

BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLAR

Mehmet SARI

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ŐUBAT 2009

ANKARA

Mehmet SARI tarafından hazırlanan BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLAR adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Çetin VURAL
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliğı ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Cemil YILDIZ
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Çetin VURAL
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Ahmet IRKAD
Matematik Anabilim Dalı, Hacettepe Üniversitesi

Tarih: 19/02/2009

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Nail ÜNSAL
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Mehmet SARI

BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLAR**(Yüksek Lisans Tezi)****Mehmet SARI****GAZİ ÜNİVERSİTESİ****FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ****Őubat 2009****ÖZET**

Bu çalışma beő bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde metrik uzaylar ve metriklenebilme teoremlerinin tarihsel sürecine yer verilmiştir. İkinci bölümde bu çalışmada kullanılan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde temel metriklenebilme teoremlerine, Moore uzaylarına ve bazı temel örtü özelliklerine değinilmiştir. Dördüncü bölümde G_δ –diagonale ve G_δ^* –diagonale sahip uzayların metriklenebilme karakterizasyonlarını veren teoremlere yer verilmiştir. Son bölümde genelleştirilmiş metrik uzaylardan M – uzay, p – uzay ve $w\Delta$ – uzaylar ile ilgili teoremler verilmiştir.

Bilim kodu : 204.1.132**Anahtar Kelimeler : Metrik, Metriklenebilir uzay, Moore uzay,
 G_δ – diagonal, M – uzay, p – uzay ve $w\Delta$ – uzay.****Sayfa Adedi : 95****Tez Yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. Çetin VURAL**

SOME GENERALIZED METRIC SPACES**(M.Sc.Thesis)****Mehmet SARI****GAZİ UNIVERSITY****INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY****February 2009****ABSTRACT**

This study consists of five chapters. The first chapter is designated to historical progress of metric spaces and metrization theorems. The second chapter is devoted to basic definitions and theorems that are used in this study. In the third chapter, basic metrization theorems, Moore spaces and some basic cover properties are explained. The fourth chapter consists of theorems which gives characterizations of metrizable spaces that possess G_δ –diagonal and G_δ^* –diagonal. In the last chapter, theorems related to generalized metric spaces; M –space, p –space and $w\Delta$ –spaces take place.

Science Code : 204.1.132**Key Words : Metric, metrizable space, Moore space,
 G_δ –diagonal, M –space, p –space, $w\Delta$ –space.****Page Number : 95****Adviser : Assist. Prof. Dr. Çetin VURAL**

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, kıymetli tecrübelerini ve zamanını benden esirgemeyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Çetin VURAL' a ve beni attığım her adımda destekleyen ve yalnız bırakmayan eşim Elif SARI'ya teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca yüksek lisans eğitim boyunca maddi ve manevi desteklerinden dolayı TÜBİTAK'a ve BDDK'ya teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER.....	3
2.1. Metrik, Metrik Uzaylar ve Diğer Uzaylarla İlgili Temel Tanım ve Teoremler	3
2.2. Örtü ve Örtü Özellikleri İle İlgili Temel Tanım ve Teoremler	4
2.3. Kümeler Kuramı ile İlgili Temel Tanım ve Teoremler.....	13
2.4. Monoton Normal Uzaylar ve Doğrusal Sıralı Uzaylar.....	15
3. TEMEL METRİKLENEBİLME TEOREMLERİ, MOORE UZAYLARI VE TEMEL ÖRTÜ ÖZELLİKLERİ.....	17
4. G_δ – DİAGONALLER VE ALT METRİKLENEBİLİR UZAYLAR	27
5. $w\Delta$ – UZAY, M – UZAY, p – UZAY ve k – UZAY	62
KAYNAKLAR	93
ÖZGEÇMİŞ	95

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$d(x, A)$	$\inf \{d(x, y) : y \in A\}$
$B_d(x, \varepsilon)$	d metriğine göre x merkezli ε yarıçaplı açık yuvar
$B_d(A, \varepsilon)$	$\{x : d(x, A) < \varepsilon\}$
$A \prec B$	A , B 'nin incelişidir.
$\Rightarrow$	Gerektirme
$\Leftarrow$	Yeterlilik
$\Leftrightarrow$	Ancak ve ancak
$\overset{\circ}{A}$	A kümesinin içi
$\overline{A}$	A kümesinin kapanışı
$\tilde{A}$	A kümesinin yığılma noktalarının kümesi
A^c	A kümesinin tümleyeni
∂V	V kümesinin sınırı
ω	İlk sayılabilir ordinal
$ A $	A kümesinin kardinalitesi
ϑA	$\{O \cap A : O \in \vartheta\}$
$\vartheta \wedge \varphi$	$\{A \cap B : A \in \vartheta, B \in \varphi\}$

1. GİRİŞ

Metrik uzaylar ilk olarak Fransız Matematikçi Maurice Fréchet tarafından 1906 yılında yayınlanan “*Sur quelques points du calcul fonctionnel*” adlı doktora tezinde tanımlanarak literatüre girmiştir. Fréchet’in bu tanımından sonra metrik uzaylar konusunda uzun yıllar boyunca önemli çalışmalar yapılmış ve metriklenebilme konusu zamanla daha çok ön plana çıkmıştır.

1920’li yıllardan itibaren birçok metriklenebilme kriteri ortaya konmuştur. Bu konuda ilk önemli gelişme 1923 yılında Rus Matematikçiler Pavel Samuilovich Urysohn ve Pavel Sergeyevich Alexandrov tarafından ispatlanan metriklenmebilme teoremi olmuştur. İki yıl sonra Urysohn, sayılabilir tabana sahip her düzenli uzayın metriklenebilir olduğunu kanıtlamıştır.

1944 yılında parakompaktlığın tanımlanması ve 1951 yılında birbirinden bağımsız olarak Bing, Nagata ve Smirnov tarafından genel metriklenebilme teoreminin ispatlanmasından sonra metriklenebilme konusunda bir çok karakterizasyon verilmiştir. Üç matematikçinin teoremlerindeki farklılık Nagata ve Smirnov’un σ – yerel sonlu tabanı, Bing’in σ – ayık tabanı kullanması olmuştur. 1948 yılında İngiliz Matematikçi Arthur Harold Stone yayınladığı doktora tezinde her metriklenebilir uzayın parakompakt uzay olduğunu göstermiştir. Bu önemli kanıt Bing-Nagata-Smirnov Teoreminin esin kaynağı olmuştur.

1970’li yılların başına kadar bu konuyla uğraşanlar M – uzay, p – uzay ve $w\Delta$ – uzay gibi metriklenebilme karakterizasyonu vermede kullanılan pek çok uzay tanımlamışlardır. Ayrıca 1945 yılında başka bir Rus Matematikçi olan V.E.Šneider’in G_δ – diagonale sahip kompakt uzayların metriklenebilir olduğunu göstermesi metriklenebilme konusunda G_δ – diagonal özelliğini içeren metriklenebilme teoremlerin verilmesine öncülük etmiştir.

Genelleştirilmiş metrik uzayların incelenmesi, metriklenebilen topolojik uzayların

hangi yapılardan ötürü metriklenebilir olduklarını açığa çıkarması bakımından önemlidir.

Bu çalışmada editörlüğünü K. Kunen ve J.E. Vaughan'nın yaptığı "*Handbook of Set Theoretic Topology*" kitabının G. Gruenhage tarafından derlenen "*Generalized Metric Space*" adlı onuncu bölümünün ilk üç alt bölümü, teoremlerin ispatları genişletilerek, okunmuştur. Buna ilaveten A.V. Arhangel'skii - D.K. Burke tarafından 2006 yılında yayınlanan "*Space with a regular G_δ -diagonal*" başlıklı makaleden de konumuzla ilgili olan bazı kısımlar alınmıştır.

2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

2.1. Metrik, Metrik Uzaylar ve Diğer Uzaylarla İlgili Temel Tanım ve Teoremler

2.1.1. Tanım

$X \neq \emptyset$ olmak üzere, her $x, y, z \in X$ için;

- i) $d(x, x) = 0$
- ii) $d(x, y) = d(y, x)$
- iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

koşullarını sağlayan $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonuna X üzerinde pseudo-metrik (sözde metrik) denir. Bu koşullara ek olarak d fonksiyonu $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ koşulunu sağlarsa, d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik ve (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir. Tanımlardan kolayca görüleceği üzere her metrik aynı zamanda sözde metriktir. Fakat bunun tersi doğru değildir. Örneğin; $X = \mathbb{R}$ olsun. $x = (x_1, x_2)$ ve $y = (y_1, y_2)$ olmak üzere $x, y \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ için $d(x, y) = |x_2 - y_2|$ şeklinde tanımlı $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde sözde metriktir, fakat metrik değildir.

2.1.2. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X üzerinde tanımlı olan herhangi bir metriğin ürettiği topoloji τ topolojisine eşitse X uzayına metriklenebilir topolojik uzay denir.

2.1.3. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X üzerinde $\tau^* \subset \tau$ ve (X, τ^*) metriklenebilir olacak biçimde bir τ^* topolojisi varsa (X, τ) topolojik uzayına alt metriklenebilir

uzay denir.

2.1.4. Tanım

X, Y topolojik uzaylar olmak üzere $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu, sürekli, kapalı ve her $y \in Y$ için $f^{-1}(y) \subset X$ alt kümesi kompakt ise f 'ye mükemmel fonksiyon denir.

2.1.5. Tanım

X, Y topolojik uzaylar olmak üzere $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu, sürekli, kapalı ve her $y \in Y$ için $f^{-1}(y) \subset X$ alt kümesi sayılabilir kompakt ise f 'ye hemen hemen mükemmel fonksiyon denir.

2.2. Örtü ve Örtü Özellikleri İle İlgili Temel Tanım ve Teoremler

2.2.1. Tanım

X bir küme olmak üzere, $\mathcal{U}$ X 'in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ ise $\mathcal{U}$ ailesine X kümesinin bir örtüsüdür denir. Eğer $\mathcal{U}$ ailesi sayılabilir ise $\mathcal{U}$ ailesine sayılabilir örtü denir. Eğer X bir topolojik uzay ve $\mathcal{U}$ ailesinin üyeleri açık kümeler ise $\mathcal{U}$ ailesine açık örtü denir.

2.2.2. Tanım

X bir topolojik uzay, $\mathcal{U}$ X 'in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Her $x \in X$ için $\{V : V \cap U \neq \emptyset, V \in \mathcal{U}\}$ kümesi sonlu olacak şekilde x 'in açık bir U komşuluğu varsa $\mathcal{U}$ ailesine yerel sonlu aile denir.

2.2.3. Tanım

X bir topolojik uzay $\mathcal{V}$ X 'in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Her $x \in X$ için $\{V : V \cap U \neq \emptyset, V \in \mathcal{V}\}$ kümesi en fazla bir elemanlı olacak şekilde x 'in açık bir U komşuluğu varsa $\mathcal{V}$ ailesine ayrık aile denir.

2.2.4. Tanım

$\mathcal{V}$ ailesi X 'in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Her $x \in X$ için $\{U \in \mathcal{V} : x \in U\}$ kümesi sonlu(sayılabılır) ise $\mathcal{V}$ ailesine noktasal sonlu(noktasal sayılabılır) aile denir.

2.2.5. Tanım

Sayılabılır sayıda yerel sonlu(ayrık) ailenin birleşimi olarak yazılabilen ailelere σ – yerel sonlu(ayrık) aile denir.

2.2.6. Tanım

$\mathcal{V}$ ve $\mathcal{W}$ bir X kümesinin örtüleri olsun. Her $S \in \mathcal{W}$ için $S \subset U$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{V}$ varsa $\mathcal{W}$ ailesine $\mathcal{V}$ ailesinin bir incesidir(refinement) denir ve $\mathcal{W} \prec \mathcal{V}$ şeklinde gösterilir.

2.2.7. Tanım

X bir küme, $\mathcal{V}$ X 'in alt kümelerinin herhangi bir ailesi ve $A \subset X$ olmak üzere $\bigcup \{U \in \mathcal{V} : A \cap U \neq \emptyset\}$ kümesi $st(A, \mathcal{V})$ ile gösterilir ve buna A kümesinin yıldızı adı verilir. $x \in X$ olmak üzere $st(\{x\}, \mathcal{V})$ kümesi $st(x, \mathcal{V})$ ile gösterilir. $st(x, \mathcal{V})$ kümesine $x \in X$ elamanının $\mathcal{V}$ içindeki yıldızı denir. $st(st(x, \mathcal{V}), \mathcal{V}) = st^2(x, \mathcal{V})$ kümesine $st(x, \mathcal{V})$ kümesinin yıldızı denir.

2.2.8. Tanım

ϑ ve φ aileleri bir X kümesinin örtüleri olmak üzere eğer $\{st(x, \varphi) : x \in X\} \prec \vartheta$ ise φ ailesine ϑ ailesinin yıldız incesi denir ve $\varphi \prec^* \vartheta$ şeklinde gösterilir.

2.2.9. Tanım

ϑ ve φ aileleri bir X kümesinin örtüleri olmak üzere eğer $G \cap H \neq \emptyset$ biçiminde olan her $G, H \in \vartheta$ için $G \cup H \subset T$ olacak biçimde bir $T \in \varphi$ varsa ϑ ailesine φ ailesinin düzenli incesi denir ve $\vartheta \prec^R \varphi$ ile gösterilir.

2.2.10. Tanım

$\{\vartheta_n : n \in \omega\}$ X 'in açık örtülerinin bir dizisi olmak üzere X 'in her x elemanı için eğer $\{st(x, \vartheta_n) : n \in \omega\}$ ailesi x elemanının bir komşuluklar tabanı ise $\{\vartheta_n : n \in \omega\}$ dizisine X için bir açılım(development) denir. Bir açılıma sahip olan topolojik uzaya açılabilir(developable) uzay denir.

2.2.11. Tanım

Düzenli açılabilir uzaylara Moore uzayı denir.

2.2.12. Tanım

$\{(x, x) : x \in X\} \subset X \times X$ kümesine X kümesinin diagonalı denir ve Δ ile gösterilir.

2.2.13. Tanım

X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere A kümesi, X uzayının sayılabilir sayıdaki açık alt kümelerinin kesişimi olarak yazılabiliyorsa A kümesine bir

G_δ –küme denir.

2.2.14. Örnek

$[0,1] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(0 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$ olduğundan $[0,1]$ aralığı $\mathbb{R}$ içinde bir G_δ –kümedir.

2.2.15. Tanım

X bir topolojik uzay olmak üzere, eğer $X \times X$ uzayının kapalı her alt kümesi bir G_δ –küme ise $X \times X$ uzayına mükemmel uzay denir.

2.2.16. Tanım

X topolojik uzayının, Δ diagonalı $X \times X$ uzayı içinde bir G_δ –küme ise X uzayı G_δ –diagonale sahiptir denir.

2.2.17. Tanım

X bir topolojik uzay olmak üzere, X 'in açık örtülerinden oluşan ve her $x \in X$ için $\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \mathcal{U}_n) = \{x\}$ koşulunu sağlayan $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ dizisine X için bir G_δ –dizisi denir.

2.2.18. Tanım

X bir topolojik uzay olsun. X 'in açık örtülerinden oluşan ve her $x \in X$ için $\bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \mathcal{U}_n)} = \{x\}$ koşulunu sağlayan $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ dizisine X için bir G_δ^* –dizisi denir ve X uzayına da G_δ^* –diagonale sahiptir denir.

2.2.19. Teorem

Her Moore Uzayı G_δ^* – diagonale sahiptir.

İspat

X Moore uzayı olsun. Öyleyse X için bir $\{\vartheta_n : n \in \omega\}$ açılımı vardır. Şimdi her $x \in X$ için $\bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \vartheta_n)} = \{x\}$ olduğunu görelim. Aksine $\bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \vartheta_n)} \neq \{x\}$ olacak biçimde bir $x \in X$ elemanının var olduğunu kabul edelim. $y \neq x$ olmak üzere $y \in \bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \vartheta_n)}$ olsun. X Moore uzayı olduğundan düzenli uzay, dolayısıyla Hausdorff uzaydır. $y \neq x$ olduğundan $x \in O_x$, $y \in O_y$ ve $O_x \cap O_y = \emptyset$ olacak şekilde O_x ve O_y açık kümeleri vardır. $x \in O_x$, $O_x \subset X$ açık ve $\{\text{st}(x, \vartheta_n) : n \in \omega\}$ kümesi x 'in bir komşuluklar tabanı olduğundan $\text{st}(x, \vartheta_{n_0}) \subset O_x$ olacak biçimde bir $n_0 \in \omega$ vardır. $y \in \bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \vartheta_n)}$ olduğundan $y \in \overline{\text{st}(x, \vartheta_{n_0})}$ dir. $y \in O_y$ ve $O_y \subset X$ açık olduğundan $\text{st}(x, \vartheta_{n_0}) \cap O_y \neq \emptyset$ dir. Diğer taraftan $\text{st}(x, \vartheta_{n_0}) \subset O_x$ olduğundan $O_x \cap O_y \neq \emptyset$ olur ki, bu durum $O_x \cap O_y = \emptyset$ olması ile çelişir. Sonuç olarak her $x \in X$ için $\bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \vartheta_n)} = \{x\}$ olduğundan X uzayı G_δ^* – diagonale sahiptir. ■

2.2.20. Tanım

X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere, eğer A kümesi, A kümesini kapsayan sayılabilir sayıdaki açık alt kümenin kapanışlarının kesişimi olarak yazılabiliyorsa A kümesine düzenli G_δ – küme denir.

2.2.21. Tanım

X bir topolojik uzay olmak üzere, X uzayının her açık örtüsünün yerel sonlu bir açık

incesi varsa X uzayına parakompakt uzay denir.

2.2.22. Tanım

X bir T_1 topolojik uzay olsun. X 'in kapalı alt kümelerinin her ayrık $\{K_i : i \in I\}$ ailesi için $K_i \subset V_i$ ve $i \neq j$ için $V_i \cap V_j = \emptyset$ olacak biçimde X 'in bir $\{V_i : i \in I\}$ açık alt kümeler ailesi bulunabiliyorsa X uzayına yığınsal-normal(collectionwise-normal) uzay denir.

2.2.23. Tanım

X bir topolojik uzay olsun. Her $K \subset X$ kapalı kümesi ve her $x \notin K$ için eğer $f(K) = 0$ ve $f(x) = 1$ olacak biçimde bir $f : X \rightarrow [0,1]$ sürekli fonksiyonu varsa X uzayına tamamen düzenli(completely regular) uzay denir.

2.2.24. Tanım

X bir topolojik uzay olsun. Eğer X uzayının her açık örtüsünün σ -ayrık kapalı incesi varsa, ya da buna denk olarak X 'in her φ açık örtüsü için X 'in açık örtülerinin öyle bir $\{\vartheta_n : n \in \omega\}$ dizisi var ve her $x \in X$ için $st(x, \vartheta_{n_0}) \subset U_0$ olacak şekilde bir $n_0 \in \omega$ ve bir $U_0 \in \varphi$ bulunabiliyorsa X uzayına subparakompakt uzay denir.

2.2.25. Tanım

X bir topolojik uzay olmak üzere X 'in her φ açık örtüsü için $\vartheta_n \prec \varphi$ olacak şekilde bir $\{\vartheta_n : n \in \omega\}$ açık örtüler dizisi var öyleki her $x \in X$ için $\{V : x \in V \text{ ve } V \in \vartheta_{n_0}\}$ kümesi sonlu olacak şekilde bir $n_0 \in \omega$ bulunabiliyorsa X uzayına submetakompakt uzay denir. Bu biçimdeki $\{\vartheta_n : n \in \omega\}$ açık örtüler dizisine φ 'nin bir θ -incesi denir.

2.2.26. Tanım

X bir topolojik uzay ve $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ X içinde bir ağ olsun. $p \in X$ olmak üzere, eğer p 'nin her U komşuluğu ve her $\lambda \in \Lambda$ için $x_\delta \in U$ olacak biçimde bir $\lambda < \delta$ varsa p 'ye $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ ağının bir değme noktası (cluster point) denir ve bu durum $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \succ p$ şeklinde gösterilir.

2.2.27. Tanım

X bir topolojik uzay olmak üzere A X 'in boştan farklı bir alt kümesi olsun. $p \in X$ olmak üzere p 'nin her U komşuluğu için $A \cap (U \setminus \{p\}) \neq \emptyset$ ise p 'ye A kümesinin bir yığılma noktası denir ve $p \in \tilde{A}$ şeklinde gösterilir.

2.2.28. Teorem

X bir T_1 -uzay olsun. $\{x_n : n \in \omega\} \subset X$ dizisi için $p \in \tilde{\{x_n : n \in \omega\}}$ ise $\{x_n : n \in \omega\} \succ p$ dir.

İspat

$\{x_n : n \in \omega\} \subset X$ ve $p \in \tilde{\{x_n : n \in \omega\}}$ olsun. $p \in \tilde{\{x_n : n \in \omega\}}$ olduğundan p 'nin her U açık komşuluğu için $\{x_n : n \in \omega\} \cap (U \setminus \{p\}) \neq \emptyset$ dir. X T_1 -uzay olduğundan p 'nin her U açık komşuluğu için $\{x_n : n \in \omega\} \cap (U \setminus \{p\})$ kümesinde sonsuz çoklukta eleman vardır. Şöyleki p 'nin bir U_0 komşuluğu için $\{x_n : n \in \omega\} \cap (U_0 \setminus \{p\})$ sonlu olsun. $\{x_n : n \in \omega\} \cap (U_0 \setminus \{p\})$ sonlu ve X T_1 -uzay olduğundan $\{x_n : n \in \omega\} \cap (U_0 \setminus \{p\})$ kümesi kapalıdır. Öyleyse $[\{x_n : n \in \omega\} \cap (U_0 \setminus \{p\})]^c \cap U_0$ kümesi p 'nin bir açık komşuluğudur.

$p \in \{x_n : n \in \omega\}$ olduğundan $\{x_n : n \in \omega\} \cap \left(\left(\left[\{x_n : n \in \omega\} \cap (U_0 \setminus \{p\}) \right]^c \cap U_0 \right) \setminus \{p\} \right) \neq \emptyset$

dir. Halbuki $\{x_n : n \in \omega\} \cap \left(\left(\left[\{x_n : n \in \omega\} \cap (U_0 \setminus \{p\}) \right]^c \cap U_0 \right) \setminus \{p\} \right) = \emptyset$ dir. Böylece

$\{x_n : n \in \omega\} \cap (U \setminus \{p\})$ sonsuz elemanlıdır. Böylelikle her $n \in \omega$ için $n_0 > n$ ve $x_{n_0} \in U$ olacak şekilde bir $n_0 \in \omega$ vardır. Buradan $\{x_n : n \in \omega\} \succ p$ olur. ■

2.2.29. Lemma

X uzayının kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul X içindeki her ağın bir değme noktasının var olmasıdır.

İspat

$\Rightarrow$: X bir kompakt uzay ve $\{x_\lambda : \lambda \in \wedge\} \subset X$ bir ağ olsun. $F_\delta = \overline{\{x_\lambda : \lambda \geq \delta\}}$ olsun.

$\delta \geq \sigma$ için $F_\delta = \overline{\{x_\lambda : \lambda \geq \delta\}} \subset \overline{\{x_\lambda : \lambda \geq \sigma\}} = F_\sigma$ olduğundan $\{F_\delta : \delta \in \wedge\}$ ailesi azalandır. $\{F_\delta : \delta \in \wedge\}$ ailesi sonlu arakesit özelliğine sahiptir. Çünkü sonlu bir

$\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k\} \subset \wedge$ kümesi için $\max\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k\} = \delta_{k_0}$ denilirse $\bigcap_{i=1}^k F_{\delta_i} = F_{\delta_{k_0}} \neq \emptyset$ dir.

X kompakt uzay olduğundan kapalı kümelerden oluşan sonlu arakesit özelliğine sahip her ailenin arakesiti boştan farklıdır. Öyleyse $\bigcap_{\lambda \in \wedge} F_\lambda \neq \emptyset$ dir. O halde $p \in \bigcap_{\lambda \in \wedge} F_\lambda$

olacak biçimde bir $p \in X$ vardır. Şimdi $\{x_\lambda : \lambda \in \wedge\} \succ p$ olduğunu görelim. Aksine

$\{x_\lambda : \lambda \in \wedge\} \not\succ p$ olsun. Böylece her $\lambda \geq \lambda_0$ için $x_\lambda \notin U$ olacak şekilde bir $\lambda_0 \in \wedge$ ve

p 'nin bir U açık komşuluğu vardır. O halde $\{x_\lambda : \lambda \geq \lambda_0\} \cap U = \emptyset$ dir. Buradan

$p \notin \overline{\{x_\lambda : \lambda \geq \lambda_0\}} = F_{\lambda_0}$ olup $p \notin \bigcap_{\lambda \in \wedge} F_\lambda$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Böylelikle her

$\{x_\lambda : \lambda \in \wedge\} \subset X$ ağının bir değme noktası vardır.

$\Leftarrow$: X içindeki her ağın bir değme noktası var olsun. $\mathcal{F}$ kapalı kümelerden oluşan

sonlu arakesit özelliğine sahip bir aile olsun. Şimdi $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$ olduğunu görelim.

$\wedge = \{\lambda : \lambda \subset \mathcal{F} \text{ ve } \lambda \text{ sonlu}\}$ kümesi üzerinde $\leq$ bağıntısını şöyle tanımlayalım.

$$\lambda = \{F_1, F_2, \dots, F_k\} \in \wedge \text{ ve } \sigma = \{\widetilde{F}_1, \widetilde{F}_2, \dots, \widetilde{F}_m\} \in \wedge \text{ olmak üzere } \lambda \leq \sigma \Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^m \widetilde{F}_i \subset \bigcap_{i=1}^k F_i$$

olsun. Şimdi $(\wedge, \leq)$ 'in yönlendirilmiş küme olduğunu görelim.

D1) Her $\lambda \in \wedge$ için $\lambda \leq \lambda$ olduğu açıktır.

D2) $\lambda \leq \sigma$ ve $\sigma \leq \theta$ ise $\lambda \leq \theta$ dir. Bunu ispatlamak için $\lambda = \{F_1, F_2, \dots, F_k\}$,

$$\sigma = \{F'_1, F'_2, \dots, F'_m\} \text{ ve } \theta = \{\widetilde{F}_1, \widetilde{F}_2, \dots, \widetilde{F}_n\} \text{ olsun. } \lambda \leq \sigma \text{ olduğundan } \bigcap_{i=1}^m F'_i \subset \bigcap_{i=1}^k F_i \text{ dir.}$$

$$\sigma \leq \theta \text{ olduğundan } \bigcap_{i=1}^n \widetilde{F}_i \subset \bigcap_{i=1}^m F'_i \text{ dir. Buradan } \bigcap_{i=1}^n \widetilde{F}_i \subset \bigcap_{i=1}^k F_i \text{ elde edilir. O halde } \lambda \leq \theta$$

olur.

D3) $\lambda \in \wedge$ ve $\theta \in \wedge$ ise $\lambda \leq \sigma$ ve $\theta \leq \sigma$ olacak şekilde bir $\sigma \in \wedge$ elemanının

var olduğunu görelim. $\sigma = \lambda \cup \theta$ alalım. Bu durumda $\lambda \leq \sigma$ ve $\theta \leq \sigma$ olur.

Böylelikle $(\wedge, \leq)$ bir yönlendirilmiş küme olur. $\mathcal{F}$ sonlu arakesit özelliğine sahip

olduğundan her $\lambda \in \wedge$ için $\bigcap \lambda = \bigcap \{F : F \in \lambda\} \neq \emptyset$ dir. Öyleyse her $\lambda \in \wedge$ için bir

$x_\lambda \in \bigcap \lambda$ seçebiliriz. Hipotezden $\{x_\lambda : \lambda \in \wedge\}$ ağının X içinde bir x değme noktası

vardır. Bunun için $x \in \bigcap \mathcal{F}$ olduğunu görelim. $x \notin \bigcap \mathcal{F}$ olduğunu kabul edelim. O

zaman $x \notin F_0$ olacak biçimde bir $F_0 \in \mathcal{F}$ vardır. $\{F_0\} = \lambda_0$ denilirse $\lambda_0 \in \wedge$ dir. Öte

yandan $\{x_\lambda : \lambda \in \wedge\} \succ x$, $x \in F_0^c$, $F_0^c \subset X$ açık ve $\lambda_0 \in \wedge$ olduğundan $x_{\sigma} \in F_0^c$

olacak biçimde bir $\sigma \geq \lambda_0$ vardır. Bu durumda $\bigcap \sigma \subset \bigcap \lambda_0$ olup $\bigcap \sigma \subset F_0$ dir. Böylece

$x_{\sigma} \in \bigcap \sigma \subset F_0$ olduğundan $x_{\sigma} \in F_0$ olur ki bu durum $x_{\sigma} \in F_0^c$ olması ile çelişir.

Öyleyse kabulümüz yanlış olup $x \in \bigcap \mathcal{F}$ dir. Böylece kapalı kümelerden oluşan ve

sonlu arakesit özelliğine sahip olan her $\mathcal{F}$ ailesi için $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$ olup X kompakt

uzaydır. ■

2.2.30. Tanım

X bir topolojik uzay ve $C \subset X$ olsun. Eğer C 'nin $C = A \cup B$ ve $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$

olacak biçimde boş olmayan A ve B alt kümeleri bulunamıyorsa C 'ye bağlantılı küme denir. Ayrıca C bağlantılı bir küme olmak üzere $C \subset A \cup B$ ve $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$ ise $C \subset A$ veya $C \subset B$ olduğu kolaylıkla görülebilir.

2.2.31. Tanım

X bir topolojik uzay olsun. Eğer her $x \in X$ için x 'in $\overline{U}$ kompakt olacak biçimde bir U komşuluğu varsa X uzayına yerel kompakt uzay denir.

2.2.32. Tanım

X topolojik uzayının her x elamanı ve x 'in her U açık komşuluğu için $x \in \overset{\circ}{C} \subset C \subset U$ olacak biçimde bir C bağlantılı kümesi varsa X uzayına yerel bağlantılı uzay denir.

2.3. Kümeler Kuramı ile ilgili Temel Tanım ve Teoremler

2.3.1. Tanım

X bir küme ve " $<$ " X üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer " $<$ " bağıntısı

- i) $x < y$ ve $y < z$ ise $x < z$ dir,
- ii) $x < y$ ise $y \not< x$ dir,
- iii) $x \neq y$ ise $x < y$ veya $y < x$ dir.

özelliklerini sağlıyorsa " $<$ " bağıntısına X üzerinde bir lineer (doğrusal) sıralama bağıntısı, $(X, <)$ ikilisine de doğrusal sıralı bir küme denir.

$(X, <)$ doğrusal sıralı bir küme olmak üzere eğer X 'in boştan farklı tüm alt kümelerinin bu sıralamaya göre bir en küçük elemanı varsa bu doğrusal sıralamaya iyi sıralama, X kümesine de iyi sıralanmış bir küme denir.

2.3.2. Tanım

X bir küme olmak üzere eğer " $x \in X \Rightarrow x \subset X$ ve $x \neq X$ " koşulu gerçekleşiyorsa X kümesine geçişli küme denir.

2.3.3. Tanım

Eleman olma " $\in$ " bağıntısına göre iyi sıralanmış X geçişli kümesine bir ordinal sayı denir. Bu tanıma göre bir α kümesine

- i) α kümesinin tüm elemanları kümedir,
- ii) $\beta \in \alpha$ ise $\beta \subset \alpha$ ve $\beta \neq \alpha$ dir,
- iii) " $\in$ " bağıntısı α kümesinde bir iyi sıralamadır,

koşullarını gerçeklerse bir ordinal sayı denir. İlk sonsuz ordinal sayı " ω ", ilk sayılamaz ordinal sayı " ω_1 " ile gösterilir.

2.3.4. Tanım

X iyi sıralanmış bir küme olmak üzere her $x \in X$ için $\{y \in X : y < x\} = I(x)$ kümesine başlangıç aralığı(initial segment) denir.

2.3.5. Teorem (Sonlu Ötesi Tümevarım İlkesi)

X iyi sıralı bir küme ve $Y \subset X$ olsun. Her $x \in X$ için " $I(x) \subset Y \Rightarrow x \in Y$ " olması için gerekli ve yeterli koşul $Y = X$ olmasıdır.

İspat

$\Leftarrow$: Teoremin bu kısmı açıktır.

$\Rightarrow$: X iyi sıralı bir küme ve $Y \subset X$ olsun. Her $x \in X$ için $I(x) \subset Y$ olması $x \in Y$

olmasını gerektirsin fakat $Y = X$ olmasın. O zaman $X \setminus Y \neq \emptyset$ olup X iyi sıralı olduğundan $X \setminus Y$ kümesinin bir x_0 en küçük elemanı vardır. Öyleyse $I(x_0) \subset Y$ olup hipotezden $x_0 \in Y$ dir. Bu durum $x_0 \in X \setminus Y$ olması ile çelişir. O halde $Y = X$ dir. ■

Yukarıdaki teorem şöyle de ifade edilebilir.

X iyi sıralı bir küme olmak üzere $\{P(x) : x \in X\}$ önermelerin bir kümesi olsun. Eğer;

- i) $P(0)$ doğru (0 X 'in en küçük elemanı)
 - ii) Her $x \in X$ için "her $\alpha < x$ için $P(\alpha)$ iken $P(x)$ oluyor"
- ise x için $P(x)$ dir.

Küme teori ile ilgili tanım ve kavramlar için “Kümeler Teorisine Giriş” adlı kitaba başvurulabilir[1].

2.4. Monoton Normal Uzaylar ve Doğrusal Sıralı Uzaylar

2.4.1. Tanım

$(X, \leq)$ tam sıralı bir küme ve $A \subset X$ olmak üzere eğer $p \leq q$ şeklinde olan her $p, q \in A$ için $\{x \in X : p \leq x \leq q\} \subset A$ oluyorsa A kümesine X 'in konveks bir alt kümesi denir.

2.4.2. Tanım

$(X, \leq)$ tam sıralı bir küme ve $x, y \in X$ olmak üzere $x < y$ olsun.
 $(x, \rightarrow) = \{z \in X : x < z\}$, $(\leftarrow, x) = \{z \in X : z < x\}$ ve $(x, y) = \{z \in X : x < z < y\}$
 kümelerine açık aralıklar, $[x, \rightarrow) = \{z \in X : x \leq z\}$, $(\leftarrow, x] = \{z \in X : z \leq x\}$ ve

$[x, y] = \{z \in X : x \leq z \leq y\}$ kümelerine de aralıklar denir. X kümesinin bütün açık aralıklarından oluşan aile topoloji tabanı olma özelliklerini sağlar ve bu ailenin ürettiği topolojiye doğrusal sıralı topoloji denir. Bu topoloji $\tau(\leq)$ ile gösterilir ve $(X, \leq, \tau(\leq))$ üçlüsüne doğrusal sıralı topolojik uzay denir.

2.4.3. Tanım

X bir Hausdorff uzay olmak üzere eğer X 'in her x elemanı ve x 'i içeren her U açık alt kümesi için öyle bir $G(x, U)$ açık alt kümesi varsa ve

- i) $x \in G(x, U) \subset U$,
 - ii) $x, y \in X$, $U, V \subset X$ açık ve $x \in U$, $y \in V$ olmak üzere $G(x, U) \cap G(y, V) \neq \emptyset$ olması $x \in V$ veya $y \in U$ olmasını gerektirir,
- koşulları sağlanıyorsa X topolojik uzayına monoton normal uzay denir.

Bu bölümde yer almayan temel tanım ve teoremler için R. Engelking'in "*General Topology*" ve J. Dugunji'nin "*Topology*" kitaplarına bakılabilir.

3. TEMEL METRİKLENEBİLME TEOREMLERİ, MOORE UZAYLARI VE TEMEL ÖRTÜ ÖZELLİKLERİ

Şimdi bazı özel koşullara sahip açık örtülerin oluşturduğu açık örtüler dizisini kullanarak bazı genelleştirilmiş metriklenebilme teoremlerinin ispatını verelim. Öncelikle çok iyi bilinen Bing – Nagata – Smirnov metriklenebilme teoremini ifade edelim. Üç matematikçi bu teoremi birbirinden bağımsız olarak kanıtlamışlardır. Bing teoremi σ – ayırık taban için kanıtlarken Nagata ve Smirnov ise σ – yerel sonlu taban için kanıtlamışlardır.

3.1. Uyarı

Bu çalışmada aksi belirtilmedikçe tüm uzaylar düzenli uzay ve T_1 – uzay alınacaktır.

X uzayının bir açık örtüler dizisi $\{\varphi_n : n \in \omega\}$ olsun. Her $n \in \omega$ için $\vartheta_n = \bigwedge_{k=1}^n \varphi_k$ şeklinde tanımlanan $\{\vartheta_n : n \in \omega\}$ dizisi her $n \in \omega$ için $\vartheta_{n+1} < \vartheta_n$ koşulunu sağlar.

3.2. Teorem

X düzenli uzayının metriklenebilir olması için gerekli ve yeterli koşul X 'in σ – yerel sonlu (σ – ayırık) tabana sahip olmasıdır[2-4].

3.3. Lemma

Her Moore uzayı subparakompakt uzaydır.

İspat

X bir Moore uzayı olsun. ϑ X 'in herhangi bir açık örtüsü olsun. X Moore uzayı olduğundan X için bir $\{\vartheta_n : n \in \omega\}$ açılımı vardır. Öyleyse her $x \in X$ için $\{st(x, \vartheta_n) : n \in \omega\}$ x için bir komşuluklar tabanıdır. $x \in X$ olsun. ϑ X 'in bir açık

örtüsü olduğundan $x \in U_0$ olacak biçimde bir $U_0 \in \mathcal{V}$ vardır. $x \in U_0, U_0 \subset X$ açık ve $\{st(x, \mathcal{V}_n) : n \in \omega\}$ x için bir komşuluklar tabanı olduğundan $st(x, \mathcal{V}_{n_0}) \subset U_0$ olacak biçimde bir $n_0 \in \omega$ vardır. Böylece 2.2.24. Tanım'dan X uzayı subparakompakt uzaydır.■

3.4. Teorem

X uzayının metriklenebilir olması için gerekli ve yeterli koşul X uzayının yığınsal-normal Moore uzayı olmasıdır[2].

İspat

$\Rightarrow$: X uzayı metriklenebilir uzay olsun. X uzayı metriklenebilir uzay olduğundan parakompakt uzaydır[5]. Şimdi parakompakt X uzayının yığınsal-normal uzay olduğunu görelim. Her $\lambda \in I$ için $F_\lambda \subset X$ kapalı olmak üzere $\{F_\lambda : \lambda \in I\}$ ailesi ayrık bir aile olsun. O zaman her $x \in X$ için $|\{\lambda \in I : G_x \cap F_\lambda \neq \emptyset\}| \leq 1$ ve $x \in G_x$ olacak şekilde bir $G_x \subset X$ açık kümesi vardır. X uzayı düzenli uzay olduğundan $x \in H_x \subset \overline{H_x} \subset G_x$ olacak şekilde bir $H_x \subset X$ açık alt kümesi vardır. Buradan X için $\mathcal{H} = \{H_x : x \in X\}$ açık örtüsü elde edilir. X uzayı parakompakt uzay olduğundan $\mathcal{W} \prec \mathcal{H}$ olacak şekilde yerel sonlu bir $\mathcal{W}$ açık örtüsü vardır. Her $\lambda \in I$ için $V_\lambda = \left(\bigcup \{ \overline{W} : W \in \mathcal{W}, \overline{W} \cap F_\lambda = \emptyset \} \right)^c$ olsun. Her $\lambda \in I$ için $F_\lambda \subset V_\lambda$ olduğu açıktır. $\mathcal{W}$ ailesi yerel sonlu ve yerel sonlu aileler kapanışı koruduğundan her $\lambda \in I$ için V_λ X 'in bir açık alt kümesidir. Şimdi $\{V_\lambda : \lambda \in I\}$ ailesinin ayrık aile olduğunu görelim. $x \in X$ olsun. $\mathcal{W}$, X için bir örtü olduğundan $x \in W_0$ olacak şekilde bir $W_0 \in \mathcal{W}$ vardır. Bu durumda $|\{\lambda \in I : W_0 \cap V_\lambda \neq \emptyset\}| \leq 1$ dır. Bunu kanıtlamak için $|\{\lambda \in I : W_0 \cap V_\lambda \neq \emptyset\}| > 1$ olduğunu kabul edelim. Öyleyse $W_0 \cap V_{\lambda_0} \neq \emptyset$, $W_0 \cap V_{\lambda_1} \neq \emptyset$ ve $\lambda_0 \neq \lambda_1$ olacak şekilde $\lambda_0, \lambda_1 \in I$ vardır. $W_0 \cap V_{\lambda_0} \neq \emptyset$ ve

$W_0 \cap V_{\lambda_1} \neq \emptyset$ olduğundan $\overline{W_0} \cap F_{\lambda_0} \neq \emptyset$ ve $\overline{W_0} \cap F_{\lambda_1} \neq \emptyset$ olur. Diğer taraftan $\mathcal{W} \prec \mathcal{H}$ olduğundan $W_0 \subset H_y$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır. O zaman $\overline{W_0} \subset \overline{H_y} \subset G_y$ dir. $\overline{W_0} \cap F_{\lambda_0} \neq \emptyset$ ve $\overline{W_0} \subset G_y$ olduğundan $G_y \cap F_{\lambda_0} \neq \emptyset$ dir. $\overline{W_0} \cap F_{\lambda_1} \neq \emptyset$ ve $\overline{W_0} \subset G_y$ olduğundan $G_y \cap F_{\lambda_1} \neq \emptyset$ dir. Bu durum her $x \in X$ için $|\{\lambda \in I : G_x \cap F_\lambda \neq \emptyset\}| \leq 1$ olması ile çelişir. O halde $\{V_\lambda : \lambda \in I\}$ ailesi ayrık bir ailedir.

$\Leftarrow$: X yığınsal normal Moore uzayı olsun. X Moore uzayı olduğundan X için bir $\{\vartheta_n : n \in \omega\}$ açılımı vardır. 3.3. Lemma'dan X subparakompakt uzay olup her $n \in \omega$ için ϑ_n açık örtüsünün σ -ayrık kapalı bir $\mathcal{F}_n$ incesi vardır. Her $n \in \omega$ için, $\mathcal{F}_n$ σ -ayrık kapalı olduğundan, her $n, m \in \omega$ için $\mathcal{F}_m^n$ kapalı ayrık bir aile olmak üzere $\mathcal{F}_n = \bigcup_{m \in \omega} \mathcal{F}_m^n$ biçimindedir. X yığınsal normal uzay olduğundan X 'in açık alt kümelerinin öyle bir ayrık $\{U_F : F \in \mathcal{F}_m^n\}$ ailesi vardır ki; her $F \in \mathcal{F}_m^n$ için $F \subset U_F$ dir. Aynı zamanda her $n \in \omega$ için $\mathcal{F}_n \prec \vartheta_n$ olduğundan her $F \in \mathcal{F}_m^n$ için $F \subset V_F$ olacak biçimde bir $V_F \in \vartheta_n$ vardır. Her $F \in \mathcal{F}_m^n$ için $V_F \cap U_F = B_F$ olmak üzere $\mathcal{B}_m^n = \{B_F : F \in \mathcal{F}_m^n\}$ ailesinin açık kümelerden oluşan ayrık bir aile olduğunu görmek kolaydır. Şimdi $\mathcal{B} = \bigcup \{\mathcal{B}_m^n : m, n \in \omega\}$ ailesinin X uzayı için bir taban olduğunu görelim. $x \in X$, $U \subset X$ açık olmak üzere $x \in U$ olsun. $\{\vartheta_n : n \in \omega\}$ X için bir açılım olduğundan $\{st(x, \vartheta_n) : n \in \omega\}$ ailesi x için bir komşuluklar tabanı olup $st(x, \vartheta_{n_0}) \subset U$ olacak biçimde bir $n_0 \in \omega$ vardır. $\mathcal{F}_{n_0}$ X için bir örtü olduğundan $x \in F$ olacak biçimde bir $F \in \mathcal{F}_{n_0}$ vardır. $\mathcal{F}_{n_0} = \bigcup_{m \in \omega} \mathcal{F}_m^{n_0}$ olduğundan $F \in \mathcal{F}_{m_0}^{n_0}$ olacak biçimde bir $m_0 \in \omega$ vardır. $F \subset U_F$ ve $F \subset V_F$ olduğundan $F \subset B_F$ dir. Aynı zamanda $x \in V_F$ ve $V_F \in \vartheta_{n_0}$ olduğundan $V_F \subset st(x, \vartheta_{n_0})$ olup $V_F \subset U$ dur. Böylece $x \in F \subset B_F \subset V_F \subset U$ olup $x \in B_F \subset U$ olacak biçimde bir $B_F \in \mathcal{B}$

bulunabileceğinden $\mathcal{B}$ ailesi X uzayı için bir tabandır. ■

3.5. Tanım (*Temel Sistem*)

$\{\vartheta_n : n \in \omega\}$ dizisi X topolojik uzayının açık örtülerinin bir dizisi olsun. Eğer, her $x \in X$ ve x 'in her V açık komşuluğu için $st(U, \vartheta_m) \subset V$ olacak biçimde bir $m \in \omega$ ve x 'in bir U açık komşuluğu varsa $\{\vartheta_n : n \in \omega\}$ dizisine X 'in açık örtülerinin bir Temel Sistemi denir[6].

Şimdi Moore metriklenebilme teoremini verelim.

3.6. Teorem (*Moore Metriklenebilme Teoremi*)

X bir T_0 –uzay olsun. X uzayının metriklenebilir olması için gerekli ve yeterli koşul X 'in bir temel sisteme sahip olmasıdır[7].

İspat

$\Rightarrow$: Her $n \in \omega$ için $\vartheta_n = \left\{ B\left(x, \frac{1}{2^n}\right) : x \in X \right\}$ olmak üzere $\{\vartheta_n : n \in \omega\}$ X metrik uzayı için bir temel sistemdir. Bunu ispatlamak için $x \in X$ ve $U \subset X$ açık olmak üzere $x \in U$ olsun. $U \subset X$ açık ve X metriklenebilir olduğundan $B\left(x, \frac{1}{2^k}\right) \subset U$ olacak biçimde bir $k \in \omega$ vardır. $B\left(x, \frac{1}{2^{k+1}}\right) = V$ olsun. Şimdi $st(V, \vartheta_{k+2}) \subset U$ olduğunu görelim. $y \in st(V, \vartheta_{k+2})$ olsun. O zaman $y \in B\left(z, \frac{1}{2^{k+2}}\right)$ ve $B\left(z, \frac{1}{2^{k+2}}\right) \cap V \neq \emptyset$ olacak biçimde bir $z \in X$ vardır. $q \in B\left(z, \frac{1}{2^{k+2}}\right) \cap V$ olsun.

$$\begin{aligned}
d(x, y) &\leq d(x, z) + d(z, y) \\
&\leq d(x, q) + d(q, z) + d(z, y) \\
&< \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+2}} + \frac{1}{2^{k+2}} = \frac{1}{2^k}
\end{aligned}$$

olup $d(x, y) < \frac{1}{2^k}$ dir. O halde $y \in B\left(x, \frac{1}{2^k}\right)$ dir. Böylece

$st(V, \vartheta_{k+2}) \subset B\left(x, \frac{1}{2^k}\right) \subset U$ olup $st(V, \vartheta_{k+2}) \subset U$ dir. O halde $\{\vartheta_n : n \in \omega\}$ bir temel sistemdir.

$\Leftarrow: \{\vartheta_n : n \in \omega\}$ X 'in açık örtülerinin bir temel sistemi olsun. Genelliği bozmadan $\vartheta_{n+1} \prec \vartheta_n$ olacak şekilde alabiliriz. Şimdi X 'in Moore uzay olduğunu görelim. Bu amaçla öncelikle her $x \in X$ için $\{st^2(x, \vartheta_n) : n \in \omega\}$ ailesinin x için bir komşuluklar tabanı olduğunu görelim. $U \subset X$ açık küme olmak üzere $x \in U$ olsun. Bu durumda $st(V, \vartheta_{n_0}) \subset U$ olacak biçimde x 'in açık bir V açık komşuluğu ve bir $n_0 \in \omega$ vardır. $x \in V$ ve V açık küme olduğundan, $st(H, \vartheta_{n_1}) \subset V$ ve $x \in H$ olacak şekilde bir H açık kümesi ve bir $n_1 \in \omega$ vardır. $n_0 + n_1 = m$ olsun. $m > n_0$ ve $m > n_1$ olduğundan $\vartheta_m \prec \vartheta_{n_0}$ ve $\vartheta_m \prec \vartheta_{n_1}$ dir. Bu durumda $st(H, \vartheta_m) \subset st(H, \vartheta_{n_1}) \subset V$ olur. Ayrıca $st(x, \vartheta_m) \subset st(H, \vartheta_m)$ olduğundan $st(x, \vartheta_m) \subset V$ ve $st(st(x, \vartheta_m), \vartheta_m) \subset st(V, \vartheta_m)$ olur. $st(V, \vartheta_m) \subset st(V, \vartheta_{n_0}) \subset U$ olduğundan $st(st(x, \vartheta_m), \vartheta_m) \subset V$ olur. $st^2(x, \vartheta_m) = st(st(x, \vartheta_m), \vartheta_m) \subset U$ olduğundan $\{st^2(x, \vartheta_n) : n \in \omega\}$ kümesi x elemanının bir komşuluklar tabanı olur. Şimdi $\overline{st(x, \vartheta_n)} \subset st^2(x, \vartheta_n)$ olduğunu görelim. $y \in \overline{st(x, \vartheta_n)}$ olsun. y 'nin her N komşuluğu için $N \cap st(x, \vartheta_n) \neq \emptyset$ dir. ϑ_n X 'in açık örtüsü olduğu için $y \in V_y$ olacak şekilde bir $V_y \in \vartheta_n$ vardır. V_y y 'nin komşuluğu olduğu için $V_y \cap st(x, \vartheta_n) \neq \emptyset$ dir. $st^2(x, \vartheta_n) = \bigcup \{A : A \cap st(x, \vartheta_n) \neq \emptyset, A \in \vartheta_n\}$ olduğundan $V_y \subset st^2(x, \vartheta_n)$ olur.

$y \in st^2(x, \vartheta_n)$ olduğundan $\overline{st(x, \vartheta_n)} \subset st^2(x, \vartheta_n)$ olur. Sonuç olarak x 'in her U açık komşuluğu için $st^2(x, \vartheta_{n_0}) \subset U$ olacak şekilde bir $n_0 \in \omega$ var ve $st(x, \vartheta_{n_0}) \subset \overline{st(x, \vartheta_{n_0})} \subset st^2(x, \vartheta_{n_0}) \subset U$ olduğundan X düzenli uzaydır ve $\{st(x, \vartheta_n) : n \in \omega\}$ kümesi x elemanının bir komşuluklar tabanı olup X Moore uzayıdır. Şimdi X uzayının yığınsal normal olduğunu görelim. X düzenli ve T_0 -uzay olduğundan T_1 -uzaydır. $\mathcal{F}$ X 'in kapalı alt kümelerinin ayrık bir ailesi olsun. $F \in \mathcal{F}$ ve $x \in F$ olsun. $\mathcal{F}$ ailesi ayrık olduğundan $(\bigcup\{H \in \mathcal{F} : H \neq F\}) \cap U_x = \emptyset$ olacak biçimde x 'in bir U_x açık komşuluğu vardır. $\{st^2(x, \vartheta_n) : n \in \omega\}$ ailesi x için bir komşuluklar tabanı olduğundan $st^2(x, \vartheta_{n(x)}) \subset U_x$ olacak biçimde bir $n(x) \in \omega$ vardır. $\bigcup_{x \in F} st(x, \vartheta_{n(x)}) = U_F$ denilirse $F \subset U_F$ ve $H \neq F$ biçimindeki her $H, F \in \mathcal{F}$ için $U_F \cap U_H = \emptyset$ dir. Gerçekten $H, F \in \mathcal{F}$ olmak üzere $H \neq F$ ve $p \in U_F \cap U_H$ olsun. Öyleyse $p \in st(x, \vartheta_{n(x)})$ ve $p \in st(y, \vartheta_{n(y)})$ olacak biçimde $x \in F$ ve $y \in H$ vardır. $n(x) \leq n(y)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\vartheta_{n(y)} \prec \vartheta_{n(x)}$ olup $st(y, \vartheta_{n(y)}) \subset st(y, \vartheta_{n(x)})$ dir. Öyleyse $p \in st(y, \vartheta_{n(x)})$ olup $p \in U$ ve $y \in U$ olacak biçimde bir $U \in \vartheta_{n(x)}$ vardır. Aynı zamanda $p \in st(x, \vartheta_{n(x)})$ olduğundan $st(x, \vartheta_{n(x)}) \cap U \neq \emptyset$ olup $U \subset st^2(x, \vartheta_{n(x)})$ dir. Öyleyse $y \in st^2(x, \vartheta_{n(x)})$ olur. Ancak $y \in H$ ve $H \neq F$ olduğundan $y \in (\bigcup\{H \in \mathcal{F} : H \neq F\}) \cap st^2(x, \vartheta_{n(x)})$ olur ki bu $(\bigcup\{H \in \mathcal{F} : H \neq F\}) \cap U_x = \emptyset$ olması ile çelişir. Böylece her $F \in \mathcal{F}$ için $F \subset U_F$ ve $\{U_F : F \in \mathcal{F}\}$ ikişer ikişer ayrık açık kümelerin bir ailesi olduğundan X yığınsal normal uzaydır. Böylece 3.4. Teorem'den X metriklenebilir uzaydır. ■

3.7. Lemma

X bir küme, ϑ ve φ X 'in alt kümelerinin birer ailesi ve $\vartheta \prec^R \varphi$ ise her $x \in X$ için

$st^2(x, \vartheta) \subset st(x, \varphi)$ dir.

İspat

$y \in st^2(x, \vartheta)$ olsun. Bu durumda $y \in A$ ve $A \cap st(x, \vartheta) \neq \emptyset$ olacak biçimde bir $A \in \vartheta$ vardır. $A \cap st(x, \vartheta) \neq \emptyset$ olduğundan $x \in A'$ ve $A' \cap A \neq \emptyset$ olacak biçimde bir $A' \in \vartheta$ vardır. $A, A' \in \vartheta$, $A' \cap A \neq \emptyset$ ve $\vartheta \prec^R \varphi$ olduğundan $A \cup A' \subset B$ olacak biçimde bir $B \in \varphi$ vardır. $\{x, y\} \subset A \cup A' \subset B$ olduğundan $y \in st(x, \varphi)$ olup $st^2(x, \vartheta) \subset st(x, \varphi)$ dir. ■

Şimdi Moore metriklenebilme teoremin basit bir sonucu olan Alexandrov-Urysohn metriklenebilme teoreminin ispatını verelim.

3.8. Teorem (Alexandrov-Urysohn Metriklenebilme Teoremi)

Bir X T_0 –uzayının metriklenebilir olması için gerekli ve yeterli koşul X 'in $\vartheta_{n+1} \prec^R \vartheta_n$ olacak biçimde bir $\{\vartheta_n : n \in \omega\}$ açılımına sahip olmasıdır[8].

İspat

$\Rightarrow$: X uzayı metriklenebilir uzay olsun. X uzayındaki metrik $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ olsun. Her $n \in \omega$ için $\vartheta_n = \left\{ B\left(x, \frac{1}{2^n}\right) : x \in X \right\}$ olsun. Şimdi (ϑ_n) açık örtüler dizisinin X için bir açılım olduğunu görelim. Bu amaçla X 'in her x elemanı için $\{st(x, \vartheta_n) : n \in \omega\}$ ailesinin x 'in bir komşuluklar tabanı olduğunu görelim. $x \in X$ ve $U \subset X$ açık küme olmak üzere $x \in U$ olsun. O zaman $B(x, \varepsilon) \subset U$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ sayısı vardır. $\frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \omega$ vardır. Buradan

$B\left(x, \frac{1}{2^{n_0}}\right) \subset B(x, \varepsilon)$ dir. Şimdi $st(x, \vartheta_{n_0+1}) \subset B\left(x, \frac{1}{2^{n_0}}\right)$ olduğunu görelim.

$z \in st(x, \vartheta_{n_0+1})$ olsun. $st(x, \vartheta_{n_0+1})$ kümesinin tanımından $x, z \in B\left(y, \frac{1}{2^{n_0+1}}\right)$ olacak

şekilde $B\left(y, \frac{1}{2^{n_0+1}}\right) \in \vartheta_{n_0+1}$ vardır. O zaman $d(x, y) < \frac{1}{2^{n_0+1}}$ ve $d(y, z) < \frac{1}{2^{n_0+1}}$ dir.

$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \frac{1}{2^{n_0+1}} + \frac{1}{2^{n_0+1}} = \frac{1}{2^{n_0}}$ olduğundan $z \in B\left(x, \frac{1}{2^{n_0}}\right)$ elde edilir.

Buradan $st(x, \vartheta_{n_0+1}) \subset B\left(x, \frac{1}{2^{n_0}}\right)$ ve $B\left(x, \frac{1}{2^{n_0}}\right) \subset B(x, \varepsilon)$ olduğundan

$st(x, \vartheta_{n_0+1}) \subset B(x, \varepsilon) \subset U$ olur. Bu durum $\{st(x, \vartheta_n) : n \in \omega\}$ ailesinin x 'in bir komşuluklar tabanı olduğunu gösterir. Dolayısıyla (ϑ_n) açık örtüler dizisi X için bir açılımdır.

Şimdi $\vartheta_{n+1} \prec^R \vartheta_n$ olduğunu görelim. $G \cap H \neq \emptyset$ olacak şekilde

$G = B\left(x, \frac{1}{2^{n+1}}\right) \in \vartheta_{n+1}$ ve $H = B\left(y, \frac{1}{2^{n+1}}\right) \in \vartheta_{n+1}$ elemanlarını alalım.

$B\left(x, \frac{1}{2^{n+1}}\right) \cap B\left(y, \frac{1}{2^{n+1}}\right) \neq \emptyset$ olduğundan $z \in B\left(x, \frac{1}{2^{n+1}}\right) \cap B\left(y, \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ olacak

biçimde bir $z \in X$ vardır. Kolaylıkla görülebilirki

$B\left(x, \frac{1}{2^{n+1}}\right) \cup B\left(y, \frac{1}{2^{n+1}}\right) \subset B\left(z, \frac{1}{2^n}\right)$ dir. ϑ_n 'nin tanımından $V = B\left(z, \frac{1}{2^n}\right) \in \vartheta_n$ dir.

$\Leftarrow$: X uzayının her $n \in \omega$ için $\vartheta_{n+1} \prec^R \vartheta_n$ olacak biçimde bir $\{\vartheta_n : n \in \omega\}$ açılımı var olsun. Bu açılımın X uzayı için bir temel sistem olduğunu göreceğiz. 3.7. Lemma'dan her $n \in \omega$ için $st^2(x, \vartheta_{n+1}) \subset st(x, \vartheta_n)$ dir.

Şimdi her $x \in X$ ve x 'in her U açık komşuluğu için $st(V, \vartheta_m) \subset U$ olacak şekilde x 'in bir V açık komşuluğunun ve bir $m \in \omega$ sayısının var olduğunu görelim. $x \in X$ ve $U \subset X$ açık olmak üzere $x \in U$ olsun. (ϑ_n) X için bir açılım olduğundan $st(x, \vartheta_{n_0}) \subset U$ olacak şekilde bir $n_0 \in \omega$ vardır. $st^2(x, \vartheta_{n_0+1}) \subset st(x, \vartheta_{n_0})$ olduğundan

$st^2(x, \vartheta_{n_0+1}) \subset st(x, \vartheta_{n_0}) \subset U$ olur. $st^2(x, \vartheta_{n_0+1}) = st(st(x, \vartheta_{n_0+1}), \vartheta_{n_0+1}) \subset U$ dır. $x \in st(x, \vartheta_{n_0+1})$ olup $V = st(x, \vartheta_{n_0+1})$ denilirse $st(V, \vartheta_{n_0+1}) \subset U$ elde edilir. Böylece $\{\vartheta_n : n \in \omega\}$ X uzayı için bir temel sistem olup 3.6. Teorem'den X uzayı metriklenebilirdir. ■

3.9. Sonuç

X uzayının metriklenebilir olması için gerekli ve yeterli koşul X 'in $\vartheta_{n+1} \prec^* \vartheta_n$ koşulunu sağlayan bir (ϑ_n) açılımının var olmasıdır.

İspat

$\Rightarrow$: X uzayı metriklenebilir uzay olsun. X uzayındaki metrik $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ olsun.

Her $n \in \omega$ $\vartheta_n = \left\{ B\left(x, \frac{1}{2^n}\right) : x \in X \right\}$ örtüler dizisini alırsak, $\{st(x, \vartheta_n), n \in \omega\}$

kümesi x elemanın bir komşuluklar tabanı olduğundan, (ϑ_n) dizisi bir açılımdır.

Şimdi $\vartheta_{n+1} \prec^* \vartheta_n$ olduğunu görelim. Bunun için X 'in her x elemanına karşılık $st(x, \vartheta_{n+1}) \subset V$ olacak şekilde bir $V \in \vartheta_n$ var olduğunu göstermek yeterlidir.

$y \in st(x, \vartheta_{n+1})$ olsun. O zaman $x, y \in B\left(z, \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ olacak şekilde bir $B\left(z, \frac{1}{2^{n+1}}\right) \in \vartheta_{n+1}$

vardır. Böylece $d(x, z) < \frac{1}{2^{n+1}}$ ve $d(y, z) < \frac{1}{2^{n+1}}$ olur. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

olduğundan $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}$ dir. Buradan $y \in B\left(x, \frac{1}{2^n}\right)$

olur. $V = B\left(x, \frac{1}{2^n}\right)$ alırsak $st(x, \vartheta_{n+1}) \subset V = B\left(x, \frac{1}{2^n}\right)$ olur. O halde $\vartheta_{n+1} \prec^* \vartheta_n$ dir.

$\Leftarrow$: (ϑ_n) , $\vartheta_{n+1} \prec^* \vartheta_n$ koşulunu sağlayan X 'in bir açılımı olsun. $U, V \in \vartheta_{n+1}$ ve

$U \cap V \neq \emptyset$ olsun. $U \cap V \neq \emptyset$ olduğundan $z \in U \cap V$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. $\vartheta_{n+1} \prec^* \vartheta_n$ olduğu için $st(z, \vartheta_{n+1}) \subset G$ olacak şekilde bir $G \in \vartheta_n$ vardır. $z \in U$ ve $U \in \vartheta_{n+1}$ olduğundan $U \subset st(z, \vartheta_{n+1}) \subset G$ dir. Benzer biçimde $V \subset st(z, \vartheta_{n+1}) \subset G$ dir. $U \subset G$ ve $V \subset G$ olduğundan $U \cup V \subset G$ olur. Böylece $\vartheta_n \prec^R \vartheta_{n+1}$ olup 3.8. Teorem'den X uzayı metriklenebilirdir. ■

4. G_δ –DİAGONALLER VE ALT METRİKLENEBİLİR UZAYLAR

Bu bölümde daha çok metriklenebilir ve açılabilir uzayları karakterize eden teoremler ifade edilip ispatlanacaktır. Bu toeromlerin çoğunda basit bir özellik olarak öne çıkan G_δ –diagonal özelliği kullanılacaktır.

Genelleştirilmiş metrik uzayların sınıflandırılması için oldukça faydalı olan G_δ –diagonale sahip uzayları karakterize eden teoremi vermeden önce kolayca ispatlanabilen aşağıdaki iki lemmayı ifade edip ispatlayalım.

4.1. Lemma

X topolojik uzayının Hausdorff olması için gerekli ve yeterli koşul $\Delta \subset X \times X$ kümesinin kapalı olmasıdır.

İspat

$\Rightarrow$: X uzayı Hausdorff uzay olsun. $(x,y) \in \Delta^c$ olsun. O zaman $x \neq y$ dir. X uzayı Hausdorff olduğundan $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $x \in U \subset X$ ve $y \in V \subset X$ açık kümeleri vardır. Buradan $U \times V \subset X \times X$ açık kümedir. $U \cap V = \emptyset$ olduğundan $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset$ olup $(x,y) \in U \times V \subset \Delta^c$ dir. Böylece Δ^c açık olup Δ kapalı kümedir.

$\Leftarrow$: $\Delta \subset X \times X$ kümesi kapalı olsun. $x \neq y$ olacak şekilde $x,y \in X$ olsun. $x \neq y$ olduğundan $(x,y) \in \Delta^c$ dir. Δ^c kümesi açık olduğundan $(x,y) \in U \times V \subset \Delta^c$ olacak biçimde $U \subset X$ ve $V \subset X$ açık kümeleri vardır. Sonuç olarak $x \neq y$ olmak üzere $x,y \in X$ noktalarının $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $x \in U \subset X$ ve $y \in V \subset X$ açık komşulukları var olduğu için X uzayı Hausdorff uzaydır. ■

4.2. Lemma

X topolojik uzayı Hausdorff ve $X \times X$ mükemmel uzay ise X G_δ -diagonale sahiptir.

İspat

$X \times X$ mükemmel olduğundan $X \times X$ 'nin kapalı her alt kümesi bir G_δ -kümedir. X uzayı Hausdorff olduğundan 4.1. Lemma'ya göre Δ diagonalı $X \times X$ içinde kapalıdır. Δ kapalı olduğundan G_δ -kümedir. Böylece X uzayı G_δ -diagonale sahiptir. ■

4.3. Lemma

Bir X uzayının G_δ -diagonale sahip olması için gerekli ve yeterli koşul X için bir $\{\vartheta_n : n \in \omega\}$ G_δ -diagonal dizisinin var olmasıdır.

İspat

$\Rightarrow$: X uzayı G_δ -diagonale sahip olsun. Bu durumda her $n \in \omega$ için U_n $U_n \subset X \times X$ açık küme olmak üzere, $\Delta = \bigcap_{n \in \omega} U_n$ dir. Her $n \in \omega$ için $\Delta \subset U_n$ olduğundan X 'in her x noktası ve her $n \in \omega$ için $(x, x) \in U_n$ dir. U_n 'ler açık kümeler olduklarından X 'in her x noktası ve her $n \in \omega$ için $g(n, x) \times g(n, x) \subset U_n$ olacak şekilde x 'in bir $g(n, x)$ açık komşuluğu vardır. Çünkü; X 'in her x noktası için $(x, y) \in U(n, x) \times V(n, x) \subset U_n$ olacak biçimde x 'in $U(n, x)$ ve $V(n, x)$ açık komşulukları vardır. $U(n, x)$ ve $V(n, x)$ x 'in açık komşulukları olduklarından $U(n, x) \cap V(n, x)$ de x 'in açık komşuluğudur. $g(n, x) = U(n, x) \cap V(n, x)$ olarak alırsak $g(n, x) \subset U(n, x)$ ve $g(n, x) \subset V(n, x)$ olur. Böylece

$g(n, x) \times g(n, x) \subset U(n, x) \times V(n, x) \subset U_n$ olur. Her $n \in \omega$ için $\vartheta_n = \{g(n, x) : x \in X\}$ olsun. Şimdi her $x \in X$ için $\bigcap_{n \in \omega} st(x, \vartheta_n) = \{x\}$ olduğunu görelim. Her $n \in \omega$ için $y \in st(x, \vartheta_n)$ olsun. O zaman her $n \in \omega$ için $\{x, y\} \subset g(n, z_n)$ olacak şekilde bir $z_n \in X$ vardır. Buradan her $n \in \omega$ için $(x, y) \subset g(n, z_n) \times g(n, z_n) \subset U_n$ olur. Her $n \in \omega$ için $(x, y) \in U_n$ olduğundan $(x, y) \in \bigcap_{n \in \omega} U_n = \Delta$ olur. Böylece $x = y$ olur. Sonuç olarak (ϑ_n) dizisi X için bir G_δ –diagonal dizisidir.

$\Leftarrow$: $\{\vartheta_n : n \in \omega\}$ X için bir G_δ –diagonal dizisi olsun. Her $n \in \omega$ için $U_n = \bigcup \{G \times G : G \in \vartheta_n\}$ olsun. Her $n \in \omega$ için ϑ_n ailesi X için bir örtü olduğundan $\Delta \subset \bigcap_{n \in \omega} U_n$ olur. $(x, y) \in \bigcap_{n \in \omega} U_n$ olsun. Her $n \in \omega$ için $(x, y) \in U_n$ olup her $n \in \omega$ için $(x, y) \in G \times G$ olacak şekilde bir $G \in \vartheta_n$ vardır. Bu durumda her $n \in \omega$ için $G \subset st(x, \vartheta_n)$ olduğundan $y \in st(x, \vartheta_n)$ olur. Öyleyse $y \in \bigcap_{n \in \omega} st(x, \vartheta_n)$ olup $\bigcap_{n \in \omega} st(x, \vartheta_n) = \{x\}$ dir. Böylece $x = y$ dir. O halde $\bigcap_{n \in \omega} U_n \subset \Delta$ olup $\Delta = \bigcap_{n \in \omega} U_n$ dir. Sonuç olarak X uzayı G_δ –diagonale sahiptir. ■

4.4. Teorem

G_δ –diagonale sahip olan her doğrusal sıralı uzay metriklenebilir[9].

İspat

X uzayı G_δ –diagonale sahip olan doğrusal sıralı bir uzay olsun. 4.3. Lemma’dan X için bir $\{\vartheta_n : n \in \omega\}$ G_δ –diagonal dizisi vardır. $\{\vartheta_n : n \in \omega\}$ açık örtüler dizisini $\vartheta_{n+1} \prec \vartheta_n$ olacak şekilde alabiliriz. Ayrıca doğrusal sıralı topolojik uzaylar konveks kümelerden oluşan bir tabana sahip olduğundan her $n \in \omega$ için ϑ_n ailesinin her bir

elemanını konveks kabul edebiliriz. Şimdi (ϑ_n) dizisinin X için bir açılım olduğunu görelim. Bunun için $\{st(x, \vartheta_n) : n \in \omega\}$ kümesinin x 'in komşuluklar tabanı olduğunu göstermeliyiz. $x \in X$ ve $U \subset X$ açık olmak üzere $x \in U$ olsun. Bu durumda $x \in (a, b) \subset U$ olacak şekilde $a, b \in X$ vardır. $\bigcap_{n \in \omega} st(x, \vartheta_n) = \{x\}$ olduğundan $a \notin st(x, \vartheta_{n(a)})$ ve $b \notin st(x, \vartheta_{n(b)})$ olacak şekilde $n(a), n(b) \in \omega$ vardır. $a \notin st(x, \vartheta_{n(a)})$ olduğu için $st(x, \vartheta_{n(a)}) \subset (a, \rightarrow)$ dir. Gerçekten $z \in st(x, \vartheta_{n(a)})$ olsun. $a \notin st(x, \vartheta_{n(a)})$, $z \in st(x, \vartheta_{n(a)})$, $a < x$ ve $\vartheta_{n(a)}$ konveks kümelerden oluştuğu için $a < z$ dir. Buradan $z \in (a, \rightarrow)$ olur. Böylece $st(x, \vartheta_{n(a)}) \subset (a, \rightarrow)$ dir. $b \notin st(x, \vartheta_{n(b)})$ olduğu için benzer biçimde $st(x, \vartheta_{n(b)}) \subset (\leftarrow, b)$ dir. Böylece $st(x, \vartheta_{n(a)}) \cap st(x, \vartheta_{n(b)}) \subset (a, b)$ olur. $n(a) + n(b) = n_0$ olsun. $n(a) \leq n_0$ olduğundan $\vartheta_{n_0} \prec \vartheta_{n(a)}$ olup $st(x, \vartheta_{n_0}) \subset st(x, \vartheta_{n(a)})$ dir. Aynı şekilde $n(b) \leq n_0$ olup $st(x, \vartheta_{n_0}) \subset st(x, \vartheta_{n(b)})$ dir. Böylece $st(x, \vartheta_{n_0}) \subset st(x, \vartheta_{n(a)}) \cap st(x, \vartheta_{n(b)})$ olup $st(x, \vartheta_{n_0}) \subset (a, b)$ dir. $(a, b) \subset U$ olduğu için $st(x, \vartheta_{n_0}) \subset U$ olur. Sonuç olarak $\{st(x, \vartheta_n) : n \in \omega\}$ kümesi x 'in bir komşuluklar tabanı olup (ϑ_n) açık örtüler dizisi X için bir açılımdır. Aynı zamanda doğrusal sıralı uzaylar düzenli olduğundan X Moore uzayıdır. Şimdi de X doğrusal sıralı uzayının monoton normal olduğunu görelim. X 'in her U açık alt kümesi ve her $x \in U$ için x 'i içeren ve " $U_x \cap V_y \neq \emptyset \Rightarrow x \in V$ veya $y \in U$ " koşulunu sağlayan bir U_x açık kümesinin karşılık getirilebileceğini görmeliyiz. α X üzerinde bir iyi sıralama bağıntısı olsun. $U \subset X$ açık ve $x \in U$ olsun. X doğrusal sıralı uzay olduğundan $x \in (a, b) \subset U$ olacak biçimde $a, b \in X$ vardır. $p_x = \min_{\alpha} \{p : a \leq p < x\}$ ve $q_x = \min_{\alpha} \{q : x < q \leq b\}$ olsun. $U_x = (p_x, q_x)$ denilirse $x \in U_x$ ve $U_x \subset X$ açık olur. U_x 'in " $U_x \cap V_y \neq \emptyset \Rightarrow x \in V$ veya $y \in U$ " koşulunu sağladığını görmek zor değildir. Böylece X uzayı monoton normal uzay olur. Son olarak X monoton normal uzayının yığınsal-normal olduğunu görelim.

$\mathcal{K}$ X 'in kapalı alt kümelerinin ayrık bir ailesi olsun. Her $F \in \mathcal{K}$ için $F^* = \bigcup \{H : H \neq F, H \in \mathcal{K}\} \subset X$ kümesi kapalıdır. Çünkü, $\mathcal{K}$ ailesi ayrık olduğundan yerel sonlu ailedir. Yerel sonlu ailelerde kapalı kümelerin birleşimi birleşimlerinin kapanışına eşittir. Ayrıca her $F \in \mathcal{K}$ için $F \cap F^* = \emptyset$ dir. X uzayı monoton normal uzay olduğundan X 'in kapalı ve ayrık her A, B alt küme çifti için

- i) $D(A, B) \cap D(B, A) = \emptyset$
- ii) $A \subset D(A, B) \subset \overline{D(A, B)} \subset B^c$
- iii) $A \subset A'$ ve $B' \subset B$ ise $D(A, B) \subset D(A', B')$
- iv) $D(A, B) \subset X$ açık küme

koşullarını sağlayan bir D monoton normal operatörü vardır. Her $F \in \mathcal{K}$ için $U_F = D(F, F^*)$ olsun. ii) özelliğinden $F \subset D(F, F^*)$ olduğundan $F \subset U_F$ olur. $H, F \in \mathcal{K}$ ve $H \neq F$ olsun. $H \subset F^*$ ve $F \subset F$ olduğundan iii) özelliğinden $D(F, F^*) \subset D(F, H)$ olur. Aynı şekilde $F \subset H^*$ ve $H \subset H$ olduğundan iii) özelliğinden $D(H, H^*) \subset D(H, F)$ olur. $U_H \cap U_F = D(H, H^*) \cap D(F, F^*) \subset D(H, F) \cap D(F, H)$ olur. i) özelliğinden $D(H, F) \cap D(F, H) = \emptyset$ olduğundan $U_H \cap U_F = \emptyset$ dir. Sonuç olarak her $H, F \in \mathcal{K}$ için $F \subset U_F$, $H \subset U_H$ olacak şekilde ikişer ikişer ayrık ve açık kümelerin bir $\{U_H : H \in \mathcal{K}\}$ ailesi bulunabildiğinden X uzayı yığınsal-normal uzaydır. 3.4. Teorem'den X uzayı metriklenebilirdir. ■

4.5. Tanım (Zenor Sistem)

$\{\vartheta_n : n \in \omega\}$ X topolojik uzayının açık örtülerinin bir dizisi olsun. Eğer her $n \in \omega$ için $\vartheta_{n+1} \prec \vartheta_n$ ise ve X 'in farklı her x, y elemanları için x ve y 'nin öyle V_x, V_y açık komşulukları var ve her $T \in \vartheta_{n_0}$ için $T \cap V_x = \emptyset$ veya $T \cap V_y = \emptyset$ olacak biçimde bir $n_0 \in \omega$ sayısı varsa $\{\vartheta_n : n \in \omega\}$ açık örtüler dizisine X 'in bir Zenor Sistemi denir[6].

4.6. Lemma

X topolojik uzayının düzenli G_δ – diagonale sahip olması için gerekli ve yeterli koşul X 'in açık örtülerinin “ $x \neq y$ olacak biçimde her $x, y \in X$ için x ve y 'nin öyle U_x, U_y açık komşulukları ve öyle bir $n_0 \in \omega$ sayısı vardır ki, her $G \in \mathfrak{U}_{n_0}$ için $G \cap U_x = \emptyset$ veya $G \cap U_y = \emptyset$ ” koşulunu sağlayan bir $\{\mathfrak{U}_n : n \in \omega\}$ dizisinin var olmasıdır[10].

İspat

$\Rightarrow$: Her $n \in \omega$ için $U_n \subset X$ açık olmak üzere $\Delta = \bigcap_{n \in \omega} U_n = \bigcap_{n \in \omega} \overline{U_n}$ olsun. Buradan her $x \in X$ ve her $n \in \omega$ için $(x, x) \in U_n$ ve $U_n \subset X \times X$ açık olup her $x \in X$ ve her $n \in \omega$ için $(x, x) \in H(n, x) \times T(n, x) \subset U_n$ olacak şekilde $H(n, x), T(n, x) \subset X$ açık kümeleri vardır. Her $x \in X$ ve her $n \in \omega$ için $H(n, x) \cap T(n, x) = G(n, x)$ denilirse $G(n, x) \subset X$ açık ve $(x, x) \in G(n, x) \times G(n, x) \subset U_n$ olur. Her $n \in \omega$ için $\mathfrak{U}_n = \{G(n, x) : x \in X\}$ olsun. $x, y \in X$ olmak üzere $x \neq y$ olsun. $x \neq y$ olduğundan $(x, y) \notin \bigcap_{n \in \omega} \overline{U_n}$ dir. Buradan $(x, y) \notin \overline{U_{n_0}}$ olacak şekilde bir $n_0 \in \omega$ vardır. $(x, y) \notin \overline{U_{n_0}}$ olduğundan $(x, y) \in U \times V$ ve $(U \times V) \cap U_{n_0} = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \subset X$ açık kümeleri vardır. Şimdi her $G \in \mathfrak{U}_{n_0}$ için $G \cap U = \emptyset$ veya $G \cap V = \emptyset$ olduğunu görelim. Aksine $G(n_0, z) \cap U \neq \emptyset$ ve $G(n_0, z) \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $z \in X$ elemanının var olduğunu kabul edelim. Buradan $p \in G(n_0, z) \cap U$ ve $q \in G(n_0, z) \cap V$ olacak şekilde $p, q \in X$ vardır. Böylelikle $(p, q) \in G(n_0, z) \times G(n_0, z) \subset U_{n_0}$ ve $(p, q) \in U \times V$ olur. Buradan $(p, q) \in U_{n_0} \cap (U \times V)$ olur. Fakat bu durum $U_{n_0} \cap (U \times V) = \emptyset$ olması ile çelişir.

$\Leftarrow$: X 'in açık örtülerinin hipotezdeki koşulu sağlayan bir $\{\mathfrak{U}_n : n \in \omega\}$ dizisi var olsun. Her $n \in \omega$ için $U_n = \bigcup \{G \times G : G \in \mathfrak{U}_n\}$ olsun. Her $n \in \omega$ için U_n kümesi

açık ve $\Delta \subset U_n$ dir. Buradan $\Delta \subset \bigcap_{n \in \omega} \overline{U_n}$ dir. Şimdi $\bigcap_{n \in \omega} \overline{U_n} \subset \Delta$ olduğunu görelim. Aksine $\bigcap_{n \in \omega} \overline{U_n} \not\subset \Delta$ olsun. Öyleyse $x \neq y$ olacak şekilde bir $(x, y) \in \bigcap_{n \in \omega} \overline{U_n}$ vardır. $x \neq y$ olduğundan, hipotezden öyle bir $n_0 \in \omega$ ve x ve y 'nin öyle U, V açık komşulukları vardır ki, her $G \in \mathfrak{V}_{n_0}$ için $G \cap U = \emptyset$ veya $G \cap V = \emptyset$ dir. $(x, y) \in \bigcap_{n \in \omega} \overline{U_n}$ olduğundan her $n \in \omega$ için $(x, y) \in \overline{U_n}$ olup $U_{n_0} \cap (U \times V) \neq \emptyset$ dir. Buradan $(U \times V) \cap (G_0 \times G_0) \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $G_0 \in \mathfrak{V}_{n_0}$ vardır. $(U \times V) \cap (G_0 \times G_0) \neq \emptyset$ olduğundan $(p, q) \in (U \times V) \cap (G_0 \times G_0) \neq \emptyset$ olacak şekilde $p, q \in X$ vardır. $p \in U \cap G_0$ ve $q \in V \cap G_0$ dir. Bu durum $G_0 \cap U = \emptyset$ veya $G_0 \cap V = \emptyset$ olması ile çelişir. Buradan $\bigcap_{n \in \omega} \overline{U_n} \subset \Delta$ dir. Böylelikle $\Delta = \bigcap_{n \in \omega} U_n = \bigcap_{n \in \omega} \overline{U_n}$ olduğundan X uzayı düzenli G_δ – diagonale sahiptir. ■

4.7. Sonuç

X topolojik uzayı düzenli G_δ – diagonale sahipse X 'in G_δ^* – diagonali vardır.

İspat

X uzayı düzenli G_δ – diagonale sahip olsun. Bu durumda X 'in 4.6. Lemma'daki gibi bir $\{\mathfrak{V}_n : n \in \omega\}$ açık örtüler dizisi vardır. Şimdi her $x \in X$ için $\bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \mathfrak{V}_n)} = \{x\}$ olduğunu görelim. $x \neq y$ olmak üzere $y \in \bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \mathfrak{V}_n)}$ olsun. 4.6. Lemma'dan $x \in U, y \in V$ ve her $G \in \mathfrak{V}_{n_0}$ için $G \cap U = \emptyset$ veya $G \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $n_0 \in \omega$ ve $U, V \subset X$ açık kümeleri vardır. O halde $y \in V, V \subset X$ açık ve $y \in \bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \mathfrak{V}_n)}$ olduğundan $V \cap \text{st}(x, \mathfrak{V}_{n_0}) \neq \emptyset$ dir. $V \cap \text{st}(x, \mathfrak{V}_{n_0}) \neq \emptyset$ olduğundan $x \in G_0$ ve $V \cap G_0 \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $G_0 \in \mathfrak{V}_{n_0}$ vardır. $x \in G_0$ ve $x \in U$ olduğundan $G_0 \cap U \neq \emptyset$ dir. Böylece $V \cap G_0 \neq \emptyset$ ve $G_0 \cap U \neq \emptyset$ olur. Bu durum

her $G \in \mathfrak{D}_{n_0}$ için $G \cap U = \emptyset$ veya $G \cap V = \emptyset$ olması ile çelişir. Böylelikle X uzayı G_δ^* –diagonale sahiptir.■

4.6. Lemma ve 3.1. Uyarı yardımıyla aşağıdaki sonucu verebiliriz.

4.8. Sonuç

X uzayının düzenli G_δ –diagonali varsa X 'in bir Zenor sistemi vardır.

Şimdi bir sonraki lemmanın ispatında kullanılmak üzere aşağıdaki lemmayı verelim

4.9. Lemma

X bir düzenli uzay, $x \in X$ ve her $n \in \omega$ için $U_n \subset X$ açık küme olmak üzere eğer $\bigcap_{n \in \omega} U_n = \{x\}$ ise her $n \in \omega$ için $\overline{V_{n+1}} \subset V_n$ ve $\bigcap_{n \in \omega} V_n = \{x\}$ olacak şekilde $V_n \subset X$ açık kümeleri vardır.

İspat

$x \in U_0$, $U_0 \subset X$ açık ve X düzenli uzay olduğundan $x \in V_0 \subset \overline{V_0} \subset U_0$ olacak biçimde bir V_0 açık kümesi vardır. $x \in U_1 \cap V_0$ ve X düzenli uzay olduğundan $x \in V_1 \subset \overline{V_1} \subset V_0 \cap U_1$ olacak biçimde bir V_1 açık kümesi vardır. $x \in U_2 \cap V_1$ ve X düzenli uzay olduğundan $x \in V_2 \subset \overline{V_2} \subset V_1 \cap U_2$ olacak biçimde bir V_2 açık kümesi vardır. Aynı şekilde devam edilirse $x \in U_{n+1} \cap V_n$ ve X düzenli uzay olduğundan $x \in V_{n+1} \subset \overline{V_{n+1}} \subset V_n \cap U_{n+1}$ olacak biçimde bir V_{n+1} açık kümesi vardır. Böylece her $n \in \omega$ için $\overline{V_{n+1}} \subset V_n$ ve $x \in V_n \subset U_n$ olduğundan $x \in \bigcap_{n \in \omega} V_n \subset \bigcap_{n \in \omega} U_n = \{x\}$ dir.

Buradan $\bigcap_{n \in \omega} V_n = \{x\}$ olur.■

4.10. Tanım

X bir topolojik uzay, $A \subset X$ olsun. Eğer X 'in A kümesi ile kesişen açık alt kümelerinin sonsuz her $\mathcal{V}$ ailesi için $\overline{\bigcap \{V : V \in \mathcal{V}\}} \neq \emptyset$ ise A alt kümesine X içinde sınırlıdır denir. Eğer X kendi içinde sınırlı ise X uzayına pseudokompakt uzay denir.

4.11. Lemma

X düzenli uzay, A X 'in sınırlı bir alt kümesi ve $a \in A$ olmak üzere $\{a\}$ kümesi X içinde G_δ – küme ise A uzayı a noktasında birinci sayılabilir uzaydır[6].

İspat

$a \in A$ olmak üzere $\{a\}$ X içinde bir G_δ – küme olduğundan X 'in $\bigcap_{n \in \omega} T_n = \{a\}$ olacak biçimde $T_n \subset X$ açık alt kümeleri vardır. X düzenli uzay olduğundan 4.9. Lemma'dan her $n \in \omega$ için $\overline{V_{n+1}} \subset V_n$ ve $\bigcap_{n \in \omega} V_n = \{a\}$ olacak biçimde $V_n \subset X$ açık kümeleri vardır. Her $n \in \omega$ için $V_n \cap A = W_n$ diyelim. Şimdi $\{W_n : n \in \omega\}$ ailesinin A uzayında a 'nın bir komşuluklar tabanı olduğunu görelim. G , A içinde açık bir küme olmak üzere $a \in G$ olsun. G , A içinde açık olduğundan $G = A \cap H$ olacak biçimde bir $H \subset X$ açık kümesi vardır. Bu durumda $a \in H$, $H \subset X$ açık küme ve X düzenli uzay olduğundan $a \in O \subset \overline{O} \subset H$ olacak biçimde bir $O \subset X$ açık kümesi vardır. Şimdi $W_{n_0} \subset \overline{O}$ olacak biçimde bir $n_0 \in \omega$ bulunabileceğini görelim. Her $n \in \omega$ için $W_n \not\subset \overline{O}$ olduğunu kabul edelim. Öyleyse her $n \in \omega$ için $W_n \setminus \overline{O} \neq \emptyset$ dir. Her $n \in \omega$ için $V_n \setminus \overline{O} = U_n$ denilirse $U_n \subset X$ açık ve $U_n \cap A = W_n \setminus \overline{O}$ olur. Her $n \in \omega$ için $W_n \setminus \overline{O} \neq \emptyset$ olduğundan her $n \in \omega$ için $U_n \cap A \neq \emptyset$ dir. Öyleyse $\{U_n : n \in \omega\}$ X 'in açık alt kümelerinin sonsuz bir ailesi, her $n \in \omega$ için $U_n \cap A \neq \emptyset$ ve A sınırlı olduğundan $\overline{\bigcap_{n \in \omega} U_n} \neq \emptyset$ dir. $z \in \overline{\bigcap_{n \in \omega} U_n}$ olsun. Her $n \in \omega$ için

$\overline{U_n} \cap O = \emptyset$ olduğundan $z \notin O$ dur. $\bigcap_{n \in \omega} U_n \subset \bigcap_{n \in \omega} V_n$ olduğundan $z \in \overline{\bigcap_{n \in \omega} V_n}$ dir. Her $n \in \omega$ için $\overline{V_{n+1}} \subset V_n$ olduğundan $\bigcap_{n \in \omega} \overline{V_n} = \bigcap_{n \in \omega} V_n = \{a\}$ olup $\bigcap_{n \in \omega} \overline{V_n} = \{a\}$ dir. O halde $z \in \overline{\bigcap_{n \in \omega} V_n} \subset \bigcap_{n \in \omega} \overline{V_n} = \{a\}$ olduğundan $z = a$ olmak zorundadır. Fakat bu durum $z \notin O$ olması ile çelişir. Böylece $W_{n_0} \subset \overline{O} \subset H \subset G$ olacak biçimde bir $n_0 \in \omega$ vardır. ■

4.12. Lemma

X , düzenli G_δ –diagonale sahip düzenli bir uzay ve A X 'in sınırlı bir alt kümesi olsun. Bu durumda X 'in açık örtülerinin her Zenor Sistemi'nin A 'ya kısıtlanması A 'nın açık örtülerinin bir temel sistemidir[6].

İspat

X uzayı düzenli G_δ –diagonale sahip olduğundan G_δ –diagonale sahip olup her $x \in X$ noktası bir G_δ –noktadır. Öyleyse A 'nın her a elemanı bir G_δ –noktadır. Böylece 4.11. Lemma'dan A birinci sayılabilir uzay olur. $\{\theta_n : n \in \omega\}$ X 'in açık örtülerinin bir Zenor sistemi olsun. Her $n \in \omega$ için $\vartheta_n = \{O \cap A : O \in \theta_n\}$ olmak üzere $\{\vartheta_n : n \in \omega\}$ dizisinin A için bir temel sistem olduğunu görelim. $a_0 \in A$ olsun. $G \subset A$, A 'da açık olmak üzere $a_0 \in G$ olsun. O zaman $G = H \cap A$ olacak biçimde bir $H \subset X$ açık kümesi vardır. $a_0 \in H$ ve X düzenli uzay olduğundan $a_0 \in T \subset \overline{T} \subset H$ olacak biçimde bir $T \subset X$ açık kümesi vardır. A birinci sayılabilir olduğundan a_0 noktasının azalan ve sayılabilir bir $\{V_n : n \in \omega\}$ komşuluklar tabanı vardır. $\{\theta_n : n \in \omega\}$ ailesi bir Zenor sistem olduğundan $\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(V_n, \theta_n) = \{a_0\}$ dir. Gerçekten her $n \in \omega$ için θ_n örtü olduğundan $a_0 \in \bigcap_{n \in \omega} \text{st}(V_n, \theta_n)$ dir. Diğer taraftan $y \neq a_0$ olmak üzere $y \in \bigcap_{n \in \omega} \text{st}(V_n, \theta_n)$ olsun. $y \neq a_0$ ve $\{\theta_n : n \in \omega\}$ Zenor sistem

olduğundan $a_0 \in G$, $y \in U$ ve her $O \in \theta_{n_0}$ için $O \cap G = \emptyset$ veya $O \cap U = \emptyset$ olacak şekilde $U, G \subset X$ açık kümeleri ve $n_0 \in \omega$ vardır. $a_0 \in G$, $G \subset X$ açık küme ve $\{V_n : n \in \omega\}$ a_0 'ın komşuluklar tabanı olduğundan $a_0 \in V_{m_0} \subset G$ olacak biçimde bir $m_0 \in \omega$ vardır. $\max\{n_0, m_0\} = k_0$ olsun. $n_0 \leq k_0$ ve $\{\theta_n : n \in \omega\}$ Zenor sistem olduğundan $\vartheta_{k_0} \prec \theta_{n_0}$ dir. $m_0 \leq k_0$ ve $\{V_n : n \in \omega\}$ azalan olduğundan $V_{k_0} \subset V_{m_0}$ dir. $y \in \bigcap_{n \in \omega} \text{st}(V_n, \theta_n)$ olduğundan $y \in \text{st}(V_{k_0}, \theta_{k_0})$ dir. Buradan $V_{k_0} \cap O \neq \emptyset$ ve $y \in O$ olacak biçimde bir $O \in \theta_{k_0}$ vardır. $\theta_{k_0} \prec \theta_{n_0}$ ve $O \in \theta_{k_0}$ olduğundan $O \subset \tilde{O}$ olacak biçimde bir $\tilde{O} \in \theta_{n_0}$ vardır. Buradan $V_{k_0} \cap \tilde{O} \neq \emptyset$ dir. $V_{k_0} \subset V_{m_0}$ olduğundan $V_{m_0} \cap \tilde{O} \neq \emptyset$ dir. $V_{m_0} \subset G$ olduğundan $G \cap \tilde{O} \neq \emptyset$ dir. Diğer taraftan $y \in O$ olduğundan $y \in \tilde{O}$ olur. Buradan $\tilde{O} \cap U \neq \emptyset$ olur. Bu durum θ_{n_0} ailesinin her O elemanı için $O \cap G = \emptyset$ veya $O \cap U = \emptyset$ olması ile çelişir. Böylece $\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(V_n, \theta_n) = \{a_0\}$ dir. $a_0 \in T$ olduğundan $\bigcap_{n \in \omega} (\text{st}(V_n, \theta_n) \setminus \bar{T}) = \emptyset$ olup $\overline{\bigcap_{n \in \omega} (\text{st}(V_n, \theta_n) \setminus \bar{T})} = \emptyset$ dir. O halde $\{\text{st}(V_n, \theta_n) \setminus \bar{T} : n \in \omega\}$ ailesi X 'in açık alt kümelerinin sonsuz bir alt ailesi ve A sınırlı olduğundan $(\text{st}(V_{n_0}, \theta_{n_0}) \setminus \bar{T}) \cap A = \emptyset$ olacak biçimde bir $n_0 \in \omega$ vardır. O halde $\text{st}(V_{n_0}, \theta_{n_0}) \cap A \subset \bar{T} \subset H$ olup $\text{st}(V_{n_0}, \vartheta_{n_0}) \subset G$ dir. Böylece $\{\vartheta_n : n \in \omega\}$ dizisinin A için temel sistemi olduğu görülmüş olur. ■

4.13. Teorem

X düzenli uzay olmak üzere, eğer X 'in düzenli G_δ –diagonali varsa X 'in sınırlı her A alt uzayının kapanışı metriklenebilirdir[6].

İspat

X uzayının düzenli G_δ -diagonali varsa 4.8. Sonuç'tan X 'in açık örtülerinin bir $\{\theta_n : n \in \omega\}$ Zenor sistemi vardır. A sınırlı olduğundan $\overline{A}$ sınırlıdır. $\overline{A}$ sınırlı ve $\{\theta_n : n \in \omega\}$ Zenor sistem olduğundan 4.12. Lemma'dan $\{\theta_n \mid A : n \in \omega\}$ ailesi A 'nın bir temel sistemidir. O halde 3.6. Teorem'den $\overline{A}$ metriklenebilirdir. ■

Altmetriklenebilir uzay olmayı karakterize eden teoremin ispatında kullanılacak olan iki önemli lemmayı ispatlayalım. İlk olarak üçgen eşitsizliğini sağlayan önemli bir uzaklık fonksiyonunu tanımlayan 4.14. Lemma'yı verelim.

4.14. Lemma

X bir küme olmak üzere;

$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu,

(*) Her $\varepsilon > 0$ için; eğer $d(x, y) < \varepsilon$ ve $d(y, z) < \varepsilon$ ise $d(x, z) < 2\varepsilon$

koşulunu sağlasın.

Bu durumda her $x, y, z \in X$ için ;

$$i) \quad p(x, y) \leq p(x, z) + p(z, y),$$

$$ii) \quad \frac{d(x, y)}{4} \leq p(x, y) \leq d(x, y),$$

$$iii) \quad \text{Eğer } d(x, y) = d(y, x) \text{ ise } p(x, y) = p(y, x)$$

koşullarını sağlayan bir $p : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu vardır[11].

İspat

$p : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu her $x, y \in X$ için

$$p(x, y) = \inf \left\{ \sum_{i=0}^n d(x_i, x_{i+1}) : x_0 = x, x_{n+1} = y, \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset X, n \in \omega \right\} \quad \text{biçiminde}$$

tanımlayalım. Şimdi p fonksiyonunun (i),(ii) ve (iii) koşullarını sağladığını ispatlayalım.

(i): X 'in bütün sonlu $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ve $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ alt kümeleri için

$$p(x, y) \leq (d(x, x_1) + d(x_1, x_2) + \dots + d(x_n, z)) + (d(z, y_1) + d(y_1, y_2) + \dots + d(y_m, y))$$

eşitsizliği doğru olduğu için iki kez infimum alınarak $p(x, y) \leq p(x, z) + p(z, y)$ olduğu kolayca görülebilir.

(ii): $d(x, y)$ infimumu alınan kümenin bir elemanı olduğundan $p(x, y) \leq d(x, y)$

olduğu açıktır. Öyleyse $\frac{d(x, y)}{4} \leq p(x, y)$ olduğunu görelim. Bu amaçla öncelikle

X 'in $\{a, x_1, x_2, \dots, x_n, b\}$ biçimindeki bütün sonlu alt kümeleri için

$$d(a, b) \leq 2d(a, x_1) + 4 \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}) + 2d(x_n, b) \quad \text{eşitsizliğinin doğru olduğunu}$$

görelim. $n = 1$ için; $d(a, x_1) \leq d(a, x_1) + d(x_1, b)$ ve $d(x_1, b) \leq d(x_1, b) + d(a, x_1)$

eşitsizlikleri doğru olduğundan, $d(x_1, b) + d(a, x_1) = \varepsilon$ denirse (*)'dan $d(a, b) \leq 2\varepsilon$

olup $d(a, b) \leq 2d(x_1, b) + 2d(a, x_1)$ elde edilir. Öyleyse iddia $n = 1$ için doğrudur.

Şimdi $n > 1$ olmak üzere, iddia her $m < n$ için doğru olsun. $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset X$ olsun.

(*)'dan, $1 \leq i \leq n$ biçimindeki her i için $d(a, b) \leq 2d(a, x_i)$ veya $d(a, b) \leq 2d(x_i, b)$

olduğu kolayca görülebilir. Eğer $d(a, b) \leq 2d(x_n, b)$ ise bu durumda aradığımız

eşitsizlik sağlanır. Eğer $d(a, b) \not\leq 2d(x_n, b)$ ise $d(a, b) \leq 2d(a, x_n)$ olmak

zorundadır. $i_0 = \min\{i : 1 \leq i \leq n \text{ ve } d(a, b) \leq 2d(a, x_i)\}$ olsun. Eğer $i_0 = 1$ ise

aradığımız eşitsizlik sağlanır. Eğer $i_0 > 1$ ise i_0 'ın minimal olmasından

$d(a, b) \leq 2d(x_{i_0-1}, b)$ dir. Aynı zamanda $d(a, b) \leq 2d(a, x_{i_0})$ olduğundan

$d(a, b) \leq d(a, x_{i_0}) + d(x_{i_0-1}, b)$ olur. İddia $m < n$ biçimindeki her m sayısı için doğru

olduğundan i_0 ve $i_0 - 1$ sayıları için de doğrudur. Öyleyse

$$d(a, b) \leq 2d(a, x_1) + 4 \sum_{i=1}^{i_0-2} d(x_i, x_{i+1}) + 2d(x_{i_0-1}, x_{i_0}) + \\ 2d(x_{i_0-1}, x_{i_0}) + 4 \sum_{i=i_0}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}) + 2d(x_n, b)$$

olup $d(a, b) \leq 2d(a, x_1) + 4 \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}) + 2d(x_n, b)$ eşitsizliği elde edilir.

Şimdi $\frac{d(x, y)}{4} \leq p(x, y)$ eşitsizliğinin doğru olduğunu görebiliriz. Bunun için

$$\frac{d(x, y)}{4} \text{ sayısının } S = \left\{ \sum_{i=0}^n d(x_i, x_{i+1}) : x_0 = x, x_{n+1} = y, \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset X, n \in \omega \right\}$$

kümesi için bir alt sınır olduğunu görmeliyiz. Aksine $\frac{d(x, y)}{4}$ sayısı S kümesi için

bir alt sınır olmasın. O zaman $d(x, x_1) + d(x_1, x_2) + \dots + d(x_n, y) < \frac{d(x, y)}{4}$ olacak

biçimde bir $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset X$ alt kümesi vardır. Bu eşitsizlikten

$$2d(x, x_1) + 2d(x_n, y) + \left(2d(x, x_1) + 4 \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}) + 2d(x_n, y) \right) < d(x, y) \text{ olup}$$

$$2d(x, x_1) + 4 \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}) + 2d(x_n, y) \geq d(x, y) \text{ ve buradan}$$

$2d(x, x_1) + 2d(x_n, y) + d(x, y) < d(x, y)$ eşitsizliği elde edilir. Ancak son

eşitsizlikten $d(x, x_1) + d(x_n, y) < 0$ olur ki bu çelişkidir. Öyleyse $\frac{d(x, y)}{4}$ sayısı S

kümesi için bir alt sınır olmak zorundadır. O halde $\frac{d(x, y)}{4} \leq \inf S = p(x, y)$ olup

$$\frac{d(x, y)}{4} \leq p(x, y) \text{ dir. Böylece } \frac{d(x, y)}{4} \leq p(x, y) \leq d(x, y) \text{ olduğu görülmüş olur.}$$

Eğer d simetrik ise bu durumda infimumuna bakılan kümeler aynı olacağından p de simetrik olur. ■

4.15. Lemma

X bir topolojik uzay ve her $n \in \omega$ için $\vartheta_{n+1} \prec^R \vartheta_n$ olmak üzere $\{\vartheta_n : n \in \omega\}$ X 'in açık örtülerinin bir dizisi olsun. Bu durumda X üzerinde öyle bir p sözde metriği vardır ki;

$$i) \quad y \in \bigcap_{n \in \omega} st(x, \vartheta_n) \Leftrightarrow p(x, y) = 0$$

ii) U kümesinin p sözde metriği tarafından oluşturulan topolojiye göre açık küme olması için gerekli ve yeterli koşul her $x \in U$ için $st(x, \vartheta_{n_0}) \subset U$ olacak şekilde en az bir $n_0 \in \omega$ vardır, koşulları sağlanır.

İspat

$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonunu $x, y \in X$ olmak üzere

$$d(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & ; \text{ Her } k < n \text{ için } y \in st(x, \vartheta_k) \text{ ve } y \notin st(x, \vartheta_n) \text{ olacak biçimde bir } n \in \omega \text{ var} \\ 0 & ; \text{ Her } n \in \omega \text{ için } y \in st(x, \vartheta_n) \end{cases}$$

şekilde tanımlayalım. $x \in st(y, \vartheta_n) \Leftrightarrow y \in st(x, \vartheta_n)$ olduğundan her $x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$ olduğunu görmek kolaydır. Eğer $d(x, y) = 0$ ise her $n \in \omega$ için $y \in st(x, \vartheta_n)$ olur. $y \in st(x, \vartheta_n)$ olduğundan $x \in st(y, \vartheta_n)$ dir. Buradan her $n \in \omega$ için $x \in st(y, \vartheta_n)$ olduğundan $d(y, x) = 0$ olur. Buradan $d(x, y) = d(y, x)$ olur. Şimdi $\varepsilon > 0$ olmak üzere $d(x, y) < \varepsilon$ ve $d(y, z) < \varepsilon$ ise $d(x, z) < 2\varepsilon$ olduğunu görelim. $\varepsilon > 0$ olmak üzere $d(x, y) < \varepsilon$ ve $d(y, z) < \varepsilon$ fakat $d(x, z) \geq 2\varepsilon$ olduğunu kabul edelim.

$n_0 \in \omega$ olmak üzere $d(x, y) = \frac{1}{2^{n_0}}$ ve $d(y, z) = 0$ ise;

$$\frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon \text{ olduğundan } \frac{1}{2^{n_0-1}} < 2\varepsilon \leq d(x, z) \text{ dir. } \frac{1}{2^{n_0-1}} < d(x, z) \text{ olduğundan } d(x, z) \neq 0$$

olup $d(x, z) = \frac{1}{2^m}$ ve $m < n_0 - 1$ olacak şekilde bir $m \in \omega$ vardır. $d(x, z) = \frac{1}{2^m}$ olduğundan her $k < m$ için $x \in st(z, \vartheta_k)$ ve $x \notin st(z, \vartheta_m)$ dir. $d(x, y) = \frac{1}{2^{n_0}}$ olduğundan her $k < n_0$ için $x \in st(y, \vartheta_k)$ ve $x \notin st(y, \vartheta_{n_0})$ dir. $d(y, z) = 0$ olduğundan her $n \in \omega$ için $y \in st(z, \vartheta_n)$ dir. $m < n_0 - 1$ olduğundan $m + 1 < n_0$ dir. O zaman $x \in st(y, \vartheta_{m+1})$ ve $y \in st(z, \vartheta_{m+1})$ dir. $x \in st(y, \vartheta_{m+1})$ olduğundan $x, y \in V$ olacak şekilde bir $V \in \vartheta_{m+1}$ vardır. $y \in st(z, \vartheta_{m+1})$ olduğundan $y, z \in T$ olacak şekilde bir $T \in \vartheta_{m+1}$ vardır. Buradan $y \in T \cap V$ olup $T \cap V \neq \emptyset$ dir. $\vartheta_{m+1} \prec^R \vartheta_m$ olduğundan $T \cup V \subset H$ olacak şekilde bir $H \in \vartheta_m$ vardır. $x, z \in H$ ve $H \in \vartheta_m$ olduğundan $x \in st(z, \vartheta_m)$ dir. Bu durum $x \notin st(z, \vartheta_m)$ olmasıyla çelişir.

$d(y, z) = \frac{1}{2^{n_0}}$ ve $d(x, y) = 0$ olması durumu da benzerdir.

$d(x, y) = \frac{1}{2^{n_0}}$ ve $d(y, z) = \frac{1}{2^{n_1}}$ ise;

$n_0 \leq n_1$ olsun. Bu durumda $\frac{1}{2^{n_1}} \leq \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$ olup $\frac{1}{2^{n_0-1}} < 2\varepsilon \leq d(x, z)$ olur.

$\frac{1}{2^{n_0-1}} < d(x, z)$ olduğundan $d(x, z) = \frac{1}{2^m}$ ve $m < n_0 - 1$ olacak şekilde bir $m \in \omega$ vardır. $d(x, y) = \frac{1}{2^{n_0}}$ olduğundan her $k < n_0$ için $x \in st(y, \vartheta_k)$ ve $x \notin st(y, \vartheta_{n_0})$ dir.

$d(y, z) = \frac{1}{2^{n_1}}$ olduğundan her $k < n_1$ için $y \in st(z, \vartheta_k)$ ve $y \notin st(z, \vartheta_{n_1})$ dir.

$d(x, z) = \frac{1}{2^m}$ olduğundan her $k < m$ için $x \in st(z, \vartheta_k)$ ve $x \notin st(z, \vartheta_m)$ dir.

$m < n_0 - 1$ olduğundan $m + 1 < n_0 \leq n_1$ dir. Böylece $x \in st(y, \vartheta_{m+1})$ ve $y \in st(z, \vartheta_{m+1})$ olur. $x \in st(y, \vartheta_{m+1})$ olduğundan $x, y \in V$ olacak şekilde bir $V \in \vartheta_{m+1}$ vardır. $y \in st(z, \vartheta_{m+1})$ olduğundan $y, z \in T$ olacak şekilde bir $T \in \vartheta_{m+1}$ vardır. $\vartheta_{m+1} \prec^R \vartheta_m$ olduğundan $T \cup V \subset H$ olacak şekilde bir $H \in \vartheta_m$ vardır. Ayrıca $x, z \in H$ ve $H \in \vartheta_m$ olduğundan $x \in st(z, \vartheta_m)$ dir. Bu durum $x \notin st(z, \vartheta_m)$ olmasıyla çelişir.

Benzer şekilde $n_1 \leq n_0$ olduğunda aynı çelişki elde edilir. Böylece $\varepsilon > 0$ olmak üzere $d(x, y) < \varepsilon$ ve $d(y, z) < \varepsilon$ ise $d(x, z) < 2\varepsilon$ dir.

Bu ise 4.14. Lemma'daki (*) koşuludur. $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu 4.14. Lemma'daki (*) koşulunu sağladığından her $x, y, z \in X$ için;

$$a) \quad p(x, y) \leq p(x, z) + p(z, y),$$

$$b) \quad \frac{d(x, y)}{4} \leq p(x, y) \leq d(x, y)$$

koşullarını sağlayan bir $p : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu vardır.

$p : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu (i) ve (ii) koşullarını sağlayan bir sözde metriktir.

Bunun için önce her $x \in X$ için $p(x, x) = 0$ olduğunu görelim. Her $n \in \omega$ için $x \in st(x, \vartheta_n)$ olduğundan $d(x, x) = 0$ dir. b) koşulundan her $x, y \in X$ için

$$\frac{d(x, y)}{4} \leq p(x, y) \leq d(x, y) \text{ dir. Buradan } \frac{d(x, x)}{4} \leq p(x, x) \leq d(x, x) \text{ dir. } d(x, x) = 0$$

olduğundan $\frac{0}{4} \leq p(x, x) \leq 0$ dir. Böylece her $x \in X$ için $p(x, x) = 0$ dir. Her $x, y \in X$

için $d(x, y) = d(y, x)$ olduğundan 4.14. Lemma (iii) koşulundan $p(x, y) = p(y, x)$ dir.

a) koşulundan her $x, y, z \in X$ için $p(x, y) \leq p(x, z) + p(z, y)$ olduğundan p fonksiyonu üçgen eşitsizliğini sağlar.

Böylece p fonksiyonu sözde metriktir. Şimdi p fonksiyonun (i) koşulunu sağladığını görelim. $y \in \bigcap_{n \in \omega} st(x, \vartheta_n)$ ise her $n \in \omega$ için $y \in st(x, \vartheta_n)$ olur. d fonksiyonun

$$\text{tanımından } d(x, y) = 0 \text{ olur. b) koşulundan } \frac{d(x, y)}{4} \leq p(x, y) \leq d(x, y) \text{ olduğundan}$$

$$\frac{0}{4} \leq p(x, y) \leq 0 \text{ olur. Buradan } p(x, y) = 0 \text{ dir. Böylece } y \in \bigcap_{n \in \omega} st(x, \vartheta_n) \text{ ise}$$

$p(x, y) = 0$ dir. Tersine $p(x, y) = 0$ ise b)'den $d(x, y) = 0$ olup her $n \in \omega$ için

$y \in st(x, \vartheta_n)$ dir. Öyleyse $y \in \bigcap_{n \in \omega} st(x, \vartheta_n)$ dir. Şimdi p fonksiyonun (ii) koşulunu

sağladığını görelim. Her $n \in \omega$ için $\vartheta_{n+1} \prec \vartheta_n$ olduğundan her $x \in X$ için

$st(x, \vartheta_{n+2}) = B_d\left(x, \frac{1}{2^{n+2}}\right) \subset B_p\left(x, \frac{1}{2^{n+2}}\right) \subset B_d\left(x, \frac{1}{2^n}\right) = st(x, \vartheta_n)$ olduğunu görmek kolaydır. Şimdi (ii) koşulunun gereklilik kısmını görelim. p sözde metriği tarafından oluşturulan topoloji τ_p olmak üzere $U \in \tau_p$ ve $x \in U$ olsun. O zaman $B_p\left(x, \frac{1}{2^{n_0}}\right) \subset U$ olacak şekilde bir $n_0 \in \omega$ vardır. Her $n \in \omega$ için $st(x, \vartheta_{n+2}) = B_d\left(x, \frac{1}{2^{n+2}}\right) \subset B_p\left(x, \frac{1}{2^{n+2}}\right)$ olduğundan $st(x, \vartheta_{n_0+2}) \subset B_p\left(x, \frac{1}{2^{n_0+2}}\right)$ dir. Ayrıca $B_p\left(x, \frac{1}{2^{n_0+2}}\right) \subset B_p\left(x, \frac{1}{2^{n_0}}\right)$ olduğundan $st(x, \vartheta_{n_0+2}) \subset U$ dir. $n_0 + 2 = k_0$ denilirse $st(x, \vartheta_{k_0}) \subset U$ olur. Şimdi de (ii) koşulunun yeterlilik kısmını görelim. Her $x \in U$ için $st(x, \vartheta_{n_0}) \subset U$ olacak şekilde bir $n_0 \in \omega$ var olsun. Her $n \in \omega$ için $B_p\left(x, \frac{1}{2^{n+2}}\right) \subset B_d\left(x, \frac{1}{2^n}\right) = st(x, \vartheta_n)$ olduğundan, özel olarak $n_0 \in \omega$ için $B_p\left(x, \frac{1}{2^{n_0+2}}\right) \subset st(x, \vartheta_{n_0}) \subset U$ olup her $x \in U$ için $B_p\left(x, \frac{1}{2^{n_0+2}}\right) \subset U$ olacak şekilde bir $n_0 \in \omega$ vardır. O halde $U \in \tau_p$ dir. ■

4.16. Teorem

X topolojik uzayı için aşağıdaki koşullar eşdeğerdir.

- X uzayı alt metriklenebilir uzaydır.
- X uzayı her $n \in \omega$ için $\vartheta_{n+1} \prec^* \vartheta_n$ koşulunu sağlayan bir $\{\vartheta_n : n \in \omega\}$ G_δ –diagonal dizisine sahiptir.
- X uzayı her $n \in \omega$ için $\vartheta_{n+1} \prec^R \vartheta_n$ koşulunu sağlayan bir $\{\vartheta_n : n \in \omega\}$ G_δ –diagonal dizisine sahiptir.

İspat

$\vartheta \prec^* \varphi$ olması $\vartheta \prec^R \varphi$ olmasını gerektirdiğinden $b) \Rightarrow c)$ açıktır.

Şimdi $c) \Rightarrow a)$ olduğunu görelim.

X uzayı her $n \in \omega$ için $\vartheta_{n+1} \prec^R \vartheta_n$ koşulunu sağlayan bir (ϑ_n) G_δ -diagonal dizisine sahip olsun. Her $n \in \omega$ (ϑ_n) için $\vartheta_{n+1} \prec^R \vartheta_n$ olduğundan X üzerinde 4.15. Lemma'nın (i) ve (ii) koşullarını sağlayan bir p sözde metriği vardır. (ϑ_n) dizisi G_δ -diagonal dizisi olduğundan p sözde metriği bir metriktir. Şöyle ki; $p(x, y) = 0$ ise 4.15. Lemma (i)'den $y \in \bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \vartheta_n)$ dir. $\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \vartheta_n) = \{x\}$ olduğundan $y \in \{x\}$ olur. Buradan $y = x$ olur. $p(x, y) = 0$ iken $y = x$ olduğundan p sözde metriği metrik olur. X üzerine p metriği yardımıyla üretilen topoloji τ_p olmak üzere $\tau_p \subset \tau$ olduğunu gösterelim. $T \in \tau_p$ olsun. $T = \emptyset$ ise $T \in \tau$ dur. $T \neq \emptyset$ ve $x \in T$ olsun. 4.15. Lemma ii)'den $\text{st}(x, \vartheta_{n_0}) \subset T$ olacak şekilde bir $n_0 \in \omega$ vardır. $\text{st}(x, \vartheta_{n_0}) \in \tau$ olduğundan $x \in \overset{\circ}{T}$ dir. Böylece $T \subset \overset{\circ}{T}$ olup $T = \overset{\circ}{T}$ olur. $\overset{\circ}{T} \in \tau$ olduğundan $T \in \tau$ dur. Böylece $\tau_p \subset \tau$ olur. Böylelikle X uzayı alt metriklenebilirdir.

Şimdi $a) \Rightarrow b)$ olduğunu görelim.

(X, τ) uzayı alt metriklenebilir olsun. Bu durumda (X, τ') uzayı metriklenebilir uzay olacak şekilde bir $\tau' \subset \tau$ topolojisi vardır. (X, τ') metriklenebilir uzay olduğundan (X, τ') parakompakt uzay olur[2]. (X, τ') metriklenebilir uzay olduğundan X G_δ -diagonale sahiptir. Öyleyse 4.3. Lemma'dan X 'in G_δ -diagonal dizisi olan bir (φ_n) açık örtüler dizisi vardır. Her $n \in \omega$ için φ_n (X, τ') için açık örtü ve (X, τ') parakompakt uzay olduğundan φ_1 açık örtüsü için $\vartheta_1 \prec^* \varphi_1$ olacak şekilde (X, τ') 'in

bir ϑ_1 açık örtüsü vardır. φ_2 ve ϑ_1 (X, τ') 'in açık örtüleri olduğundan $\vartheta_1 \wedge \varphi_2$ kümesi (X, τ') 'in açık örtüsüdür. (X, τ') uzayı parakompakt uzay ve $\vartheta_1 \wedge \varphi_2$ (X, τ') 'in açık örtüsü olduğundan $\vartheta_2 \prec^*(\vartheta_1 \wedge \varphi_2)$ olacak şekilde (X, τ') 'in bir ϑ_2 açık örtüsü vardır. φ_3 ve ϑ_2 (X, τ') 'in açık örtüleri olduğundan $\vartheta_2 \wedge \varphi_3$ kümesi (X, τ') 'in açık örtüsüdür. (X, τ') uzayı parakompakt uzay ve $\vartheta_2 \wedge \varphi_3$ (X, τ') 'in açık örtüsü olduğundan $\vartheta_3 \prec^*(\vartheta_2 \wedge \varphi_3)$ olacak şekilde (X, τ') 'in bir ϑ_3 açık örtüsü vardır. Aynı şekilde devam edildiğinde her $n \in \omega$ için $\vartheta_{n+1} \prec^*(\vartheta_n \wedge \varphi_{n+1})$ olacak şekilde (X, τ') 'in bir (ϑ_n) açık örtüler dizisi vardır. Böylece $\vartheta_{n+1} \prec^* \vartheta_n$ olacak şekilde (X, τ') 'in bir (ϑ_n) açık örtüler dizisi vardır. $\tau' \subset \tau$ olduğundan (ϑ_n) açık örtüler dizisi (X, τ) için de açık örtüler dizisidir.

Şimdi (ϑ_n) açık örtüler dizisinin G_δ -diagonal dizisi olduğunu görelim. $y \in \bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \vartheta_n)$ olsun. Bu durumda her $n \in \omega$ için $y \in \text{st}(x, \vartheta_n)$ dir. Her $n \in \omega$ için $\vartheta_{n+1} \prec^*(\vartheta_n \wedge \varphi_{n+1})$ olduğundan her $n \in \omega$ için $\text{st}(x, \vartheta_n) \subset V_n$ olacak biçimde bir $V \in \varphi_n$ vardır. Öyleyse her $n \in \omega$ için $y \in \text{st}(x, \varphi_n)$ olup $y \in \bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \varphi_n)$ dir. $\{\varphi_n : n \in \omega\}$ G_δ -diagonal dizisi olduğundan $\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \varphi_n) = \{x\}$ olup $y = x$ dir. ■

Şimdi 4.16. Teorem'in bir sonucunu ispatlayalım.

4.17. Sonuç

X topolojik uzayı parakompakt uzay olsun. Eğer X uzayı G_δ -diagonale sahipse X uzayı alt metriklenebilirdir[12-13].

İspat

X uzayı G_δ –diagonale sahip olduğundan 4.3. Lemma’dan X ’in açık örtülerinden oluşan bir $\{\varphi_n : n \in \omega\}$ G_δ –diagonal dizisi vardır. X uzayı parakompakt olduğundan X ’in her açık örtüsünün bir yıldız incesi vardır. Öyleyse φ_0 açık örtüsü için $\vartheta_0 \prec^* \varphi_0$ olacak şekilde X ’in bir ϑ_0 açık örtüsü vardır. φ_1 ve ϑ_0 X ’in açık örtüleri olduğundan $\vartheta_0 \wedge \varphi_1$ ailesi de X ’in bir açık örtüsüdür. Öyleyse $\vartheta_1 \prec^* (\vartheta_0 \wedge \varphi_1)$ olacak şekilde X ’in bir ϑ_1 açık örtüsü vardır. φ_2 ve ϑ_1 X ’in açık örtüleri olduğundan $\vartheta_1 \wedge \varphi_2$ ailesi X ’in bir açık örtüsü olup $\vartheta_2 \prec^* (\vartheta_1 \wedge \varphi_2)$ olacak şekilde X ’in bir ϑ_2 açık örtüsü vardır. Aynı şekilde devam edildiğinde her $n \in \omega$ için $\vartheta_{n+1} \prec^* (\vartheta_n \wedge \varphi_{n+1})$ olacak şekilde X ’in bir (ϑ_n) açık örtüler dizisi elde edilir. Her $n \in \omega$ için $\vartheta_{n+1} \prec^* (\vartheta_n \wedge \varphi_{n+1})$ olduğundan $\vartheta_{n+1} \prec^* \vartheta_n$ dir. Aynı zamanda her $n \in \omega$ için $\vartheta_n \prec^* \varphi_n$ ve $\{\varphi_n : n \in \omega\}$ bir G_δ –diagonal dizisi olduğundan $\{\vartheta_n : n \in \omega\}$ dizisi de bir G_δ –diagonal dizisidir. Böylece 4.16. Teorem’den X alt metriklenebilir uzaydır. ■

Şimdi 4.19. Teorem’in ispatında kullanılacak olan 4.18. Lemma’yı ispatlayalım.

4.18. Lemma

X bir topolojik uzay ve Y , X ’in submetakompakt bir alt uzayı olsun. Her $n \in \omega$ için θ_n X ’in açık alt kümelerinden oluşan ve Y ’yi örten bir aile olsun. Bu durumda X ’in açık alt kümelerinden oluşan öyle bir $\{\vartheta_n : n \in \omega\}$ aileler dizisi vardır ki, her $n \in \omega$ için ϑ_n ailesi Y ’yi örter ve her $y \in Y$ için $\bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(y, \vartheta_n)} = \bigcap_{n \in \omega} \text{st}(y, \vartheta_n) \subset \bigcap_{n \in \omega} \text{st}(y, \theta_n)$ dir.

İspat

Her $n \in \omega$ için θ_n X 'in açık alt kümelerinin Y 'yi örten bir ailesi olsun. $\theta_0|Y$, Y için bir açık örtüdür. Y submetakompakt olduğundan $\theta_0|Y$ 'nin $\{\varphi_n^0 : n \in \omega\}$ θ -inceliş dizisi vardır. X uzayı düzenli uzay olduğundan her $n \in \omega$ için $\{\overline{V} : V \in \vartheta_n^0\} \prec \varphi_n^0$ olacak şekilde X 'in bir (ϑ_n^0) açık örtüler dizisi vardır. Böylece her $n \in \omega$ için (ϑ_n^0) $\theta_0|Y$ 'nin θ -incelişi ve $\overline{\vartheta_n^0} \prec (\theta_0|Y)$ dir. $(\theta_0|Y) \wedge (\theta_1|Y) \wedge \vartheta_0^0$, Y için açık örtü, Y submetakompakt uzay ve X uzayı düzenli uzay olduğundan $(\theta_0|Y) \wedge (\theta_1|Y) \wedge \vartheta_0^0$ 'nin $\overline{\vartheta_n^1}|Y \prec [(\theta_0|Y) \wedge (\theta_1|Y) \wedge \vartheta_0^0]$ olacak şekilde bir $(\vartheta_n^1|Y)$ θ -ince dizisi vardır. $(\theta_0|Y) \wedge (\theta_1|Y) \wedge (\theta_2|Y) \wedge \vartheta_0^0 \wedge \vartheta_1^1$, Y için bir açık örtüdür. Y submetakompakt uzay ve X uzayı düzenli uzay olduğundan $(\theta_0|Y) \wedge (\theta_1|Y) \wedge (\theta_2|Y) \wedge \vartheta_0^0 \wedge \vartheta_1^1$ 'in θ -incesi olan ve $\overline{\vartheta_n^2}|Y \prec [(\theta_0|Y) \wedge (\theta_1|Y) \wedge (\theta_2|Y) \wedge \vartheta_0^0 \wedge \vartheta_1^1]$ koşulunu sağlayan bir $(\vartheta_n^2|Y)$ açık örtüler dizisi vardır. Bu şekilde devam edildiğinde, $(\bigwedge_{k \leq m} \theta_k|Y) \wedge (\bigwedge_{i, j \leq m} \vartheta_i^j)$, Y için açık örtü olur. Y submetakompakt uzay ve X uzayı düzenli uzay olduğundan $(\bigwedge_{k \leq m} \theta_k|Y) \wedge (\bigwedge_{i, j \leq m} \vartheta_i^j)$ 'nin θ -incelişi ve $\overline{\vartheta_n^m}|Y \prec \left\{ (\bigwedge_{k \leq m} \theta_k|Y) \wedge (\bigwedge_{i, j \leq m} \vartheta_i^j) \right\}$ olacak şekilde bir $(\vartheta_n^m|Y)$ açık örtüler dizisi vardır. Böylece Y 'yi örten (ϑ_n^m) açık örtüler dizisi elde edilir. Ayrıca;

- (i) Her $i, j, k \leq m$ için $(\vartheta_n^m|Y)$ dizisi ϑ_i^j ve $\theta_k|Y$ 'nin θ -incesidir.
- (ii) Her $i, j, k \leq m$ ve $V \in \vartheta_n^m|Y$ için $\overline{V} \subset W$ ve $\overline{V} \subset U$ olacak şekilde $U \in \theta_k|Y$ ve $W \in \vartheta_i^j$ vardır.

$y \in Y$ olmak üzere $x \in \bigcap_{i, j \leq m} \overline{\text{st}(y, \vartheta_i^j)}$ olsun. $\text{maks}\{i_0, j_0\} < m_0$ olacak şekilde sabit

i_0, j_0, m_0 seçelim. (i)'den $(\vartheta_n^{m_0})$ θ -ince olduğundan $\{V \in \vartheta_n^{m_0} : y \in V\}$ sonlu olacak

şekilde $n_0 \in \omega$ vardır. Böylece,

$$\overline{\text{st}(y, \vartheta_{n_0}^{m_0})} = \overline{\bigcup \{V : V \in \vartheta_{n_0}^{m_0}, y \in V\}} = \bigcup \{\overline{V} : V \in \vartheta_{n_0}^{m_0}, y \in V\} \text{ olur. } i_0 < m \text{ ve } j_0 < m$$

olduğundan (ii)'den $\bigcup \{\overline{V} : V \in \vartheta_n^{m_0}, y \in V\} \subset \bigcup \{W : W \in \vartheta_{i_0}^{j_0}, y \in W\} = \text{st}(y, \vartheta_{i_0}^{j_0})$ dir.

Böylece her $i, j \in \omega$ için $x \in \text{st}(y, \vartheta_i^j)$ olur. Her $i, j \in \omega$ için $x \in \text{st}(y, \vartheta_i^j)$ olduğundan

$$x \in \bigcap_{i, j \leq m} \text{st}(y, \vartheta_i^j) \text{ olur. Böylece } \bigcap_{i, j \leq m} \overline{\text{st}(y, \vartheta_i^j)} \subset \bigcap_{i, j \leq m} \text{st}(y, \vartheta_i^j) \text{ olur. Buradan}$$

$$\bigcap_{i, j \leq m} \overline{\text{st}(y, \vartheta_i^j)} = \bigcap_{i, j \leq m} \text{st}(y, \vartheta_i^j) \text{ olur. (ii)'den } \overline{\vartheta_n^m | Y} \prec \bigwedge_{k \leq m} \theta_k | Y \text{ olduğundan}$$

$$\bigcap_{i, j \in \omega} \text{st}(y, \vartheta_i^j) \subset \bigcap_{n \in \omega} \text{st}(y, \theta_n) \text{ dir. } \{\vartheta_i^j : i, j \in \omega\} \text{ ailesinin yeniden indekslenmiş olanına}$$

$\{\vartheta_n : n \in \omega\}$ denilirse aradığımız dizi (ϑ_n) dizisidir. ■

4.19. Teorem

G_δ –diagonale sahip her submetakompakt uzay G_δ^* – diagonale sahiptir.

İspat

X uzayı G_δ –diagonale sahip submetakompakt uzay olsun. X uzayı G_δ –diagonale sahip olduğundan 4.3. Lemma'dan X 'in açık örtülerinden oluşan bir (θ_n)

G_δ –diagonal dizisi vardır. Her $n \in \omega$ için θ_n X için bir örtü ve X uzayı submetakompakt olduğundan 4.18. Lemma'dan her $x \in X$ için

$$\bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \vartheta_n)} = \bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \vartheta_n) \subset \bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \theta_n) \text{ olacak şekilde } X\text{'in bir } (\vartheta_n) \text{ açık örtüler}$$

dizisi vardır. (θ_n) dizisi G_δ –diagonal dizi olduğundan $\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \theta_n) = \{x\}$ dir.

$$\bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \vartheta_n)} \subset \bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \theta_n) \text{ olduğundan } \bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \vartheta_n)} = \{x\} \text{ dir. } (\vartheta_n) \text{ } X\text{'in açık örtüler}$$

dizisi ve $\bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \vartheta_n)} = \{x\}$ olduğundan X uzayı G_δ^* –diagonale sahiptir. ■

Şimdi 4.19. Teorem'in bir sonucu olan 4.20. Teorem'i ispatlayalım.

4.20. Teorem

X kompakt bir uzay olsun. Eğer X uzayı G_δ –diagonale sahipse metriklenebilir[14].

İspat

X G_δ –diagonale sahip olan bir kompakt uzay olsun. Kompakt bir uzayın metriklenebilir olması için gerekli ve yeterli koşul uzayın 2. sayılabilir olmasıdır[5]. Öyleyse X 'in sayılabilir bir baza sahip olduğunu görmeliyiz.

X uzayı kompakt uzay olduğundan submetakompakt uzaydır. Böylece X uzayı G_δ –diagonale sahip submetakompakt uzay olup 4.19. Teorem'den G_δ^* –diagonale sahiptir. Öyleyse X 'in açık örtülerinden oluşan bir (ϑ_n) G_δ^* –diagonal dizisi vardır. Genelliği bozmadan $\vartheta_{n+1} \prec \vartheta_n$ kabul edebiliriz. Ayrıca X kompakt olduğundan her $n \in \omega$ için ϑ_n açık örtüsünün sonlu olduğunu kabul edebiliriz.

Şimdi $\mathcal{B} = \left\{ \bigcup \vartheta_n : \vartheta_n \subset \bigcup_{n \in \omega} \vartheta_n \text{ ve } \vartheta_n \text{ sonlu} \right\}$ ailesinin X için bir baz olduğunu görelim.

$x \in X$ ve $U \subset X$ açık küme olmak üzere $x \in U$ olsun. Şimdi $\{U\} \cup \{X \setminus \overline{\text{st}(x, \vartheta_n)} : n \in \omega\}$ ailesinin X 'in açık örtüsü olduğunu gösterelim. $y \in X$ olsun. $y \notin U$ ise $y \in \left(X \setminus \overline{\text{st}(x, \vartheta_n)} \right)$ olacak şekilde bir $n_0 \in \omega$ vardır. Aksine her $n \in \omega$ için $y \in \left(X \setminus \overline{\text{st}(x, \vartheta_n)} \right)$ olduğunu kabul edelim. Böylece her $n \in \omega$ için $y \in \overline{\text{st}(x, \vartheta_n)}$ olur. Buradan $y \in \bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \vartheta_n)}$ olur. $\{\vartheta_n : n \in \omega\}$ G_δ^* –diagonal dizisi olduğundan $\bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \vartheta_n)} = \{x\}$ tir. Buradan $y = x$ olur. Bu ise $y \notin U$ olmasıyla çelişir. Çünkü $x \in U$ dur. Böylece $y \notin U$ ise $y \in \left(X \setminus \overline{\text{st}(x, \vartheta_{n_0})} \right)$ olacak biçimde bir $n_0 \in \omega$ vardır. Sonuç olarak $\{U\} \cup \{X \setminus \overline{\text{st}(x, \vartheta_n)} : n \in \omega\}$ ailesi X 'in açık örtüsüdür.

X uzayı kompakt olduğundan $\{U\} \cup \{X \setminus \overline{\text{st}(x, \vartheta_n)} : n \in \omega\}$ örtüsünün

$\{U, X \setminus \overline{\text{st}(x, \vartheta_1)}, X \setminus \overline{\text{st}(x, \vartheta_2)}, \dots, X \setminus \overline{\text{st}(x, \vartheta_m)}\}$ biçiminde sonlu bir alt örtüsü vardır.

Her $n \in \omega$ için $\vartheta_{n+1} \prec \vartheta_n$ olduğundan her $i \leq m$ için $\vartheta_m \prec \vartheta_i$ dir. Buradan her $i \leq m$ için $\text{st}(x, \vartheta_m) \subset \text{st}(x, \vartheta_i)$ dir. O zaman her $i \leq m$ için $X \setminus \overline{\text{st}(x, \vartheta_i)} \subset X \setminus \overline{\text{st}(x, \vartheta_m)}$ dir.

Buradan $\bigcup_{i \leq m} X \setminus \overline{\text{st}(x, \vartheta_i)} = X \setminus \overline{\text{st}(x, \vartheta_m)}$ olur. Böylece $X = U \cup X \setminus \overline{\text{st}(x, \vartheta_m)}$ olur.

Buradan $X \setminus U \subset X \setminus \overline{\text{st}(x, \vartheta_m)}$ dir. Böylelikle $\text{st}(x, \vartheta_m) \subset U$ olur. ϑ_m sonlu olduğundan $\text{st}(x, \vartheta_m) \in \mathcal{B}$ olup $\mathcal{B}'$ nin baz olduğu görülmüş olur. $\mathcal{B}'$ nin sayılabilir olduğu açıktır. ■

Bu teorem sayılabilir kompakt uzaylar için de geçerlidir. Eğer teoremin koşullarından olan G_δ –diagonale sahip olma koşulunun yerine G_δ^* –diagonal koşulu olsaydı yukarıdaki ispatta görüleceği üzere teoremin ispatı daha kolay olurdu. Yukarıdaki teoremi sayılabilir kompakt uzaylar için ispat etmeden önce aşağıdaki iki lemmayı verelim.

4.21. Lemma

X bir topolojik uzay olsun. $D \subset X$ kümesinin kapalı ve ayrık olması için gerekli ve yeterli koşul her $x \in X$ için $G_x \cap D$ kümesi en fazla bir elemanlı olacak şekilde x 'in açık bir G_x komşuluğunun var olmasıdır.

İspat

$\Rightarrow$: D kapalı ve ayrık olsun. $x \in X$ için $x \in D$ veya $x \in D^c$ dir.

$x \in D$ olsun. D ayrık olduğundan $\{x\}$ D içinde açıktır. Buradan $\{x\} = D \cap G_x$ olacak biçimde bir $G_x \subset X$ açık kümesi vardır. $x \in D^c$ olsun. D kapalı olduğundan D^c açıktır. $G_x = D^c$ alınırsa $D \cap G_x = \emptyset$ dir. Her iki durumda $G_x \cap D$ kümesi en

fazla bir elemanlı olmaktadır.

$\Leftarrow$: $x \in D^c$ olsun. Hipotezden $G_x \cap D$ kümesi en fazla bir elemanlı olacak şekilde x 'in açık bir G_x komşuluğu vardır. Yani $G_x \cap D = \emptyset$ veya $G_x \cap D = \{p\}$ olacak biçimde bir $p \in X$ vardır. $G_x \cap D = \emptyset$ ise $x \in G_x \subset D^c$ dir. Buradan D^c açık küme olur. $G_x \cap D = \{p\}$ ise $x \notin D$ olduğundan $p \neq x$ dir. Buradan $x \in G_x \setminus \{p\} \subset D^c$ ve $G_x \setminus \{p\}$ açık küme olduğundan D^c açık kümedir. Şimdi D 'nin ayrık olduğunu görelim. Bunun için D içindeki her tek nokta kümesinin D içinde açık olduğunu görmemiz yeterlidir. $x \in D$ alalım. Hipotezden $G_x \cap D$ kümesi en fazla bir elemanlı olacak biçimde x 'in bir G_x açık komşuluğu vardır. $x \in D$ ve $G_x \subset X$ olduğundan $D \cap G_x = \{x\}$ olup $\{x\}$ D içinde açıktır. ■

4.22. Lemma

$D \subset X$ kümesi kapalı ve ayrık ise her $A \subset D$ için A 'nın yığılma noktalarının kümesi $\tilde{A} = \emptyset$ dir.

İspat

$D \subset X$ kümesi kapalı ve ayrık olsun. $A \subset D$ olmak üzere $A^\sim \neq \emptyset$ olsun. Bir $x \in \tilde{A}$ alalım. O zaman $x \in D$ veya $x \in D^c$ dir. $x \in D$ olsun. D ayrık olduğundan $\{x\}$ D içinde açık kümedir. Buradan $D \cap G_x = \{x\}$ olacak biçimde bir $G_x \subset X$ açık kümesi vardır. $x \in \tilde{A}$ olduğundan ve G_x açık küme olup $A \cap (G_x \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ dir. Bu durum çelişkidir. Çünkü $D \cap G_x = \{x\}$ ve $A \subset D$ olduğundan $A \cap G_x \subset \{x\}$ dir. Buradan $A \cap (G_x \setminus \{x\}) = \emptyset$ elde edilir. $x \in D^c$ olsun. D^c açık küme ve $x \in A^\sim$ olduğundan $A \cap (D^c \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ dir. Bu durum çelişkidir. Çünkü $A \subset D$ olduğundan $A \cap (D^c \setminus \{x\}) \subset D \cap D^c = \emptyset$ dir. Böylece her $A \subset D$ için $\tilde{A} = \emptyset$ dir. ■

4.23. Teorem

X topolojik uzayı G_δ – diagonale sahip olan sayılabilir kompakt uzay ise X kompakt uzaydır[15].

İspat

X uzayı G_δ – diagonale sahip olduğundan 4.3. Lemma’dan X ’in açık örtülerinin bir $\{\vartheta_n : n \in \omega\}$ G_δ – diagonal dizisi vardır. O halde her $x \in X$ için $\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \vartheta_n) = \{x\}$ dir.

X uzayının kompakt olmadığını kabul edelim. X sayılabilir kompakt olduğundan X ’in sayılabilir bir alt örtüsü olmayan bir φ açık örtüsü vardır. Şimdi ω_1 üzerine sonlu ötesi tümevarım ilkesi ile her $\alpha < \omega_1$ için;

- i) $x_\alpha \notin \bigcup_{\beta < \alpha} \text{st}(x_\beta, \vartheta_{n(\beta)})$
- ii) $X \setminus \bigcup_{\beta \leq \alpha} \text{st}(x_\beta, \vartheta_{n(\beta)})$ kümesi φ ’nin sayılabilir hiçbir alt ailesi ile örtülemeyecek biçimde bir x_α ve bir $n(\alpha) \in \omega$ seçebileceğimizi görelim. i) ve ii) koşullarına kolaylık olması açısından $P(\alpha)$ diyelim.

$x_0 \in X$ alalım. $X \setminus \text{st}(x_0, \vartheta_{n_0})$ kümesi φ ’nin sayılabilir hiçbir alt ailesi ile örtülemeyecek şekilde bir $n(0) \in \omega$ vardır. Şöyleki, her $n \in \omega$ için $X \setminus \text{st}(x_0, \vartheta_n)$ kümesi φ ’nin sayılabilir bir φ_n alt ailesi ile örtülebilseydi

$$\bigcup_{n \in \omega} (X \setminus \text{st}(x_0, \vartheta_n)) = \left(\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x_0, \vartheta_n) \right)^c = X \setminus \{x_0\} \subset \bigcup_{n \in \omega} (\bigcup \varphi_n) \text{ olurdu ki, bu } \varphi \text{’nin } X\text{’i}$$

örtten sayılabilir bir alt ailesinin var olmaması ile çelişir. Öyleyse $P(0)$ doğrudur.

$\alpha < \omega_1$ olmak üzere her $\lambda < \alpha$ için $P(\lambda)$ doğru olsun. Şimdi $P(\alpha)$ ’nın doğru olduğunu görelim. Her $\lambda < \alpha$ için $P(\lambda)$ doğru olduğundan her $\lambda < \alpha$ için

$X \setminus \bigcup_{\beta \leq \lambda} \text{st}(x_\beta, \vartheta_{n(\beta)})$ kümesi φ ’nin sayılabilir hiçbir alt ailesi ile örtülemez. Bu

durumda $X \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} \text{st}(x_\beta, \vartheta_{n(\beta)})$ kümesi de φ 'nin sayılabilir hiçbir alt ailesi ile örtülemez. Şöyle ki; eğer bu küme sayılabilir bir $\tilde{\varphi}$ alt ailesi ile örtülebilirse o zaman;

$$X = \left(\bigcup_{\beta < \alpha} \text{st}(x_\beta, \vartheta_{n(\beta)}) \right) \cup \left(X \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} \text{st}(x_\beta, \vartheta_{n(\beta)}) \right) \subset \left(\bigcup_{\beta < \alpha} \text{st}(x_\beta, \vartheta_{n(\beta)}) \right) \cup (\bigcup \tilde{\varphi})$$

olduğundan $\mathcal{W} = \{ \text{st}(x_\beta, \vartheta_{n(\beta)}) : \beta < \alpha \} \cup \tilde{\varphi}$ ailesi X için bir açık örtü olur. $\alpha < \omega_1$ olduğundan $\{ \text{st}(x_\beta, \vartheta_{n(\beta)}) : \beta < \alpha \}$ ailesi sayılabilir. Aynı zamanda $\tilde{\varphi}$ ailesi sayılabilir olduğundan $\mathcal{W}$ ailesi X için sayılabilir bir açık örtüdür. X sayılabilir kompakt olduğundan X $\mathcal{W}$ ailesinin sonlu bir alt ailesi ile örtülebilir. O halde $X = \bigcup \left(\tilde{\varphi}_s \cup \{ \text{st}(x_\beta, \vartheta_{n(\beta)}) : \beta \in F \} \right)$ olacak biçimde α 'nın sonlu bir F alt kümesi ve $\tilde{\varphi}$ ailesinin sonlu bir $\tilde{\varphi}_s$ alt ailesi vardır. Fakat bu durumda $\max\{\beta : \beta \in F\} = \lambda_0$ olmak üzere $X \setminus \bigcup_{\beta \leq \lambda_0} \text{st}(x_\beta, \vartheta_{n(\beta)})$ kümesi $\tilde{\varphi}_s$ ile örtülür. Fakat bu durum $\lambda < \alpha$ biçimindeki her λ için $X \setminus \bigcup_{\beta \leq \lambda} \text{st}(x_\beta, \vartheta_{n(\beta)})$ kümesinin φ ailesinin sayılabilir hiçbir alt ailesi ile örtülemiyor olması gerçeği ile çelişir. O halde $X \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} \text{st}(x_\beta, \vartheta_{n(\beta)})$ kümesi φ ailesinin sayılabilir hiçbir alt ailesi ile örtülemez. O halde $X \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} \text{st}(x_\beta, \vartheta_{n(\beta)}) \neq \emptyset$ olup bir $x_\alpha \in X \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} \text{st}(x_\beta, \vartheta_{n(\beta)})$ elemanını seçebiliriz. Böylece $P(\alpha)$ 'nın (i) koşulunun sağlandığı görüldü. Şimdi de $P(\alpha)$ 'nın (ii) koşulunun doğruluğunu görelim. Bu amaçla; (ii) koşulunun sağlanmadığını yani her n doğal sayısı için $X \setminus \left(\bigcup_{\beta < \alpha} \text{st}(x_\beta, \vartheta_{n(\beta)}) \cup \text{st}(x_\alpha, \vartheta_n) \right)$ kümesinin φ 'nin sayılabilir bir φ_n alt ailesi ile örtülebildiğini varsayalım. O zaman

$$\bigcup_{n \in \omega} \left[X \setminus \left(\bigcup_{\beta < \alpha} \text{st}(x_\beta, \vartheta_{n(\beta)}) \cup \text{st}(x_\alpha, \vartheta_n) \right) \right] \subset \bigcup_{n \in \omega} (\bigcup \varphi_n) \text{ olur. Buradan}$$

$$\left[\bigcap_{n \in \omega} \left(\bigcup_{\beta < \alpha} \text{st}(x_\beta, \vartheta_{n(\beta)}) \cup \text{st}(x_\alpha, \vartheta_n) \right) \right]^c \subset \bigcup_{n \in \omega} (\bigcup \varphi_n) \text{ olur.}$$

$$\left[\bigcup_{\beta < \alpha} \text{st}(x_\beta, \vartheta_{n(\beta)}) \cup \bigcap_{n \in \omega} (\text{st}(x_\alpha, \vartheta_n)) \right]^c \subset \bigcup_{n \in \omega} (\bigcup \varphi_n) \quad \text{ve} \quad \bigcap_{n \in \omega} (\text{st}(x_\alpha, \vartheta_n)) = \{x_\alpha\}$$

olduğundan $X \setminus \left(\bigcup_{\beta < \alpha} \text{st}(x_\beta, \vartheta_{n(\beta)}) \cup \{x_\alpha\} \right)$ kümesi φ 'nin sayılabilir bir alt ailesi ile örtüldü. Buradan $X \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} \text{st}(x_\beta, \vartheta_{n(\beta)})$ kümesi φ 'nin sayılabilir bir alt ailesi ile örtülür. Bu çelişkidir. Çünkü $X \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} \text{st}(x_\beta, \vartheta_{n(\beta)})$ kümesi φ 'nin sayılabilir hiçbir alt ailesi ile örtülemezdir. Böylece $P(\alpha)$ 'nın (ii) koşulunun da doğruluğu görüldüğünden $P(\alpha)$ 'nın doğruluğu görülmüş olur. O halde sonlu ötesi tümevarım ilkesi gereğince her $\alpha < \omega_1$ için $P(\alpha)$ doğrudur. Her $\alpha < \omega_1$ için $n(\alpha) \in \omega$ olduğundan ω_1 'in öyle bir sayılamaz A alt kümesi ve öyle bir m doğal sayısı vardır ki; her $\beta \in A$ için $n(\beta) = m$ olur. Şimdi $D = \{x_\beta : \beta \in A\}$ kümesinin kapalı ve ayrık olduğunu görelim. Bunun için öncelikle her $G \in \vartheta_m$ için $G \cap D$ kümesinin en fazla bir elemanlı olduğunu görelim. Aksine $G_0 \cap D$ kümesi en az iki elemanlı olacak şekilde bir $G_0 \in \vartheta_m$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x_{\beta_1}, x_{\beta_2} \in G_0$ ve $\beta_1 \neq \beta_2$ olacak biçimde $\beta_1, \beta_2 \in A$ vardır. $\beta_1 \neq \beta_2$ olduğundan $\beta_1 < \beta_2$ veya $\beta_2 < \beta_1$ dir. $\beta_1 < \beta_2$ ise i)'den $x_{\beta_2} \notin \text{st}(x_{\beta_1}, \vartheta_m)$ dir. $\beta_2 < \beta_1$ ise i)'den $x_{\beta_1} \notin \text{st}(x_{\beta_2}, \vartheta_m)$ olur. Her iki durum çelişkidir. Çünkü $x_{\beta_1}, x_{\beta_2} \in G_0$ ve $G_0 \in \vartheta_m$ olduğundan $x_{\beta_2} \in \text{st}(x_{\beta_1}, \vartheta_m)$ ve $x_{\beta_1} \in \text{st}(x_{\beta_2}, \vartheta_m)$ dir. Böylece her $G \in \vartheta_m$ için $G \cap D$ kümesi en fazla bir elemanlıdır. Şimdi D 'nin kapalı ve ayrık olduğunu görelim. $x \in X$ olsun. ϑ_m açık örtü olduğundan $x \in G$ olacak biçimde bir $G \in \vartheta_m$ vardır. G açık ve $G \cap D$ kümesi en fazla bir elemanlı olduğundan 4.21. Lemma'dan D X 'in kapalı ve ayrık bir alt uzayıdır. D kapalı ve ayrık bir alt uzay olduğundan 4.22. Lemma'dan D 'nin yığılma noktası yoktur. Ancak D sonsuz elemanlı bir küme olduğundan bu X 'in sayılabilir kompakt uzay olması ile çelişir. Öyleyse X kompakt uzaydır. ■

Yukarıdaki teorem ve 4.20. Teorem'den aşağıdaki sonucu verebiliriz.

4.24. Sonuç

G_δ –diagonale sahip olan her sayılabilir kompakt uzay metriklenebilirdir.

Şimdi 4.27. Teorem’de kullanacağımız aşağıdaki lemmaları ifade edip ispatlayalım.

4.25. Lemma

X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere A bağlantılı bir küme olsun. $V \subset X$ olmak üzere eğer $A \cap V^c \neq \emptyset$ ve $A \cap V \neq \emptyset$ ise $A \cap \partial V \neq \emptyset$ dir.

İspat

İspatı olmayana ergi yöntemiyle yapalım. A kümesi bağlantılı, $A \cap V^c \neq \emptyset$ ve $A \cap V \neq \emptyset$ fakat $A \cap \partial V = \emptyset$ olsun. $A \cap \partial V = A \cap \left(\overline{V} \setminus \overset{\circ}{V} \right) = \emptyset$ olduğundan $A \subset \left(\overline{V} \setminus \overset{\circ}{V} \right)^c = \left(\overline{V} \right)^c \cup \left(\overset{\circ}{V} \right)$ dir. A bağlantılı küme olduğundan $A \subset \left(\overline{V} \right)^c$ veya $A \subset \overset{\circ}{V}$ dir. $A \subset \left(\overline{V} \right)^c$ olursa $A \cap \overline{V} = \emptyset$ olur. Buradan $A \cap V = \emptyset$ olur. Bu durum $A \cap V \neq \emptyset$ olması ile çelişir. $A \subset \overset{\circ}{V}$ olursa $A \subset V$ olur. Buradan $A \cap V^c = \emptyset$ olur. Bu durum $A \cap V^c \neq \emptyset$ olması ile çelişir. Sonuç olarak $A \cap V^c \neq \emptyset$ ve $A \cap V \neq \emptyset$ ise $A \cap \partial V \neq \emptyset$ dir.■

4.26. Lemma

X bir topolojik uzay ve ϑ X ’in bağlantılı alt kümelerinden oluşan bir aile olsun. Bu durumda;

- i) Her $x \in X$ için $st(x, \vartheta)$ kümesi bağlantılıdır,
- ii) Her $x \in X$ için $st^2(x, \vartheta)$ kümesi bağlantılıdır.

İspat

Öncelikle $st(x, \vartheta)$ 'nin bağlantılı olduğunu görelim. $x \in X$ olsun. $x \in \bigcap \{U \in \vartheta : x \in U\} \neq \emptyset$ ve her $U \in \vartheta$ için U bağlantılı olduğundan $\bigcup \{U \in \vartheta : x \in U\} = st(x, \vartheta)$ kümesi bağlantılıdır.

Şimdi $st^2(x, \vartheta)$ 'nin bağlantılı olduğunu görelim. $x \in X$ olsun. $Y, Z \subset X$ ve $\overline{Y} \cap Z = \emptyset = Y \cap \overline{Z}$ olmak üzere $st^2(x, \vartheta) = Y \cup Z$ olsun. $Y = \emptyset$ veya $Z = \emptyset$ olduğunu görelim. $Y \neq \emptyset$ ve $Z \neq \emptyset$ olsun. $y \in Y$ ve $z \in Z$ olsun. $st(x, \vartheta)$ kümesi bağlantılı ve $st(x, \vartheta) \subset st^2(x, \vartheta) = Y \cup Z$ olduğundan $st(x, \vartheta) \subset Y$ veya $st(x, \vartheta) \subset Z$ olmak zorundadır.

$st(x, \vartheta) \subset Z$ ise;

$y \in Y$ olduğundan $y \in st^2(x, \vartheta)$ dir. Buradan $V \cap st(x, \vartheta) \neq \emptyset$ ve $y \in V$ olacak biçimde bir $V \in \vartheta$ vardır. V ve $st(x, \vartheta)$ bağlantılı kümeler ve $V \cap st(x, \vartheta) \neq \emptyset$ olduğundan $V \cup st(x, \vartheta)$ bağlantılıdır. $V \cup st(x, \vartheta) \subset st^2(x, \vartheta) \subset Y \cup Z$ olduğundan $V \cup st(x, \vartheta) \subset Z$ veya $V \cup st(x, \vartheta) \subset Y$ olmak zorundadır. $st(x, \vartheta) \subset Z$ olduğundan $V \cup st(x, \vartheta) \subset Y$ olamaz. Çünkü $Y \cap Z = \emptyset$ dir. Öyleyse $V \cup st(x, \vartheta) \subset Z$ olmak zorundadır. Ancak $y \in V$ olduğundan $y \in Z$ olur ki, bu durum $Y \cap Z = \emptyset$ olması ile çelişir.

$st(x, \vartheta) \subset Y$ ise;

$z \in Z$ olduğundan $z \in st^2(x, \vartheta)$ dir. Buradan $U \cap st(x, \vartheta) \neq \emptyset$ ve $z \in U$ olacak biçimde bir $U \in \vartheta$ vardır. U ve $st(x, \vartheta)$ bağlantılı kümeler ve $U \cap st(x, \vartheta) \neq \emptyset$ olduğundan $U \cup st(x, \vartheta)$ bağlantılıdır. $U \cup st(x, \vartheta) \subset st^2(x, \vartheta) \subset Y \cup Z$ olduğundan $U \cup st(x, \vartheta) \subset Y$ veya $U \cup st(x, \vartheta) \subset Z$ olmak zorundadır. $st(x, \vartheta) \subset Y$ olduğundan $U \cup st(x, \vartheta) \subset Z$ olamaz. Çünkü $Y \cap Z = \emptyset$ dir. Öyleyse $U \cup st(x, \vartheta) \subset Y$ olmak zorundadır. Ancak $z \in U$ olduğundan $z \in Y$ olur ki, bu

durum $Y \cap Z = \emptyset$ olması ile çelişir. Sonuç olarak $st^2(x, \vartheta)$ bağlantılı olur. ■

4.27. Teorem

X uzayı yerel kompakt ve yerel bağlantılı olsun. Bu durumda;

- a) Eğer X uzayı G_δ^* – diagonale sahipse X Moore uzayıdır.
- b) Eğer X uzayı düzenli G_δ – diagonale sahipse X metriklenebilir uzayıdır.

İspat

a): X uzayı G_δ^* – diagonale sahip olsun. Öyleyse X 'in her x elemanı için $\bigcap_{n \in \omega} \overline{st(x, \varphi_n)} = \{x\}$ olacak biçimde X 'in bir $\{\varphi_n : n \in \omega\}$ açık örtüler dizisi vardır. X uzayı yerel bağlantılı olduğundan her $G \in \varphi_n$ için $B_G^o \subset B_G \subset G$ olacak biçimde bir $B_G \subset X$ bağlantılı küme vardır. Her $n \in \omega$ için $\vartheta_n = \{B_G : G \in \varphi_n\}$ olsun. Genelliği bozmadan her $n \in \omega$ için $\vartheta_{n+1} \prec \vartheta_n$ kabul edebiliriz. Şimdi her $x \in X$ ve $x \in V$ olacak biçimdeki her V açık alt kümesi için $st(x, \vartheta_{n_0}) \subset V$ olacak biçimde bir n_0 doğal sayısının bulunabileceğini görelim. $x \in X$ ve $V \subset X$ açık olmak üzere $x \in V$ olsun. Her $n \in \omega$ için $st(x, \vartheta_n) \not\subset V$ olduğunu kabul edelim. X yerel kompakt olduğundan $x \in W$ ve $\overline{W}$ kompakt olacak biçimde bir $W \subset X$ açığı vardır. $W \cap V = U$ diyelim. U açık olduğu için $\partial U = \overline{U} \setminus U$ olup $x \notin \partial U$ dir. Her n için $st(x, \vartheta_n) \not\subset V$ olduğundan $st(x, \vartheta_n) \not\subset U$ olup her n için $st(x, \vartheta_n) \cap U^c \neq \emptyset$ dir. Öte yandan ϑ_n bağlantılı kümelerden oluştuğundan $st(x, \vartheta_n)$ kümesi bağlantılıdır. Öyleyse 4.25. Lemma'dan her $n \in \omega$ için $st(x, \vartheta_n) \cap \partial U \neq \emptyset$ olup her $n \in \omega$ için $\overline{st(x, \vartheta_n)} \cap \partial U \neq \emptyset$ dir. Ayrıca $\overline{W}$ kompakt ve $\overline{U} \setminus U \subset \overline{W}$ olduğundan ∂U kompakt olur. ∂U kompakt, her $n \in \omega$ için $\vartheta_{n+1} \prec \vartheta_n$ ve $\overline{st(x, \vartheta_n)} \cap \partial U \neq \emptyset$ olduğundan

$\left(\bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \vartheta_n)}\right) \cap \partial U \neq \emptyset$ olduğu kolayca görülebilir. $\bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \varphi_n)} = \{x\}$ ve her $n \in \omega$ için $\vartheta_n \prec \varphi_n$ olduğundan $\bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \vartheta_n)} = \{x\}$ olur. Ancak bu durum $x \notin \partial U$ olması ile çelişir. O halde varsayımımız yanlış olup her V açığı için $x \in V$ ise $\text{st}(x, \vartheta_{n_0}) \subset V$ olacak biçimde bir n_0 doğal sayısı vardır. Öyleyse her $n \in \omega$ için $\phi_n = \left\{ \overset{o}{B} : B \in \vartheta_n \right\}$ denilirse $\{\phi_n : n \in \omega\}$ açık örtüler dizisi X için bir açılımdır. Aynı zamanda yerel kompakt uzaylar tamamen düzenli olduğundan X düzenli uzaydır. O halde X bir Moore uzaydır.

b): X uzayı düzenli G_δ – diagonale sahip olsun. 4.7. Sonuç'tan X uzayı G_δ^* – diagonale sahiptir. X uzayı G_δ^* – diagonale sahip olduğundan a)'dan X Moore uzaydır. X uzayı düzenli G_δ – diagonale sahip olduğundan $X \times X$ çarpım uzayının $\Delta = \bigcap_{n \in \omega} U_n = \bigcap_{n \in \omega} \overline{U_n}$ olacak biçimde U_n açık alt kümeleri vardır. Genelliği bozmadan her $n \in \omega$ için $U_{n+1} \subset U_n$ olacak şekilde alabiliriz. X Moore uzayı olduğundan X 'in açık örtülerinin bir $\{\varphi_n : n \in \omega\}$ açılım dizisi vardır. X yerel bağlantılı olduğundan φ_n ailelerinin elemanlarını bağlantılı kabul etmek genelliği bozamaz. $\Delta = \bigcap_{n \in \omega} U_n$ olduğundan her $x \in X$ ve her $n \in \omega$ için $(x, x) \in U_n$ olup $U_n \subset X \times X$ açık ve X yerel bağlantılı olduğundan $(x, x) \in B(n, x) \times B(n, x) \subset U_n$ olacak biçimde bağlantılı ve açık $B(n, x)$ alt kümeleri vardır. Öte yandan φ_n örtü olduğundan her $x \in X$ ve her $n \in \omega$ için $x \in V(n, x)$ olacak biçimde bir $V(n, x) \in \varphi_n$ vardır. $V(n, x) \cap B(n, x) \subset G(n, x)$ denilirse her $x \in X$ ve her $n \in \omega$ için $G(n, x) \subset X$ bağlantılı, açık ve $G(n, x) \times G(n, x) \subset U_n$ olur. Her $n \in \omega$ için $\vartheta_n = \{G(n, x) : x \in X\}$ denilirse $\vartheta_n \prec \varphi_n$ olur. Buradan $\{\vartheta_n : n \in \omega\}$ dizisi de X için bir açılım olur. Her $n \in \omega$ için $\vartheta_{n+1} \prec \vartheta_n$ kabul edebiliriz. Şimdi $\{\text{st}^2(x, \vartheta_n) : n \in \omega\}$ ailesinin $x \in X$ 'in bir komşuluklar tabanı olduğunu görelim. Bunun için x 'in her V

kompakt komşuluğu için $st^2(x, \vartheta_{n_0}) \subset V$ olacak biçimde bir $n_0 \in \omega$ olduğunu görelim. Aksine her $n \in \omega$ için $st^2(x, \vartheta_n) \not\subset V$ olsun. ϑ_n ailesi bağlantılı kümelerden olduğundan 4.26. Lemma'dan $st^2(x, \vartheta_n)$ bağlantılı kümedir. Buradan $\overline{st^2(x, \vartheta_n)}$ bağlantılı küme olur. $st^2(x, \vartheta_n) \not\subset V$ olduğundan $\overline{st^2(x, \vartheta_n)} \not\subset V$ dir. Buradan $\overline{st^2(x, \vartheta_n)} \cap V^c \neq \emptyset$ dir. $x \in \overline{st^2(x, \vartheta_n)}$ ve $x \in V$ olduğundan $\overline{st^2(x, \vartheta_n)} \cap V \neq \emptyset$ dir. $\overline{st^2(x, \vartheta_n)}$ bağlantılı küme, $\overline{st^2(x, \vartheta_n)} \cap V^c \neq \emptyset$ ve $\overline{st^2(x, \vartheta_n)} \cap V \neq \emptyset$ olduğundan 4.25. Lemma'dan $\overline{st^2(x, \vartheta_n)} \cap \partial V \neq \emptyset$ dir. Her $n \in \omega$ için $\overline{st^2(x, \vartheta_n)} \cap \partial V \neq \emptyset$ olduğundan $\bigcap_{n \in \omega} \overline{st^2(x, \vartheta_n)} \cap \partial V = \emptyset$ dir. Aksine $\bigcap_{n \in \omega} \overline{st^2(x, \vartheta_n)} \cap \partial V \neq \emptyset$ olsun. $x \notin \partial V$ olduğundan $x \neq y$ olacak biçimde bir $y \in \bigcap_{n \in \omega} \overline{st^2(x, \vartheta_n)} \cap \partial V$ vardır. $x \neq y$ olduğundan $(x, y) \notin \Delta$ olur. Buradan $(x, y) \notin \overline{U_{n_0}}$ olacak biçimde bir $n_0 \in \omega$ vardır. $(x, y) \notin \overline{U_{n_0}}$ olduğundan $H \cap U_{n_0} = \emptyset$ olacak biçimde (x, y) 'in bir $H \subset X \times X$ açık komşuluğu vardır. $(x, y) \in H$ ve H açık küme olduğundan $(x, y) \in T \times O \subset H$ olacak şekilde T, O açık kümeleri vardır. $x \in T$, $y \in O$ ve X Moore uzayı olduğundan $st(x, \vartheta_{k_1}) \subset T$ ve $st(y, \vartheta_{k_2}) \subset O$ olacak biçimde $k_1, k_2 \in \omega$ vardır. $\max\{k_1, k_2\} = k_0$ olsun. Her $n \in \omega$ için $st(x, \vartheta_{n+1}) \subset st(x, \vartheta_n)$ olduğundan $st(x, \vartheta_{k_0}) \subset st(x, \vartheta_{k_1}) \subset T$ ve $st(y, \vartheta_{k_0}) \subset st(y, \vartheta_{k_2}) \subset O$ dir. Buradan $st(x, \vartheta_{k_0}) \times st(y, \vartheta_{k_0}) \subset T \times O \subset H$ dir. $\max\{k_0, n_0\} = m$ olsun. Böylelikle $st(x, \vartheta_m) \subset st(x, \vartheta_{k_0})$, $st(y, \vartheta_m) \subset st(y, \vartheta_{k_0})$ ve $U_m \subset U_{n_0}$ dir. Buradan $st(x, \vartheta_m) \times st(y, \vartheta_m) \subset H$ olur. $U_m \subset U_{n_0}$ olduğundan $[st(x, \vartheta_m) \times st(y, \vartheta_m)] \cap U_m \subset H \cap U_{n_0}$ dir. $H \cap U_{n_0} = \emptyset$ olduğundan $[st(x, \vartheta_m) \times st(y, \vartheta_m)] \cap U_m = \emptyset$ dir. Her $n \in \omega$ için $y \in \overline{st^2(x, \vartheta_n)}$ olduğundan $y \in \overline{st^2(x, \vartheta_m)}$ dir. ϑ_m açık örtü olduğundan $y \in G_3$ olacak biçimde bir $G_3 \in \vartheta_m$

vardır. $y \in \overline{\text{st}^2(x, \vartheta_m)}$ olduğundan $G_3 \cap \text{st}^2(x, \vartheta_m) \neq \emptyset$ olup $G_2 \cap \text{st}(x, \vartheta_m) \neq \emptyset$ ve $G_2 \cap G_3 \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $G_2 \in \vartheta_m$ vardır. $G_2 \cap \text{st}(x, \vartheta_m) \neq \emptyset$ olduğundan $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$ ve $x \in G_1$ olacak biçimde bir $G_1 \in \vartheta_m$ vardır. $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$ ve $G_2 \cap G_3 \neq \emptyset$ olduğundan $z_1 \in G_1 \cap G_2$ ve $z_2 \in G_2 \cap G_3$ olacak biçimde $z_1, z_2 \in X$ vardır. $z_1 \in G_1$ ve $z_2 \in G_3$ olduğundan $(z_1, z_2) \in G_1 \times G_3$ dir. Aynı şekilde $z_1 \in G_2$ ve $z_2 \in G_2$ olduğundan $(z_1, z_2) \in G_2 \times G_2$ dir. $x \in G_1$ ve $G_1 \in \vartheta_m$ olduğundan $z_1 \in G_1 \subset \text{st}(x, \vartheta_m)$ dir. $y \in G_3$ ve $G_3 \in \vartheta_m$ olduğundan $z_2 \in G_3 \subset \text{st}(y, \vartheta_m)$ dir. Böylece $G_1 \times G_3 \subset \text{st}(x, \vartheta_m) \times \text{st}(y, \vartheta_m)$ dir. Her $G \in \vartheta_n$ için $G \times G \subset U_n$ olduğundan $G_2 \times G_2 \subset U_m$ dir. Böylelikle $(z_1, z_2) \in [\text{st}(x, \vartheta_m) \times \text{st}(y, \vartheta_m)] \cap U_m$ olup $[\text{st}(x, \vartheta_m) \times \text{st}(y, \vartheta_m)] \cap U_m \neq \emptyset$ dir. Bu durum

$[\text{st}(x, \vartheta_m) \times \text{st}(y, \vartheta_m)] \cap U_m = \emptyset$ olması ile çelişir. Böylece $\bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}^2(x, \vartheta_n)} \cap \partial V = \emptyset$

dir. Bu bir çelişkidir. Çünkü $\bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}^2(x, \vartheta_n)} \cap \partial V = \emptyset$ olduğundan

$\partial V \subset \bigcup_{n \in \omega} \left(\overline{\text{st}^2(x, \vartheta_n)} \right)^c$ dir. ∂V kompakt olduğundan $\partial V \subset \bigcup_{k=1}^m \left(\overline{\text{st}^2(x, \vartheta_{n_k})} \right)^c$ dir.

$\max\{n_1, n_2, \dots, n_m\} = r$ olsun. Her $n \in \omega$ için $\overline{\text{st}^2(x, \vartheta_{n+1})} \subset \overline{\text{st}^2(x, \vartheta_n)}$ olduğundan

$\bigcup_{k=1}^m \left(\overline{\text{st}^2(x, \vartheta_{n_k})} \right)^c = \left(\overline{\text{st}^2(x, \vartheta_r)} \right)^c$ dir. Böylelikle $\partial V \subset \left(\overline{\text{st}^2(x, \vartheta_r)} \right)^c$ olur. Buradan

$\partial V \cap \overline{\text{st}^2(x, \vartheta_r)} = \emptyset$ olur. Bu durum her $n \in \omega$ için $\overline{\text{st}^2(x, \vartheta_n)} \cap \partial V \neq \emptyset$ olması ile

çelişir. Böylelikle x 'in her V kompakt komşuluğu için $\text{st}^2(x, \vartheta_{n_0}) \subset V$ olacak

biçimde bir $n_0 \in \omega$ vardır. Teoremin a) kısmının ispatında gösterildiği üzere x 'in her

T açık komşuluğu için $K \subset T$ olacak biçimde x 'in bir K kompakt komşuluğu vardır.

Böylece x 'in her T açık komşuluğu için $\text{st}^2(x, \vartheta_{n_0}) \subset T$ olacak biçimde bir $n_0 \in \omega$

vardır. Sonuç olarak $\{\text{st}^2(x, \vartheta_n) : n \in \omega\}$ ailesi x 'in bir komşuluklar tabanıdır.

$\text{st}^2(x, \vartheta_{n_0}) = \text{st}(\text{st}(x, \vartheta_{n_0}), \vartheta_{n_0}) \subset T$ dir. $\text{st}(x, \vartheta_{n_0})$ x 'in açık komşuluğu olduğundan

3.6. Teorem'den X uzayı metriklenebilir uzaydır. ■

5. $w\Delta$ – UZAY, M – UZAY, p – UZAY ve k – UZAY

Bu bölümde ele alınacak $w\Delta$ – uzay, M – uzay ve p – uzaylar genelleştirilmiş metrik uzaylar teorisinde önemli bir yere sahiptirler. Bu uzaylar daha çok metrik uzayların mükemmel dönüşümler altındaki ters görüntülerinin karakterize edilmesinde öne çıkmaktadırlar. Parakompakt uzaylara, bu uzayların koşulları eklendiğinde bu tür uzayların sayılabilir çarpımı yine parakompakt olmaktadır. Oysa ki; X, Y parakompakt uzaylar olmasına rağmen $X \times Y$ 'nin parakompakt uzay olmadığını gösteren birçok örnek mevcuttur[16].

Bu bölüme açılabilir uzaylara benzer bir yapı olan $w\Delta$ -uzayların tanımını vererek başlayalım.

5.1. Tanım

Eğer X uzayı, $x \in X$ olmak üzere her $n \in \omega$ için $x_n \in st(x, \vartheta_n)$ seçerek oluşturulan $\{x_n : n \in \omega\}$ dizisi X içinde bir değme noktasına sahip olacak biçimde bir $\{\vartheta_n : n \in \omega\}$ açık örtüler dizisine sahipse, X uzayına $w\Delta$ – uzay denir.

5.2. Teorem

Her açılabilir uzay $w\Delta$ – uzay dır.

İspat

X açılabilir bir uzay olsun. $\{\vartheta_n : n \in \omega\}$ X için bir açılım ve $x \in X$ olsun. Her $n \in \omega$ için $\vartheta_{n+1} \prec \vartheta_n$ olarak alabiliriz. Her $n \in \omega$ için $x_n \in st(x, \vartheta_n)$ seçerek oluşturulan $\{x_n : n \in \omega\}$ dizisi için $\{x_n : n \in \omega\} \succ x$ olmak zorundadır. Bunu kanıtlamak için, U x 'in bir açık komşuluğu ve $n \in \omega$ olsun. $\{\vartheta_n : n \in \omega\}$ X için bir açılım olduğundan

$st(x, \vartheta_{m_0}) \subset U$ olacak biçimde bir $m_0 \in \omega$ vardır. $n + m_0 = k_0$ diyelim. $\vartheta_{k_0} \prec \vartheta_{m_0}$ olduğundan $x_{k_0} \in st(x, \vartheta_{k_0}) \subset st(x, \vartheta_{m_0})$ dir. $st(x, \vartheta_{m_0}) \subset U$ olduğundan $x_{k_0} \in U$ dir. Böylece $\{x_n : n \in \omega\} \succ x$ dir. ■

Şimdi 5.4. Teorem'in ispatında kullanacağımız aşağıdaki lemmayı ifade edip ispatlayalım.

5.3. Lemma

X bir topolojik uzay, her $n \in \omega$ için U_n X 'in bir açık alt kümesi, $\bigcap_{n \in \omega} U_n = \bigcap_{n \in \omega} \overline{U_n}$ ve her $n \in \omega$ için $U_{n+1} \subset U_n$ olsun. Eğer her $n \in \omega$ için $x_n \in U_n$ seçerek oluşturulan $\{x_n : n \in \omega\}$ dizisinin X içinde bir değme noktası varsa bu durumda $\{U_n : n \in \omega\}$ dizisi $\bigcap_{n \in \omega} U_n$ kümesi için bir komşuluklar tabanıdır.

İspat

Her $n \in \omega$ için $U_n \subset X$ açık olmak üzere $U_{n+1} \subset U_n$ ve $\bigcap_{n \in \omega} U_n = \bigcap_{n \in \omega} \overline{U_n}$ olsun. Her $n \in \omega$ için $x_n \in U_n$ seçerek oluşturulan $\{x_n : n \in \omega\}$ dizisinin X içinde bir değme noktası var olsun. Fakat (U_n) dizisi $\bigcap_{n \in \omega} U_n$ kümesi için bir taban olmasın. (U_n) dizisi taban olmadığı için $\bigcap_{n \in \omega} U_n \subset V$ ve her $n \in \omega$ için $U_n \not\subset V$ olacak şekilde bir V açık kümesi vardır. Her $n \in \omega$ için $x_n \in U_n \setminus V$ olmak üzere $\{x_n : n \in \omega\}$ kümesinin değme noktası x olsun. Her $n \in \omega$ için $x_n \notin V$ dir. Buradan $\{x_n : n \in \omega\} \subset V^c$ olur. V^c kümesi kapalı olduğundan $x \in V^c$ olur. Öte yandan $x \in \bigcap_{n \in \omega} \overline{U_n}$ dir. Şöyle ki; eğer $x \notin \bigcap_{n \in \omega} \overline{U_n}$ ise $x \notin \overline{U_{n_0}}$ olacak şekilde bir $n_0 \in \omega$ vardır. $\overline{U_{n_0}}$ kapalı olduğundan $(\overline{U_{n_0}})^c$ kümesi açık kümedir. $x \in (\overline{U_{n_0}})^c$ ve x değme

noktası olduğundan $x_{k_0} \in (\overline{U_{n_0}})^c$ ve $n_0 < k_0$ olacak biçimde bir $k_0 \in \omega$ vardır. $x_{k_0} \in (\overline{U_{n_0}})^c$ olduğundan $x_{k_0} \notin \overline{U_{n_0}}$ dir. (U_n) dizisi azalan ve $n_0 < k_0$ olduğundan $U_{k_0} \subset U_{n_0}$ dir. Buradan $x_{k_0} \in \overline{U_{n_0}}$ olur. Bu durum $x_{k_0} \notin \overline{U_{n_0}}$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $x \in \bigcap_{n \in \omega} \overline{U_n}$ dir. $\bigcap_{n \in \omega} U_n = \bigcap_{n \in \omega} \overline{U_n}$ olduğu için $x \in \bigcap_{n \in \omega} U_n$ olur. $\bigcap_{n \in \omega} U_n \subset V$ olduğundan $x \in V$ olur. Bu ise $x \in V^c$ ile çelişir. Sonuç olarak (U_n) dizisi $\bigcap_{n \in \omega} U_n$ kümesi için bir tabandır. ■

5.4. Teorem

X uzayının açılabilir olması için gerekli ve yeterli koşul X uzayının G_δ^* –diagonale sahip olan bir $w\Delta$ -uzay olmasıdır[17].

İspat

$\Rightarrow$: X uzayı açılabilir uzay olsun. Öyleyse X için $\vartheta_{n+1} \prec \vartheta_n$ olacak biçimde bir $\{\vartheta_n : n \in \omega\}$ açılımı vardır. Şimdi X 'in $w\Delta$ -uzay olduğunu görelim. $x \in X$ olsun. Her $n \in \omega$ için $x_n \in st(x, \vartheta_n)$ seçerek $\{x_n : n \in \omega\}$ dizisini oluşturalım. Bu durumda $\{x_n : n \in \omega\} \succ x$ dir. Gerçekten $U \subset X$ açık olmak üzere $x \in U$ ve $n \in \omega$ olsun. $\{st(x, \vartheta_n) : n \in \omega\}$ kümesi x noktasının bir komşuluklar tabanı ve U x 'in açık komşuluğu olduğu için $st(x, \vartheta_{n_0}) \subset U$ olacak şekilde bir $n_0 \in \omega$ vardır. $n + n_0 = m$ olsun. $n_0 < m$ ve her $n \in \omega$ $\vartheta_{n+1} \prec \vartheta_n$ olduğundan $\vartheta_m \prec \vartheta_{n_0}$ olur. Buradan $st(x, \vartheta_m) \subset st(x, \vartheta_{n_0})$ olur. $st(x, \vartheta_{n_0}) \subset U$ olduğu için $x_m \in st(x, \vartheta_m) \subset U$ ve $x_m \in U$ olur. x 'in her U açık komşuluğu ve her $n \in \omega$ için $x_m \in U$ ve $m > n$ olacak şekilde en az bir $m \in \omega$ var olduğu için x noktası $\{x_n : n \in \omega\}$ dizisinin bir değme noktasıdır. Sonuç olarak X uzayı $w\Delta$ -uzaydır. 2.2.19. Teorem'den X uzayı G_δ^* –diagonale sahiptir.

$\Leftarrow$: X uzayı G_δ^* -diagonale sahip olan bir $w\Delta$ -uzay olsun. X uzayı $w\Delta$ -uzay olduğu için her $n \in \omega$ için $x_n \in \text{st}(x, \phi_n)$ seçerek oluşturulan her $\{x_n : n \in \omega\}$ dizisinin X içinde bir değme noktası olacak şekilde X 'in bir (ϕ_n) açık örtüler dizisi vardır. X uzayı G_δ^* -diagonale sahip olduğu için $\bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \phi_n)} = \{x\}$ olacak şekilde X 'in bir (ϕ_n) açık örtüler dizisi vardır. (ϕ_n) ve (ϕ_n) örtülerini $\phi_{n+1} \prec \phi_n$ ve $\phi_{n+1} \prec \phi_n$ olacak şekilde seçebiliriz. $\vartheta_n = \phi_n \wedge \phi_n$ olacak şekilde X 'in (ϑ_n) açık örtüler dizisini tanımlayalım. Bu durumda $\vartheta_{n+1} \prec \vartheta_n$ olduğundan her $n \in \omega$ için $\text{st}(x, \vartheta_{n+1}) \subset \text{st}(x, \vartheta_n)$ olup $\{\text{st}(x, \vartheta_n) : n \in \omega\}$ ailesi X 'in açık alt kümelerinin azalan bir dizisidir. Her $n \in \omega$ için $\vartheta_n = \phi_n \wedge \phi_n$ olduğundan her $n \in \omega$ için $\text{st}(x, \vartheta_n) \subset \text{st}(x, \phi_n)$ olur. Aynı zamanda $\bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \phi_n)} = \{x\}$ olduğundan $\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \vartheta_n) = \bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \vartheta_n)} = \{x\}$ dir. Her $n \in \omega$ için $\text{st}(x, \vartheta_n) \subset \text{st}(x, \phi_n)$ olduğundan her $n \in \omega$ için $x_n \in \text{st}(x, \vartheta_n)$ seçerek oluşturulan $\{x_n : n \in \omega\}$ dizisi X içinde bir değme noktasına sahiptir. Öyleyse X 'in açık alt kümelerinin $\{\text{st}(x, \vartheta_n) : n \in \omega\}$ dizisi 5.3. Lemma'nın hipotezini sağlar. $\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \vartheta_{n+1}) = \{x\}$ olduğundan 5.3. Lemma'dan $\{\text{st}(x, \vartheta_n) : n \in \omega\}$ ailesi x için bir komşuluklar tabanıdır. Böylece $\{\vartheta_n : n \in \omega\}$ X için bir açılım dizisi olup X açılabilir bir uzaydır. ■

Şimdi 4.19. Teorem'in yardımıyla 5.4. Teorem'in basit bir sonucu olan 5.5. Sonuç'u verelim.

5.5. Sonuç

X uzayının Moore uzayı olması için gerekli ve yeterli koşul X uzayının G_δ -diagonale sahip olan submetakompakt bir $w\Delta$ -uzay olmasıdır.

İspat

$\Rightarrow$: X uzayı Moore uzayı olduğundan X açılabilir bir uzaydır. 5.4. Teorem'den X uzayı G_δ^* -diagonale sahip bir $w\Delta$ -uzaydır. X uzayı G_δ^* -diagonale sahip olduğundan G_δ -diagonale sahiptir. Ayrıca X uzayı Moore uzay olduğundan 3.3. Lemma'dan subparakompakttır. X uzayı subparakompakt olduğundan submetakompakttır.

$\Leftarrow$: X uzayı G_δ -diagonale sahip bir submetakompakt bir $w\Delta$ -uzay olsun. 4.19. Teorem'den X uzayı G_δ^* -diagonale sahiptir. Öyleyse 5.4. Teorem'den X uzayı açılabilir. X uzayı düzenli ve açılabilir olduğundan Moore uzayıdır. ■

5.6. Tanım

X bir topolojik uzay olsun. Eğer X 'in

i) Her $n \in \omega$ için $x_n \in \text{st}(x, \vartheta_n)$ olmak üzere $\{x_n : n \in \omega\}$ dizisi X içinde bir değme noktasına sahip ve

ii) Her $n \in \omega$ için $\vartheta_{n+1} \prec^* \vartheta_n$

koşullarını sağlayan bir (ϑ_n) açık örtüler dizisi varsa X uzayına M -uzay denir.

5.6. Tanım'dan görüleceği üzere M -uzay olma $w\Delta$ -uzay olma özelliğinden daha güçlüdür. Ayrıca sayılabilir kompakt uzaylar M -uzaydır. Her $n \in \omega$ $\vartheta_n = \{X\}$ aldığımızda ii) koşulu sağlanmış olur. Ayrıca sayılabilir kompakt uzaylarda her dizinin bir değme noktası var olduğundan i) sağlanmış olur. Diğer taraftan parakompakt $w\Delta$ -uzaylar M -uzaydır. Çünkü parakompakt uzayların her örtüsünün bir yıldız incesi vardır ve böylece ii) sağlanır.

5.7. Lemma

M – uzayların kapalı alt kümeleri de M – uzaydır.

İspat

X bir M – uzay ve $K \subset X$ kapalı bir alt küme olsun. X M – uzay olduğundan X 'in M – uzay olma koşullarını sağlayan (ϑ_n) açık örtüler dizisi vardır. $\varphi_n = \{V \cap K : V \in \vartheta_n\}$ ailesi K 'nın açık örtüler dizisi olup K kümesi için M – uzay olma koşullarını sağladığını görelim. $x \in K$ olmak üzere her $n \in \omega$ için $st(x, \varphi_n) = \bigcup \{V \cap K : V \in \vartheta_n, x \in V \cap K\} = \bigcup \{V : V \in \vartheta_n, x \in V\} \cap K = st(x, \vartheta_n) \cap K$ olduğundan $st(x, \varphi_n) = st(x, \vartheta_n) \cap K$ dir. $x_n \in st(x, \varphi_n)$ alarak oluşturduğumuz $\{x_n : n \in \omega\}$ kümesinin değme noktası vardır. Çünkü $st(x, \varphi_n) = st(x, \vartheta_n) \cap K$ olduğundan $x_n \in st(x, \vartheta_n)$ ve $x_n \in K$ dır. Buradan X M – uzay olduğundan $\{x_n : n \in \omega\}$ kümesinin değme noktası vardır. Ayrıca $\{x_n : n \in \omega\} \subset K$ ve K kapalı olduğundan $\{x_n : n \in \omega\}$ dizisinin değme noktası K 'nın elemanı olur. Böylece $\{x_n : n \in \omega\}$ dizisi K içinde bir değme noktasına sahiptir. Diğer taraftan her $n \in \omega$ için $\vartheta_{n+1} \prec^* \vartheta_n$ olduğundan $\varphi_{n+1} \prec^* \varphi_n$ olduğu kolayca görülebilir. ■

Aşağıdaki teorem M – uzay'ın Morita tarafından 1964'te verilmiş olan bir başka karakterizasyonudur.

5.8. Teorem

Bir X uzayının M -uzay olması için gerekli ve yeterli koşul bir Y metrik uzayının ve bir $f : X \rightarrow Y$ hemen hemen mükemmel fonksiyonunun var olmasıdır[18].

İspat

$\Rightarrow$: X , M - uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikleri sağlayan X 'in açık örtülerinin bir $\{\vartheta_n : n \in \omega\}$ dizisi vardır.

a) $x_n \in \text{st}(x, \vartheta_n)$ alınarak oluşturulan $\{x_n : n \in \omega\}$ dizisinin bir $p \in X$ değme noktası var,

b) Her $n \in \omega$ için $\vartheta_{n+1} \prec^* \vartheta_n$

$\vartheta_{n+1} \prec^* \vartheta_n$ olduğundan $\vartheta_{n+1} \prec^R \vartheta_n$ dir. O zaman 4.15. Lemma'dan X üzerinde;

i) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow y \in \bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \vartheta_n)$,

ii) $U \in \tau_\rho \Leftrightarrow$ her $x \in U$ için $\text{st}(x, \vartheta_{n(x)}) \subset U$ olacak biçimde bir $n(x) \in \omega$ vardır,

koşullarını sağlayan bir ρ sözde metriği vardır.

$x \sim y \Leftrightarrow \rho(x, y) = 0$ şeklinde tanımlı " $\sim$ " bağıntısı X üzerinde bir denklik bağıntısıdır. $Y = X / \sim = \{[x] : x \in X\}$ olsun. $d([x], [y]) = \rho(x, y)$ biçiminde tanımlı $d : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu bir metriktir. Çünkü;

M1) ρ metrik olduğundan $d([x], [y]) = \rho(x, y) \geq 0$ dir.

M2) $d([x], [y]) = 0 \Leftrightarrow \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x \sim y \Leftrightarrow [x] = [y]$ dir.

M3) $d([x], [y]) = \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) = d([x], [z]) + d([z], [y])$ dir.

Bu durumda (Y, d) uzayı bir metrik uzaydır. Şimdi her $x \in X$ için $f(x) = [x]$ biçiminde tanımlanan $f : X \rightarrow Y$ dönüşümünün hemen hemen mükemmel dönüşüm olduğunu görelim. Bunun için f fonksiyonun sürekli, her $y \in Y$ için $f^{-1}(y)$ alt uzayının sayılabilir kompakt ve f 'nin kapalı dönüşüm olduğunu görelim. Öncelikle f fonksiyonun sürekli olduğunu görelim. Her $\varepsilon > 0$ için $B_d([x], \varepsilon) \in \tau_d$ açık yuvarı için $f^{-1}(B_d([x], \varepsilon)) = B_\rho(x, \varepsilon)$ olduğu açıktır. 4.15.Lemma (ii)'den dolayı ρ tarafından üretilen topoloji, X üzerindeki topoloji tarafından kapsanır. $B_\rho(x, \varepsilon)$ açık yuvarı ρ tarafından üretilen topolojinin bazının bir elemanı olduğundan $B_\rho(x, \varepsilon)$

kümesi X üzerindeki orijinal topolojiye göre açıktır. Buradan f sürekli fonksiyondur. Şimdi her $y \in Y$ için $f^{-1}(y)$ 'nin sayılabilir kompakt olduğunu görelim. Bunun için $f^{-1}(y)$ alt uzayı içindeki her dizinin $f^{-1}(y)$ içinde bir değme noktasına sahip olduğunu görmemiz yeterlidir[5,19]. $[x] \in Y$ ve $\{x_n : n \in \omega\} \subset f^{-1}([x])$ olsun.

$f^{-1}([x]) = \bigcap_{n \in \omega} st(x, \vartheta_n)$ dir. Çünkü;

$$z \in f^{-1}([x]) \Leftrightarrow f(z) = [x] \Leftrightarrow [z] = [x] \Leftrightarrow z \sim x \Leftrightarrow \rho(z, x) = 0 \Leftrightarrow z \in \bigcap_{n \in \omega} st(x, \vartheta_n) \text{ dir.}$$

Buradan $\{x_n : n \in \omega\} \subset \bigcap_{n \in \omega} st(x, \vartheta_n)$ olur. Böylece her $n \in \omega$ için $x_n \in st(x, \vartheta_n)$ dir.

a)'dan $\{x_n : n \in \omega\} \succ p$ olacak biçimde bir $p \in X$ vardır. f fonksiyonu sürekli ve $[x] \subset Y$ kapalı küme olduğundan $f^{-1}([x])$ kapalı kümedir. $\{x_n : n \in \omega\} \subset f^{-1}([x])$ ve $f^{-1}([x])$ kapalı olduğundan $p \in f^{-1}([x])$ dir. Böylece $f^{-1}([x])$ içindeki her dizinin $f^{-1}([x])$ 'de bir değme noktası var olduğundan $f^{-1}([x])$ sayılabilir kompakttır. Böylece her $y \in Y$ için $f^{-1}(y)$ sayılabilir kompakttır. Şimdi f fonksiyonun kapalı olduğunu görelim. Bu amaçla önce $\{st(x, \vartheta_n) : n \in \omega\}$ ailesinin $[x]$ için bir komşuluklar tabanı olduğunu görelim. Her $n \in \omega$ için $\vartheta_{n+1} \prec \vartheta_n$ olduğundan $st(x, \vartheta_{n+1}) \subset st(x, \vartheta_n)$ olup $\{st(x, \vartheta_n) : n \in \omega\}$ X 'in açık alt kümelerinin azalan bir dizisidir. Aynı zamanda her $n \in \omega$ için $\vartheta_{n+1} \prec^* \vartheta_n$ olduğundan $\bigcap_{n \in \omega} st(x, \vartheta_n) = \bigcap_{n \in \omega} \overline{st(x, \vartheta_n)}$ dir. Şöyle ki; $\vartheta_{n+1} \prec^* \vartheta_n$ olduğundan $st^2(x, \vartheta_{n+1}) \subset st(x, \vartheta_n)$ olduğunu görmek kolaydır. Ayrıca her $\mathcal{V}$ açık örtüsü için $\overline{st(x, \mathcal{V})} \subset st^2(x, \mathcal{V})$ olduğundan $\overline{st(x, \vartheta_{n+1})} \subset st^2(x, \vartheta_{n+1})$ olup her $n \in \omega$ için $\overline{st(x, \vartheta_n)} \subset st^2(x, \vartheta_n)$ elde edilir. Böylece $\bigcap_{n \in \omega} st(x, \vartheta_n) = \bigcap_{n \in \omega} \overline{st(x, \vartheta_n)}$ dir. İlaveten a)'dan her $n \in \omega$ için $x_n \in st(x, \vartheta_n)$ alınarak oluşturulan her $\{x_n : n \in \omega\}$ dizisi X içinde bir değme noktasına sahip olduğundan 5.3. Lemma'dan $\{st(x, \vartheta_n) : n \in \omega\}$ ailesi $\bigcap_{n \in \omega} st(x, \vartheta_n)$ kümesi için bir komşuluklar tabanıdır. Aynı zamanda

$y \in \bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \vartheta_n) \Leftrightarrow \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x \sim y \Leftrightarrow y \in [x]$ olduğundan $\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \vartheta_n) = [x]$ olup $\{\text{st}(x, \vartheta_n) : n \in \omega\}$ ailesi $[x]$ için bir komşuluklar tabanıdır. Şimdi f 'nin kapalı bir dönüşüm olduğunu görelim. $H \subset X$ kapalı olsun. f bölüm fonksiyonu olduğundan $f(H)$ kümesinin Y içinde kapalı olduğunu görmek için $f^{-1}(f(H))$ kümesinin X içinde kapalı olduğunu görmek yeterlidir. $x \in (f^{-1}(f(H)))^c$ olsun. Bu durumda $[x] \cap H = \emptyset$ olmak zorundadır. Şöyle ki, eğer $h \in [x]$ olacak biçimde bir $h \in H$ varsa $[h] = [x]$ olup $f(x) = f(h)$ olur. Ancak $f(h) \in f(H)$ olduğundan $f(x) \in f(H)$ olur ki; bu $x \in (f^{-1}(f(H)))^c$ olması ile çelişir. Öyleyse $[x] \cap H = \emptyset$ dir. $\{\text{st}(x, \vartheta_n) : n \in \omega\}$ ailesi $[x]$ için bir komşuluklar tabanı, $[x] \subset H^c$ ve H^c açık olduğundan $\text{st}(x, \vartheta_{n_0}) \cap H = \emptyset$ olacak biçimde bir $n_0 \in \omega$ vardır. Şimdi $\text{st}(x, \vartheta_{n_0+1}) \subset (f^{-1}(f(H)))^c$ olduğunu görelim. $y \in \text{st}(x, \vartheta_{n_0+1})$ alalım. Buradan $\text{st}(y, \vartheta_{n_0+1}) \subset \text{st}^2(x, \vartheta_{n_0+1})$ olur. Ayrıca $\text{st}^2(x, \vartheta_{n_0+1}) \subset \text{st}(x, \vartheta_{n_0})$ dir. Böylelikle $\text{st}(y, \vartheta_{n_0+1}) \subset \text{st}^2(x, \vartheta_{n_0+1}) \subset \text{st}(x, \vartheta_{n_0})$ ve $\text{st}(x, \vartheta_{n_0}) \cap H = \emptyset$ olduğundan $\text{st}(y, \vartheta_{n_0+1}) \cap H = \emptyset$ dir. Buradan $\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(y, \vartheta_n) \cap H = \emptyset$ olur. $\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(y, \vartheta_n) = [y]$ olduğundan $[y] \cap H = \emptyset$ olur. Buradan $y \notin H$ çıkar. $y \notin H$ olduğundan $y \notin f^{-1}(f(H))$ dir. Böylece $\text{st}(x, \vartheta_{n_0+1}) \subset (f^{-1}(f(H)))^c$ olduğundan $(f^{-1}(f(H)))^c$ açık kümedir. Böylece f fonksiyonu kapalı olur.

f fonksiyonu kapalı, sürekli ve her $y \in Y$ için $f^{-1}(y)$ sayılabilir kompakt olduğundan hemen hemen mükemmel dönüşümdür.

$\Leftarrow$: Y metrik uzay olmak üzere $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu hemen hemen mükemmel olsun. Y metrik uzay olduğundan 3.9. Sonuç'tan $\varphi_{n+1} \prec^* \varphi_n$ olacak biçimde Y 'nin bir $\{\varphi_n : n \in \omega\}$ açılımı vardır. Her $n \in \omega$ için $\vartheta_n = \{f^{-1}(O) : O \in \varphi_n\}$ denilirse ϑ_n X 'in

bir açık örtüsü olur ve $\vartheta_{n+1} \prec^* \vartheta_n$ dir. Şöyle ki;

$$\begin{aligned} \text{st}(x, \vartheta_{n+1}) &= \bigcup \{D : x \in D \in \vartheta_{n+1}\} \\ &= \bigcup \{f^{-1}(O) : O \in \varphi_{n+1}, x \in f^{-1}(O)\} \\ &= f^{-1}\left(\bigcup \{O : f(x) \in O \in \varphi_{n+1}\}\right) \\ &= f^{-1}\left(\text{st}(f(x), \varphi_{n+1})\right) \end{aligned}$$

ve $\varphi_{n+1} \prec^* \varphi_n$ olduğundan $\text{st}(f(x), \varphi_{n+1}) \subset B$ olacak biçimde bir $B \in \varphi_n$ vardır.

Buradan $f^{-1}(\text{st}(f(x), \varphi_{n+1})) \subset f^{-1}(B)$ olur. Böylelikle $\text{st}(x, \vartheta_{n+1}) \subset f^{-1}(B)$ olur.

$B \in \varphi_n$ olduğundan $f^{-1}(B) \in \vartheta_n$ dir. O halde $\vartheta_{n+1} \prec^* \vartheta_n$ dir. Her $n \in \omega$ için

$x_n \in \text{st}(x, \vartheta_n)$ alarak oluşturulan $\{x_n : n \in \omega\}$ dizisinin X içinde bir değme

noktasının var olduğunu görelim. Eğer $\{x_n : n \in \omega\}$ dizisine ait sayılabilir sayıda

terim $f^{-1}(f(x))$ kümesine ait ise; $f^{-1}(f(x))$ sayılabilir kompakt olduğundan

$\{x_n : n \in \omega\}$ dizisinin değme noktası vardır. Eğer $f^{-1}(f(x))$ kümesi $\{x_n : n \in \omega\}$

dizisine ait sayılabilir sayıda terim içermiyorsa $\{x_n : n \in \omega\} \cap f^{-1}(f(x)) = \emptyset$

olduğunu kabul edebiliriz. Böylece $\{x_n : n \in \omega\} \subset (f^{-1}(f(x)))^c$ dir. Öte yandan her

$n \in \omega$ için $x_n \in \text{st}(x, \vartheta_n)$ ve $\text{st}(x, \vartheta_n) = f^{-1}(\text{st}(f(x), \varphi_n))$ olduğundan

$x_n \in f^{-1}(\text{st}(f(x), \varphi_n))$ olup $f(x_n) \in \text{st}(f(x), \varphi_n)$ dir. $\{\varphi_n : n \in \omega\}$ açılım

oldüğundan $f(x_n) \rightarrow f(x)$ olduğu kolaylıkla görülebilir. f kapalı dönüşüm

oldüğundan $\{x_n : n \in \omega\} \succ p$ olacak biçimde bir $p \in f^{-1}(f(x))$ vardır. Bunu

ispatlamak amacıyla her $p \in f^{-1}(f(x))$ için $\{x_n : n \in \omega\} \not\succ p$ olduğunu varsayalım.

Bu durumda her $p \in f^{-1}(f(x))$ için $p \notin \{x_n : n \in \omega\}^-$ olup her $p \in f^{-1}(f(x))$ için

$\{x_n : n \in \omega\} \cap (U_p \setminus \{p\}) = \emptyset$ olacak biçimde bir $p \in U_p \subset X$ açık kümesi vardır.

$p \in f^{-1}(f(x))$ ve $\{x_n : n \in \omega\} \cap f^{-1}(f(x)) = \emptyset$ olduğundan $\{x_n : n \in \omega\} \cap U_p = \emptyset$

dir. Her $p \in f^{-1}(f(x))$ için $p \in U_p$ olduğundan $f^{-1}(f(x)) \subset \bigcup_{p \in f^{-1}(f(x))} U_p$ dir.

$\bigcup_{p \in f^{-1}(f(x))} U_p \subset X$ açık küme ve f kapalı dönüşüm olduğundan $f(x) \in V$ ve $f^{-1}(V) \subset \bigcup_{p \in f^{-1}(f(x))} U_p$ olacak biçimde bir $V \subset Y$ açığı vardır. ($f : X \rightarrow Y$ kapalı dönüşüm, $S \subset Y$ ve $U \subset X$ açık olsun. $f^{-1}(S) \subset U$ ise $S \subset V$ ve $f^{-1}(V) \subset U$ olacak biçimde bir $V \subset Y$ açık kümesi vardır[20].) $f(x_n) \rightarrow f(x)$ ve $f(x) \in V$ olduğundan her $n > n_0$ için $f(x_n) \in V$ olacak biçimde bir $n_0 \in \omega$ vardır. Buradan $\{x_n : n > n_0\} \subset f^{-1}(V) \subset \bigcup_{p \in f^{-1}(f(x))} U_p$ olur. Bu durum $\{x_n : n \in \omega\} \cap U_p = \emptyset$ olması ile çelişir. Böylece $\{x_n : n \in \omega\} \succ p$ olacak biçimde bir $p \in f^{-1}(f(x))$ vardır. Sonuç olarak X 'in $\{\vartheta_n : n \in \omega\}$ açık örtüsü için $\vartheta_{n+1} \prec^* \vartheta_n$ ve $x_n \in \text{st}(x, \vartheta_n)$ olarak oluşturulan $\{x_n : n \in \omega\}$ dizisinin X içinde bir değme noktasının var olduğu görüldüğünden X uzayı bir M – uzaydır.■

Sayılabılır kompakt parakompakt uzayların kompakt uzay olması[5] ve parakompakt uzayların mükemmel dönüşüm altındaki ters görüntüsünün parakompakt olması gerçeklerinden[21] yola çıkarak 5.8. Teorem'inin bir sonucunu verelim.

5.9. Sonuç

X uzayının parakompakt M – uzay olması için gerekli ve yeterli koşul bir Y metrik uzayının ve bir $f : X \rightarrow Y$ mükemmel fonksiyonun var olmasıdır.

İspat

$\Rightarrow$: X parakompakt M – uzay olsun. X uzayı M – uzay olduğundan 5.8. Teorem'den bir Y metrik uzayı ve bir $f : X \rightarrow Y$ hemen hemen mükemmel fonksiyonu vardır. f hemen hemen mükemmel olduğundan her $y \in Y$ için $f^{-1}(y) \subset X$ sayılabılır kompakt ve kapalıdır. Parakompakt uzayların kapalı alt uzayları da parakompakt ve sayılabılır kompakt parakompakt uzaylar kompakt uzay

olduğundan[5] $f^{-1}(y)$ kompakttır. Böylece f fonksiyonu mükemmel olur.

$\Leftarrow$: Y metrik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ mükemmel fonksiyon olsun. f mükemmel fonksiyon olduğundan hemen hemen mükemmeldir. 5.8. Teorem'den X M – uzaydır. Y metrik uzay olduğundan parakompakt uzaydır[5]. Y parakompakt ve $f : X \rightarrow Y$ mükemmel olduğundan X parakompakttır[21].

Böylelikle X parakompakt M – uzay olur. ■

Böylelikle M – uzayların yapısını daha açık bir şekilde görme imkanına sahibiz. Şimdi sayılabilir kompakt uzayların metriklenebilme kriterini ifade eden 4.24. Sonuç'un genelleştirilmiş halini verelim.

5.10. Sonuç

X uzayının metriklenebilir olması için gerekli ve yeterli koşul X uzayının G_δ – diagonale sahip M – uzay olmasıdır.

İspat

$\Rightarrow$: X uzayı metriklenebilir uzay olsun. X uzayı metriklenebilir uzay olduğundan G_δ – diagonale sahiptir. $I : X \rightarrow X$ özdeşlik dönüşümü hemen hemen mükemmel olup 5.8. Teorem'den X uzayı M – uzaydır.

$\Leftarrow$: X uzayı G_δ – diagonale sahip M – uzay olsun. X uzayı M – uzay olduğundan 5.8. Teorem'den bir Y metrik uzayı ve bir $f : X \rightarrow Y$ hemen hemen mükemmel fonksiyonu vardır. f hemen hemen mükemmel olduğundan her $y \in Y$ için $f^{-1}(y)$ kümesi sayılabilir kompakttır. 4.23. Teorem'den G_δ – diagonale sahip sayılabilir kompakt uzaylar kompakt olduğundan her $y \in Y$ için $f^{-1}(y)$ kompakt olup f mükemmel fonksiyon olur. Y metrik uzay olduğundan parakompakt uzaydır[5]. $f : X \rightarrow Y$ mükemmel ve Y parakompakt olduğundan X parakompakttır[21]. X

M – uzay olduğundan $w\Delta$ – uzay olur. X uzayı parakompakt uzay olduğundan yığınsal normal uzaydır. Ayrıca X parakompakt uzay olduğundan submetakompakt uzaydır. X uzayı submetakompakt $w\Delta$ – uzay ve G_δ – diagonale sahip olduğundan 5.5. Sonuç’tan X Moore uzayıdır. X uzayı yığınsal normal Moore uzayı olduğundan 3.4. Teorem’den X uzayı metriklenebilir.■

Şimdi 5.9. Sonuç’un kolay bir uygulaması olan 5.11. Sonuç’u verelim.

5.11. Sonuç

Her $n \in \omega$ için X_n parakompakt M – uzay ise $\prod_{n \in \omega} X_n$ parakompakt M – uzaydır.

İspat

Her $n \in \omega$ için X_n parakompakt M – uzay olduğundan her $n \in \omega$ için bir Y_n metrik uzayı ve bir $f_n : X_n \rightarrow Y_n$ mükemmel fonksiyonu vardır. Her $n \in \omega$ için Y_n metrik uzay olduğundan $\prod_{n \in \omega} Y_n = Y$ ’de metrik uzaydır. Her $n \in \omega$ için $f_n : X_n \rightarrow Y_n$ mükemmel fonksiyon olduğundan $\prod_{n \in \omega} f_n : \prod_{n \in \omega} X_n \rightarrow \prod_{n \in \omega} Y_n$ fonksiyonu mükemmeldir[22]. $\prod_{n \in \omega} f_n = f$ diyelim. Böylece Y metrik ve $f : \prod_{n \in \omega} X_n \rightarrow Y$ mükemmel fonksiyon olduğundan 5.9. Sonuç’tan $\prod_{n \in \omega} X_n$ parakompakt M – uzay olur.■

Şimdi 5.13. Teorem’in ispatında kullanılacak olan aşağıdaki lemmayı verelim.

5.12. Lemma

αX , X ’in herhangi bir kompaktlaştırması olmak üzere $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu

mükemmel ise $h(x) = (f(x), x)$ şeklinde tanımlı $h : X \rightarrow Y \times \alpha X$ fonksiyonu bir gömmedir ve $h(X)$ kümesi $Y \times \alpha X$ içinde kapalıdır.

5.13. Teorem

X uzayının parakompakt M – uzayı olması için gerekli ve yeterli koşul bir Y metrik uzayının, bir Z kompakt uzayının ve X uzayı F kümesine homeomorf olacak şekilde bir $F \subset Y \times Z$ kapalı alt kümesinin var olmasıdır[23].

İspat

$\Rightarrow$: X uzayı parakompakt M – uzayı olsun. 5.9. Sonuç’tan bir Y metrik uzayı ve bir $f : X \rightarrow Y$ mükemmel fonksiyonu vardır. Yukarıdaki lemmadan $h(x) = (f(x), x)$ şeklinde tanımlı $h : X \rightarrow Y \times \beta X$ fonksiyonu bir gömme ve $h(X) \subset Y \times \beta X$ kümesi kapalıdır. $h(X) = F$ ve $\beta X = Z$ diyelim. Bu durumda Y metrik uzay, Z kompakt uzay ve $F \subset Y \times Z$ kapalı alt kümelerdir. Sonuç olarak $h : X \rightarrow F$ fonksiyonu homeomorfizma olduğundan $X \cong F$ dir.

$\Leftarrow$: Y bir metrik uzay ve Z bir kompakt uzay olmak üzere X uzayı $Y \times Z$ çarpım uzayının kapalı bir F alt uzayına homeomorf olsun. Y metrik uzay olduğundan 5.10. Sonuç’tan Y M – uzaydır. Y metrik uzay olduğundan parakompakt uzaydır[5]. Böylelikle Y parakompakt M – uzay olur. Diğer yandan Z kompakt uzay olduğundan parakompakt uzaydır. Z kompakt uzay olduğundan M – uzaydır. Böylece Y ve Z uzayları parakompakt M – uzay olur. 5.11. Sonuç’tan $Y \times Z$ parakompakt M – uzaydır. Parakompakt M – uzayların kapalı alt kümeleri de parakompakt M – uzay olduğundan $F \subset Y \times Z$ parakompakt M – uzaydır. Böylece F parakompakt M – uzay olup $X \cong F$ olduğundan X uzayı da parakompakt M – uzay olur. ■

Şimdi Arhangel’skinin 1963 yılında yayınlanan makalesinde yer alan p – uzayları

inceleyelim. Parakompaktlık olması durumunda p – uzaylar, M – uzaylara benzer özelliklere sahip olurlarken, parakompaktlık olmadığı durumlarda farklı başka özelliklere sahiptirler. Örneğin her yerel kompakt uzay p – uzaydır. Bir başka özellik, sayılabilir sayıdaki p – uzayın çarpımı p – uzaydır. Halbuki M – uzaylarda bu özellik parakompaktlık koşulu altında mevcuttur. p – uzaylar, açık örtüler dizisi yardımıyla da tanımlanabilirler. Bazı durumlarda uzayın kendisinin yerine kompaktlaştırmasının kullanılması daha faydalı olabilmektedir. Biz yalnızca tamamen düzenli p – uzaylarla ilgilenmenin yanında iyi bilenen Stone-Čech Kompaktlaştırmasını kullanacağız. Şimdi p – uzaylarını karakterize edecek olan 5.16. Teorem ve 5.18. Teorem’den önce p – uzay ve kesin p – uzay tanımlarını verelim.

5.14. Tanım

X topolojik uzayı tamamen düzenli olsun. βX ’in açık alt kümelerinden oluşan ve

- i) Her $n \in \omega$ için ϑ_n X ’i örter,
- ii) Her $x \in X$ için $\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \vartheta_n) \subset X$

koşullarını sağlayan bir (ϑ_n) açık alt kümeler dizisi varsa X uzayına p – uzay denir.

Eğer ilaveten $\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \vartheta_n) = \overline{\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \vartheta_n)}$ ise X uzayına kesin p – uzay denir.

Şimdi p – uzayların önemli bir özelliğini ifade eden aşağıdaki teoremi verelim.

5.15. Teorem

Her $n \in \omega$ için X_n bir p – uzay ise $X = \prod_{n \in \omega} X_n$ uzayı p – uzaydır.

İspat

Her $n \in \omega$ için X_n p – uzay olsun. X_n p – uzay olduğundan her $n \in \omega$ için βX_n

uzayının açık alt kümelerinden oluşan ve

i) Her $m \in \omega$ için θ_m^n , X_n 'yi örter,

ii) Her $x \in X_n$ için $\bigcap_{m \in \omega} \text{st}(x, \theta_m^n) \subset X_n$

koşullarını sağlayan bir $\{\theta_m^n : m \in \omega\}$ aileler dizisi vardır. Her $n \in \omega$ için

$\vartheta_n = \left\{ \prod_{i \leq n} U_i \times \prod_{i > n} X_i : U_i \in \theta_n^i, i \leq n \right\}$ olsun. Şimdi her $n \in \omega$ için ϑ_n ailesinin

$X = \prod_{n \in \omega} X_n$ uzayı için bir örtü olduğunu görelim. $n_0 \in \omega$ ve $x = (x_n) \in X$ olsun. Her

$m \in \omega$ için θ_m^n ailesi X_n 'nin örtüsü olduğundan her $i \leq n_0$ için $\theta_{n_0}^i$ ailesi X_i 'nin bir örtüsüdür. Öyleyse her $i \leq n_0$ için $x_i \in U_i$ olacak biçimde bir $U_i \in \theta_{n_0}^i$ vardır.

Böylece $x \in \prod_{i \leq n_0} U_i \times \prod_{i > n_0} X_i \in \vartheta_{n_0}$ olup ϑ_{n_0} ailesi X uzayı için bir örtüdür.

Şimdi de her $x = (x_n) \in X = \prod_{n \in \omega} X_n$ için $\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \vartheta_n) \subset X$ olduğunu görelim.

$y = (y_n) \in \bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \vartheta_n)$ olsun. Her $n \in \omega$ için $y \in \text{st}(x, \vartheta_n)$ olduğundan her $n \in \omega$

için $x \in V_n$ ve $y \in V_n$ olacak biçimde $V_n \in \vartheta_n$ vardır. ϑ_n ailesinin tanımından her

$n \in \omega$ için $V_n = \prod_{i \leq n} U_i^n \times \prod_{i > n} X_i$ olacak biçimde $U_i^n \in \theta_n^i$ vardır. Böylece her $n \in \omega$ ve

her $i \leq n$ için $x_i \in U_i^n$ ve $y_i \in U_i^n$ olup her $n \in \omega$ için $U_i^n \in \theta_n^i$ olduğundan her

$n \in \omega$ ve her $i \leq n$ için $y_i \in \text{st}(x_i, \theta_n^i)$ dir. O halde her $i \leq n$ için $y_i \in \bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x_i, \theta_n^i)$

dir ve $\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x_i, \theta_n^i) \subset X_i$ olduğundan her $i \leq n$ için $y_i \in X_i$ elde edilir. Aynı

zamanda $y = (y_n) \in V_n$ ve $V_n = \prod_{i \leq n} U_i^n \times \prod_{i > n} X_i$ olduğundan $i > n$ için $y_i \in X_i$ dir.

Böylece $y = (y_n) \in \prod_{i \leq n} U_i^n \times \prod_{i > n} X_i$ olup $y \in X$ tir.

Sonuç olarak her $n \in \omega$ için ϑ_n ailesi X için bir örtü ve her $x \in X$ için

$\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \vartheta_n) \subset X$ olduğundan $\prod_{n \in \omega} X_n = X$ bir p- uzayıdır. ■

Şimdi kesin p – uzay olmanın bir kriterini veren aşağıdaki teoremi verelim.

5.16. Teorem

X uzayının kesin p – uzay olması için gerekli ve yeterli koşul X 'in açık örtülerinin her $x \in X$ için;

- i) $C_x = \bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \vartheta_n)$ kümesi kompakt,
 - ii) $\{\text{st}(x, \vartheta_n) : n \in \omega\}$ ailesi C_x için bir taban,
- koşullarını sağlayan bir (ϑ_n) dizisinin var olmasıdır[24].

İspat

$\Rightarrow$: X topolojik uzayı kesin p – uzay olsun. X uzayı kesin p – uzay olduğundan βX 'in açık alt kümelerinden oluşan

- a) Her $n \in \omega$ için $\mathcal{V}_n$ X kümesini örter,
- b) Her $x \in X$ için $\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \mathcal{V}_n) \subset X$,
- c) $\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \mathcal{V}_n) = \bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \mathcal{V}_n)}$,

koşullarını sağlayan bir $(\mathcal{V}_n)$ aileler dizisi vardır. $(\mathcal{V}_n)$ aileler dizisini her $n \in \omega$ için $\mathcal{V}_{n+1} \prec \mathcal{V}_n$ olacak şekilde alabiliriz. $U \in \mathcal{V}_n$ ise U kümesi βX içinde açıktır. Bu durumda $U \cap X$ kümesi X 'te açık kümedir. Her $n \in \omega$ için $\vartheta_n = \{U \cap X : U \in \mathcal{V}_n\}$ olsun. $\mathcal{V}_{n+1} \prec \mathcal{V}_n$ olduğundan $\vartheta_{n+1} \prec \vartheta_n$ dir. (ϑ_n) dizisinin X 'in açık örtülerinin bir dizisi olduğu açıktır. Ayrıca her $x \in X$ ve her $n \in \omega$ için $\text{st}(x, \mathcal{V}_n) \cap X = \text{st}(x, \vartheta_n)$ dir. Aynı zamanda $\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \mathcal{V}_n) \subset X$ olduğundan $\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \mathcal{V}_n) \cap X = \bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \mathcal{V}_n)$ ve $\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \mathcal{V}_n) = \bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \vartheta_n)$ dir. Öte yandan X , βX içinde yoğun ve $\text{st}(x, \mathcal{V}_n) \cap X = \text{st}(x, \vartheta_n)$ olduğundan her $n \in \omega$ için $\overline{\text{st}(x, \mathcal{V}_n)} = \overline{\text{st}(x, \vartheta_n)}$ dir.

Buradan $\bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \mathcal{V}_n)} = \bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \mathcal{V}_n)}$ ve $\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \mathcal{V}_n) = \bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \mathcal{V}_n)}$ olduğundan $\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \mathcal{V}_n) = \bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \mathcal{V}_n)}$ dir. Böylece $\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \mathcal{V}_n) = \bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \mathcal{V}_n)$ ve $\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \mathcal{V}_n) = \bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \mathcal{V}_n)}$ elde edilir. $C_x = \bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \mathcal{V}_n) = \bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \mathcal{V}_n)}$ olup C_x kümesi βX içinde kapalıdır. Kompakt uzayların kapalı alt uzayları da kompakt olduğundan ve $C_x \subset X$ olduğundan C_x X 'in kompakt bir alt kümesidir. 2.2.29 Lemma'dan kompakt uzaylarda her ağ bir değme noktasına sahip olduğundan, her $n \in \omega$ için $x_n \in \text{st}(x, \mathcal{V}_n)$ alınarak oluşturulan $\{x_n : n \in \omega\}$ dizisinin βX içinde bir p değme noktası vardır. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{V}_{n+1} \prec \mathcal{V}_n$ olduğundan $\text{st}(x, \mathcal{V}_{n+1}) \subset \text{st}(x, \mathcal{V}_n)$ olup $p \in \bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \mathcal{V}_n)}$ olmak zorundadır. Öyleyse $p \in C_x$ olup $\{x_n : n \in \omega\}$ dizisinin X içinde bir değme noktası vardır. Böylece $\{\text{st}(x, \mathcal{V}_n) : n \in \omega\}$ X 'in açık alt kümelerinin azalan bir dizisi, $\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \mathcal{V}_n) = \bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \mathcal{V}_n)}$ ve $\{x_n : n \in \omega\}$ dizisinin X içinde bir değme noktası var olduğundan 5.3. Lemma'dan $\{\text{st}(x, \mathcal{V}_n) : n \in \omega\}$ ailesi C_x için bir komşuluklar tabanı olur.

$\Leftarrow$: $\{\mathcal{V}_n : n \in \omega\}$ X 'in açık örtülerinin (i) ve (ii) koşullarını sağlayan, bir dizisi olsun. Her $O \in \mathcal{V}_n$ için O kümesi X içinde açık olduğundan $O = U(O) \cap X$ olacak biçimde βX 'in bir $U(O)$ açık alt kümesi vardır. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{V}_n = \{U(O) : O \in \mathcal{V}_n\}$ olsun. Her $x \in X$ için $C_x = \bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \mathcal{V}_n) \subset \bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \mathcal{V}_n) \subset \bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \mathcal{V}_n)}$ olduğu açıktır. Şimdi her $x \in X$ için $\bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \mathcal{V}_n)} \subset \bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \mathcal{V}_n) = C_x$ olduğunu görelim. $x \in X$ olmak üzere $\bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \mathcal{V}_n)} \not\subset C_x$ olduğunu kabul edelim. $y \in \bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \mathcal{V}_n)} \setminus C_x$ olacak şekilde bir $y \in \beta X$ vardır. βX düzenli uzay ve C_x βX içinde kapalı olduğundan $\beta X \setminus C_x$ kümesi βX içinde açıktır. $y \notin C_x$ olduğundan $y \in W \subset \overline{W} \subset \beta X \setminus C_x$ olacak şekilde bir $W \subset \beta X$ açık alt kümesi vardır. $\overline{W} \subset \beta X \setminus C_x = (C_x)^c$ olduğundan

$C_x \subset (\overline{W})^c$ dir. $(\overline{W})^c$ kümesi βX 'te açık bir kümedir. (ii) koşulundan $\{st(x, \vartheta_n) : n \in \omega\}$ ailesi C_x için bir komşuluklar tabanı olduğundan $st(x, \vartheta_{n_0}) \subset (\overline{W})^c$ olacak şekilde bir $n_0 \in \omega$ vardır. Böylece $st(x, \vartheta_{n_0}) \cap \overline{W} = \emptyset$ olup W açık küme olduğundan $\overline{st(x, \vartheta_{n_0})} \cap W = \emptyset$ dir. $st(x, \vartheta_{n_0}) = st(x, \vartheta'_{n_0}) \cap X$ olduğu açıktır. $st(x, \vartheta'_{n_0})$ kümesi βX içinde açık ve X βX 'in yoğun bir alt kümesi olduğundan $st(x, \vartheta'_{n_0}) \subset \overline{st(x, \vartheta'_{n_0}) \cap X}$ dir. Öyleyse $st(x, \vartheta'_{n_0}) \subset \overline{st(x, \vartheta_{n_0})}$ olup $\overline{st(x, \vartheta'_{n_0})} = \overline{st(x, \vartheta_{n_0})}$ dir. $y \in \bigcap_{n \in \omega} \overline{st(x, \vartheta'_n)}$ olduğundan $y \in \overline{st(x, \vartheta'_{n_0})}$ olup $y \in \overline{st(x, \vartheta_{n_0})}$ dir. Fakat bu $\overline{st(x, \vartheta_{n_0})} \cap W = \emptyset$ olması ile çelişir. Öyleyse $C_x = \bigcap_{n \in \omega} st(x, \vartheta'_n) = \bigcap_{n \in \omega} \overline{st(x, \vartheta'_n)}$ olup βX 'in açık alt kümelerinin $\{\vartheta'_n : n \in \omega\}$ ailesi kesin p – uzay tanımındaki üç koşulu da sağlar.■

5.17. Lemma

$K \subset X$ kümesi kompakt ve her $n \in \omega$ için $G_n \subset X$ kümesi açık olmak üzere $\{G_n : n \in \omega\}$ ailesi K kümesi için bir komşuluklar tabanı olsun. Bu durumda her $n \in \omega$ için $x_n \in G_n$ olmak üzere $p \in \overline{\{x_n : n \in \omega\}}$ olacak şekilde bir $p \in K$ vardır.

İspat

Her $x \in K$ için $x \notin \overline{\{x_n : n \in \omega\}}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $x \in K$ için x 'in $V_x \cap \{x_n : n \in \omega\} = \emptyset$ olacak şekilde bir V_x açık komşuluğu vardır. Her $x \in K$ için $x \in V_x$ olduğundan $K \subset \bigcup_{x \in K} V_x$ olup $\{V_x : x \in K\}$ ailesi K için bir açık örtüdür. K kompakt olduğundan $\{V_x : x \in K\}$ açık örtüsünün $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset K$ olmak üzere $K \subset \bigcup_{i=1}^k V_{x_i}$ olacak şekilde sonlu bir alt örtüsü vardır. $\{G_n : n \in \omega\}$ ailesi K için

bir komşuluklar tabanı olduğundan $G_{n_0} \subset \bigcup_{i=1}^k V_{x_i}$ olacak şekilde bir $n_0 \in \omega$ vardır.

Her $n \in \omega$ için $x_n \in G_n$ olduğundan $x_{n_0} \in G_{n_0}$ olup $x_{n_0} \in \bigcup_{i=1}^k V_{x_i}$ dir. Bu durum her $x \in K$ için $V_x \cap \{x_n : n \in \omega\} = \emptyset$ olması ile çelişir. Öyleyse $x_0 \in \overline{\{x_n : n \in \omega\}}$ olacak şekilde bir $x_0 \in K$ vardır. ■

5.18. Sonuç

Her Moore uzayı bir kesin p – uzay, her kesin p – uzayı da bir $w\Delta$ – uzaydır.

İspat

X uzayı Moore uzayı olsun. Öyleyse X 'in açık örtülerinden oluşan bir (ϑ_n) açılımı vardır. X T_1 – uzay ve $\{st(x, \vartheta_n) : n \in \omega\}$ ailesi x noktasının komşuluklar tabanı olduğundan $C_x = \bigcap_{n \in \omega} st(x, \vartheta_n) = \{x\}$ olup C_x kompakttır. Böylece (ϑ_n) açık örtüler dizisi 5.16. Teorem'in (i) ve (ii) koşullarını sağladığından X uzayı kesin p – uzayıdır. Şimdi X uzayının $w\Delta$ – uzay olduğunu görelim. X uzayı kesin p – uzay olduğundan 5.16. Teorem'den

(i) Her $x \in X$ için $C_x = \bigcap_{n \in \omega} st(x, \vartheta_n)$ kümesi kompakt,

(ii) Her $x \in X$ için $\{st(x, \vartheta_n) : n \in \omega\}$ ailesi C_x için bir komşuluklar tabanı koşullarını sağlayan X 'in açık örtülerinden oluşan bir $\{\vartheta_n : n \in \omega\}$ dizisi vardır.

$x \in X$ olmak üzere her $n \in \omega$ için $x_n \in st(x, \vartheta_n)$ seçerek $\{x_n : n \in \omega\}$ dizisini oluşturalım. C_x kümesi kompakt ve $\{st(x, \vartheta_n) : n \in \omega\}$ ailesi C_x için bir komşuluklar tabanı olduğundan, yukarıdaki lemmadan $p \in \overline{\{x_n : n \in \omega\}}$ olacak biçimde bir $p \in C_x$ vardır. X T_1 – uzay olduğundan $\{x_n : n \in \omega\} \succ p$ dir. Böylece X bir $w\Delta$ – uzaydır. ■

5.19. Teorem

X submetakompakt uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

- a) X bir kesin p – uzaydır,
- b) X bir p – uzaydır,
- c) X $w\Delta$ – uzaydır.

İspat

5.18. Sonuç'tan $a) \Rightarrow c)$ dir. Ayrıca tanımdan her kesin p – uzay, bir p – uzay olduğundan $a) \Rightarrow b)$ dir. Şimdi $b) \Rightarrow a)$ gerektirmesini görelim. X uzayı submetakompakt p – uzay olsun. X uzayı p – uzay olduğundan βX 'in açık alt kümelerinden oluşan ve

- i) Her $n \in \omega$ için $\mathcal{V}'_n$ X 'i örter,
- ii) Her $x \in X$ için $\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \mathcal{V}'_n) \subset X$

koşullarını sağlayan bir $\{\mathcal{V}'_n : n \in \omega\}$ aileler dizisi vardır. X uzayı submetakompakt olduğundan 4.18. Lemma'dan βX 'in açık alt kümelerinden oluşan ve X 'i örten öyle

bir $\{\mathcal{V}_n : n \in \omega\}$ aileler dizisi vardır ki, her $x \in X$ için

$$\bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \mathcal{V}_n)} = \bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \mathcal{V}_n) \subset \bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \mathcal{V}'_n) \text{ sağlanır. } \bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \mathcal{V}'_n) \subset X \text{ olduğundan her}$$

$x \in X$ için $\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \mathcal{V}_n) \subset X$ dir. Böylece X uzayı kesin p – uzay olur.

Şimdi de $c) \Rightarrow a)$ gerektirmesini görelim. X $w\Delta$ – uzay olduğundan X 'in açık örtülerinden oluşan $\{\varphi_n : n \in \omega\}$ açık örtüler dizisi var ve her $x \in X$ ve her $n \in \omega$ için $x_n \in \text{st}(x, \varphi_n)$ alınarak oluşturulan $\{x_n : n \in \omega\}$ dizisinin X içinde bir değme noktası vardır. Genelliği bozmadan her $n \in \omega$ için $\varphi_{n+1} \prec \varphi_n$ alabiliriz. Diğer taraftan X submetakompakt uzay olduğundan 4.18. Lemma'dan X 'in açık örtülerinin her

$x \in X$ için $\bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \vartheta_n)} = \bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \vartheta_n) \subset \bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \varphi_n)$ olacak biçimde bir $\{\vartheta_n : n \in \omega\}$ dizisi vardır. Her $n \in \omega$ için $\vartheta_{n+1} \prec \vartheta_n$ almak genelliği bozmaz. $\mathcal{W}'_n = \vartheta_n \wedge \varphi_n$ olmak üzere $\{\mathcal{W}'_n : n \in \omega\}$ dizisinin 5.16. Teorem'in i) ve ii) koşullarını sağladığını görelim. $\mathcal{W}'_n = \vartheta_n \wedge \varphi_n$ olduğundan $\text{st}(x, \mathcal{W}'_n) = \text{st}(x, \vartheta_n) \cap \text{st}(x, \varphi_n)$ dir. Şimdi $\bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \mathcal{W}'_n)} = \bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \mathcal{W}'_n)$ olduğunu görelim.

$$\begin{aligned}
\bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \mathcal{W}'_n)} &= \bigcap_{n \in \omega} \left(\overline{\text{st}(x, \vartheta_n) \cap \text{st}(x, \varphi_n)} \right) \\
&\subset \bigcap_{n \in \omega} \left(\overline{\text{st}(x, \vartheta_n)} \cap \overline{\text{st}(x, \varphi_n)} \right) \\
&\subset \bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \vartheta_n)} \\
&= \bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \vartheta_n) \\
&= \left(\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \vartheta_n) \right) \cap \left(\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \varphi_n) \right) \\
&= \bigcap_{n \in \omega} \left(\text{st}(x, \vartheta_n) \cap \text{st}(x, \varphi_n) \right) \\
&= \bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \mathcal{W}'_n)
\end{aligned}$$

olduğundan $\bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \mathcal{W}'_n)} \subset \bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \mathcal{W}'_n) \subset \bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \mathcal{W}'_n)}$ olup

$\bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \mathcal{W}'_n)} = \bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \mathcal{W}'_n)$ dir. Şimdi her $x \in X$ ve her $n \in \omega$ için $x_n \in \text{st}(x, \mathcal{W}'_n)$

alınarak oluşturulan $\{x_n : n \in \omega\}$ dizisinin X içinde bir değme noktasının var

olduğunu görelim. $x_n \in \text{st}(x, \mathcal{W}'_n)$ ve $\text{st}(x, \mathcal{W}'_n) \subset \text{st}(x, \varphi_n)$ olduğundan

$x_n \in \text{st}(x, \varphi_n)$ dir. Böylece $\{x_n : n \in \omega\} \succ p$ olacak şekilde bir $p \in X$ vardır. Her

$n \in \omega$ için $\varphi_{n+1} \prec \varphi_n$ olduğundan $\mathcal{W}'_{n+1} \prec \mathcal{W}'_n$ olup her $n \in \omega$ için

$\text{st}(x, \mathcal{W}'_{n+1}) \subset \text{st}(x, \mathcal{W}'_n)$ dir. $\{\text{st}(x, \mathcal{W}'_n) : n \in \omega\}$ dizisi azalan, her $n \in \omega$ için

$\text{st}(x, \mathcal{W}'_n)$ kümesi açık küme, $\bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \mathcal{W}'_n)} = \bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \mathcal{W}'_n)$ ve $\{x_n : n \in \omega\} \succ p$

olduğundan 5.3. Lemma'dan $\{\text{st}(x, \mathcal{W}'_n) : n \in \omega\}$ ailesi $\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \mathcal{W}'_n)$ kümesi için bir

komşuluklar tabanıdır. Böylelikle 5.16. Teorem'in (ii) koşulu sağlanmış olur. Şimdi

$\{\mathcal{W}'_n : n \in \omega\}$ dizisinin 5.16. Teorem'in (i) koşulunu sağladığını görelim. Öncelikle

$\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \mathcal{W}'_n)$ kümesinin sayılabilir kompakt olduğunu görelim. Bunun için $\{p_n : n \in \omega, n \neq m \text{ için } p_n \neq p_m\} \subset \bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \mathcal{W}'_n)$ dizisinin bir yığılma noktasının var olduğunu görelim. Her $n \in \omega$ için $p_n \in \text{st}(x, \mathcal{W}'_n)$ 'dir. $\text{st}(x, \mathcal{W}'_n) \subset \text{st}(x, \varphi_n)$ olduğundan $p_n \in \text{st}(x, \varphi_n)$ dir. Buradan $\{p_n : n \in \omega\} \succ z$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. z noktası $\{p_n : n \in \omega\}$ dizisinin bir değme noktası olduğundan z noktası $\{p_n : n \in \omega\}$ dizisinin bir yığılma noktasıdır. Çünkü z nin her U açık komşuluğu ve her $n \in \omega$ için $p_m \in U$ olacak şekilde bir $m > n$ vardır. $p_m \in \{p_n : n \in \omega\} \cap (U \setminus \{z\})$ olduğundan z yığılma noktasıdır. Böylece $\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \mathcal{W}'_n)$ kümesi sayılabilir kompakt olur. Diğer taraftan $\bigcap_{n \in \omega} \overline{\text{st}(x, \mathcal{W}'_n)} = \bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \mathcal{W}'_n)$ olduğundan $\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \mathcal{W}'_n)$ kümesi kapalıdır. X submetakompakt uzay olduğundan $\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \mathcal{W}'_n) \subset X$ kapalı alt kümesi de submetakompakttır. $\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \mathcal{W}'_n)$ kümesi sayılabilir kompakt ve submetakompakt olduğundan kompakttır[21,25].

Sonuç olarak X 'in açık örtülerinin $\{\mathcal{W}'_n : n \in \omega\}$ dizisi 5.16. Teorem'inin (i) ve (ii) koşullarını sağladığından X kesin p – uzaydır.■

5.20. Sonuç

X parakompakt bir uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

- a) X M – uzaydır,
- b) X $w\Delta$ – uzaydır,
- c) X p – uzaydır.

İspat

X parakompakt uzay olduğundan submetakompakt uzaydır. 5.19. Teorem'den X 'in

p -uzay ve $w\Delta$ -uzay olması eşdeğer olduğundan $b) \Leftrightarrow c)$ dir. Tanımından her M -uzay $w\Delta$ -uzay olduğundan $a) \Rightarrow b)$ dir. İspatın tamamlanması için $b) \Rightarrow a)$ olduğunu görelim. X $w\Delta$ -uzay olsun. X $w\Delta$ -uzay olduğundan X 'in açık örtülerinden oluşan öyle bir $\{\varphi_n : n \in \omega\}$ dizisi vardır ki; her $n \in \omega$ için $x_n \in st(x, \varphi_n)$ olarak oluşturulan $\{x_n : n \in \omega\}$ dizisinin bir değme noktası vardır. Ayrıca genelliği bozmadan her $n \in \omega$ için $\varphi_{n+1} \prec \varphi_n$ alabiliriz. X uzayı parakompakt olduğundan her açık örtüsünün yıldız incelişi vardır. $\vartheta_1 = \varphi_1$ olsun. ϑ_1 ve φ_2 X 'in açık örtüleri olduğundan $\vartheta_1 \wedge \varphi_2$ X 'in bir açık örtüsüdür. X parakompakt uzay olduğundan $\vartheta_2 \prec^* (\vartheta_1 \wedge \varphi_2)$ olacak şekilde X 'in ϑ_2 açık örtüsü vardır. Aynı şekilde devam edilirse ϑ_n ve φ_{n+1} X 'in açık örtüleri olduğundan $\vartheta_n \wedge \varphi_{n+1}$ X 'in bir açık örtüsüdür. X parakompakt uzay olduğundan $\vartheta_{n+1} \prec^* (\vartheta_n \wedge \varphi_{n+1})$ olacak şekilde X 'in bir ϑ_{n+1} açık örtüsü vardır. Sonuç olarak her $n \in \omega$ için $\vartheta_{n+1} \prec^* (\vartheta_n \wedge \varphi_{n+1})$ olduğundan $\vartheta_{n+1} \prec^* \vartheta_n$ dir. Her $n \in \omega$ için $x_n \in st(x, \vartheta_n)$ olarak $\{x_n : n \in \omega\}$ dizisini oluşturalım. $\vartheta_{n+1} \prec^* (\vartheta_n \wedge \varphi_{n+1})$ olduğundan her $n \in \omega$ için $\vartheta_n \prec \varphi_n$ olup $st(x, \vartheta_n) \subset st(x, \varphi_n)$ dir. Böylece her $n \in \omega$ için $x_n \in st(x, \varphi_n)$ olup $\{x_n : n \in \omega\}$ dizisinin bir değme noktası vardır. Sonuç olarak $\{\vartheta_n : n \in \omega\}$ açık örtüler dizisi X için M -uzay olma koşulları sağlandığından X M -uzaydır. Böylece $b) \Rightarrow a)$ dır. ■

Şimdi p -uzay olmanın başka bir karakterizasyonunu veren aşağıdaki teoremi verelim.

5.21. Teorem

X topolojik uzayının p -uzay olması için gerekli ve yeterli koşul X 'in açık örtülerinin aşağıdaki koşulları sağlayan bir (ϑ_n) dizisinin var olmasıdır:

Her $n \in \omega$ için $G_n \in \vartheta_n$ olmak üzere eğer $\bigcap_{n \in \omega} G_n \neq \emptyset$ ise;

- i) $\bigcap_{n \in \omega} \overline{G_n}$ kümesi kompakt,
- ii) $\left\{ \bigcap_{i \leq n} \overline{G_i} : n \in \omega \right\}$ ailesi $\bigcap_{n \in \omega} \overline{G_n}$ kümesi için bir dış network'tür, yani $\bigcap_{n \in \omega} \overline{G_n}$ kümesini içeren her V açık kümesi için $\bigcap_{i \leq n_0} \overline{G_i} \subset V$ olacak şekilde bir $n_0 \in \omega$ sayısı vardır[26].

İspat

$\Rightarrow$: X p -uzay olsun. Öyleyse βX 'in açık alt kümelerinden oluşan, her biri X 'i örten ve her $x \in X$ için $\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \varphi_n) \subset X$ olan bir $\{\varphi_n : n \in \omega\}$ aileler dizisi vardır.

Her $n \in \omega$ için

$\vartheta_n = \left\{ G : \text{en az bir } V \in \varphi_n, \text{ en az bir } H \subset \beta X \text{ açık var, öyle ki; } \overline{H}^{\beta X} \subset V \text{ ve } G = H \cap X \right\}$ olsun. Herhangi bir A kümesinin X içindeki kapanışını βX 'teki kapanışından ayırt

etmek için βX 'teki kapanışını $\overline{A}^{\beta X}$ şeklinde göstereceğiz. Her $n \in \omega$ için ϑ_n X için

bir açık örtüdür. Şöyle ki; $x \in X$ ve $n \in \omega$ olsun. φ_n ailesi X 'i örttüğünden $x \in V$ olacak biçimde bir $V \in \varphi_n$ vardır. V βX içinde açık ve βX düzenli olduğundan

$x \in H \subset \overline{H}^{\beta X} \subset V$ olacak biçimde βX 'in açık bir H alt kümesi vardır. Öyleyse

$H \cap X = G$ denilirse $x \in G$ ve $G \in \vartheta_n$ olduğundan ϑ_n ailesi X içinde bir açık

örtüdür. Her $n \in \omega$ için $G_n \in \vartheta_n$ olmak üzere $\bigcap_{n \in \omega} G_n \neq \emptyset$ olsun. Öyleyse $x \in \bigcap_{n \in \omega} G_n$

olacak biçimde bir $x \in X$ vardır. İlk olarak $\bigcap_{n \in \omega} \overline{G_n}$ kümesinin kompakt olduğunu

görelim. $x \in \bigcap_{n \in \omega} G_n$ olduğundan her $n \in \omega$ için $\overline{G_n}^{\beta X} \subset \text{st}(x, \varphi_n)$ olup

$\bigcap_{n \in \omega} \overline{G_n}^{\beta X} \subset \bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \varphi_n)$ dir. $\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \varphi_n) \subset X$ olduğundan $\bigcap_{n \in \omega} \overline{G_n}^{\beta X} \subset X$ dir. Öyleyse,

$\bigcap_{n \in \omega} \overline{G_n} = \bigcap_{n \in \omega} \left(\overline{G_n}^{\beta X} \cap X \right) = \left(\bigcap_{n \in \omega} \overline{G_n}^{\beta X} \right) \cap X$ olduğundan, $\bigcap_{n \in \omega} \overline{G_n} = \bigcap_{n \in \omega} \overline{G_n}^{\beta X}$ dir. $\bigcap_{n \in \omega} \overline{G_n}^{\beta X}$

kümesi βX 'in kapalı bir alt kümesi olduğundan kompakt olup $\bigcap_{n \in \omega} \overline{G_n}$ kümesi X 'in

kompakt bir alt kümesidir.

Şimdi $\left\{\bigcap_{i \leq n} \overline{G_i} : n \in \omega\right\}$ ailesinin $\bigcap_{n \in \omega} \overline{G_n}$ kümesi için bir dış network olduğunu görelim.

$V \subset X$ açık küme olmak üzere $\bigcap_{n \in \omega} \overline{G_n} \subset V$ olsun. Her $n \in \omega$ için $\bigcap_{i \leq n} \overline{G_i} = F_n$ diyelim. Her $n \in \omega$ için $F_n \not\subset V$ olduğunu varsayalım. O zaman her $n \in \omega$ için bir $x_n \in F_n \setminus V$ seçebiliriz. βX kompakt olduğundan $\{x_n : n \in \omega\}$ dizisinin βX içinde bir p değme noktası vardır. Bu durumda $p \notin V$ olacağından $p \notin \bigcap_{n \in \omega} \overline{G_n}$ dir. Öyleyse $p \notin \overline{G_{n_0}}$ olacak biçimde bir $n_0 \in \omega$ vardır. Bu durumda $x_n \in X \setminus \overline{G_{n_0}}$ olacak biçimde bir $n > n_0$ sayısı vardır. $n > n_0$ olduğundan $F_n \subset F_{n_0}$ olup $x_n \in F_n$ olduğundan $x_n \in F_{n_0} = \bigcap_{i \leq n_0} \overline{G_i}$ dir. Ancak bu durumda $x_n \in (X \setminus \overline{G_{n_0}}) \cap \overline{G_{n_0}}$ olup bu bir çelişkidir. Öyleyse $\bigcap_{i \leq n} \overline{G_i} \subset V$ olacak biçimde bir $n \in \omega$ sayısı vardır.

$\Leftarrow$: $\{\varphi_n : n \in \omega\}$ X 'in açık örtülerinin (i) ve (ii) koşullarını sağlayan bir dizisi olsun. Her $G \in \varphi_n$ için G kümesi X içinde açık olduğundan $G = U_G \cap X$ olacak biçimde βX 'in bir U_G açık alt kümesi vardır. Her $n \in \omega$ için $\vartheta_n = \{U_G : G \in \varphi_n\}$ olsun. Her $n \in \omega$ için φ_n X için bir örtü olduğundan her bir ϑ_n ailesi de X 'i örter. Şimdi her $x \in X$ için $\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \vartheta_n) \subset X$ olduğunu görelim. $x \in X$ ve $y \in \beta X \setminus X$ olsun. Eğer $y \in \bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \vartheta_n)$ ise bu durumda her $n \in \omega$ için $y \in U_{G_n}$ ve $x \in U_{G_n}$ olacak biçimde $G_n \in \vartheta_n$ vardır. $x \in X$ ve her $n \in \omega$ için $x \in U_{G_n}$ olduğundan $x \in \bigcap_{n \in \omega} (U_{G_n} \cap X) = \bigcap_{n \in \omega} G_n$ olup $\bigcap_{n \in \omega} G_n \neq \emptyset$ dir. Öyleyse (i)'den $\bigcap_{n \in \omega} \overline{G_n}$ X 'in kompakt bir alt kümesi ve (ii)'den $\left\{\bigcap_{i \leq n} \overline{G_i} : n \in \omega\right\}$ ailesi $\bigcap_{n \in \omega} \overline{G_n}$ kümesi için bir dış network'tür.

$\bigcap_{n \in \omega} \overline{G_n} \subset X$ ve $y \notin X$ olduğundan $y \notin \bigcap_{n \in \omega} \overline{G_n}$ dir. $\bigcap_{n \in \omega} \overline{G_n}$ kümesi X içinde kompakt olduğundan βX içinde de kompaktır. Öyleyse $\bigcap_{n \in \omega} \overline{G_n}$ kümesi βX içinde kapalı,

$\bigcap_{n \in \omega} \overline{G_n} \cap \{y\} = \emptyset$ ve βX normal uzay olduğundan $\bigcap_{n \in \omega} \overline{G_n} \subset W \subset \overline{W}^{\beta X} \subset \beta X \setminus \{y\}$

olacak biçimde βX 'in açık bir W alt kümesi vardır. $\left\{ \bigcap_{i \leq n} \overline{G_i} : n \in \omega \right\}$ ailesi $\bigcap_{n \in \omega} \overline{G_n}$ için bir dış network olduğundan $\bigcap_{i \leq n_0} \overline{G_i} \subset W$ olacak biçimde bir $n_0 \in \omega$ vardır. Öte yandan $\overline{X} = \beta X$ olduğundan ve U_G kümesi βX 'in açık bir alt kümesi olduğundan $U_G \subset \overline{U_G} \cap \overline{X}^{\beta X} = \overline{G}^{\beta X}$ olup $\overline{G}^{U_G} = \overline{G}^{\beta X} \cap U_G = U_G$ dir. Yani her G kümesi U_G içinde yoğundur. Böylece $\bigcap_{i \leq n_0} U_{G_i} \subset \overline{W}^{\beta X}$ dir. Şöyle ki; $p \in \bigcap_{i \leq n_0} U_{G_i}$ ve $p \notin \overline{W}^{\beta X}$ olsun. Bu durumda her $i \leq n_0$ için $p \in \left(\overline{W}^{\beta X} \right)^c \cap U_{G_i}$, $\left(\overline{W}^{\beta X} \right)^c \cap U_{G_i}$ kümesi U_{G_i} içinde boş olmayan bir açık küme ve $G_i \subset U_{G_i}$ içinde yoğun olduğundan $\left(\overline{W}^{\beta X} \right)^c \cap U_{G_i} \cap G_i \neq \emptyset$ olur ancak bu $G_i \subset W$ olması ile çelişir. O halde $\bigcap_{i \leq n_0} U_{G_i} \subset \overline{W}^{\beta X}$ olup $y \notin \overline{W}^{\beta X}$ olduğundan $y \notin \bigcap_{i \leq n_0} U_{G_i}$ dir. Fakat bu $y \in \bigcap_{n \in \omega} U_{G_n}$ olması ile çelişir. Öyleyse her $y \in \beta X \setminus X$ için $y \notin \bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \vartheta_n)$ olup $\bigcap_{n \in \omega} \text{st}(x, \vartheta_n) \subset X$ dir. ■

5.22. Tanım

X bir topolojik uzay olmak üzere, eğer X 'in her bir A alt kümesi için, A 'nın bütün kompakt alt kümeler ile kesişiminin kapalı olması A 'nın kapalı olmasını gerektiriyor ise X uzayına k -uzay denir.

Şimdi p – uzay ile k – uzay arasındaki ilişkiyi gösteren aşağıdaki teoremi verelim.

5.23. Teorem

X p – uzay ise k – uzaydır.

İspat

X p -uzay olsun. X 'in k -uzay olduğunu göstermek için kapalı olmayan bir $A \subset X$ kümesi için $K \cap A$ kümesi kapalı olmayacak şekilde bir $K \subset X$ kompakt kümesinin bulunabileceğini görmeliyiz. X p -uzay olduğundan 5.21. Teorem'in (i) ve (ii) koşullarını sağlayan X 'in açık örtülerinden oluşan bir $(\mathcal{U}_n)$ dizisi vardır. A X 'in kapalı olmayan bir alt kümesi olsun. O zaman $p \in \overline{A} \setminus A$ olacak şekilde bir $p \in X$ vardır. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n$ X 'in açık örtüsü olduğu için $p \in G_n$ olacak şekilde bir $G_n \in \mathcal{U}_n$ vardır. $p \in G_0$ ve X uzayı düzenli olduğu için $p \in U_0 \subset \overline{U_0} \subset G_0$ olacak şekilde bir $U_0 \subset X$ açık kümesi vardır. $p \in G_1$ ve $p \in U_0$ olduğundan $p \in U_0 \cap G_1$ dir. $U_0 \cap G_1$ kümesi açık ve X uzayı düzenli olduğundan $p \in U_1 \subset \overline{U_1} \subset U_0 \cap G_1$ olacak şekilde bir $U_1 \subset X$ vardır. $p \in U_1 \subset \overline{U_1} \subset U_0 \cap G_1 \subset G_1$ olduğundan $U_1 \subset G_1$ dir. $p \in U_1 \subset \overline{U_1} \subset U_0 \cap G_1 \subset U_0$ ve $U_1 \subset \overline{U_1} \subset U_0 \subset G_0$ olduğundan $U_1 \subset G_0$ dir. $U_1 \subset G_1$ ve $U_1 \subset G_0$ olduğu için $p \in U_1 \subset G_0 \cap G_1$ dir. $p \in G_2$ ve $p \in U_1$ olduğundan $p \in U_1 \cap G_2$ dir. $U_1 \cap G_2$ kümesi açık ve X uzayı düzenli olduğu için $p \in U_2 \subset \overline{U_2} \subset U_1 \cap G_2$ olacak şekilde bir $U_2 \subset X$ açık kümesi vardır. $p \in U_2 \subset \overline{U_2} \subset U_1 \cap G_2 \subset U_1$ ve $p \in U_1 \subset G_0 \cap G_1$ olduğundan $p \in U_2 \subset \overline{U_2} \subset U_1 \subset G_0 \cap G_1$ dir. Buradan $p \in U_2 \subset \overline{U_2} \subset U_1 \subset \bigcap_{i \leq 1} G_i$ olur. Aynı şekilde devam edildiğinde her $n \in \omega$ için $p \in U_{n+1} \subset \overline{U_{n+1}} \subset U_n \subset \bigcap_{i \leq n} G_i$ olacak şekilde $U_n \subset X$ açık kümeleri vardır. $\bigcap_{n \in \omega} U_n = K$ diyelim. $K = \bigcap_{n \in \omega} U_n = \bigcap_{n \in \omega} \overline{U_n}$ olduğu açıktır. Her $n \in \omega$ için $\overline{U_n}$ kapalı küme olduğundan $\bigcap_{n \in \omega} \overline{U_n}$ kümesi de kapalıdır. Her $n \in \omega$ için $U_n \subset \bigcap_{i \leq n} G_i \subset G_n$ olduğundan $\overline{U_n} \subset \overline{G_n}$ olup $\bigcap_{n \in \omega} \overline{U_n} \subset \bigcap_{n \in \omega} \overline{G_n}$ dir. $p \in \bigcap_{n \in \omega} G_n$ olup $\bigcap_{n \in \omega} G_n \neq \emptyset$ olduğundan 5.21. Teorem (i)'den $\bigcap_{n \in \omega} \overline{G_n}$ kümesi kompakttır. $\bigcap_{n \in \omega} \overline{G_n}$ kümesi kompakt ve $\bigcap_{n \in \omega} \overline{U_n}$ kümesi $\bigcap_{n \in \omega} \overline{G_n}$

kümesinin kapalı altkümesi olduğu için $\bigcap_{n \in \omega} \overline{U_n}$ kümesi de kompaktır. Her $n \in \omega$ için $x_n \in U_n$ alınarak oluşturulan $\{x_n : n \in \omega\}$ dizisi için $\{x_n : n \in \omega\} \succ x$ olacak şekilde bir $x \in \bigcap_{n \in \omega} \overline{G_n}$ vardır. Şöyle ki; her $x \in \bigcap_{n \in \omega} \overline{G_n}$ için $\{x_n : n \in \omega\} \not\succ x$ olduğunu kabul edelim. Öyleyse her $n > n_x$ için $x_n \notin V_x$ olacak şekilde bir V_x açık kümesi ve bir $n_x \in \omega$ vardır. $\bigcap_{n \in \omega} \overline{G_n}$ kümesi kompakt olduğundan $\bigcap_{n \in \omega} \overline{G_n} \subset \bigcup_{i=1}^m V_{x_i}$ olacak şekilde $\{x_1, x_2, \dots, x_m\} \in \bigcap_{n \in \omega} \overline{G_n}$ vardır. $\bigcap_{n \in \omega} \overline{G_n} \subset \bigcup_{i=1}^m V_{x_i}$ ve $\bigcup_{i=1}^m V_{x_i}$ kümesi açık olduğundan 5.21. Teorem (ii)'den $\bigcap_{i \leq n_0} \overline{G_i} \subset \bigcup_{i=1}^m V_{x_i}$ olacak şekilde bir $n_0 \in \omega$ vardır. Her $n \in \omega$ için $x_n \in U_n \subset \bigcap_{i \leq n} \overline{G_i}$ olduğundan her $n \geq n_0$ için $x_n \in U_n \subset U_{n_0} \subset \bigcap_{i \leq n_0} \overline{G_i}$ dir. Ayrıca $\bigcap_{i \leq n_0} \overline{G_i} \subset \bigcup_{i=1}^m V_{x_i}$ olduğundan her $n \geq n_0$ için $x_n \in \bigcup_{i=1}^m V_{x_i}$ dir. $\max_{i \leq m} \{n_{x_i}, n_0\} = m_0$ diyelim. $n_0 \leq m_0$ olduğundan $\bigcap_{i \leq m_0} \overline{G_i} \subset \bigcap_{i \leq n_0} \overline{G_i}$ dir. Diğer taraftan $\bigcap_{i \leq n_0} \overline{G_i} \subset \bigcup_{i=1}^m V_{x_i}$ olduğundan $\bigcap_{i \leq m_0} \overline{G_i} \subset \bigcup_{i=1}^m V_{x_i}$ dir. O zaman her $n > m_0$ için $x_n \in U_n \subset \bigcap_{i \leq n} \overline{G_i} \subset \bigcap_{i \leq m_0} \overline{G_i} \subset \bigcup_{i=1}^m V_{x_i}$ ve dolayısıyla $x_n \in \bigcup_{i=1}^m V_{x_i}$ olup $x_n \in V_{x_j}$ olacak şekilde bir $j < m$ vardır. Bu durum $x_n \notin V_{x_j}$ ile çelişir. Çünkü $n > m_0$ ve $\max_{i \leq m} \{n_{x_i}, n_0\} = m_0$ olduğundan $n \geq n_{x_j}$ dir. Her $n \geq n_{x_j}$ için $x_n \notin V_{x_j}$ dir. Öyleyse her $n \in \omega$ için $x_n \in U_n$ olmak üzere $\{x_n : n \in \omega\} \succ x$ olacak şekilde bir $x \in \bigcap_{n \in \omega} \overline{G_n}$ vardır.

Her $n \in \omega$ için $U_{n+1} \subset U_n$, $\bigcap_{n \in \omega} U_n = \bigcap_{n \in \omega} \overline{U_n}$ ve $x_n \in U_n$ alınarak oluşturulan her $\{x_n : n \in \omega\}$ dizisi bir değme noktasına sahip olduğundan 5.3. Lemma'dan $\{U_n : n \in \omega\}$ ailesi $K = \bigcap_{n \in \omega} U_n$ için bir tabandır. Eğer $A \cap K$ kapalı değilse aradığımız kompakt küme $K = \bigcap_{n \in \omega} U_n$ kümesidir. Eğer $A \cap K$ kapalı ise; $p \in \overline{A} \setminus A$

olduğundan $p \notin A$ olup $p \notin A \cap K$ dir. $p \notin A \cap K$ olduğu için $p \in (A \cap K)^c$ dir. $(A \cap K)^c$ kümesi açık ve X uzayı düzenli olduğundan $p \in V_0 \subset \overline{V_0} \subset (A \cap K)^c$ olacak şekilde bir $V_0 \subset X$ açık kümesi vardır. $V_0 \subset (A \cap K)^c$ olduğundan $V_0 \cap A \cap K = \emptyset$ dir. X uzayı düzenli ve $V_0 \subset X$ açık küme olduğundan $p \in V_1 \subset \overline{V_1} \subset V_0$ olacak şekilde bir $V_1 \subset X$ açık kümesi vardır. X uzayı düzenli ve $V_1 \subset X$ açık küme olduğundan $p \in V_2 \subset \overline{V_2} \subset V_1$ olacak şekilde bir $V_2 \subset X$ açık kümesi vardır. Bu şekilde devam edilirse her $n \in \omega$ için $p \in V_{n+1} \subset \overline{V_{n+1}} \subset V_n$ olacak şekilde $V_n \subset X$ açık kümeleri vardır. Her $n \in \omega$ için $U_{n+1} \cap V_{n+1} \subset \overline{U_{n+1} \cap V_{n+1}} \subset \overline{U_{n+1}} \cap \overline{V_{n+1}} \subset U_n \cap V_n$ olduğundan $K' = \bigcap_{n \in \omega} (U_n \cap V_n) = \bigcap_{n \in \omega} \overline{(U_n \cap V_n)}$ kümesi kompakttır. Ayrıca yukarıda görüldü ki; her $n \in \omega$ için $x_n \in U_n \cap V_n \subset U_n$ alınarak oluşturulan her $\{x_n : n \in \omega\}$ dizisi için $\{x_n : n \in \omega\} \succ x$ olacak şekilde bir $x \in \bigcap_{n \in \omega} \overline{G_n}$ vardır. Her $n \in \omega$ için $U_{n+1} \cap V_{n+1} \subset U_n \cap V_n$, $\bigcap_{n \in \omega} (U_n \cap V_n) = \bigcap_{n \in \omega} \overline{(U_n \cap V_n)}$ ve $x_n \in U_n \cap V_n$ alınarak oluşturulan her $\{x_n : n \in \omega\}$ dizisi için $\{x_n : n \in \omega\} \succ x$ olacak biçimde bir $x \in X$ olduğundan 5.3. Lemma' dan $\{U_n \cap V_n : n \in \omega\}$ ailesi $K' = \bigcap_{n \in \omega} (U_n \cap V_n)$ kümesi için bir tabandır. $K' \cap A = \bigcap_{n \in \omega} (U_n \cap V_n) \cap A \subset K \cap V_0 \cap A = \emptyset$ olduğundan $K' \cap A = \emptyset$ dir. Her $n \in \omega$ için bir $x_n \in U_n \cap V_n \cap A$ seçelim. Şimdi $K_0 = K' \cup \{x_n : n \in \omega\}$ kümesinin kompakt, $A \cap K_0$ kümesinin de kapalı olmadığını görelim. $K' \cup \{x_n : n \in \omega\} \subset \bigcup_{\lambda \in \omega} H_\lambda$ olacak şekilde herhangi bir $\{H_\lambda : \lambda \in \omega\}$ açık örtüsünü alalım. $K' \subset K' \cup \{x_n : n \in \omega\} \subset \bigcup_{\lambda \in I} H_\lambda$ ve K' kümesi kompakt olduğundan $K' \subset \bigcup_{\lambda \in J} H_\lambda$ olacak şekilde sonlu bir $J \subset I$ alt kümesi vardır. $K' \subset \bigcup_{\lambda \in J} H_\lambda$, $\bigcup_{\lambda \in J} H_\lambda \subset X$ açık ve $\{U_n \cap V_n : n \in \omega\}$ ailesi K' için bir komşuluklar tabanı olduğundan $U_{n_0} \cap V_{n_0} \subset \bigcup_{\lambda \in J} H_\lambda$ olacak şekilde bir $n_0 \in \omega$ vardır. Her $n > n_0$ için

$x_n \in U_n \cap V_n \subset U_{n_0} \cap V_{n_0} \subset \bigcup_{\lambda \in J} H_\lambda$ olur. Böylece $\{x_n : n > n_0\} \subset \bigcup_{\lambda \in J} H_\lambda$ olur.

$\{x_n : n \in \omega\} \subset \bigcup_{\lambda \in I} H_\lambda$ olduğundan her $n \leq n_0$ için $x_n \in H_{\lambda_n}$ olacak şekilde bir $\lambda_n \in I$

vardır. $\{x_n : n \leq n_0\} \subset \bigcup_{i=1}^{n_0} H_{\lambda_i}$ olduğundan

$$K_0 = K' \cup \{x_n : n \in \omega\} = K' \cup \{x_n : n \leq n_0\} \cup \{x_n : n > n_0\} \subset \left(\bigcup_{\lambda \in J} H_\lambda \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n_0} H_{\lambda_i} \right) \text{ dir.}$$

Böylece $K_0 = K' \cup \{x_n : n \in \omega\}$ kümesinin kompakt olduğu görüldü.

$$A \cap K_0 = A \cap (K' \cup \{x_n : n \in \omega\}) = (A \cap K') \cup (A \cap \{x_n : n \in \omega\}) \text{ ve } K' \cap A = \emptyset$$

olduğu için $A \cap K_0 = A \cap \{x_n : n \in \omega\}$ dir. Her $n \in \omega$ için $x_n \in U_n \cap V_n \cap A$

olduğundan her $n \in \omega$ için $x_n \in A$ dır. Buradan $(A \cap \{x_n : n \in \omega\}) = \{x_n : n \in \omega\}$

olur. Böylece $A \cap K_0 = \{x_n : n \in \omega\}$ kümesi kapalı değildir. Şöyle ki;

$A \cap K_0 = \{x_n : n \in \omega\}$ kapalı küme olsun. K' kümesi kompakt, $\{U_n \cap V_n : n \in \omega\}$

ailesi K' için bir taban ve her $n \in \omega$ için $x_n \in U_n \cap V_n \cap A \subset U_n \cap V_n$ olduğundan

5.17. Lemma'dan $p \in \overline{\{x_n : n \in \omega\}}$ olacak biçimde bir $p \in K'$ vardır. $\{x_n : n \in \omega\}$

kapalı küme olduğundan $\{x_n : n \in \omega\} = \overline{\{x_n : n \in \omega\}}$ olup $p \in \{x_n : n \in \omega\}$ dir. Öyleyse

$p = x_{n_0}$ olacak biçimde bir $n_0 \in \omega$ vardır. $x_{n_0} \in U_{n_0} \cap V_{n_0} \cap A$ olduğundan $x_{n_0} \in A$

dir. $p = x_{n_0} \in K'$ ve $x_{n_0} \in A$ olduğundan $x_{n_0} \in K' \cap A$ dir. Bu durum $K' \cap A = \emptyset$

olması ile çelişir. Bu çelişki $A \cap K_0 = \{x_n : n \in \omega\}$ kümesini kapalı kabul

etmemizden kaynaklanmaktadır. Böylece K_0 kompakt bir küme ve $A \cap K_0$ kapalı

olmadığından bizim aradığımız kompakt küme $K_0 = K' \cup \{x_n : n \in \omega\}$ kümesidir. ■

KAYNAKLAR

1. Ergun, N., “Kümeler teorisine giriş”, *Nobel Yayın Dağıtım*, Ankara, 193-609 (2005).
2. Bing, R.H., “Mettrization of topological spaces”, *Canad. Math.J.*, 3: 175-186 (1951).
3. Nagata, J., “On a necessary and sufficient condition of metrizability”, *J. Inst. Polyt.*, Osaka City Univ., I: 93-100 (1950).
4. Smirnov, JU.M., “On metrization of topological spaces”, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 1*, 8: 63-77 (1951).
5. Engelking, R., “General Topology”, *Heldermann Verlag*, Berlin, 300-333 (1989).
6. Arhangel'skii, A.V. and Burke, D.K., “Spaces with a regular G_δ – diagonal”, *Topol. Appl.*, 153: 1917-1929 (2006).
7. Moore, R.L., “A set of axioms for plane analysis situs”, *Fund. Math.*, 25: 13-28 (1935).
8. Alexandrov, P. and Urysohn, P., “Sur les espaces topologiques compacts”, *Bull. Intern. Acad. Pol. Sci. Ser. A*: 5-8 (1923).
9. Lutzer, D.J., “A metrization theorem for linearly ordered spaces”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 22: 557-558 (1969).
10. Zenor, P., “On space with regular G_δ – diagonals”, *Pacific J. Math.*, 40(3): 759-763 (1972).
11. Frink, A.H., “Distance functions and the metrization problem”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 43: 133-142 (1937).
12. Borges, C.R., “On stratifiable spaces”, *Pacific J. Math.*, 17: 1-16 (1966).
13. Okuyama, A., “On metrizability of M – spaces” *Proc. Japan. Acad.*, 40: 176-179 (1964).
14. Šneĭder, V., “Continuous images of Souslin and Borel sets; metrization theorems”, *Dokl. Acad. Nauk USSR*, 50: 77-79 (1945).
15. Chaber, J., “Conditions which imply compactness in countably compact spaces”, *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Math.*, 24: 993-998 (1976).

16. Kunen, K. and Vaughan, J.E., "Handbook of set-theoretic topology", **North-Holland Publishing Co**, Ch. 18, 781-826 (1984).
17. Hodel, R., "Moore spaces and $w\Delta$ – spaces", **Pacific J. Math.**, 38: 641-652 (1971).
18. Morita, K., "Products of normal spaces with metric spaces", **Math. Ann.**, 154: 365-382 (1964).
19. Dugundji, J., "Topology", **Allyn and Bacon**, Boston, 229 (1966).
20. Dugundji, J., "Topology", **Allyn and Bacon**, Boston, 86 (1966).
21. Kunen, K. and Vaughan, J.E., "Handbook of set-theoretic topology", **North-Holland Publishing Co**, Ch. 9, 347-422 (1984).
22. Engelking, R., "Generally Topology", **Heldermann Verlag**, Berlin, Ch. 3, 184 (1989).
23. Nagata, J., "A note on M – spaces and topologically complete spaces", **Proc. Japan Acad.**, 45: 541-543 (1969).
24. Burke, D. and Stoltenberg, R., "A note on p – spaces and Moore spaces", **Pacific J. Math.**, 30: 601-608 (1969).
25. Worrel, JR., J.M. and Wicke, H.H., "A covering property which implies isocompactness I", **Proc. Amer. Math. Soc.**, 79: 331-334 (1979).
26. Burke, D., "On p – spaces and $w\Delta$ – spaces", **Pacific J. Math.**, 35(2): 285-296 (1970).

ÖZGEÇMİŞ**Kişisel Bilgiler**

Soyadı, adı : SARI, Mehmet
Uyruğu : T.C.
Doğum Tarihi ve Yeri : 19.01.1984 Malatya
Medeni Hali : Evli
e-mail : topsogut44@hotmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lisans	İstanbul Üniv./Matematik Bölümü	2004

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2006-2007	Karayolları Genel Müdürlüğü	Matematikçi
2007-	BDDK	Uzman Yardımcısı

Yabancı Dil

İngilizce