



**BAZI İNTEGRAL
EŞİTSİZLİKLERİN
GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ
BASAMAKTAN İNTEGRAL
OPERATÖRLER YOLUYLA
İNCELENMESİ**

Merve Nur ÇAKALOĞLU

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Ana Bilim Dalı
Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR**

2023

Her hakkı saklıdır

T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİN GENELLEŞTİRİLMİŞ
KESİRLİ BASAMAKTAN İNTEGRAL OPERATÖRLER
YOLUYLA İNCELENMESİ

MERVE NUR ÇAKALOĞLU

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

AĞRI

2023

Her hakkı saklıdır

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİN GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ BASAMAKTAN İNTEGRAL OPERATÖRLER YOLUYLA İNCELENMESİ

Merve Nur ÇAKALOĞLU

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Bu tez çalışmasının ilk bölümünde konvekslik kavramı, kesirli analizin tarihçesi ve eşitsizlikler kavramının çalışma alanları verilmiştir. İkinci bölümde, konveks fonksiyonlarla ilgili temel tanım ve özellikler ile farklı türden bazı konveks fonksiyon sınıflarına yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, literatürdeki bazı temel eşitsizlikler ve kesirli basamaktan integral operatörleri tanıtılmıştır. Sonraki bölümde ABK-kesirli integral, Katugampola kesirli integral ve Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri kullanılarak ters Minkowski, Hadamard ve Simpson tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Elde edilen bulgular için parametrelerin özel seçimleri ile literatürde var olan sonuçları destekleyen çeşitli sonuçlar verilmiştir.

2023, 57 sayfa

Anahtar Kelimeler: Hölder eşitsizliği, power-mean eşitsizliği, konveks fonksiyonlar, Atangana Baleanu kesirli integral, ters Minkowski eşitsizliği, Hermite-Hadamard eşitsizliği, Simpson Eşitsizliği.

ABSTRACT

MASTER THESIS

EXAMINATION OF SOME INTEGRAL INEQUALITIES WITH THE HELP OF GENERALIZED FRACTIONAL ORDER INTEGRAL OPERATORS

Merve Nur ÇAKALOĞLU

Ağrı İbrahim Çeçen University

Institute of Graduate Studies

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

In the first part of this thesis, the concept of convexity, the history of fractional analysis and the working areas of the concept of inequalities are given. In the second chapter, basic definitions and properties of convex functions and some different types of convex function classes are given. In the third chapter, some basic inequalities in the literature and fractional digit integral operators are introduced. In the next section, Reverse Minkowski, Hadamard and Simpson type inequalities are obtained by using ABK-fractional integral, Katugampola fractional integral and Atangana-Baleanu fractional integral operators. For the findings obtained, various results supporting the results available in the literature are given with the special selection of the parameters.

2023, 57 pages

Keywords: Hölder inequality, power-mean inequality, convex functions, Atangana Baleanu fractional integral, Reverse Minkowski inequality, Hermite-Hadamard inequality, Simpson inequality.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum bu çalışma Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Yüksek lisans çalışmam boyunca bilgilerinden ve tecrübelerinden faydalandığım, yanında çalışmaktan onur duyduğum, ihtiyacım olduğu her anda sabır ve anlayış ile yardımlarını esirgemeyen, bu araştırmanın konusu, yürütülmesi ve yazım aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı saygıdeğer danışman hocam,

Sayın Prof. Dr. Ahmet Ocak Akdemir'e;

teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Yüksek lisans eğitimim aşamasında dersleriyle, bilgi ve görüşleriyle bizleri aydınlatan ve bizlere yol gösteren Sayın Doç. Dr. Mustafa GÜRBÜZ, Sayın Doç. Dr. Mustafa Ali DOKUYUCU hocalarıma da teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca; öğrenim hayatım boyunca sabırla, güvenle ve ilgiyle hep yanımda olan desteklerini hiç eksik etmeyen aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Merve Nur ÇAKALOĞLU

Temmuz 2023

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
SİMGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER	3
2.1. Konveks fonksiyonlarla ilgili temel tanım ve özellikler	3
2.2. Farklı türden bazı konveks fonksiyon sınıfları	5
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	9
3.1. İntegraller için Hölder eşitsizliği.....	9
3.2. İntegraller için Power Mean eşitsizliği	9
3.3. Young eşitsizliği.....	9
3.4. Hermite – Hadamard Eşitsizliği	10
3.5. Simpson İntegral Eşitsizliği	10
3.6. Minkowski İntegral Eşitsizliği	10
3.7. Kesirli İntegral Operatörler.....	10
3.7.1. Riemann – Liouville Kesirli İntegral Operatörü	10
3.7.2. Hadamard Kesirli İntegral Operatörü	11
3.7.3. Katugampola Kesirli İntegral Operatörü	11
3.7.4. Atangana-Baleanu Kesirli İntegral Operatörü	12
3.7.5. ABK-Kesirli İntegral Operatörü.....	12
4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	13
4.1. ABK-Kesirli İntegral Operatörler Yardımıyla Elde Edilen Ters Minkowski Tipli Eşitsizlikler	13
4.2. Katugampola Kesirli İntegraller İçeren Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler	
31	
4.3. Atangana-Baleanu Kesirli İntegral Operatörler Yardımıyla Konveks Fonksiyonlar İçin Elde Edilen Simpson Tipli Eşitsizlikler	42
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	52

KAYNAKÇA	53
ÖZGEÇMİŞ.....	57



SİMGELER DİZİNİ

$\Gamma(\alpha)$	Gama fonksiyonu
$B(\varepsilon)$	Normalizasyon fonksiyonu
$\mathbb{R}_+$	Pozitif reel sayılar kümesi
I	$\mathbb{R}$ 'de bir aralık
$L_1[a, b]$	$[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonların kümesi
f'	f fonksiyonunun birinci mertebeden türevi
$K_m(b)$	m –konveks fonksiyonların sınıfı
$K_m^\alpha(b)$	(α, m) –konveks fonksiyonların sınıfı
$SX(h, I)$	h –konveks fonksiyonların sınıfı
$SV(h, I)$	h –konkav fonksiyonların sınıfı
K_s^2	İkinci anlamda s –konveks fonksiyonların sınıfı
$Q(I)$	Godunova-Levin fonksiyonu
$P(I)$	P –fonksiyon
$\mathcal{L}(I)$	Log-konveks fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{C}(I)$	Konveks fonksiyonlar sınıfı
$QC(I)$	Quasi–konveks fonksiyonlar sınıfı
$J(I)$	Jensen–konveks fonksiyonlar sınıfı
$X_c^p(a, b)$	$[a, b]$ aralığında kompleks değerli Lebesgue anlamında ölçülebilir fonksiyonların kümesi
$J_{\kappa+}^\alpha f$	Sol Riemann-Liouville kesirli integral Operatörü
$J_{\tau-}^\alpha f$	Sağ Riemann-Liouville kesirli integral Operatörü
$\mathfrak{I}_{\kappa+}^\alpha \varphi$	Sol Hadamard kesirli integral Operatörü
$\mathfrak{I}_{\tau-}^\alpha \varphi$	Sağ Hadamard kesirli integral Operatörü
${}^\rho I_{\kappa+}^\alpha f(\omega)$	Sol Katugampola kesirli integral Operatörü
${}^\rho I_{\tau-}^\alpha f(\omega)$	Sağ Katugampola kesirli integral Operatörü
${}^{AB}I_\kappa^\varepsilon\{f(\kappa)\}$	Atangana-Baleanu kesirli integral Operatörü
${}^{ABK}{}_{e_1+}^\rho I_t^\nu f(t)$	Sol ABK-kesirli integral Operatörü
${}^{ABK}{}_{e_2-}^\rho I_t^\nu f(t)$	Sağ ABK-kesirli integral Operatörü

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Aralık üzerinde konveks fonksiyon	4
--	---



1. GİRİŞ

Konvekslik kavramı, Arşimed'in yöntemiyle π sayısı hesabına dayanan bir kavramdır. Arşimed, konveks bir şeklin çevresinin o şekli çevreleyen başka bir şeklin çevresinden daha küçük olduğunu görmüştür. Konvekslik 19. yüzyılın sonlarında matematik alanında yer edinmiştir. İlk defa 1881 yılında Hermite tarafından elde edilen bir bulgunun, Mathesis isimli dergide 1883 yılında yayınlanması ile beraber ortaya çıkmıştır.

Konveks fonksiyonların başlangıcı 1905 ve 1906 yıllarında Johan Ludwig William Valdemar Jensen'e dayanmaktadır. Fakat konveks fonksiyonlarla ilk çalışan kişi Jensen değildir. Jensen'den önce 1893 yılında Hadamard bu konveks fonksiyonların temellerinden bahsetmiştir.

Konveks fonksiyon tanımı eşitsizlikle anlatıldığından konveks fonksiyon kavramı eşitsizlik teorisiyle yakından bağlantılıdır. Eşitsizlikler matematiğin tüm dallarında, fizikte, istatistikte, mühendisliğin çeşitli dallarında, optimizasyon teorisinde, nümerik integrasyonda ve yaklaşım teorisinde büyük bir çalışma alanına sahiptir. Eşitsizlikler devamlı gelişmekte olan bir konudur. Bu konu son yıllarda birçok araştırmacının ilgisini çekmiştir.

Birçok matematikçi tarafından eşitsizlikler teorisi ve konveks fonksiyon ile ilgili birçok kitap yazılmıştır.

- Inequalities (Hardy, 1952)
- Inequalities (Beckenbach ve Bellman, 1961)
- Analytic Inequalities (Mitrinovic, 1970)
- Classical and New Inequalities in Analysis (Mitrinovic, 1993)
- Mathematical Inequalities (Pachpatte, 2005)
- Convex Functions and Their Applications (Persson, 2006)

Konveks fonksiyonlar ve eşitsizlikler beraber kullanılarak birçok çalışma ve integral eşitsizlik elde edilmiştir. En temel ve önemli integral eşitsizliklerden biri Hermite-Hadamard integral eşitsizliğidir.(1822-1901)

Konveks fonksiyonlarla ilgili yapılan birçok yeni çalışma eşitsizlik teorisinin gelişmesinde rol oynamıştır. Eşitsizlik teorisine katkıda bulunan kavramlardan diğer ikisi de kesirli türev ve kesirli integral kavramlarıdır. Kesirli hesap, “ Türev ve integraller sadece tam sayılar için mi vardır?” sorusuyla başlamıştır. 1695 yılında bu soruyu L’Hospital bir mektup aracılığıyla $\frac{1}{2}$. Mertebeden türev anlamlı mıdır? Şeklinde Leibnitz’e sormuştur. Bu mektuplaşmayla kesirli hesap matematikte yerini alaya başlamıştır. Konunun diğer bilim dallarında kullanılması ve başarılı çözümler vermesiyle kesirli hesap önemini gün geçtikçe arttırmıştır. Kesirli diferansiyel denklemler özellikle fizik ve mühendislik bilimlerindeki pek çok durumu en iyi aydınlatan denklem türü olmuştur. Fizik ve mühendisliğin dışında tıp, biyoloji, genetik, kimya, istatistik, psikoloji gibi pek çok bilim dalında geniş kullanım alanı vardır.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Konveks Fonksiyonlarla İlgili Temel Tanım ve Özellikler

İlk olarak çalışmanın temelini oluşturacak bazı temel kavramlar sunulacaktır.

Tanım 2.1.1. (Konveks küme): L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $\kappa, \tau \in A$ keyfi elemanlar olmak üzere

$$B = \{z \in L: z = \sigma\kappa + (1 - \sigma)\tau, \quad 0 \leq \sigma \leq 1\} \subseteq A$$

oluyorsa A kümesine konveks küme denir (Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.2. (J –konveks fonksiyon): $I, \mathbb{R}'$ 'de bir aralık olmak üzere her $\kappa, \tau \in I$ için

$$f\left(\frac{\kappa + \tau}{2}\right) \leq \frac{f(\kappa) + f(\tau)}{2}$$

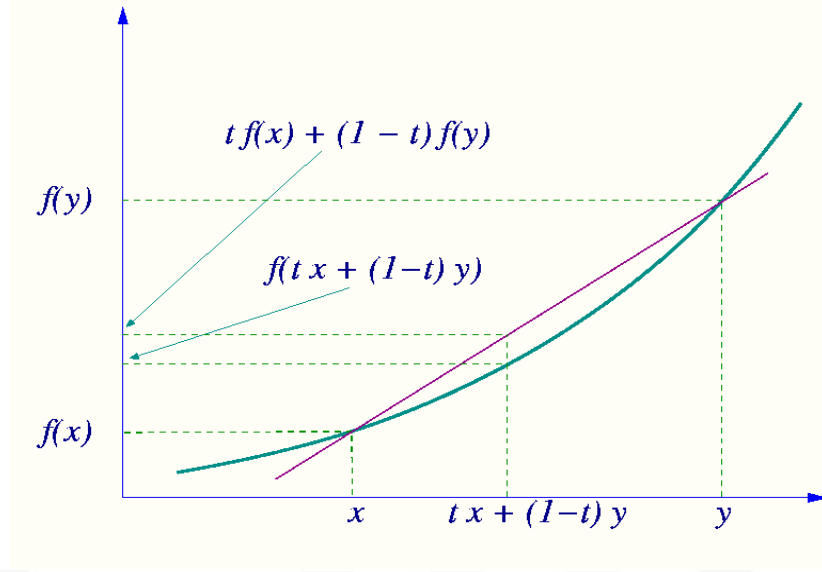
şartını sağlayan f fonksiyonuna I üzerinde Jensen anlamında konveks veya J –konveks fonksiyon denir (Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.3. (Konveks fonksiyon): $I, \mathbb{R}'$ 'de bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\sigma \in [0,1]$ için

$$f(\sigma\kappa + (1 - \sigma)\tau) \leq \sigma f(\kappa) + (1 - \sigma)f(\tau)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir (Pečarić *et al.* 1992).

I üzerinde tanımlanan bir f fonksiyonunun konveks olması demek geometrik olarak $(x, f(x))$ ve $(y, f(y))$ noktalarını içeren I üzerindeki doğru parçasının f 'nin grafiğinin üst kısmında yer almasıdır (Şekil 2.1).



Şekil 2.1. Aralık üzerinde konveks fonksiyon

Teorem 2.1.1. (Üçgen eşitsizliği): Herhangi x, y reel sayıları için

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|,$$

$$||x| - |y|| \leq |x + y|,$$

ve tümevarım metoduyla

$$|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n|$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Mitrinović *et al.* 1993).

Teorem 2.1.2. (Üçgen eşitsizliğinin integral versiyonu): $f, [e_1, e_2]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left| \int_{e_1}^{e_2} f(\kappa) d\kappa \right| \leq \int_{e_1}^{e_2} |f(\kappa)| d\kappa \quad (e_1 < e_2)$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović *et al.* 1993).

2.2. Farklı Türden Bazı Konveks Fonksiyon Sınıfları

Tanım 2.2.1. (m –konveks fonksiyon): $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $b > 0$ olsun. Her $\kappa, \tau \in [0, b], \sigma \in [0, 1]$ ve $m \in [0, 1]$ için

$$f(\sigma\kappa + m(1 - \sigma)\tau) \leq \sigma f(\kappa) + m(1 - \sigma)f(\tau)$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonuna m –konvektir denir (Toader 1988).

Tanım 2.2.2. ((α, m) –konveks fonksiyon): $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $b > 0$ olsun. Her $\kappa, \tau \in [0, b], \sigma \in [0, 1]$ ve $(\alpha, m) \in [0, 1]^2$ için

$$f(\sigma\kappa + m(1 - \sigma)\tau) \leq \sigma^\alpha f(\kappa) + m(1 - \sigma^\alpha)f(\tau)$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonuna (α, m) –konvektir denir (Miheşan 1993).

Burada $(\alpha, m) \in \{(0, 0), (\alpha, 0), (1, 0), (1, m), (1, 1), (\alpha, 1)\}$ seçilirse, sırasıyla artan, α –starshaped (α –yıldızıl), starshaped (yıldızıl), m –konveks, konveks ve α –konveks fonksiyon sınıfları elde edilir.

Tanım 2.2.3. (Godunova-Levin fonksiyonu): Negatif olmayan $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\kappa, \tau \in I, \sigma \in (0, 1)$ olmak üzere

$$f(\sigma\kappa + (1 - \sigma)\tau) \leq \frac{f(\kappa)}{\sigma} + \frac{f(\tau)}{1 - \sigma}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f 'ye Godunova-Levin fonksiyonu veya $Q(I)$ sınıfına aittir denir.

Bu tanıma denk olarak; $f \in Q(I)$ ve $\kappa, \tau, \varrho \in I$ ise, bu takdirde

$$f(\kappa)(\kappa - \tau)(\kappa - \varrho) + f(\tau)(\tau - \kappa)(\tau - \varrho) + f(\varrho)(\varrho - \kappa)(\varrho - \tau) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır (Godunova-Levin 1985).

Tanım 2.2.4. (P – fonksiyon): Negatif olmayan $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\kappa, \tau \in I, \sigma \in (0, 1)$ olmak üzere

$$f(\sigma\kappa + (1 - \sigma)\tau) \leq f(\kappa) + f(\tau)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f 'ye P – fonksiyon veya $P(I)$ sınıfına aittir denir (Dragomir *et al.* 1995).

Tanımlardan açıkça görüleceği üzere, tüm negatif olmayan monoton ve negatif olmayan konveks fonksiyonlar $Q(I)$ sınıfına aittir. Ayrıca $Q(I) \supset P(I)$ ve $P(I)$ sınıfından fonksiyonlar negatif olmayan monoton, konveks ve quasi–konveks fonksiyonlardan meydana gelmektedir.

Tanım 2.2.5. (Birinci anlamda s –konveks fonksiyon): $\zeta, \eta \geq 0$, $\zeta^s + \eta^s = 1$ ve $s \in (0,1]$ olmak üzere tüm $u, v \in \mathbb{R}_+$ için $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu eğer

$$f(\zeta v + \eta v) \leq \zeta^s f(v) + \eta^s f(v)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f 'ye birinci anlamda s –konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı K_s^1 ile gösterilir (Hudzik and Maligranda 1994).

Tanım 2.2.6. (İkinci anlamda s –konveks fonksiyon): $\zeta, \eta \geq 0$, $\zeta + \eta = 1$ ve $s \in (0,1]$ olmak üzere tüm $u, v \in \mathbb{R}_+$ için $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu eğer

$$f(\zeta v + \eta v) \leq \zeta^s f(v) + \eta^s f(v)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f 'ye ikinci anlamda s –konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı K_s^2 ile gösterilir (Breckner 1978).

Tanım 2.2.7. (h –konveks fonksiyon): $h: J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Negatif olmayan $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\kappa, \tau \in I, \sigma \in (0,1)$ olmak üzere

$$f(\sigma\kappa + (1 - \sigma)\tau) \leq h(\sigma)f(\kappa) + h(1 - \sigma)f(\tau)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f 'ye h –konveks fonksiyon veya $SX(h, I)$ sınıfına aittir denir (Varosanec 2007).

Bu eşitsizlik yön değiştirirse, bu durumda f 'ye h –konkav fonksiyon veya $SV(h, I)$ sınıfına aittir denir. Eğer $h(\sigma) = \sigma$ alınırsa, bu takdirde tüm negatif olmayan konveks

fonksiyonlar $SX(h, I)$ sınıfına ve tüm negatif olmayan konkav fonksiyonlar $SV(h, I)$ sınıfına aittir; $h(\sigma) = \frac{1}{\sigma}$ alınırsa, $SX(h, I) = Q(I)$; $h(\sigma) = 1$ alınırsa $SX(h, I) \supseteq P(I)$ ve $h(\sigma) = \sigma^s$, $s \in (0,1)$ alınırsa $SX(h, I) \supseteq K_s^2$ olacağı açıktır.

Tanım 2.2.8. κ, τ pozitif sayılarının r . kuvvetlerine göre kuvvet ortalaması

$$M_r(\kappa, \tau; \psi) = \begin{cases} (\psi \kappa^r + (1 - \psi) \tau^r)^{\frac{1}{r}}, & r \neq 0 \text{ ise} \\ \kappa^\psi \tau^{1-\psi}, & r = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.2.9. Pozitif f fonksiyonu her $\kappa, \tau \in [e_1, e_2]$ ve $\psi \in [0,1]$ için

$$f(\psi \kappa + (1 - \psi) \tau) \leq M_r(f(\kappa), f(\tau); \psi)$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna $[e_1, e_2]$ aralığında r –konveks fonksiyon denir (Gill *et al.* 1997).

Bu tanımdan 0 –konveks fonksiyonların $\log$ –konveks fonksiyonlar ve 1 –konveks fonksiyonların bilinen konveks fonksiyonlar olduğu sonucuna kolaylıkla ulaşılabilir.

r –konvekslik tanımı

$$f^r(\psi \kappa + (1 - \psi) \tau) = \begin{cases} (\psi f^r(\kappa) + (1 - \psi) f^r(\tau))^{\frac{1}{r}}, & r \neq 0 \text{ ise} \\ [f(\kappa)]^\psi [f(\tau)]^{1-\psi}, & r = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde genişletilmiştir (Pearce *et al.* 1998).

Tanım 2.2.10. (Quasi–konveks fonksiyon): $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $S \subset \mathbb{R}^n$ boştan farklı konveks küme olsun. $\forall \kappa, \tau \in S$ ve $\sigma \in [0,1]$ için

$$f(\sigma \kappa + (1 - \sigma) \tau) \leq \max\{f(\kappa), f(\tau)\}$$

ise f 'ye quasi–konveks fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

Eğer

$$f(\sigma\kappa + (1 - \sigma)\tau) < \max\{f(\kappa), f(\tau)\}$$

ise f 'ye kesin quasi-konveks fonksiyon denir. Aynı şartlar altında

$$f(\sigma\kappa + (1 - \sigma)\tau) \geq \max\{f(\kappa), f(\tau)\}$$

ise f 'ye quasi-konkav fonksiyon ve

$$f(\sigma\kappa + (1 - \sigma)\tau) > \max\{f(\kappa), f(\tau)\}$$

ise f 'ye kesin quasi-konkav fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

Tanım 2.2.11. f hem quasi-konveks hem de quasi-konkav ise f 'ye quasi monotoniktir denir (Greenberg and Pierskalla 1971).

Not: Her konveks fonksiyon aynı zamanda quasi-konvekstir. Ama her quasi-konveks fonksiyon konveks olmayabilir.

Tanım 2.2.12. $I, \mathbb{R}'$ 'de bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\log f$ konveks ise veya her $\kappa, \tau \in I$ and her $\sigma \in [0,1]$ için

$$f(\sigma\kappa + (1 - \sigma)\tau) \leq [f(\kappa)]^\sigma [f(\tau)]^{(1-\sigma)}$$

ise f 'ye $\log$ -konveks fonksiyon ve bu eşitsizlik ters çevrilirse f 'ye $\log$ -konkav fonksiyon denir (Pečarić *et al.* 1992).

Tanım 2.2.13. Beta fonksiyonu

$$\beta(\kappa, \tau) = \int_0^1 \sigma^{\kappa-1} (1 - \sigma)^{\tau-1} d\sigma, \quad \kappa, \tau > 0$$

şeklindedir. Bu eşitlik Euler tipi Beta integral fonksiyonu ya da birinci çeşit Euler integrali olarak adlandırılır (Dragomir *et al.* 2000).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Teorem 3.1. (İntegraller için Hölder eşitsizliği): $\aleph > 1$ ve $\frac{1}{\aleph} + \frac{1}{\lambda} = 1$ olsun. f ve g , $[\varsigma, \chi]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|^\aleph$ ve $|g|^\lambda$, $[\varsigma, \chi]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_{\varsigma}^{\chi} |f(\kappa)g(\kappa)| d\kappa \leq \left(\int_{\varsigma}^{\chi} |f(\kappa)|^\aleph d\kappa \right)^{\frac{1}{\aleph}} \left(\int_{\varsigma}^{\chi} |g(\kappa)|^\lambda d\kappa \right)^{\frac{1}{\lambda}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović *et al.* 1993).

Ayrıca Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olan power mean eşitsizliği de aşağıdaki gibi ifade edilir.

3.2. (İntegraller için Power Mean eşitsizliği): $\lambda \geq 1$ olsun. f ve g , $[\varsigma, \chi]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|$ ve $|g|^\lambda$, $[\varsigma, \chi]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_{\varsigma}^{\chi} |f(\kappa)g(\kappa)| d\kappa \leq \left(\int_{\varsigma}^{\chi} |f(\kappa)| d\kappa \right)^{1-\frac{1}{\lambda}} \left(\int_{\varsigma}^{\chi} |f(\kappa)||g(\kappa)|^\lambda d\kappa \right)^{\frac{1}{\lambda}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 3.3. (Young eşitsizliği): $\varsigma, \chi > 0$ ve $\aleph, \lambda > 1$ için $\frac{1}{\aleph} + \frac{1}{\lambda} = 1$ olmak üzere

$$\varsigma\chi \leq \frac{\varsigma^\aleph}{\aleph} + \frac{\chi^\lambda}{\lambda}$$

eşitsizliği geçerlidir. Eşitlik durumu sadece $\varsigma^\aleph = \chi^\lambda$ durumunda sağlanır. (Mitrinovic, 1970, s.49.)

3.4. (Hermite – Hadamard Eşitsizliği): $I, \mathbb{R}$ de bir aralık, $\kappa, \tau \in I$ ve $\kappa < \tau$ olmak üzere $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu taktirde

$$f\left(\frac{\kappa + \tau}{2}\right) \leq \frac{1}{\tau - \kappa} \int_{\kappa}^{\tau} f(\xi) d\xi \leq \frac{f(\kappa) + f(\tau)}{2}$$

eşitsizliği literatürde konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir (Pečarić *et al.* 1992).

3.5. (Simpson İntegral Eşitsizliği): $f: I = [\kappa, \tau] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir foksiyon olsun. $\|f^{(4)}\|_{\infty} < \infty$ olmak üzere, f fonksiyonu I° üzerinde 4. mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyon olsun. Bu takdirde, aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left| \frac{1}{3} \left[\frac{f(\kappa) + f(\tau)}{2} + 2f\left(\frac{\kappa + \tau}{2}\right) \right] - \frac{1}{\tau - \kappa} \int_{\kappa}^{\tau} f(\xi) d\xi \right| \leq \frac{1}{2880} \|f^{(4)}\|_{\infty} (\tau - \kappa)^4.$$

3.6. (Minkowski İntegral Eşitsizliği): $\sigma \geq 1, 0 < \int_a^b \kappa^{\sigma}(x) dx < \infty$ ve $0 < \int_a^b \tau^{\sigma}(x) dx < \infty$ olsun. Bu halde

$$\left(\int_a^b (\kappa(x) + \tau(x))^{\sigma} dx \right)^{\frac{1}{\sigma}} \leq \left(\int_a^b \kappa^{\sigma}(x) dx \right)^{\frac{1}{\sigma}} + \left(\int_a^b \tau^{\sigma}(x) dx \right)^{\frac{1}{\sigma}}$$

eşitsizliğine Minkowski integral eşitsizliği denir.

3.7. Kesirli İntegral Operatörler

3.7.1. (Riemann – Liouville Kesirli İntegral Operatörü): $f \in L_1[\kappa, \tau]$ olmak şartıyla $J_{\kappa+}^{\alpha} f$ ve $J_{\tau-}^{\alpha} f$ Riemann – Liouville kesirli integrallerinin $a > 0$ ve $\alpha \geq 0$ için tanımları sırasıyla

$$J_{\kappa+}^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\kappa}^{\omega} (\omega - t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad \omega > \kappa$$

ve

$$J_{\tau-}^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\omega}^{\tau} (t - \omega)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad \omega < \tau$$

dir. Burada $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$

$$J_{\kappa+}^0 f(\omega) = f(\omega)$$

ve

$$J_{\tau-}^0 f(\omega) = f(\omega)$$

eşitlikleri geçerlidir (Kilbas et al. 2006).

3.7.2. (Hadamard Kesirli İntegral Operatörü): Hadamard kesirli integralinin $\alpha \in \mathbb{R}^+$ için sağ ve sol taraflı tanımları sırasıyla

$$\mathfrak{I}_{\kappa+}^{\alpha} \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\kappa}^{\omega} \frac{\varphi(t)}{\left(\ln \frac{\omega}{t}\right)^{1-\alpha}} \frac{dt}{t}, \quad \omega > \kappa > 0$$

$$\mathfrak{I}_{\tau-}^{\alpha} \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\omega}^{\tau} \frac{\varphi(t)}{\left(\ln \frac{t}{\omega}\right)^{1-\alpha}} \frac{dt}{t}, \quad 0 < \omega < \tau.$$

şeklindedir. Burada Γ gamma fonksiyonudur (Kilbas et al. 2006).

3.7.3. (Katugampola Kesirli İntegral Operatörü): $[\kappa, \tau] \subseteq \mathbb{R}$ sonlu aralık, $\kappa > 0$ ve $f \in X_c^p(\kappa, \tau)$ olsun. Sol ve sağ taraflı Katugampola kesirli integral operatörleri $\kappa < \omega < \tau$ ve $\rho > 0$ için sırasıyla

$${}^{\rho}I_{\kappa+}^{\alpha} f(\omega) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_{\kappa}^{\omega} \frac{t^{\rho-1}}{(\omega^{\rho} - t^{\rho})^{1-\alpha}} f(t) dt$$

ve

$${}^{\rho}I_{\tau-}^{\alpha} f(\omega) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_{\omega}^{\tau} \frac{t^{\rho-1}}{(t^{\rho} - \omega^{\rho})^{1-\alpha}} f(t) dt$$

şeklindedir. (Katugampola, 2011; Katugampola, 2014).

Teorem: $\alpha > 0$ ve $\rho > 0$ ise $\omega > \kappa$ için,

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} {}^{\rho}I_{\kappa+}^{\alpha} f(\omega) = J_{\kappa+}^{\alpha} f(\omega)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} {}^{\rho}I_{\kappa+}^{\alpha} f(\omega) = \mathfrak{I}_{\kappa+}^{\alpha} f(\omega)$$

benzer sonuçlar sağ taraflı operatörler için de geçerlidir (Katugampola, 2014).

3.7.4. (Atangana-Baleanu Kesirli İntegral Operatörü): $f \in L^1(\phi, \omega)$, $\phi < \omega$, $\varepsilon \in [0,1]$ iken

$${}^{AB}_\omega I^\varepsilon_\kappa \{f(\kappa)\} = \frac{1-\varepsilon}{B(\varepsilon)} f(\kappa) + \frac{\varepsilon}{B(\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)} \int_\kappa^\omega (k-\kappa)^{\varepsilon-1} f(k) dk$$

Burada $B(\varepsilon)$ normalizasyon fonksiyonu olup; $B(\varepsilon) > 0$, $B(0) = B(1) = 1$ şeklindedir (Atangana and Baleanu 2016).

3.7.5. (ABK-Kesirli İntegral Operatörü): $[e_1, e_2] \subset \mathbb{R}$ sonlu bir aralık, $\nu \in (0,1)$ ve $f \in X_c^\rho(e_1, e_2)$ olsun. Sol ve sağ taraflı ABK- kesirli integral operatörleri $\rho > 0$ için sırasıyla

$${}^{ABK}_{e_1+} \rho I_t^\nu f(t) = \frac{1-\nu}{B(\nu)} f(t) + \frac{\rho^{1-\nu}\nu}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \int_{e_1}^t \frac{u^{\rho-1}}{(t^\rho - u^\rho)^{1-\nu}} f(u) du, \quad t > e_1 \geq 0$$

ve

$${}^{ABK}_{e_2-} \rho I_t^\nu f(t) = \frac{1-\nu}{B(\nu)} f(t) + \frac{\rho^{1-\nu}\nu}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \int_t^{e_2} \frac{u^{\rho-1}}{(u^\rho - t^\rho)^{1-\nu}} f(u) du, \quad t < e_2$$

burada $B(\nu)$ normalizasyon fonksiyonu olup; $B(\nu) > 0$, $B(0) = B(1) = 1$ şeklindedir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. ABK-Kesirli İntegral Operatörler Yardımıyla Elde Edilen Ters Minkowski Tipli Eşitsizlikler

Teorem 4.1.1. $v \in (0,1), \rho > 0, B(v) > 0, r \geq 1$ ve $\kappa_1, \kappa_2 \in X_c^p(e_1, e_2)$ fonksiyonları $[0, \infty)$ aralığı üzerinde iki pozitif fonksiyon olsun. Öyle ki $\tau > e_1 \geq 0$, ${}^{ABK}\rho_{e_1+}^v I_\tau^v \kappa_1^r(\tau) < \infty, {}^{ABK}\rho_{e_1+}^v I_\tau^v \kappa_2^r(\tau) < \infty$. $m, M \in \mathbb{R}^+$ için $0 < m \leq \frac{\kappa_1(\tau)}{\kappa_2(\tau)} \leq M$ şartı sağlanırsa aşağıdaki eşitsizlik yazılır:

$$\begin{aligned} & \left({}^{ABK}\rho_{e_1+}^v I_\tau^v \kappa_1^r(\tau) \right)^{\frac{1}{r}} + \left({}^{ABK}\rho_{e_1+}^v I_\tau^v \kappa_2^r(\tau) \right)^{\frac{1}{r}} \\ & \leq \frac{1 + M(m + 2)}{(m + 1)(M + 1)} \left({}^{ABK}\rho_{e_1+}^v I_\tau^v (\kappa_1(\tau) + \kappa_2(\tau))^r \right)^{\frac{1}{r}}. \end{aligned} \quad (1)$$

İspat. $\frac{\kappa_1(\tau)}{\kappa_2(\tau)} \leq M$ şartı altında

$$\kappa_1(\tau) \leq \frac{M}{M+1} (\kappa_1(\tau) + \kappa_2(\tau)) \quad (2)$$

yazılır.

(2)'nin her iki tarafının r . kuvveti alınır

$$\kappa_1^r(\tau) \leq \left(\frac{M}{M+1} \right)^r (\kappa_1(\tau) + \kappa_2(\tau))^r \quad (3)$$

elde edilir.

(3)'ün her iki tarafı $\frac{1-v}{B(v)}$ ile çarpılırsa

$$\frac{1-v}{B(v)} \kappa_1^r(\tau) \leq \left(\frac{M}{M+1} \right)^r \frac{1-v}{B(v)} (\kappa_1(\tau) + \kappa_2(\tau))^r \quad (4)$$

yazılır.

(3)'te τ yerine ϑ koyulur, her iki tarafı $\frac{\rho^{1-\nu}\nu}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^\rho - \vartheta^\rho)^{1-\nu}}$ ile çarpılır ve ϑ ya göre e_1 den τ ya integral alınır

$$\begin{aligned} & \frac{\rho^{1-\nu}\nu}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \int_{e_1}^{\tau} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^\rho - \vartheta^\rho)^{1-\nu}} \kappa_1^r(\vartheta) d\vartheta \\ & \leq \left(\frac{M}{M+1} \right)^r \frac{\rho^{1-\nu}\nu}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \int_{e_1}^{\tau} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^\rho - \vartheta^\rho)^{1-\nu}} (\kappa_1(\vartheta) + \kappa_2(\vartheta))^r d\vartheta \end{aligned} \quad (5)$$

elde edilir. (4) ile (5) toplanır

$$\begin{aligned} & \frac{1-\nu}{B(\nu)} \kappa_1^r(\tau) + \frac{\rho^{1-\nu}\nu}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \int_{e_1}^{\tau} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^\rho - \vartheta^\rho)^{1-\nu}} \kappa_1^r(\vartheta) d\vartheta \\ & \leq \left(\frac{M}{M+1} \right)^r \left[\frac{1-\nu}{B(\nu)} (\kappa_1(\tau) + \kappa_2(\tau))^r \right. \\ & \quad \left. + \frac{\rho^{1-\nu}\nu}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \int_{e_1}^{\tau} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^\rho - \vartheta^\rho)^{1-\nu}} (\kappa_1(\vartheta) + \kappa_2(\vartheta))^r d\vartheta \right] \end{aligned} \quad (6)$$

yazılır ve

$${}^{ABK} \rho_{e_1+\tau}^{\nu} \kappa_1^r(\tau) \leq \left(\frac{M}{M+1} \right)^r {}^{ABK} \rho_{e_1+\tau}^{\nu} (\kappa_1(\tau) + \kappa_2(\tau))^r \quad (7)$$

elde edilir.

(7)'nin her iki tarafının $\frac{1}{r}$. kuvveti alınır

$$\left({}^{ABK} \rho_{e_1+\tau}^{\nu} \kappa_1^r(\tau) \right)^{\frac{1}{r}} \leq \frac{M}{M+1} \left({}^{ABK} \rho_{e_1+\tau}^{\nu} (\kappa_1(\tau) + \kappa_2(\tau))^r \right)^{\frac{1}{r}} \quad (8)$$

bulunur.

Şimdi, $m\kappa_2(\tau) \leq \kappa_1(\tau)$ şartı altında

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^r \kappa_2^r(\tau) \leq \left(\frac{1}{m}\right)^r (\kappa_1(\tau) + \kappa_2(\tau))^r \quad (9)$$

ifadesi yazılır.

(9)'un her iki tarafı $\frac{1-\nu}{B(\nu)}$ ile çarpılırsa

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^r \frac{1-\nu}{B(\nu)} \kappa_2^r(\tau) \leq \left(\frac{1}{m}\right)^r \frac{1-\nu}{B(\nu)} (\kappa_1(\tau) + \kappa_2(\tau))^r \quad (10)$$

elde edilir.

(9)'da τ yerine ϑ koyulur, her iki tarafı $\frac{\rho^{1-\nu}\nu}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^\rho - \vartheta^\rho)^{1-\nu}}$ ile çarpılır ve ϑ ya göre e_1 den τ ya integral alınır

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^r \frac{\rho^{1-\nu}\nu}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \int_{e_1}^{\tau} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^\rho - \vartheta^\rho)^{1-\nu}} \kappa_2^r(\vartheta) d\vartheta \\ \leq \left(\frac{1}{m}\right)^r \frac{\rho^{1-\nu}\nu}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \int_{e_1}^{\tau} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^\rho - \vartheta^\rho)^{1-\nu}} (\kappa_1(\vartheta) + \kappa_2(\vartheta))^r d\vartheta \end{aligned} \quad (11)$$

bulunur ve (10) ile (11) taraf tarafa toplanır ve $\frac{1}{r}$ kuvvet alınır

$$\left({}^{ABK} \rho I_{e_1+}^{\nu} \kappa_2^r(\tau)\right)^{\frac{1}{r}} \leq \frac{1}{m+1} \left({}^{ABK} \rho I_{e_1+}^{\nu} (\kappa_1(\tau) + \kappa_2(\tau))^r\right)^{\frac{1}{r}} \quad (12)$$

elde edilir. (8) ve (12) toplanarak (1)'deki eşitsizlik ispatlanır.

Teorem 4.1.2. $\nu \in (0,1), \rho > 0, B(\nu) > 0, r \geq 1$ ve $\kappa_1, \kappa_2 \in X_c^p(e_1, e_2)$ fonksiyonları $[0, \infty)$ aralığı üzerinde iki pozitif fonksiyon olsun. Öyle ki $\tau > e_1 \geq 0$, ${}^{ABK} \rho I_{e_1+}^{\nu} \kappa_1^r(\tau) < \infty, {}^{ABK} \rho I_{e_1+}^{\nu} \kappa_2^r(\tau) < \infty, m, M \in \mathbb{R}^+$ için $0 < m \leq \frac{\kappa_1(\tau)}{\kappa_2(\tau)} \leq M$ şartı sağlanırsa aşağıdaki eşitsizlik yazılır:

$$\begin{aligned} \left({}^{ABK} \rho I_{e_1+}^{\nu} \kappa_1^r(\tau)\right)^{\frac{2}{r}} + \left({}^{ABK} \rho I_{e_1+}^{\nu} \kappa_2^r(\tau)\right)^{\frac{2}{r}} \\ \geq \left(\frac{(M+1)(m+1)}{M} - 2\right) \left({}^{ABK} \rho I_{e_1+}^{\nu} \kappa_1^r(\tau)\right)^{\frac{1}{r}} \left({}^{ABK} \rho I_{e_1+}^{\nu} \kappa_2^r(\tau)\right)^{\frac{1}{r}}. \end{aligned}$$

(13)

İspat. (8) ve (12)'deki eşitsizlikler taraf tarafa çarpılırsa

$$\begin{aligned} \frac{(M+1)(m+1)}{M} \left({}^{ABK}\rho_{e_1+I_\tau^\nu} \kappa_1^r(\tau) \right)^{\frac{1}{r}} \left({}^{ABK}\rho_{e_1+I_\tau^\nu} \kappa_2^r(\tau) \right)^{\frac{1}{r}} \\ \leq \left[\left({}^{ABK}\rho_{e_1+I_\tau^\nu} (\kappa_1(\tau) + \kappa_2(\tau))^r \right)^{\frac{1}{r}} \right]^2 \end{aligned} \quad (14)$$

elde edilir.

(14)'ün sağ tarafına Minkowski eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \left[\left({}^{ABK}\rho_{e_1+I_\tau^\nu} (\kappa_1(\tau) + \kappa_2(\tau))^r \right)^{\frac{1}{r}} \right]^2 &\leq \left[\left({}^{ABK}\rho_{e_1+I_\tau^\nu} \kappa_1^r(\tau) \right)^{\frac{1}{r}} + \left({}^{ABK}\rho_{e_1+I_\tau^\nu} \kappa_2^r(\tau) \right)^{\frac{1}{r}} \right]^2 \\ &\leq \left({}^{ABK}\rho_{e_1+I_\tau^\nu} \kappa_1^r(\tau) \right)^{\frac{2}{r}} + \left({}^{ABK}\rho_{e_1+I_\tau^\nu} \kappa_2^r(\tau) \right)^{\frac{2}{r}} \\ &\quad + 2 \left({}^{ABK}\rho_{e_1+I_\tau^\nu} \kappa_1^r(\tau) \right)^{\frac{1}{r}} \left({}^{ABK}\rho_{e_1+I_\tau^\nu} \kappa_2^r(\tau) \right)^{\frac{1}{r}} \end{aligned} \quad (15)$$

elde edilir. (14) ve (15)'ten (13)'teki eşitsizlik ispat edilmiş olur.

Teorem 4.1.3. $\nu \in (0,1), \rho > 0, B(\nu) > 0, r, s \geq 1, \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ ve $\kappa_1, \kappa_2 \in X_c^p(e_1, e_2)$ fonksiyonları $[0, \infty)$ aralığı üzerinde iki pozitif fonksiyon olsun. Öyle ki $\tau > e_1 \geq 0$, ${}^{ABK}\rho_{e_1+I_\tau^\nu} \kappa_1^r(\tau) < \infty, {}^{ABK}\rho_{e_1+I_\tau^\nu} \kappa_2^r(\tau) < \infty, m, M \in \mathbb{R}^+$ için $0 < m \leq \frac{\kappa_1(\tau)}{\kappa_2(\tau)} \leq M$ şartı sağlanırsa aşağıdaki eşitsizlik yazılır:

$$\left({}^{ABK}\rho_{e_1+I_\tau^\nu} \kappa_1(\tau) \right)^{\frac{1}{r}} \left({}^{ABK}\rho_{e_1+I_\tau^\nu} \kappa_2(\tau) \right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(\frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{rs}} \left({}^{ABK}\rho_{e_1+I_\tau^\nu} [\kappa_1(\tau)]^{\frac{1}{r}} [\kappa_2(\tau)]^{\frac{1}{s}} \right). \quad (16)$$

İspat. $\frac{\kappa_1(\tau)}{\kappa_2(\tau)} \leq M$ şartından

$$[\kappa_2(\tau)]^{\frac{1}{s}} \geq M^{-\frac{1}{s}} [\kappa_1(\tau)]^{\frac{1}{s}} \quad (17)$$

yazılır. Ardından

$$[\kappa_1(\tau)]^{\frac{1}{r}}[\kappa_2(\tau)]^{\frac{1}{s}} \geq M^{\frac{-1}{s}}[\kappa_1(\tau)]^{\frac{1}{s}}[\kappa_1(\tau)]^{\frac{1}{r}} \geq M^{\frac{-1}{s}}[\kappa_1(\tau)] \quad (18)$$

eşitsizliği elde edilir.

(18)'in her iki tarafı $\frac{1-\nu}{B(\nu)}$ ile çarpılırsa

$$\frac{1-\nu}{B(\nu)} [\kappa_1(\tau)]^{\frac{1}{r}}[\kappa_2(\tau)]^{\frac{1}{s}} \geq M^{\frac{-1}{s}} \frac{1-\nu}{B(\nu)} [\kappa_1(\tau)] \quad (19)$$

elde edilir.

(18)'de τ yerine ϑ koyulur, her iki tarafı $\frac{\rho^{1-\nu}\nu}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^\rho - \vartheta^\rho)^{1-\nu}}$ ile çarpılır ve ϑ ya göre e_1 den τ ya integral alınır

$$\begin{aligned} & \frac{\rho^{1-\nu}\nu}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \int_{e_1}^{\tau} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^\rho - \vartheta^\rho)^{1-\nu}} [\kappa_1(\vartheta)]^{\frac{1}{r}}[\kappa_2(\vartheta)]^{\frac{1}{s}} d\vartheta \\ & \geq M^{\frac{-1}{s}} \frac{\rho^{1-\nu}\nu}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \int_{e_1}^{\tau} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^\rho - \vartheta^\rho)^{1-\nu}} [\kappa_1(\vartheta)] d\vartheta \end{aligned} \quad (20)$$

yazılır. (19) ve (20) taraf tarafa toplanır

$$\begin{aligned} & \frac{1-\nu}{B(\nu)} [\kappa_1(\tau)]^{\frac{1}{r}}[\kappa_2(\tau)]^{\frac{1}{s}} + \frac{\rho^{1-\nu}\nu}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \int_{e_1}^{\tau} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^\rho - \vartheta^\rho)^{1-\nu}} [\kappa_1(\vartheta)]^{\frac{1}{r}}[\kappa_2(\vartheta)]^{\frac{1}{s}} d\vartheta \\ & \geq M^{\frac{-1}{s}} \left[\frac{1-\nu}{B(\nu)} [\kappa_1(\tau)] + \frac{\rho^{1-\nu}\nu}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \int_{e_1}^{\tau} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^\rho - \vartheta^\rho)^{1-\nu}} [\kappa_1(\vartheta)] d\vartheta \right] \end{aligned} \quad (21)$$

yazılır ve

$${}^{ABK}_{e_1+} \rho I_{\tau}^{\nu} [\kappa_1(\tau)]^{\frac{1}{r}}[\kappa_2(\tau)]^{\frac{1}{s}} \geq M^{\frac{-1}{s}} \cdot {}^{ABK}_{e_1+} \rho I_{\tau}^{\nu} \kappa_1(\tau)$$

elde edilir.

Her iki tarafın $\frac{1}{r}$. kuvveti alınır

$$\left({}^{ABK} \rho_{e_1 + I_\tau^\nu} [\kappa_1(\tau)]^{\frac{1}{r}} [\kappa_2(\tau)]^{\frac{1}{s}} \right)^{\frac{1}{r}} \geq M_{rs}^{-\frac{1}{r}} \left({}^{ABK} \rho_{e_1 + I_\tau^\nu} \kappa_1(\tau) \right)^{\frac{1}{r}} \quad (22)$$

elde edilir.

Diğer yandan, $m. \kappa_2(\tau) \leq \kappa_1(\tau)$ şartı altında

$$[\kappa_1(\tau)]^{\frac{1}{r}} \geq m^{\frac{1}{r}} [\kappa_2(\tau)]^{\frac{1}{r}}$$

ve

$$[\kappa_1(\tau)]^{\frac{1}{r}} [\kappa_2(\tau)]^{\frac{1}{s}} \geq m^{\frac{1}{r}} [\kappa_2(\tau)]^{\frac{1}{r}} [\kappa_2(\tau)]^{\frac{1}{s}} \geq m^{\frac{1}{r}} [\kappa_2(\tau)] \quad (23)$$

yazılır.

(23)'ün her iki tarafı $\frac{1-\nu}{B(\nu)}$ ile çarpılırsa

$$\frac{1-\nu}{B(\nu)} [\kappa_1(\tau)]^{\frac{1}{r}} [\kappa_2(\tau)]^{\frac{1}{s}} \geq m^{\frac{1}{r}} \frac{1-\nu}{B(\nu)} [\kappa_2(\tau)] \quad (24)$$

elde edilir.

(23)'te τ yerine ϑ koyulur, her iki tarafı $\frac{\rho^{1-\nu}}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^\rho - \vartheta^\rho)^{1-\nu}}$ ile çarpılır ve ϑ ya göre e_1 den τ ya integral alınır

$$\begin{aligned} & \frac{\rho^{1-\nu}}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \int_{e_1}^{\tau} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^\rho - \vartheta^\rho)^{1-\nu}} [\kappa_1(\vartheta)]^{\frac{1}{r}} [\kappa_2(\vartheta)]^{\frac{1}{s}} d\vartheta \\ & \geq m^{\frac{1}{r}} \frac{\rho^{1-\nu}}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \int_{e_1}^{\tau} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^\rho - \vartheta^\rho)^{1-\nu}} [\kappa_2(\vartheta)] d\vartheta \end{aligned} \quad (25)$$

elde edilir. (24) ve (25) taraf tarafa toplanır

$${}^{ABK} \rho_{e_1 + I_\tau^\nu} [\kappa_1(\tau)]^{\frac{1}{r}} [\kappa_2(\tau)]^{\frac{1}{s}} \geq m^{\frac{1}{r}} {}^{ABK} \rho_{e_1 + I_\tau^\nu} \kappa_2(\tau) \quad (26)$$

eşitsizliği elde edilir.

(26)'nın her iki tarafının $\frac{1}{s}$. kuvveti alınır

$$\left({}^{ABK}\rho_{e_1+}^{\nu} I_{\tau}^{\nu} [\kappa_1(\tau)]^{\frac{1}{r}} [\kappa_2(\tau)]^{\frac{1}{s}} \right)^{\frac{1}{s}} \geq m^{\frac{1}{rs}} \left({}^{ABK}\rho_{e_1+}^{\nu} I_{\tau}^{\nu} \kappa_2(\tau) \right)^{\frac{1}{s}} \quad (27)$$

yazılır.

(22) ve (27) taraf tarafa çarpılırsa (16)'daki istenen eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.1.4. $\nu \in (0,1), \rho > 0, B(\nu) > 0, r, s \geq 1, \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ ve $\kappa_1, \kappa_2 \in X_c^p(e_1, e_2)$ fonksiyonları $[0, \infty)$ aralığı üzerinde iki pozitif fonksiyon olsun. Öyle ki $\tau > e_1 \geq 0$, ${}^{ABK}\rho_{e_1+}^{\nu} I_{\tau}^{\nu} \kappa_1^r(\tau) < \infty, {}^{ABK}\rho_{e_1+}^{\nu} I_{\tau}^{\nu} \kappa_2^s(\tau) < \infty, m, M \in \mathbb{R}^+$ için $0 < m \leq \frac{\kappa_1(\tau)}{\kappa_2(\tau)} \leq M$ şartı sağlanırsa aşağıdaki eşitsizlik yazılır:

$$\begin{aligned} & {}^{ABK}\rho_{e_1+}^{\nu} I_{\tau}^{\nu} [\kappa_1(\tau)\kappa_2(\tau)] \\ & \leq \frac{2^{r-1}M^r}{r(M+1)^r} {}^{ABK}\rho_{e_1+}^{\nu} I_{\tau}^{\nu} [\kappa_1^r + \kappa_2^r](\tau) \\ & \quad + \frac{2^{s-1}}{s(m+1)^s} {}^{ABK}\rho_{e_1+}^{\nu} I_{\tau}^{\nu} [\kappa_1^s + \kappa_2^s](\tau) \end{aligned} \quad (28)$$

İspat. $\frac{\kappa_1(\tau)}{\kappa_2(\tau)} \leq M$ şartı altında

$$(M+1)^r \kappa_1^r(\tau) \leq M^r (\kappa_1 + \kappa_2)^r(\tau) \quad (29)$$

elde edilir.

(29)'un her iki tarafı $\frac{1-\nu}{B(\nu)}$ ile çarpılırsa

$$(M+1)^r \frac{1-\nu}{B(\nu)} \kappa_1^r(\tau) \leq M^r \frac{1-\nu}{B(\nu)} (\kappa_1 + \kappa_2)^r(\tau) \quad (30)$$

elde edilir.

(29)'da τ yerine ϑ koyulur, her iki tarafı $\frac{\rho^{1-\nu}\nu}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^\rho - \vartheta^\rho)^{1-\nu}}$ ile çarpılır ve ϑ ya göre e_1 den τ ya integral alınır

$$\begin{aligned} (M+1)^r \frac{\rho^{1-\nu}\nu}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \int_{e_1}^{\tau} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^\rho - \vartheta^\rho)^{1-\nu}} \kappa_1^r(\vartheta) d\vartheta \\ \leq M^r \frac{\rho^{1-\nu}\nu}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \int_{e_1}^{\tau} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^\rho - \vartheta^\rho)^{1-\nu}} (\kappa_1 + \kappa_2)^r(\vartheta) d\vartheta \end{aligned} \quad (31)$$

bulunur. (30) ve (31) taraf tarafa toplanır

$${}^{ABK} \rho_{e_1+} I_{\tau}^{\nu} \kappa_1^r(\tau) \leq \frac{M^r}{(M+1)^r} {}^{ABK} \rho_{e_1+} I_{\tau}^{\nu} (\kappa_1 + \kappa_2)^r(\tau) \quad (32)$$

elde edilir.

Diğer yandan, $0 < m \leq \frac{\kappa_1(\tau)}{\kappa_2(\tau)}$ şartı göz önünde bulundurulursa

$$(m+1)^s \kappa_2^s(\tau) \leq (\kappa_1 + \kappa_2)^s(\tau) \quad (33)$$

yazılır.

(33)'ün her iki tarafı $\frac{1-\nu}{B(\nu)}$ ile çarpılırsa

$$(m+1)^s \frac{1-\nu}{B(\nu)} \kappa_2^s(\tau) \leq \frac{1-\nu}{B(\nu)} (\kappa_1 + \kappa_2)^s(\tau) \quad (34)$$

elde edilir.

(33)'te τ yerine ϑ koyulur, her iki tarafı $\frac{\rho^{1-\nu}\nu}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^\rho - \vartheta^\rho)^{1-\nu}}$ ile çarpılır ve ϑ ya göre e_1 den τ ya integral alınır

$$\begin{aligned} (m+1)^s \frac{\rho^{1-\nu}\nu}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \int_{e_1}^{\tau} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^\rho - \vartheta^\rho)^{1-\nu}} \kappa_2^s(\vartheta) d\vartheta \\ \leq \frac{\rho^{1-\nu}\nu}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \int_{e_1}^{\tau} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^\rho - \vartheta^\rho)^{1-\nu}} (\kappa_1 + \kappa_2)^s(\vartheta) d\vartheta \end{aligned} \quad (35)$$

elde edilir. (34) ile (35) taraf tarafa toplanırsa

$${}^{ABK} \rho_{e_1+} I_{\tau}^{\nu} \kappa_2^s(\tau) \leq \frac{1}{(m+1)^s} {}^{ABK} \rho_{e_1+} I_{\tau}^{\nu} (\kappa_1 + \kappa_2)^s(\tau) \quad (36)$$

yazılır.

Şimdi Young Eşitsizliği kullanılırsa

$$\kappa_1(\tau) \kappa_2(\tau) \leq \frac{\kappa_1^r(\tau)}{r} + \frac{\kappa_2^s(\tau)}{s} \quad (37)$$

yazılır.

(37)'nin her iki tarafı $\frac{1-\nu}{B(\nu)}$ ile çarpılırsa

$$\frac{1-\nu}{B(\nu)} \kappa_1(\tau) \kappa_2(\tau) \leq \frac{1-\nu}{B(\nu)} \frac{\kappa_1^r(\tau)}{r} + \frac{1-\nu}{B(\nu)} \frac{\kappa_2^s(\tau)}{s} \quad (38)$$

elde edilir.

(37)'de τ yerine ϑ koyulur, her iki tarafı $\frac{\rho^{1-\nu}}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^{\rho}-\vartheta^{\rho})^{1-\nu}}$ ile çarpılır ve ϑ ya göre e_1 den τ ya integral alınır

$$\begin{aligned} & \frac{\rho^{1-\nu}}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \int_{e_1}^{\tau} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^{\rho}-\vartheta^{\rho})^{1-\nu}} \kappa_1(\vartheta) \kappa_2(\vartheta) d\vartheta \\ & \leq \frac{1}{r} \frac{\rho^{1-\nu}}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \int_{e_1}^{\tau} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^{\rho}-\vartheta^{\rho})^{1-\nu}} \kappa_1^r(\vartheta) d\vartheta \\ & \quad + \frac{1}{s} \frac{\rho^{1-\nu}}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \int_{e_1}^{\tau} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^{\rho}-\vartheta^{\rho})^{1-\nu}} \kappa_2^s(\vartheta) d\vartheta \end{aligned} \quad (39)$$

elde edilir. (38) ve (39) taraf tarafa toplanırsa

$${}^{ABK} \rho_{e_1+} I_{\tau}^{\nu} [\kappa_1(\tau) \kappa_2(\tau)] \leq \frac{1}{r} {}^{ABK} \rho_{e_1+} I_{\tau}^{\nu} \kappa_1^r(\tau) + \frac{1}{s} {}^{ABK} \rho_{e_1+} I_{\tau}^{\nu} \kappa_2^s(\tau) \quad (40)$$

eşitsizliği elde edilir.

(40)'da (32) ve (36) kullanılarak aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned}
& {}^{ABK} \rho_{e_1+I_\tau}^\nu [\kappa_1(\tau)\kappa_2(\tau)] \\
& \leq \frac{1}{r} \frac{M^r}{(M+1)^r} {}^{ABK} \rho_{e_1+I_\tau}^\nu (\kappa_1 + \kappa_2)^r(\tau) \\
& + \frac{1}{s} \frac{1}{(m+1)^s} {}^{ABK} \rho_{e_1+I_\tau}^\nu (\kappa_1 + \kappa_2)^s(\tau)
\end{aligned}$$

Şimdi, $(x+y)^r \leq 2^{r-1}(x^r + y^r)$, $r > 1$, $x, y > 0$ basit eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& {}^{ABK} \rho_{e_1+I_\tau}^\nu [\kappa_1(\tau)\kappa_2(\tau)] \\
& \leq \frac{2^{r-1}M^r}{r(M+1)^r} {}^{ABK} \rho_{e_1+I_\tau}^\nu [\kappa_1^r + \kappa_2^r](\tau) \\
& + \frac{2^{s-1}}{s(m+1)^s} {}^{ABK} \rho_{e_1+I_\tau}^\nu [\kappa_1^s + \kappa_2^s](\tau)
\end{aligned}$$

(28)'deki eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.1.5. $\nu \in (0,1)$, $\rho > 0$, $B(\nu) > 0$, $r \geq 1$ ve $\kappa_1, \kappa_2 \in X_c^p(e_1, e_2)$ fonksiyonları $[0, \infty)$ aralığı üzerinde iki pozitif fonksiyon olsun. Öyle ki $\tau > e_1 \geq 0$, ${}^{ABK} \rho_{e_1+I_\tau}^\nu \kappa_1^r(\tau) < \infty$, ${}^{ABK} \rho_{e_1+I_\tau}^\nu \kappa_2^r(\tau) < \infty$. $m, M \in \mathbb{R}^+$ için $0 < k < m \leq \frac{\kappa_1(\tau)}{\kappa_2(\tau)} \leq M < \infty$ şartı sağlanırsa aşağıdaki eşitsizlik yazılır:

$$\begin{aligned}
& \frac{M+1}{M-k} \left({}^{ABK} \rho_{e_1+I_\tau}^\nu [\kappa_1(\tau) - k\kappa_2(\tau)]^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq \left({}^{ABK} \rho_{e_1+I_\tau}^\nu \kappa_1^r(\tau) \right)^{\frac{1}{r}} + \left({}^{ABK} \rho_{e_1+I_\tau}^\nu \kappa_2^r(\tau) \right)^{\frac{1}{r}} \\
& \leq \frac{m+1}{m-k} \left({}^{ABK} \rho_{e_1+I_\tau}^\nu [\kappa_1(\tau) - k\kappa_2(\tau)]^r \right)^{\frac{1}{r}}.
\end{aligned} \tag{41}$$

İspat. $0 < k < m \leq \frac{\kappa_1(\tau)}{\kappa_2(\tau)} \leq M < \infty$ şartı altında

$$mk \leq Mk \Rightarrow mk + m \leq mk + M \leq Mk + M$$

$$\Rightarrow (M+1)(m-k) \leq (m+1)(M-k)$$

$$\frac{M+1}{M-k} \leq \frac{m+1}{m-k}$$

$$m - k \leq \frac{\kappa_1(\tau) - k\kappa_2(\tau)}{\kappa_2(\tau)} \leq M - k$$

$$\frac{(\kappa_1(\tau) - k\kappa_2(\tau))^r}{(M-k)^r} \leq \kappa_2^r(\tau) \leq \frac{(\kappa_1(\tau) - k\kappa_2(\tau))^r}{(m-k)^r} \quad (42)$$

elde edilir.

Ayrıca

$$\frac{1}{M} \leq \frac{\kappa_2(\tau)}{\kappa_1(\tau)} \leq \frac{1}{m} \Rightarrow \frac{m-k}{km} \leq \frac{\kappa_1(\tau) - k\kappa_2(\tau)}{k\kappa_1(\tau)} \leq \frac{M-k}{kM}$$

$$\left(\frac{M}{M-k}\right)^r (\kappa_1(\tau) - k\kappa_2(\tau))^r \leq \kappa_1^r(\tau) \leq \left(\frac{m}{m-k}\right)^r (\kappa_1(\tau) - k\kappa_2(\tau))^r \quad (43)$$

elde edilir.

(42)'nin her iki tarafı $\frac{1-\nu}{B(\nu)}$ ile çarpılırsa

$$\frac{1-\nu}{B(\nu)} \frac{(\kappa_1(\tau) - k\kappa_2(\tau))^r}{(M-k)^r} \leq \frac{1-\nu}{B(\nu)} \kappa_2^r(\tau) \leq \frac{1-\nu}{B(\nu)} \frac{(\kappa_1(\tau) - k\kappa_2(\tau))^r}{(m-k)^r} \quad (44)$$

bulunur.

(42)'de τ yerine ϑ koyulur, her iki tarafı $\frac{\rho^{1-\nu}\nu}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^\rho - \vartheta^\rho)^{1-\nu}}$ ile çarpılır ve ϑ ya göre e_1 den τ ya integral alınırsa

$$\begin{aligned} & \frac{\rho^{1-\nu}\nu}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \frac{1}{(M-k)^r} \int_{e_1}^{\tau} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^\rho - \vartheta^\rho)^{1-\nu}} (\kappa_1(\vartheta) - k\kappa_2(\vartheta))^r d\vartheta \\ & \leq \frac{\rho^{1-\nu}\nu}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \int_{e_1}^{\tau} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^\rho - \vartheta^\rho)^{1-\nu}} \kappa_2^r(\vartheta) d\vartheta \\ & \leq \frac{\rho^{1-\nu}\nu}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \frac{1}{(m-k)^r} \int_{e_1}^{\tau} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^\rho - \vartheta^\rho)^{1-\nu}} (\kappa_1(\vartheta) - k\kappa_2(\vartheta))^r d\vartheta \end{aligned} \quad (45)$$

elde edilir. (44) ve (45) taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{M-k} \left({}^{ABK} \rho_{e_1+}^{\nu} I_{\tau}^{\nu} [\kappa_1(\tau) - k\kappa_2(\tau)]^r \right)^{\frac{1}{r}} &\leq \left({}^{ABK} \rho_{e_1+}^{\nu} \kappa_2^r(\tau) \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq \frac{1}{m-k} \left({}^{ABK} \rho_{e_1+}^{\nu} I_{\tau}^{\nu} [\kappa_1(\tau) - k\kappa_2(\tau)]^r \right)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned} \tag{46}$$

elde edilir.

(43)'ün her iki tarafı $\frac{1-\nu}{B(\nu)}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
\left(\frac{M}{M-k} \right)^r \frac{1-\nu}{B(\nu)} (\kappa_1(\tau) - k\kappa_2(\tau))^r &\leq \frac{1-\nu}{B(\nu)} \kappa_1^r(\tau) \\
&\leq \left(\frac{m}{m-k} \right)^r \frac{1-\nu}{B(\nu)} (\kappa_1(\tau) - k\kappa_2(\tau))^r
\end{aligned} \tag{47}$$

yazılır.

(43)'te τ yerine ϑ koyulur, her iki tarafı $\frac{\rho^{1-\nu}\nu}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^{\rho}-\vartheta^{\rho})^{1-\nu}}$ ile çarpılır ve ϑ ya göre e_1 den τ ya integral alınır

$$\begin{aligned}
\left(\frac{M}{M-k} \right)^r \frac{\rho^{1-\nu}\nu}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \int_{e_1}^{\tau} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^{\rho}-\vartheta^{\rho})^{1-\nu}} (\kappa_1(\vartheta) - k\kappa_2(\vartheta))^r d\vartheta \\
\leq \frac{\rho^{1-\nu}\nu}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \int_{e_1}^{\tau} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^{\rho}-\vartheta^{\rho})^{1-\nu}} \kappa_1^r(\vartheta) d\vartheta \\
\leq \left(\frac{m}{m-k} \right)^r \frac{\rho^{1-\nu}\nu}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \int_{e_1}^{\tau} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^{\rho}-\vartheta^{\rho})^{1-\nu}} (\kappa_1(\vartheta) - k\kappa_2(\vartheta))^r d\vartheta
\end{aligned} \tag{48}$$

elde edilir. (47) ve (48) taraf tarafa toplanır

$$\begin{aligned}
\frac{M}{M-k} \left({}^{ABK} \rho_{e_1+}^{\nu} I_{\tau}^{\nu} [\kappa_1(\tau) - k\kappa_2(\tau)]^r \right)^{\frac{1}{r}} &\leq \left({}^{ABK} \rho_{e_1+}^{\nu} \kappa_1^r(\tau) \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq \frac{m}{m-k} \left({}^{ABK} \rho_{e_1+}^{\nu} I_{\tau}^{\nu} [\kappa_1(\tau) - k\kappa_2(\tau)]^r \right)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned} \tag{49}$$

elde edilir. (46) ve (49) taraf tarafa toplanırsa (41)'deki eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.1.6. $\nu \in (0,1), \rho > 0, B(\nu) > 0, r \geq 1$ ve $\kappa_1, \kappa_2 \in X_c^p(e_1, e_2)$ fonksiyonları $[0, \infty)$ aralığı üzerinde iki pozitif fonksiyon olsun. Öyle ki $\tau > e_1 \geq 0$, ${}^{ABK}\rho_{e_1+I_\tau^\nu} \kappa_1^r(\tau) < \infty, {}^{ABK}\rho_{e_1+I_\tau^\nu} \kappa_2^r(\tau) < \infty$. $0 \leq \alpha \leq \kappa_1(\tau) \leq A$ ve $0 \leq \sigma \leq \kappa_2(\tau) \leq C$ şartları sağlanırsa aşağıdaki eşitsizlik yazılır:

$$\begin{aligned} & \left({}^{ABK}\rho_{e_1+I_\tau^\nu} \kappa_1^r(\tau) \right)^{\frac{1}{r}} + \left({}^{ABK}\rho_{e_1+I_\tau^\nu} \kappa_2^r(\tau) \right)^{\frac{1}{r}} \\ & \leq \frac{A(\alpha + C) + C(\sigma + A)}{(A + \sigma)(C + \alpha)} \left({}^{ABK}\rho_{e_1+I_\tau^\nu} (\kappa_1 + \kappa_2)^r(\tau) \right)^{\frac{1}{r}}. \end{aligned} \quad (50)$$

İspat. Verilen şartlar altında

$$\frac{1}{C} \leq \frac{1}{\kappa_2(\tau)} \leq \frac{1}{\sigma} \quad (51)$$

yazılır.

(51) ile $0 \leq \alpha \leq \kappa_1(\tau) \leq A$ şartının taraf tarafa çarpılmasıyla

$$\frac{\alpha}{C} \leq \frac{\kappa_1(\tau)}{\kappa_2(\tau)} \leq \frac{A}{\sigma} \quad (52)$$

elde edilir.

(52)'den

$$\kappa_2^r(\tau) \leq \left(\frac{C}{\alpha + C} \right)^r (\kappa_1(\tau) + \kappa_2(\tau))^r \quad (53)$$

ve

$$\kappa_1^r(\tau) \leq \left(\frac{A}{\sigma + A} \right)^r (\kappa_1(\tau) + \kappa_2(\tau))^r \quad (54)$$

elde edilir.

(53)'ün her iki tarafı $\frac{1-\nu}{B(\nu)}$ ile çarpılırsa

$$\frac{1-\nu}{B(\nu)} \kappa_2^r(\tau) \leq \left(\frac{C}{\alpha+C} \right)^r \frac{1-\nu}{B(\nu)} (\kappa_1(\tau) + \kappa_2(\tau))^r \quad (55)$$

yazılır.

(53)'te τ yerine ϑ koyulur, her iki tarafı $\frac{\rho^{1-\nu}\nu}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^\rho - \vartheta^\rho)^{1-\nu}}$ ile çarpılır ve ϑ ya göre e_1 den τ ya integral alınır

$$\begin{aligned} & \frac{\rho^{1-\nu}\nu}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \int_{e_1}^{\tau} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^\rho - \vartheta^\rho)^{1-\nu}} \kappa_2^r(\vartheta) d\vartheta \\ & \leq \left(\frac{C}{\alpha+C} \right)^r \frac{\rho^{1-\nu}\nu}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \int_{e_1}^{\tau} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^\rho - \vartheta^\rho)^{1-\nu}} (\kappa_1(\vartheta) + \kappa_2(\vartheta))^r d\vartheta \end{aligned} \quad (56)$$

elde edilir. (55) ve (56) taraf tarafa toplanır

$$\left({}^{ABK}_{e_1+} \rho I_{\tau^{\nu}}^{\nu} \kappa_2^r(\tau) \right)^{\frac{1}{r}} \leq \frac{C}{\alpha+C} \left({}^{ABK}_{e_1+} \rho I_{\tau^{\nu}}^{\nu} (\kappa_1 + \kappa_2)^r(\tau) \right)^{\frac{1}{r}} \quad (57)$$

bulunur.

(54)'ün her iki tarafı $\frac{1-\nu}{B(\nu)}$ ile çarpılırsa

$$\frac{1-\nu}{B(\nu)} \kappa_1^r(\tau) \leq \left(\frac{A}{\sigma+A} \right)^r \frac{1-\nu}{B(\nu)} (\kappa_1(\tau) + \kappa_2(\tau))^r \quad (58)$$

yazılır.

(54)'te τ yerine ϑ koyulur, her iki tarafı $\frac{\rho^{1-\nu}\nu}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^\rho - \vartheta^\rho)^{1-\nu}}$ ile çarpılır ve ϑ ya göre e_1 den τ ya integral alınır

$$\begin{aligned} & \frac{\rho^{1-\nu}\nu}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \int_{e_1}^{\tau} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^\rho - \vartheta^\rho)^{1-\nu}} \kappa_1^r(\vartheta) d\vartheta \\ & \leq \left(\frac{A}{\sigma+A} \right)^r \frac{\rho^{1-\nu}\nu}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \int_{e_1}^{\tau} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^\rho - \vartheta^\rho)^{1-\nu}} (\kappa_1(\vartheta) + \kappa_2(\vartheta))^r d\vartheta \end{aligned} \quad (59)$$

elde edilir. (58) ve (59) taraf tarafa toplanırsa

$$\left({}^{ABK}\rho_{e_1+\tau}^{\nu} \kappa_1^r(\tau) \right)^{\frac{1}{r}} \leq \frac{A}{\sigma+A} \left({}^{ABK}\rho_{e_1+\tau}^{\nu} (\kappa_1 + \kappa_2)^r(\tau) \right)^{\frac{1}{r}} \quad (60)$$

elde edilir. (57) ve (60) taraf tarafa toplanırsa (50)'deki istenen eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.1.7. $\nu \in (0,1), \rho > 0, B(\nu) > 0, r \geq 1$ ve $\kappa_1, \kappa_2 \in X_c^p(e_1, e_2)$ fonksiyonları $[0, \infty)$ aralığı üzerinde iki pozitif fonksiyon olsun. Öyle ki $\tau > e_1 \geq 0$, ${}^{ABK}\rho_{e_1+\tau}^{\nu} \kappa_1^r(\tau) < \infty, {}^{ABK}\rho_{e_1+\tau}^{\nu} \kappa_2^r(\tau) < \infty, m, M \in \mathbb{R}^+$ için $0 < m \leq \frac{\kappa_1(\tau)}{\kappa_2(\tau)} \leq M$ şartı sağlanırsa aşağıdaki eşitsizlik yazılır:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{M} {}^{ABK}\rho_{e_1+\tau}^{\nu} [\kappa_1(\tau)\kappa_2(\tau)] \\ & \leq \frac{1}{(m+1)(M+1)} {}^{ABK}\rho_{e_1+\tau}^{\nu} [\kappa_1(\tau) + \kappa_2(\tau)]^2 \leq \frac{1}{m} {}^{ABK}\rho_{e_1+\tau}^{\nu} [\kappa_1(\tau)\kappa_2(\tau)] \quad . \end{aligned} \quad (61)$$

İspat. Verilen $0 < m \leq \frac{\kappa_1(\tau)}{\kappa_2(\tau)} \leq M$ şartı altında

$$\kappa_2(\tau)(m+1) \leq \kappa_2(\tau) + \kappa_1(\tau) \leq \kappa_2(\tau)(M+1) \quad (62)$$

yazılır.

Ayrıca $\frac{1}{M} \leq \frac{\kappa_2(\tau)}{\kappa_1(\tau)} \leq \frac{1}{m}$ şartından

$$\kappa_1(\tau) \frac{M+1}{M} \leq \kappa_2(\tau) + \kappa_1(\tau) \leq \kappa_1(\tau) \frac{m+1}{m} \quad (63)$$

yazılır.

(62) ve (63)'ün taraf tarafa çarpımından

$$\frac{\kappa_1(\tau)\kappa_2(\tau)}{M} \leq \frac{(\kappa_1(\tau) + \kappa_2(\tau))^2}{(m+1)(M+1)} \leq \frac{\kappa_1(\tau)\kappa_2(\tau)}{m} \quad (64)$$

elde edilir.

(64)'ün her iki tarafı $\frac{1-\nu}{B(\nu)}$ ile çarpılırsa

$$\frac{\frac{1-\nu}{B(\nu)} \kappa_1(\tau) \kappa_2(\tau)}{M} \leq \frac{\frac{1-\nu}{B(\nu)} (\kappa_1(\tau) + \kappa_2(\tau))^2}{(m+1)(M+1)} \leq \frac{\frac{1-\nu}{B(\nu)} \kappa_1(\tau) \kappa_2(\tau)}{m} \quad (65)$$

elde edilir.

(64)'te τ yerine ϑ koyulur, her iki tarafı $\frac{\rho^{1-\nu}\nu}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^\rho - \vartheta^\rho)^{1-\nu}}$ ile çarpılır ve ϑ ya göre e_1 den τ ya integral alınır

$$\begin{aligned} & \frac{\rho^{1-\nu}\nu}{B(\nu)\Gamma(\nu)M} \int_{e_1}^{\tau} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^\rho - \vartheta^\rho)^{1-\nu}} \kappa_1(\vartheta) \kappa_2(\vartheta) d\vartheta \\ & \leq \frac{\rho^{1-\nu}\nu}{B(\nu)\Gamma(\nu)(m+1)(M+1)} \int_{e_1}^{\tau} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^\rho - \vartheta^\rho)^{1-\nu}} (\kappa_1(\vartheta) + \kappa_2(\vartheta))^2 d\vartheta \\ & \leq \frac{\rho^{1-\nu}\nu}{B(\nu)\Gamma(\nu)m} \int_{e_1}^{\tau} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^\rho - \vartheta^\rho)^{1-\nu}} \kappa_1(\vartheta) \kappa_2(\vartheta) d\vartheta \end{aligned} \quad (66)$$

elde edilir. (65) ve (66) taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{M} {}^{ABK} \rho_{e_1+} I_{\tau}^{\nu} [\kappa_1(\tau) \kappa_2(\tau)] \\ & \leq \frac{1}{(m+1)(M+1)} {}^{ABK} \rho_{e_1+} I_{\tau}^{\nu} [\kappa_1(\tau) + \kappa_2(\tau)]^2 \leq \frac{1}{m} {}^{ABK} \rho_{e_1+} I_{\tau}^{\nu} [\kappa_1(\tau) \kappa_2(\tau)] \end{aligned}$$

elde edilir ve (61)'deki istenen eşitsizlik tamamlanır.

Teorem 4.1.8. $\nu \in (0,1), \rho > 0, B(\nu) > 0, r \geq 1$ ve $\kappa_1, \kappa_2 \in X_c^p(e_1, e_2)$ fonksiyonları $[0, \infty)$ aralığı üzerinde iki pozitif fonksiyon olsun. Öyle ki $\tau > e_1 \geq 0$, ${}^{ABK} \rho_{e_1+} I_{\tau}^{\nu} \kappa_1^r(\tau) < \infty, {}^{ABK} \rho_{e_1+} I_{\tau}^{\nu} \kappa_2^r(\tau) < \infty, m, M \in \mathbb{R}^+$ için $0 < m \leq \frac{\kappa_1(\tau)}{\kappa_2(\tau)} \leq M$ şartı sağlanırsa aşağıdaki eşitsizlik yazılır.

$$\left({}^{ABK} \rho_{e_1+} I_{\tau}^{\nu} \kappa_1^r(\tau) \right)^{\frac{1}{r}} + \left({}^{ABK} \rho_{e_1+} I_{\tau}^{\nu} \kappa_2^r(\tau) \right)^{\frac{1}{r}} \leq 2 \left({}^{ABK} \rho_{e_1+} I_{\tau}^{\nu} h^r(\kappa_1(\tau), \kappa_2(\tau)) \right)^{\frac{1}{r}} \quad (67)$$

Burada $h(\kappa_1(\tau), \kappa_2(\tau)) = \max \left\{ M \left[\left(\frac{M}{m} + 1 \right) \kappa_1(\tau) - M \kappa_2(\tau) \right], \frac{(m+M)\kappa_2(\tau) - \kappa_1(\tau)}{m} \right\}$ şeklindedir.

İspat. $0 < m \leq \frac{\kappa_1(\tau)}{\kappa_2(\tau)} \leq M$ şartı altında

$$0 < m \leq M + m - \frac{\kappa_1(\tau)}{\kappa_2(\tau)} \quad (68)$$

ve

$$M + m - \frac{\kappa_1(\tau)}{\kappa_2(\tau)} \leq M \quad (69)$$

yazılır. (68) ve (69)'dan

$$\kappa_2(\tau) \leq \frac{(M+m)\kappa_2(\tau) - \kappa_1(\tau)}{m} \leq h(\kappa_1(\tau), \kappa_2(\tau)) \quad (70)$$

$$h(\kappa_1(\tau), \kappa_2(\tau)) = \max \left\{ M \left[\left(\frac{M}{m} + 1 \right) \kappa_1(\tau) - M \kappa_2(\tau) \right], \frac{(m+M)\kappa_2(\tau) - \kappa_1(\tau)}{m} \right\}.$$

yazılır.

$0 < \frac{1}{M} \leq \frac{\kappa_2(\tau)}{\kappa_1(\tau)} \leq \frac{1}{m}$ şartından

$$\frac{1}{M} \leq \frac{1}{M} + \frac{1}{m} - \frac{\kappa_2(\tau)}{\kappa_1(\tau)} \quad (71)$$

ve

$$\frac{1}{M} + \frac{1}{m} - \frac{\kappa_2(\tau)}{\kappa_1(\tau)} \leq \frac{1}{m} \quad (72)$$

yazılır. (71) ve (72)'den

$$\frac{1}{M} \leq \frac{\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) \kappa_1(\tau) - \kappa_2(\tau)}{\kappa_1(\tau)} \leq \frac{1}{m} \quad (73)$$

elde edilir.

Ardından

$$\begin{aligned}
\kappa_1(\tau) &\leq M \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) \kappa_1(\tau) - M \kappa_2(\tau) \\
&= \frac{M(M+m)\kappa_1(\tau) - M^2 \kappa_2(\tau)}{mM} \\
&= \left(\frac{M}{m} + 1 \right) \kappa_1(\tau) - M \kappa_2(\tau) \\
&\leq M \left[\left(\frac{M}{m} + 1 \right) \kappa_1(\tau) - M \kappa_2(\tau) \right] \\
&\leq h(\kappa_1(\tau), \kappa_2(\tau))
\end{aligned} \tag{74}$$

yazılır. (70) ve (74)'ten

$$\kappa_1^r(\tau) \leq h^r(\kappa_1(\tau), \kappa_2(\tau)) \tag{75}$$

ve

$$\kappa_2^r(\tau) \leq h^r(\kappa_1(\tau), \kappa_2(\tau)) \tag{76}$$

eşitsizlikleri yazılır.

(75)'in her iki tarafı $\frac{1-\nu}{B(\nu)}$ ile çarpılırsa

$$\frac{1-\nu}{B(\nu)} \kappa_1^r(\tau) \leq \frac{1-\nu}{B(\nu)} h^r(\kappa_1(\tau), \kappa_2(\tau)) \tag{77}$$

elde edilir.

(75)'te τ yerine ϑ koyulur, her iki tarafı $\frac{\rho^{1-\nu}\nu}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^\rho - \vartheta^\rho)^{1-\nu}}$ ile çarpılır ve ϑ ya göre e_1 den τ ya integral alınır

$$\frac{\rho^{1-\nu}\nu}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \int_{e_1}^{\tau} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^\rho - \vartheta^\rho)^{1-\nu}} \kappa_1^r(\vartheta) d\vartheta \leq \frac{\rho^{1-\nu}\nu}{B(\nu)\Gamma(\nu)} \int_{e_1}^{\tau} \frac{\vartheta^{\rho-1}}{(\tau^\rho - \vartheta^\rho)^{1-\nu}} h^r(\kappa_1(\vartheta), \kappa_2(\vartheta)) d\vartheta \tag{78}$$

elde edilir. (77) ve (78) taraf tarafa toplanır

$$\left({}^{ABK} \rho_{e_1+} I_{\tau}^{\nu} \kappa_1^r(\tau) \right)^{\frac{1}{r}} \leq \left({}^{ABK} \rho_{e_1+} I_{\tau}^{\nu} h^r(\kappa_1(\tau), \kappa_2(\tau)) \right)^{\frac{1}{r}} \quad (79)$$

elde edilir.

(76) için de yukarıdaki gibi aynı prosedür kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik yazılır.

$$\left({}^{ABK} \rho_{e_1+} I_{\tau}^{\nu} \kappa_2^r(\tau) \right)^{\frac{1}{r}} \leq \left({}^{ABK} \rho_{e_1+} I_{\tau}^{\nu} h^r(\kappa_1(\tau), \kappa_2(\tau)) \right)^{\frac{1}{r}} \quad (80)$$

Dolayısıyla (79) ve (80) taraf tarafa toplanırsa (67)'deki istenen eşitsizlik sağlanır ve ispat tamamlanır.

4.2. Katugampola Kesirli İntegraller İçeren Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler

Bu bölümde m –konveks fonksiyonları kullanarak Katugampola kesirli integralleri için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler verilmiştir. Temel bulguları Katugampola kesirli integralleri aracılığıyla kanıtlamak için yararlı olacak aşağıdaki özdeşlikle başlanmıştır:

Lemma 4.2.1: $\xi \in (0,1]$ ve $\nu > 0$ olsun. $f: [\kappa^{\nu}, \tau^{\nu}] \rightarrow \mathfrak{R}$ ye $(\kappa^{\nu}, \tau^{\nu})$ aralığı üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $0 < \kappa^{\nu} < \tau^{\nu}$ olsun. O zaman aşağıdaki eşitlik Katugampola kesirli integral operatörleri için geçerlidir:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2^{\xi-1}(\xi\nu + \nu - 1)\Gamma(\xi)\nu^{\xi-1}}{(\tau^{\nu} - \kappa^{\nu})^{\xi}} \left(\left({}^{\nu}I_{\left(\frac{\kappa^{\nu}+\tau^{\nu}}{2}\right)_{+}}^{\xi} \right) f(\tau) + \left({}^{\nu}I_{\left(\frac{\kappa^{\nu}+\tau^{\nu}}{2}\right)_{-}}^{\xi} \right) f(\kappa) \right) \\ &\quad - f\left(\frac{\kappa^{\nu} + \tau^{\nu}}{2}\right) \\ &= \frac{\nu(\tau^{\nu} - \kappa^{\nu})}{4} \left[\int_0^1 t^{\nu\xi} t^{\nu-1} f' \left(\frac{t^{\nu}}{2} \kappa^{\nu} + \frac{2-t^{\nu}}{2} \tau^{\nu} \right) dt \right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 t^{\nu\xi} t^{\nu-1} f' \left(\frac{t^{\nu}}{2} \tau^{\nu} + \frac{2-t^{\nu}}{2} \kappa^{\nu} \right) dt \right]. \end{aligned}$$

İspat: Kısmi integrasyon uygulanarak

$$\begin{aligned}
K_1 &= \int_0^1 t^{\nu\xi} t^{\nu-1} f' \left(\frac{t^\nu}{2} \kappa^\nu + \frac{2-t^\nu}{2} \tau^\nu \right) dt \\
&= \frac{-2f \left(\frac{\kappa^\nu + \tau^\nu}{2} \right)}{\nu(\tau^\nu - \kappa^\nu)} + \frac{2^{\xi+1}(\xi\nu + \nu - 1)\Gamma(\xi)}{(\tau^\nu - \kappa^\nu)^{\xi+1} \nu^{1-\xi} \nu} \left({}^\nu I^\xi_{\left(\frac{\kappa^\nu + \tau^\nu}{2} \right)_+^{\frac{1}{\nu}}} \right) f(\tau)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
K_2 &= \int_0^1 t^{\nu\xi} t^{\nu-1} f' \left(\frac{t^\nu}{2} \tau^\nu + \frac{2-t^\nu}{2} \kappa^\nu \right) dt \\
&= \frac{2f \left(\frac{\kappa^\nu + \tau^\nu}{2} \right)}{\nu(\tau^\nu - \kappa^\nu)} - \frac{2^{\xi+1}(\xi\nu + \nu - 1)\Gamma(\xi)}{(\tau^\nu - \kappa^\nu)^{\xi+1} \nu^{1-\xi} \nu} \left({}^\nu I^\xi_{\left(\frac{\kappa^\nu + \tau^\nu}{2} \right)_-^{\frac{1}{\nu}}} \right) f(\kappa)
\end{aligned}$$

yazılır ve K_1 den K_2 çıkarılırsa

$$\begin{aligned}
K_1 - K_2 &= \frac{-4f \left(\frac{\kappa^\nu + \tau^\nu}{2} \right)}{\nu(\tau^\nu - \kappa^\nu)} \\
&\quad + \frac{2^{\xi+1}(\xi\nu + \nu - 1)\Gamma(\xi)}{(\tau^\nu - \kappa^\nu)^{\xi+1} \nu^{1-\xi} \nu} \left[\left({}^\nu I^\xi_{\left(\frac{\kappa^\nu + \tau^\nu}{2} \right)_+^{\frac{1}{\nu}}} \right) f(\tau) + \left({}^\nu I^\xi_{\left(\frac{\kappa^\nu + \tau^\nu}{2} \right)_-^{\frac{1}{\nu}}} \right) f(\kappa) \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. $(K_1 - K_2)$ ifadesini $\frac{\nu(\tau^\nu - \kappa^\nu)}{4}$ ile çarparak istenen sonuç elde edilir.

Teorem 4.2.1: $\xi \in (0,1]$ ve $\nu > 0$, $f: [0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}$ ye (κ^ν, ∞) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $f' \in L_1[\kappa^\nu, \tau^\nu]$ ve $0 < \kappa^\nu < \tau^\nu < \infty$ olsun. $|f'|$ m -konveks fonksiyon ve $m \in (0,1]$ ise Katugampola kesirli integral operatörü için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2^{\xi-1}(\xi\nu + \nu - 1)\Gamma(\xi)\nu^{\xi-1}}{(\tau^\nu - \kappa^\nu)^\xi} \left(\left({}^\nu I^\xi_{\left(\frac{\kappa^\nu + \tau^\nu}{2}\right)_+^{\frac{1}{\nu}}} \right) f(\tau) + \left({}^\nu I^\xi_{\left(\frac{\kappa^\nu + \tau^\nu}{2}\right)_-^{\frac{1}{\nu}}} \right) f(\kappa) \right) \right. \\
& \quad \left. - f\left(\frac{\kappa^\nu + \tau^\nu}{2}\right) \right| \\
& \leq \frac{\nu(\tau^\nu - \kappa^\nu)}{4} \frac{1}{2\nu\xi + 4\nu} \left(|f'(\kappa^\nu)| + \frac{m(\nu\xi + 3\nu)}{\nu\xi + \nu} \left(\left| f'\left(\frac{\tau^\nu}{m}\right) \right| + \left| f'\left(\frac{\kappa^\nu}{m}\right) \right| \right) \right. \\
& \quad \left. + |f'(\tau^\nu)| \right).
\end{aligned}$$

İspat: Lemma 4.2.1'in sağ tarafını kullanarak aşağıdaki eşitsizlik yazılır.

$$|A| \leq \frac{\nu(\tau^\nu - \kappa^\nu)}{4} \left[\int_0^1 t^{\nu\xi + \nu - 1} \left| f'\left(\frac{t^\nu}{2}\kappa^\nu + \frac{2-t^\nu}{2}\tau^\nu\right) \right| dt + \int_0^1 t^{\nu\xi + \nu - 1} \left| f'\left(\frac{t^\nu}{2}\tau^\nu + \frac{2-t^\nu}{2}\kappa^\nu\right) \right| dt \right].$$

$|f'|$ nin m -konveks fonksiyon olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned}
|A| & \leq \frac{\nu(\tau^\nu - \kappa^\nu)}{4} \left[\int_0^1 t^{\nu\xi + \nu - 1} \left(\frac{t^\nu}{2} |f'(\kappa^\nu)| + m \frac{(2-t^\nu)}{2} \left| f'\left(\frac{\tau^\nu}{m}\right) \right| \right) dt \right. \\
& \quad \left. + \int_0^1 t^{\nu\xi + \nu - 1} \left(\frac{t^\nu}{2} |f'(\tau^\nu)| + m \frac{(2-t^\nu)}{2} \left| f'\left(\frac{\kappa^\nu}{m}\right) \right| \right) dt \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. İntegral hesaplamaları sonucunda

$$\begin{aligned}
|A| & \leq \frac{\nu(\tau^\nu - \kappa^\nu)}{4} \frac{1}{2\nu\xi + 4\nu} \left(|f'(\kappa^\nu)| + \frac{m(\nu\xi + 3\nu)}{\nu\xi + \nu} \left(\left| f'\left(\frac{\tau^\nu}{m}\right) \right| + \left| f'\left(\frac{\kappa^\nu}{m}\right) \right| \right) \right. \\
& \quad \left. + |f'(\tau^\nu)| \right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur.

Sonuç 4.2.1: Teorem 4.2.1 de $m = 1$ seçilirse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir :

$$\left| \frac{2^{\xi-1}(\xi\nu + \nu - 1)\Gamma(\xi)\nu^{\xi-1}}{(\tau^\nu - \kappa^\nu)^\xi} \left(\left({}^\nu I^\xi_{\left(\frac{\kappa^\nu + \tau^\nu}{2}\right)_+} f(\tau) + \left({}^\nu I^\xi_{\left(\frac{\kappa^\nu + \tau^\nu}{2}\right)_-} f(\kappa) \right) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - f\left(\frac{\kappa^\nu + \tau^\nu}{2}\right) \right) \right| \leq \frac{\tau^\nu - \kappa^\nu}{4(\xi + 1)} (|f'(\kappa^\nu)| + |f'(\tau^\nu)|).$$

Sonuç 4.2.2: Teorem 4.2.1 de $\nu = 1$ alınırse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left| \frac{2^{\xi-1}\Gamma(\xi + 1)}{(\tau - \kappa)^\xi} \left(J^\xi_{\left(\frac{\kappa + \tau}{2}\right)_+} f(\tau) + J^\xi_{\left(\frac{\kappa + \tau}{2}\right)_-} f(\kappa) \right) - f\left(\frac{\kappa + \tau}{2}\right) \right| \\ \leq \frac{\tau - \kappa}{4} \cdot \frac{1}{2\xi + 4} \left(|f'(\kappa)| + \frac{m(\xi + 3)}{\xi + 1} \left(\left| f'\left(\frac{\tau}{m}\right) \right| + \left| f'\left(\frac{\kappa}{m}\right) \right| \right) + |f'(\tau)| \right).$$

Sonuç 4.2.3: Teorem 4.2.1 de $\nu = 1, \xi = 1$ seçilirse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left| \frac{1}{\tau - \kappa} \int_\kappa^\tau f(u) du - f\left(\frac{\kappa + \tau}{2}\right) \right| \\ \leq \frac{\tau - \kappa}{24} \left[|f'(\kappa)| + 2m \left(\left| f'\left(\frac{\tau}{m}\right) \right| + \left| f'\left(\frac{\kappa}{m}\right) \right| \right) + |f'(\tau)| \right].$$

Teorem 4.2.2: $\xi \in (0,1]$ ve $\nu > 0$, $f: [0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}$ ye (κ^ν, ∞) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $f' \in L_1[\kappa^\nu, \tau^\nu]$ ve $0 < \kappa^\nu < \tau^\nu < \infty$ olsun. $|f'|^q$ m -konveks fonksiyon ve $m \in (0,1]$ ise Katugampola kesirli integral operatörü için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left| \frac{2^{\xi-1}(\xi\nu + \nu - 1)\Gamma(\xi)\nu^{\xi-1}}{(\tau^\nu - \kappa^\nu)^\xi} \left(\left({}^\nu I^\xi_{\left(\frac{\kappa^\nu + \tau^\nu}{2}\right)_+} f(\tau) + \left({}^\nu I^\xi_{\left(\frac{\kappa^\nu + \tau^\nu}{2}\right)_-} f(\kappa) \right) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - f\left(\frac{\kappa^\nu + \tau^\nu}{2}\right) \right) \right|$$

$$\leq \frac{\nu(\tau^\nu - \kappa^\nu)}{4} \left(\frac{1}{\nu\xi p + \nu p - p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{2\nu + 2} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\times \left[\left(|f'(\kappa^\nu)|^q + m(2\nu + 1) \left| f' \left(\frac{\tau^\nu}{m} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(|f'(\tau^\nu)|^q + m(2\nu + 1) \left| f' \left(\frac{\kappa^\nu}{m} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

ve burada $p > 1, p^{-1} + q^{-1} = 1$ şeklindedir.

İspat: Lemma 4.2.1'in sağ tarafını kullanarak aşağıdaki eşitsizlik yazılır.

$$|A| \leq \frac{\nu(\tau^\nu - \kappa^\nu)}{4} \left[\int_0^1 t^{\nu\xi + \nu - 1} \left| f' \left(\frac{t^\nu}{2} \kappa^\nu + \frac{2-t^\nu}{2} \tau^\nu \right) \right| dt + \int_0^1 t^{\nu\xi + \nu - 1} \left| f' \left(\frac{t^\nu}{2} \tau^\nu + \frac{2-t^\nu}{2} \kappa^\nu \right) \right| dt \right]$$

Hölder eşitsizliği uygulanarak

$$|A| \leq \frac{\nu(\tau^\nu - \kappa^\nu)}{4} \left(\int_0^1 t^{\nu\xi p + \nu p - p} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| f' \left(\frac{t^\nu}{2} \kappa^\nu + \frac{2-t^\nu}{2} \tau^\nu \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \frac{\nu(\tau^\nu - \kappa^\nu)}{4} \left(\int_0^1 t^{\nu\xi p + \nu p - p} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| f' \left(\frac{t^\nu}{2} \tau^\nu + \frac{2-t^\nu}{2} \kappa^\nu \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. $|f'|^q$ nin m –konveks olduğu gerçeği göz önüne alınırsa

$$|A| \leq \frac{\nu(\tau^\nu - \kappa^\nu)}{4} \left(\int_0^1 t^{\nu\xi p + \nu p - p} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(\frac{t^\nu}{2} |f'(\kappa^\nu)|^q + m \frac{2-t^\nu}{2} \left| f' \left(\frac{\tau^\nu}{m} \right) \right|^q \right) dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \frac{\nu(\tau^\nu - \kappa^\nu)}{4} \left(\int_0^1 t^{\nu\xi p + \nu p - p} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(\frac{t^\nu}{2} |f'(\tau^\nu)|^q + m \frac{2-t^\nu}{2} \left| f' \left(\frac{\kappa^\nu}{m} \right) \right|^q \right) dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. İntegral hesaplamaları sonucunda ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.4: Teorem 4.2.2 te $m = 1$ seçilirse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir :

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2^{\xi-1}(\xi\nu + \nu - 1)\Gamma(\xi)\nu^{\xi-1}}{(\tau^\nu - \kappa^\nu)^\xi} \left(\left({}^\nu I_{\left(\frac{\kappa^\nu + \tau^\nu}{2}\right)_+}^\xi \right) f(\tau) + \left({}^\nu I_{\left(\frac{\kappa^\nu + \tau^\nu}{2}\right)_-}^\xi \right) f(\kappa) \right) \right. \\
& \quad \left. - f\left(\frac{\kappa^\nu + \tau^\nu}{2}\right) \right| \\
& \leq \frac{\nu(\tau^\nu - \kappa^\nu)}{4} \left(\frac{1}{\nu^\xi p + \nu p - p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{2\nu + 2} \right)^{\frac{1}{q}} \left[(|f'(\kappa^\nu)|^q + (2\nu + 1)|f'(\tau^\nu)|^q)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + (|f'(\tau^\nu)|^q + (2\nu + 1)|f'(\kappa^\nu)|^q)^{\frac{1}{q}} \right].
\end{aligned}$$

Sonuç 4.2.5: Teorem 4.2.2 te $\nu = 1$ alınırse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2^{\xi-1}\Gamma(\xi + 1)}{(\tau - \kappa)^\xi} \left(J_{\left(\frac{\kappa + \tau}{2}\right)_+}^\xi f(\tau) + J_{\left(\frac{\kappa + \tau}{2}\right)_-}^\xi f(\kappa) \right) - f\left(\frac{\kappa + \tau}{2}\right) \right| \\
& \leq \frac{\tau - \kappa}{4} \left(\frac{1}{\xi p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(|f'(\kappa)|^q + 3m \left| f'\left(\frac{\tau}{m}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(|f'(\tau)|^q + 3m \left| f'\left(\frac{\kappa}{m}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right].
\end{aligned}$$

Sonuç 4.2.6: Teorem 4.2.2 te $\nu = 1$, $\xi = 1$ seçilirse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\tau - \kappa} \int_\kappa^\tau f(u) du - f\left(\frac{\kappa + \tau}{2}\right) \right| \\
& \leq \frac{\tau - \kappa}{4} \left(\frac{1}{p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(|f'(\kappa)|^q + 3m \left| f'\left(\frac{\tau}{m}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(|f'(\tau)|^q + 3m \left| f'\left(\frac{\kappa}{m}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right].
\end{aligned}$$

Teorem 4.2.3: $\xi \in (0,1]$ ve $\nu > 0$, $f: [0, \infty) \rightarrow \Re$ ye (κ^ν, ∞) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $0 < \kappa^\nu < \tau^\nu < \infty$, $f' \in L_1[\kappa^\nu, \tau^\nu]$ olsun. $|f'|^q$

m –konveks fonksiyon ve $m \in (0,1]$ ise Katugampola kesirli integral operatörü için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$|A| \leq \frac{\nu(\tau^\nu - \kappa^\nu)}{4} \left(\frac{1}{\nu\xi + 1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{2\nu\xi + 4\nu} \right)^{\frac{1}{q}} \\ \times \left[\left(|f'(\kappa^\nu)|^q + \frac{m(\nu\xi + 3\nu)}{(\nu\xi + \nu)} \left| f' \left(\frac{\tau^\nu}{m} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. + \left(|f'(\tau^\nu)|^q + \frac{m(\nu\xi + 3\nu)}{(\nu\xi + \nu)} \left| f' \left(\frac{\kappa^\nu}{m} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

ve burada $q \geq 1$ şeklindedir.

İspat: Lemma 4.2.1'den aşağıdaki eşitsizlik yazılır.

$$\left| \frac{2^{\xi-1}(\xi\nu + \nu - 1)\Gamma(\xi)\nu^{\xi-1}}{(\tau^\nu - \kappa^\nu)^\xi} \left(\left({}^\nu I_{\left(\frac{\kappa^\nu + \tau^\nu}{2} \right)_+}^\xi \right) f(\tau) + \left({}^\nu I_{\left(\frac{\kappa^\nu + \tau^\nu}{2} \right)_-}^\xi \right) f(\kappa) \right) \right. \\ \left. - f \left(\frac{\kappa^\nu + \tau^\nu}{2} \right) \right|$$

$$\leq \frac{\nu(\tau^\nu - \kappa^\nu)}{4} \left[\int_0^1 t^{\nu\xi + \nu - 1} \left| f' \left(\frac{t^\nu}{2} \kappa^\nu + \frac{2-t^\nu}{2} \tau^\nu \right) \right| dt + \int_0^1 t^{\nu\xi + \nu - 1} \left| f' \left(\frac{t^\nu}{2} \tau^\nu + \frac{2-t^\nu}{2} \kappa^\nu \right) \right| dt \right]$$

Power-mean eşitsizliği kullanılarak

$$|A| \leq \frac{\nu(\tau^\nu - \kappa^\nu)}{4} \left(\int_0^1 t^{\nu\xi + \nu - 1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 t^{\nu\xi + \nu - 1} \left| f' \left(\frac{t^\nu}{2} \kappa^\nu + \frac{2-t^\nu}{2} \tau^\nu \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ + \frac{\nu(\tau^\nu - \kappa^\nu)}{4} \left(\int_0^1 t^{\nu\xi + \nu - 1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 t^{\nu\xi + \nu - 1} \left| f' \left(\frac{t^\nu}{2} \tau^\nu + \frac{2-t^\nu}{2} \kappa^\nu \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. $|f'|^q$ nin m –konveks olduğu gerçeği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
|A| \leq & \frac{v(\tau^\nu - \kappa^\nu)}{4} \left(\int_0^1 t^{v\xi + \nu - 1} \right)^{1 - \frac{1}{q}} \left(\int_0^1 t^{v\xi + \nu - 1} \left(\frac{t^\nu}{2} |f'(\kappa^\nu)|^q \right. \right. \\
& \left. \left. + m \frac{2 - t^\nu}{2} \left| f' \left(\frac{\tau^\nu}{m} \right) \right|^q \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \frac{v(\tau^\nu - \kappa^\nu)}{4} \left(\int_0^1 t^{v\xi + \nu - 1} \right)^{1 - \frac{1}{q}} \left(\int_0^1 t^{v\xi + \nu - 1} \left(\frac{t^\nu}{2} |f'(\tau^\nu)|^q \right. \right. \\
& \left. \left. + m \frac{2 - t^\nu}{2} \left| f' \left(\frac{\kappa^\nu}{m} \right) \right|^q \right) dt \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir. İntegral hesaplamaları sonucunda ispat tamamlanır.

$$\begin{aligned}
|A| \leq & \frac{v(\tau^\nu - \kappa^\nu)}{4} \left(\frac{1}{v\xi + \nu} \right)^{1 - \frac{1}{q}} \left(\frac{1}{2v\xi + 4\nu} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \times \left[\left(|f'(\kappa^\nu)|^q + \frac{m(v\xi + 3\nu)}{(v\xi + \nu)} \left| f' \left(\frac{\tau^\nu}{m} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \left. + \left(|f'(\tau^\nu)|^q + \frac{m(v\xi + 3\nu)}{(v\xi + \nu)} \left| f' \left(\frac{\kappa^\nu}{m} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

Sonuç 4.2.7: Teorem 4.2.3 te $m = 1$ seçilmesi halinde aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2^{\xi-1}(\xi\nu + \nu - 1)\Gamma(\xi)\nu^{\xi-1}}{(\tau^\nu - \kappa^\nu)^\xi} \left(\left({}^\nu I^\xi_{\left(\frac{\kappa^\nu + \tau^\nu}{2} \right)_+} \right) f(\tau) + \left({}^\nu I^\xi_{\left(\frac{\kappa^\nu + \tau^\nu}{2} \right)_-} \right) f(\kappa) \right) \right. \\
& \left. - f \left(\frac{\kappa^\nu + \tau^\nu}{2} \right) \right|
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{\nu(\tau^\nu - \kappa^\nu)}{4} \left(\frac{1}{\nu\xi + \nu} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{2\nu\xi + 4\nu} \right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(|f'(\kappa^\nu)|^q + \frac{\nu\xi + 3\nu}{\nu\xi + \nu} |f'(\tau^\nu)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. + \left(|f'(\tau^\nu)|^q + \frac{\nu\xi + 3\nu}{\nu\xi + \nu} |f'(\kappa^\nu)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right].$$

Sonuç 4.2.8: Teorem 4.2.3 te $\nu = 1$ alınırse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left| \frac{2^{\xi-1}\Gamma(\xi+1)}{(\tau-\kappa)^\xi} \left(J_{\left(\frac{\kappa+\tau}{2}\right)^+}^\xi f(\tau) + J_{\left(\frac{\kappa+\tau}{2}\right)^-}^\xi f(\kappa) \right) - f\left(\frac{\kappa+\tau}{2}\right) \right| \\ \leq \frac{\tau-\kappa}{4} \left(\frac{1}{\xi+1} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{2\xi+4} \right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(|f'(\kappa)|^q + \frac{m(\xi+3)}{\xi+1} \left| f'\left(\frac{\tau}{m}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. + \left(|f'(\tau)|^q + \frac{m(\xi+3)}{\xi+1} \left| f'\left(\frac{\kappa}{m}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right].$$

Sonuç 4.2.9: Teorem 4.2.3 te $\nu = 1$, $\xi = 1$ seçilerek aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left| \frac{1}{\tau-\kappa} \int_\kappa^\tau f(u) du - f\left(\frac{\kappa+\tau}{2}\right) \right| \\ \leq \frac{\tau-\kappa}{4} \left(\frac{1}{2} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{6} \right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(|f'(\kappa)|^q + 2m \left| f'\left(\frac{\tau}{m}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} + \left(|f'(\tau)|^q + 2m \left| f'\left(\frac{\kappa}{m}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right].$$

Teorem 4.2.4: $\xi \in (0,1]$ ve $\nu > 0$, $f: [0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}$ ye (κ^ν, ∞) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $0 < \kappa^\nu < \tau^\nu < \infty$ olsun. $|f'|$ m -konveks fonksiyon ve $m \in (0,1]$ ise Katugampola kesirli integral operatörü için $p, q > 1$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{2^{\xi-1}(\xi\nu + \nu - 1)\Gamma(\xi)\nu^{\xi-1}}{(\tau^\nu - \kappa^\nu)^\xi} \left(\left({}^\nu I^\xi_{\left(\frac{\kappa^\nu + \tau^\nu}{2}\right)_+} \right) f(\tau) + \left({}^\nu I^\xi_{\left(\frac{\kappa^\nu + \tau^\nu}{2}\right)_-} \right) f(\kappa) \right) \right. \\
& \quad \left. - f\left(\frac{\kappa^\nu + \tau^\nu}{2}\right) \right| \\
& \leq \frac{\nu(\tau^\nu - \kappa^\nu)}{4} \left[\frac{2}{\nu\xi p^2 + \nu p^2 - p^2 + p} \right. \\
& \quad \left. + \frac{|f'(\kappa^\nu)|^q + m(2\nu + 1) \left(\left| f'\left(\frac{\tau^\nu}{m}\right) \right|^q + \left| f'\left(\frac{\kappa^\nu}{m}\right) \right|^q \right) + |f'(\tau^\nu)|^q}{2\nu q + 2q} \right].
\end{aligned}$$

İspat: Lemma 4.2.1'in sağ tarafını kullanarak aşağıdaki eşitsizlik yazılır.

$$|A| \leq \frac{\nu(\tau^\nu - \kappa^\nu)}{4} \left[\int_0^1 t^{\nu\xi + \nu - 1} \left| f'\left(\frac{t^\nu}{2}\kappa^\nu + \frac{2-t^\nu}{2}\tau^\nu\right) \right| dt + \int_0^1 t^{\nu\xi + \nu - 1} \left| f'\left(\frac{t^\nu}{2}\tau^\nu + \frac{2-t^\nu}{2}\kappa^\nu\right) \right| dt \right]$$

Young eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
|A| & \leq \frac{\nu(\tau^\nu - \kappa^\nu)}{4} \int_0^1 \left(\frac{t^{\nu\xi p + \nu p - p}}{p} + \frac{\left| f'\left(\frac{t^\nu}{2}\kappa^\nu + \frac{2-t^\nu}{2}\tau^\nu\right) \right|^q}{q} \right) dt \\
& \quad + \frac{\nu(\tau^\nu - \kappa^\nu)}{4} \int_0^1 \left(\frac{t^{\nu\xi p + \nu p - p}}{p} + \frac{\left| f'\left(\frac{t^\nu}{2}\tau^\nu + \frac{2-t^\nu}{2}\kappa^\nu\right) \right|^q}{q} \right) dt
\end{aligned}$$

elde edilir. $|f'|$ nin m -konveks fonksiyon olduğu gerçeği göz önüne alınırsa

$$|A| \leq \frac{\nu(\tau^\nu - \kappa^\nu)}{4} \int_0^1 \left(\frac{t^{\nu\xi p + \nu p - p}}{p} + \frac{\frac{t^\nu}{2} |f'(\kappa^\nu)|^q + m \frac{2-t^\nu}{2} \left| f'\left(\frac{\tau^\nu}{m}\right) \right|^q}{q} \right) dt$$

$$+ \frac{v(\tau^v - \kappa^v)}{4} \int_0^1 \left(\frac{t^{v\xi p + vp - p}}{p} + \frac{\frac{t^v}{2} |f'(\tau^v)|^q + m \frac{2-t^v}{2} \left| f' \left(\frac{\kappa^v}{m} \right) \right|^q}{q} \right) dt$$

elde edilir. Böylece integral hesaplamalarından sonra şu sonuca varılabilir.

$$|A| \leq \frac{v(\tau^v - \kappa^v)}{4} \times \left[\frac{2}{v\xi p^2 + vp^2 - p^2 + p} + \frac{|f'(\kappa^v)|^q + m(2v+1) \left(\left| f' \left(\frac{\tau^v}{m} \right) \right|^q + \left| f' \left(\frac{\kappa^v}{m} \right) \right|^q \right) + |f'(\tau^v)|^q}{2vq + 2q} \right].$$

Sonuç 4.2.10: Teorem 4.2.4 te $m = 1$ seçilerek aşağıdaki eşitsizlik elde edilir :

$$\left| \frac{2^{\xi-1}(\xi v + v - 1)\Gamma(\xi)v^{\xi-1}}{(\tau^v - \kappa^v)^\xi} \left(\left({}^v I_{\left(\frac{\kappa^v + \tau^v}{2} \right)_+}^\xi \right) f(\tau) + \left({}^v I_{\left(\frac{\kappa^v + \tau^v}{2} \right)_-}^\xi \right) f(\kappa) \right) - f\left(\frac{\kappa^v + \tau^v}{2} \right) \right|$$

$$\leq \frac{v(\tau^v - \kappa^v)}{4} \left[\frac{2}{v\xi p^2 + vp^2 - p^2 + p} + \frac{(2v+2)(|f'(\kappa^v)|^q + |f'(\tau^v)|^q)}{2vq + 2q} \right].$$

Sonuç 4.2.11: Teorem 4.2.4 te $v = 1$ alınırse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left| \frac{2^{\xi-1}\Gamma(\xi+1)}{(\tau - \kappa)^\xi} \left(J_{\left(\frac{\kappa + \tau}{2} \right)_+}^\xi f(\tau) + J_{\left(\frac{\kappa + \tau}{2} \right)_-}^\xi f(\kappa) \right) - f\left(\frac{\kappa + \tau}{2} \right) \right|$$

$$\leq \frac{\tau - \kappa}{4} \left[\frac{2}{\xi p^2 + p} + \frac{|f'(\kappa)|^q + 3m \left(\left| f' \left(\frac{\tau}{m} \right) \right|^q + \left| f' \left(\frac{\kappa}{m} \right) \right|^q \right) + |f'(\tau)|^q}{4q} \right].$$

Sonuç 4.2.12: Teorem 4.2.4 te $\nu = 1$, $\xi = 1$ seçilirse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left| \frac{1}{\tau - \kappa} \int_{\kappa}^{\tau} f(u) du - f\left(\frac{\kappa + \tau}{2}\right) \right| \leq \frac{\tau - \kappa}{4} \left[\frac{2}{p^2 + p} + \frac{|f'(\kappa)|^q + 3m \left(\left| f'\left(\frac{\tau}{m}\right) \right|^q + \left| f'\left(\frac{\kappa}{m}\right) \right|^q \right) + |f'(\tau)|^q}{4q} \right].$$

4.3. Atangana-Baleanu Kesirli İntegral Operatör Yardımıyla Konveks Fonksiyonlar İçin Elde Edilen Simpson Tipli Eşitsizlikler

Lemma 4.3.1. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ye (a, b) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. Aşağıdaki eşitlik Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} I &= \frac{(b-a)^{\xi} + 2^{\xi+1}(1-\xi)\Gamma(\xi)}{3 \cdot 2^{\xi}(b-a)\mathcal{B}(\xi)\Gamma(\xi)} (f(a) + f(b)) \\ &\quad + \frac{(b-a)^{\xi} + 2^{\xi-1}(1-\xi)\Gamma(\xi)}{3 \cdot 2^{\xi-2}(b-a)\mathcal{B}(\xi)\Gamma(\xi)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ &\quad - \frac{2}{3(b-a)} \left[\frac{{}^{AB}I_{\frac{a+b}{2}}^{\xi} f(b)}{2} + \frac{{}^{AB}I_{\frac{a+b}{2}}^{\xi} f(a)}{2} \right] \\ &\quad - \frac{1}{3(b-a)} \left[{}^{AB}I_b^{\xi} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + {}^{AB}I_a^{\xi} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] \\ &= -\frac{(b-a)^{\xi}}{2^{\xi+1}\mathcal{B}(\xi)\Gamma(\xi)} \left[\int_0^1 \frac{2(1-t)^{\xi} - t^{\xi}}{3} f'\left(\frac{1+t}{2}b + \frac{1-t}{2}a\right) dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 \frac{t^{\xi} - 2(1-t)^{\xi}}{3} f'\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right) dt \right] \end{aligned}$$

burada $\xi \in (0,1]$, $t \in [0,1]$, $\mathcal{B}(\xi)$ normalizasyon fonksiyonudur.

İspat. Kısmi integrasyon uygulanarak

$$I_1 = \int_0^1 \frac{2(1-t)^{\xi} - t^{\xi}}{3} f'\left(\frac{1+t}{2}b + \frac{1-t}{2}a\right) dt$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{4}{3(b-a)}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{2^{\xi+2}\xi}{3(b-a)^{\xi+1}} \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-u)^{\xi-1} f(u) du - \frac{2}{3(b-a)}f(b) \\
&\quad + \frac{2^{\xi+1}\xi}{3(b-a)^{\xi+1}} \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(u - \frac{a+b}{2}\right)^{\xi-1} f(u) du
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 \frac{t^\xi - 2(1-t)^\xi}{3} f'\left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b\right) dt \\
&= -\frac{2}{3(b-a)}f(a) + \frac{2^{\xi+1}\xi}{3(b-a)^{\xi+1}} \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(\frac{a+b}{2} - u\right)^{\xi-1} f(u) du \\
&\quad - \frac{4}{3(b-a)}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{2^{\xi+2}\xi}{3(b-a)^{\xi+1}} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (u-a)^{\xi-1} f(u) du
\end{aligned}$$

yazılır.

I_1 ve I_2 toplanır ve $(I_1 + I_2)$ ifadesini $-\frac{(b-a)^\xi}{2^{\xi+1}B(\xi)\Gamma(\xi)}$ ile çarparak istenen sonuç elde edilir.

Teorem 4.3.1. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ye (a, b) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. $|f'|$ konveks bir fonksiyon ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{(b-a)^\xi + 2^{\xi+1}(1-\xi)\Gamma(\xi)}{3 \cdot 2^\xi(b-a)B(\xi)\Gamma(\xi)} (f(a) + f(b)) \right. \\
&\quad + \frac{(b-a)^\xi + 2^{\xi-1}(1-\xi)\Gamma(\xi)}{3 \cdot 2^{\xi-2}(b-a)B(\xi)\Gamma(\xi)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&\quad - \frac{2}{3(b-a)} \left[{}^{AB}_{\frac{a+b}{2}} I^\xi f(b) + {}^{AB}_{\frac{a+b}{2}} I^\xi f(a) \right] \\
&\quad \left. - \frac{1}{3(b-a)} \left[{}^{AB}_b I^\xi f\left(\frac{a+b}{2}\right) + {}^{AB}_a I^\xi f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] \right| \\
&\leq \frac{(b-a)^\xi}{2^{\xi+1}B(\xi)\Gamma(\xi)} \left[\frac{-4 \left(1 - \frac{1}{2^{\frac{1}{\xi}}}\right)^{\xi+1} - 2 \left(\frac{1}{2^{\frac{1}{\xi}}}\right)^{\xi+1} + 3}{3(\xi+1)} \right] (|f'(a)| \\
&\quad + |f'(b)|)
\end{aligned}$$

burada $\xi \in (0,1]$, $t \in [0,1]$, $B(\xi)$ normalizasyon fonksiyonudur.

İspat. Lemma 4.3.1'in sağ tarafını kullanarak aşağıdaki eşitsizlik yazılır.

$$|I| \leq \frac{(b-a)^\xi}{2^{\xi+1}B(\xi)\Gamma(\xi)} \left(\int_0^1 \left| \frac{2(1-t)^\xi - t^\xi}{3} \right| \left| f' \left(\frac{1+t}{2}b + \frac{1-t}{2}a \right) \right| dt \right. \\ \left. + \int_0^1 \left| \frac{t^\xi - 2(1-t)^\xi}{3} \right| \left| f' \left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b \right) \right| dt \right).$$

$|f'|$ nin konveks fonksiyon olduğu kullanılarak,

$$|I| \leq \frac{(b-a)^\xi}{2^{\xi+1}B(\xi)\Gamma(\xi)} \left(\int_0^1 \left| \frac{2(1-t)^\xi - t^\xi}{3} \right| \left(\frac{1+t}{2}|f'(b)| + \frac{1-t}{2}|f'(a)| \right) dt \right. \\ \left. + \int_0^1 \left| \frac{t^\xi - 2(1-t)^\xi}{3} \right| \left(\frac{1+t}{2}|f'(a)| + \frac{1-t}{2}|f'(b)| \right) dt \right) \\ = \frac{(b-a)^\xi}{2^{\xi+1}B(\xi)\Gamma(\xi)} \left(\int_0^{\frac{\frac{1}{2^\xi}}{2^{\xi+1}+1}} \left(\frac{2(1-t)^\xi - t^\xi}{3} \right) \left(\frac{1+t}{2}|f'(b)| + \frac{1-t}{2}|f'(a)| \right) dt \right. \\ + \int_{\frac{\frac{1}{2^\xi}}{2^{\xi+1}+1}}^1 \left(\frac{t^\xi - 2(1-t)^\xi}{3} \right) \left(\frac{1+t}{2}|f'(b)| + \frac{1-t}{2}|f'(a)| \right) dt \\ + \int_0^{\frac{\frac{1}{2^\xi}}{2^{\xi+1}+1}} \left(\frac{2(1-t)^\xi - t^\xi}{3} \right) \left(\frac{1+t}{2}|f'(a)| + \frac{1-t}{2}|f'(b)| \right) dt \\ \left. + \int_{\frac{\frac{1}{2^\xi}}{2^{\xi+1}+1}}^1 \left(\frac{t^\xi - 2(1-t)^\xi}{3} \right) \left(\frac{1+t}{2}|f'(a)| + \frac{1-t}{2}|f'(b)| \right) dt \right)$$

elde edilir. İntegral hesaplamalarından yararlanarak

$$|I| \leq \frac{(b-a)^\xi}{2^{\xi+1}B(\xi)\Gamma(\xi)} \left[\frac{-4 \left(1 - \frac{2^{\frac{1}{\xi}}}{2^{\frac{1}{\xi}+1}}\right)^{\xi+1} - 2 \left(\frac{2^{\frac{1}{\xi}}}{2^{\frac{1}{\xi}+1}}\right)^{\xi+1} + 3}{3(\xi+1)} \right] (|f'(a)| + |f'(b)|)$$

eşitsizliği bulunur.

Sonuç 4.3.1: Teorem 4.3.1 de $\xi = 1$ seçilirse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left| \frac{1}{3} \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{5(b-a)}{72} (|f'(a)| + |f'(b)|).$$

Teorem 4.3.2. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ye (a, b) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. $|f'|^q$ konveks bir fonksiyon ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$|I| \leq \frac{(b-a)^\xi}{2^{\xi+1}B(\xi)\Gamma(\xi)} \left(p \cdot \frac{3 - 2 \left(\frac{2^{\frac{1}{\xi}}}{2^{\frac{1}{\xi}+1}}\right)^{\xi+1} - 4 \left(1 - \frac{2^{\frac{1}{\xi}}}{2^{\frac{1}{\xi}+1}}\right)^{\xi+1}}{3(\xi+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\frac{3}{4} |f'(b)|^q + \frac{1}{4} |f'(a)|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{3}{4} |f'(a)|^q + \frac{1}{4} |f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

burada $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $\xi \in (0, 1], t \in [0, 1], q > 1$, ve $B(\xi)$ normalizasyon fonksiyonudur.

İspat. Lemma 4.3.1’de verilen eşitlik kullanılarak

$$|I| \leq \frac{(b-a)^\xi}{2^{\xi+1}B(\xi)\Gamma(\xi)} \left(\int_0^1 \left| \frac{2(1-t)^\xi - t^\xi}{3} \right| \left| f' \left(\frac{1+t}{2}b + \frac{1-t}{2}a \right) \right| dt + \int_0^1 \left| \frac{t^\xi - 2(1-t)^\xi}{3} \right| \left| f' \left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b \right) \right| dt \right)$$

yazılır. Hölder eşitsizliği uygulanarak

$$|I| \leq \frac{(b-a)^\xi}{2^{\xi+1}B(\xi)\Gamma(\xi)} \left[\left(\int_0^1 \left| \frac{2(1-t)^\xi - t^\xi}{3} \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| f' \left(\frac{1+t}{2}b + \frac{1-t}{2}a \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. + \left(\int_0^1 \left| \frac{t^\xi - 2(1-t)^\xi}{3} \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| f' \left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

elde edilir. $|f'|^q$ nin konveks olduğu gerçeği göz önüne alınırsa

$$|I| \leq \frac{(b-a)^\xi}{2^{\xi+1}B(\xi)\Gamma(\xi)} \left[\left(\int_0^1 \left| \frac{2(1-t)^\xi - t^\xi}{3} \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(\frac{1+t}{2} |f'(b)|^q + \frac{1-t}{2} |f'(a)|^q \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. + \left(\int_0^1 \left| \frac{t^\xi - 2(1-t)^\xi}{3} \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(\frac{1+t}{2} |f'(a)|^q + \frac{1-t}{2} |f'(b)|^q \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

elde edilir.

$p > 0, A \in [0,1]$ olmak üzere $|A|^p \leq |p \cdot A|$ basit eşitsizliğinden yararlanarak

$$\begin{aligned}
|I| \leq & \frac{(b-a)^\xi}{2^{\xi+1}B(\xi)\Gamma(\xi)} \left[\left(\int_0^1 \left| p \cdot \frac{2(1-t)^\xi - t^\xi}{3} \right| dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(\frac{1+t}{2} |f'(b)|^q \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{1-t}{2} |f'(a)|^q \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \left. + \left(\int_0^1 \left| p \cdot \frac{t^\xi - 2(1-t)^\xi}{3} \right| dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left(\frac{1+t}{2} |f'(a)|^q \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{1-t}{2} |f'(b)|^q \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

yazılır. İntegral hesaplamalarından sonra ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3.2: Teorem 4.3.2 de $\xi = 1$ seçilirse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{3} \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\
& \leq \frac{b-a}{4} \left(\frac{5p}{18} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\frac{3}{4} |f'(b)|^q + \frac{1}{4} |f'(a)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{3}{4} |f'(a)|^q + \frac{1}{4} |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right].
\end{aligned}$$

Teorem 4.3.3. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ye (a, b) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. $|f'|^q$ konveks bir fonksiyon ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned}
|I| \leq & \frac{(b-a)^\xi}{2^{\xi+1}B(\xi)\Gamma(\xi)} \left(\frac{-4 \left(1 - \frac{2^{\frac{1}{\xi}}}{2^{\frac{1}{\xi}}+1} \right)^{\xi+1} - 2 \left(\frac{2^{\frac{1}{\xi}}}{2^{\frac{1}{\xi}}+1} \right)^{\xi+1} + 3}{3(\xi+1)} \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \left((K_1 |f'(b)|^q \right. \\
& \quad \left. + K_2 |f'(a)|^q)^{\frac{1}{q}} + (K_1 |f'(a)|^q + K_2 |f'(b)|^q)^{\frac{1}{q}} \right)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
K_1 &= \frac{-4 \left(1 + \frac{2^{\frac{1}{\xi}}}{2^{\frac{1}{\xi}+1}}\right) \left(1 - \frac{2^{\frac{1}{\xi}}}{2^{\frac{1}{\xi}+1}}\right)^{\xi+1} - 2 \left(\frac{2^{\frac{1}{\xi}}}{2^{\frac{1}{\xi}+1}}\right)^{\xi+1} + 3}{6(\xi+1)} \\
&\quad + \frac{1 - 2 \left(\frac{2^{\frac{1}{\xi}}}{2^{\frac{1}{\xi}+1}}\right)^{\xi+2}}{6(\xi+2)} + \frac{1 - 2 \left(1 - \frac{2^{\frac{1}{\xi}}}{2^{\frac{1}{\xi}+1}}\right)^{\xi+2}}{3(\xi+1)(\xi+2)} \\
K_2 &= \frac{-4 \left(1 - \frac{2^{\frac{1}{\xi}}}{2^{\frac{1}{\xi}+1}}\right)^{\xi+2} + 2 \left(\frac{2^{\frac{1}{\xi}}}{2^{\frac{1}{\xi}+1}}\right)^{\xi+2} + 1}{6(\xi+2)} + \frac{1 - 2 \left(\frac{2^{\frac{1}{\xi}}}{2^{\frac{1}{\xi}+1}}\right)^{\xi+1}}{6(\xi+1)}
\end{aligned}$$

burada $\xi \in (0,1]$, $t \in [0,1]$, $q \geq 1$, ve $B(\xi)$ normalizasyon fonksiyonudur.

İspat. Lemma 4.3.1 den,

$$\begin{aligned}
|I| &\leq \frac{(b-a)^\xi}{2^{\xi+1}B(\xi)\Gamma(\xi)} \left(\int_0^1 \left| \frac{2(1-t)^\xi - t^\xi}{3} \right| \left| f' \left(\frac{1+t}{2}b + \frac{1-t}{2}a \right) \right| dt \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 \left| \frac{t^\xi - 2(1-t)^\xi}{3} \right| \left| f' \left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b \right) \right| dt \right)
\end{aligned}$$

yazılır. Power-mean eşitsizliği uygulanarak

$$\begin{aligned}
&|I| \\
&\leq \frac{(b-a)^\xi}{2^{\xi+1}B(\xi)\Gamma(\xi)} \left[\left(\int_0^1 \left| \frac{2(1-t)^\xi - t^\xi}{3} \right| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \left| \frac{2(1-t)^\xi - t^\xi}{3} \right| \left| f' \left(\frac{1+t}{2}b \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{1-t}{2}a \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \left(\int_0^1 \left| \frac{t^\xi - 2(1-t)^\xi}{3} \right| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \left| \frac{t^\xi - 2(1-t)^\xi}{3} \right| \left| f' \left(\frac{1+t}{2}a \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{1-t}{2}b \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. $|f'|^q$ nin konveks olduğu gerçeği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
& |I| \\
& \leq \frac{(b-a)^\xi}{2^{\xi+1}B(\xi)\Gamma(\xi)} \left[\left(\int_0^1 \left| \frac{2(1-t)^\xi - t^\xi}{3} \right| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \left| \frac{2(1-t)^\xi - t^\xi}{3} \right| \left(\frac{1+t}{2} |f'(b)|^q \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. + \frac{1-t}{2} |f'(a)|^q \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_0^1 \left| \frac{t^\xi - 2(1-t)^\xi}{3} \right| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \left| \frac{t^\xi - 2(1-t)^\xi}{3} \right| \left(\frac{1+t}{2} |f'(a)|^q \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. + \frac{1-t}{2} |f'(b)|^q \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki integral hesaplanarak ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3.3: Teorem 4.3.3 te $\xi = 1$ seçilirse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{3} \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\
& \leq \frac{b-a}{4} \left(\frac{5}{18} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\left(\frac{61}{324} |f'(b)|^q + \frac{29}{324} |f'(a)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{61}{324} |f'(a)|^q + \frac{29}{324} |f'(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right).
\end{aligned}$$

Teorem 4.3.4. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ye (a, b) aralığı üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olsun. $|f'|^q$ konveks bir fonksiyon ise Atangana-Baleanu kesirli integral operatörleri için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$|I| \leq \frac{(b-a)^\xi}{2^{\xi+1}B(\xi)\Gamma(\xi)} \left[\frac{6 - 4 \left(\frac{\frac{1}{2^\xi}}{\frac{1}{2^\xi} + 1} \right)^{\xi+1} - 8 \left(1 - \frac{\frac{1}{2^\xi}}{\frac{1}{2^\xi} + 1} \right)^{\xi+1}}{3(\xi+1)} + \frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{q} \right]$$

burada $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $\xi \in (0,1], t \in [0,1], q > 1$, ve $B(\xi)$ normalizasyon fonksiyonudur.

İspat. Lemma 4.3.1 de verilen eşitlik kullanılarak

$$|I| \leq \frac{(b-a)^\xi}{2^{\xi+1}B(\xi)\Gamma(\xi)} \left(\int_0^1 \left| \frac{2(1-t)^\xi - t^\xi}{3} \right| \left| f' \left(\frac{1+t}{2}b + \frac{1-t}{2}a \right) \right| dt \right. \\ \left. + \int_0^1 \left| \frac{t^\xi - 2(1-t)^\xi}{3} \right| \left| f' \left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b \right) \right| dt \right)$$

yazılır. Young eşitsizliği uygulanarak

$$|I| \leq \frac{(b-a)^\xi}{2^{\xi+1}B(\xi)\Gamma(\xi)} \int_0^1 \left(\frac{\left| \frac{2(1-t)^\xi - t^\xi}{3} \right|^p}{p} + \frac{\left| f' \left(\frac{1+t}{2}b + \frac{1-t}{2}a \right) \right|^q}{q} \right) dt \\ + \frac{(b-a)^\xi}{2^{\xi+1}B(\xi)\Gamma(\xi)} \int_0^1 \left(\frac{\left| \frac{t^\xi - 2(1-t)^\xi}{3} \right|^p}{p} + \frac{\left| f' \left(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b \right) \right|^q}{q} \right) dt$$

elde edilir. $|f'|^q$ nin konveks olduğu gerçeği göz önüne alınırsa

$$|I| \leq \frac{(b-a)^\xi}{2^{\xi+1}B(\xi)\Gamma(\xi)} \int_0^1 \left(\frac{\left| \frac{2(1-t)^\xi - t^\xi}{3} \right|^p}{p} + \frac{\frac{1+t}{2}|f'(b)|^q + \frac{1-t}{2}|f'(a)|^q}{q} \right) dt \\ + \frac{(b-a)^\xi}{2^{\xi+1}B(\xi)\Gamma(\xi)} \int_0^1 \left(\frac{\left| \frac{t^\xi - 2(1-t)^\xi}{3} \right|^p}{p} + \frac{\frac{1+t}{2}|f'(a)|^q + \frac{1-t}{2}|f'(b)|^q}{q} \right) dt$$

elde edilir.

$p > 0, A \in [0,1]$ olmak üzere $|A|^p \leq |p.A|$ basit eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
|I| \leq & \frac{(b-a)^\xi}{2^{\xi+1}B(\xi)\Gamma(\xi)} \int_0^1 \left(\frac{\left| p \cdot \frac{2(1-t)^\xi - t^\xi}{3} \right|}{p} + \frac{\frac{1+t}{2}|f'(b)|^q + \frac{1-t}{2}|f'(a)|^q}{q} \right) dt \\
& + \frac{(b-a)^\xi}{2^{\xi+1}B(\xi)\Gamma(\xi)} \int_0^1 \left(\frac{\left| p \cdot \frac{t^\xi - 2(1-t)^\xi}{3} \right|}{p} \right. \\
& \left. + \frac{\frac{1+t}{2}|f'(a)|^q + \frac{1-t}{2}|f'(b)|^q}{q} \right) dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Basit integral hesaplamaları yapılarak istenen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3.4: Teorem 4.3.4 te $\xi = 1$ seçilirse aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{3} \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\
& \leq \frac{b-a}{4} \left[\frac{5}{9} + \frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{q} \right].
\end{aligned}$$

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada ABK-kesirli integral operatörü yardımıyla ters Minkowski tipli eşitsizlik elde edilmiştir. Ardından Katugampola kesirli integral operatörü yardımıyla Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler verilmiştir. Son olarak yeni bir özdeşlik kullanılarak konveks fonksiyonlar için Atangana-Baleanu kesirli integral operatörü yardımıyla Simpson tipli eşitsizlikler oluşturulmuştur.

Konuyla ilgilenen araştırmacılar Lemma 4.3.1 e benzer farklı kesirli basamaktan integral operatörler yardımıyla integral özdeşlikleri elde ederek konveks fonksiyonların çeşitli sınıfları için yeni integral eşitsizlikleri elde edebilir.



KAYNAKÇA

- Abdeljawad, T., & Baleanu, D. (2017). On fractional derivatives with exponential kernel and their discrete versions. *Reports on Mathematical Physics*, 80(1), 11-27.
- Akdemir, A. O., Karaoğlu, A., Ragusa, M. A., & Set, E. (2021). Fractional integral inequalities via Atangana-Baleanu operators for convex and concave functions. *Journal of Function Spaces*, 2021, 1-10.
- Alomari, M. & Darus, M. (2010). On some inequalities of Simpson-type via quasi-convex functions and applications. *Transylvanian Journal of Mathematics and Mechanics*, 2(1), 15-24.
- Alomari, M., Darus, M., & Dragomir, S. S. (2009). New inequalities of Simpson's type for s-convex functions with applications. *RGMIA Res. Rep. Coll.*, 12 (4).
- Atangana, A., & Baleanu, D. (2016). New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: theory and application to heat transfer model. *arXiv preprint arXiv:1602.03408*.
- Butt, S. I., Yousaf, S., Akdemir, A. O., & Dokuyucu, M. A. (2021). New Hadamard-type integral inequalities via a general form of fractional integral operators. *Chaos, Solitons & Fractals*, 148, 111025.
- Dragomir, S. S., & Agarwal, R. (1998). Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula. *Applied Mathematics Letters*, 11(5), 91-95.
- Dragomir, S. S., & Pearce, C. (2003). Selected topics on Hermite-Hadamard inequalities and applications. RGMIA monograph, (S1574-0358), 04.
- Dragomir, S. S., Agarwal, R. P., & Cerone, P. (1999). On Simpson's inequality and applications. *RGMIA Res. Rep. Coll.*, 2(3).

- Ekinci, A., & Ozdemir, M. E. (2019). Some new integral inequalities via Riemann-Liouville integral operators. *Applied and Computational Mathematics*, 18(3).
- Kashuri, A. (2021). Hermite-Hadamard type inequalities for the ABK-fractional integrals. *J. Comput. Anal. Appl*, 29, 309-326.
- Katugampola, U. N. (2011). New approach to a generalized fractional integral. *Applied Mathematics And Computation*, 218(3), 860-865.
- Katugampola, U. N. (2015). Mellin transforms of generalized fractional integrals and derivatives. *Applied Mathematics and Computation*, 257, 566-580.
- Kermausuor, S., Nwaeze, E. R., & Tameru, A. M. (2019). New integral inequalities via the Katugampola fractional integrals for functions whose second derivatives are strongly η -convex. *Mathematics*, 7(2), 183.
- Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., & Trujillo, J. J. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations* (Vol. 204). Elsevier.
- Miller, K. S., & Ross, B. (1993). *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. Wiley.
- Mitrinovic, D. S., Pecaric, J., & Fink, A. M. (2013). *Classical and new inequalities in analysis* (Vol. 61). Springer Science & Business Media.
- Nasir, J., Butt, S.I., Dokuyucu, M. A., & Akdemir, A. O. New Variants of Hermite-Hadamard Type Inequalities via Generalized Fractional Operator for Differentiable Functions. *Turkish Journal of Science*, 7(3), 185-201.
- Özdemir, M. E., Ekinci, A., & Akdemir, A. O. (2012). Some new integral inequalities for functions whose derivatives of absolute values are convex and concave. *RGMIA Res. Rep. Coll*, 15, 48.
- Rahman, G., Khan, A., Abdeljawad, T., & Nisar, K. S. (2019). The Minkowski inequalities via generalized proportional fractional integral operators. *Advances in Difference Equations*, 2019 (1), 1-14.

- Rashid, S., Akdemir, A. O., Jarad, F., Noor, M. A., & Noor, K. I. (2019). Simpson's type integral inequalities for kappa-fractional integrals and their applications. Submitted
- Rashid, S., Hammouch, Z., Kalsoom, H., Ashraf, R., & Chu, Y. M. (2020). New investigation on the generalized k-fractional integral operators. *Frontiers in Physics*, 8, 25.
- Sarikaya, M. Z., & Alp, N. (2019). On Hermite-Hadamard-Fejér type integral inequalities for generalized convex functions via local fractional integrals. *Open J. Math. Sci*, 3(1), 273-284.
- Sarikaya, M. Z., & Yildirim, H. (2016). On Hermite-Hadamard type inequalities for Riemann-Liouville fractional integrals. *Miskolc Mathematical Notes*, 17(2), 1049-1059.
- Sarikaya, M. Z., Set, E., & Ozdemir, M. E. (2010). On new inequalities of Simpson's type for s-convex functions. *Computers & Mathematics with Applications*, 60(8), 2191-2199.
- Sarikaya, M. Z., Set, E., Yaldiz, H., & Başak, N. (2013). Hermite–Hadamard's inequalities for fractional integrals and related fractional inequalities. *Mathematical and Computer Modelling*, 57(9-10), 2403-2407.
- Set, E., Akdemir, A. O., & Ozata, F. (2020). Grüss type inequalities for fractional integral operator involving the extended generalized Mittag-Leffler function. *Appl. Comput. Math*, 19(3), 402-414.
- Set, E., Akdemir, A. O., & Özdemir, E. M. (2017). Simpson type integral inequalities for convex functions via Riemann-Liouville integrals. *Filomat*, 31(14), 4415-4420.
- Ujević, N. (2004). Sharp inequalities of Simpson type and Ostrowski type. *Computers & Mathematics with Applications*, 48(1-2), 145-151.

- Ujević, N. (2004). Two sharp inequalities of Simpson type and applications. *Georgian Mathematical Journal*, 11 (1), <https://doi.org/10.1515/GMJ.2004.187>.
- Yaldız, H., & Akdemir, A. O. (2018). Katugampola fractional integrals within the class of convex functions. *Turkish Journal of Science*, 3(1), 40-50.
- Yıldız, Ç., & Gürbüz, M. (2022). The Minkowski type inequalities for weighted fractional operators. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 71(3), 884-897.

