

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

BAZI İNTEGRAL DENKLEMLERİN İTERASYON YÖNTEMLERİ İLE
ÇÖZÜMÜ

YÜKSEK LİSANS

Tuğba TUNA

OCAK-2024
GÜMÜŞHANE



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**BAZI İNTEGRAL DENKLEMLERİN İTERASYON YÖNTEMLERİ İLE
ÇÖZÜMÜ**

**SOLUTION OF SOME INTEGRAL EQUATIONS WITH ITERATION
METHODS**

YÜKSEK LİSANS

Tuğba TUNA

**OCAK-2024
GÜMÜŞHANE**



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**BAZI İNTEGRAL DENKLEMLERİN İTERASYON YÖNTEMLERİ İLE
ÇÖZÜMÜ**

**SOLUTION OF SOME INTEGRAL EQUATIONS WITH ITERATION
METHODS**

YÜKSEK LİSANS

Tuğba TUNA

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Lale CONA

**OCAK-2024
GÜMÜŞHANE**

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlamış olduğum “**Bazı İntegral Denklemlerin İterasyon Yöntemleri ile Çözümü**” isimli bu tezimin, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, alıntı yaptığım tüm çalışmaları kaynakçada belirttiğimi ve Gümüşhane Üniversitesi’nin lisanslı kullanıcısı olduğu intihal yazılım programı ile Lisansüstü Eğitim Enstitüsü’nün belirlediği kıstaslara uygun olarak raporladığımı taahhüt ederim. Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivinde saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği’nin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

17/01/2024

Tuğba TUNA

TEŞEKKÜR

Bu çalışma Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlanmıştır. Tez konusunu belirleme ve hazırlama sürecinde yol gösterici olan, bilgi ve tecrübelerinden faydalanmama izin veren, her türlü görüş ve önerilerini paylaşan çok kıymetli danışmanım Sayın Dr. Öğr. Üyesi Lale CONA'ya; yüksek lisans eğitimim boyunca üzerimde emeği olan Gümüşhane Üniversitesi Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'ndaki tüm saygıdeğer hocalarıma; desteğini üzerimden hiçbir zaman esirgemeyen kıymetli aileme teşekkürlerimi sunarım.

Tuğba TUNA
GÜMÜŞHANE – 2024

ÖZET

Bu tez çalışmasında, Picard'ın üç adımlı iterasyon yöntemi kullanılarak lineer Fredholm integral denklemlerin ve üç adımlı iterasyon yöntemi kullanılarak ise ikinci tip lineer olmayan Volterra integral denklemlerin çözümlerinin güçlü yakınsaklığı ve veri bağılılığı araştırılmıştır. Tez çalışması üç bölüm olarak hazırlanmıştır. Birinci bölümde tez çalışma konusu hakkında bir literatür özeti sunulmuştur. İkinci bölümde tezin bulgular kısmında sık kullanılan bazı temel kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde ise hipotezler doğrultusunda elde edilen bulgulara yer verilmiştir. Son olarak ise elde edilen sonuçlar özetlenerek, yeni çalışmalar için önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Sabit nokta teoremleri, Fredholm integral denklemler, Volterra integral denklemler, İterasyon yöntemleri, Veri bağılılığı.

SUMMARY

In this thesis study, the strong convergence and data dependency of the solutions of linear Fredholm integral equations using Picard's three-step iteration method and the second type of non-linear Volterra integral equations using the three-step iteration method were investigated. The thesis study has been prepared in three parts. In the first chapter, a literature summary about the subject of the thesis study is presented. In the second chapter, some basic concepts frequently used in the findings section of the thesis are included. In the third section, the findings obtained in line with the hypotheses are included. Finally, the results obtained are summarized and suggestions are made for new studies.

Keywords: Fixed point theorems, Fredholm integral equations, Volterra integral equations, Iteration methods, Data dependence.

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	III
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI.....	IV
TEŞEKKÜR.....	V
ÖZET.....	VI
SUMMARY	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	IX
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	X
1. GENEL BİLGİLER	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	4
2.1. Fonksiyonel Analiz ile İlgili Bazı Temel Kavramlar	4
2.2. Sabit Nokta Teoremi ve İterasyon Yöntemleri ile İlgili Bazı Temel Kavramlar	12
2.3. İntegral Denklemler ile İlgili Bazı Temel Kavramlar	33
3. BULGULAR	39
3.1. Lineer Fredholm İntegral Denklemler	39
3.2. Lineer Olmayan Volterra İntegral Denklemler	48
4. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME	59
KAYNAKÇA.....	60
ÖZGEÇMİŞ	65

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. Dönüşümler arasındaki bağlantı	17
---	----



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	: Pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	: Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\in$	: Elemanıdır
$\exists$	: En az bir, bazı
$\ni$	: Öyle ki
$=$	: Eşittir
$\neq$	: Eşit değildir
$\stackrel{?}{=}$	: Eşit midir
$\forall$	: Her, herhangi
$[a, b]$	: Kapalı aralık
$B(X, \mathbb{R})$	: X uzayındaki $\mathbb{R}$ değerli tüm sınırlı fonksiyonların kümesi
$C([a, b], \mathbb{R})$	: $[a, b]$ üzerindeki $\mathbb{R}$ değerli tüm sürekli fonksiyonların kümesi
$A : M \rightarrow M$	: M den M e tanımlı A operatörü
A^m	: A operatörünün m . iterasyonu
$A^{(m)}(x)$	: A operatörünün m . türevi
vb.	: Ve benzeri
vd.	: Ve diğerleri
F_A	: A nın tüm sabit noktalarının kümesi

1. GENEL BİLGİLER

Metrik uzay kavramı ilk kez 1906 senesinde Maurice Fréchet tarafından verilmiştir. Fréchet boştan farklı bir küme üzerindeki metrik yapısı üzerine çalışmalar yapmış, kümenin farklı iki eleman arasındaki uzaklığın pozitif bir reel sayı olması gerektiğini göstermiş ve bu da klasik analizden modern analize geçişin ilk adımı olmuştur (Kurag, 2014). Ayrı olarak topoloji teorisinde bulunan bazı kavramlarda metrik uzay teorisi ile birlikte daha somut kavramlarla açıklanma fırsatı bulabilmiştir (Bilgili, 2009).

Maurice Fréchet 1926 senesinde bir çalışmasında lineer metrik uzaylar üzerine tanımlamalar yapmıştır (Fréchet, 1926). Bu tanımlamaların ardından metrik uzaylar üzerine birçok detaylı çalışmalar yapılmıştır. Metrik uzayda en kullanışlı ve en faydalı olanları, vektör uzayı ve bununla üzerinde bir norm yardımıyla tanımlanan bir metrik ile oluşturulanlarıdır. Bu yol yardımıyla elde edilen metrik uzaylara normlu uzay adı verilmiştir. Normlu uzaylar Polonyalı matematikçi Stefan Banach tarafından tanıtılmıştır. Aynı dönemlerde birçok matematikçi benzer doğrultuda çalışmalar yapmıştır.

Modern matematikte önem arz eden “Sabit Nokta Teorisi” çalışmaları 19. yy başlarına dayanmaktadır. Sabit nokta teorisinin matematiğin birçok alt dalında uygulama alanı olduğu gibi başka bilim dallarında da uygulama alanı bulmuştur. Bunlara matematiğin alt dalları için genel topoloji, fonksiyonel analiz, matematiksel analiz, diferansiyel denklemler ve matematik dışındaki bilim dalları için ise fizik, kimya, biyoloji, mühendislik, istatistik örnek verilebilir. Bunun dışında tıp, haberleşme, ekonomi başı çekmekle birlikte birçok alanda da fayda sağlamıştır. Geniş uygulama alanı olup birçok problemin çözümünde kullanıldığından geçmişten günümüze büyük bir önem taşımaktadır.

Sabit nokta teorisi üzerine yapılan çalışmalar iki yönde ilerlemektedir. İlk olarak normlu lineer uzayların kompakt konveks alt kümeleri üzerinde tanımlı sürekli dönüşümler için sabit nokta teorisi; ikinci olarak da tam metrik uzaylar üzerinde tanımlı daralma ve daralma tipi dönüşümler için sabit nokta teorisidir. Normlu lineer uzaylarda sabit nokta çalışmalarını 1910 da Brouwer başlatmıştır. Ardından 1930 da Brouwer’in teoremini Schauder, $\mathbb{R}^+$ yerine herhangi bir normlu lineer uzay almış ve teoremi genişletmiştir (Rezapour ve Hambarani, 2008). Tam metrik uzaylar üzerinde ise sabit nokta çalışmaları Banach tarafından başlatılmıştır (Banach, 1922). Bu nedenle en ünlü ve en bilinen sabit nokta teoremlerinden biri Banach sabit nokta teoremi olmuştur. Bazı

matematikçiler Banach teoremini “daralma dönüşüm teoremi” adıyla da kullanırlar. Bu teorem 1920 li yıllarda Banach tarafından “ (M, d) bir tam metrik uzay ve $A: M \rightarrow M$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in M$ için,

$$d(Ax, Ay) \leq ad(x, y), \quad 0 \leq a < 1$$

ise A, M de bir tek sabit noktaya sahiptir” ifadesini tanımlamıştır. Banach doktora tezinin bir kısmında teoreminin ispatını yapmıştır. Bundan sonraki süreçte bu teorem matematiğin birçok alt dallarında bulunan varlık problemlerinin çözümünde kolaylık sağlayarak çok kullanılan bir teorem haline gelmiştir. Ayrıca S. Banach, J. Schauder ve Browder Sabit nokta teoremini geliştirmek için çalışmışlardır. Banach teoreminde dönüşümün sabit noktasının varlığını garanti etmekle birlikte üzerinde çalışılan bu iki teoremden farklı olarak bu noktanın tekliğini ve nasıl bulunabileceğini de göstermiştir. İlerleyen zamanda F. E. Browder, W. A. Kirk, L. B. Ćirić ve daha birçok araştırmacı bu sonuçları genelleştirerek yeni sonuçlar elde etmişlerdir (Browder, 1968; Kirk, 1971; Ćirić, 1974).

Tüm bu çalışmalara bakıldığında sabit nokta teorisinin esas amacının $A: M \rightarrow M$ dönüşümünün sabit noktalarının boştan farklı olabilmesi için M kümesinin ya da A dönüşümünün üzerine eklenecek uygun şartları belirlemek olduğu görülmektedir. Bir dönüşümün sabit nokta varlığını gösterdikten sonra bu noktayı bulmak için iterasyon denilen algoritmalar tanımlanmıştır. İterasyon yöntemi ilk kez İtalyan matematikçi Picard (1890) tarafından tanımlanmıştır. Picard iterasyonu, adi diferansiyel denklemler için başlangıç değer problemlerinin çözümünün varlık ve tekliğinin ispatı için sistematik olarak geliştirilmiştir. Orijinal Mann iterasyonu 1953 yılında Mann (1953) tarafından bir matris formülasyonunda tanıtılmıştır. Krasnosel’skii iterasyonu, özellikle $\alpha = \frac{1}{2}$ durumu için ilk olarak 1955 yılında Krasnosel’skii (1955) tarafından tanıtılmış ve 1957 yılında bu iterasyonunun genel formu Schaefer (1957) tarafından verilmiştir. Ishikawa iterasyonu 1974 yılında yayınlanan Ishikawa (1974) makalesinde tanıtılmıştır. Günümüze kadar ise birçok iterasyon yöntemi ortaya konmuştur ve belirli dönüşüm sınıfları için bu iterasyon yöntemlerinin kuvvetli yakınsaklığı, yakınsaklıklarının denkliği, veri bağılıkları, özellikleri detaylı olarak incelenmiştir. Ayrıca, bu iterasyon yöntemlerinin hangisinin daha hızlı, daha kararlı olduğu ve daha genele ulaştığı hakkında kendi aralarında teoremler ispatlanmış ve tartışmalar yaparak yeni sonuçlar elde edilmiştir. (Abbas ve Nazır, 2014; Khan, 2011; Gürsoy, 2016; Atalan, 2017; Cona ve Şengül, 2023).

Literatürde sık kullanılan bazı iterasyon yöntemleri: Picard iterasyon yöntemi, Mann iterasyon yöntemi, Krasnosel'skii iterasyon yöntemi, Genelleştirilmiş Krasnosel'skii iterasyon yöntemi, Kirk iterasyon yöntemi, Ishikawa iterasyon yöntemi, Noor iterasyon yöntemi, Multistep iterasyon yöntemi, S iterasyon yöntemi, İki Adımlı Mann iterasyon yöntemi, SP-iterasyon yöntemi, CR iterasyon yöntemi, S* iterasyon yöntemi, Abbas ve Nazir iterasyon yöntemi, Thakur vd. iterasyon yöntemi, Üç adımlı iterasyon yöntemi, M-iterasyon yöntemi, Picard'ın üç adımlı iterasyon yöntemi (Picard, 1890; Mann, 1953; Krasnosel'skii, 1955; Schaefer, 1957; Kirk, 1971; Ishikawa, 1974; Noor, 2000; Rhoades ve Şoltuz, 2004; Agarwal vd., 2007; Thianwan, 2009; Phuengrattana ve Suantai, 2011; Chugh vd., 2012; Karahan ve Özdemir, 2013; Abbas ve Nazir, 2014; Thakur vd., 2014; Karakaya vd., 2017; Ullah ve Arshad, 2018; Ali vd., 2021).

Ayrıca bu iterasyon yöntemlerine dayanarak tanımlanan birçok hibrit iterasyon yöntemleri de tanımlanmıştır. Bunlara Kirk-İshikawa, Kirk-Mann iterasyonu, Kirk-Noor iterasyonu, Kirk-SP iterasyonu, Krik-CR iterasyonu, Picard-Mann iterasyonu, Multistep-SP iterasyonu, Kirk-Multistep iterasyonu, Kirk-S iterasyonu, Picard-S iterasyonu yöntemi örnek verilebilir (Olatinwo, 2009; Chugh ve Kumar, 2012; Khan, 2013; Gürsoy vd., 2013; Gürsoy vd., 2014; Gürsoy ve Karakaya, 2014a; Gürsoy ve Karakaya, 2014b).

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tez çalışması boyunca geniş bir literatür taraması yapılarak tezde kullanılacak olan fonksiyonel analiz, sabit nokta teorisi, iterasyon teknikleri ve integral denklemler ile ilgili kavramlar verilmiştir.

2.1. Fonksiyonel Analiz ile İlgili Bazı Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1: M boştan farklı bir küme olsun. $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$[M1] \forall x, y \in M (x \neq y) \text{ için } d(x, y) \geq 0$$

$$[M2] \forall x, y \in M \text{ için } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$[M3] \forall x, y \in M \text{ için } d(x, y) = d(y, x) \text{ (simetri özelliği)}$$

$$[M4] \forall x, y, z \in M \text{ için } d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \text{ (üçgen eşitsizliği)}$$

şartlarını sağladığı ve sonlu değerler aldığı takdirde d ye M kümesi üzerinde bir metrik ve (M, d) ikilisine de *metrik uzay* denir (Kreyszig, 1978).

Örnek 2.1.1:

$$d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, d(x, y) = |x - y|$$

ile tanımlanan d bir metriktir. Bu metriğe $\mathbb{R}$ nin alışılmış metriği adı verilir.

Çözüm: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ için,

$$[M1] x \neq y \text{ için } d(x, y) = |x - y| \geq 0$$

$$[M2] d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$[M3] d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$$

$$[M4] d(x, z) = |x - z| = |x - y + y - z|$$

$$\leq |x - y| + |y - z|$$

$$= d(x, y) + d(y, z)$$

olup

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Örnek 2.1.2: M en az iki elemanlı bir küme ve $x, y \in M$ olsun. Bu takdirde,

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & ; x = y \\ 1 & ; x \neq y \end{cases}$$

tanımlarsak d , M üzerinde bir metriktir. Bu metriğe ayırık (disciret) metrik adı verilir.

Tanım 2.1.2: Doğal sayılar kümesi üzerinde tanımlı her fonksiyona *dizi* denir ve $\{x_n\}$ ile gösterilir (Musayev, 2000).

Tanım 2.1.3: (M, d) metrik uzay ve $\{x_n\}$, M de herhangi bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için en az bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall n > n_0(\varepsilon)$ olduğunda $d(x_n, x) < \varepsilon$ ise $\{x_n\}$ dizisi M de x e *yakınsaktır* denir (Kreyszig, 1989).

Tanım 2.1.4: (M, d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$, M de bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için en az bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $m, n \geq n_0(\varepsilon)$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ ise $\{x_n\}$ e M de bir *Cauchy dizisidir* denir (Kreyszig, 1989).

Her yakınsak dizi Cauchy dizisidir. Yalnız bu ifadenin tersi her zaman doğru değildir (Şuhubi, 2001).

Tanım 2.1.5: (M, d) bir metrik uzay olsun. (M, d) de ki her $\{x_n\}$ Cauchy dizisi uzayın bir elemanına yakınsak ise (yani $\{x_n\} \rightarrow x \in M$) (M, d) metrik uzayı *tamdır* denilir (Maddox, 1988).

Örnek 2.1.3: $\mathbb{R}$ mutlak değer metriğine göre tamdır.

Örnek 2.1.4: $\mathbb{C}$ mutlak değer metriğine göre tamdır.

Tanım 2.1.6: M boş olmayan bir küme ve $\mathbb{F}$ kompleks ya da reel sayıların bir cismi olsun.

$$+ : M \times M \rightarrow M$$

$$\cdot : \mathbb{F} \times M \rightarrow M$$

fonksiyonları $\forall x, y \in M, \forall \lambda, \gamma \in \mathbb{F}$ için,

$$[L1] x + y = y + x ,$$

$$[L2] (x + y) + z = x + (y + z) ,$$

$$[L3] x + \theta = x \text{ olacak şekilde bir } \theta \in M \text{ vardır.}$$

$$[L4] x + (-x) = \theta \text{ olacak şekilde bir } (-x) \in M \text{ vardır.}$$

$$[L5] 1 \cdot x = x ,$$

$$[L6] \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y ,$$

$$[L7] (\lambda + \gamma)x = \lambda x + \gamma x,$$

$$[L8] \lambda(\gamma x) = (\gamma \lambda)x,$$

özelliklerini sağladığı takdirde M kümesine $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir *lineer uzay* (*vektör uzayı*) denir (Kreyszig, 1978).

$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ alınırsa M ye bir *reel lineer uzay* ve $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ alınırsa M ye bir *kompleks lineer uzay* denir.

Örnek 2.1.5: $C[a, b] = \{f \mid f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ sürekli} \}$ reel değerli ve sürekli fonksiyonların uzayı bir lineer uzayıdır. Gerçekten;

$\forall f, g \in C[a, b]$ için $x \in [a, b]$ olmak üzere

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \in C[a, b]$$

$\forall f \in C[a, b]$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için $x \in [a, b]$ olmak üzere

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \in C[a, b]$$

görüldüğü ki $C[a, b]$ kümesi üzerinde skaler ile çarpma ve toplama işlemleri anlamlıdır. Ayrıca lineer uzay aksiyomlarını sağladığını görmek oldukça kolaydır. Sonuç olarak reel değerli ve sürekli fonksiyonlar bir lineer uzayıdır.

Tanım 2.1.7: M bir $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir lineer uzayı olsun.

$$\|\cdot\|: M \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow \|x\|$$

fonksiyonu $\forall x, y \in M$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{F}$ için

$$[N1] \|x\| \geq 0$$

$$[N2] \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$[N3] \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

$$[N4] \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{üçgen eşitsizliği})$$

özelliklerini sağlıyorsa M üzerinde *norm* adını alır ve bu durumda $(M, \|\cdot\|)$ ikilisine *normlu lineer uzay* adı verilir (Kreyszig, 1978).

Örnek 2.1.6: $\mathbb{R}$, reel sayılar kümesi üzerinde $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$\|x\| = |x|$$

bir normdur.

Çözüm: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için

$$[N1] \|x\| = |x| \geq 0$$

$$[N2] \|x\| = 0 \Leftrightarrow |x| = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

$$[N3] \|\lambda x\| = |\lambda x| = |\lambda||x| = |\lambda|\|x\|$$

$$[N4] \|x + y\| = |x + y|$$

$$\leq |x| + |y|$$

$$= \|x\| + \|y\|$$

Örnek 2.1.7: $C(M) = \{f \mid f : M \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ sürekli fonksiyon}\}$ lineer uzayı üzerinde tanımlı olan

$$\|\cdot\|_{\infty} : C(M) \rightarrow \mathbb{R}, \|f\|_{\infty} = \sup\{|f(x)| : x \in M\}$$

fonksiyonu bir normdur. Bu norma $C(M)$ üzerindeki supremum normu denir.

Örnek 2.1.8 : X ve Y , $\mathbb{F}$ üzerinde lineer uzaylar olsun ve $\|\cdot\|_1$, X üzerinde bir norm ve $\|\cdot\|_2$, Y üzerinde bir norm olsun. X ve Y nin kartezyen çarpımı

$$X \times Y = \{z = (x, y) : x \in X, y \in Y\},$$

olsun. Bu taktirde

$$\|(x, y)\| = \max(\|x\|_1, \|y\|_2)$$

fonksiyonu $X \times Y$ üzerinde bir norm tanımlar.

Çözüm: Norm özelliklerini kontrol edelim. $\lambda \in \mathbb{F}$, $x_1, x_2 \in X$ ve $y_1, y_2 \in Y, z = (x_1, y_1), t = (x_2, y_2)$ olsun.

$$[N1] \|x_1\|_1 \geq 0, \|y_1\|_2 \geq 0 \text{ olduğundan}$$

$$\|z\| = \max\{\|x_1\|_1, \|y_1\|_2\} \geq 0$$

dır.

$$[N2] \quad \|z\| = 0 \text{ olsun.}$$

$$\|z\| = \max\{\|x_1\|_1, \|y_1\|_2\} = 0$$

ve buradan

$$\|x_1\|_1 = 0, \|y_1\|_2 = 0$$

$$x_1 = 0, y_1 = 0$$

bulunur. Böylece $z = 0$ dır.

Şimdi de $z = 0$ olsun. $x_1 = 0, y_1 = 0$ dir. Şu halde $\|x_1\|_1 = 0, \|y_1\|_2 = 0$ dir ve buradan

$$\|z\| = \max\{\|x_1\|_1, \|y_1\|_2\} = \max\{0,0\} = 0$$

bulunur.

$$[N3] \quad \|\lambda z\| = \max\{\|\lambda x_1\|_1, \|\lambda y_1\|_2\}$$

$$= |\lambda| \max\{\|x_1\|_1, \|y_1\|_2\}$$

$$= |\lambda| \|z\|$$

$$[N4] \quad \|z + t\| = \max\{\|x_1 + x_2\|_1, \|y_1 + y_2\|_2\}$$

$$\leq \max\{\|x_1\|_1 + \|x_2\|_1, \|y_1\|_2 + \|y_2\|_2\}$$

olduğu hemen görülür. Şimdi, $\forall a, b, c, d \geq 0$ için,

$$\max\{a + b, c + d\} \leq \max\{a, c\} + \max\{b, d\}$$

olduğunu gösterelim. Burada

$$\begin{aligned}
a \geq c, b \geq d \text{ ise } \max\{a + b, c + d\} &= a + b; \\
a < c, b \geq d \text{ ise } \max\{a + b, c + d\} &< c + b; \\
a \geq c, b < d \text{ ise } \max\{a + b, c + d\} &< a + d; \\
a < c, b < d \text{ ise } \max\{a + b, c + d\} &= c + d
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Sonuç olarak,

$$\|z + t\| \leq \|z\| + \|t\|$$

elde edilir.

Tanım 2.1.8: M normlu uzay olsun. M deki tüm sınırlı lineer fonksiyonellerin uzayına M nin duali denir ve M^* ile gösterilir (Agarwal vd., 2009).

Tanım 2.1.9: M normlu uzay ve $\{x_n\}$, M de herhangi bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için en az bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall n > n_0(\varepsilon)$ olduğunda $\|x_n - x\| < \varepsilon$ ise $\{x_n\}$ dizisi M de x e kuvvetli yakınsaktır denir. Yani $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$ dir ve $x_n \xrightarrow{k} x$ şeklinde gösterilir (Kreyszig, 1989).

M normlu uzay ve $\{x_n\}$, M de bir dizi ve M^*, M in duali olsun. $\forall f \in M^*$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$ olacak şekilde $x \in M$ varsa $\{x_n\}$ dizisi x e zayıf yakınsaktır denir ve $x_n \xrightarrow{z} x$ şeklinde gösterilir (Maddox, 1970).

Tanım 2.1.10: $(M, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi $\{x_n\}$ olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_0(\varepsilon)$ olduğunda $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa, (x_n) dizisine bir *Cauchy dizisi* denir (Bayraktar, 2006).

Tanım 2.1.11: $(M, \|\cdot\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi M deki bir noktaya yakınsak ise M ye *tam uzay* denir (Maddox, 1970).

Tanım 2.1.12: M normlu bir lineer uzay olsun. M , $d(x, y) = \|x - y\|$ norm metriğine göre tam ise M ye *Banach uzay* denir (Kreyszig, 1978).

Örnek 2.1.9: $\mathbb{R}$ bir Banach uzaydır.

Örnek 2.1.10: $\mathbb{C}$ bir Banach uzaydır.

Örnek 2.1.11: $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$ kümesi

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

normuna göre bir Banach uzaydır. Yani $\mathbb{R}^n$ in n -boyutlu Öklid uzayı bir Banach uzaydır.

Örnek 2.1.12: $\mathbb{C}^n = \{z = (z_1, z_2, \dots, z_n) : z_i \in \mathbb{C}, 1 \leq i \leq n\}$ kümesi

$$\|z\| = \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

normuna göre Banach uzaydır. Yani $\mathbb{C}^n$ in n -boyutlu Üniter uzayı bir Banach uzaydır.

Örnek 2.1.13: $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) olmak üzere, $C([a, b], \mathbb{F})$ lineer uzayı

$$\|f\|_{\infty} = \max\{|f(t)| : t \in [a, b]\}$$

normuna göre Banach uzaydır.

Çözüm: $C([a, b], \mathbb{F})$ in Banach uzay olduğunu göstermek için $\|\cdot\|_{\infty}$ normuna göre tam olduğunun gösterilmesi yeterlidir. Bunun için $C([a, b], \mathbb{F})$ uzayında bir $\{f_n\}$ Cauchy dizisi alınsın. $\{f_n\}$ bir Cauchy dizisi ise $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ni \forall n, m > n_0(\varepsilon)$ için $\|f_n - f_m\|_{\infty} < \varepsilon$ olur. $\forall n, m > n_0(\varepsilon)$ için

$$\max\{|f_n(t) - f_m(t)| : t \in [a, b]\} < \varepsilon$$

anlamına gelir. Bu halde $\forall t \in [a, b]$ için $(f_n(t))$ yakınsaktır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t), \quad t \in [a, b]$$

kabul edilsin. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\infty} = 0$$

ve $f \in C([a, b], \mathbb{F})$ olduğu gösterilmelidir.

$$\max\{|f_n(t) - f_m(t)| : t \in [a, b]\} < \varepsilon$$

eşitsizliğinde $n > n_0(\varepsilon)$ için $m \rightarrow \infty$ iken limite geçilirse,

$$\max\{|f_n(t) - f(t)| : t \in [a, b]\} < \varepsilon$$

bulunur. Buradan $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ni \forall n > n_0(\varepsilon)$ ve $\forall t \in [a, b]$ için

$$|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$$

elde edilir. Böylece $\{f_n(t)\}$ dizisinin $f(t)$ ye düzgün yakınsak olduğu görülür. Öte yandan, $f_n(t)$, $[a, b]$ üzerinde sürekli ve $f(t)$ ye düzgün yakınsak ise $f(t)$ limit fonksiyonu da $[a, b]$ üzerinde süreklidir. Dolayısıyla, $C([a, b], \mathbb{F})$ uzayının $\|\cdot\|_\infty$ normuna göre tam olduğu görülür.

Bulgular kısmında kullanılacak olan literatürde yer alan bazı tanım ve lemmalara yer verilecektir.

Tanım 2.1.13: $A, S : M \rightarrow M$ iki operatör olsun. $\forall x \in M$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$\|Ax - Sx\| \leq \varepsilon$$

ise A ya S nin bir *yaklaşım operatörü* denir (Şoltuz ve Grosan, 2008).

Lemma 2.1.1: $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ ve $\{b_n\}_{n=0}^\infty$ negatif olmayan iki dizi olmak üzere,

$$a_{n+1} \leq (1 - \mu_n)a_n + b_n$$

eşitsizliği sağlansın. Eğer $n \geq n_0$ için

$$\mu_n \in (0,1) , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n = \infty$$

ve $n \rightarrow \infty$ için $\frac{b_n}{\mu_n} \rightarrow 0$ sağlanırsa $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ olur (Weng, 1991).

Lemma 2.1.2: $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ negatif olmayan bir dizi ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$\mu_n \in (0,1) , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n = \infty , \quad \gamma_n \geq 0$$

ve $\forall n \geq n_0$ için

$$a_{n+1} \leq (1 - \mu_n)a_n + \mu_n \gamma_n$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir n_0 sayısı mevcut olsun. Bu durumda

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \gamma_n$$

eşitsizliği sağlanır (Şoltuz ve Grosan, 2008).

2.2. Sabit Nokta Teorisi ve İterasyon Yöntemleri ile İlgili Bazı Temel Kavramlar

Tanım 2.2.1: $M \neq \emptyset$ bir küme ve $A: M \rightarrow M$ bir dönüşüm olsun.

$$Ax = x \tag{1}$$

eşitliğini sağlayan $x \in M$ elemanına A nın bir *sabit noktası* denir (Berinde, 2007). A nın tüm sabit noktalarının kümesi F_A , $F(A)$ ya da $Fix(A)$ ile gösterilebilir. Biz bu tez çalışması boyunca F_A gösterimini kullanacağız.

Aşağıdaki örneklerde görüleceği gibi bir $A: M \rightarrow M$ dönüşümünün hiçbir sabit noktası olmayabilir, yalnız bir sabit noktası olabilir veya birden fazla sabit noktası olabilir.

Örnek 2.2.1: $M \neq \emptyset$ olmak üzere $I: M \rightarrow M$, $I(x) = x$ şeklinde tanımlı özdeşlik dönüşümü için M nin her noktası sabit noktadır. Yani $F_I = M$ dir.

Örnek 2.2.2: $A: (0,1] \rightarrow (0,1]$, $Ax = \frac{x}{5}$ dönüşümünün sabit noktası yoktur. Böyle bir dönüşüm için tek bir sabit nokta $x = 0$ olabilirdi. Fakat $0 \notin (0,1]$ dir. Yani $F_A = \emptyset$ dir.

Örnek 2.2.3: $M = [0,2]$ olmak üzere $A: M \rightarrow M$, $Ax = 2 - x$ şeklinde tanımlanan dönüşümün sabit noktası $x = 1$ dir. Yani $F_A = \{1\}$ dir.

Tanım 2.2.2: $M \neq \emptyset$ bir küme olsun. $A: M \rightarrow M$ bir dönüşüm ise,

$$AoA(x) = A(A(x))$$

ile verilen A^2 dönüşümü de $M \rightarrow M$ bir dönüşümdür ve buna A nın *ikinci iterasyonu* denir (Soykan, 2008).

Genel olarak m adet A dan elde edilen

$$\underbrace{A \circ A \circ \dots \circ A}_{m \text{ tane } A}(x) = A(A(A(x) \dots))$$

ifadesine A nin m . iterasyonu denir ve A^m ile gösterilir

$A: M \rightarrow M$ bir dönüşüm olsun. Şu halde, keyfi bir $m \in \mathbb{N}$ için $F_A \subset F_{A^m}$ dir. Yani bir dönüşümün sabit noktaları aynı zamanda bu dönüşümün m . iterasyonunun da sabit noktasıdır. Gerçekten herhangi bir $x_0 \in F_A$ için $Ax_0 = x_0$ olup,

$$\begin{aligned} A^m(x_0) &= A^{m-1}(A(x_0)) \\ &= A^{m-1}(x_0) \\ &= A^{m-2}(A(x_0)) \\ &= A^{m-2}(x_0) \\ &\vdots \\ &= A^{m-(m-1)}(A(x_0)) \\ &= A(x_0) \end{aligned}$$

dir. Böylece $x_0 \in F_{A^m}$ elde edilir. Ancak bunun tersi her zaman doğru değildir. Örneğin, $A: \{1,2,3\} \rightarrow \{1,2,3\}$ dönüşümü, $A(1) = 3$, $A(2) = 2$ ve $A(3) = 1$ olarak tanımlansın. Bu durumda, $F_A = \{2\}$ dir. Öte yandan $F_{A^2} = \{1,2,3\}$ dür.

Tanım 2.2.3: (M, d) bir metrik uzay ve $A: M \rightarrow M$ bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in M$ için

$$d(Ax, Ay) \leq \alpha d(x, y)$$

olacak şekilde bir $\alpha \geq 0$ sayısı mevcut ise A ya bir *Lipschitz dönüşüm* α yada *Lipschitz sabiti* adı verilir (Berinde, 2007).

Ayrıca, $\forall \varepsilon > 0$ için

$$d(x, y) < \delta = \frac{\varepsilon}{\alpha}$$

ise

$$d(Ax, Ay) \leq \alpha d(x, y) < \varepsilon$$

olur. Yani, her A Lipschitz dönüşümü düzgün süreklidir.

Örnek 2.2.4: $M = \mathbb{R}$ bir küme ve $A : M \rightarrow M$, $Ax = 6x$ bir dönüşüm olsun.

Bu durumda, $d(x, y) = |x - y|$ alışılmış metriğine göre

$$d(Ax, Ay) = |6x - 6y| = 6|x - y| = 6d(x, y)$$

bulunur. Bu halde, $\alpha \geq 6$ için A dönüşümü Lipschitz koşulunu sağlar.

Tanım 2.2.4: (M, d) bir metrik uzay ve $A: M \rightarrow M$ bir Lipschitz dönüşüm olsun.

Eğer $\forall x, y \in M$ için

$$d(Ax, Ay) \leq \alpha d(x, y)$$

olacak şekilde $\alpha \in [0, 1)$ reel sayısı varsa A ya bir *daralma (contraction) dönüşümü* ve α yada *daralma oranı* denir (Berinde, 2007).

Örnek 2.2.5: $M = (0, 1]$ ve $A: M \rightarrow M$, $Ax = \frac{2x}{9}$ dönüşümü verilsin. Bu durumda

$$d(Ax, Ay) = \left| \frac{2x}{9} - \frac{2y}{9} \right| = \frac{2}{9} |x - y| = \frac{2}{9} d(x, y)$$

olduğundan A bir daralma dönüşümüdür. Fakat A nın M de bir sabit noktası yoktur. Çünkü sabit noktanın tanımından $\frac{2x}{9} = x \Rightarrow 2 \cdot x = 9 \cdot x \Rightarrow x = 0$ olur. Burada $x = 0 \notin (0, 1] = M$ olduğundan A nın M de bir sabit noktası yoktur.

Uyarı 2.2.1: $A: M \rightarrow M$ bir dönüşüm olsun. Lipschitz koşulunu sağlayan her dönüşüm düzgün sürekli olduğundan daralma dönüşümlerde düzgün süreklidir. Dolayısıyla A sürekli değilse, bir daralma dönüşümü olamaz. Buna karşın A daralma dönüşümü olmasa bile A^m bir daralma dönüşümü olabilir.

Örnek 2.2.6: $A : [0, 2] \rightarrow [0, 2]$ olmak üzere

$$Ax = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1] \\ 1, & x \in (1, 2] \end{cases}$$

olarak tanımlansın. A , $x = 1$ de süreksizdir. Dolayısıyla A sürekli olmadığından daralma dönüşümü olamaz. Fakat, $A^2: \{0, 1\} \rightarrow \{0\}$, $A^2(x) = 0$ olup bir daralma dönüşümüdür. Ayrıca $x = 0$, A^2 nin tek sabit noktasıdır.

Tanım 2.2.5: (M, d) bir metrik uzay ve $A: M \rightarrow M$ bir Lipschitz olsun. Eğer $\forall x, y \in M$ için

$$d(Ax, Ay) \leq d(x, y)$$

ise A ya bir *genişlemeyen (non-expansive) dönüşüm* adı verilir (Berinde, 2007).

Örnek 2.2.7: (M, d) bir metrik uzay olsun. $A: M \rightarrow M$, $Ax = x + \alpha$, $(\alpha \neq 0)$ dönüşümü şeklinde tanımlansın. A genişlemeyen bir dönüşümdür.

Tanım 2.2.6: M normlu bir uzay ve C , M nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. $f: C \rightarrow C$ dönüşümü için $x_0 \in F(f) \neq \emptyset$ ve her $x \in C$ için

$$\|fx - x_0\| \leq \|x - x_0\|$$

eşitsizliğini sağlıyor ise, f ye *quasi(yarı) genişlemeyen dönüşüm* denir (Petryshyn ve Williamson, 1973).

Uyarı 2.2.2: Her genişlemeyen dönüşüm bir yarı genişlemeyen dönüşümdür. Fakat tersi her zaman doğru değildir.

Örnek 2.2.8:

$$A: [-1,1] \rightarrow [-1,1], \quad Ax = \begin{cases} \frac{2x}{3} \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. A sürekli ve yarı genişlemeyen dönüşümdür. Ancak A genişlemeyen dönüşüm değildir. Açık olarak A süreklidir ve $0, A$ nın tek bir sabit noktasıdır. Eğer $x \neq 0$ ve $Ax = x$ ise $x \in [-1,0) \cup (0,1]$ için

$$x = \frac{2x}{3} \sin \frac{1}{x}$$

olur. Buradan,

$$\sin \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$$

olması mümkün değildir. Çünkü,

$$|Ax - A0| = |Ax - 0| = \frac{2|x|}{3} \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq \frac{2|x|}{3}$$

dir. Bu yüzden tüm $x \in [-1,1]$ için

$$|Ax - 0| < |x - 0|$$

olur. Böylece A yarı genişlemeyen dönüşümdür. Bunu doğrulamak için $x = \frac{2}{\pi}$, $y = \frac{2}{3\pi}$ alınsın. Bu durumda,

$$\begin{aligned} |Ax - Ay| &= \frac{2}{3} \left| \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3\pi} \sin \frac{3\pi}{2} \right| \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{2}{\pi} + \frac{2}{3\pi} \right) \\ &= \frac{4}{3\pi} \left(1 + \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{16}{9\pi} \\ |x - y| &= \left| \frac{2}{\pi} - \frac{2}{3\pi} \right| = \frac{4}{3\pi} \end{aligned}$$

elde edilir ve

$$\frac{16}{9\pi} > \frac{4}{3\pi}$$

olur. Buradan A nın genişlemeyen dönüşüm olmadığı görülür. Böylece yarı genişlemeyen dönüşümlerin genişlemeyen dönüşümlerden daha genel olduğu sonucuna ulaşılır.

Tanım 2.2.7: (M, d) bir metrik uzay ve $A: M \rightarrow M$ bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in M$ ve $x \neq y$ için

$$d(Ax, Ay) < d(x, y)$$

ise A ya bir *kesin (strict) daralma dönüşümü* denir (Berinde, 2007).

Örnek 2.2.9: $M = [1, +\infty)$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $A: M \rightarrow M$, $Ax = x + \frac{1}{x}$ olsun. A dönüşümü kesin daralma dönüşümdür. Çünkü,

$$A'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} < 1 \text{ ve } 0 < A'(x) < 1$$

dir. Ayrıca Ortalama Değer Teoremi'nden

$$A'(c) = \frac{Ax - Ay}{x - y}$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla,

$$A'(c) < 1$$

olur. Yani

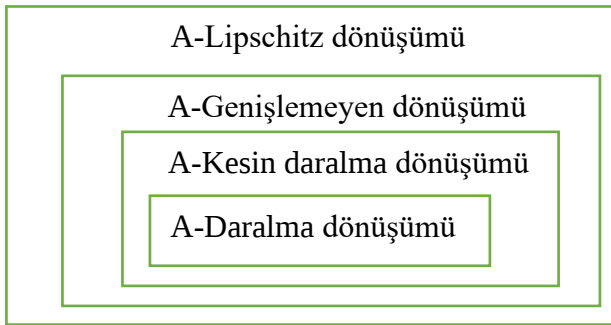
$$A'(c) = \frac{Ax - Ay}{x - y} < 1$$

$$|Ax - Ay| < |x - y|$$

$$d(Ax, Ay) < d(x, y)$$

dir.

Uyarı 2.2.3: Yukarıda verilen dönüşümler arasında, daralma dönüşümü $\Rightarrow$ kesin daralma dönüşümü $\Rightarrow$ genişlemeyen dönüşüm $\Rightarrow$ Lipschitz dönüşümü, şeklinde bir bağıntı vardır.



Şekil 1. Dönüşümler arasındaki bağlantı

Tanım 2.2.8: (M, d) bir metrik uzay ve $A: M \rightarrow M$ bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in M$ için

$$d(A(x), A(y)) \leq b[d(x, A(x)) + d(y, A(y))]$$

olacak şekilde $b \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ sayısı var ise A dönüşümüne *Kannan dönüşümü* denir (Kannan, 1968).

Tanım 2.2.9: (M, d) bir metrik uzay ve $A: M \rightarrow M$ bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in M$ için

$$d(A(x), A(y)) \leq c[d(x, A(y)) + d(y, A(x))]$$

olacak şekilde $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ sayısı varsa A dönüşümüne *Chatterjea dönüşümü* denir (Chatterjea, 1972).

Tanım 2.2.10: (M, d) tam metrik uzay ve $A: M \rightarrow M$ bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in M$ için

- i. $d(A(x), A(y)) \leq ad(x, y)$ (Daralma dönüşümü)
- ii. $d(A(x), A(y)) \leq b[d(x, A(x)) + d(y, A(y))]$ (Kannan Dönüşümü)
- iii. $d(A(x), A(y)) \leq c[d(x, A(y)) + d(y, A(x))]$ (Chatterjea Dönüşümü)

şartlarından en az birisi doğru olsun. Eğer $a \in [0, 1)$, $0 \leq b, c < \frac{1}{2}$ koşullarını sağlayan a, b ve c reel sayıları mevcutsa, bu durumda A ya bir *Zamfirescu dönüşümü* denir (Zamfirescu, 1972).

Tanım 2.2.11: (M, d) bir tam metrik uzay ve $A: M \rightarrow M$ bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in M$ için

$$d(Ax, Ay) \leq \alpha \max\{d(x, y), d(x, Ax), d(x, Ay), d(y, Ax), d(y, Ay)\}$$

olacak şekilde bir $\alpha \in (0, 1)$ sayısı mevcut ise A ya bir *yarı (quasi) daralma dönüşümü* denir (Ćirić, 1974).

Tanım 2.2.12: (M, d) bir tam metrik uzay, $A: M \rightarrow M$ bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in M$ için

$$d(Ax, Ay) \leq \alpha d(x, y) + Ld(y, Ax) \quad (2)$$

veya

$$d(Ax, Ay) \leq \alpha d(x, y) + Ld(x, Ay) \quad (3)$$

olacak şekilde $\alpha \in (0,1)$ ve $L \geq 0$ reel sayıları mevcutsa A ya bir *zayıf (weak) daralma dönüşümü* veya *hemen hemen (almost) daralma dönüşümü* denir (Berinde, 2004).

A dönüşümünün zayıf daralma olup olmadığını doğrulamak için (2) ve (3) ile verilen koşullar kontrol edilmelidir.

Tanım 2.2.13: (M, d) bir tam metrik uzay ve $A: M \rightarrow M$ bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in M$ için

$$d(Ax, Ay) \leq \alpha d(x, y) + \varphi(d(x, Ax))$$

olacak şekilde bir $\alpha \in [0,1)$ sabiti ve $\varphi(0) = 0$ şartını sağlayan monoton artan bir $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu varsa A ya bir *contractive-like dönüşüm* denir (Imoru ve Olatinwo, 2003).

Tanım 2.2.14: $(M, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı ve C de bu uzayın boş olmayan bir alt kümesi olsun. $f: C \rightarrow C$ dönüşümü $\forall x, y \in C$ için

$$\frac{1}{2} \|x - f(x)\| \leq \|x - y\| \text{ iken } \|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$$

şartını sağlıyorsa f dönüşümüne *Suzuki tipi genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşüm* denir (Suzuki, 2008).

Tanım 2.2.15: (M, d) bir metrik uzay, $A : M \rightarrow M$ bir dönüşüm olsun. Sabit nokta iterasyon yöntemi f bir fonksiyon olmak üzere $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $x_0 \in M$ için en temel formda

$$x_{n+1} = f(A, x_n) \tag{4}$$

bağıntısı ile tanımlanır (Berinde, 2007).

İterasyon yöntemleri bir dönüşümün sabit nokta veya sabit noktalarını bulmak için kullanılan en önemli tekniklerden biridir. Bunun için çeşitli iterasyon yöntemleri türetilmiştir. Fakat bir iterasyon yöntemi ortaya konarken iki önemli hususa dikkat edilmelidir. Yeni iterasyon yönteminden önceki yöntemlerden daha hızlı ve daha sade olması beklenir. Aşağıda literatürde sıkça kullanılan bazı iterasyon yöntemleri verilecektir.

Tanım 2.2.16: (4) ifadesinde

$$x_{n+1} = f(A, x_n) = Ax_n = A^n(x_0)$$

alınarak elde edilen iterasyona, *Picard iterasyon yöntemi* denir (Picard, 1890).

Adi diferansiyel denklemlerin başlangıç değer problemlerinin çözümlerinin varlık ve teklik ispatıyla geliştirilen bu iterasyon yöntemi, tam metrik uzayda tanımlı daralma dönüşümlerinin sabit noktalarına yaklaşımında kullanılır.

Tanım 2.2.17: $\alpha_n \subset [0,1]$ bir reel sayı dizisi olmak üzere, (4) ifadesinde

$$x_{n+1} = f(A, x_n) = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n Ax_n$$

alınarak elde edilen iterasyona, *Mann iterasyon yöntemi* denir (Mann, 1953).

Mann iterasyon yöntemi genişlemeyen dönüşümlerin sabit nokta yaklaşımlarında kullanılmak üzere geliştirilmesine rağmen güncel birçok çalışmada hala sıklıkla kullanılmaktadır. Bu nedenle Mann iterasyon yöntemi en temel iterasyon yöntemlerinden biridir. Aşağıda ifade edilecek olan Krasnosel'skii iterasyon yöntemi ise Mann iterasyon yönteminden daha sonra tanımlanmış olmasına rağmen Mann iterasyon yönteminin özel bir versiyonudur. Aslında Krasnosel'skii iterasyon yöntemi Picard iterasyon yönteminin genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarına yakınsamasındaki yetersizliği ortadan kaldırmak amacıyla tanımlanmıştır.

Tanım 2.2.18: (4) ifadesinde

$$x_{n+1} = f(A, x_n) = \frac{1}{2}(x_n + Ax_n)$$

alınarak elde edilen iterasyona, *Krasnosel'skii iterasyon yöntemi* denir (Krasnosel'skii, 1955).

Aşağıda tanımlanan geliştirilmiş Krasnosel'skii iterasyon yönteminde $\alpha = \frac{1}{2}$ aldığımızda Krasnosel'skii iterasyon yöntemi, $\alpha = 1$ aldığımızda ise Picard iterasyonu elde edilir.

Tanım 2.2.19: $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere, (4) ifadesinde

$$x_{n+1} = f(A, x_n) = (1 - \alpha)x_n + \alpha Ax_n$$

alınarak elde edilen iterasyona, *genelleştirilmiş Krasnosel'skii iterasyon yöntemi* denir (Schaefer, 1957).

Bir sonraki tanımda yer alan Kirk iterasyon yöntemi, Banach uzaylarında genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarına yaklaşım için tanımlanmıştır.

Aşağıda verilen iterasyon yönteminde $k = 0$ aldığımızda Picard iterasyon yöntemi, $k = 1$ aldığımızda ise genelleştirilmiş Krasnosel'skii iterasyon yöntemi elde edilir.

Tanım 2.2.20: $k \geq 1$ ve $0 \leq i \leq k$ için $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_1 > 0$, $\sum_{i=0}^k \alpha_i = 1$ olmak üzere, (4) ifadesinde

$$x_{n+1} = f(A, x_n) = \sum_{i=0}^k \alpha_i A^i x_n$$

alınarak elde edilen iterasyona, *Kirk iterasyon yöntemi* denir (Kirk, 1971).

Aşağıdaki iterasyon yöntemi Mann iterasyon yönteminin yetersiz kaldığı durumlarda dönüşümlerin sabit noktalarına yaklaşım için tanımlanmıştır. Bu yöntemde $\beta_n = 0$ aldığımızda Mann iterasyon yöntemi elde edilir.

Tanım 2.2.21: $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subset [0,1]$ reel sayı dizileri, $0 \leq \alpha_n \leq \beta_n \leq 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n = \infty$ şartlarını sağlamak üzere, (4) ifadesinde

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(A, x_n) = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n A y_n \\ y_n &= (1 - \beta_n)x_n + \beta_n A x_n \end{aligned}$$

alınarak elde edilen iterasyona, *Ishikawa iterasyon yöntemi* denir (Ishikawa, 1974).

Ishikawa iterasyon yönteminin genelleştirilmiş versiyonu olan Noor tarafından tanıtılan üç adımlı iterasyon yöntemi varyasyonel eşitsizliklerin yaklaşık çözümlerini bulmak amacıyla tanımlanmıştır (Noor, 2000).

Tanım 2.2.22: $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \subset [0,1]$ reel sayı dizileri olsun. (4) ifadesinde

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(A, x_n) = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n A y_n \\ y_n &= (1 - \beta_n)x_n + \beta_n A z_n \\ z_n &= (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n A x_n \end{aligned}$$

alınarak elde edilen iterasyona, *Noor iterasyon yöntemi* denir (Noor, 2000).

Yukarıda verilen iterasyon yöntemlerinin genelleştirilmesi ile oluşturulan aşağıdaki iterasyon yöntemi çok adımlı iterasyon yöntemi olarak tanıtılmıştır. Bu iterasyon yönteminde $k = 3$ aldığımızda Noor iterasyon yöntemi, $k = 2$ aldığımızda Ishikawa iterasyon yöntemi, $k = 2$ ve $\beta_n^1 = 0$ aldığımızda Mann iterasyon yöntemi, $k = 2$, $\beta_n^1 = 0$ ve $\alpha_n = \alpha$ aldığımızda ise genelleştirilmiş Krasnosel'skii iterasyon yöntemi elde edilir.

Tanım 2.2.23: $k \geq 2$ için $1 \leq i \leq k - 2$ ve $\{\alpha_n\}, \{\beta_n^i\} \subset [0,1]$ bir reel sayı dizileri olsun. (4) ifadesinde

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(A, x_n) = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n Ay_n^1 \\y_n^i &= (1 - \beta_n^i)x_n + \beta_n^i Ay_n^{i+1} \\y_n^{k-1} &= (1 - \beta_n^{k-1})x_n + \beta_n^{k-1} Ax_n\end{aligned}$$

alınarak elde edilen iterasyona, *Multistep iterasyon yöntemi* denir (Rhoades ve Şoltuz, 2004).

Bir sonraki iterasyon yöntemi, Mann ve Ishikawa iterasyon yöntemlerinden bağımsız olarak tanımlanmıştır. R.P. Agarwal, D.R. Sahu ve D.O'Regan çalışmalarında S iterasyon yönteminin daralma dönüşümleri için yakınsama hızının Picard iterasyon yönteminin yakınsama hızına denk ve diğer sabit nokta iterasyon yöntemlerinin yakınsama hızlarından daha hızlı olduğu sonucuna ulaşmışlardır (Agarwal vd., 2007)

Tanım 2.2.24: $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subset [0,1]$ reel sayı dizileri olsun. (4) ifadesinde

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(A, x_n) = (1 - \alpha_n)Ax_n + \alpha_n Ay_n \\y_n &= (1 - \beta_n)x_n + \beta_n Ax_n\end{aligned}$$

alınarak elde edilen iterasyona, *S iterasyon yöntemi* denir (Agarwal vd., 2007).

Tanım 2.2.25: $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subset [0,1]$ reel sayı dizileri olsun. (4) ifadesinde

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(A, x_n) = (1 - \alpha_n)y_n + \alpha_n Ay_n \\y_n &= (1 - \beta_n)x_n + \beta_n Ax_n\end{aligned}$$

alınarak elde edilen iterasyona, *iki adımlı Mann iterasyon yöntemi* denir (Thianwan, 2009).

Tanım 2.2.26: $k, s \in \mathbb{Z}$, $k \geq s$ ve $\{\alpha_{n,i}\}, \{\beta_{n,j}\} \subset [0,1]$ reel sayı dizileri $\alpha_{n,i} \geq 0$, $\alpha_{n,0} \neq 0$, $\beta_{n,j} \geq 0$, $\beta_{n,0} \neq 0$ şartlarını sağlamak üzere, (4) ifadesinde

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(A, x_n) = \alpha_{n,0}x_n + \sum_{i=1}^k \alpha_{n,i}A^i y_n, \quad \sum_{i=0}^k \alpha_{n,i} = 1, \\y_n &= \beta_{n,0}x_n + \sum_{j=1}^s \beta_{n,j}A^j x_n, \quad \sum_{j=0}^s \beta_{n,j} = 1\end{aligned}$$

alınarak elde edilen iterasyona, *Kirk-Ishikawa iterasyon yöntemi* denir (Olatinwo, 2009).

Tanım 2.2.27: $k \in \mathbb{Z}$ ve $\{\alpha_{n,i}\} \subset [0,1]$ reel dizisi $\alpha_{n,i} \geq 0$, $\alpha_{n,0} \neq 0$ şartlarını sağlamak üzere, (4) ifadesinde

$$x_{n+1} = f(A, x_n) = \alpha_{n,0}x_n + \sum_{i=1}^k \alpha_{n,i}A^i x_n, \quad \sum_{i=0}^k \alpha_{n,i} = 1$$

alınarak elde edilen iterasyona, *Kirk-Mann iterasyon yöntemi* denir (Olatinwo, 2009).

Phuengrattana ve Suantai, Noor iterasyon yönteminden ilham alarak iki adımlı Mann iterasyon yöntemini aşağıdaki şekilde genelleştirmişlerdir (Phuengrattana ve Suantai, 2011).

Tanım 2.2.28: $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \subset [0,1]$ reel sayı dizileri olsun. (4) ifadesinde

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(A, x_n) = (1 - \alpha_n)y_n + \alpha_n A y_n \\ y_n &= (1 - \beta_n)z_n + \beta_n A z_n \\ z_n &= (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n A x_n \end{aligned}$$

alınarak elde edilen iterasyona, *SP iterasyon yöntemi* denir (Phuengrattana ve Suantai, 2011).

Tanım 2.2.29: $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \subset [0,1]$ reel sayı dizileri olsun. (4) ifadesinde

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (1 - \alpha_n)y_n + \alpha_n A y_n \\ y_n &= (1 - \beta_n)A x_n + \beta_n A z_n \\ z_n &= (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n A x_n \end{aligned}$$

alınarak elde edilen iterasyona, *CR iterasyon yöntemi* denir (Chugh vd., 2012).

Tanım 2.2.30: $k, s, t \in \mathbb{Z}$, $k \geq s \geq t$ ve $\{\alpha_{n,i}\}, \{\beta_{n,j}\}, \{\gamma_{n,l}\} \subset [0,1]$ reel sayı dizileri $\alpha_{n,i} \geq 0$, $\alpha_{n,0} \neq 0$, $\beta_{n,j} \geq 0$, $\beta_{n,0} \neq 0$, $\gamma_{n,l} \geq 0$, $\gamma_{n,0} \neq 0$ şartlarını sağlamak üzere, (4) ifadesinde

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(A, x_n) = \alpha_{n,0}x_n + \sum_{i=1}^k \alpha_{n,i}A^i y_n, \quad \sum_{i=0}^k \alpha_{n,i} = 1, \\ y_n &= \beta_{n,0}x_n + \sum_{j=1}^s \beta_{n,j}A^j z_n, \quad \sum_{j=0}^s \beta_{n,j} = 1, \end{aligned}$$

$$z_n = \gamma_{n,0}x_n + \sum_{l=1}^t \gamma_{n,l}A^l x_n, \quad \sum_{l=0}^t \gamma_{n,l} = 1$$

alınarak elde edilen iterasyona, *Kirk-Noor iterasyon yöntemi* denir (Chugh ve Kumar, 2012).

Bu iterasyon yöntemi, Kirk-Mann ve Kirk-Ishikawa iterasyon yöntemlerinin geliştirilmesi olarak tanımlanmıştır.

Tanım 2.2.31: $k, s, t \in \mathbb{Z}$, $k \geq s \geq t$ ve $\{\alpha_{n,i}\}, \{\beta_{n,j}\}, \{\gamma_{n,l}\} \subset [0,1]$ reel sayı dizileri $\alpha_{n,i} \geq 0$, $\alpha_{n,0} \neq 0$, $\beta_{n,j} \geq 0$, $\beta_{n,0} \neq 0$, $\gamma_{n,l} \geq 0$, $\gamma_{n,0} \neq 0$ şartlarını sağlamak üzere, (4) ifadesinde

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(A, x_n) = \alpha_{n,0}y_n + \sum_{i=1}^k \alpha_{n,i}A^i y_n, \quad \sum_{i=0}^k \alpha_{n,i} = 1, \\ y_n &= \beta_{n,0}z_n + \sum_{j=1}^s \beta_{n,j}A^j z_n, \quad \sum_{j=0}^s \beta_{n,j} = 1, \\ z_n &= \gamma_{n,0}x_n + \sum_{l=1}^t \gamma_{n,l}A^l x_n, \quad \sum_{l=0}^t \gamma_{n,l} = 1 \end{aligned}$$

alınarak elde edilen iterasyona, *Kirk-SP iterasyon yöntemi* denir (Hussain vd., 2012).

Tanım 2.2.32: $k, s, t \in \mathbb{Z}$, $k \geq s \geq t$ ve $\{\alpha_{n,i}\}, \{\beta_{n,j}\}, \{\gamma_{n,l}\} \subset [0,1]$ reel sayı dizileri $\alpha_{n,i} \geq 0$, $\alpha_{n,0} \neq 0$, $\beta_{n,j} \geq 0$, $\beta_{n,0} \neq 0$, $\gamma_{n,l} \geq 0$, $\gamma_{n,0} \neq 0$ şartlarını sağlamak üzere, (4) ifadesinde

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(A, x_n) = \alpha_{n,0}y_n + \sum_{i=1}^k \alpha_{n,i}A^i y_n, \quad \sum_{i=0}^k \alpha_{n,i} = 1, \\ y_n &= \beta_{n,0}Ax_n + \sum_{j=1}^s \beta_{n,j}A^j z_n, \quad \sum_{j=0}^s \beta_{n,j} = 1, \\ z_n &= \gamma_{n,0}x_n + \sum_{l=1}^t \gamma_{n,l}A^l x_n, \quad \sum_{l=0}^t \gamma_{n,l} = 1 \end{aligned}$$

alınarak elde edilen iterasyona, *Kirk-CR iterasyon yöntemi* denir (Hussain vd., 2012).

Tanım 2.2.33: $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \subset [0,1]$ reel sayı dizileri olsun. (4) ifadesinde

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(A, x_n) = (1 - \alpha_n)Ax_n + \alpha_nAy_n \\ y_n &= (1 - \beta_n)Ax_n + \beta_nAz_n \end{aligned}$$

$$z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n Ax_n$$

alınarak elde edilen iterasyona, S^* iterasyon yöntemi denir (Karahan ve Özdemir, 2013).

Tanım 2.2.34: $\{\alpha_n\} \subset (0,1)$ reel sayı dizisi $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ şartını sağlamak üzere, (4) ifadesinde

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(A, x_n) = Ay_n \\ y_n &= (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n Ax_n \end{aligned}$$

alınarak elde edilen iterasyona, *Picard-Mann iterasyon yöntemi* denir (Khan, 2013).

Bu iterasyon yöntemi Picard, Mann ve Ishikawa iterasyon yöntemlerinden daha güçlü yakınsayan bir iterasyon yöntemi bulmak amacıyla tanımlanmıştır.

Tanım 2.2.35: $k \geq 2$ için $1 \leq i \leq k - 1$ ve $\{\alpha_n\}, \{\beta_n^i\} \subset [0,1]$ reel sayı dizileri $\{\alpha_n\}, \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ şartını sağlamak üzere, (4) ifadesinde

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(A, x_n) = (1 - \alpha_n)y_n^1 + \alpha_n Ay_n^1 \\ y_n^i &= (1 - \beta_n^i)y_n^{i+1} + \beta_n^i Ay_n^{i+1} \\ y_n^{k-1} &= (1 - \beta_n^{k-1})x_n + \beta_n^{k-1} Ax_n \end{aligned}$$

alınarak elde edilen iterasyona, *Multistep-SP iterasyon yöntemi* denir (Gürsoy, 2013).

Burada $k = 3$ için *SP* iterasyon yöntemi, $k = 2$ için iki adımlı Mann iterasyon yöntemi, $k = 2$ ve $\beta_n^1 = 0$ için Mann iterasyon yöntemi, $k = 2$, $\beta_n^1 = 0$ ve $\alpha_n = \alpha$ için ise genelleştirilmiş Krasnosel'skii iterasyon yöntemi elde edilir.

Tanım 2.2.36: $1 \leq p \leq k - 1$ için s_1 ve s_{p+1} , $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_k$ şartını sağlayan tam sayılar, $\{\alpha_{n,i_1}\}, \{\beta_{n,i_{p+1}}^p\} \subset [0,1]$, $1 \leq p \leq k - 1$ için $\alpha_{n,i_1} \geq 0$, $\alpha_{n,0} \neq 0$, $\beta_{n,i_{p+1}}^p \geq 0$, $\beta_{n,0} \neq 0$ koşullarını sağlayan diziler ve $1 \leq p \leq k - 1$ için $\sum_{i_1=0}^{s_1} \alpha_{n,i_1} = 1$, $\sum_{i_{p+1}=0}^{s_{p+1}} \beta_{n,i_{p+1}}^p = 1$ olmak üzere, (4) ifadesinde

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(A, x_n) = \alpha_{n,0}x_n + \sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} A^{i_1} y_n^1 \\ y_n^p &= \beta_{n,0}^p x_n + \sum_{i_{p+1}=1}^{s_{p+1}} \beta_{n,i_{p+1}}^p A^{i_{p+1}} y_n^{p+1}, \quad 1 \leq p \leq k - 2 \end{aligned}$$

$$y_n^{k-1} = \sum_{i_k=0}^{s_k} \beta_{n,i_k}^{k-1} A^{i_k} x_n, \quad k \geq 2$$

alınarak elde edilen iterasyona, *Kirk-Multistep iterasyon yöntemi* denir (Gürsoy, 2014).

Burada $k = 3$ alındığında Kirk-Noor iterasyon yöntemi, $k = 2$ alındığında Kirk-Ishikawa iterasyon yöntemi, $k = 2$ ve $s_2 = 0$ alındığında Kirk-Mann iterasyon yöntemi, $k = 2, s_2 = 0$ ve $\alpha_{n,i_1} = \alpha_{i_1}$ için ise Kirk iterasyon yöntemi elde edilir. Ayrıca, $1 \leq p \leq k - 1$ için $s_1 = 1$ ve $s_{p+1} = 1$ alınırsa $\sum_{i_1=0}^1 \alpha_{n,i_1} = 1$ ve $\sum_{i_{p+1}=0}^1 \beta_{n,i_{p+1}}^p = 1$ bulunur. Bunlara ilave olarak $1 \leq p \leq k - 1$ için $\alpha_n^1 = \alpha_n$ ve $\beta_{n_1}^p = \beta_n^p$ seçimleri ile multistep iterasyon yöntemi elde edilir.

Tanım 2.2.37: $1 \leq p \leq k - 1$ için s_1 ve s_{p+1} , $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_k$ şartını sağlayan tam sayılar ve $\{\alpha_{n,i_1}\}_{n=0}^{\infty}, \{\beta_{n,i_{p+1}}^p\}_{n=0}^{\infty} \subset [0,1]$, $1 \leq p \leq k - 1$ için $\alpha_{n,i_1} \geq 0$, $\alpha_{n,0} \neq 0$, $\beta_{n,i_{p+1}}^p \geq 0$, $\beta_{n,0} \neq 0$ şartlarını sağlayan diziler ve $1 \leq p \leq k - 1$ için $\sum_{i_1=0}^{s_1} \alpha_{n,i_1} = 1$, $\sum_{i_{p+1}=0}^{s_{p+1}} \beta_{n,i_{p+1}}^p = 1$ olmak üzere, (4) ifadesinde

$$x_{n+1} = f(A, x_n) = \alpha_{n,0} y_n^1 + \sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} A^{i_1} y_n^1$$

$$y_n^p = \beta_{n,0}^p y_n^{p+1} + \sum_{i_{p+1}=1}^{s_{p+1}} \beta_{n,i_{p+1}}^p A^{i_{p+1}} y_n^{p+1}, \quad 1 \leq p \leq k - 2$$

$$y_n^{k-1} = \sum_{i_k=0}^{s_k} \beta_{n,i_k}^{k-1} A^{i_k} x_n, \quad k \geq 2$$

alınarak elde edilen iterasyona, *Kirk-Multistep-SP iterasyon yöntemi* denir (Gürsoy, 2014).

Burada $k = 3$ alındığında Kirk-SP iterasyon yöntemi, $k = 2$ alındığında Kirk iki adımlı Mann iterasyon yöntemi, $k = 2$ ve $s_2 = 0$ alındığında Kirk-Mann iterasyon yöntemi, $k = 2, s_2 = 0$ ve $\{\alpha_{n,i_1}\} = \{\alpha_{i_1}\}$ için ise Kirk iterasyon yöntemi elde edilir. Ayrıca, $1 \leq p \leq k - 1$ için $s_1 = 1$ ve $s_{p+1} = 1$ alınırsa $\sum_{i_1=0}^1 \alpha_{n,i_1} = 1$ ve $\sum_{i_{p+1}=0}^1 \beta_{n,i_{p+1}}^p = 1$ elde edilir. Bunlara ek, $1 \leq p \leq k - 1$ için $\{\alpha_n^1\} = \{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_{n_1}^p\} = \{\beta_n^p\}$ seçimleri ile Multistep-SP iterasyon yöntemi elde edilir.

Tanım 2.2.38: $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}$, $s_1 \geq s_2$ ve $\{\alpha_{n,i_1}\}, \{\beta_{n,i_2}\} \subset [0,1]$ reel sayı dizileri $\alpha_{n,i_1} \geq 0$, $\alpha_{n,0} \neq 0$, $\beta_{n,i_2} \geq 0$, $\beta_{n,0} \neq 0$ şartlarını sağlamak üzere, (4) ifadesinde

$$x_{n+1} = f(A, x_n) = \alpha_{n,0}Ax_n + \sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1}A^{i_1}y_n, \quad \sum_{i_1=0}^{s_1} \alpha_{n,i_1} = 1,$$

$$y_n = \beta_{n,0}x_n + \sum_{i_2=1}^{s_2} \beta_{n,i_2}A^{i_2}x_n, \quad \sum_{i_2=0}^{s_2} \beta_{n,i_2} = 1$$

alınarak elde edilen iterasyona, *Kirk-S iterasyon yöntemi* denir (Gürsoy, 2014).

Bu iterasyon yöntemi, Banach uzaylarında daralma benzeri dönüşümler için, S iterasyon yönteminin genelleştirilmesi olarak tanımlanmıştır. Burada $s_1 = s_2 = 1$ alınırsa $\sum_{i_1=0}^1 \alpha_{n,i_1} = 1$ ve $\sum_{i_2=0}^1 \beta_{n,i_2} = 1$ elde edilir. Bunlara ek olarak $\{\alpha_{n,i_1}\} = \{\alpha_{i_1}\}$ ve $\{\beta_{n,i_2}\} = \{\beta_n\}$ seçimleri ile S iterasyon yöntemi elde edilir.

Tanım 2.2.39: $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subset [0,1]$ reel sayı dizileri olmak üzere, (4) ifadesinde

$$x_{n+1} = f(A, x_n) = Ay_n$$

$$y_n = (1 - \alpha_n)Ax_n + \alpha_nAz_n$$

$$z_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_nAx_n$$

alınarak elde edilen iterasyona, *Picard-S iterasyon yöntemi* denir (Gürsoy, 2014).

Tanım 2.2.40: $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \subset [0,1]$ reel sayı dizileri olsun. (4) ifadesinde

$$x_{n+1} = f(A, x_n) = (1 - \alpha_n)Ay_n + \alpha_nAz_n$$

$$y_n = (1 - \beta_n)Ax_n + \beta_nAz_n$$

$$z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_nAx_n$$

alınarak elde edilen iterasyona, *Abbas ve Nazir iterasyon yöntemi* denir (Abbas ve Nazir, 2014).

Tanım 2.2.41: M bir düzgün konveks Banach uzayı, $\emptyset \neq C \subset M$ kapalı konveks bir

alt kümesi ve $x_0 \in C$ olsun. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subset (0,1)$ reel sayı dizileri olmak üzere (4) ifadesinde

$$x_{n+1} = Ay_n$$

$$y_n = A((1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n z_n)$$

$$z_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n A x_n$$

alınarak elde edilen iterasyona *Thakur ve arkadaşları iterasyon yöntemi* denir (Thakur vd., 2014).

Tanım 2.2.42: $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ olsun. (4) ifadesinde

$$x_{n+1} = f(A, x_n) = (1 - \alpha_n)y_n + \alpha_n A y_n$$

$$y_n = A x_n$$

alınarak elde edilen iterasyona, *Mann-Picard iterasyon yöntemi* denir (Doğan, 2016).

Tanım 2.2.43: $k, s \in \mathbb{Z}$, $k \geq s$ ve $\{\alpha_{n,i}\}, \{\beta_{n,j}\} \subset [0,1]$ reel sayı dizileri $\alpha_{n,i} \geq 0$, $\alpha_{n,0} \neq 0$, $\beta_{n,j} \geq 0$, $\beta_{n,0} \neq 0$ şartlarını sağlamak üzere, (4) ifadesinde

$$x_{n+1} = f(A, x_n) = \alpha_{n,0} y_n + \sum_{i=1}^k \alpha_{n,i} A^i y_n, \quad \sum_{i=0}^k \alpha_{n,i} = 1$$

$$y_n = \sum_{j=1}^s \beta_{n,j} A^j x_n, \quad \sum_{j=1}^s \beta_{n,j} = 1$$

alınarak elde edilen iterasyona, *Kirk-MP iterasyon yöntemi* denir (Doğan, 2016).

Picard, Mann, Ishikawa, Noor, SP, CR ve Picard-S gibi birçok iterasyon algoritmasından daha hızlı olduğu Karakaya vd. tarafından gösterilen aşağıdaki yeni üç adımlı iterasyon yöntemini verelim.

Tanım 2.2.44: $\{\beta_n\} \subset [0,1]$ bir reel sayı dizisi olsun. (4) ifadesinde

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(A, x_n) = A y_n \\ y_n = (1 - \beta_n) z_n + \beta_n A z_n \\ z_n = A x_n \end{cases} \quad (5)$$

alınarak elde edilen iterasyona, *üç adımlı iterasyon yöntemi* denir (Karakaya vd., 2017).

K. Ullah ve M. Arshad tarafından tanımlanan M –iterasyon yöntemi, düzgün konveks Banach uzaylarında Suzuki genelleştirilmiş genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarına yaklaşmak için oluşturulmuştur.

Tanım 2.2.45: X bir normlu uzay, $M \neq \emptyset$, M , X uzayının konveks bir alt kümesi, $A: M \rightarrow M$ tanımlı bir dönüşüm olsun ve Burada $\{\alpha_n\} \subset (0,1)$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ şartları sağlansın. Bu durumda (4) ifadesinde

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= Ay_n \\ y_n &= Az_n \\ z_n &= (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n Ax_n \end{aligned}$$

alınarak elde edilen iterasyona, *M-iterasyon yöntemi* denir (Ullah ve Arshad, 2018).

Tanım 2.2.46: M bir metrik uzay veya Banach uzay olsun. $A: M \rightarrow M$ tanımlı bir dönüşüm olsun. Tahmini başlangıç noktası $x_0 \in M$ olmak üzere (4) ifadesinde $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(A, x_n) = Ay_n \\ y_n = Az_n \\ z_n = Ax_n \end{cases} \quad (6)$$

alınarak elde edilen iterasyona *Picard'ın üç adımlı iterasyon yöntemi* denir (Ali vd., 2021).

Aşağıda verilen Banach sabit nokta teoremi, bir tam metrik uzay üzerindeki herhangi bir daralma dönüşümü için bir sabit noktanın varlığını ve tekliğini garanti eder ve hesaplamak için bir yöntem sağlar (Banach, 1922).

Teorem 2.2.1: (M, d) bir tam metrik uzay ve $A: M \rightarrow M$ bir daralma dönüşümü olsun. Bu durumda,

- i. A nın yalnız bir tek $x \in M$ sabit noktası vardır.
- ii. Herhangi bir $x_0 \in M$ için $\{A^n x_0\}$ iterasyon dizisi, A nın bu sabit noktasına yakınsar (yani $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n = A(x_{n-1})$ ile tanımlı $\{x_n\}$ iterasyon dizisi A nın bu sabit x noktasına yakınsar).

İspat: Önce sabit bir noktanın varlığı ispatlansın ve bunun için $x_0 \in M$ başlangıç noktası seçilsin.

$$\begin{aligned} x_0 \\ x_1 &= Ax_0 \\ x_2 &= Ax_1 = A^2 x_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$x_n = Ax_{n-1} = A^n x_0 \quad (7)$$

iterasyon dizisi göz önüne alınsın. $m > n$ için

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &= d(A^n x_0, A^m x_0) \\
&= d(A^n x_0, A^n A^{m-n} x_0) \\
&\leq \alpha^n d(x_0, A^{m-n} x_0) \\
&= \alpha^n d(x_0, x_{m-n}) \\
&\leq \alpha^n \{d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{m-n-1}, x_{m-n})\} \\
&\leq \alpha^n d(x_0, x_1) \{1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m-n-1}\} \\
&\leq \alpha^n d(x_0, x_1) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j, \quad (|\alpha| < 1, \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}) \\
&\leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1)
\end{aligned} \quad (8)$$

elde edilir. $0 < \alpha < 1$ olduğundan $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğu sonucuna ulaşılır. (M, d) bir tam metrik uzay olduğu için $\exists x \in M$ vardır öyle ki $\{x_n\}$ dizisi x e yakınsar. Şimdi x elemanının A nın bir sabit noktası olduğu gösterilsin.

$$\begin{aligned}
d(Ax, x) &\leq d(Ax, A^n x_0) + d(A^n x_0, x) \\
&\leq d(Ax, A A^{n-1} x_0) + d(A^n x_0, x) \\
&\leq d(Ax, A x_{n-1}) + d(x_n, x) \\
&\leq \alpha d(x, x_{n-1}) + d(x_n, x)
\end{aligned}$$

olduğundan ve $\{x_n\}$ dizisi x e yakınsadığından

$$d(Ax, x) = 0$$

elde edilir ve buradan

$$Ax = x$$

sonucuna ulaşılır. Burada, x in A nın bir sabit noktası olduğu, A nın sürekliliği kullanılarak aşağıdaki gibi de gösterilebilir.

$$Ax = A \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x.$$

Şimdi A nin sabit noktasının tek (bir tane) olduğu gösterilsin. Herhangi bir $y \in M$ için

$$Ay = y$$

olsun. Bu durumda,

$$d(x, y) = d(Ax, Ay) \leq \alpha d(x, y)$$

olup, $0 \leq \alpha < 1$ olduğundan

$$d(x, y) = 0$$

bulunur ki bu

$$x = y$$

olduğunu verir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.2.1, (1) eşitliği için sadece bir çözümün varlığından bahsetmez; ayrıca çözümün bulunması için pratik bir yöntem de verir. Yani, iterasyonlarla (7) eşitliğinin hesaplanmasını sağlar. İspatın içinde gösterildiği gibi (7) ile verilen iterasyon, (1) ile verilen çözüme yakınsar. (8) eşitsizliğinde $m \rightarrow \infty$ iken limit alınırsa

$$d(x_n, x) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \quad (9)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik sabit noktaya bir yaklaşım olarak n . iterasyonun seçimindeki hatayı hesaplamada kullanılabilir. Bununla birlikte bu çok zahmetli bir işlem olabilir. Çünkü iterasyon için başlangıç noktasının seçimi bir iterasyon dizisi üretebilir öyle ki bu dizi yakınsamak için çok yavaş olabilir. (9) eşitsizliğinde $n = 1$ alınması halinde,

$$d(x_1, x) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_0, x_1)$$

elde edilir. İterasyonu x_{n-1} den başlatarak yani x_0 yerine x_{n-1} ve x_1 yerine x_n alarak hatanın daha iyi bir hesabı

$$d(x_n, x) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_{n-1}, x_n) \quad (10)$$

ile verilir.

Uyarı 2.2.4: Özellikle Banach sabit nokta teoremi uygulanmak istendiği durumlarda, A dönüşümü bir (M, d) tam metrik uzayının tamamı üzerinde bir daralma olmayabilir fakat sadece M in bir N alt kümesi üzerinde daralma olabilir. Eğer N alt kümesi kapalı ise tamdır. Bu nedenle, eğer $A : N \rightarrow N$ ise Banach sabit nokta teoremi uygulanabilir. Öte yandan, A dönüşümü daralma olmayabilir fakat A nın m . iterasyonu yani A^m bir daralma olabilir.

Aşağıdaki Lemma Banach sabit nokta teoreminin bir genellemesidir (Banach, 1922).

Lemma 2.2.1: (M, d) bir tam metrik uzay ve $A : M \rightarrow M$ olsun. $\exists m \in \mathbb{N}$ için A^m bir daralma dönüşümü ise,

- i. A bir tek x sabit noktasına sahiptir.
- ii. Herhangi bir $x_0 \in M$ verildiğinde, ardışık olarak $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\{x_n\} = A(x_{n-1})$ ile tanımlı $\{x_n\}$ iterasyon dizisi, A nin bu x sabit noktasına yakınsar.

Uyarı 2.2.5: Teorem 2.2.1'deki (i) ve (ii) şartını sağlayan bir dönüşüme bir Picard operatörü denir (Rus, 1996).

Teorem 2.2.2: (M, d) bir tam metrik uzay ve $A : M \rightarrow M$ bir Kannan dönüşümü olsun. Bu taktirde A bir Picard operatörüdür (Kannan, 1968).

Teorem 2.2.3: (M, d) bir tam metrik uzay ve $A : M \rightarrow M$ bir Chatterjea dönüşümü olsun. Bu taktirde A bir Picard operatörüdür (Chatterjea, 1972).

Teorem 2.2.4: (M, d) bir tam metrik uzay ve $A : M \rightarrow M$ bir Zamfirecu dönüşümü olsun. Bu taktirde A bir Picard operatörüdür (Zamfirecu, 1972).

Sabit nokta teoreminde kullanılan daralma dönüşümü, problemlerin tek ve kesin bir hesaplama ile elde edilebilir olmasında önemli faydalar sağlamaktadır. Fakat teoremin uygulama bölümlerinde bazı zorlukları da beraberinde getirmektedir. Bu nedenle yukarıda ifade edilen teoremlerin yanı sıra farklı iterasyon yöntemleri veya farklı dönüşüm sınıfları kullanarak, Banach'ın sabit nokta teoreminin birçok genelleştirilmiş versiyonunu elde etmişlerdir. Ayrıca, A dönüşümünün sürekliliğini gerektirmeyen farklı daralma dönüşümleri için de yeni sabit nokta teoremleri ortaya konmuştur. Özellikle son dönemlerde Berinde tarafından (2) ve (3) koşulları altında ifade edilen zayıf daralma şartları kullanarak birçok sabit nokta teoreminin genellemesi olan aşağıdaki teorem ispatlamıştır (Berinde, 2004).

Teorem 2.2.5: (M, d) bir tam metrik uzay ve $A : M \rightarrow M$ dönüşümü (2) şartını sağlayan bir zayıf daralma olsun. Bu durumda,

i. $F_A = \{x \in M : Ax = x\} \neq \emptyset$,

ii. Herhangi bir $x_0 \in M$ için Picard iterasyonundan elde edilen dizi bazı $x \in F_A$ sabit noktalarına yakınsar.

Ayrıca bu son teoremden Berinde sabit noktanın varlığını elde etmesine rağmen tekliğini ifade edememiştir. Fakat (2) ile verilen daralma koşuluna oldukça benzer (11) da ifade edilen ek bir daralma koşulu tanımlayarak aşağıdaki teorem ile zayıf daralmanın sabit noktasının tekliğini mümkün kılmıştır (Berinde, 2004).

Teorem 2.2.6: M bir tam metrik uzay ve $A : M \rightarrow M$ dönüşümü aşağıdaki şartı sağlayan bir zayıf daralma olsun. $\forall x, y \in M$ için

$$d(Ax, Ay) \leq \theta d(x, y) + L_1 d(x, Ax) \quad (11)$$

olacak şekilde $\theta \in (0,1)$ sabiti ve $L_1 \geq 0$ mevcut olsun. Bu durumda,

i. A bir tek sabit noktaya sahiptir.

ii. Herhangi bir $x_0 \in M$ için Picard iterasyonundan elde edilen dizi bu sabit noktaya yakınsar.

2.3 İntegral Denklemler ile İlgili Bazı Temel Kavramlar

İntegral denklemle, $\varphi(x)$ bilinmeyen fonksiyonunun integral işareti altında bulunduğu denklemlerdir. $g(x)$ ve $h(x)$ integrasyon limitleri, α sabit bir parametre olmak üzere, integral denklemlerin en genel şekli

$$\varphi(x)u(x) = f(x) + \alpha \int_{g(x)}^{h(x)} K(x, t)\varphi(t)dt$$

ile verilir (Köklü, 2018). Burada $K(x, t)$, x ve t değişkenlerine bağlı çekirdek adı verilen bilinen bir fonksiyon, $\varphi(x)$ bilinmeyen fonksiyon, $u(x)$ bilinen fonksiyon ve $f(x)$ de kaynak fonksiyondur. İntegral denklemler birçok başlık altında sınıflandırılır. Bu denklemleri sınıflandırmak için öncelikle denklemin integrasyon limitleri, lineerliği, homojenliği ile tipi incelenir.

Tanım 2.3.1: İntegrasyon limitlerinin en az biri değişken olan integral denkleme

Volterra integral denklem, her ikisi de sabit olan integral denkleme de *Fredholm integral denklem* denir. α sayısal bir parametre $u(x)$, $f(x)$ ve $K(x, t)$ bilinen fonksiyonlar, $\varphi(x)$ bilinmeyen fonksiyon ve a, b sabit sayılar olmak üzere

$$\varphi(x)u(x) = f(x) + \alpha \int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt$$

denklemini Volterra integral denkleminin,

$$\varphi(x)u(x) = f(x) + \alpha \int_b^a K(x, t)\varphi(t)dt$$

denklemini ise Fredholm integral denkleminin standart gösterimidir (Köklü, 2018).

Bu tanımlara göre Fredholm integral denklemin çekirdeği $\{(x, t): a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$ karesel bölge üzerinde, Volterra integral denklemin çekirdeği ise $\{(x, t): a \leq t \leq x \leq b\}$ üçgensel bölge üzerinde tanımlanmıştır. Dolayısıyla Volterra integral denklemini için "Çekirdeği $t > x$ iken $K(x, t) = 0$ şartını sağlayan denklem" ifadesi kullanılabilir (Zabreyko, 1975).

Örnek 2.3.1: $x, t \in [0,1]$ olmak üzere,

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} + 3 \int_0^x \frac{t}{1+x^2} \varphi(t)dt$$

bir Volterra integral denklem iken,

$$\varphi(x) = \cos x - \int_0^\pi (x^2 + t) \cos t \varphi(t) dt$$

ise bir Fredholm integral denklemdir.

Tanım 2.3.2: $\varphi(x)$ bilinmeyen bir fonksiyon olsun. $\varphi(t)$ fonksiyonun kuvveti n olmak üzere $n = 1$ ise yani $\varphi(t)$ lineerse bu denkleme *lineer integral denklem*, $n > 1$ veya $\varphi(t)$ lineer değilse bu denkleme de *lineer olmayan integral denklem* denir. Lineer

olan ve lineer olmayan Volterra integral denklemler ve Fredholm integral denklemler sırasıyla

$$\varphi(x) = f(x) + \alpha \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt$$

$$\varphi(x) = f(x) + \alpha \int_a^x K(x, t) \varphi^n(t) dt$$

$$\varphi(x) = f(x) + \alpha \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt$$

$$\varphi(x) = f(x) + \alpha \int_a^b K(x, t) \varphi^n(t) dt$$

şeklinde gösterilir (Köklü, 2018).

Örnek 2.3.2:

$$\varphi(x) = x^2 - 4 \int_0^x \cos(x - t) \varphi(t) dt$$

bir lineer Volterra integral denklem iken,

$$\varphi(x) = e^x + 3 \int_0^1 \frac{xt}{t+x} \varphi(t) dt$$

ise bir lineer Fredholm integral denklemdir.

Tanım 2.3.3: Bir integral denklemde bilinen fonksiyon $u(x)$, çekirdek fonksiyon $K(x, t)$, kaynak fonksiyon $f(x)$ ve bilinmeyen fonksiyon $\varphi(x)$ olsun. $\varphi(x)$ yalnızca integral içinde mevcut ise bu tip denkleme *birinci tip integral denklem*, hem integral içinde hem de dışında mevcut ise bu tip denkleme de *ikinci tip integral denklem* denir. Birinci tip ve ikinci tip integral denklemleri sırasıyla

$$u(x) = f(x) + \alpha \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt$$

$$\varphi(x) = f(x) + \alpha \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt$$

şeklinde gösterilir.

$$\varphi(x)u(x) = f(x) + \alpha \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt$$

şeklindeki denklemlere ise *üçüncü tip integral denklem* denir.

Birinci tip ve ikinci tip integral denklemler, üçüncü tip denklemlerin birer özel halidir (Köklü, 2018). Şöyle ki $u(x) = 0$ alınırsa birinci tip integral denklemi, $u(x) = 1$ alınırsa ikinci tip integral denklemine dönüştürülebilir.

Örnek 2.3.3:

$$x + \int_1^2 (x^2 - 1)t\varphi(t)dt = 0$$

birinci tip Fredholm integral denklem,

$$\varphi(x) = \tan x + \int_0^x xt\varphi(t)dt$$

ikinci tip Volterra integral denklem,

$$x^2\varphi(x) = e^x + \int_0^x \frac{1}{1+x^2} \varphi(t)dt$$

ise üçüncü tip Volterra integral denklemdir.

Tanım 2.3.4: Bilinen $f(x)$ fonksiyonun varlığına göre homojen olup olmadığına karar verilir. Eğer ki $f(x) = 0$ ise homojen integral denklem olarak $f(x) \neq 0$ ise homojen olmayan integral denklemi olarak adlandırılır.

Şimdi, lineer Fredholm integral denklemlerin ve lineer olmayan Volterra integral denklemlerin çözümlerinin varlık ve teklik şartlarını ifade eden teoremleri verelim.

Lemma 2.3.1: $f(x)$, $[a, b]$ üzerinde bir sürekli fonksiyon ve $\varphi(x)$, $[a, b]$ üzerinde

çözümü istenen bir fonksiyon olsun. $K(x, t)$, $G = \{(x, t) : (x, t) \in [a, b]\}$ bölgesinde bir sürekli fonksiyon ve α bir parametre olmak üzere

$$\varphi(x) = f(x) + \alpha \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt \quad (12)$$

olarak lineer Fredholm integral denklem tanımlansın. K , sınırlı ve G üzerinde sürekli olduğundan $\forall (x, t) \in G$ için

$$M = \max_{a \leq x, t \leq b} \int_a^b |K(x, t)| dt \quad (13)$$

olacak şekilde bir M vardır (Musayev ve Alp, 2000).

Teorem 2.3.1 (Lineer Fredholm İntegral Denkleminin Varlık Teklik Teoremi):

$f(x) \in C([a, b])$ olmak üzere

$$A\varphi_{n+1}(x) = f(x) + \alpha \int_a^b K(x, t) \varphi_n(t) dt$$

ile tanımlı $A : (C[a, b], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ operatörü göz önüne alınsın. (13) eşitliğindeki M için

$$\|A\varphi_1 - A\varphi_2\|_\infty \leq |\alpha|M \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty$$

olduğundan, eğer $|\alpha|M < 1$ ise A bir daralma dönüşümüdür. Bu durumda (12) ile verilen integral denklemin çözümü A operatörünün sabit noktasıdır ve $|\alpha|M < 1$ olduğunda çözümü vardır ve tektir (Musayev ve Alp, 2000).

Teorem 2.3.2 (Lineer Olmayan Volterra İntegral Denkleminin Varlık Teklik Teoremi):

$$\varphi(x) = f(x) + \alpha \int_a^x K(x, t, \varphi(t)) dt, \quad 0 < x \leq T \quad (14)$$

lineer olmayan Volterra integral denklemi verilmiş olsun. $\varphi(x)$ bilinmeyen, $K(x, t, \varphi)$ fonksiyonu $G = \{(x, t, \varphi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x, t \leq T, -\infty < \varphi < \infty\}$ üzerinde, $f(x)$

fonksiyonu ise $[0, T]$ üzerinde sürekli fonksiyonlar ve $\forall (x, t) \in [0, T]^2$ ve $\forall \varphi, \psi \in (-\infty, \infty)$ için

$$|K(x, t, \varphi) - K(x, t, \psi)| \leq \theta(x, t) |\varphi - \psi| ,$$

olacak şekilde $[0, T]^2$ üzerinde negatif olmayan ve sürekli $\theta(x, t)$ fonksiyonu vardır. Eğer $\theta(x, t) = L > 0$ ve $L \leq L_1$ olacak şekilde L_1 pozitif sayısı varsa $C([a, b])$ uzayı üzerinde tanımlı norm

$$\|\varphi\|_* = \max\{e^{-L_1 x} |\varphi(x)| : x \in [0, T]\} ,$$

olmak üzere

$$\rho = \max\left\{\frac{L(1 - e^{-L_1 x})}{L_1}\right\} = \frac{L(1 - e^{-L_1 T})}{L_1}$$

dir. Bu taktirde $\rho < 1$ ise (14) ile verilen integral denkleminin çözümü vardır ve tektir (Musayev ve Alp, 2000)

3. BULGULAR

Bu bölümde, Picard'ın üç adımlı iterasyon yöntemi kullanılarak lineer Fredholm integral denkleminin ve üç adımlı iterasyon yöntemini kullanarak da lineer olmayan Volterra integral denkleminin yakınsaklığı ve veri bağıllığı araştırılmıştır. Söz konusu araştırma için elde edilen sonuçlar sunulmuş ve bu sonuçlar örneklerle desteklenmiştir.

3.1. Lineer Fredholm İntegral Denklemler

Lineer Fredholm integral denklemler için yakınsaklık ve veri bağıllığı incelemelerinde kullanılmak üzere, aşağıdaki iterasyon algoritması tanımlanacaktır. Bunun için (12) ile verilen integral denklem kullanılarak, (6) ile verilen iterasyon algoritması $A : (C[a, b]) \rightarrow (C[a, b])$ operatörü ile aşağıdaki gibi yeniden inşa edelim.

$$\begin{cases} \varphi_{n+1}(x) = f(x) + \alpha \int_a^b K(x, t) \psi_n(t) dt \\ \psi_n(x) = f(x) + \alpha \int_a^b K(x, t) \tau_n(t) dt \\ \tau_n(x) = f(x) + \alpha \int_a^b K(x, t) \varphi_n(t) dt \end{cases} \quad (15)$$

Teorem 3.1.1: $A : (C[a, b], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ bir operatör olsun. Bu durumda, (12) ile verilen integral denklem bir tek $p \in C([a, b])$ çözümüne sahiptir ve (15) ile verilen iterasyon algoritmasından elde edilen $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$ dizisi bu çözüme yakınsar.

İspat: $A : (C[a, b], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ operatörü ile inşa edilen ve (15) ile verilen iterasyon algoritmasından elde edilen $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$ dizisi göz önüne alınsın. $n \rightarrow \infty$ iken $\varphi_n \rightarrow p$ olduğu gösterilecektir. (12) integral denklemini, (15) iterasyon algoritması ve Teorem 2.3.1 in şartları kullanılarak,

$$\begin{aligned} |\varphi_{n+1}(x) - p(x)| &= |A\psi_n(x) - Ap(x)| \\ &= \left| f(x) + \alpha \int_a^b K(x, t) \psi_n(t) dt - f(x) - \alpha \int_a^b K(x, t) p(t) dt \right| \\ &= |\alpha| \left| \int_a^b K(x, t) \psi_n(t) - K(x, t) p(t) dt \right| \\ &= |\alpha| \left| \int_a^b K(x, t) (\psi_n(t) - p(t)) dt \right| \\ &\leq |\alpha| \int_a^b |K(x, t)| |\psi_n(t) - p(t)| dt \end{aligned}$$

$$|\varphi_{n+1}(x) - p(x)| \leq |\alpha| \|\psi_n - p\|_\infty \int_a^b |K(x, t)| dt$$

daha sonra her iki tarafın maximumu alınırsa,

$$\begin{aligned} \max\{|\varphi_{n+1}(x) - p(x)|\} &\leq |\alpha| \|\psi_n - p\|_\infty \max\left\{\int_a^b |K(x, t)| dt\right\} \\ \|\varphi_{n+1} - p\|_\infty &\leq |\alpha| M \|\psi_n - p\|_\infty \end{aligned} \quad (16)$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} |\psi_n(x) - p(x)| &= |A\tau_n(x) - Ap(x)| \\ &= \left| f(x) + \alpha \int_a^b K(x, t) \tau_n(t) dt - f(x) - \alpha \int_a^b K(x, t) p(t) dt \right| \\ &= |\alpha| \left| \int_a^b K(x, t) \tau_n(t) - K(x, t) p(t) dt \right| \\ &\leq |\alpha| \int_a^b |K(x, t) \tau_n(t) - K(x, t) p(t)| dt \\ &\leq |\alpha| \int_a^b |K(x, t)| |\tau_n(t) - p(t)| dt \\ |\psi_n(x) - p(x)| &\leq |\alpha| \|\tau_n - p\|_\infty \int_a^b |K(x, t)| dt \end{aligned}$$

bu son eşitsizlikte her iki tarafın maximumu alırsa,

$$\begin{aligned} \max\{|\psi_n(x) - p(x)|\} &\leq |\alpha| \|\tau_n - p\|_\infty \max\left\{\int_a^b |K(x, t)| dt\right\} \\ \|\psi_n - p\|_\infty &\leq |\alpha| M \|\tau_n - p\|_\infty \end{aligned} \quad (17)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} |\tau_n(x) - p(x)| &= |A\varphi_n(x) - Ap(x)| \\ &= \left| f(x) + \alpha \int_a^b K(x, t) \varphi_n(t) dt - f(x) + \alpha \int_a^b K(x, t) p(t) dt \right| \\ &= |\alpha| \left| \int_a^b K(x, t) \varphi_n(t) - K(x, t) p(t) dt \right| \\ &\leq |\alpha| \int_a^b |K(x, t) \varphi_n(t) - K(x, t) p(t)| dt \\ &\leq |\alpha| \int_a^b |K(x, t)| |\varphi_n(t) - p(t)| dt \end{aligned}$$

$$|\tau_n(x) - p(x)| \leq |\alpha| \|\varphi_n - p\|_\infty \int_a^x K(x, t) dt$$

bu son eşitsizlikte her iki tarafın maximumu alırsa,

$$\begin{aligned} \max\{|\tau_n(x) - p(x)|\} &\leq |\alpha| \|\varphi_n - p\|_\infty \max\left\{\int_a^b |K(x, t)| dt\right\} \\ \|\tau_n - p\|_\infty &\leq |\alpha| M \|\varphi_n - p\|_\infty \end{aligned} \quad (18)$$

elde edilir. Şimdi, (18) eşitsizliği (17) eşitsizliğinde yazılırsa,

$$\begin{aligned} \|\psi_n - p\|_\infty &\leq |\alpha| M |\alpha| M \|\varphi_n - p\|_\infty \\ \|\psi_n - p\|_\infty &\leq |\alpha|^2 M^2 \|\varphi_n - p\|_\infty \end{aligned} \quad (19)$$

bulunur. (19) eşitsizliği (16) eşitsizliğinde yazılırsa,

$$\begin{aligned} \|\varphi_{n+1} - p\|_\infty &\leq |\alpha| M |\alpha|^2 M^2 \|\varphi_n - p\|_\infty \\ \|\varphi_{n+1} - p\|_\infty &\leq |\alpha|^3 M^3 \|\varphi_n - p\|_\infty \end{aligned} \quad (20)$$

olur. (20) eşitsizliğine tümevarım uygulanarak,

$$\begin{aligned} \|\varphi_{n+1} - p\|_\infty &\leq |\alpha|^2 M^2 \|\varphi_n - p\|_\infty \\ &\leq |\alpha|^3 M^3 \|\varphi_{n-1} - p\|_\infty \\ &\vdots \\ \|\varphi_{n+1} - p\|_\infty &\leq (|\alpha| M)^{3(n+1)} \|\varphi_0 - p\|_\infty \end{aligned} \quad (21)$$

elde edilir. Böylece, (21) eşitsizliğinde $n \rightarrow \infty$ iken limit alınırsa $|\alpha| M < 1$ olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_{n+1} - p\|_\infty = 0$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Şimdi, (12) ile verilen integral denklemin çözümünün veri bağıllığı (6) ile verilen iterasyon algoritması kullanılarak incelensin. Bunun için,

$$u(x) = g(x) + \alpha_1 \int_a^b H(x, t)u(t)dt \quad (22)$$

integral denklemi tanımlansın. Öte yandan, $S : (C[a, b], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ operatörü ile tanımlanan

$$S(u(x)) = g(x) + \alpha_1 \int_a^b H(x, t)u(t)dt \quad (23)$$

integral denklemi göz önüne alınsın. Burada $g(x)$, $[a, b]$ üzerinde sürekli; $u(x)$, $[a, b]$ üzerinde çözümü istenen; $H(x, t)$, $G = \{(x, t) : (x, t) \in [a, b]\}$ bölgesi üzerinde sürekli olarak verilen birer fonksiyonlar ve α_1 bir parametredir. (6) ile verilen iterasyon algoritması $S(23)$ operatörü ile yeniden inşa edilirse,

$$\begin{cases} u_{n+1}(x) = g(x) + \alpha_1 \int_a^b H(x, t)v_n(t)dt \\ v_n(x) = g(x) + \alpha_1 \int_a^b H(x, t)w_n(t)dt \\ w_n(x) = g(x) + \alpha_1 \int_a^b H(x, t)u_n(t)dt \end{cases} \quad (24)$$

iterasyon algoritması yazılabilir.

Teorem 3.1.2: (15) algoritmasından elde edilen $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$ ve (24) algoritmasından elde edilen $\{u_n\}_{n=0}^\infty$ dizileri göz önüne alınsın. (12) ve (22) ile verilen integral denklemlerinin çözümleri, Teorem 3.1.1 in koşulları altında sırasıyla p ve q olsun.

i. $\forall (x, t) \in [a, b]$ için

$$B = \max_{a \leq x, t \leq b} |K(x, t) - H(x, t)|, \quad |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon_1$$

olacak şekilde B ve ε_1 sabitleri mevcut olsun.

ii. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$B \leq \frac{\varepsilon_2}{\|u_n\| + \|v_n\| + \|w_n\|}, \quad (\exists \|u_n\|, \|v_n\|, \|w_n\| \neq 0)$$

olacak şekilde bir ε_2 sabiti mevcut bulunsun.

$\alpha_0 = \max\{|\alpha|, |\alpha_1|\}$ olmak üzere, eğer $n \rightarrow \infty$ iken $\varphi_n \rightarrow p$ ve $u_n \rightarrow q$ ise,

$$\|p - q\| \leq \frac{|\alpha_0|(b-a)\varepsilon_2 + 3\varepsilon_1}{1 - |\alpha_0|M} \quad (25)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat:

$$\begin{aligned} |\varphi_{n+1}(x) - u_{n+1}(x)| &= \left| \begin{aligned} &f(x) + \alpha \int_a^b K(x, t) \psi_n(t) dt \\ &-g(x) - \alpha_1 \int_a^b H(x, t) v_n(t) dt \end{aligned} \right| \\ &\leq |f(x) - g(x)| \\ &\quad + \left| \alpha_0 \int_a^b \left(\begin{aligned} &K(x, t) \psi_n(t) - K(x, t) v_n(t) \\ &K(x, t) v_n(t) - H(x, t) v_n(t) \end{aligned} \right) dt \right| \\ &\leq \varepsilon_1 + |\alpha_0| \int_a^b |K(x, t)| |\psi_n(t) - v_n(t)| dt \\ &\quad + |\alpha_0| \int_a^b |K(x, t) - H(x, t)| |v_n(t)| dt \end{aligned}$$

olup bu son eşitsizlikte her iki tarafın maximumu alınır;

$$\begin{aligned} \max\{|\varphi_{n+1}(x) - u_{n+1}(x)|\} &\leq \max\{\varepsilon_1\} \\ &\quad + \max\left\{|\alpha_0| \int_a^b |K(x, t)| |\psi_n(t) - v_n(t)| dt\right\} \\ &\quad + \max\left\{|\alpha_0| \int_a^b |K(x, t) - H(x, t)| |v_n(t)| dt\right\} \\ \|\varphi_{n+1} - u_{n+1}\|_\infty &\leq \varepsilon_1 + |\alpha_0|M \|\psi_n - v_n\|_\infty + |\alpha_0|B(b-a) \|v_n\|_\infty \quad (26) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} |\psi_n(x) - v_n(x)| &= \left| \begin{aligned} &f(x) + \alpha \int_a^b K(x, t) \tau_n(t) dt \\ &-g(x) - \alpha_1 \int_a^b H(x, t) w_n(t) dt \end{aligned} \right| \\ &\leq |f(x) - g(x)| + \left| \alpha_0 \int_a^b \left(\begin{aligned} &K(x, t) \tau_n(t) - K(x, t) w_n(t) \\ &K(x, t) w_n(t) - H(x, t) w_n(t) \end{aligned} \right) dt \right| \\ &\leq \varepsilon_1 + |\alpha_0| \int_a^b |K(x, t)| |\tau_n(t) - w_n(t)| dt \\ &\quad + |\alpha_0| \int_a^b |K(x, t) - H(x, t)| |w_n(t)| dt \end{aligned}$$

olup bu son eşitsizlikte her iki tarafın maximumu alınır;

$$\begin{aligned}
\max\{|\psi_n(x) - v_n(x)|\} &\leq \max\{\varepsilon_1\} \\
&\quad + \max\left\{|\alpha_0| \int_a^b |K(x, t)| |\tau_n(t) - w_n(t)| dt\right\} \\
&\quad + \max\left\{|\alpha_0| \int_a^b |K(x, t) - H(x, t)| |w_n(t)| dt\right\} \\
\|\psi_n - v_n\|_\infty &\leq \varepsilon_1 + |\alpha_0| M \|\tau_n - w_n\|_\infty + |\alpha_0| B(b - a) \|w_n\|_\infty
\end{aligned} \tag{27}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
|\tau_n(x) - w_n(x)| &= \left| \begin{aligned} &f(x) + \alpha \int_a^b K(x, t) \varphi_n(t) dt \\ &-g(x) - \alpha_1 \int_a^b H(x, t) u_n(t) dt \end{aligned} \right| \\
&\leq |f(x) - g(x)| + \left| \alpha_0 \int_a^b \left(\begin{aligned} &K(x, t) \varphi_n(t) - K(x, t) u_n(t) \\ &K(x, t) u_n(t) - H(x, t) u_n(t) \end{aligned} \right) dt \right| \\
&\leq \varepsilon_1 + |\alpha_0| \int_a^b |K(x, t)| |\varphi_n(t) - u_n(t)| dt \\
&\quad + |\alpha_0| \int_a^b |K(x, t) - H(x, t)| |u_n(t)| dt
\end{aligned}$$

olup bu son eşitsizlikte her iki tarafın maximumu alınır;

$$\begin{aligned}
\max\{|\tau_n(x) - w_n(x)|\} &\leq \max\{\varepsilon_1\} \\
&\quad + \max\left\{|\alpha_0| \|\varphi_n - u_n\|_\infty \int_a^b |K(x, t)| dt\right\} \\
&\quad + \max\left\{|\alpha_0| \int_a^b |K(x, t) - H(x, t)| |u_n(t)| dt\right\} \\
\|\tau_n(x) - w_n(x)\|_\infty &\leq \varepsilon_1 + |\alpha_0| M \|\varphi_n - u_n\|_\infty + |\alpha_0| B(b - a) \|u_n\|_\infty
\end{aligned} \tag{28}$$

bulunur. Aşağıdaki hipotezler kullanılarak,

- $|\alpha| M < 1$
- $|\alpha_1| M < 1$
- $\alpha_0 = \max\{|\alpha|, |\alpha_1|\}$
- $\alpha_0 M < 1$

(28) eşitsizliği (27) eşitsizliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\|\psi_n - v_n\|_\infty &\leq \varepsilon_1 + |\alpha_0| M (\varepsilon_1 + |\alpha_0| M \|\varphi_n - u_n\|_\infty + |\alpha_0| B(b - a) \|u_n\|_\infty) \\
&\quad + |\alpha_0| B(b - a) \|w_n\|_\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon_1 + |\alpha_0|M\varepsilon_1 + |\alpha_0|M|\alpha_0|M\|\varphi_n - u_n\|_\infty \\
&\quad + |\alpha_0|M|\alpha_0|B(b-a)\|u_n\|_\infty + |\alpha_0|B(b-a)\|w_n\|_\infty \\
&\leq 2\varepsilon_1 + |\alpha_0|M\|\varphi_n - u_n\|_\infty + |\alpha_0|B(b-a)\|u_n\|_\infty \\
&\quad + |\alpha_0|B(b-a)\|w_n\|_\infty \\
&\leq 2\varepsilon_1 + |\alpha_0|M\|\varphi_n - u_n\|_\infty \\
&\quad + |\alpha_0|B(b-a)(\|u_n\|_\infty + \|w_n\|_\infty)
\end{aligned} \tag{29}$$

(29) eşitsizliği (26) eşitsizliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\|\varphi_{n+1} - u_{n+1}\|_\infty &\leq \varepsilon_1 + |\alpha_0|M \left[\frac{2\varepsilon_1 + |\alpha_0|M\|\varphi_n - u_n\|_\infty}{+|\alpha_0|B(b-a)(\|u_n\|_\infty + \|w_n\|_\infty)} \right] \\
&\quad + |\alpha_0|B(b-a)\|v_n\|_\infty \\
&= \varepsilon_1 + |\alpha_0|M2\varepsilon_1 + |\alpha_0|M|\alpha_0|M\|\varphi_n - u_n\|_\infty \\
&\quad + |\alpha_0|M|\alpha_0|B(b-a)(\|u_n\|_\infty + \|w_n\|_\infty) \\
&\quad + |\alpha_0|B(b-a)\|v_n\|_\infty \\
&\leq \varepsilon_1 + 2\varepsilon_1 + |\alpha_0|M\|\varphi_n - u_n\|_\infty \\
&\quad + |\alpha_0|B(b-a)(\|u_n\|_\infty + \|w_n\|_\infty) + |\alpha_0|B(b-a)\|v_n\|_\infty \\
&= 3\varepsilon_1 + |\alpha_0|M\|\varphi_n - u_n\|_\infty \\
&\quad + |\alpha_0|B(b-a)(\|u_n\|_\infty + \|v_n\|_\infty + \|w_n\|_\infty) \\
&\leq |\alpha_0|M\|\varphi_n - u_n\|_\infty + |\alpha_0|(b-a)\varepsilon_2 + 3\varepsilon_1 \\
&= (1 - (1 - |\alpha_0|M))\|\varphi_n - u_n\|_\infty + |\alpha_0|(b-a)\varepsilon_2 + 3\varepsilon_1 \\
&= (1 - (1 - |\alpha_0|M))\|\varphi_n - u_n\|_\infty \\
&\quad + (1 - |\alpha_0|M) \frac{3\varepsilon_1 + |\alpha_0|(b-a)\varepsilon_2}{(1 - |\alpha_0|M)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikte,

$$\begin{aligned}
a_n &= \|\varphi_n - u_n\|_\infty, \\
\mu_n &= (1 - |\alpha_0|M) \in (0,1), \\
\gamma_n &= \frac{3\varepsilon_1 + |\alpha_0|(b-a)\varepsilon_2}{1 - |\alpha_0|M}.
\end{aligned}$$

olarak kabul edilsin. Bu taktirde Lemma 2.1.2 nin koşulları sağlanacağından,

$$0 \leq \limsup \|\varphi_n - u_n\|_\infty$$

$$\leq \limsup \left\{ \frac{3\varepsilon_1 + |\alpha_0|(b-a)\varepsilon_2}{1 - |\alpha_0|M} \right\}$$

$$= \frac{3\varepsilon_1 + |\alpha_0|(b-a)\varepsilon_2}{1 - |\alpha_0|M}.$$

Dolayısıyla, $n \rightarrow \infty$ iken $\varphi_n \rightarrow p$ ve $u_n \rightarrow q$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ olur. Böylece,

$$\|p - q\| \leq \frac{3\varepsilon_1 + |\alpha_0|(b-a)\varepsilon_2}{1 - |\alpha_0|M}$$

elde edilir.

Örnek 3.1.1: $G = \{(x, t) : (x, t) \in [0, 1]\}$ bölgesinde verilen

$$K(x, t) = xt$$

sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$\varphi(x) = \frac{2x}{3} + \frac{1}{3} \int_0^1 xt\varphi(t)dt$$

integral denklemi göz önüne alınsın. $\forall (x, t) \in [0, 1]$ için

$$M = \max_{0 \leq x, t \leq 1} \int_0^1 |xt|dt = \max_{0 \leq x \leq 1} \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

olur. Buna göre $|\alpha| = \frac{1}{3}$ olduğundan,

$$|\alpha|M = \frac{1}{6} < 1$$

ve söz konusu denklemin $[0, 1]$ üzerinde sürekli bir tek p çözümü vardır.

Şimdi, $A : (C[0, 1], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ olmak üzere,

$$A\varphi(x) = \frac{2x}{3} + \int_0^1 xt\varphi(t)dt$$

operatörü tanımlansın. Öte yandan, G bölgesinde verilen

$$H(x, t) = x - t$$

sürekli bir fonksiyon olmak üzere bir başka integral denklem,

$$u(x) = x + \frac{1}{4} \int_0^1 (x - t) u(t) dt$$

göz önüne alınsın. $\forall (x, t) \in [0, 1]$ için

$$M_1 = \max_{0 \leq x, t \leq 1} \int_0^1 (x - t) dt = \frac{1}{2}$$

olur. Buna göre $|\alpha_1| = \frac{1}{4}$ olduğundan

$$|\alpha_1| M_1 = \frac{1}{8} < 1$$

ve söz konusu denklemin $[0, 1]$ üzerinde sürekli bir tek q çözümü vardır.

Şimdi, $S : (C[0, 1], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ olmak üzere,

$$Su(x) = x + \frac{1}{4} \int_0^1 (x - t) u(t) dt$$

operatörü tanımlansın. Bu durumda,

$$\alpha_0 = \max\{|\alpha|, |\alpha_1|\} = \max\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right\} = \frac{1}{3}$$

olur. $\forall (x, t) \in [0, 1]$ için

$$\int_0^1 |K(x, t) - H(x, t)| dt = \int_0^1 |xt - x + t| dt \leq \frac{1}{2} = B$$

$$|f(x, t) - g(x, t)| = \left| \frac{2x}{3} - x \right| = \frac{1}{3} \leq \varepsilon_1$$

$$B = \frac{1}{2} \leq \varepsilon_2$$

olup

$$\|p - q\| \leq \frac{3\varepsilon_1 + |\alpha_0|(b-a)\varepsilon_2}{1 - |\alpha_0|M} = \frac{3 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times (1-0) \times \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}} \cong 1,4$$

dir.

3.2. Lineer Olmayan Volterra İntegral Denklemler

Lineer olmayan Volterra integral denklemlerinin yakınsaklık ve veri bağılılığının incelenmesi için aşağıdaki iterasyon algoritması tanımlansın. Bunun için (14) de verilen integral denklemi kullanılarak (5) ile verilen iterasyon yöntemi $A : C([0, T]) \rightarrow C([0, T])$ operatörü ile

$$\begin{cases} \varphi_{n+1}(x) = f(x) + \alpha \int_a^x K(x, t, \psi_n(t)) dt \\ \psi_n(x) = (1 - \beta_n)\tau_n(x) + \beta_n[f(x) + \alpha \int_a^x K(x, t, \tau_n(t)) dt] \\ \tau_n(x) = f(x) + \alpha \int_a^x K(x, t, \varphi_n(t)) dt \end{cases} \quad (30)$$

olarak inşa edilsin.

Teorem 3.2.1: $A : (C([0, T]), \|\cdot\|_*) \rightarrow (C([0, T]), \|\cdot\|_*)$ bir operatör ve $\{\beta_n\}_{n=0}^\infty \subset [0, 1]$ belirli şartları sağlayan bir dizi olsun. Bu durumda, (14) ile verilen integral denklem bir tek $p \in C([0, T])$ çözümüne sahiptir. Eğer,

$$\rho = \max \left\{ e^{-L_1 x} \int_a^x \theta(x, t) e^{L_1 t} dt \right\},$$

olmak üzere $|\alpha|\rho < 1$ ise (30) ile verilen iterasyon algoritmasından elde edilen $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$ dizisi bu çözüme yakınsar.

İspat: $A : (C[0, T], \|\cdot\|_*) \rightarrow (C[0, T], \|\cdot\|_*)$ operatörü ile inşa edilen ve (30) ile verilen iterasyon algoritmasından elde edilen $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisini göz önüne alalım. $n \rightarrow \infty$ iken $\varphi_n \rightarrow p$ olduğu gösterilecektir. (14) integral denklemi, (30) iterasyon algoritması ve Teorem 2.3.2 in şartları kullanılarak, gerekli hesaplamalar yapılırsa;

$$\begin{aligned}
|\varphi_{n+1}(x) - p(x)| &= |A\psi_n(x) - Ap(x)| \\
&= \left| f(x) + \alpha \int_a^x K(x, t, \psi_n(t)) dt - f(x) - \alpha \int_a^x K(x, t, p(t)) dt \right| \\
&= |\alpha| \left| \int_a^x K(x, t, \psi_n(t)) dt - \int_a^x K(x, t, p(t)) dt \right| \\
&\leq |\alpha| \int_a^x |K(x, t, \psi_n(t)) - K(x, t, p(t))| dt \\
&\leq |\alpha| \int_a^x \theta(x, t) |\psi_n - p| dt \\
&\leq |\alpha| \|\psi_n - p\|_* \int_a^x \theta(x, t) e^{L_1 t} dt
\end{aligned}$$

olup

$$|\varphi_{n+1}(x) - p(x)| \leq |\alpha| \|\psi_n - p\|_* \int_a^x \theta(x, t) e^{L_1 t} dt$$

dir. Buradan bu son eşitsizlikte her taraf $e^{-L_1 x}$ ile çapılarak maximumu alınır;

$$\max\{e^{-L_1 x} |\varphi_{n+1}(x) - p(x)|\} \leq |\alpha| \|\psi_n - p\|_* \max\left\{e^{-L_1 x} \int_a^x \theta(x, t) e^{L_1 t} dt\right\}$$

olur. Buradan eğer $\theta(x, t) = L > 0$ ve $L \leq L_1$ ise

$$\rho = \frac{L(1 - e^{-L_1 T})}{L_1}$$

dir. Böylece,

$$\|\varphi_{n+1} - p\|_* \leq |\alpha| \rho \|\psi_n - p\|_* \quad (31)$$

elde edilir. Daha sonra,

$$\begin{aligned}
|\psi_n(x) - p(x)| &= |(1 - \beta_n)\tau_n(x) + \beta_n A\tau_n(x) - Ap(x)| \\
&= |\tau_n(x) - \beta_n\tau_n(x) + \beta_n A\tau_n(x) - Ap(x)| \\
&= |\tau_n(x) - Ap(x) + (A\tau_n(x) - \tau_n(x))\beta_n| \\
|\psi_n(x) - p(x)| &\leq |\tau_n(x) - p(x)|
\end{aligned}$$

olup son eşitsizlikte her iki tarafı $e^{-L_1 x}$ ile çapılarak maximumu alınır;

$$\|\psi_n - p\|_* \leq \|\tau_n - p\|_* \quad (32)$$

elde edilir. Benzer şekilde gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
|\tau_n(x) - p(x)| &= |A\varphi_n(x) - Ap(x)| \\
&= \left| f(x) + \alpha \int_a^x K(x, t, \varphi_n(t)) dt - f(x) - \alpha \int_a^x K(x, t, p(t)) dt \right| \\
&= |\alpha| \left| \int_a^x K(x, t, \varphi_n(t)) - K(x, t, p(t)) dt \right| \\
&\leq |\alpha| \int_a^x |K(x, t, \varphi_n(t)) - K(x, t, p(t))| dt \\
&\leq |\alpha| \int_a^x \theta(x, t) |\varphi_n(t) - p(t)| dt \\
&\leq |\alpha| \|\varphi_n - p\|_* \int_a^x \theta(x, t) e^{L_1 t} dt
\end{aligned}$$

olup

$$|\tau_n(x) - p(x)| \leq |\alpha| \|\varphi_n - p\|_* \int_a^x \theta(x, t) e^{L_1 t} dt$$

dir. Bu son eşitsizlikte her iki taraf $e^{-L_1 x}$ ile çapılıp maximumu alınır;

$$\max\{e^{-L_1 x} |\tau_n(x) - p(x)|\} \leq |\alpha| \|\varphi_n - p\| \max\left\{e^{-L_1 x} \int_a^x \theta(x, t) e^{L_1 t} dt\right\}$$

olur. Buradan,

$$\|\tau_n - p\|_* \leq |\alpha|\rho \|\varphi_n - p\|_* \quad (33)$$

elde edilir. (33) eşitsizliği (32) eşitsizliğinde yazılırsa,

$$\|\psi_n - p\|_* \leq |\alpha|\rho \|\varphi_n - p\|_* \quad (34)$$

olur. (34) eşitsizliği (31) eşitsizliğinde yazılırsa,

$$\|\varphi_{n+1} - p\|_* \leq (|\alpha|\rho)^2 \|\varphi_n - p\|_* \quad (35)$$

bulunur. (35) eşitsizliğine tümevarım uygulanarak,

$$\begin{aligned} \|\varphi_{n+1} - p\|_* &\leq (|\alpha|\rho)^2 \|\varphi_n - p\|_* \\ &\leq (|\alpha|\rho)^4 \|\varphi_{n-1} - p\|_* \\ &\vdots \\ \|\varphi_{n+1} - p\|_* &\leq (|\alpha|\rho)^{2(n+1)} \|\varphi_0 - p\|_* \end{aligned} \quad (36)$$

elde edilir. Böylece, (36) eşitsizliğinde $n \rightarrow \infty$ iken limit alınırsa $|\alpha|\rho < 1$ olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_{n+1} - p\|_* = 0$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Şimdi (5) ile verilen iterasyon algoritması kullanılarak (14) ile verilen integral denklemin çözümünün veri bağıllığını inceleyelim. Bunun için,

$$u(x) = g(x) + \alpha_1 \int_a^x H(x, t, u(t)) dt, \quad 0 < x \leq T \quad (37)$$

integral denklemi tanımlansın ve diğer yandan $S: (C[a, b], \|\cdot\|_*) \rightarrow (C[a, b], \|\cdot\|_*)$ operatörü ile tanımlanan

$$S(u(x)) = g(x) + \alpha_1 \int_a^x H(x, t, u(t)) dt \quad (38)$$

integral denklemi göz önüne alınsın. Burada $g(x)$, $[a, b]$ üzerinde sürekli; $u(x)$, $[a, b]$ üzerinde çözümü istenen; $H(x, t, u(t))$, $G = \{(x, t, u) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x, t \leq T, -\infty < u < \infty\}$ bölgesi üzerinde sürekli olarak verilen bir fonksiyon ve α bir parametredir. (5) ile verilen iterasyon algoritması $S(38)$ operatörü ile yeniden inşa edilirse,

$$\begin{cases} u_{n+1}(x) = g(x) + \alpha_1 \int_a^x H(x, t, v_n(t)) dt \\ v_n(x) = (1 - \beta_n)w_n(x) + \beta_n[g(x) + \alpha_1 \int_a^x H(x, t, w_n(t)) dt] \\ w_n(x) = g(x) + \alpha_1 \int_a^x H(x, t, u_n(t)) dt \end{cases} \quad (39)$$

iterasyon algoritması yazılabilir.

Teorem 3.2.2: $\{\beta_n\}_{n=0}^\infty \subset [0, 1]$ dizisi $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\beta_n \geq \frac{1}{2}$ şartını sağlasın. (30) ve (39) eşitliğinden elde edilen sırasıyla $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$ ve $\{u_n\}_{n=0}^\infty$ dizileri göz önüne alınsın. Teorem 2.3.2 in koşullarıyla (14) ve (37) ile verilen integral denklemlerinin çözümleri sırasıyla p ve q olsun.

i. $\forall (x, t) \in [0, T]$ için

$$|K(x, t, \mu) - H(x, t, \omega)| \leq \zeta(x, t)|\mu - \omega|$$

olacak şekilde $[0, T]^2$ üzerinde negatif olmayan ve sürekli $\zeta(x, t)$ fonksiyonu vardır. $\zeta(x, t) = N > 0$ ve $N \leq N_1$ olacak şekilde N_1 pozitif sayısı mevcut olsun.

ii.

$$M = \max\{e^{-N_1 x} \int_a^x \zeta(x, t) e^{N_1 t} dt\}$$

$$\varepsilon_1 = \max\{e^{-N_1 x} |f(x) - g(x)|\}$$

iii. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_0 = \max\{|\alpha|, |\alpha_1|\}$ olmak üzere,

$$0 < \alpha_0 M < \varepsilon_2 < 1$$

olacak şekilde bir ε_2 sabiti mevcut bulunsun.

Bu durumda eğer $n \rightarrow \infty$ iken $\varphi_n \rightarrow p$ ve $u_n \rightarrow q$ ise,

$$\|p - q\| \leq \frac{5\varepsilon_1}{1-\varepsilon_2} \quad (40)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Teorem 3.2.2 in hipotezleri göz önüne alınarak gerekli hesaplamalar yapılırsa,

$$\begin{aligned} |\varphi_{n+1}(x) - u_{n+1}(x)| &= \left| f(x) + \alpha \int_a^x K(x, t, \psi_n(t)) dt \right. \\ &\quad \left. - g(x) - \alpha_1 \int_a^x H(x, t, v_n(t)) dt \right| \\ &\leq |f(x) - g(x)| + \left| \alpha_0 \int_a^x \begin{pmatrix} K(x, t, \psi_n(t)) \\ -H(x, t, v_n(t)) \end{pmatrix} dt \right| \\ &= |f(x) - g(x)| + |\alpha_0| \left| \int_a^x \begin{pmatrix} K(x, t, \psi_n(t)) \\ -H(x, t, v_n(t)) \end{pmatrix} dt \right| \\ &\leq |f(x) - g(x)| + |\alpha_0| \int_a^x \left| \begin{pmatrix} K(x, t, \psi(t)) \\ -H(x, t, v_n(t)) \end{pmatrix} \right| dt \\ &\leq |f(x) - g(x)| + |\alpha_0| \int_a^x \zeta(x, t) |\psi_n(t) - v_n(t)| dt \\ &\leq |f(x) - g(x)| \\ &\quad + |\alpha_0| \int_a^x \zeta(x, t) |\psi_n(t) - v_n(t)| e^{-N_1 t} e^{N_1 t} dt \\ &\leq |f(x) - g(x)| + |\alpha_0| \|\psi_n - v_n\|_* \int_a^x \zeta(x, t) e^{N_1 t} dt \end{aligned}$$

olup bu son eşitsizlikte her iki taraftaki eşitsizliği $e^{-N_1 x}$ ile çarpıp maximumu alınırsa;

$$\begin{aligned} \max\{e^{-N_1 x} |\varphi_{n+1}(x) - u_{n+1}(x)|\} &\leq \max\{e^{-N_1 x} |f(x) - g(x)|\} \\ &\quad + \max\{|\alpha_0| \|\psi_n - v_n\|_* e^{-N_1 x} \int_a^x \zeta(x, t) e^{N_1 t} dt\} \\ \|\varphi_{n+1} - u_{n+1}\|_* &\leq \varepsilon_1 + |\alpha_0| M \|\psi_n - v_n\|_* \end{aligned} \quad (41)$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} |\psi_n(x) - v_n(x)| &\leq (1 - \beta_n) |\tau_n(x) - w_n(x)| \\ &\quad + \beta_n \left| f(x) + \alpha \int_a^x K(x, t, \tau_n(t)) dt \right. \\ &\quad \left. - g(x) - \alpha_1 \int_a^x H(x, t, w_n(t)) dt \right| \\ &\leq (1 - \beta_n) |\tau_n(x) - w_n(x)| + \beta_n |f(x) - g(x)| \\ &\quad + \beta_n |\alpha_0| \left| \int_a^x \begin{pmatrix} K(x, t, \tau_n(t)) \\ -H(x, t, w_n(t)) \end{pmatrix} dt \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (1 - \beta_n)|\tau_n(x) - w_n(x)| + \beta_n|f(x) - g(x)| \\
&\quad + \beta_n|\alpha_0| \int_a^x |K(x, t, \tau_n(t)) - H(x, t, w_n(t))| dt \\
&\leq (1 - \beta_n)|\tau_n(x) - w_n(x)| + \beta_n|f(x) - g(x)| \\
&\quad + \beta_n|\alpha_0| \int_a^x \zeta(x, t) |\tau_n(t) - w_n(t)| dt \\
&\leq (1 - \beta_n)|\tau_n(x) - w_n(x)| + \beta_n|f(x) - g(x)| \\
&\quad + \beta_n|\alpha_0| \|\tau_n - w_n\|_* \int_a^x \zeta(x, t) e^{N_1 t} dt
\end{aligned}$$

bu son eşitsizlikte her iki taraftaki eşitsizliği $e^{-N_1 x}$ ile çarpıp maximumu alınırsa;

$$\begin{aligned}
\max\{e^{-N_1 x}|\psi_n(x) - v_n(x)|\} &\leq (1 - \beta_n)\max\{e^{-N_1 x}(|\tau_n(x) - w_n(x)|)\} \\
&\quad + \beta_n\max\{e^{-N_1 x}|f(x) - g(x)|\} \\
&\quad + \beta_n|\alpha_0| \|\tau_n - w_n\|_* \max\{e^{-N_1 x} \int_a^x \zeta(x, t) e^{N_1 t} dt\} \\
\|\psi_n - v_n\|_* &\leq (1 - \beta_n)\|\tau_n - w_n\|_* + \beta_n \varepsilon_1 + \beta_n|\alpha_0| M \|\tau_n - w_n\|_* \\
\|\psi_n - v_n\|_* &\leq \|\tau_n - w_n\|_* (1 - \beta_n + \beta_n|\alpha_0| M) + \beta_n \varepsilon_1
\end{aligned} \tag{42}$$

elde edilir. Daha sonra,

$$\begin{aligned}
|\tau_n(x) - w_n(x)| &= \left| \frac{f(x) + \alpha \int_a^x K(x, t, \varphi_n(t)) dt}{-g(x) - \alpha_1 \int_a^x H(x, t, u_n(t)) dt} \right| \\
&\leq |f(x) - g(x)| + |\alpha_0| \left| \int_a^x K(x, t, \varphi_n(t)) - H(x, t, u_n(t)) dt \right| \\
&\leq |f(x) - g(x)| + |\alpha_0| \int_a^x |K(x, t, \varphi_n(t)) - H(x, t, u_n(t))| dt \\
&\leq |f(x) - g(x)| + |\alpha_0| \int_a^x \zeta(x, t) |\varphi_n(t) - u_n(t)| dt \\
&\leq |f(x) - g(x)| + |\alpha_0| \|\varphi_n - u_n\|_* \int_a^x \zeta(x, t) e^{N_1 t} dt
\end{aligned}$$

Her iki taraftaki eşitsizliği $e^{-N_1 x}$ ile çarpıp maximumu alınırsa;

$$\begin{aligned}
e^{-N_1 x} \max\{|\tau_n(x) - w_n(x)|\} &\leq \max\{e^{-N_1 x}|f(x) - g(x)|\} \\
&\quad + |\alpha_0| \|\varphi_n - u_n\|_* \max\left\{e^{-N_1 x} \int_a^x \zeta(x, t) e^{N_1 t} dt\right\} \\
\|\tau_n - w_n\|_* &\leq \varepsilon_1 + |\alpha_0| M \|\varphi_n - u_n\|_*
\end{aligned} \tag{43}$$

bulunur. Aşağıdaki hipotezler kullanılarak,

- $\alpha_0 = \max\{|\alpha|, |\alpha_1|\}$
- $0 < \alpha_0 M < \varepsilon_2 < 1$
- $\frac{1}{2} \leq \beta_n \leq 1$
- $1 - \beta_n \leq \beta_n$

(43) eşitsizliği, (42) eşitsizliğinde yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\|\psi_n - v_n\|_* &\leq (\varepsilon_1 + |\alpha_0| M \|\varphi_n - u_n\|_*)(1 - \beta_n + \beta_n |\alpha_0| M) + \beta_n \varepsilon_1 \\
&\leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \|\varphi_n - u_n\|_*)(1 - \beta_n + \beta_n \varepsilon_2) + \beta_n \varepsilon_1 \\
&= \varepsilon_1 - \varepsilon_1 \beta_n + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \beta_n + \varepsilon_2 (1 - \beta_n + \beta_n \varepsilon_2) \|\varphi_n - u_n\|_* + \beta_n \varepsilon_1 \\
&= \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \beta_n + \varepsilon_2 (1 - \beta_n + \beta_n \varepsilon_2) \|\varphi_n - u_n\|_* \\
&= \varepsilon_2 (1 - \beta_n + \beta_n \varepsilon_2) \|\varphi_n - u_n\|_* + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \beta_n + \varepsilon_1
\end{aligned} \tag{44}$$

bulunur. (44) eşitsizliği (41) eşitsizliğinde yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\|\varphi_{n+1} - u_{n+1}\|_* &\leq \varepsilon_1 + |\alpha_0| M \|\psi_n - v_n\|_* \\
&\leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 [\varepsilon_2 (1 - \beta_n + \beta_n \varepsilon_2) \|\varphi_n - u_n\|_* + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \beta_n + \varepsilon_1] \\
&= \varepsilon_1 + \varepsilon_2^2 (1 - \beta_n + \beta_n \varepsilon_2) \|\varphi_n - u_n\|_* + \varepsilon_1 \varepsilon_2^2 \beta_n + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \\
&= \varepsilon_2^2 (1 - \beta_n + \beta_n \varepsilon_2) \|\varphi_n - u_n\|_* + \varepsilon_1 \varepsilon_2^2 \beta_n + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \\
&\leq \varepsilon_2^2 (1 - \beta_n + \beta_n \varepsilon_2) \|\varphi_n - u_n\|_* + \varepsilon_1 \varepsilon_2^2 \beta_n + \varepsilon_1 \varepsilon_2^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2^2 \\
&= \varepsilon_2^2 [(1 - \beta_n + \beta_n \varepsilon_2) \|\varphi_n - u_n\|_* + \beta_n \varepsilon_1 + 2.1 \varepsilon_1] \\
&\leq (1 - \beta_n + \beta_n \varepsilon_2) \|\varphi_n - u_n\|_* + \beta_n \varepsilon_1 + 2.2 \cdot \beta_n \cdot \varepsilon_1 \\
&= (1 - \beta_n + \beta_n \varepsilon_2) \|\varphi_n - u_n\|_* + 5 \beta_n \varepsilon_1 \\
&= [1 - (\beta_n - \beta_n \varepsilon_2)] \|\varphi_n - u_n\|_* + 5 \beta_n \varepsilon_1 \\
&\leq [1 - \beta_n (1 - \varepsilon_2)] \|\varphi_n - u_n\|_* + (1 - \varepsilon_2) \frac{5 \varepsilon_1 \beta_n}{1 - \varepsilon_2} \\
&\leq [1 - \beta_n (1 - \varepsilon_2)] \|\varphi_n - u_n\|_* + \beta_n (1 - \varepsilon_2) \frac{5 \varepsilon_1}{1 - \varepsilon_2}
\end{aligned} \tag{45}$$

bulunur. (45) eşitsizliğinde,

$$\begin{aligned}
a_n &= \|\varphi_n - u_n\|_* \\
\mu_n &= \beta_n (1 - \varepsilon_2) \in (0, 1) \\
\gamma_n &= \frac{5 \varepsilon_1}{1 - \varepsilon_2} \geq 0
\end{aligned}$$

olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\beta_n \geq \frac{1}{2}$ olduğundan $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n = \infty$ dir. Dolayısıyla, $\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n = \infty$ olur. Böylece, (45) eşitsizliği Lemma 2.1.2 nin tüm şartlarını sağlar. Böylece,

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - u_n\|_* \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{5\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_2}$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ iken $\varphi_n \rightarrow p$ ve $u_n \rightarrow q$ olduğundan,

$$\|p - q\| \leq \frac{5\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_2}$$

bulunur.

Örnek 3.2.1: $G = \{(x, t, \varphi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x, t \leq 1, -\infty < \varphi < \infty\}$ bölgesi üzerinde

$$K(x, t, \varphi(t)) = (2 - t)\varphi(t)$$

sürekli fonksiyon ve integral denklemi

$$\varphi(x) = \frac{(1+x)e^{2x}}{30} - \int_0^x (2-t)\varphi(t)dt$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} |K(x, t, \varphi) - K(x, t, \psi)| &\leq |(2-t)\varphi(t) - (2-t)\psi(t)| \\ &\leq (2-t)|\varphi(t) - \psi(t)| \end{aligned}$$

olacak şekilde $[0,1]^2$ üzerinde negatif olmayan ve sürekli $\theta(x, t) = 2 - t$ fonksiyonu vardır. $C([0,1])$ uzayı üzerinde tanımlı, normu

$$\|\varphi\|_* = \max \left\{ e^{-L_1 x} \left| \int_0^x (2-t)\varphi(t)dt \right| : x \in [0,1] \right\},$$

olmak üzere eğer $\theta(x, t) = (2 - t) = L > 0$ ve $L \leq L_1$ olmak üzere $L_1 = 2$ alırsak,

$$\rho = \max \left\{ \frac{(2-t)(1-e^{-2x})}{2} \right\} = \frac{(2-0)(1-e^{-2})}{2} < 1$$

verilen integral denkleminin bir tek çözümü vardır.

$$H(x, t, u(t)) = (1-t)u(t)$$

sürekli fonksiyon ve integral denklemi

$$u(x) = \frac{xe^{2x}}{30} - \int_0^x (1-t)u(t)dt$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} |H(x, t, u) - H(x, t, v)| &\leq |(1-t)u(t) - (1-t)v(t)| \\ &\leq (1-t)|u(t) - v(t)| \end{aligned}$$

olacak şekilde $[0,1]^2$ üzerinde negatif olmayan ve sürekli $\theta(x, t) = 1 - t$ fonksiyonu vardır. $C([0,1])$ uzayı üzerinde tanımlı, normu

$$\|u\|_* = \max \left\{ e^{-N_1 x} \left| \int_0^x (1-t)u(t)dt \right| : x \in [0,1] \right\},$$

olmak üzere eğer $\theta(x, t) = (1-t) = L > 0$ ve $L \leq L_1$ olmak üzere $L_1 = 1$ alınırsa

$$\rho = \max \left\{ \frac{(1-t)(1-e^{-x})}{1} \right\} = \frac{(1-0)(1-e^{-1})}{1} < 1$$

verilen integral denkleminin bir çözümü vardır ve tektir. Buradan,

$$\varphi(x) = \frac{(1+x)e^{2x}}{30} - \int_0^x (2-t)\varphi(t)dt$$

$$u(x) = \frac{xe^{2x}}{30} - \int_0^x (1-t)u(t)dt$$

$$|K(x, t, \varphi) - H(x, t, u)| \leq (2-t)|\varphi - u|$$

olacak şekilde $[0,1]^2$ üzerinde negatif olmayan ve sürekli $\zeta(x, t) = 2 - t$ fonksiyonu mevcut olsun. Böylece $\zeta(x, t) = N > 0$ ve $N \leq N_1$ olacak şekilde $N_1 = 2$ pozitif sayısı mevcuttur.

$$M = \max \left\{ e^{-2x} \int_0^x (2-t) e^{2t} dt \right\} = \max \left\{ e^{-2x} \left[\frac{5}{4} - \frac{x}{2} - \frac{5}{4} e^{-2x} \right] \right\} = 0,58$$

$$\varepsilon_1 = \max \left\{ e^{-2x} \left| \frac{(1+x)e^{2x}}{30} - \frac{xe^{2x}}{30} \right| \right\} = \frac{1}{30}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_0 = \max\{|-1|, |-1|\} = 1$ olmak üzere,

$$0 < \alpha_0 M < \varepsilon_2 < 1$$

olacak şekilde bir ε_2 sabiti mevcut bulunsun. Bu durumda eğer $n \rightarrow \infty$ iken $\varphi_n \rightarrow p$ ve $u_n \rightarrow q$ ise,

$$\|p - q\| \leq \frac{5\varepsilon_1}{(1 - \varepsilon_2)} = \frac{5 \cdot \frac{1}{30}}{0,58} \leq 0,287$$

dir.

4. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu tez çalışmasında, Picard'ın üç adımlı iterasyon yöntemi ve üç adımlı iterasyon yöntemlerinden elde edilen dizilerin sırasıyla, lineer Fredholm ve lineer olmayan Volterra integral denklemlerin çözümlerine güçlü yakınsadığı ispatlanmıştır. Ayrıca, bu integral denklemler için veri bağıllığı elde edilmiş ve bu sonuçlar örneklerle desteklenmiştir.

Tez çalışması boyunca yapılan incelemelerden;

- Daralma dönüşüm sınıflarının geliştirildiği,
 - Yeni iterasyon yöntemlerinin ortaya konduğu,
 - Banach sabit nokta teoreminin farklı uzaylar, daralma dönüşümleri ve iterasyon yöntemleri kullanılarak bir çok yeni versiyonun elde edildiği,
 - Elde edilen bu sabit nokta teoremlerinin matematik anabilim dalı başta olmak üzere fizik, ekonomi gibi birçok anabilim dalında yaygın bir şekilde kullanıldığı,
 - Özellikle integral denklemler ile çözülebilen güncel problemlerde sabit nokta teorilerinin geniş bir şekilde kullanıldığı,
- gözlemlenmiştir.

Sonuç olarak, yeni daralma dönüşümleri sınıfları, iterasyon yöntemleri tanımlanabilir. Böylece çeşitli integral denklemleri için yeni sabit nokta teoremleri ifade edilebilir.

KAYNAKÇA

- Abbas, M. and Nazir, T. (2014). A new faster iteration process applied to constrained minimization and feasibility problems. *Matematički Vesnik*, 66(2), 223–234.
- Agarwal, R. P., O'Regan, D. and Sahu, D. R. (2007). Iterative construction of fixed points of nearly asymptotically nonexpansive mappings. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 8(1), 61-79.
- Agarwal, R. P., O'Regan, D. and Sahu, D. R. (2009). *Fixed Point Theory For Lipschitzian-Type Mappings With Applications*. New York: Springer.
- Ali, F., Ali, J. and Rodríguez-Lopez, R. (2021). Approximation of fixed points and the solution of a nonlinear integral equation. *Nonlinear Functional Analysis and Applications*, 26(5), 869-885.
- Atalan, Y. (2017). *Sabit nokta yaklaşımlarıyla bazı diferansiyel ve integral denklemlerin çözümleri, Doktora tezi, YÖK Ulusal Tez Merkezi, (467689)*.
- Atalan, Y. (2018). Yeni bir iterasyon yöntemi için hemen-hemen büzülme dönüşümleri altında bazı sabit nokta teoremleri. *Marmara Fen Bilimleri Dergisi*, 30(3), 276-285.
- Atalan, Y. (2019). İteratif yaklaşım altında bir fonksiyonel-integral denklem sınıfının çözümünün incelenmesi. *Journal of the Institute of Science and Technology*, 9(3), 1622-1632.
- Atalan, Y. and Karakaya, V. (2017). Iterative solution of functional Volterra-Fredholm integral equation with deviating argument. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 18(4), 675-684.
- Banach, S. (1922). Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fundamenta Mathematicae*, 3(1), 133-181.
- Bayraktar, M. (2006). *Fonksiyonel Analiz*. Erzurum: Atatürk Üniversitesi Yayınları.
- Berinde, V. (2004). Approximating fixed points of weak contractions using the Picard iteration. *Nonlinear Analysis Forum*, 9, 43-53.
- Berinde, V. (2007). *Iterative Approximation Of Fixed Points*. Berlin: Springer.
- Brouwer, L. E. J. (1911). Über abbildung von mannigfaltigkeiten. *Mathematische Annalen*, 71(1), 97-115.
- Chatterjea, S. K. (1972). Fixed point theorems. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, 25, 727-730.
- Chugh, R. and Kumar, V. (2011). Strong convergence and stability results for Jungck-SP iterative scheme. *International Journal of Computer Applications*, 36(12), 40-46.

- Chugh, R. and Kumar, V. (2012). Stability of hybrid fixed point iterative algorithms of Kirk-Noor Type in normed linear space for self and nonself operators. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 7(24), 1165-1184.
- Chugh, R., Kumar, V. and Kumar, S. (2012). Strong convergence of a new three step iterative scheme in Banach spaces. *American Journal of Computational Mathematics*, 2(4), 345-357.
- Cona, L. and Şengül, K. (2023). On Data Dependency and Solutions of Nonlinear Fredholm Integral Equations with the Three-Step Iteration Method. *Ikonion Journal of Mathematics*, (5)2; 53-64.
- Doğan, K. (2016). *Bazı geometrik özellikler ve sabit nokta iterasyonları. Doktora tezi, YÖK Ulusal Tez Merkezi, (418376).*
- Gürsoy, F. (2014). *Bazı yeni sabit nokta iterasyon yöntemlerinin yakınsaklıklarının ve kararlılıklarının incelenmesi. Doktora tezi, YÖK Ulusal Tez Merkezi, (387079).*
- Gürsoy F. (2016). A Picard-S iterative method for approximating fixed point of weak-contraction mappings. *Filomat*, 30(10), 2829-2845.
- Gürsoy, F. and Karakaya, V. (2014a). A Picard-S hybrid type iteration method for solving a differential equation with retarded argument. *arXiv preprint arXiv:1403.2546*.
- Gürsoy, F. and Karakaya, V. (2014b). Some convergence and stability results for two new Kirk type hybrid fixed point iterative algorithms. *Journal of Function Spaces*. <https://doi.org/10.1155/2014/684191>.
- Gürsoy, F., Karakaya, V. and Rhoades, B. E. (2013). Data dependence results of new multi-step and S-iterative schemes for contractive-like operators. *Fixed Point Theory and Applications*, 76, 1-12.
- Gürsoy, F., Karakaya, V. and Rhoades, B. E. (2014). Some convergence and stability results for the Kirk Multistep and Kirk-SP fixed point iterative algorithms. *Abstract and Applied Analysis*. <https://doi.org/10.1155/2014/806537>.
- Hussain, N., Chugh, R., Kumar, V. and Rafiq, A. (2012). On the rate of convergence of Kirk-type iterative schemes. *Journal of Applied Mathematics*, 2012.
- Hussain, N., Kumar, V. and Kutbi, M. A. (2013). On rate of convergence of Jungck-type iterative schemes. *Abstract and Applied Analysis*.
- Imoru, C. O. and Olatinwo, M. O. (2003). On the stability of Picard and Mann iteration processes. *Carpathian Journal of Mathematics*, 19(2), 155-160.
- Ishikawa, S. (1974). Fixed points by a new iteration method. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 44(1), 147-150.

- Jungck, G. (1976). Commuting mappings and fixed points. *The American Mathematical Monthly*, 83(4), 261-263.
- Karahan, İ. and Özdemir, M. (2013). A general iterative method for approximation of fixed points and their applications. *Advances in Fixed Point Theory*, 3(3), 510-526.
- Karakaya, V., Atalan, Y., Doğan, K. and Bouzara, N. E. H. (2017). Some fixed point results for a new three steps iteration process in Banach spaces. *Fixed Point Theory*, 18(2), 625-640.
- Kannan, R. (1968). Some results on fixed points. *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, 60, 71-76.
- Khan, S. H. (2013). A Picard-Mann hybrid iterative process. *Fixed Point Theory and Applications*, 2013(69), 1-10.
- Kirk, W. A. (1971). On successive approximations for nonexpansive mappings in Banach spaces. *Glasgow Mathematical Journal*, 12(1), 6-9.
- Krasnosel'skii, M. A. (1955). Two comments on the method of successive approximations. *Usp. Math. Nauk*, 10, 123-127.
- Köklü, K. (2018). *İntegral Denklemler*. İstanbul: Papatya Yayıncılık.
- Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York: John Wiley-Sons.
- Maddox, I. J. (1970). *Elements Of Functional Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Mann, W. R. (1953). Mean value methods in iteration. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 4(3), 506-510.
- Musayev, B. and Alp, M. (2000). *Fonksiyonel Analiz*. Kütahya: Balcı Yayınları.
- Noor, M. A. (2000). New approximation schemes for general variational inequalities. *Journal of Mathematical Analysis and applications*, 251(1), 217-229.
- Olatinwo, M. O. (2009). Some stability results for two hybrid fixed point iterative algorithms in normed linear space. *Matematički Vesnik*, 61(4), 247-256.
- Phuengrattana, W. and Suantai, S. (2011). On the rate of convergence of Mann, Ishikawa, Noor and SP-iterations for continuous functions on an arbitrary interval. *Journal of computational and Applied Mathematics*, 235(9), 3006-3014.
- Picard, E. (1890). Memoire sur la theorie des equations aux derivees partielles et la methode des approximations successives. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 6, 145-210.

- Petryshyn, W.V. and Williamson T.E. (1973). Strong and weak convergence of the sequence of successive approximations for quasi-nonexpansive mappings. *J. Math. Anal. Appl.* 43 (2), 459-497.
- Rhoades, B. E. and Şoltuz, Ş. M. (2004). The equivalence between Mann–Ishikawa iterations and multistep iteration. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 58(1-2), 219-228.
- Rynne, B. P. and Youngson, M. A. (2008). *Linear Functional Analysis*. Springer.
- Rus, I.A. (1996). *Picard Operators and Applications*. Babes-Bolyai University, Faculty of Mathematics and Computer Science, Cluj-Napoca.
- Sahu, D. R. (2011). Applications of the S-iteration process to constrained minimization problems and split feasibility problems. *Fixed Point Theory*, 12(1), 187-204.
- Schaefer, H. (1957). Über die Methode sukzessiver Approximationen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 59, 131-140.
- Soykan, Y. (2008). *Fonksiyonel Analiz*. Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.
- Şoltuz, Ş. M. and Grosan, T. (2008). Data dependence for Ishikawa iteration when dealing with contractive-like operators. *Fixed Point Theory and Applications*, 2008, 1-7.
- Suantai, S. (2005). Weak and strong convergence criteria of Noor iterations for asymptotically nonexpansive mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 311(2), 506-517.
- Suzuki, T. (2008). Fixed point theorems and convergence theorems for some generalized nonexpansive mappings. *J. Math. Anal. Appl.* 340, 1088-1095.
- Thakur, D., Thakur, B.S. and Postolache, M. (2014). New iteration scheme for numerical reckoning fixed points of nonexpansive mappings. *Journal of Inequalities and Applications*, 2014: 1-5.
- Thakur, B.S., Thakur, D. and Postolache, M. (2016). A new iteration scheme for numerical reckoning fixed points of Suzuki's generalized nonexpansive mapping, *Applied Mathematics and Computation*, 147-155, 275.
- Ullah, K. and Arshad, M. (2018). Numerical reckoning fixed points for Suzuki's generalized nonexpansive mappings via new iteration process. *Filomat*, 32:1 187-196.
- Wang, X. (1991). Fixed point iteration for local strictly pseudo-contractive mapping, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 113(3), 727-731.
- Xu, B. and Noor, M. A. (2002). Fixed point iterations for asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 267(2), 444-453.

Yüksel, Ş. (2014). Genel Topoloji, Eğitim Yayınevi, Konya.

Zabreyko, P.P. (1975). *Integral Equations*, Noordhoff International Publishing, Leyden.

Zamfirescu, T. (1972). Fix point theorems in metric spaces. *Archiv der Mathematik*, 23(1), 292-298.



ÖZGEÇMİŞ

Tuğba TUNA, lise eğitimini Edremit Anadolu Lisesi'nde 2012 yılında bitirdi. 2013 senesinde Bartın Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümüne yerleşip 2017 yılında lisans eğitimini tamamladı. 2021 yılında Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü bünyesinde Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda tezli yüksek lisans eğitimine başladı. 2024 yılında yüksek lisans eğitimini tamamladı.

Bildiriler:

- Cona, L. and Tuna, T. (2023). Solutions of Nonlinear Volterra Integral Equations with the Three Steps Iteration Method, 2. Bilsel International World Scientific and Research Congress, September 16-17, İstanbul, s.337.
- Cona, L. and Tuna, T. (2023). Data Dependence and Solution of Nonlinear Volterra Integral Equations with The Three Steps Iteration Method, 3.International Trakya Scientific Research Congress, November 25-26, Edirne, s.227.
- Cona, L. and Tuna, T. (2023). Solutions of Linear Fredholm Integral Equations with The Picard's Three-Step Iteration Method, 11. International Summit Scientific Research Congress, December 15-17, Gaziantep, s.749-754.
- Cona, L. and Tuna, T. (2023). Data Dependence with Picard's Three-Step Iteration Method for Linear Fredholm Integral Equations, 11. International Summit Scientific Research Congress, December 15-17, Gaziantep, s.755-762.