



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**BAZI GRİ MODELLERİN KARŞILAŞTIRILMASI VE
UYGULAMALARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Berkan ZİLE

DANIŞMAN

Prof. Dr. Halis BİLGİL

AKSARAY, 2022

Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 192342409 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi Berkan ZİLE tarafından hazırlanan “**BAZI GRİ MODELLERİN KARŞILAŞTIRILMASI VE UYGULAMALARI**” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Halis BİLGİL

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: : Doç. Dr. Ayhan ERCİYES

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Ebutalib ÇELİK

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 29 / 09 / 2022

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Mehmet Ali HINIS

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinallliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Berkan ZİLE

TEŞEKKÜR

Tez çalışmalarım boyunca geniş bilgi ve deneyimleri ile hep yol gösterici olan, bilgi ve deneyimlerini paylaşan, yardımlarını ve desteğini esirgemeyen başta danışman hocam Aksaray Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Ana Bilim Dalı öğretim üyesi Sayın Prof. Dr. Halis BİLGİL' e ve Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN hocama sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Hiçbir zaman desteğini esirgemeyen, varlığıyla bana güç veren, her zaman yanımda olan sevgili eşim Sena ZİLE'ye ve çocuklarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Bu süreçte her zaman destek olan sevgili arkadaşım Aksaray Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Çevre Mühendisliği Ana Bilim Dalı Öğr. Gör. Dr. Tolga BAHADIR'a teşekkürlerimi sunarım.

Berkan ZİLE
AKSARAY, 2022

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
ÇİZELGELER DİZİNİ	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR	vii
1. GİRİŞ	8
1.1 Standard Gri Model (GM (1,1))	12
2. YENİ GRİ MODEL (NGM (1,1)).	16
2.1 NGM Modelin Optimizasyonu	20
2.2 Zaman Gecikmeli Çok Terimli Gri Tahmin Modeli	21
2.2.1 Birinci dereceden birikimli üretim işlemi	21
2.2.2 TDPGM (1,1) modelinin gösterimi	22
2.2.3 TDPGM (1,1) modelinin parametre tahmini	23
2.2.4 TDPGM (1,1) modelinin çözümü	23
2.2.5 Sayısal adımlar	26
3. STANDART GM (1,1) MODELİ UYGULAMALARI	27
4. NGM (1,1) MODELİ UYGULAMALARI.....	33
5. TDPGM (1,1) MODELİ UYGULAMALARI.....	38
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	43
KAYNAKLAR	48
ÖZGEÇMİŞ	50

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI GRİ MODELLERİN KARŞILAŞTIRILMASI VE UYGULAMALARI

Berkan ZİLE

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Halis BİLGİL

ÖZET

Gri modelleme teorisi zaman serilerinin tahminleri için son yıllarda tercih edilen matematiksel modellemelerden biridir. Az veri ile düşük hatalı tahminler yapılabilmesi ve uygulanabilirliği basit olmasından dolayı giderek ilgi görmektedir.

Bu çalışmada GM (1,1), NGM (1,1) ve TDPGM (1,1) modelleri kullanılarak Türkiye'nin 2011-2020 ye kadar olan sera gazı emisyon verileri kullanılarak 2021-2028 yılları için tahminler yapılmıştır. Ortalama mutlak yüzde hatası (MAPE) kesinliği değerlendirmek için tahmini değerleri gerçek değerlerle karşılaştırır. Türkiye'nin toplam sera gazı emisyon göstergesinin önümüzdeki 8 yıl içinde katlanarak artacağı değerlendiriliyor.

Anahtar Kelimeler: Gri model teorisi, En küçük kareler metodu, Veri tahmini, Diferansiyel denklemler, Hata analizi

Eylül, 2022; 50 sayfa

M.Sc. THESIS

COMPARISON AND APPLICATIONS OF SOME GRAY MODELS

Berkan ZİLE

**Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Prof. Dr. Halis BİLGİL

ABSTRACT

Gray modeling theory is one of the preferred mathematical models for the predictions of time series in recent years. It is getting more and more attention due to its ability to make low-error predictions with little data and its simplicity in applicability.

In this study, estimates were made for the years 2021-2028 using Turkey's greenhouse gas emission data from 2011 to 2020 with GM (1,1), NGM (1,1) and TDPGM (1,1). Mean absolute percentage error (MAPE) compares the actual values with forecasted values to evaluate the precision. It is evaluated that the total greenhouse gas emission indicator of Turkey will increase exponentially within next eight years.

Keywords: Grey model theory, Least squares method, Data estimation, Error analysis, Differential equations

September, 2022; 50 pages

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. Türkiye'nin CO_2 gazının GM (1,1) metodu ile kıyaslanması.....	29
Şekil 3.2. Türkiye'nin CH_4 gazının GM (1,1) metodu ile kıyaslanması.....	30
Şekil 3.3. Türkiye'nin sera gazı emisyon toplamının GM (1,1) metodu ile kıyaslanması	32
Şekil 4.1. Türkiye'nin CO_2 gazının NGM (1,1) metodu ile kıyaslanması.....	34
Şekil 4.2. Türkiye'nin CH_4 gazının NGM (1,1) metodu ile kıyaslanması.....	36
Şekil 4.3. Türkiye'nin sera gazı emisyon toplamının NGM (1,1) metodu ile kıyaslanması	37
Şekil 5.1. Türkiye'nin CO_2 gazının TDPGM (1,1) metodu ile kıyaslanması	39
Şekil 5.2. Türkiye'nin CH_4 gazının TDPGM (1,1) metodu ile kıyaslanması.....	41
Şekil 5.3. Türkiye'nin sera gazı emisyon toplamının TDPGM (1,1) metodu ile kıyaslanması	42
Şekil 6.1. CO_2 gazı emisyonunun “GM (1,1), NGM (1,1) ve TDPGM (1,1)” modelleri ile kıyaslanması	44
Şekil 6.2. CH_4 gazı emisyonunun “GM (1,1), NGM (1,1) ve TDPGM (1,1)” modelleri ile kıyaslanması	45
Şekil 6.3. Sera gazı emisyon toplamının “GM (1,1), NGM (1,1) ve TDPGM (1,1)” modelleri ile kıyaslanması	46

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1. Türkiye'nin GM (1,1) modeli ile CO_2 gazına ait verileri	28
Çizelge 3.2. Türkiye'nin GM (1,1) modeli ile CH_4 gazına ait verileri	29
Çizelge 3.3. Türkiye'nin GM (1,1) modeli ile sera gazı emisyon toplamına ait verileri.....	31
Çizelge 4.1. Türkiye'nin NGM (1,1) modeli ile CO_2 gazına ait verileri	33
Çizelge 4.2. Türkiye'nin NGM (1,1) modeli ile CH_4 gazına ait verileri	35
Çizelge 4.3. Türkiye'nin NGM (1,1) modeli ile sera gazı emisyon toplamına ait verileri.....	36
Çizelge 5.1. Türkiye'nin TDPGM (1,1) modeli ile CO_2 gazına ait verileri.....	38
Çizelge 5.2. Türkiye'nin TDPGM (1,1) modeli ile CH_4 gazına ait verileri.....	40
Çizelge 5.3. Türkiye'nin TDPGM (1,1) modeli ile sera gazı emisyon toplamına ait verileri	41

SİMGELER VE KISALTMALAR

ARIMA	Otomatik Gerilemeli Entegre Hareketli Ortalama
GM (1,1)	Standart Gri Model
NDGM	Homojen Olmayan Ayrık Gri Modeli
DGM (1,1)	Ayrık Gri Model
NGBM (1,1)	Doğrusal Olmayan Gri Bernoulli Modeli
FANGBM (1,1)	Kesirli Doğrusal Olmayan Gri Bernoulli Modeli
RMSE	Ortalama Karekök Hata
MAPE	Ortalama Mutlak Yüzde Hata
MAPE_{fit}	Veri Uydurmada Ortalama Mutlak Yüzde Hata
MAPE_{pre}	Veri Tahmininde Ortalama Mutlak Yüzde Hata
MAPE_{top}	Toplam Ortalama Mutlak Yüzde Hata
RMSPE	Ortalama Karekökün Yüzde Hatası
RPE	Yüzde Bağlı Hata
TDPGM (1,1)	Zaman Gecikmeli Polinomal Gri Tahmin Modeli
ONGM	Optimize Yeni Gri Modeli
NGM (1,1)	Yeni Gri Model
ARGM	Otoregresif Gti Model
AGO	Birikimli Üretim Operatörü
IAGO	Ters Birikimli Üretim Operatörü

1. GİRİŞ

Bilim, teknoloji ve insanlığın gelişmesi ile birlikte belirsizlik içeren sistemlere ilişkin çalışmalar yeni bir anlam kazanmıştır. Yirminci yüzyılın ikinci yarısında sistem bilimi ve sistem mühendisliği alanlarında çeşitli teoriler ve belirsiz sistemlere ilişkin metodolojiler ortaya konmuştur.

Ayrıca sosyal, ekonomik, tarımsal, endüstriyel ya da biyolojik vb. birçok sistem araştırma konularına göre çalışma alanları ve sınırlarını dikkate alarak isimlendirilmektedir. Buna karşılık gri sistemler ismi araştırma altındaki konunun renklendirilmesinden verilmiştir. Örneğin kontrol teorisindeki renklerin koyuluğu bilgi netliğinin derecesini ifade ederken kullanılır. En çok bilinenlerden biri olan ve siyah kutu “(black box)” olarak adlandırılan kısımda bir nesne için iç ilişkiler veya yapısı araştırmacı tarafından bilinmediği kabul edilir. Burada “siyah” bilinmeyen bilgiyi, “beyaz” ise tamamıyla bilinen bilgiyi ve “gri” ise kısmi bilinen ve kısmi bilinmeyen bilgiyi temsil etmektedir. Bu nedenle bilgilerin tamamıyla bilindiği sistemlere “beyaz sistemler” ve tamamıyla bilinmediği sistemlere ise “siyah sistemler” denir. Kısmi bilinen ve kısmi bilinmeyen bilgi içeren sistemlere ise “gri sistemler” adı verilmektedir.

Gri sistem teorisine sıklıkla başvuru alan konulardan olan olasılık teorisi, istatistik ve bulanık matematik açısından karşılaştırılabilir.

Gri model, gri diferansiyel denklemden oluşmuş GM (n, h) modeli ile belirtilen dinamik bir modeldir. Bu modelde “n” gri diferansiyel denklemin mertebesini, “h” ise değişken sayısını ifade etmektedir. Birçok GM (n, h) modeli içinden en belirgin olarak kullanılan GM (1,1) modeli olarak bilinir. GM (1,1) modeli ile ilgili daha geniş bilgiler için referanslara bakmak gerekir [1-4]. GM (1, N) çok değişkenli gri modeli çoklu boyutlardaki GM (1,1) modelinin uzantısıdır ve çok değişkenli zaman serisi verilerinin tahminine uyarlanabilmektedir. Çok değişkenli gri modelin yüksek gri oranlı çoklu değişkenler üzerindeki etkisi aşırıdır. GM (1, N) daha yüksek kesinlik ve uygulama değerine sahiptir [5,6]. GM (1, N) modeli tahmin için ve değişkenlerin birbirleri arasındaki korelasyonunu belirtmek için kullanılmaktadır [5]. Tahmin serileri ve ilgili seriler arasındaki yüksek gri sıklık derecesi, onların eğrileri arasındaki benzerliğin fazla olduğu anlamını taşımaktadır. Bu sebeple, ilgili seriler

tahmin serileri için fazlaca önem taşır. Teorik olarak, korelasyon mertebesi ne kadar yüksek olursa daha doğru sonuçlar elde edilir. Bundan dolayı GM (1, N) modeli oluşturulduğu zaman gri ilişki mertebesi yüksek ve korelasyon değeri 0,6'dan büyük olan tahmini değişkenleri seçilir [7].

1982'de Deng tarafından ortaya konulmuş Gri Sistem Teorisi, minimal örneklem ve az bilgi içeren problemlerin incelenmesine odaklanan yöntemlerin yenilerindendir. Az sayıda ve eksik veriden yararlanarak bilgi vermeyi amaçlayan bir teoridir. Bu özellik ile birlikte dikkatleri üzerine çekmiştir. Teorinin ortaya atılmasındaki temel düşünce stokastik veya bulanık yöntemlerle çözülemeyen belirsiz sistemlerin davranışlarını az veri ile tahmin etmektir. Minimal örnekleme dayalı ve az sayıda veriye sahip belirsiz sistemler fazla olduğundan gri sistem teorisi geniş uygulama alanlarına sahiptir. Gri sistem teorisi alanında yapılan çalışmaları gri üretim, gri ilişki analizi, gri tahmin, gri karar verme ve gri kontrol gibi başlıklara ayırmak mümkündür.

Hsu ve Wen yaptıkları çalışmada birinci dereceden tek değişkenli gri sistem modeli olan GM (1,1) modelini Asya-Pasifik bölgesinde uçuş pazarında olan on ülke çifti arasındaki havayolu yolcu trafiği tahmini için geliştirdiler ve bu modelin ARIMA ve çoklu regresyondan daha kesin sonuç verdiğini gösterdiler [8]. Hatta GM (1,1) modeline göre 2000 yılı için büyümenin %11 oranında olacağı tahminini öne sürdüler. Bir başka yapılan çalışmada ise, yapay sinir ağları ve bulanık mantık temelli tahminleme modellerine göre daha yüksek hassasiyete sahip bir tahminleyici olduğunu gösterdiler. Ayrıca bu çalışmada Markov-Fourier açılımlı gri tahminleme modelini geliştirdiler [9]. Hsu ise, geleneksel yöntemlerle gri tahminleme metodunu karşılaştırdıkları çalışmanın sonucunda, entegre devre sistemlerindeki talep tahminlemesinde, Gri Sistem Teorisinin ise kısa dönemlik tahminler için daha kesin sonuçlar verdiğini gösterdi [10]. Elektrik enerjisi tüketiminin tahmin edilmesi çalışmasında çok kısa dönemler için elektrik ihtiyacının tahminlemesine yönelik gri tabanlı adaptif bir tahmin modelini Yao, Chi ve Chen geliştirdiler [11]. Böylece maliyetin korunması için kullanışlı sonuçlar elde ettiler. Benzer biçimde geliştirilen gri tabanlı tahmin modeli ile Tayvan'ın enerji talebinin üzerine çalışmalar yapıldı [12]. Diyar Akar ve Mehmet Atak tarafından oluşturulan çalışmada ise Türkiye'nin elektrik talebinin yuvarlanma mekanizmalı gri tahmin sistemi ile tahminlemesi

gerçekleştirildi [13]. Sıklıkla tek faktörlü kısa dönemli ve eksik verili sistemlerin tahminlenmesinde fazlaca kullanılan bu gri sistem teorisi, Lin, Wang, ve Pai tarafından geliştirilen metotla çok faktörlü zaman serisi tahminlenmesine imkân vermiştir [14].Yenilenen metodun birinci aşamasında, faktör analizi gerçekleştirilmiş olup ikinci aşamasında niteliksel ölçüden niceliksel ölçüye gri ilişki derecesi kullanılarak dönüşüm yapılmıştır. Üçüncü aşamasında ise, birinci aşamadaki sonuçlara göre tahmin prosedürü uygulanmıştır.Tayvan donanmasının yedek parça stok kontrolü için yaptıkları çalışmada Hua-Kai Chiou ve arkadaşları yalnızca talep miktarını belirleyebilmek için gri tahminleme modeli kullanmışlar ve malzeme gereksinimi üzerinde bir çalışma yapmışlardır [15].Triverdi ve Singh yaptıkları çalışmada, gelişmekte olan ülkelerdeki uzun süreli su kaynakları verilerinin güvenilirliği konusunda Hindistan'ı baz alarak gri sistem teorisi uygulamış ve diğer istatistiksel metotlara göre diferansiyel hidrolojik gri modelin daha yüksek tahmin doğruluğunda olduğunu göstermiştir [16]. Wang ve Li-Chang ise, genetik algoritma kullanılan bir gri sistem teorisi geliştirerek Tayvan'daki yüksek teknoloji sektöründen trendleri ve çıktıları tahminleme çalışması yaptılar. Tahminleme hatasının en aza indirilmesinin amaç edinildiği bu çalışma, entegre devre endüstrisi üzerinde yapılan bir uygulama ile desteklendi [17].

Huang ve Chuen-Jiuan çalışmalarında, eksojen otoregresif hareketli ortalama (ARX), gri sistem ve kaba küme (RS) teorilerini kullanıp hisse senedi tahmini ve portföy seçimi için hibrit bir model üzerinde çalıştılar. Sonuç olarak, belirlenen hisse senetlerinde geri dönüş miktarlarının daha yüksek olduğu tespit edildi [18].Erdal Kayacan, Barış Ulutaş ve Okyay Kaynak 2005-2007 yıllarını içine alacak şekilde Avro ve Dolar paritesi tahmini için gri tabanlı zaman serisi analizini kullandılar. Sonuçta, gri tabanlı sistemin Fourier serisi ile kıyaslandığında daha iyi tahminleme yaptığını buldular [19].Yapılan bir diğer çalışmada; tahminleme hatasının azaltılması için geliştirilen birçok tahmin modelinin gri olanlarda dahil olmak üzere bilgisayarlı hesaplama maliyetlerinin fazla olması sebebiyle gri tahminleyici yapısı içine çok sade bir şema metodu geliştirilerek daha iyi performans sonuçları elde edildiği görüldü [20]. Gri zaman serisi modelini kullanarak altın fiyatlarının tahminlenmesi üzerine Mehdi ve Hadi Askari bir çalışma yapmıştır [21]. Fourier serisi kullanarak yapılan geliştirme, ARIMA (Box-Jenkins) modeli ile performansları değerlendirdiler.

Sonuç olarak, geliştirilen gri metodun daha iyi olduğunu teorik yerine sayısal bir örnek ile gösterdiler.

Farklı bir çalışmada ise gıda güvenliği durumunda erken uyarı veren GST önerilmiştir [22]. Süreç yeterlilik indeksi için kullanılmıştır. Gri tahminleme modelinin değerlendirilmesi ile erken uyarı sistemini gıda güvenliği konusunda geliştirdiler. Zayıf ve eksik bilgi ihtiyacı düşünülerek geliştirilen metod etkili olarak uygulamalı bir şekilde kullanılmıştır.

Başka yapılan bir çalışmada ise ömrü bitmiş araçların dönüş akışı için tahmini bir sistem geliştirilmiş olup, sistem Türk Otomotiv Endüstrisi'ne uygulaması yapılmıştır [23]. Gri sistem teorisi tahmin sistemi için kullanılmıştır. Bazı düzeltmeler yapılmıştır. Bunlar gri modelin doğruluğunu parametre optimizasyonu, Fourier serisi ve Markov zincir düzeltmeleridir. İleri sürülen versiyonlar Türk Otomotiv Endüstrisi'ne uygulanmış ve ayrıca ülkemizdeki on iki bölgenin verileri göz önüne alınmıştır. Sonuç olarak, uygun görülen tahmin sisteminin verilerinin başarılı bir şekilde uygulanabildiği ve ülkemizdeki bütün bölgeler için yüksek kesinlik sağlayabileceğini gösterdiler.

Farklı bir çalışmada ise İtalya, Birleşik Krallık (İngiltere) ve Amerika Birleşik Devletleri'nde (ABD) COVID-19 vaka sayısının doğruluk tahminini amaçladılar [24]. Tahmin için gri model (GM (1,1)), doğrusal olmayan gri Bernoulli modeli (NGBM (1,1)) ve kesirli doğrusal olmayan gri Bernoulli modeli (FANGBM (1,1)) kullanılarak sonuçların karşılaştırılmasını yaptılar. Bu modellerin tahmin performansı, ortalama karekök hata (RMSE), MAPE ve regresyon katsayısı (R^2) değerlerinin hesaplanmasıyla ölçtüler. FANGBM (1,1)'in bu ülkeler için en düşük RMSE ve MAPE değerlerine ve en yüksek R^2 değerlerine sahip olduğu, bu sebeple en yüksek tahmin performansına sahip olduğu belirlediler [24].

Ma ve Liu'nun yaptığı çalışmada ise TDPGM (1,1) olarak bilinen yeni bir zaman gecikmeli polinom gri tahmin modeli kullanılarak Çin'in doğal gaz tüketiminin tahminini yaptılar. 1995 - 2004 yılları arasında olan verileri tahmin modellerinde kullandılar. 2005 - 2013 yılları arasındaki verileri, modelleme kesinliğini bulmakta kullandılar. Zaman Gecikmeli Polinomal Gri Tahmin Modelinin (TDPGM (1,1)) bu çalışma için diğer modellerden daha iyi sonuç gösterdiğini belirttiler. Son olarak,

TDPGM (1,1) modeli 2014 - 2020 yılları için Çin'in doğal gaz tüketimini tahmin etmekte kullanıldı. Sayısal sonuçlar, Optimize Yeni Gri Model (ONGM), Yeni Gri Model (NGM), polinomal model, DGM (1,1) ve Otoregresif Gri Model (ARGM (1,1)), dahil olmak üzere enerji tüketimi tahmininde sıklıkla kullanılan diğer modellere nazaran TDPGM (1,1) modelinin doğal gaz tüketimin tahmininde daha etkili olduğunu gösterildi [25].

1.1 Standard Gri Model (GM (1,1))

GM (1,1) ilk geliştirilen ve en sık kullanılan gri tahmin modellerinden biridir. Bu model zaman serilerinde, diferansiyel denklem gruplarının parametre değişikliklerinde tercihen birinci mertebeden diferansiyel denklemlerde kullanılmaktadır. Bunlar genel diferansiyel denklemlerden ziyade zaman değişkenli yapıya sahip diferansiyel denklemlerdir. Standart GM (1,1) modeli yapay zekâ, destek vektör modeli ya da diğer istatistiksel modellerden farklı olarak 4 veri olması durumunda bile kuvvetli tahmin yapabilmektedir.

Adım 1. $H^{(0)}$ veri dizisi ile başlangıç verileri oluşturulur,

$$H^{(0)} = (h^{(0)}(1), h^{(0)}(2), \dots, h^{(0)}(p)). \quad (1.1)$$

Yukarıdaki denklemde n sayısı toplam ana veri adedini göstermektedir.

Adım 2. Birikimli toplam dizisi olan $H^{(1)}$ aşağıdaki şekilde oluşturulur:

$$H = (h^{(1)}(1), h^{(1)}(2), \dots, h^{(1)}(p)) \quad (1.2)$$

olup, burada

$$h^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k h^{(0)}(i) \quad k = 1, 2, 3, \dots, p \quad (1.3)$$

şeklindedir.

Adım 3. $Z^{(1)}$ birinci dereceden ortalama operatörü oluşturulur,

$$Z^{(1)} = \{z^{(1)}(1), z^{(1)}(2), \dots, z^{(1)}(p)\} \quad (1.4)$$

olup

$$z^{(1)}(k) = \frac{h^{(1)}(k) + h^{(1)}(k-1)}{2}, \quad k = 2, 3, \dots, p \quad (1.5)$$

şeklindedir.

Adım 4. Gri modele ait fark denklemi

$$h^{(0)}(k) + mz^{(1)}(k) = n. \quad (1.6)$$

Standart GM (1,1) modelinin (1.6) denklemi temel şekli olarak bilinir. Fakat m ve n parametreleri bulunmadan bu hesaplamaların yapılmayacağı aşikardır. Bu parametreleri bulabilmek adına en küçük kareler yöntemi ya da temel matrissel işlemler uygulanır. Buradaki k bir zaman noktasını belirtir, bu çalışmada m ve n ise geliştirme ve ilerletme katsayısı olarak alınır [26]. Bu çalışmada m ve n parametrelerini belirlemek için temel matrissel işlemleri kullandık. $k = 2, 3, \dots, p$ için (1.6) denklemi genişletilip,

$$h^{(0)}(2) + mz^{(1)}(2) = n$$

$$h^{(0)}(3) + mz^{(1)}(3) = n \quad (1.7)$$

⋮

$$h^{(0)}(p) + mz^{(1)}(p) = n$$

sistemi oluşturulmuştur. Sistem,

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \\ -z^{(1)}(p) & 1 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

$$\hat{Y} = \begin{pmatrix} h^{(0)}(2) \\ h^{(0)}(3) \\ \vdots \\ h^{(0)}(p) \end{pmatrix}, \quad \hat{a} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

olmak üzere, $\hat{Y} = \beta \hat{a}$ şeklindedir. Buradaki amaç m ve n katsayılarını bulabilmektir. Burada $\hat{Y} = \beta \hat{a}$ eşitliğinin her iki tarafı β^T ile çarpılırsa,

$$\beta^T \hat{Y} = \beta^T \beta \hat{a} \quad (1.10)$$

bulunur. Buradan

$$\hat{a} = (\beta^T \beta)^{-1} \beta^T \hat{Y} \quad (1.11)$$

denklemini elde edilir. Modelin parametrelerini hesaplayabilmek için matris çarpma algoritması veya en küçük kareler metodu kullanılır.

Adım 5. Adım 4 deki fark denkleminin karşılık gelen beyazlatma denklemini aşağıdadır.

$$\frac{dh^{(1)}(t)}{dt} + mh^{(1)}(t) = n \quad (1.12)$$

Birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemin olan beyazlatma denklemini çözülür ve tahmini $h^{(1)}$ değeri aşağıdaki şekilde hesaplanmaktadır. Bu denklemin genel çözümü,

$$\hat{h}^{(1)}(k) = \left(h^{(0)}(1) - \frac{n}{m} \right) e^{-m(k-1)} + \frac{n}{m} \quad k = 2, 3, \dots, p \quad (1.13)$$

şeklindedir. Başlangıç şartı olarak (1. 3) denkleminde

$$\hat{h}^{(1)}(1) = h^{(0)}(1) \quad (1.14)$$

olacağı bellidir. (1.13) denkleminde göre $\hat{h}^{(1)}(k)$ değerleri elde edilmiştir. Amacımız $\hat{h}^{(1)}(k)$ ana veri dizisinin p 'den sonraki terimlerini tahmin etmek olduğundan, $\hat{h}^{(1)}(k)$ dan $\hat{h}^{(0)}(k)$ ya geçiş formülünün tanımlanması gerekir bu da (1.13) denkleminde basit bir şekilde yazılabilir:

$$\hat{h}^{(0)}(k) = \hat{h}^{(1)}(k) - \hat{h}^{(1)}(k-1), \quad k = 2, 3, \dots, p \quad (1.15)$$



2. İYİLEŞTİRİLMİŞ GRİ MODEL (NGM (1,1))

Tanım 2.1:

$$h^{(0)}(k) + mz^{(1)}(k) = kn \quad (2.1)$$

Eşitliği yeni gri model olarak üstel homojen olmayan ayrık yeni bir gri modeldir ve NGM şeklinde kısaltılarak gösterilir. Birinci mertebeden diferansiyel eşitlik

$$\frac{dh^{(1)}(t)}{dt} + mh^{(1)}(t) = tn \quad (2.2)$$

NGM modelinin beyazlatma denklemi olarak isimlendirilir.

Teorem 2.1: Farz edelim ki $H^{(0)} = (h^{(0)}(1), h^{(0)}(2), \dots, h^{(0)}(t))$ dizisi ardışık negatif olmayan bir dizi olsun. $H^{(1)}$, $H^{(0)}$ ın ters birikimli operatörüdür ve $Z^{(1)}$ de $H^{(1)}$ in ardışık komşularından üretilmiş dizi ortalaması olarak söylenir. $\hat{a} = [m, n]^T$ bir parametre dizisidir; ve

$$\beta = \begin{pmatrix} -z^{(1)}(2) & 2 \\ -z^{(1)}(3) & 3 \\ \vdots & \\ -z^{(1)}(t) & t \end{pmatrix} \quad \hat{Y} = \begin{pmatrix} h^{(0)}(2) \\ h^{(0)}(3) \\ \vdots \\ h^{(0)}(t) \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Sonra gri diferansiyel denkleminin en küçük kareleri tahmin dizisi,

$$h^{(0)}(k) + mz^{(1)}(k) = kn \quad (2.4)$$

eşitliği

$$\hat{a} = (\beta^T \beta)^{-1} \beta^T \hat{Y} \quad (2.5)$$

eşitliğine denk gelir.

İspat 2.1: Gri diferansiyel denklemde tüm veri değerleri yerine konulduğunda

$$h^{(0)}(k) + mz^{(1)}(k) = kn \quad (2.6)$$

Eşitliği

$$h^{(0)}(2) + mz(2) = 2n$$

$$h^{(0)}(3) + mz^{(1)}(3) = 3n \quad (2.7)$$

⋮

$$h^{(0)}(p) + mz^{(1)}(p) = pn$$

şeklinde yazılır. Öyle ki, $\hat{Y} = \beta \hat{a}$, m , n , yerine konulduğunda $h^{(0)}(k)$ nın $k = 1, 2, \dots, p$ için bulunan değerleri $-mz^{(1)}(k) + nk$ hata dizisini veren $\varepsilon = \hat{Y} - \beta \hat{a}$, eşitliğinde yerine konulursa;

$$S = \varepsilon^T \varepsilon = (\hat{Y} - \beta \hat{a})^T (\hat{Y} - \beta \hat{a}) = \sum_{k=2}^p (h^{(0)}(k) + mz^{(1)}(k) - nk)^2 \quad (2.8)$$

m , n değerleri S yi minimum yapar ve aşağıdaki eşitlikleri sağlamalıdır:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial m} = 2 \sum_{k=2}^p (h^{(0)}(k) + mz^{(1)}(k) - nk) z^{(1)}(k) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial n} = -2 \sum_{k=2}^p (h^{(0)}(k) + mz^{(1)}(k) - nk) = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Yukarıdaki eşitlik çözüme ulaştırıldığında;

$$\begin{cases} m = \frac{\sum_{k=2}^p k z^{(1)}(k) \sum_{k=2}^p k h^{(0)}(k) - \sum_{k=2}^p k^2 \sum_{k=2}^p h^{(0)}(k) z^{(1)}(k)}{\sum_{k=2}^p k^2 \sum_{k=2}^p (z^{(1)}(k))^2 - (\sum_{k=2}^p k z^{(1)}(k))^2} \\ n = \frac{1}{\sum_{k=2}^p k^2} [\sum_{k=2}^p k h^{(0)}(k) + m \sum_{k=2}^p k z^{(1)}(k)] \end{cases} \quad (2.10)$$

elde etmiş oluruz.

$\hat{Y} = \beta \hat{a}$ dan, aşağıdaki gibi takip izlenebilir.

$$\beta^T \beta \hat{a} = \beta^T \hat{Y}, \hat{a} = (\beta^T \beta)^{-1} \beta^T \hat{Y} \quad (2.11)$$

$$\beta = \begin{pmatrix} -z^{(1)}(2) & 2 \\ -z^{(1)}(3) & 3 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(p) & p \end{pmatrix} \quad \hat{Y} = \begin{pmatrix} h^{(0)}(2) \\ h^{(0)}(3) \\ \vdots \\ h^{(0)}(p) \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Fakat

$$\mathfrak{B}^T \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} -z^{(1)}(2) & 2 \\ -z^{(1)}(3) & 3 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(p) & p \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -z^{(1)}(2) & 2 \\ -z^{(1)}(3) & 3 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(p) & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=2}^p (z^{(1)}(k))^2 & -\sum_{k=2}^p k z^{(1)}(k) \\ -\sum_{k=2}^p k z^{(1)}(k) & \sum_{k=2}^p k^2 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{B}^T \mathfrak{B})^{-1} \\ &= \frac{1}{\sum_{k=2}^p k^2 \sum_{k=2}^p (z^{(1)}(k))^2 - (\sum_{k=2}^p k z^{(1)}(k))^2} \begin{bmatrix} \sum_{k=2}^p k^2 & \sum_{k=2}^p k z^{(1)}(k) \\ \sum_{k=2}^p k z^{(1)}(k) & \sum_{k=2}^p (z^{(1)}(k))^2 \end{bmatrix} \\ & \mathfrak{B}^T \dot{Y} = \begin{pmatrix} -z^{(1)}(2) & 2 \\ -z^{(1)}(3) & 3 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(p) & p \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} h^{(0)}(2) \\ h^{(0)}(3) \\ \vdots \\ h^{(0)}(p) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\sum_{k=2}^p h^{(0)} k z^{(1)}(k) \\ \sum_{k=2}^p k h^{(0)}(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Buradan;

$$\begin{aligned} \hat{a} &= (\mathfrak{B}^T \mathfrak{B})^{-1} \mathfrak{B}^T \dot{Y} \\ &= \frac{1}{\sum_{k=2}^p k^2 \sum_{k=2}^p (z^{(1)}(k))^2 - (\sum_{k=2}^p k z^{(1)}(k))^2} \begin{bmatrix} \sum_{k=2}^p k^2 & \sum_{k=2}^p k z^{(1)}(k) \\ \sum_{k=2}^p k z^{(1)}(k) & \sum_{k=2}^p (z^{(1)}(k))^2 \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} -\sum_{k=2}^p h^{(0)} k z^{(1)}(k) \\ \sum_{k=2}^p k h^{(0)}(k) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sum_{k=2}^p k z^{(1)}(k) \sum_{k=2}^p k h^{(0)}(k) - \sum_{k=2}^p k^2 \sum_{k=2}^p h^{(0)}(k) z^{(1)}(k)}{\sum_{k=2}^p (z^{(1)}(k))^2 - (\sum_{k=2}^p k z^{(1)}(k))^2} \\ \frac{1}{\sum_{k=2}^p k^2} [\sum_{k=2}^p k h^{(0)}(k) + m \sum_{k=2}^p k z^{(1)}(k)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Teorem 2.2: $\dot{Y}$, $\mathfrak{B}$ ve $\hat{a}$ ' nın Teorem 2.1 ile aynı olduğunu farzedelim,

$$\hat{a} = (\mathfrak{B}^T \mathfrak{B})^{-1} \mathfrak{B}^T \dot{Y} \quad (2.16)$$

O zaman aşağıdaki eşitlikler geçerli olur,

1. $\hat{h}^{(1)}(1) = h^{(1)}(1) = h^{(0)}(1)$ fonksiyonu aşağıdaki şekildedir.

$$\hat{h}^{(1)}(k) = \left(h^{(0)}(1) - \frac{n}{m} + \frac{n}{m^2} \right) e^{-m(k-1)} + \frac{n}{m} k - \frac{n}{m^2} \quad k = 1, 2, \dots, p \quad (2.17)$$

2. $h^{(0)}(k)$ ' nın değerleri aşağıdaki şekilde gibidir.

$$\hat{h}^{(0)}(k) = \hat{h}^{(1)}(k) - \hat{h}^{(1)}(k-1); \quad k = 2, 3, \dots, p \quad (2.18)$$

İspat 2.2: $h^{(1)}(k) = y$, $k = h$, $u = -my + nh$ olduğundan eşitlik (2.2) aşağıdaki gibi yazılır.

$$\frac{du}{dh} = -mu + n \quad (2.19)$$

Buradan,

$$\frac{d(-mu + n)}{-mu + n} = -mdh \quad (2.20)$$

olur.

Eşitlik (2.20) üzerinde belirsiz integral yapmak ve onu sadeleştirmek için,

$$-mu + n = C_1 e^{-mh} \quad (C_1 = e^c, c \text{ bir sabittir}) \quad (2.21)$$

$h^{(1)}(k) = y$, $k = h$, $u = -my + nh$ değerlerini eşitlik (2.21) de yerine yazılırsa

$$h^{(1)}(k) = \frac{C_1}{m^2} e^{-mk} + \frac{n}{m} k - \frac{n}{m^2} \quad (2.22)$$

bulunur.

1. $h^{(1)}(1) = h^{(0)}(1)$ sağlandığından,

$$C_1 = m^2 \left(h^{(0)}(1) - \frac{n}{m} + \frac{n}{m^2} \right) e^m \quad (2.23)$$

Denklem (2.22) de C_1 yerine konulup ve onu azaltmak için,

$$\hat{h}^{(1)}(k) = \left(h^{(0)}(1) - \frac{n}{m} + \frac{n}{m^2} \right) e^{-m(k-1)} + \frac{n}{m} k - \frac{n}{m^2} \quad k = 1, 2, \dots, p \quad (2.24)$$

Buradan,

$$\hat{h}^{(1)}(k) = \left(h^{(0)}(1) - \frac{n}{m} + \frac{n}{m^2} \right) e^{-m(k-1)} + \frac{n}{m} k - \frac{n}{m^2} \quad k = 1, 2, \dots, p \quad (2.25)$$

elde edilir.

$$2. \hat{h}^{(1)}(k) - \hat{h}^{(1)}(k-1) = \sum_{i=1}^k \hat{h}^{(0)}(i) - \sum_{i=1}^{k-1} \hat{h}^{(0)}(i) = \hat{h}^{(0)}(k); k = 2, 3, \dots, p \quad (2.26)$$

2.1 NGM Modelin Optimizasyonu

NGM modelinin dayanağı olan hipotez dizilerin ilk verisinin değişmez olduğudur. Değişmez veri tekrarlı olarak isimlendirilir. Gerçekte, birinci veri dizinin en eski bilgisi olarak bilinir. Aslında, hipotez hakikati inkâr etmektedir. Mevcut literatür [27,28], gri modelde $\hat{h}^{(1)}(k)$ olan ilk verinin tahmin değeri ile bir ilişkisi olmadığını göstermektedir. Bu problemi çözüme ulaştırmak için, aşağıdaki şekilde ONGM olarak bilinen optimize edilmiş NGM modeli vardır.

$$\begin{cases} \hat{h}^{(1)}(k+1) = \left(h^{(0)}(1) - \frac{n}{m} + \frac{n}{m^2}\right)e^{-mk} + \frac{n}{m}(k+1) - \frac{n}{m^2} \\ \hat{h}^{(1)}(1) = h^{(1)}(1) + c \end{cases} \quad (2.27)$$

Üç parametresi bulunan ONGM modeli vardır ve m ve n 'nin çözümleri genel NGM modelindeki gibidir.

$$\begin{cases} m = \frac{\sum_{k=2}^n k z^{(1)}(k) \sum_{k=2}^n k h^{(0)}(k) - \sum_{k=2}^n k^2 \sum_{k=2}^n h^{(0)}(k) z^{(1)}(k)}{\sum_{k=2}^n k^2 \sum_{k=2}^n (z^{(1)}(k))^2 - (\sum_{k=2}^n (k) z^{(1)}(k))^2} \\ n = \frac{1}{\sum_{k=2}^n k^2} \left[\sum_{k=2}^n k h^{(0)}(k) + a \sum_{k=2}^n k z^{(1)}(k) \right] \end{cases} \quad (2.28)$$

c 'yi bulabilmek için, c sayısını en küçük kareler metoduyla çözülür ve sınırlandırılmamış optimize edilen bir model oluşturulur. Bunun için,

$$\min_c \sum_{k=1}^n [\hat{h}^{(1)}(k) - h^{(1)}(k)]^2 \quad (2.29)$$

Buradan,

$$S = \sum_{k=1}^n [\hat{h}^{(1)}(k) - h^{(1)}(k)]^2 \quad (2.30)$$

S denkleminde $h^{(1)}(k)$ ve $\hat{h}^{(1)}(k)$ yerine konulduğunda,

$$S = \sum_{k=1}^n [\hat{h}^{(1)}(k) - h^{(1)}(k)]^2 \quad (2.31)$$

$$S = c^2 + \sum_{k=2}^n \left[\left(h^{(1)}(1) + c - \frac{n}{m} + \frac{n}{m^2} \right) e^{-m(k-1)} + \frac{n}{m} k - \frac{n}{m^2} - h^{(1)}(k) \right]^2 \quad (2.32)$$

$$\frac{dS}{dc} = 2c + 2 \sum_{k=2}^n \left[\left(h^{(1)}(1) + c - \frac{n}{m} + \frac{n}{m^2} \right) e^{-m(k-1)} + \left(\frac{n}{m} k - \frac{n}{m^2} - h^{(1)}(k) \right) \right] e^{-m(k-1)} = 0 \quad (2.33)$$

Buradan,

$$c = \frac{\sum_{k=2}^n \left[\left(\frac{n}{m} - \frac{n}{m^2} + h^{(1)}(1) \right) e^{-2m(k-1)} + \left(h^{(1)}(k) - \frac{n}{m} k + \frac{n}{m^2} \right) \right] e^{-m(k-1)}}{1 + \sum_{k=2}^n e^{-2m(k-1)}} \quad (2.34)$$

Eşitlik (2.28) ile Eşitlik (2.34)'ü birleştirilerek aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{cases} m = \frac{\sum_{k=2}^n k z^{(1)}(k) \sum_{k=2}^n k h^{(0)}(k) - \sum_{k=2}^n k^2 \sum_{k=2}^n h^{(0)}(k) z^{(1)}(k)}{\sum_{k=2}^n k^2 \sum_{k=2}^n (z^{(1)}(k))^2 - (\sum_{k=2}^n (k) z^{(1)}(k))^2} \\ n = \frac{1}{\sum_{k=2}^n k^2} \left[\sum_{k=2}^n k h^{(0)}(k) + m \sum_{k=2}^n k z^{(1)}(k) \right] \\ c = \frac{\sum_{k=2}^n \left[\left(\frac{n}{m} - \frac{n}{m^2} + h^{(1)}(1) \right) e^{-2m(k-1)} + \left(h^{(1)}(k) - \frac{n}{m} k + \frac{n}{m^2} \right) \right] e^{-m(k-1)}}{1 + \sum_{k=2}^n e^{-2m(k-1)}} \end{cases} \quad (2.35)$$

ONGM modelinin yinelemeli verisini düzelten c parametresi $\hat{h}^{(1)}(k)$ ve $h^{(1)}(k)$ nın hata kareleri toplamının minimumu temelinde elde edilir.

2.2 Zaman Gecikmeli Çok Terimli Gri Tahmin Modeli

Bu bölümde sayısal adımları ve yöntemleri kapsayan TDPGM (1,1) olarak kısaltılan zaman gecikmeli çok terimli gri tahmin modelinden bahsedilmektedir.

2.2.1 Birinci dereceden birikimli üretim işlemi

Birinci dereceden birikimli üretim işlemi, bir birikimli operatör gibi genellikle sadeleştirilmiş Gri Sistem Teorisinde en önemli işlemdir. Bir birikimli operatör aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

Bir birikimli toplam dizisine $X^{(1)} = \{X^{(1)}(1), X^{(1)}(2), \dots, X^{(1)}(n)\}$ benzeyen,

$X^{(0)} = \{X^{(0)}(1), X^{(0)}(2), \dots, X^{(0)}(n)\}$ gibi standart negatif olmayan zaman dizisi alalım,

burada

$$x^{(1)}(k) = \sum_{j=1}^k x^{(0)}(j) \quad (2.36)$$

şeklindedir.

Gri Sistem Teorisinde pek çok gri tahmin modeli bir birikimli operatör dizisi kullanılarak bulunur.

2.2.2 TDPGM (1,1) modelinin gösterimi

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = b \sum_{\tau=1}^t \tau^2 + c \sum_{\tau=1}^t \tau + d \quad (2.37)$$

lineer diferansiyel denklemi TDPGM (1,1) modelinin beyazlatılmış denklemi olarak isimlendirilir ve

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = \frac{b}{2} \sum_{\tau=2}^k [\tau^2 + (\tau - 1)^2] + \frac{c}{2} \sum_{\tau=2}^k \left[\frac{2\tau-1}{2} \right] + d \quad (2.38)$$

fark denklemi TDPGM (1,1) modelinin ana modelidir,

Burada

$$z^{(1)}(k) = \frac{1}{2} [x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k - 1)] \quad (2.39)$$

başlangıç değeridir.

İlk “1” birinci derece anlamına gelir, (2.37) beyazlatılmış denklemi aslında birinci mertebeden diferansiyel denklem olarak gösterilir. İkinci sayı “1” bir dizi anlamındadır, bu modelde sadece bir dizi alınır.

TDPGM (1,1) ve diğerleri arasındaki ilişkinin çoğunlukla gri tahmin modelinde kullanıldığı açıktır. $b=0$ ve $c=0$ alındığında TDPGM (1,1) modeli temel GM (1,1) [29] modeline dönüşür; $b=0$ ve τ t den itibaren sayıldığında TDPGM (1,1) modeli [30] da tanımlanan NGM (1,1) modeline dönüşür; $b=0$ $d=0$ ve τ t den itibaren

sayılırsa TDPGM (1,1) modeli [20] de tanımlanan NGM modeline dönüşür. Böylece TDPGM (1,1) modelinin birinci dereceden tek değişkenli daha genel gri tahmin modeli olduğu görülür.

2.2.3 TDPGM (1,1) modelinin parametre tahmini

Belirli bir orijinal dizi içinde verilen $X^{(0)} = \{X^{(0)}(1), X^{(0)}(2), \dots, X^{(0)}(n)\}$, TDPGM (1,1) modeli için en küçük kareler yöntemi aşağıdaki kısıtsız optimizasyon problemi olarak tanımlanabilir:

$$\min_{a,b,c,d} \sum_{k=2}^n \left[x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) - \frac{b}{2} \sum_{\tau=2}^k [\tau^2 + (\tau-1)^2] - \frac{c}{2} \sum_{\tau=2}^k \left[\frac{2\tau-1}{2} \right] - d \right]^2.$$

Bu optimizasyon probleminin çözümü aşağıdaki lineer sistem şeklinde yazılabilir

$$[a, b, c, d]^T = (B^T B)^{-1} B Y \quad (2.40)$$

burada

$$B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & \frac{5}{2} & \frac{3}{4} & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 9 & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & \sum_{\tau=2}^n \frac{\tau^2 + (\tau-1)^2}{2} & \sum_{\tau=2}^n \frac{2\tau-1}{4} & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix}.$$

şeklindedir.

TDPGM (1,1) modelinin parametre tahmininin türevi GM (1,1) ve GM (1, N) modeli gibi diğer birinci dereceden gri modellere benzemektedir [29].

2.2.4. TDPGM (1,1) modelinin çözümü

Beyazlatılmış (2.37) denklemin her iki tarafı e^{at} ile çarpılarak

$$e^{at} \left[\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) \right] = e^{at} f(t) \quad (2.41)$$

elde edilir. Burada

$$f(t) = b \sum_{\tau=1}^t \tau^2 + c \sum_{\tau=1}^t \tau + d \quad (2.42)$$

şeklindedir.

(2.41) eşitliğini

$$\frac{d[x^{(1)}(t)e^{at}]}{dt} = e^{at}f(t) \quad (2.43)$$

biçiminde yazılabilir.

(2.43) denkleminin her iki tarafının $[1, t]$ aralığında integrali alındığında

$$\int_1^t d[x^{(1)}(\tau)e^{a\tau}] = \int_1^t e^{a\tau}f(\tau)d\tau \quad (2.44)$$

dönüşür.

(2.44) denkleminin sol tarafı

$$\int_1^t d[x^{(1)}(\tau)e^{a\tau}] = x^{(1)}(t)e^{at} - x^{(1)}(1)e^a \quad (2.45)$$

yazılabilir.

(2.44) denklemi ile (2.45) denklemi birleştirilir

$$x^{(1)}(t)e^{at} = x^{(1)}(1)e^a + \int_1^t e^{a\tau}f(\tau)d\tau \quad (2.46)$$

elde edilir. Her iki tarafı e^{-at} ile çarpılarak

$$x^{(1)}(t) = x^{(1)}(1)e^{-a(t-1)} + \int_1^t e^{-a(t-\tau)}f(\tau)d\tau \quad (2.47)$$

elde edilir.

(2.47) denkleminde $x^{(1)}(1) = x^{(0)}(1)$ başlangıç şartı kullanıldığında

$$x^{(1)}(t) = x^{(0)}(1)e^{-a(t-1)} + \int_1^t e^{-a(t-\tau)}f(\tau)d\tau \quad (2.48)$$

yazılabilir.

(2.48) denklemi, (2.37) beyazlatılmış denkleminin sürekli yanıt fonksiyonudur. Sürekli yanıt fonksiyonu aşağıdaki şekilde olup aynı zamanda (2.37) denkleminin çözümüdür;

$$\hat{x}^{(1)}(t) = x^{(1)}(1)e^{-a(t-1)} + \int_1^t e^{-a(t-\tau)} f(\tau) d\tau$$

(2.48) denkleminin sağ tarafında değişim yapılırsa

$$\int_1^t e^{-a(t-\tau)} f(\tau) d\tau = \sum_{j=2}^t \int_{j-1}^j e^{-a(t-\tau)} f(\tau) d\tau \quad (2.49)$$

şeklinde tekrardan yazılabilir.

(2.49) denklemindeki integrali ayırklaştırmak için yamuk formülü uygulanabilir,

$$\begin{aligned} \int_1^t e^{-a(t-\tau)} f(\tau) d\tau &= \sum_{j=2}^t \int_{j-1}^j e^{-a(t-\tau)} f(\tau) d\tau \\ &= \sum_{j=2}^t \frac{1}{2} [e^{-a(t-j)} f(j) + e^{-a(t-j+1)} f(j-1)] \end{aligned} \quad (2.50)$$

elde edilmiş olur.

$t=k$ ve $j=\tau$ alınarak (2.50) denklemi (2.48) denkleminde yerine yazılır ve

$x^{(1)}(1) = x^{(0)}(1)$ başlangıç şartı kullanılarak

$$\hat{x}^{(1)}(k) = x^{(0)}(1)e^{-a(k-1)} + \sum_{\tau=2}^k \frac{1}{2} [e^{-a(k-\tau)} f(\tau) + e^{-a(k-\tau+1)} f(\tau-1)] \quad (2.51)$$

olup, bu da bir birikimli üretim serisi $\hat{x}^{(1)}(k)$ değerini hesaplamak için ayrık yanıt fonksiyonu olarak kullanılır.

Yukarıdaki türev Tien tarafından sunulan aynı düşünceleri paylaşıyor [31] ve daha detaylı doğruluk analizi hakkında bilgi [32] da bulunabilir.

$\hat{x}^{(0)}(k)$ orijinal serisinin tahmini değerleri

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1) \quad (2.52)$$

gibi birinci dereceden ters birikimli üretim operatörü (1-IAGO) kullanılarak elde edilebilir.

2.2.5 Sayısal adımlar

TDPGM (1,1) modelinin yöntemine göre sayısal adımlar aşağıdaki gibi özetlenebilir:

Adım 1: Belirli bir orijinal dizi içinde, (2.36) denklemi kullanılarak verilen zaman dizisinin bir birikimli üretim operatörüyle hesaplanması ve (2.39) denklemi kullanılarak alt değer hesaplanması;

Adım 2: Orijinal diziye bir birikimli üretim operatörü ve alt değerleriyle birlikte (2.40) denkleminde değiştirin ve (2.40) lineer sistem denklemini çözerek a, b, c, d parametrelerinin hesaplanması;

Adım 3: a, b, c, d parametrelerini (2.51) ayrık yanıt fonksiyon denkleminde değiştirin ve $\hat{x}^{(1)}(k)$ bir birikimli üretim operatörünün hesaplanması;

Adım 4: (2.52) bir birikimli üretim operatörü denklemi kullanılarak $\hat{x}^{(0)}(k)$ nın tahmini değerinin hesaplanması.

3. STANDART GM (1,1) MODELİ UYGULAMALARI

Bu bölümde yapılmak istenen Standart GM (1,1) modelini kullanarak Türkiye'nin 2011 - 2020 yılları arasındaki Sera gazı emisyonları resmi verilerini Türkiye İstatistik Kurumu'ndan alıp 2021 - 2028 yıllarının tahmin işlemini gerçekleştirmektir. Gerçek ve tahmin değeri arasındaki hata oranları RPE ve MAPE ile belirlenir. Bunlar yüzde bağıl hata anlamına gelen (RPE) ve ortalama yüzde bağıl hata anlamına gelen (MAPE) formülleri olup sırasıyla (3.1) ve (3.2) de verilmiştir. Ortalama yüzde bağıl hata değerinin 10'dan küçük olması muhteşem tahmin gücü olduğunu göstermektedir [29]. Hata analizi,

$$RPE(k) = \left| \frac{h^{(0)}(k) - \hat{h}^{(0)}(k)}{h^{(0)}(k)} \right| * 100 \quad (3.1)$$

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n RPE(k) \quad (3.2)$$

ile hesaplanır.

Türkiye'nin 2011 yılından 2020 yılına kadar olan CO_2 gazının gerçek, tahmini, RPE ve MAPE değerleri aşağıdaki Çizelge 3.1'de verilmiştir.

Burada 2011-2020 yıllarına ait ham veriler elimizde olmasına rağmen 2019 yılına kadar olan verileri kullanarak model çalıştırıldı. Böylece 2020 yılına ait bilinen veri, model yardımıyla tahmin edilerek tahmine ait $MAPE_{pre}$ hesaplandı. 2011-2019 yılları için ise $MAPE_{fit}$ ayrıca hesaplandı. Toplam $MAPE_{top}$ de hesaplanarak hem bilinen veriler için hem de tahmin için ortalama hata oranı belirlendi. Çizelge 3.1 de mevcut veriler ve tahmin değerleri için eğriler gösterildi. Çizelge 3.1'e göre mevcut verilerin tekrar tahmininde $MAPE_{fit}$ %2,7707 iken 2020 yılına ait veri tahmininde $MAPE_{pre}$ %6,2893 çıkmıştır. MAPE değerlerinin %10 dan küçük olması durumunda literatüre göre modelin başarılı olduğu bilinir. Tahmin MAPE değerinin yüksek görünmesindeki neden 2018-2020 yılları arasındaki gerçek verilerdeki dalgalanmadır.

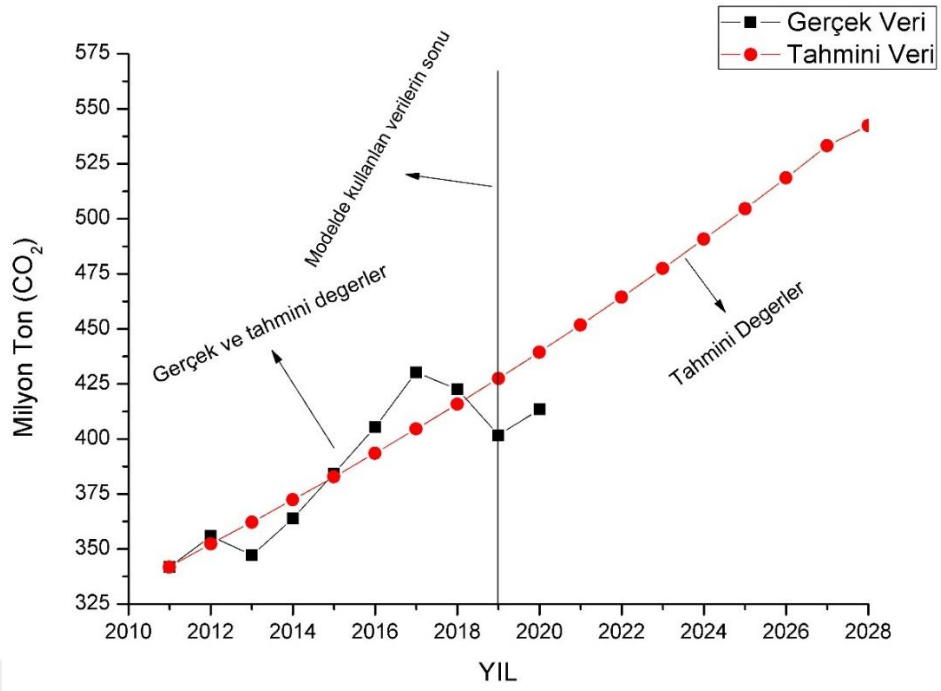
Çizelge 3.1. Türkiye'nin GM (1,1) modeli ile CO_2 gazına ait verileri.

Yıllar	Gerçek Değer (Milyon Ton)	Tahmin Değeri (Milyon Ton)	RPE
2011	341,9	341,9000	0
2012	355,9	352,3633	0,9937
2013	347,2	362,2278	4,3282
2014	363,9	372,3684	2,3271
2015	384,3	382,7930	0,3921
2016	405,3	393,5093	2,9091
2017	430,2	404,5257	5,9679
2018	422,6	415,8505	1,5971
2019	401,7	427,4923	6,4207
		MAPE_{fit}	%2,7707
2020	413,4	439,4601	
		MAPE_{pre}	%6,2893
		MAPE_{top}	%3,1225
2021		451,7629	
2022		464,4101	
2023		477,4113	
2024		490,7766	
2025		504,5160	
2026		518,6400	
2027		533,1594	

Yapılan bu çalışmada Türkiye'nin bu yıllar arasındaki CO_2 gazı verileri kullanılıp ileriki yıllar için tahminler oluşturulmuştur. GM (1,1) modeli ile eldeki veriler karşılaştırılması yapılmıştır. Ortalama hatanın yaklaşık değeri %3,12 şeklinde hesaplanmıştır. Tahmin sonucunun grafiği Şekil 3.1'de gösterilmiştir.

Şekil 3.1'den anlaşılacağı üzere 2020 yılına kadar CO_2 gazı için esas değeri ve tahmini değerlerin birbirleriyle uyumlu ilerlediği görülmektedir. Buradan yola çıkarak GM (1,1) yönteminin yüksek tahmin gücünde olduğu söylenebilir. 2021'den 2028'e kadarki yıllar arasında yapılan tahmin değerlerinde ise doğrusal bir şekilde artış olmaktadır.

Türkiye'nin 2011 yılından başlayarak 2020 yılına kadarki CH_4 gazının gerçek, tahmini, RPE ve MAPE değerleri Çizelge 3.2'de verilmiştir.

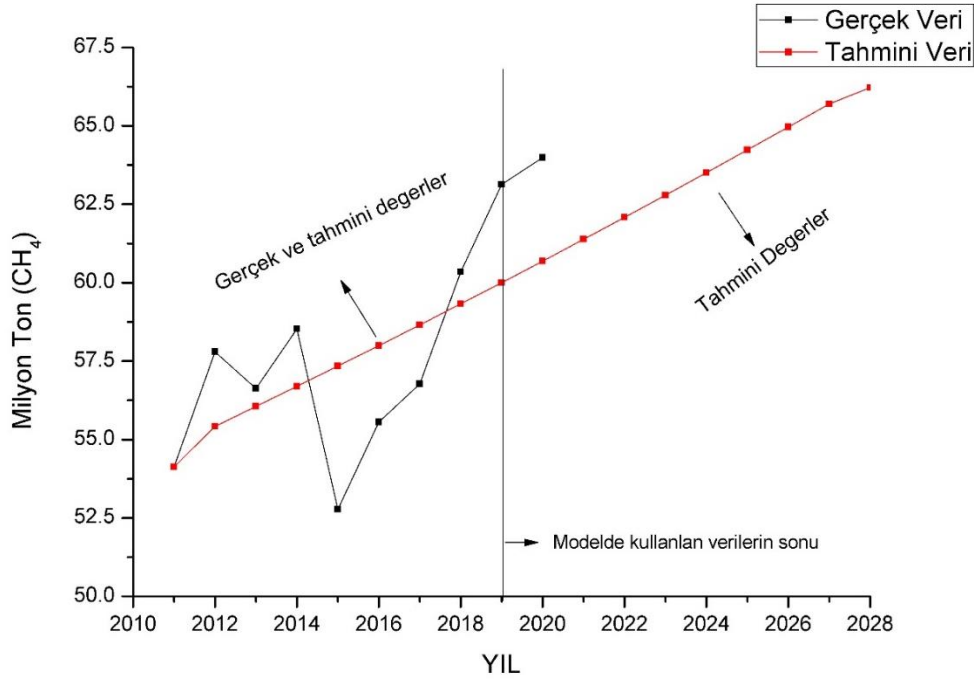


Şekil 3.1. Türkiye'nin CO_2 gazı emisyonunun GM (1,1) modeli ile tahminleri.

Çizelge 3.2. Türkiye'nin GM (1,1) modeli ile CH_4 gazına ait verileri.

Yıllar	Gerçek Değer (Milyon Ton)	Tahmin Değeri (Milyon Ton)	RPE
2011	54,1	54,1000	0
2012	57,8	55,4208	4,1162
2013	56,6	56,0533	0,9659
2014	58,5	56,6929	3,0890
2015	52,8	57,3398	8,5981
2016	55,6	57,9942	4,3061
2017	56,8	58,6559	3,2674
2018	60,3	59,3253	1,6164
2019	63,1	60,0023	4,9091
		MAPE_{fit}	%3,4298
2020	64,0	60,6870	
		MAPE_{pre}	%5,1765
		MAPE_{top}	%3,6044
2021		61,3795	
2022		62,0799	
2023		62,7883	
2024		63,5048	
2025		64,2295	
2026		64,9624	
2027		65,7037	
2028		66,2222	

Bu çalışmada Türkiye'nin 2020 yılı öncesindeki CH_4 gazı verileri kullanılarak daha sonraki yıllar için tahminler üretilmiştir. Eldeki veriler ile oluşturulmuş model karşılaştırılarak ortalama hatanın yaklaşık olarak %3,6 şeklinde olduğu görülmektedir. Tahmin sonucuna ait grafik aşağıda Şekil 3.2'de verilmiştir.



Şekil 3.2. Türkiye'nin CH_4 gazı emisyonunun GM (1,1) modeli ile kıyaslanması.

Şekil 3.2'den görülebileceği gibi 2020 yılına kadar CH_4 gazının gerçek değeri ile tahmini değerinin birbirine denk olduğu görülmektedir. Buradan GM (1,1) yönteminin CH_4 gazı için tahmin gücünün yüksek olduğu görülür. 2021'den 2028'e kadar olan yıllar içinse yapılan tahmin değerlerinin doğrusal bir şekilde arttığı gözlenmektedir.

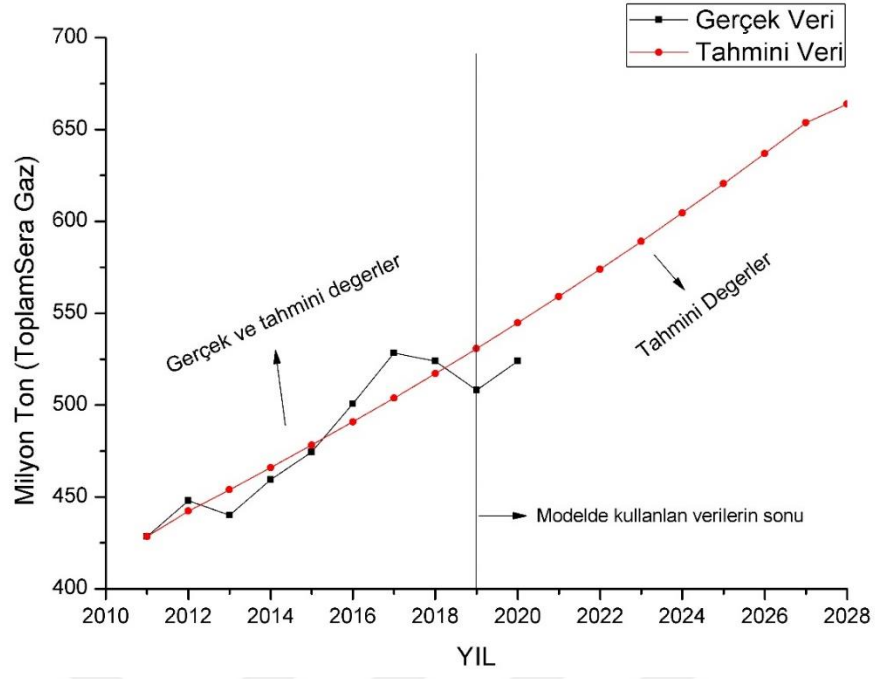
Türkiye'nin 2011 yılından 2020 yılına kadarki sera gazı emisyon toplamına ait gerçek değerleri, GM (1,1) yöntemi ile tahmin edilen değerleri, MAPE ve RPE değerleri aşağıdaki Çizelge 3.3. de verilmiştir.

Çizelge 3.3. Türkiye'nin GM (1,1) modeli sera gazı emisyon toplamına ait verileri.

Yıllar	Gerçek Değer (Milyon Ton)	Tahmin Değeri (Milyon Ton)	RPE
2011	428,5	428,5000	0
2012	448,0	442,2817	1,2764
2013	440,0	453,9569	3,0380
2014	459,4	465,9404	1,4236
2015	474,5	478,2402	0,7882
2016	500,8	490,8647	1,9838
2017	528,3	503,8224	4,6332
2018	524,0	517,1222	1,3125
2019	508,1	530,7731	4,4623
		MAPE_{fit}	%2,1167
2020	523,9	544,7843	
		MAPE_{pre}	%3,9862
		MAPE_{top}	%2,3036
2021		559,1654	
2022		573,9262	
2023		589,0766	
2024		604,6269	
2025		620,5877	
2026		636,9698	
2027		653,7844	
2028		663,8454	

Yapılan çalışmada Türkiye'nin 2020 yılına kadar sera gazı emisyonu toplam gaz verileri kullanılarak ileriki yıllar için tahminler üretilmiştir. Eldeki verilerin karşılaştırılması yapılmıştır. Kullanılan model ile ortalama hatanın yaklaşık değeri %2,3 olarak hesaplanmıştır. Tahmin sonucuna ait grafik aşağıda Şekil 3.3'de verilmiştir.

Şekil 3.3' ten anlaşıldığı gibi 2020 yılı öncesinde sera gazı emisyon toplamı için gerçek değer ve tahmini değer birbirini ile uyumlu olduğu söylenebilir. Buradan GM (1,1) metodunun sera gazı emisyon toplamı için tahmin gücünün fazla olduğu görülebilmektedir. 2021'den 2028'e kadar yapılan tahmin değerleri ise doğrusal ilerlemektedir.



Şekil 3.3. Türkiye'nin sera gazı emisyon toplamının GM (1,1) metodu ile kıyaslanması.

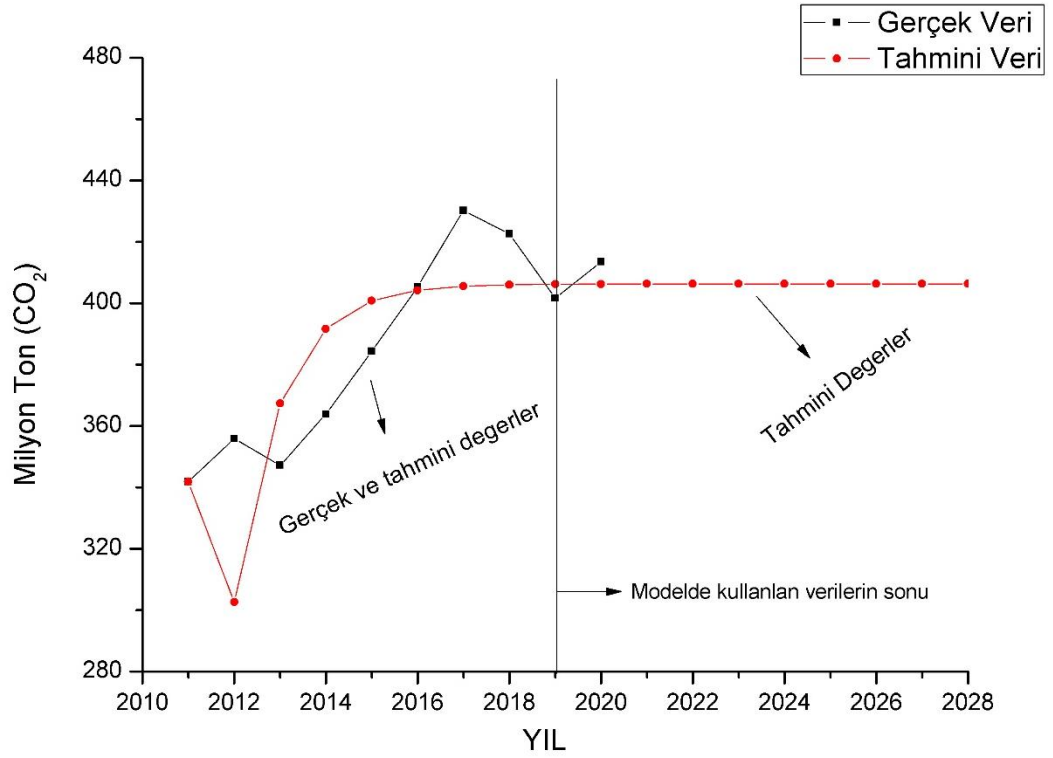
4. NGM (1,1) MODELİ UYGULAMALARI

Bu kısımda amaçlanan NGM (1,1) modeli kullanılarak Türkiye'nin 2012'den 2020 yılına kadar Sera gazı emisyonlarının resmi verileri Türkiye İstatistik Kurumu'ndan alınarak çalışma yapmaktır. 2021 yılından 2028 yılına kadar olan zaman diliminde ise tahmin için NGM (1,1) metodu kullanılmıştır. Gerçek değer ile tahmini değeri arasındaki hata oranları daha önceki bölümde belirttiğimiz denklem (3.1) ve denklem (3.2) kullanılarak bulunmuştur.

Çizelge 4.1. Türkiye'nin NGM (1,1) modeli ile CO_2 gazına ait verileri.

Yıllar	Gerçek Değer (milyon ton)	Tahmin Değeri (milyon ton)	RPE
2011	341,9	341,9000	0
2012	355,9	302,6420	14,9643
2013	347,2	367,3237	5,7959
2014	363,9	391,6481	7,6251
2015	384,3	400,7955	4,2923
2016	405,3	404,2355	0,2626
2017	430,2	405,5292	5,7347
2018	422,6	406,0157	3,9243
2019	401,7	406,1986	1,1198
		MAPE_{fit}	%4,85
2020	413,4	406,2674	
		MAPE_{pre}	%1,72
		MAPE_{top}	%4,53
2021		406,2933	
2022		406,3030	
2023		406,3067	
2024		406,3081	
2025		406,3086	
2026		406,3088	
2027		406,3089	

Türkiye'nin 2011 yılından 2020 yılına kadarki aralıkta CO_2 gazı emisyon verileri kullanılarak ileriki yıllar için tahminleri NGM (1,1) metodu kullanılıp bu çalışma oluşturulmuştur. Kullanılan bu model ile eldeki verilerin karşılaştırılması yapılmıştır. MAPE'nin yaklaşık değeri %4,53 şeklinde hesaplanmıştır. Tahmin sonucunun bulunduğu grafik aşağıda Şekil 4.1'de verilmiştir.



Şekil 4.1. Türkiye'nin CO_2 gazının NGM (1,1) metodu ile kıyaslanması.

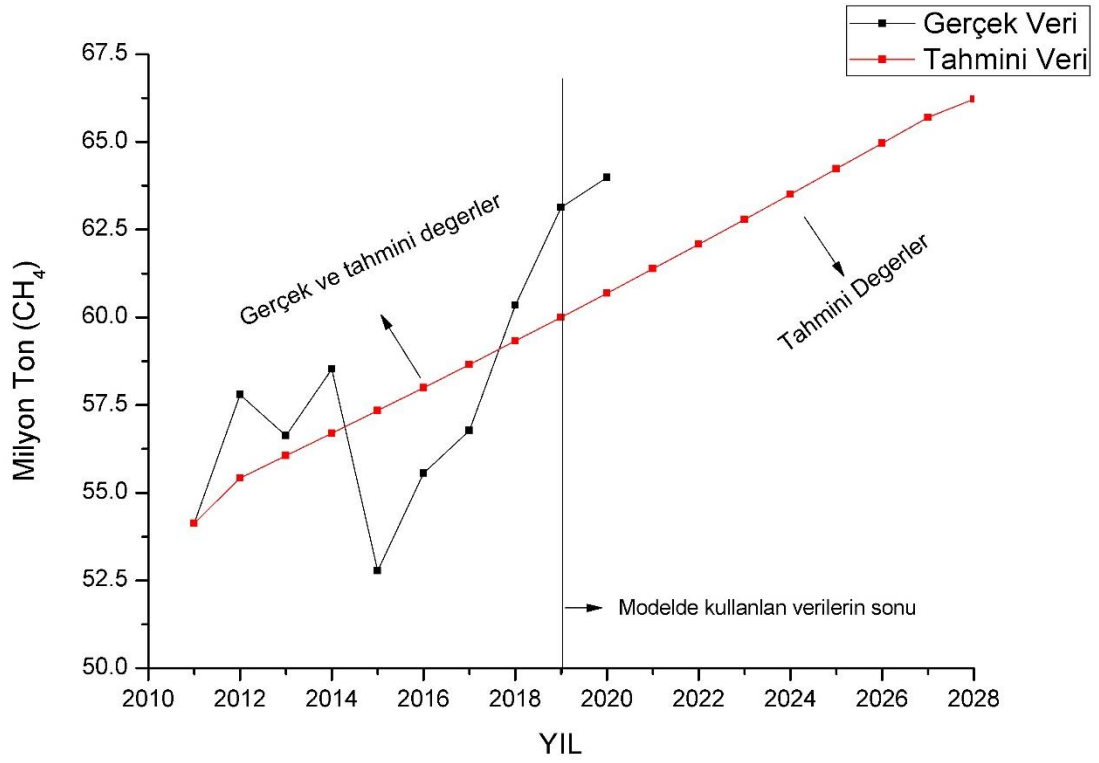
Şekil 4.1'den anlaşılabacağı gibi 2020 yılı öncesinde CO_2 gazının gerçek ve tahmini değeri birbirini ile uyumludur. Buradan NGM (1,1) yönteminin yüksek tahmin gücünde olduğu söylenebilir. 2021 yılından itibaren yapılan tahmin değerleri ise şekilde görüldüğü üzere sabit bir şekilde ilerlemektedir.

Çizelge 4.2. Türkiye'nin NGM (1,1) modeli ile CH_4 gazına ait verileri.

Yıllar	Gerçek Değer (milyon ton)	Tahmin Değeri (milyon ton)	RPE
2011	54,1	54,1000	0
2012	57,8	51,8730	10,2543
2013	56,6	56,3480	0,4452
2014	58,5	57,1748	2,2652
2015	52,8	57,3275	8,5748
2016	55,6	57,3557	3,1577
2017	56,8	57,3609	0,9875
2018	60,3	57,3619	4,8724
2019	63,1	57,3621	9,0933
		MAPE_{fit}	%4,4
2020	64,0	57,3621	
		MAPE_{pre}	%10,37
		MAPE_{top}	%4,99
2021		57,3621	
2022		57,3621	
2023		57,3621	
2024		57,3621	
2025		57,3621	
2026		57,3621	
2027		57,3621	
2028		57,3621	

Türkiye'nin 2020 yılına kadar olan verileri ile CH_4 gazı emisyonu için NGM (1,1) metodu ile tahminler üretilmiştir. Bu modelin eldeki verilerle karşılaştırması yapılmıştır. MAPE değeri yaklaşık şekilde %4,99 olarak hesaplanmıştır. Tahmin sonucunun bulunduğu grafik aşağıda Şekil 4.2'de verilmiştir.

Şekil 4.2'den görüldüğü gibi 2020 yılı öncesinde CH_4 gazının gerçek değeri ve tahmini değerinin birbiri ile uyumu bellidir. Buradan NGM (1,1) yönteminin tahmin gücünün etkili olduğu söylenebilir. 2028 yılına kadar yapılan tahmin değerleri ise doğrusal bir artış şeklinde ilerlemektedir.

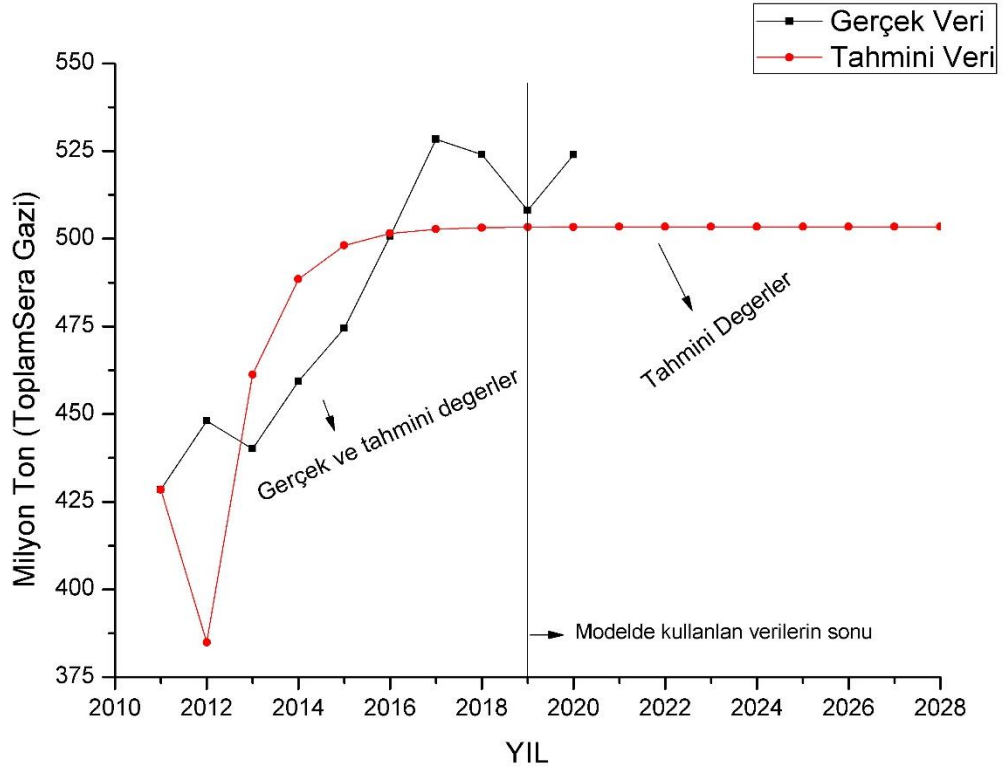


Şekil 4.2. Türkiye'nin CH_4 gazının NGM (1,1) metodu ile kıyaslanması.

Çizelge 4.3. Türkiye'nin NGM (1,1) modeli ile sera gazı emisyon toplamına ait verileri.

Yıllar	Gerçek Değer (milyon ton)	Tahmin Değeri (milyon ton)	RPE
2011	428,5	428,5000	0
2012	448,0	384,9430	14,0752
2013	440,0	461,3117	4,8435
2014	459,4	488,4506	6,1223
2015	474,5	498,0949	4,9725
2016	500,8	501,5222	0,1442
2017	528,3	502,7401	4,8381
2018	524,0	503,1729	3,9746
2019	508,1	503,3267	0,9394
		MAPE_{fit}	%4,45
2020	523,9	503,3814	
		MAPE_{pre}	%3,91
		MAPE_{top}	%4,39
2021		503,4008	
2022		503,4077	
2023		503,4102	
2024		503,4110	
2025		503,4114	
2026		503,4115	
2027		503,4115	

Türkiye'nin 2011 yılından 2020 yılına kadar olan sera gazı emisyon toplamı verileri kullanılarak ileriki yıllar için tahminler NGM (1,1) metodu ile üretilmiştir. Yapılan çalışmadaki model ile eldeki verilerin karşılaştırılması yapılmıştır. Ortalama hatanın yaklaşık değeri %4,39 olarak bulunmuştur. Tahmin sonucunun bulunduğu grafik aşağıda Şekil 4.3'de verilmiştir.



Şekil 4.3. Türkiye'nin sera gazı emisyon toplamının NGM (1,1) metodu ile kıyaslanması.

Şekil 4.3'ten görüldüğü gibi 2012 yılından 2020 yılına kadar sera gazı emisyon toplamı için gerçek değer tahmini değerle uyumlu olduğu görülmektedir. Buradan NGM (1,1) yönteminin sera gazı emisyon toplamında tahmin gücünün etkili olduğu söylenir. 2021 yılından 2028 yılına kadarki yapılan tahmin değerleri ise neredeyse sabit bir şekilde ilerlemektedir.

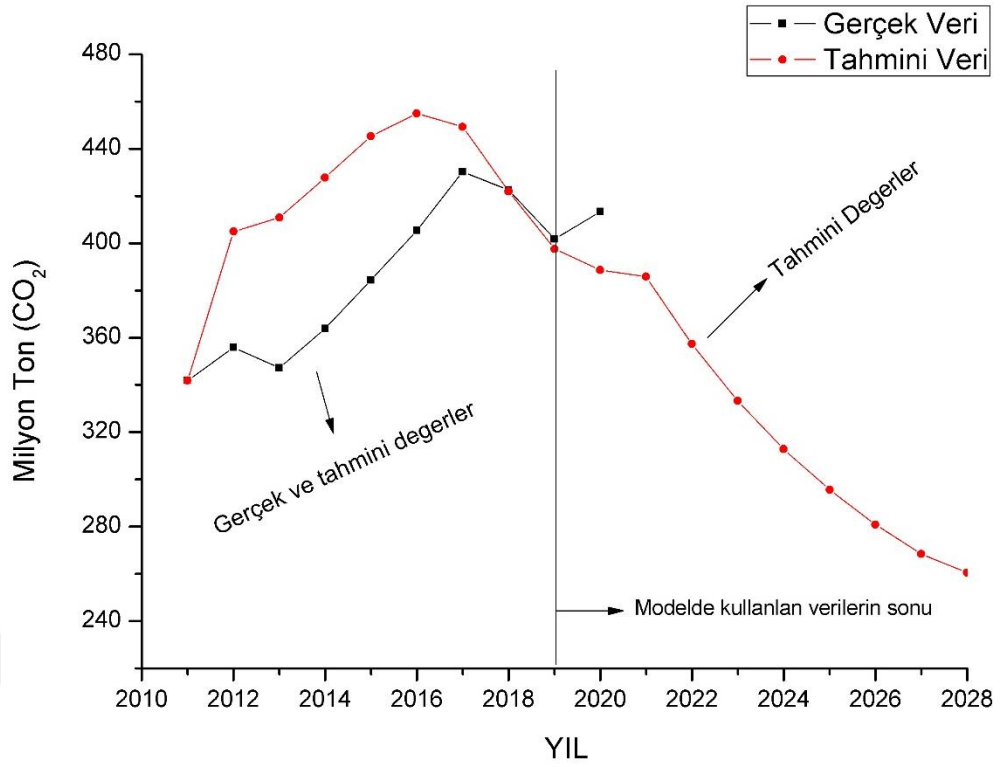
5. TDPGM (1,1) MODELİ UYGULAMALARI

Bu bölümde Türkiye'nin 2012 yılından 2020 yılına kadarki sera gazı emisyonları resmi verileri Türkiye İstatistik Kurumu'ndan alınarak TDPGM (1,1) modeli ile çalışma yapılmıştır. 2020'den 2028'e kadar olan yılların tahmini içinse TDPGM (1,1) metodu kullanılmıştır. Gerçek değeri ile tahmin değeri arasındaki hata oranları daha önceki bölümde mevcut olan denklem (3.1) ve denklem (3.2) kullanılarak yapılmıştır.

Çizelge 5.1. Türkiye'nin TDPGM (1,1) modeli ile CO_2 gazına ait verileri.

Yıllar	Gerçek Değer (milyon ton)	Tahmin Değeri (milyon ton)	RPE
2011	341,9	341,9000	0
2012	355,9	404,9702	13,7876
2013	347,2	410,8444	18,3307
2014	363,9	427,7341	17,5416
2015	384,3	445,3523	15,8866
2016	405,3	454,9883	12,2596
2017	430,2	449,2656	4,4317
2018	422,6	421,9377	0,1567
2019	401,7	397,5430	1,0348
		MAPE_{fit}	%9,26
2020	413,4	388,6925	
		MAPE_{pre}	%5,97
		MAPE_{top}	%8,93
2021		385,7974	
2022		357,3338	
2023		333,2308	
2024		312,8202	
2025		295,5365	
2026		280,9006	
2027		268,5069	
2028		260,5435	

Türkiye'nin 2011 yılından başlanıp 2020 yılına kadar olan CO_2 gazı emisyon verileri kullanılıp TDPGM (1,1) metodu ile ileriki yıllar için tahminler üretilmiştir. Yapılan çalışmadaki model ile eldeki veriler karşılaştırılmış ve MAPE'nin yaklaşık değeri %8,93 olarak hesaplanmıştır. Tahmin sonucunun bulunduğu grafik aşağıda Şekil 5.1'de verilmiştir.



Şekil 5.1. Türkiye'nin CO_2 gazının TDPGM (1,1) metodu ile kıyaslanması.

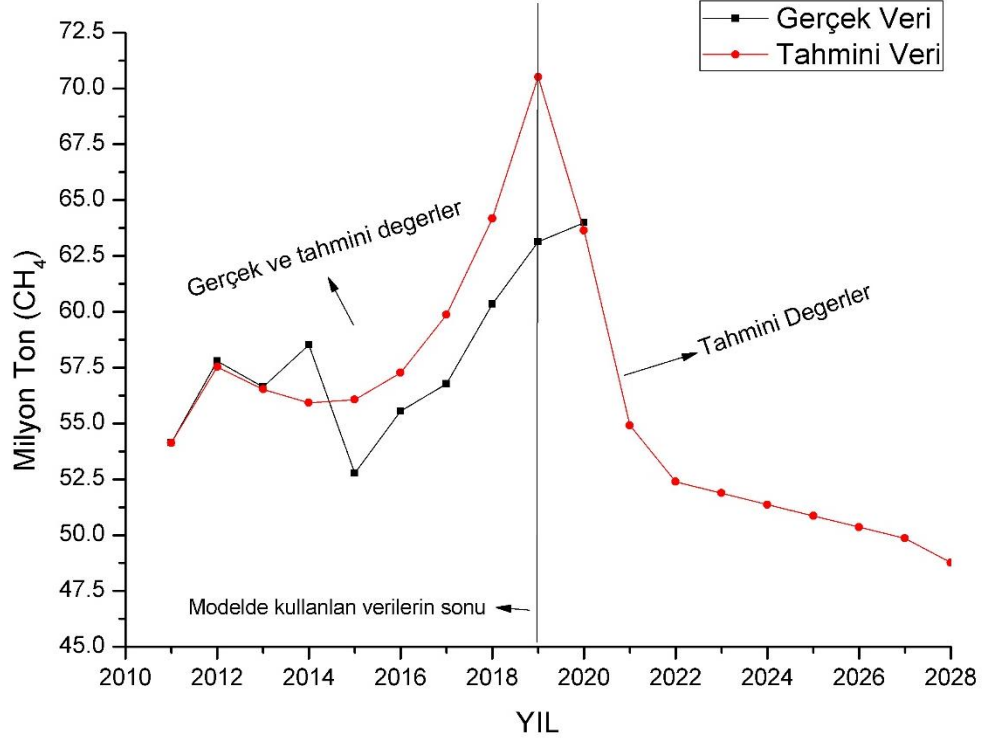
Şekil 5.1'den görülebileği gibi 2011 yılından 2020 yılına kadar CO_2 gazı için gerçek değer ve tahmini değerin ilişkili olduğu görülmektedir. Böylece tahmin gücü yüksek olan bir TDPGM (1,1) metodu karşımıza çıkar. 2021 yılından 2028 yılına kadarki yapılan tahmin değerlerinin ise azaldığı görülmektedir.

Çizelge 5.2. Türkiye'nin TDPGM (1,1) modeli ile CH_4 gazına ait verileri.

Yıllar	Gerçek Değer (milyon ton)	Tahmin Değeri (milyon ton)	RPE
2011	54,1	54,1000	0
2012	57,8	57,5357	0,4572
2013	56,6	56,5303	0,1231
2014	58,5	55,9310	4,3914
2015	52,8	56,0693	6,1918
2016	55,6	57,2735	3,0098
2017	56,8	59,8688	5,4028
2018	60,3	64,1772	6,4298
2019	63,1	70,5174	11,7549
		MAPE_{fit}	%4,19
2020	64,0	63,6444	
		MAPE_{pre}	%0,55
		MAPE_{top}	%3,82
2021		52,9158	
2022		52,3939	
2023		51,8772	
2024		51,3656	
2025		50,8589	
2026		50,3573	
2027		49,8607	
2028		49,7666	

Türkiye'nin 2011 yılından 2020 yılına kadar CH_4 gazı emisyon verileri kullanılıp TDPGM (1 ,1) metodu ile ileriki yıllar için tahminler oluşturulmuştur. Bu çalışmadaki model ile eldeki veriler karşılaştırılmıştır. MAPE değeri yaklaşık %3,82 olarak hesaplanmıştır. Tahmin sonucunun bulunduğu grafik aşağıda Şekil 5.2'de verilmiştir.

Şekil 5.2'den görüldüğü gibi 2020 yılı öncesinde CH_4 gazı için gerçek değer ve tahmini değerin ilişkili olduğu söylenir. Böylece TDPGM (1,1) metodunun CH_4 gazı uygulamasında yüksek tahmin gücüne sahip olduğu söylenebilir. 2021 ve sonrasında ise yapılan tahmin değerleri önce hızlı bir şekilde sonrasında ise yavaşlayarak azalmaktadır.

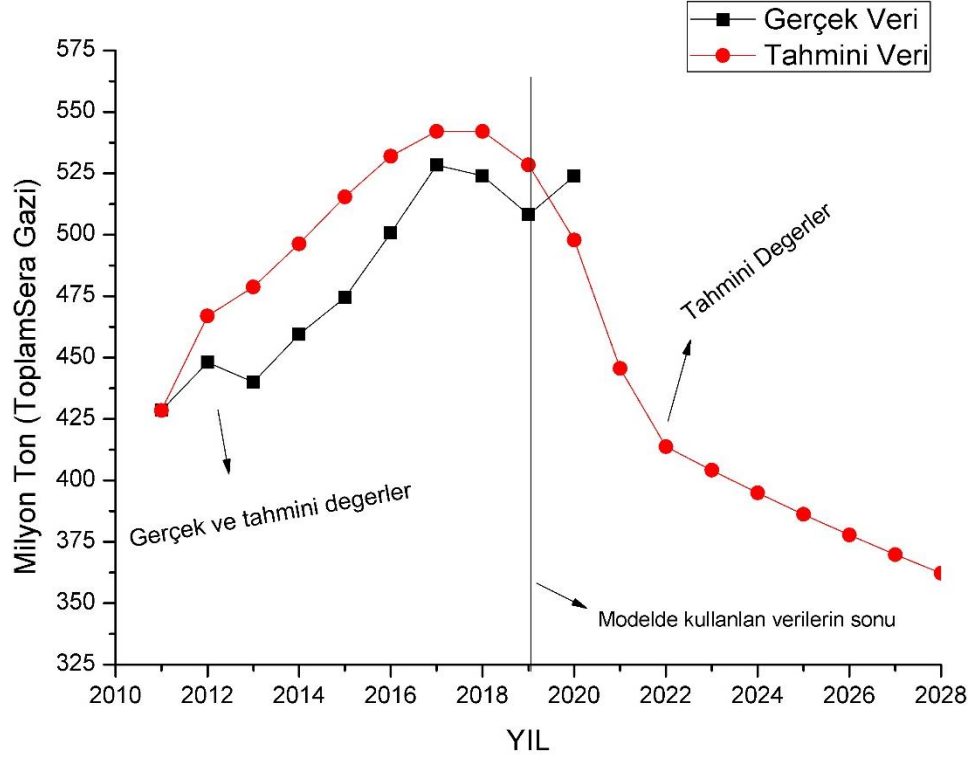


Şekil 5.2. Türkiye'nin CH_4 gazının TDPGM (1,1) metodu ile kıyaslanması

Çizelge 5.3. Türkiye'nin TDPGM (1,1) modeli ile sera gazı emisyon toplamına ait verileri.

Yıllar	Gerçek Değer (milyon ton)	Tahmin Değeri (milyon ton)	RPE
2011	428,5	428,5	0
2012	448,0	466,9241	4,2241
2013	440,0	478,7528	8,8074
2014	459,4	496,3248	8,0376
2015	474,5	515,4007	8,6197
2016	500,8	531,9312	6,2162
2017	528,3	542,0494	2,6025
2018	524,0	542,0621	3,4469
2019	508,1	528,4421	4,0035
		MAPE_{fit}	%5,09
2020	523,9	497,8208	
		MAPE_{pre}	%4,97
		MAPE_{top}	%5,07
2021		445,6011	
2022		413,7219	
2023		404,1141	
2024		394,9382	
2025		386,1748	
2026		377,8053	
2027		369,8121	
2028		362,1783	

Türkiye'nin 2011 yılından 2020 yılına kadar sera gazı emisyon toplamı verileri kullanılıp TDPGM (1,1) metodu ile ileriki yıllar için tahminler oluşturulmuştur. Bu çalışmadaki model ile elde edilen veriler karşılaştırılmıştır. MAPE değeri yaklaşık %5,07 olarak hesaplanmıştır. Tahmin sonucunun bulunduğu grafik aşağıda Şekil 5.3'de verilmiştir.



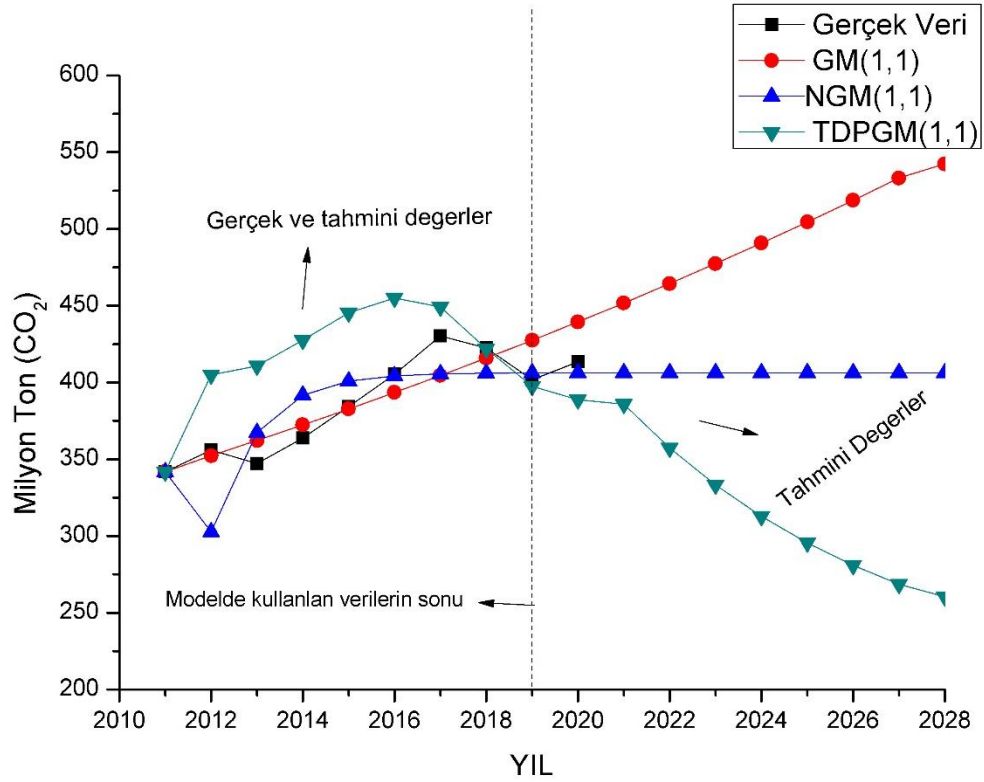
Şekil 5.3. Türkiye'nin sera gazı emisyon toplamının TDPGM (1,1) metodu ile kıyaslanması.

Şekil 5.3'den görüldüğü gibi 2020 yılı öncesinde sera gazı emisyon toplamı için gerçek değer ve tahmini değer ilişkili olduğu söylenir. Böylece TDPGM (1,1) metodunun sera gazı emisyon toplamı uygulamasında yüksek tahmin gücüne sahip olduğu söylenebilir. 2021 ve sonrasında ise yapılan tahmin değerleri ise azalarak devam etmektedir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Yapılan bu çalışmada ise Türkiye'nin 2011 yılından başlanarak 2020 yılına kadarki sera gazı emisyonu verileri Türkiye İstatistik Kurumu'ndan alınarak 2021 yılından 2028 yılına kadar olan kısım için Standart Gri Model (GM (1,1)), Yeni Gri Model (NGM (1,1)) ve Zaman Gecikmeli Polinomal Gri Model (TDPGM (1,1)) modelleri kullanılarak tahminler geliştirilmiştir. Bu üç modelin sonuçlarının karşılaştırılması yapılarak 2011 yılından 2020 yılına kadar olan veriler kullanılmıştır. Gerçek ve tahmini değerler arasındaki yüzde bağıl hata (RPE) ve ortalama yüzde bağıl hatanın (MAPE) belirlenmesi yapılmıştır.

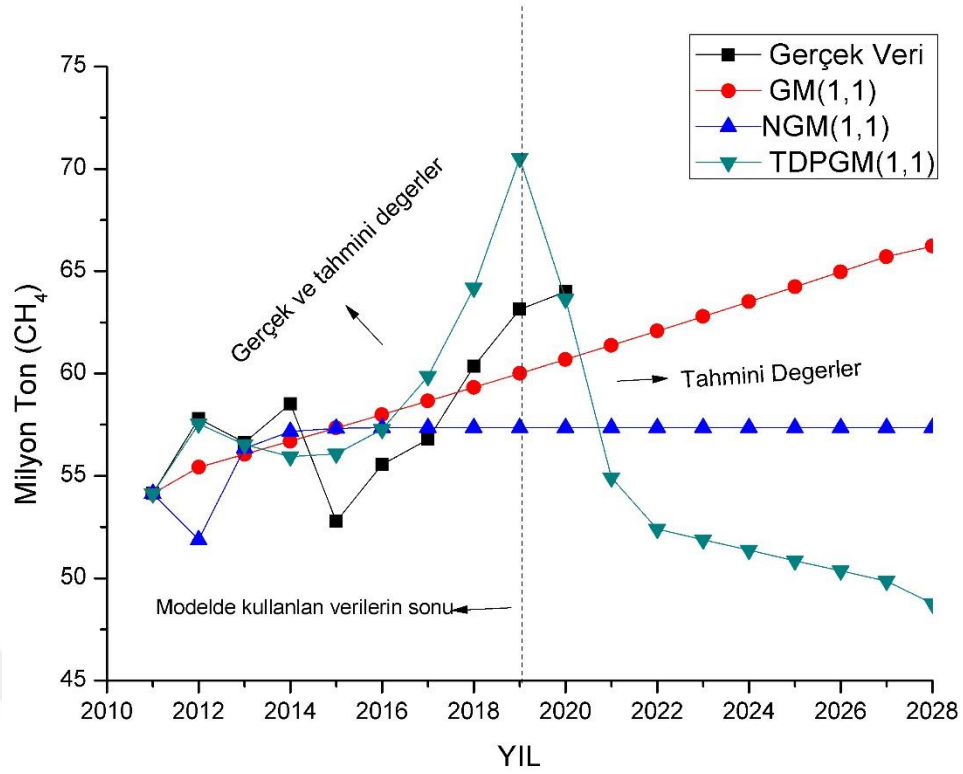
Şekil 6.1'de CO_2 gazının gerçek değerleri, “GM (1,1), NGM (1,1) ve TDPGM (1,1)” modelleri kullanılıp elde edilmiş olan tahmin değerleri bulunmaktadır. Bu üç yöntemden elde edilen tahmini değerlerinin esas değere olan yakınlığı şaşırtıcıdır. Sonuç olarak ortalama hata değeri GM (1,1) için %3,12, NGM (1,1) için %4,53 ve TDPGM (1,1) için %8,93 olarak bulunmuştur. Daha öncede söylediğimiz gibi literatürde %10 altında kalan hata değerlerinin muhteşem güçte tahminler yaptığını söyleyebiliriz. Buradan GM (1,1) metodunun bu çalışma için en yüksek tahmin gücünde olduğu söylenilebilmektedir. 2011 yılından 2020 yılına kadar yüksek tahmin doğruluğunda olduğundan 2021 yılından itibaren 2028 yılına kadarki CO_2 gazı emisyonu tahmin edilmiştir. 2021'den 2028'e kadar GM (1,1) yöntemi ile tahmin edilen CO_2 gazı emisyonunun NGM (1,1) ve TDPGM (1,1) için olan tahmin değerlerinden daha yüksek olduğu görülmektedir.



Şekil 6.1. CO_2 gazı emisyonunun “GM (1,1), NGM (1,1) ve TDPGM (1,1)” modelleri ile kıyaslanması

Şekil 6.1’deki grafikten 2020 ye kadar olan CO_2 gazı emisyonunun arttığı sonrasında ise artma, azalma ve sabit durumları olduğu görülmektedir.

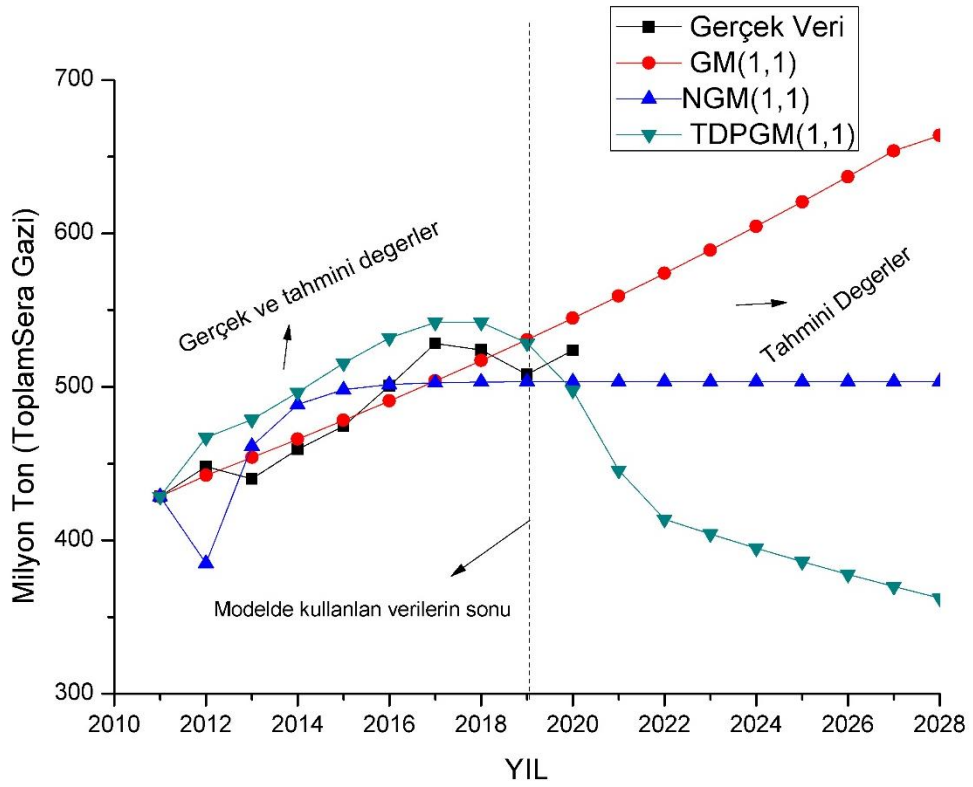
Şekil 6.2’de CH_4 gazı emisyonunun gerçek değerleri, “GM (1,1), NGM (1,1) ve TDPGM (1,1)” modelleri ile elde edilen tahmini değerleri bulunmaktadır. Her üç yöntemden elde edilen tahminlerin gerçek değere olan yakınlığı aşıkardır. Sonuçta ise ortalama hata değeri GM (1,1) için %3,60, NGM (1,1) için %4,99 ve TDPGM (1,1) için %3,82 olarak bulunmuştur. Buradan CH_4 gazı için de yüksek tahmin gücünde olan GM (1,1) metodunun kullanımı daha faydalıdır. 2011 yılından 2020 yılına kadarki doğru tahminlemesi yüksek olduğundan 2021 yılından sonra da 2028’e kadar CH_4 gazı emisyonu tahminlemesi yapılmıştır.



Şekil 6.2. CH_4 gazı emisyonunun “GM (1,1), NGM (1,1) ve TDPGM (1,1)” modelleri ile kıyaslanması

Şekil 6.2’deki grafikten 2020’ye kadar olan kısım için CH_4 gazı emisyon artışının düşük olduğu fakat 2020 sonrası ile GM (1,1) için artış hızının daha yüksek olacağı NGM (1,1) için sabit ve TDPGM (1,1) için azalacağı öngörülebilir.

Şekil 6.3’te sera gazı emisyon toplamının bulunduğu esas değerler, ‘GM (1,1), NGM (1,1) ve TDPGM (1,1)’ modelleriyle elde edilen tahmini değerler görülür. Üç metottan elde ettiğimiz tahmini sonuçların gerçek değere olan yakınlığı dikkat çekmektedir. Sonuçlara bakılırsa ortalama hata GM (1,1) için %2,3, NGM (1,1) için %4,39 ve TDPGM (1,1) için %5,07 olarak bulunmuştur. Buradan sera gazı emisyon toplamında da GM (1,1) metodunun daha yüksek tahmin doğruluk değerlerinde olduğu söylenilebilir. 2011 yılından 2020 yılına kadar yüksek tahmin gücünde olduğundan 2021 - 2028 yılları arasında da sera gazı emisyon toplamı tahmin edilmiştir.



Şekil 6.3. Sera gazı emisyon toplamının “GM (1,1), NGM (1,1) ve TDPGM (1,1)” modelleri ile kıyaslanması

Şekil 6.3’ deki grafikten sera gazı emisyon toplamının kullanılan yöntemle göre arttığı, sabit kaldığı ya da azaldığı görülmektedir.

Çalışmanın sonucunda “GM (1,1), NGM (1,1) ve TDPGM (1,1)” gri modelleri yardımıyla hesaplanan tahmini değerlerinin hata verileri incelendiğinde tüm uygulamalar gösterdi ki diferansiyel ve fark denklemleri kullanılarak oluşturulan gri modelin (GM (1,1)) oldukça düşük hata oranında tahminlemeler yaptığı açıktır. Bu çalışmadaki uygulamalarda GM (1,1) modelinin yüksek tahmin gücünde olduğundan dolayı farklı alanlardaki uygulamaları ile karşılaşmamız mümkündür.

Bu modellerden bağımsız olarak günlük yaşamımızı düşünecek olursak sera gazı emisyonunu azaltmak için bazı önlemler alınabilir. Bunlar;

- Enerjinin az yoğun olduğu sanayileşme tercih etmek daha uygundur enerjinin yoğun olduğu sanayileşmeye göre,
- Yoğun enerji sanayi tesisleri için sera gazı emisyon kısıtlaması ile ilgili çalışmalar yapmak gerekir,

- Ulaşım kısmında az yoğun yakıt taşımacılığın öne çıkarılmalı,
- Çöplerin kötü biçimde depolanması sonlandırılmalı ayrıca çöp biriktirme alanlarının biyoreaktörlere dönüştürülmesi sağlanmalı,
- Dönüştürülebilir atıkların geri değerlendirilmesi ile ilgili uyumlu bir yönetim sistemi oluşturulmalı,
- Yalıtımı olmayan binalarla ilgili yaptırımlar olmalı,
- Eski model araçlarla ilgili vergi sistemi tekrardan düzenlenmeli,
- Yıpranmış deniz araçları yavaş yavaş hizmetten kaldırılmalı,
- Emisyon değerleri düşük araçlar ve deniz taşıtları kullanımı teşvik edilmeli,
- Sulak bölümler korunmalı,
- Orman alanları ağaçlandırma seferberliğiyle artırılmalı,
- Gölet ve göl alanları artırılmalı,
- Şehirdeki eski taşıtların toplu taşıma aracı şeklinde kullanımına son verilmeli,
- Şehirlerdeki yeşil bölgeler artırılmalı,
- Enerji verimi yüksek olan ısıtma, soğutma ve mutfak aletlerinin kullanımı teşvik edilmelidir.

KAYNAKLAR

1. Deng, J. L., 1986. Grey forecasting and decision, Huazhong University of Science and Technology Press, Wuhan.
2. Deng, J. L., 1982. Control problems of grey systems, Systems and Control Letters 1, 5, 288–294.
3. Liu, S. ve Lin, Y., 2006. Grey Information: Theory and Practical Applications, Springer, 11–21.
4. Chiang, J. S., Wu, P. L., Ciang, S. D., Chang, T. J., Chang, S. T. ve Wen, K. L., 1998. Introduction to grey system theory, GAO-Li Publication, Taiwan.
5. Han. Y. ve Xu, S., 2007. Multi-variable grey model based on genetic algorithm and its application in urban water consumption, Nature and Science, 5, 1, 18–26.
6. Guo, X., Liu, S., Wu, L., Gao, Y. ve Yang, Y., 2015. A multi-variable grey model with a selfmemory component and its application on engineering prediction, Engineering Applications of Artificial Intelligence, 42, 82–93.
7. Hui, H., Li, F. ve Shi, Y., 2013. An optimal multivariable grey model for logistics demand forecast, International Journal of Innovative Computing, Information and Control, 9, 7, 2907–2918.
8. Hsu, C. I. ve Wen, Y. H., 1998. Improved grey prediction models for the trans-pacific air passenger market, Transportation Planning and Technology, 22, 2, 87–107.
9. Lin, C. B., Su, S. F. ve Hsu, Y. T., 2001. High-precision forecast using grey models, International Journal of Systems Science, 32, 5, 609–619.
10. Hsu, L. C., 2003. Applying the grey prediction model to the global integrated circuit industry, Technological forecasting and Social change, 70, 6, 563–574.
11. Yao, A. W., Chi, S. C. ve Chen, J. H., 2003. An improved grey-based approach for electricity demand forecasting, Electric Power Systems Research, 67, 3, 217–224.
12. Hsu, C. C. ve Chen, C. Y., 2003. Applications of improved grey prediction model for power demand forecasting, Energy Conversion and management, 44, 14, 2241–2249.
13. Akay, D. ve Atak, M., 2007. Grey prediction with rolling mechanism for electricity demand forecasting of Turkey, Energy, 32, 9, 1670–1675.
14. Lin, Y. H., Wang, J. S. ve Pai, P. F., 2004. A grey prediction model with factor analysis technique, Journal of the Chinese Institute of Industrial Engineers, 21, 6, 535–542.
15. Chiou, H. K., Tzeng, G. H., Cheng, C. K. ve Liu, G. S., 2004. Grey prediction model for forecasting the planning material of equipment spare parts in navy of Taiwan, Proceedings World Automation Congress, 17, 315–320.
16. Trivedi, H. V. ve Singh, J. K., 2005. Application of grey system theory in the development of a runoff prediction model, Biosystems Engineering, 92, 4, 521–526.

17. Wang, C. H. ve Hsu, L. C., 2008. Using genetic algorithms grey theory to forecast high technology industrial output, *Applied mathematics and computation*, 195, 1, 256–263.
18. Huang, K. Y. ve Jane, C. J., 2009. A hybrid model for stock market forecasting and portfolio selection based on ARX, grey system and RS theories, *Expert systems with applications*, 36, 3, 5387–5392.
19. Kayacan, E., Ulutas, B. ve Kaynak, O., 2010. Grey system theory-based models in time series prediction, *Expert systems with applications*, 37, 2, 1784–1789.
20. Kayacan, E. ve Kaynak, O., 2011. Single-step ahead prediction based on the principle of concatenation using grey predictors, *Expert Systems with Applications*, 38, 8, 9499–9505.
21. Askari, M. ve Askari, H., 2011. Time series grey system prediction-based models: Gold price forecasting, *Trends in Applied Sciences Research*, 6, 11, 1287.
22. Wang, Y., Tang, J. ve Cao, W. 2012. Grey prediction model-based food security early warning prediction, *Grey Systems: Theory and Application*, 2, 1, 13–23.
23. Ene, S. ve Öztürk, N., 2017. Grey modelling based forecasting system for return flow of end-of-life vehicles, *Technological Forecasting and Social Change*, 115, 155–166.
24. Şahin, U. ve Şahin, T., 2020. Forecasting the cumulative number of confirmed cases of COVID-19 in Italy, UK and USA using fractional nonlinear grey Bernoulli model, *Chaos, Solitons and Fractals*, 138, 109948.
25. Ma, X. ve Liu, Z., 2017. Application of a novel time-delayed polynomial grey model to predict the natural gas consumption in China, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 324, 17–24.
27. Deng, J. L., 2002. The basis of grey theory, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan.
28. Deng, J. L., 2002. Grey prediction and grey decision, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan.
29. Liu, S. ve Forrest, J. Y. L., 2010. Grey systems: theory and applications, Springer.
30. Ren, X. W., Tang, Y. Q., Li, J. ve Yang, Q., 2012. A prediction method using grey model for cumulative plastic deformation under cyclic loads, *Natural Hazards*, 64, 1, 441–457.
31. Tien, T. L., 2012. A research on the grey prediction model GM (1,n), *Applied mathematics and computation*, 218, 9, 4903–4916.
32. Ma, X. ve Liu, Z. B., 2016. Research on the novel recursive discrete multivariate grey prediction model and its applications, *Applied Mathematical Modelling*, 40, 7–8, 4876–4890.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Berkan ZİLE

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Erciyes Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2006-2011

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, 2019-2022

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLERİ

1. Kayseri Uğur Dershaneleri, Matematik Öğretmeni, 2009-2010
2. Antalya Çözüm Dershaneleri, Matematik Öğretmeni, 2011-2012
3. Aksaray Birey Dershaneleri, Matematik Öğretmeni, 2012-2016
4. Özel Servet Altınsoy Temel Lisesi, Matematik Öğretmeni, 2016-2018
5. Kuşatan Özel Öğretim Kursu, Matematik Öğretmeni, 2018-Devam Ediyor

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Kongrelerde Sunulan Bildiriler

1. Zile, B. ve Bilgil, H., Standard Grey Model Theory and Turkey's Greenhouse Gas Emission Estimates, 2nd International Congress of Engineering and Natural Sciences Studies (ICENSS), 07-09 May 2022, Ankara / TURKEY