $m, n \in M$ için.

Örnek 3.3.1 [13] K bir genelleştirilmiş grup ve

$$I(K) = \{f_k | f_k: K \rightarrow K, f_k(k') = kk'k^{-1}, \text{ her } k, k' \in K\}$$

kümesi K nin iç otomorfizmlerinin genelleştirilmiş grubu olsun. Bu takdirde

$$\delta: K \rightarrow I(K), \quad \delta(k) = f_k$$

genelleştirilmiş grup homomorfizmi ve

$$I(K) \times K \rightarrow K$$

$$(f_k, k') \rightarrow f_k \cdot k' = f_k(k') = kk'k^{-1}$$

genelleştirilmiş etkisi ile $(I(K), K, \delta)$ çaprazlanmış modülü elde edilir. Gerçekten

$$\textbf{GCM1)} \delta(f_k \cdot k') = \delta(f_k(k')) = \delta(kk'k^{-1}) = \delta(k)\delta(k')\delta(k^{-1}) = f_k\delta(k^{-1})f_k^{-1},$$

$$\textbf{GCM2)} \delta(k) \cdot k' = f_k \cdot k' = f_k(k') = kk'k^{-1}$$

olup Tanım 3.3.1 deki şartlar sağlanır.

Örnek 3.3.2 [13] G nin genelleştirilmiş bir grup ve N nin G nin genelleştirilmiş normal altgrubu olduğunu varsayalım. Bu takdirde

$\delta = i: N \rightarrow G, n \mapsto n$ dahil etme homomorfizmi ve

$$G \times N \rightarrow N, (g, n) \mapsto g \cdot n = gng^{-1}$$

genelleştirilmiş etkisi ile bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modül elde ederiz.

Gerçekten,

$$\textbf{GCM1)} \delta(g \cdot n) = \delta(gng^{-1}) = gng^{-1} = g\delta(n)g^{-1},$$

$$\textbf{GCM2)} \delta(n) \cdot n' = n \cdot n' = nn'n^{-1}$$

olup Tanım 3.3.1 deki şartlar sağlanır.

Şimdi, bu örneğin daha anlaşılır olması için bunu sırasıyla Örnek 3.2.5 ve Örnek 3.2.6 deki G genelleştirilmiş grubuna ve N genelleştirilmiş normal altgrubuna uygulayalım.

Örnek 3.3.3 [13] $\delta = i: N \rightarrow G, (a, b) \mapsto (a, b)$ dahil etme homomorfizmini ve genelleştirilmiş etki

$$G \times N \rightarrow N$$

$$((a, b)', (c, d)) \mapsto \left(\frac{da}{b}, d\right)$$

genelleştirilmiş etkisini ele alalım. Bu genelleştirilmiş etki, G ve N üzerindeki işlemler kullanılarak gng^{-1} biçiminde tanımlanan eşlenik etkidir. Yani,

$$\begin{aligned} (a, b) \cdot (c, d) &= (a, b)(c, d)(a, b)^{-1} \\ &= (a, b) \left[(c, d) \left(\frac{a}{b^2}, \frac{1}{b} \right) \right] \\ &= (a, b) \left(\frac{da}{b^2}, \frac{d}{b} \right) \\ &= \left(\frac{bda}{b^2}, \frac{bd}{b} \right) \\ &= \left(\frac{da}{b}, d \right). \end{aligned}$$

Şimdi genelleştirilmiş çaprazlanmış modül olma koşullarını kontrol edelim.

GCM1) $(a, b) \in G$ ve $(c, d) \in N$ için:

$$\delta((a, b) \cdot (c, d)) = \delta\left(\frac{da}{b}, d\right) = \left(\frac{da}{b}, d\right)$$

ve

$$\begin{aligned} (a, b)\delta(c, d)(a, b)^{-1} &= (a, b)\delta(c, d)\left(\frac{a}{b^2}, \frac{1}{b}\right) \\ &= (a, b)(c, d)\left(\frac{a}{b^2}, \frac{1}{b}\right) \\ &= \left(\frac{da}{b}, d\right). \end{aligned}$$

Dolayısıyla, $\delta((a, b) \cdot (c, d)) = (a, b)\delta(c, d)(a, b)^{-1}$ elde edilir.

GCM2) $(c, d), (m, n) \in N$ için:

$$\delta(c, d) \cdot (m, n) = (c, d) \cdot (m, n) = \left(\frac{nc}{d}, n\right)$$

ve

$$(c, d)(m, n)(c, d)^{-1} = (c, d)(m, n)\left(\frac{c}{d^2}, \frac{1}{d}\right) = \left(\frac{nc}{d}, n\right)$$

Dolayısıyla, $\delta(c, d) \cdot (m, n) = (c, d)(m, n)(c, d)^{-1}$ elde edilir.

Böylece (G, N, i) bir genelleştirilmiş çaprazlanmış modüldür.

Şimdi genelleştirilmiş çaprazlanmış modül homomorfizmi kavramını tanımlayalım.

Tanım 3.3.2 [13] (M, P, δ) ve (M', P', δ') iki genelleştirilmiş çaprazlanmış modül olsun.

Bir $(\varphi, \psi): (M, P, \delta) \rightarrow (M', P', \delta')$ genelleştirilmiş çaprazlanmış modül homomorfizmi, $\varphi: M \rightarrow M'$ ve $\psi: P \rightarrow P'$ genelleştirilmiş grup homomorfizmlerinin bir ikilisidir öyleki aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\psi \circ \delta = \delta' \circ \varphi \text{ ve } \varphi(p \cdot m) = \psi(p) \cdot \varphi(m), \text{ her } m \in M \text{ ve } p \in P \text{ için.}$$

Böylece, genelleştirilmiş çaprazlanmış modüller ve onların homomorfizmlerinden oluşan **GCM** kategorisi elde edilir.

3.4 Genelleştirilmiş Halkalar

Tanım 3.4.1 [19] Bir genelleştirilmiş halka, aşağıdaki aksiyomları sağlayan iki farklı

$$+: (x, y) \mapsto x + y \text{ ve } \cdot: (x, y) \mapsto x \cdot y,$$

işlemleri ile donatılmış boş olmayan bir R kümesidir.

- i. $x + (y + z) = (x + y) + z$, burada $x, y, z \in R$ dir
- ii. Her $x \in R$ için yegâne $e(x) \in R$ vardır öyle ki $x + e(x) = e(x) + x = x$
- iii. Her $x \in R$ için $x + (-x) = (-x) + x = e(x)$ olacak şekilde $-x \in R$ vardır
- iv. Her $x, y, z \in R$ için $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
- v. Her $x, y, z \in R$ için $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ ve $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

(i), (ii) ve (iii) özellikleri $(R, +)$ nın genelleştirilmiş bir grup olduğunu ifade eder.

Açıklama 3.4.1 [19] (iii) aksiyomu ve $+$ işleminin birleşimliliğinden her $x \in R$ için $e(x) + e(x) = e(x)$ olduğu kolayca görülür. Buradan, $e(e(x)) = e(x)$ olduğu gelir ve dolayısıyla karşılık gelen bir $e: R \rightarrow R$ fonksiyonu için $e^2 = e$ yazılabilir.

Sonuç 3.4.1 [19] Bir genelleştirilmiş halka bir halkadır ancak ve ancak $e: R \rightarrow R$ bir sabit fonksiyondur.

Örnek 3.4.1 [19] İki boyutlu R^2 Öklid uzayı

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \text{ ve } (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2)$$

işlemleri ile birlikte bir genelleştirilmiş halkadır.

Tanım 3.4.2 [19] R bir genelleştirilmiş halka olsun. Her $x, y \in R$ için

$$e(x \cdot y) = e(x) \cdot e(y) \text{ ve } e(x + y) = e(x) + e(y)$$

eşitlikleri sağlanıyorsa R genelleştirilmiş halkasına bir M –halka denir.

Teorem 3.4.1 [19] Eğer R bir genelleştirilmiş halka ise o zaman her $a, b \in R$ için $e(a \cdot b) = e(a) \cdot e(b)$ dir.

İspat $a, b \in R$ olsun. Bu durumda

$$a \cdot b + a \cdot e(b) = a \cdot (b + e(b)) = a \cdot b$$

ve

$$a.e(b) + a.b = a.(e(b) + b) = a.b$$

olup buradan $e(a.b) = a.e(b)$ olduğu gelir. Diğer taraftan

$$e(a).e(b) + a.e(b) = (e(a) + a).e(b) = a.e(b)$$

ve

$$a.e(b) + e(a).e(b) = (a + e(a)).e(b) = a.e(b)$$

dir. Bu son iki eşitlikten $e(a.e(b)) = e(a).e(b)$ elde edilir. Dolayısıyla $e(e(a.b)) = e(a).e(b)$ olup $e^2 = e$ olduğundan $e(a.b) = e(a).e(b)$ sonucu gelir.

Sonuç 3.4.2 [19] Eğer R bir genelleştirilmiş halka ise her $a, b \in R$ için $e(a).e(b) = a.e(b) = e(a).b = e(a.b)$ dır.

Sonuç 3.4.3 [19] Bir R genelleştirilmiş halkası bir M –halkadır ancak ve ancak $(R, +)$ bir normal genelleştirilmiş gruptur.

İspat Teorem 3.4.1 ve normal genelleştirilmiş grup tanımının direkt bir sonucudur.

Tanım 3.4.3 [19] Eğer bir R genelleştirilmiş halkasında her $x \in R$ için $x.1 = 1.x = x$ olacak şekilde $1 \in R$ varsa, R ye birimli genelleştirilmiş halka denir.

Bir genelleştirilmiş halkadaki birim elemanın (varsa) tek olduğu kolaylıkla ispatlanabilir.

Teorem 3.4.2 [19] Eğer R bir birimli genelleştirilmiş halka ise, o zaman R bir M –halkadır.

İspat Sonuç 3.4.2 den $e(x) = e(x.1) = x.e(1)$ dir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} e(x) + e(y) &= e(x.1) + e(y.1) \\ &= x.e(1) + y.e(1) \\ &= (x + y).e(1) \\ &= e(x + y) \end{aligned}$$

dir. Böylece R , bir M – halkadır.

Tanım 3.4.4 [19] R bir birimli genelleştirilmiş halka ise o zaman her $a \in R$ için $R_a = \{x \in R | e(x) = e(a)\}$ bir abel grubudur.

İspat Teorem 3.4.2 e nin bir homomorfizm olmasını gerektirir. Dolayısıyla, R_a nın bir grup olduğu kolaylıkla ispatlanabilir. Sadece değişimlilik aksiyomuna bakalım. Herhangi iki $x, y \in R_a$ elemanı alalım. Bu durumda

$$(x + y)(1 + 1) = x + x + y + y$$

ve

$$(x + y)(1 + 1) = x + y + x + y$$

eşitlikleri yazılabilir. Buradan $x + x + y + y = x + y + x + y$ dir. Bu son eşitliğin her iki tarafı soldan x in tersi ve sağdan y nin tersi ile işleme tabi tutulursa

$$(-x) + x + x + y + y + (-y) = (-x) + x + y + x + y + (-y)$$

olup buradan $e(x) + x + y + e(y) = e(x) + y + x + e(y)$ gelir. $e(x) = e(y)$ olduğundan, böylece $x + y = y + x$ elde edilir. Sonuç olarak, R_a bir abel grubudur.

Teorem 3.4.3 [19] Eğer R birimli genelleştirilmiş halka ise, o zaman

- i. Her $x \in R$ için, $(-x) = x(-1) = (-1)x$
 - ii. Her $x, y \in R$ için, $-(xy) = (-x)y = x(-y)$
 - iii. Her $x, y \in R$ için, $-(x + y) = (-x) + (-y)$
- dir.

Tanım 3.4.5 [19] R birim elemanlı bir genelleştirilmiş halka olsun. Bir $a \in R$ elemanına tersi alınabilir denir, eğer $ax = xa = 1$ olacak şekilde $x \in R$ varsa. Bu durumda x e a nın tersi denir.

Eğer $a \in R$ tersi alınabilir ise a nın tersi tektir ve a^{-1} ile gösterilir.

Aşağıdaki teorem bir R birimli genelleştirilmiş halkasında e birim elemanının rolünün halka teorisindeki sıfır elemanın rolüne benzer olduğunu göstermektedir.

Teorem 3.4.4 [19] Eğer R birimli genelleştirilmiş halka ve bir $x \in R$ için $e(x) \in R$ elemanı tersi alınabilir ise o zaman her $y \in R$ için $e(y) = y$ dir.

İspat $e(x)$ tersi alınabilir olduğundan $z.e(x) = 1$ olacak şekilde $z \in R$ mevcuttur. Sonuç 3.4.2 den $e(z.x) = 1$ dir. Dolayısıyla $e(e(z.x)) = e(1)$ dir. Buradan $e(z.x) = e(1)$ olup $e(1) = 1$ olduğu gelir. Böylece her $y \in R$ için $e(y) = y.e(1) = y.1 = y$ dir.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, klasik cebirsel yapılardan yola çıkılarak genelleştirilmiş grup, genelleştirilmiş monoid, genelleştirilmiş halka ve genelleştirilmiş çaprazlanmış modül kavramları ele alınmıştır. Bu yapılara ait temel özellikler incelenerek örnekler ile desteklenmiştir.

Yapılan çalışmalar göstermektedir ki genelleştirilmiş cebirsel yapılar, klasik cebirsel yapılardan türetilmiş olsalar da, cebirde yeni bakış açıları kazandırmakta ve daha genel problemlere çözüm sunma potansiyeline sahiptir. Özellikle bu yapıların kategori teorisi açısından değerlendirilmesi, gelecekteki araştırmalar için önemli bir yön olarak karşımıza çıkmaktadır.

Bu çalışma, genelleştirilmiş cebirsel yapıların teorik temellerine katkı sağlamaktadır. Tezin ileriki çalışmalar için sunduğu potansiyel, genelleştirilmiş yapıların daha kapsamlı biçimde incelenmesi ve farklı matematiksel alanlarda uygulanabilirliğinin araştırılması yönünde bir motivasyon kaynağı oluşturmaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] **Ahmadi S.A.**, (2013). *Generalized Topological Groups and Genetic Recombination*, Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories, 11,1, 51-58.
- [2] **Brandt, H.** (1926). 'Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes', Math. Ann. 96, 360-336.
- [3] **Brown, R.** (1967). *Groupoids and Van Kampen's theorem*. Proc. London Math. Soc., 17: 385-401.
- [4] **Bilim etiği.** (t.y.) <https://cse.poriyaan.in/topic/semigroups-and-monoids-50663/>
- [5] **D. J. S. Robinson.** (1996). *A Course in the Theory of Groups*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 502 p.
- [6] **Ehresmann, C.** (1950). *O'uvres compl'etes*. Parties 1.1, 1.2. Topologie alg'ebrique et g'eom'erie differentielle. Dunod, Paris.
- [7] **Eilenberg, S. And MacLane, S.** (1945). 'The general theory of natural equivalences', Trans. Amer. Math. Soc. 58. 231-294.
- [8] **Farhangdoost M.R., Nasirzade T.** (2013). *Geometrical categories of generalized Lie group-groupoids*. Iran J, Sci Technol A., 69-73.
- [9] **Fatehi, F. And Molaei, M.R.** (2017). *Some algebraic properties of generalized rings*, An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi. Mat. (N.S.), LXIII, Fas.I, 109-114.
- [10] **Gordon, R.** (1993). *Crossed Modules as G-categories*, Cahiers de topologie et geometrie differentielle categoriques, tome 34, no. 4, 305-319.
- [11] **Gürsoy, M.H.** (2018). *Bundles of Topological Generalized Groups*, Annals of Oradea University- Mathematics Fascicola, 25 (2), 115-119.
- [12] **Gürsoy, M.H.** (2017). *Generalized ring- groupoids*, Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series, Vol. 44, No. 1, 126-136.
- [13] **Gürsoy, M.H., Aslan H., İçen I.** (2017). *Generalized crossed modules and group-groupoids*, Turk J Math, 41, 1535-1551.
- [14] **Higgins, P.J.** (1964). *Presentations of groupoids, with applications to groups*. Proc. Cam. Phil Soc., 60:7-20.
- [15] **J. L. Alperin, R. B. Bell.** (1995). *Groups and representations*, Vol. 162, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 196 p.
- [16] **Mehrabi, M., Molaei, M.R.** (2000). Olomi, A., *Generalized subgroups and homomorphisms*, Arab J. of Math. Sci., 6 No. 2, 1-7.

- [17] **Molaei, M.R.** (1999). *Generalized groups*, Bul. Inst. Politeh. Iasi Sect. I Mat. Mec. Teor. Fiz. 45, 21-24.
- [18] **Molaei, M.R.** (2000). *Topological Generalized Groups*, International Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 2 Number 9, 1055-1060.
- [19] **Molaei, M.R.** (2002). *Generalized rings*, Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, 12, 105-111.
- [20] **Pop, A. and Pop, M.S.** (2010). *On generalized algebraic structures*, Creative Math. & Inf., 19-2, 184-190.
- [21] **Taşçı, D.** (2018). *Soyut Cebir*. Gazi Kitap Evi Yayıncılık.



ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Goncagül ERDOĞAN

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2020, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği

YÜKSEK LİSANS VEYA DOKTORA TEZİNDEN TÜRETİLEN ÇALIŞMALAR
(Makaleler, Bildiriler, Patentler v.b.)