

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI İNTERVAL DEĞERLİ FONKSİYON SINIFLARI ÜZERİNE

Ömer Faruk ÖZDEMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Şubat 2019

Tezin Başlığı : BAZI İNTERVAL DEĞERLİ FONKSİYON SINIFLARI
ÜZERİNE

Tezi Hazırlayan : Ömer Faruk ÖZDEMİR

Sınav Tarihi : 07.02.2019

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Ana Bilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Ümit ÇAKAN

İnönü Üniversitesi

Prof. Dr. Yavuz ALTIN

Fırat Üniversitesi

Doç. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR

İnönü Üniversitesi

Prof. Dr. H. İbrahim ADIGÜZEL

Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Bazı İnterval Değerli Fonksiyon Sınıfları Üzerine” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlâk ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Ömer Faruk ÖZDEMİR



ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BAZI İNTERVAL DEĞERLİ FONKSİYON SINIFLARI ÜZERİNE

Ömer Faruk ÖZDEMİR

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

28+v sayfa

2019

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Ümit ÇAKAN

Üç bölümden oluşan bu yüksek lisans tezinin ilk bölümünde küme değerli fonksiyonlar ile integral denklemlerin tanımı ve uygulama alanları verildi. Ayrıca bu konuda yapılmış çalışmalar hakkında genel bilgiler de verildi.

Tezin ikinci bölümünde son bölümde kullanılan temel tanım ve teoremler ile bazı örnekler sunuldu.

Son bölümünde ise $C([a, b], \Omega_C(\mathbb{R}))$ uzayında nonlinear bir interval integral denklem sınıfının çözümüne ilişkin bir varlık teoremi ispatı ile birlikte verildi.

ANAHTAR KELİMELER: Küme Değerli Fonksiyonlar, Kesirli İntegral, İnterval İntegral Denklemler, Sabit Nokta Teoremi.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

ON SOME CLASS OF INTERVAL VALUED FUNCTIONS

Ömer Faruk ÖZDEMİR

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

28+v pages

2019

Supervisor : Assist. Prof. Dr. Ümit ÇAKAN

In the first chapter of this master thesis consisting of three chapters, definition, usage areas, classification of integral equations and set valued functions are given. Also general informations about studies carried out in this area are given.

In the second chapter, some basic definitions and theorems used in later chapters are given with some examples.

In the third chapter, in space $(C[a, b], \Omega_C(\mathbb{R}))$, an existence theorem for solutions of a class of nonlinear interval integral equations is presented with its proof.

KEYWORDS: Set Valued Functions, Fractional Integral, Interval Integral Equations, Fixed Point Theorem.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez danışmanlığımı üstlenen, tezin hazırlanma sürecinde karşılaştığım her türlü güçlüğü üstesinden gelme konusunda bana yol gösteren, ayrıca tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörü ve sabırdan dolayı değerli hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Ümit ÇAKAN'a, çalışmalarım sırasında bilgi ve görüşlerinden istifade ettiğim çok değerli hocam Sayın Dr. Sümeyye ÇAKAN'a teşekkür ederim.

Ayrıca lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca ilminden faydalandığım, insani ve ahlaki değerleri ile de örnek edindiğim Sayın Prof. Dr. Yılmaz YILMAZ'a, tez ve seminer yazımında kolaylık sağlayan Latex programını öğretene, ilgisini ve önerilerini göstermekten kaçınmayan Sayın Doç. Dr. Kemal ÖZDEMİR'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Bu günlere gelmemde büyük pay sahibi olan, dualarını esirgemeyen anneme, babama, kardeşlerime ve hayatım her evresinde olduğu gibi yüksek lisans sürecinde de bana destek olan değerli abim Gökhan ÖZDEMİR'e sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR	v
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR.....	3
3. NONLİNEER BİR İNTERVAL İNTEGRAL DENKLEM SINIFININ ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİ	15
KAYNAKLAR.....	26
ÖZGEÇMİŞ.....	28

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar cümlesi
$\Omega_C(\mathbb{R}^n)$	:	$\mathbb{R}^n$ nin boştan farklı kapalı, sınırlı ve konveks alt cümlelerin ailesi
$C[a, b]$	:	$[a, b]$ aralığında tanımlı, reel değerli ve sürekli fonksiyonların ailesi
$C([a, b], \Omega_C(\mathbb{R}))$	:	$[a, b]$ aralığından $\Omega_C(\mathbb{R})$ 'ye tanımlanan sürekli fonksiyonların ailesi
$L^p[a, b]$	:	$[a, b]$ aralığında tanımlı p . kuvveti integrallenebilen fonksiyonların ailesi
$B[x, r]$	:	x merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar
$\mathbb{R}^+$	:	$[0, \infty)$
max	:	Maksimum
min	:	Minimum
sup	:	Supremum

1. GİRİŞ

Küme değerli fonksiyonlar ve integral denklemler nonlinear fonksiyonel analizde önemli bir yere sahiptir. Kontrol teorisi, optimizasyon teorisi, oyun teorisi, robotik, mühendisliğin çeşitli dalları ve ekonomide temel bir araç olarak küme değerli fonksiyonlar kullanılmaktadır. Diğer taraftan integral işareti altında en az bir bilinmeyen fonksiyonun bulunduğu denklemler olarak tanımlanan integral denklemler ile bilinmeyen fonksiyonun hem türev hemde integralinin bulunduğu integro-diferensiyel denklemler epidemiyoloji, fizik, mekanik, mühendislik ve ekonomi gibi bir çok alandaki karşılaşılan problemlerin matematiksel olarak modellenmesinde önemli bir yere sahiptir, [1], [2].

İntegral denklemler alanındaki çalışmalar 19. yüzyılda başlamıştır. Daha önceden düzenli olmayan araştırmalar yapılsa da, aynı yüzyılın sonlarına doğru daha düzenli ve bilinçli çalışmalar yapılmış ve bazı sonuçlar elde edilmiştir. İntegral denklemlerle ilk olarak 1823 yılında Abel'in tautochrone problemi olarak bilinen bir mekanik problemini incelediği esnada karşılaşıldığı bilinmektedir. Abel bu problemi matematiksel olarak analiz ederken integral denklem kullanmış olsa da integral denklem ifadesi literatüre ilk olarak Du Bois Reymond'un 1888 yılındaki bir çalışması ile girmiştir, [3], [4].

Nonlinear analizin en kapsamlı branşlarından biri olan ve ekonomide optimal kontrol teorisi [5-7], tıpta insan kalbindeki aortun mitral kapakları gibi yapıların modellenmesi [8], mekanikte viskoelastik malzemelerin yapısının modellenmesi [9] gibi daha bir çok problemin matematiksel zemine taşınmasına imkân sağlayan lineer olmayan integral denklemler ayrı bir öneme sahiptir.

Özel olarak integral işareti altında interval değerli bilinmeyen bir fonksiyon ihtiva eden denklemlere interval integral denklem denir. Bir çok araştırmacı bugüne kadar bazı tipteki lineer olmayan interval integral denklemlerin ele alınan uzayda

çözümüne sahip olması için yeter şartları araştırmış ve bu şartlar altında söz konusu çözüm ya da çözümlerin karakterine ilişkin sonuçlar vermişlerdir.

Son yıllarda, S. Arshad [10], V. Lupulescu [11], N. V. Hoa [12], Y. Shen [13], M. T. Malinowski [14], S. Salahshour, M. Khan [15] ve kaynakça kısmında verilen diğer yazarlar interval değerli diferansiyel denklemler ve integral denklemler ile ilgili çeşitli sonuçlar vermişlerdir.

Örneğin [16] ve [12] numaralı çalışmalarda Y bilinen, X ise bilinmeyen küme değerli fonksiyonlar ve $t \in [a, b]$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} Y(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (TX)(s) ds, \\ X(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (TX)(s) ds \end{aligned}$$

ve

$$Y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} X(s) ds,$$

şeklindeki interval integral denklemler sırası ile ele alınmıştır.

Bu çalışmada ise $[a, b]$ aralığında tanımlı interval değerli ve sürekli fonksiyonların uzayı $C([a, b], \Omega_C(\mathbb{R}))$ de,

$$X(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} u(t, s, (TX)(s)) ds, \quad (1.0.1)$$

şeklinde tanımlanan kesirli mertebeden interval integral denklemi ele alınacaktır.

Bu amaçla, Banach Sabit Nokta Teoremi kullanılarak çözümün varlığı ve varsa bu çözümün ne olduğu araştırılacaktır.

Burada $\alpha \in (0, 1]$ ve T ise $C([a, b], \Omega_C(\mathbb{R}))$ üzerinde bir operatördür.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde sonraki bölümde ihtiyaç duyulacak olan bazı tanım ve teoremler verilecektir. Ayrıca daha fazla bilgi için [17] ve [18] numaralı çalışmalara bakılabilir.

$\mathbb{R}^n$ kümesinin boş olmayan, kapalı, sınırlı ve konveks alt kümelerinin ailesi $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. Özel olarak $n = 1$ olması durumunda, $\Omega_C(\mathbb{R})$ ailesi $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin kapalı ve sınırlı intervallerinden (aralıklarından) oluşur. $\Omega_C(\mathbb{R})$ ailesinin herhangi bir elemanı $A = [\underline{A}, \overline{A}]$ ile temsil edilir.

$[\underline{A}, \overline{A}], [\underline{B}, \overline{B}] \in \Omega_C(\mathbb{R})$ ve $\mu \in \mathbb{R}$ için Minkowski toplama ve skalerle çarpma işlemleri sırasıyla;

$$[\underline{A}, \overline{A}] + [\underline{B}, \overline{B}] = [\underline{A} + \underline{B}, \overline{A} + \overline{B}]$$

ve

$$\mu \cdot [\underline{A}, \overline{A}] = \begin{cases} [\mu \underline{A}, \mu \overline{A}], & \mu > 0 \\ \{0\}, & \mu = 0 \\ [\mu \overline{A}, \mu \underline{A}], & \mu < 0 \end{cases}$$

ile tanımlanır. Ayrıca

$$(-1) \cdot [\underline{A}, \overline{A}] = [-\overline{A}, -\underline{A}]$$

şeklindedir.

Örnek 2.0.1. $A = [-2, 1]$ ve $B = [3, 4]$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} A + B &= [(-2) + 3, 1 + 4] \\ &= [1, 5] \end{aligned}$$

ve

$$-B = -[3, 4] = [-4, -3]$$

olduğundan

$$A - B = [-6, -2]$$

olur.

Tanım 2.0.1. $\Omega_C(\mathbb{R})$ üzerinde,

$$H(A, B) = \max \{ |\underline{A} - \underline{B}|, |\overline{A} - \overline{B}| \}$$

şeklinde tanımlanan $H : \Omega_C(\mathbb{R}) \times \Omega_C(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ fonksiyonu bir metrik belirtir. Bu metriğe Hausdorff-Pompeiu metriği denir. Ayrıca $(\Omega_C(\mathbb{R}), H)$ bir tam metrik uzaydır, [17].

Örnek 2.0.2. $A = [3, 5]$ ve $B = [-2, 4]$ için

$$\begin{aligned} H(A, B) &= \max \{ |3 - (-2)|, |5 - 4| \} \\ &= \max \{ |5|, |1| \} \\ &= 5 \end{aligned}$$

dir.

Tanım 2.0.2. Bir $A = [\underline{A}, \overline{A}]$ aralığının genişliği veya boyu,

$$w(A) = \overline{A} - \underline{A}$$

ile tanımlanır.

Ayrıca

$$w_F(t) = w(F(t))$$

şeklinde tanımlanan $w_F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ reel değerli fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde artan (azalan) ise $F : [a, b] \rightarrow \Omega_C(\mathbb{R})$ interval değerli fonksiyonuna w -artan (w -azalan) denir. Bu durumda F 'nin $[a, b]$ üzerinde w -monoton olduğu söylenir, [17].

Örnek 2.0.3. $A = [-2, 8]$ için

$$w(A) = 8 - (-2) = 10$$

dir.

Örnek 2.0.4.

$$F(t) = [t, e^t]$$

şeklinde tanımlı $F : [1, 2] \rightarrow \Omega_C(\mathbb{R})$ interval değerli fonksiyonu için

$$w_F(t) = w(F(t)) = e^t - t$$

ve

$$w'_F(t) = e^t - 1 > 0$$

olduğundan F fonksiyonu w -artandır.

Örnek 2.0.5.

$$F(t) = [t^2, 2 - t]$$

şeklinde tanımlı $F : [0, 1] \rightarrow \Omega_C(\mathbb{R})$ interval değerli fonksiyonu için

$$w_F(t) = w(F(t)) = 2 - t - t^2$$

ve $t \in [0, 1]$ olmak üzere,

$$w'_F(t) = -1 - 2t < 0$$

olduğundan F fonksiyonu $[0, 1]$ aralığı üzerinde w -azalandır.

Tanım 2.0.3. $[\underline{A}, \overline{A}], [\underline{B}, \overline{B}] \in \Omega_C(\mathbb{R})$ intervallerinin genelleştirilmiş Hukuhara farkı (veya kısaca gH farkı)

$$[\underline{A}, \overline{A}] \ominus_g [\underline{B}, \overline{B}] = [\min \{ \underline{A} - \underline{B}, \overline{A} - \overline{B} \}, \max \{ \underline{A} - \underline{B}, \overline{A} - \overline{B} \}]$$

şeklinde tanımlanan intervaldir, [17].

Tanım 2.0.4. $F : [a, b] \rightarrow \Omega_C(\mathbb{R})$ bir interval değerli fonksiyon ve $t_0 \in [a, b]$ olmak üzere, eğer

$$F'(t_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{F(t_0 + k) \ominus_g F(t_0)}{k}$$

limiti mevcut ise $F'(t_0)$ ifadesine F 'nin t_0 noktasında genelleştirilmiş Hukuhara türevi (veya kısaca gH -türevi) denir. Eğer her $t \in [a, b]$ noktasında $F'(t) \in \Omega_C(\mathbb{R})$

mevcut ise F 'nin $[a, b]$ üzerinde genelleştirilmiş Hukuhara türevlenebilir (veya kısaca gH -türevlenebilir) olduğu söylenir. Burada $F' : [a, b] \rightarrow \Omega_C(\mathbb{R})$ interval değerli fonksiyonuna F 'nin $[a, b]$ üzerinde gH -türevi denir [17], [18].

Önerme 2.0.1. Her $a \leq t \leq b$ için $F(t) = [\underline{F}(t), \overline{F}(t)]$ olmak üzere, $F : [a, b] \rightarrow \Omega_C(\mathbb{R})$ interval değerli bir fonksiyon olsun. Reel değerli $\underline{F}$ ve $\overline{F}$ fonksiyonları $t_0 \in [a, b]$ noktasında türevlenebilirse bu durumda F interval değerli fonksiyonu $t_0 \in [a, b]$ noktasında gH -türevlenebilirdir. Ayrıca

$$F'(t_0) = \left[\min \left\{ \frac{d}{dt} \underline{F}(t_0), \frac{d}{dt} \overline{F}(t_0) \right\}, \max \left\{ \frac{d}{dt} \underline{F}(t_0), \frac{d}{dt} \overline{F}(t_0) \right\} \right] \quad (2.0.1)$$

dir, [19].

Bu önermenin karşıtı doğru olmayabilir. Yani F 'nin gH -türevlenebilirliğı $\underline{F}$ ve $\overline{F}$ fonksiyonlarının türevlenebilirliğini gerektirmez. Ancak F fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde gH -türevlenebilir ve w -artan ise $\underline{F}$ ve $\overline{F}$ fonksiyonları da $[a, b]$ üzerinde türevlenebilirdir ve $F'(t) = [\underline{F}'(t), \overline{F}'(t)]$ dir. Benzer olarak F fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde w -azalan ise $\underline{F}$ ve $\overline{F}$ fonksiyonları da $[a, b]$ üzerinde türevlenebilirdir ve $F'(t) = [\overline{F}'(t), \underline{F}'(t)]$ dir.

Örnek 2.0.6. $F : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \Omega_C(\mathbb{R})$ dönüşümü

$$F(t) = [\sin t, 1 + \cos t]$$

şeklinde tanımlansın. Burada $\underline{F}, \overline{F} : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları

$$\underline{F}(t) = \sin t \text{ ve } \overline{F}(t) = 1 + \cos t$$

dir. Böylece $t_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ için

$$\begin{aligned} F'(t_0) &= \left[\min \left\{ \underline{F}'(t_0), \overline{F}'(t_0) \right\}, \max \left\{ \underline{F}'(t_0), \overline{F}'(t_0) \right\} \right] \\ &= [\min \{ \cos t_0, -\sin t_0 \}, \max \{ \cos t_0, -\sin t_0 \}] \\ &= [-\sin t_0, \cos t_0] \end{aligned}$$

olur.

Örnek 2.0.7.

$$F(t) = \begin{cases} \left[\frac{t}{3} - 1, 1 - t \right], & -3 \leq t \leq 0 \\ \left[-1 - t, 1 + \frac{t}{3} \right], & 0 < t \leq 3 \end{cases}$$

olarak verilen $F : [-3, 3] \rightarrow \Omega_C(\mathbb{R})$ dönüşümünün $t = 0$ noktasındaki türevini araştıralım.

$-3 \leq t \leq 0$ iken;

$$F(t) = \left[\frac{t}{3} - 1, 1 - t \right]$$

olup, F fonksiyonu w -azalandır. Bu durumda $F'_-(0) = \left[-1, \frac{1}{3} \right]$ dir. Diğer taraftan $0 < t \leq 3$ iken;

$$F(t) = \left[-1 - t, 1 + \frac{t}{3} \right]$$

ve F fonksiyonu w -artan olduğundan $F'_+(0) = \left[-1, \frac{1}{3} \right]$ dir. Böylece $t = 0$ noktasında sağdan ve soldan türevler birbirine eşit olduğundan F fonksiyonunun $t = 0$ noktasında türevi mevcuttur ve

$$F'(0) = F'_+(0) = F'_-(0) = \left[-1, \frac{1}{3} \right]$$

şeklindedir.

$[a, b]$ üzerinde tanımlanan, reel değerli ve sürekli fonksiyonlardan oluşan $C[a, b]$ kümesi $d_\infty(f, g) = \max \{|f(t) - g(t)| : t \in [a, b]\}$ standart metriği ile bir tam metrik uzaydır, [23].

$C([a, b], \Omega_C(\mathbb{R}))$, $[a, b]$ üzerinde tanımlanan sürekli ve interval değerli fonksiyonların ailesi ve

$$H_C(F, G) = \sup_{a \leq t \leq b} H(F(t), G(t))$$

olmak üzere, $(C([a, b], \Omega_C(\mathbb{R})), H_C)$ bir tam metrik uzaydır, [12].

İnterval değerli fonksiyonlar için Lebesgue integrali küme değerli fonksiyonlar için tanımlanan Lebesgue integralinin özel bir durumudur, [20].

Tanım 2.0.5. Her $a \leq t \leq b$ için $F(t) = [\underline{F}(t), \overline{F}(t)]$ olmak üzere, $F : [a, b] \rightarrow \Omega_C(\mathbb{R})$ interval değerli bir fonksiyon ve $\underline{F}, \overline{F}$ de $[a, b]$ üzerinde reel değerli ölçülebilir

ve Lebesgue integrallenebilir iki fonksiyon olsun. Bu durumda F 'nin $[a, b]$ üzerinde Lebesgue integrallenebilir olduğu söylenir ve

$$\int_a^b F(t)dt = \left[\int_a^b \underline{F(t)}dt, \int_a^b \overline{F(t)}dt \right]$$

ile verilir, [20].

Örnek 2.0.8. $F : [0, 1] \rightarrow \Omega_C(\mathbb{R})$ dönüşümü $F(t) = [t, t^2 + 1]$ olarak verilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned} \int_0^1 F(t)dt &= \left[\int_0^1 \underline{F(t)}dt, \int_0^1 \overline{F(t)}dt \right] \\ &= \left[\int_0^1 tdt, \int_0^1 (t^2 + 1)dt \right] \\ &= \left[\frac{1}{2}, \frac{4}{3} \right] \end{aligned}$$

şeklindedir.

$1 \leq p \leq \infty$ için $K(t) = H(F(t), \theta)$ şeklinde tanımlanan $K : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $L^p[a, b]$ sınıfında olmak üzere, $F : [a, b] \rightarrow \Omega_C(\mathbb{R})$ interval değerli fonksiyonların ailesi $L^p([a, b], \Omega_C(\mathbb{R}))$ ile gösterilir. Ayrıca $L^p([a, b], \Omega_C(\mathbb{R}))$ ailesi

$$H_p(F, G) = \begin{cases} \left(\int_a^b H(F(t), G(t))^p dt \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \text{ess sup}_{t \in [a, b]} H(F(t), G(t)), & p = \infty \end{cases}$$

metriği ile bir tam metrik uzaydır, [21].

Tanım 2.0.6. [12] $x \in L^1[a, b]$ ve $\alpha > 0$ olsun. Bu durumda x 'in α . mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali

$$I_{a+}^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{x(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds$$

ile tanımlanır.

$F \in L^1([a, b], \Omega_C(\mathbb{R}))$ ve $\alpha > 0$ olmak üzere,

$$\mathfrak{I}_{a+}^\alpha F(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{F(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds$$

ile tanımlanan integrale ise F 'nin α . mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali adı verilir.

Burada Γ sembolü $0 < \alpha < \infty$ değerleri için,

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

şeklinde tanımlı gamma fonksiyonunu göstermektedir.

Diğer taraftan $F = [\underline{F}, \overline{F}] \in L^1([a, b], \Omega_C(\mathbb{R}))$ olmak üzere hemen hemen her $t \in [a, b]$ için

$$\mathfrak{I}_{a+}^\alpha F(t) = \left[I_{a+}^\alpha \underline{F}(t), I_{a+}^\alpha \overline{F}(t) \right]$$

şeklindedir.

Bu çalışmada, $\mathfrak{I}_{0+}^\alpha F(\cdot)$ gösterimi yerine $F_\alpha(\cdot)$ gösterimi kullanılacaktır.

Okuyucu konuyla ilgili daha fazla bilgi için [11], [22] ve kaynakçada verilen çalışmalara bakabilir.

Tanım 2.0.7. $F : [a, b] \rightarrow \Omega_C(\mathbb{R})$ dönüşümü verilsin. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $[a, b]$ aralığındaki $\sum_{m=1}^n (t_m - s_m) < \delta$ olacak şekilde ayrık açık aralıkların her $\{(s_m, t_m) : m = 1, 2, \dots, n\}$ ailesi için $\sum_{m=1}^n H(F(t_m), F(s_m)) < \varepsilon$ koşulunu sağlayacak şekilde $\delta > 0$ sayısı mevcut ise F dönüşümüne mutlak süreklidir denir. $[a, b]$ üzerinde tanımlı interval değerli mutlak sürekli fonksiyonların ailesi $AC([a, b], \Omega_C(\mathbb{R}))$ ile gösterilir, [17].

Teorem 2.0.1. Aşağıdaki (i) ve (ii) şartlarını sağlanması durumunda,

$$Y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (TX)(s) ds$$

$t \in [a, b]$ olmak üzere, denkleminin bir tek $X(t) = T^{-1}(Y'_{1-\alpha})$ çözümü vardır, [16].

(i) $Y \in L^1([a, b], \Omega_C(\mathbb{R}))$ olmak üzere, $Y_{1-\alpha}$, w -artan, $[a, b]$ üzerinde mutlak sürekli ve $Y_{1-\alpha}(a) = \{0\}$ dir.

(ii) $T, L^1([a, b], \Omega_C(\mathbb{R}))$ üzerinde birebir bir operatördür.

Örnek 2.0.9. $[16]$ $L^1([0, 1], \Omega_C(\mathbb{R}))$ uzayında

$$[\sqrt{t}, \sqrt{t} + t^2] = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t (t-s)^{-1/2} [e^{\underline{X(s)}}, e^{\overline{X(s)}}] ds \quad (2.0.2)$$

şeklindeki nonlinear Volterra interval integral denklemini göz önüne alalım.

Burada $T : L^1([0, 1], \Omega_C(\mathbb{R})) \rightarrow L^1([0, 1], \Omega_C(\mathbb{R}))$ operatörü ve interval değerli $Y : [0, 1] \rightarrow \Omega_C(\mathbb{R})$ fonksiyonu

$$(TX)(s) = e^{X(s)} = [e^{\underline{X(s)}}, e^{\overline{X(s)}}]$$

ve

$$Y(t) = [\sqrt{t}, \sqrt{t} + t^2]$$

şeklindedir.

Ayrıca $f(x) = e^x$ reel değerli fonksiyonu artan olduğundan $[e^{\underline{X(t)}}, e^{\overline{X(t)}}]$ intervalleri anlamlıdır.

$$\begin{aligned} Y_{1-\frac{1}{2}}(t) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t (t-s)^{-1/2} [\sqrt{s}, \sqrt{s} + s^2] ds \\ &= \left[\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t (t-s)^{-1/2} \sqrt{s} ds, \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t (t-s)^{-1/2} (\sqrt{s} + s^2) ds \right] \\ &= \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} t, \frac{16\sqrt{\pi}t^{5/2}}{15\pi} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} t \right] \end{aligned}$$

olup $t \in [0, 1]$ ve $Y_{\frac{1}{2}} \in AC([0, 1], \Omega_C(\mathbb{R}))$ dir.

Ayrıca

$$\begin{aligned} w(Y_{\frac{1}{2}}(t)) &= \frac{16\sqrt{\pi}t^{5/2}}{15\pi}, \\ w'(Y_{\frac{1}{2}}(t)) &= \frac{8\sqrt{\pi}t^{3/2}}{3\pi} \geq 0 \end{aligned}$$

olduğundan $Y_{\frac{1}{2}}$ fonksiyonu $[0, 1]$ üzerinde w -artandır.

Böylece

$$Y'_{\frac{1}{2}}(t) = \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{8\sqrt{\pi}t^{3/2}}{3\pi} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right]$$

ve her $t \in [0, 1]$ için

$$(TX)(t) = e^{X(t)} = \left[e^{\underline{X(t)}}, e^{\overline{X(t)}} \right] = Y'_{\frac{1}{2}}(t) = \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{8\sqrt{\pi}t^{3/2}}{3\pi} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right]$$

elde edilir. Böylece (2.0.2) interval integral denklemin çözümü

$$\begin{aligned} X(t) &= T^{-1} \left(Y'_{\frac{1}{2}}(t) \right) \\ &= \left[\ln \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \ln \left(\frac{8\sqrt{\pi}t^{3/2}}{3\pi} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 2.0.2 (Banach Sabit Nokta Teoremi). (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir daralma dönüşümü olmak üzere;

(a) T nin bir ve yalnız bir sabit $x \in X$ noktası vardır,

(b) Herhangi bir $x_0 \in X$ için $(T^n x_0)$ iterasyon dizisi T 'nin sabit noktasına yakınsar, [23].

İspat. İlk olarak T nin bir sabit noktasının varlığını ispatlayalım. $x_0 \in X$ herhangi bir başlangıç noktası olsun. $n \geq 1$ için

$$x_n = Tx_{n-1}$$

olmak üzere (x_n) iterasyon dizisini göz önüne alalım.

Bu durumda $m > n$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d(T^n x_0, T^m x_0) = d(T^n x_0, T^n T^{m-n} x_0) \\ &\leq \alpha^n d(x_0, T^{m-n} x_0) = \alpha^n d(x_0, x_{m-n}) \\ &\leq \alpha^n \{d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{m-n-1}, x_{m-n})\} \\ &\leq \alpha^n d(x_0, x_1) \{1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{m-n-1}\} \\ &= \alpha^n d(x_0, x_1) \frac{1 - \alpha^{m-n}}{1 - \alpha} \\ &\leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

elde edilir. $\alpha \in (0, 1)$ olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = 0$$

olur ve böylece (x_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu sonucuna ulaşırız.

Ayrıca (X, d) bir tam metrik uzay olduğundan X kümesinde (x_n) dizisinin yakınsadığı bir x elemanı mevcuttur. Şimdi bu x elemanının T dönüşümü için sabit bir nokta olduğunu göstereceğiz.

$$\begin{aligned} d(Tx, x) &\leq d(Tx, T^n x_0) + d(T^n x_0, x) \\ &\leq \alpha d(x, x_{n-1}) + d(x_n, x) \end{aligned}$$

olduğundan ve (x_n) dizisi x 'e yakınsadığından $d(Tx, x) = 0$ elde edilir. Böylece $Tx = x$ sonucuna ulaşılır.

Diğer taraftan T nin sürekliliği ve

$$Tx = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x$$

eşitliğini kullanarak da x 'in sabit nokta olduğu gösterilebilir.

Şimdi T nin yalnız bir tane sabit noktaya sahip olduğunu görelim.

Herhangi bir $y \in X$ için $Ty = y$ olsun. O zaman

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$$

olur. $0 < \alpha < 1$ olduğundan $d(x, y) = 0$ bulunur ki bu ise $x = y$ olduğu anlamına gelir. □

Örnek 2.0.10.

$$x(t) = 1 + \lambda \int_0^1 e^{t-s} x(s) ds \quad (2.0.3)$$

denkleminin $C[0, 1]$ uzayında bir çözüme sahip olması için λ nın sağlaması gereken yeter şartı belirleyip bu şart altında denklemin çözümünü araştıralım.

$C[0, 1]$ üzerinde T operatörü,

$$(Tx)(t) = 1 + \lambda \int_0^1 e^{t-s} x(s) ds$$

şeklinde tanımlansın.

Bu durumda T operatörünün sabit noktası, yani $Tx = x$ şartını sağlayan x fonksiyonu (2.0.3) ile verilen denkleminin bir çözümü olacaktır.

Şimdi T operatörünün sabit noktasının varlığını araştıralım. Bunun için T operatörünün bir daralma dönüşümü olup olmadığına bakalım.

Herhangi $x, y \in C[0, 1]$ için,

$$\begin{aligned}
d_{\infty}(Tx, Ty) &= \sup_{t \in [0,1]} |(Tx)(t) - (Ty)(t)| \\
&= \sup_{t \in [0,1]} \left| \left(1 + \lambda \int_0^1 e^{t-s} x(s) ds \right) - \left(1 + \lambda \int_0^1 e^{t-s} y(s) ds \right) \right| \\
&= \sup_{t \in [0,1]} \left| \lambda \int_0^1 e^{t-s} (x(s) - y(s)) ds \right| \\
&\leq |\lambda| \sup_{t \in [0,1]} \int_0^1 |e^{t-s}| |x(s) - y(s)| ds \\
&\leq |\lambda| \sup_{t \in [0,1]} \int_0^1 \sup_{s \in [0,1]} |x(s) - y(s)| e^{t-s} ds \\
&\leq |\lambda| d_{\infty}(x, y) \sup_{t \in [0,1]} \int_0^1 e^{t-s} ds \\
&= |\lambda| d_{\infty}(x, y) \sup_{t \in [0,1]} (-e^{t-1} + e^t) \\
&= |\lambda| d_{\infty}(x, y) (e - 1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$d_{\infty}(Tx, Ty) \leq |\lambda| (e - 1) d_{\infty}(x, y)$$

olup $|\lambda| (e - 1) < 1$ alınırsa, yani

$$|\lambda| < \frac{1}{e - 1}$$

için T operatörü bir daralma dönüşümüdür. O halde $Tx = x$ olacak şekilde bir tek sabit nokta vardır.

Şimdi $x_0(t) = 0$ ile başlayarak Banach sabit nokta teoremindeki iterasyonla

bu noktayı bulalım.

$$x_1(t) = (Tx_0)(t) = 1 + \lambda \int_0^1 e^{t-s} x_0(t) ds = 1,$$

$$x_2(t) = (Tx_1)(t) = 1 + \lambda \int_0^1 e^{t-s} x_1(t) ds = 1 - \lambda e^t \left(\frac{1}{e} - 1 \right),$$

$$x_3(t) = (Tx_2)(t) = 1 + \lambda \int_0^1 e^{t-s} x_2(t) ds = 1 - \lambda e^t \left(\frac{1}{e} - 1 \right) (1 + \lambda),$$

ve genel olarak

$$x_n(t) = (Tx_{n-1})(t) = 1 - \lambda e^t \left(\frac{1}{e} - 1 \right) (1 + \lambda + \dots + \lambda^{n-2})$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \lambda e^t \left(\frac{1}{e} - 1 \right) (1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{n-2}) \right) \\ &= 1 - \frac{\lambda}{1 - \lambda} e^t \left(\frac{1}{e} - 1 \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$x(t) = 1 - \frac{\lambda}{1 - \lambda} e^t \left(\frac{1}{e} - 1 \right)$$

şeklinde tanımlı x fonksiyonu T 'nin sabit noktasıdır ve (2.0.3) denkleminin bir çözümüdür.

3. NONLİNEER BİR İNTERVAL İNTEGRAL DENKLEM SINIFININ ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİ

Bu çalışmada sunulacak temel sonucu vermek için aşağıdaki lemmaya ihtiyaç vardır.

Lemma 3.0.1. $X, Y \in C([a, b], \Omega_C(\mathbb{R}))$ olmak üzere

$$H_C(X, Y) = \sup_{t \in [a, b]} P_{(X, Y)}(t)$$

eşitliği sağlanır. Burada

$$P_{(X, Y)}(t) = \sup_{s \in [a, t]} \left(\max \left\{ \left| \underline{X}(s) - \underline{Y}(s) \right|, \left| \overline{X}(s) - \overline{Y}(s) \right| \right\} \right)$$

şeklindedir, [16].

İspat.

$$H_C(X, Y) = \sup_{t \in [a, b]} \left(\max \left\{ \left| \underline{X}(t) - \underline{Y}(t) \right|, \left| \overline{X}(t) - \overline{Y}(t) \right| \right\} \right)$$

tanımı göz önüne alınırsa $P_{(X, Y)} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun iyi tanımlı olduğu ve her bir $t \in [a, b]$ için

$$0 \leq P_{(X, Y)}(t) \leq H_C(X, Y)$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Supremum özelliğinden

$$\sup_{t \in [a, b]} P_{(X, Y)}(t) \leq H_C(X, Y) \quad (3.0.1)$$

ve

$$P_{(X, Y)}(b) = H_C(X, Y) \leq \sup_{t \in [a, b]} P_{(X, Y)}(t) \quad (3.0.2)$$

yazılabilir. Böylece (3.0.1) ve (3.0.2) eşitsizliklerini kullanarak

$$H_C(X, Y) = \sup_{t \in [a, b]} P_{(X, Y)}(t)$$

elde edilir. □

Bu çalışmada $C([a, b], \Omega_C(\mathbb{R}))$ üzerinde (1.0.1) formunda verilen nonlineer interval integral denklemi aşağıdaki kabuller altında ele alınacaktır.

(i) $D \subset C([a, b], \Omega_C(\mathbb{R}))$ kapalı bir küme,

$$T : D \rightarrow C([a, b], \Omega_C(\mathbb{R})) \text{ ve } u : [a, b] \times [a, b] \times \Omega_C(\mathbb{R}) \longrightarrow \Omega_C(\mathbb{R})$$

olmak üzere, her $X, Y \in D$ ve $t \in [a, b]$ için

$$\begin{aligned} \left| \underline{u}(t, s, (TX)(t)) - \underline{u}(t, s, (TY)(t)) \right| &\leq K \left| \underline{(TX)}(t) - \underline{(TY)}(t) \right|, \\ \left| \overline{u}(t, s, (TX)(t)) - \overline{u}(t, s, (TY)(t)) \right| &\leq K \left| \overline{(TX)}(t) - \overline{(TY)}(t) \right| \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \left| \underline{(TX)}(t) - \underline{(TY)}(t) \right| &\leq L \left| \underline{X}(t) - \underline{Y}(t) \right|, \\ \left| \overline{(TX)}(t) - \overline{(TY)}(t) \right| &\leq L \left| \overline{X}(t) - \overline{Y}(t) \right| \end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde negatif olmayan K ve L sabitleri mevcut olsun.

(ii)

$$KL(b-a)^\alpha < \Gamma(\alpha+1) \quad (3.0.3)$$

eşitsizliği sağlansın.

Teorem 3.0.1. (i) ve (ii) şartları altında, (1.0.1) interval integral denkleminin bir $X = X(t)$ çözümü mevcuttur.

İspat. İspat yapılırken Banach sabit nokta teoremi kullanılacaktır.

Her $X \in D$ ve $t \in [a, b]$ için,

$$F : D \rightarrow C([a, b], \Omega_C(\mathbb{R}))$$

operatörü

$$(FX)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} u(t, s, (TX)(s)) ds$$

şeklinde tanımlansın.

Lemma 3.0.1 ile birlikte (i) ve (ii) kabulleri kullanılarak,

$$\begin{aligned}
& H_C(FX, FY) \\
&= \sup_{t \in [a, b]} H((FX)(t), (FY)(t)) \\
&= \sup_{t \in [a, b]} \left(\max \left\{ \left| \overline{(FX)(t)} - \overline{(FY)(t)} \right|, \left| \overline{(FX)(t)} - \overline{(FY)(t)} \right| \right\} \right) \\
&= \sup_{t \in [a, b]} \left(\max \left\{ \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{u(t, s, (TX)(s))}{(t-s)^{1-\alpha}} ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{u(t, s, (TY)(s))}{(t-s)^{1-\alpha}} ds \right|, \right. \\
&\quad \left. \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\overline{u(t, s, (TX)(s))}}{(t-s)^{1-\alpha}} ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\overline{u(t, s, (TY)(s))}}{(t-s)^{1-\alpha}} ds \right| \right\} \right) \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sup_{t \in [a, b]} \left(\max \left\{ \int_a^t \frac{\left| u(t, s, (TX)(s)) - u(t, s, (TY)(s)) \right|}{(t-s)^{1-\alpha}} ds, \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \int_a^t \frac{\left| \overline{u(t, s, (TX)(s))} - \overline{u(t, s, (TY)(s))} \right|}{(t-s)^{1-\alpha}} ds \right\} \right) \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sup_{t \in [a, b]} \left(\max \left\{ \int_a^t \frac{K \left| \overline{(TX)(s)} - \overline{(TY)(s)} \right|}{(t-s)^{1-\alpha}} ds, \int_a^t \frac{K \left| \overline{(TX)(s)} - \overline{(TY)(s)} \right|}{(t-s)^{1-\alpha}} ds \right\} \right) \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sup_{t \in [a, b]} \left(\max \left\{ \int_a^t \frac{KL \left| \underline{X}(s) - \underline{Y}(s) \right|}{(t-s)^{1-\alpha}} ds, \int_a^t \frac{KL \left| \overline{X}(s) - \overline{Y}(s) \right|}{(t-s)^{1-\alpha}} ds \right\} \right) \\
&\leq \frac{KL}{\Gamma(\alpha)} \sup_{t \in [a, b]} \left(\int_a^t \frac{\max \left\{ \left| \underline{X}(s) - \underline{Y}(s) \right|, \left| \overline{X}(s) - \overline{Y}(s) \right| \right\}}{(t-s)^{1-\alpha}} ds \right) \\
&\leq \frac{KL}{\Gamma(\alpha)} \sup_{t \in [a, b]} \left(\int_a^t \frac{\sup_{s \in [a, t]} \left(\max \left\{ \left| \underline{X}(s) - \underline{Y}(s) \right|, \left| \overline{X}(s) - \overline{Y}(s) \right| \right\} \right)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds \right) \\
&= \frac{KL}{\Gamma(\alpha)} \sup_{t \in [a, b]} \left(P_{(X, Y)}(t) \int_a^t \frac{1}{(t-s)^{1-\alpha}} ds \right) \\
&\leq \frac{KL(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \sup_{t \in [a, b]} P_{(X, Y)}(t) \\
&= \frac{KL(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} H_C(X, Y)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(3.0.3) eşitsizliğinden

$$0 \leq \frac{KL(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} < 1$$

olduğundan, F operatörünün D üzerinde bir daralma dönüşümü olduğu söylenebilir. Böylece Teorem 2.0.2 'den F dönüşümü $C([a, b], \Omega_C(\mathbb{R}))$ uzayının D alt kümesinde bir sabit noktaya sahiptir.

Sonuç olarak (1.0.1) ile verilen nonlinear interval integral denklemi $C([a, b], \Omega_C(\mathbb{R}))$ uzayında bir çözüme sahiptir. $\square$

Örnek 3.0.1. $C([8, 9], \Omega_C(\mathbb{R}))$ uzayında

$$X(t) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t \sqrt{\frac{X(s)}{t-s}} ds \quad (3.0.4)$$

şeklindeki interval integral denklemini ele alalım.

Burada $u : [8, 9] \times [8, 9] \times \Omega_C(\mathbb{R}) \longrightarrow \Omega_C(\mathbb{R})$ dönüşümü $u(t, s, X) = [\sqrt{\underline{X}}, \sqrt{\overline{X}}]$ şeklinde tanımlıdır.

Ayrıca $K : [8, 9] \longrightarrow \Omega_C(\mathbb{R})$ dönüşümü $K(t) = [7, 8]$ ve

$$D = B[K, 3] = \{X : X \in C([8, 9], \Omega_C(\mathbb{R})) \mid H_C(K, X) \leq 3\} \subset C([8, 9], \Omega_C(\mathbb{R}))$$

olmak üzere $T : D \longrightarrow C([8, 9], \Omega_C(\mathbb{R}))$ operatörü $TX = X$ şeklinde birim operatördür.

Diğer taraftan $X \in D = B[K, 3]$ olmak üzere,

$$H_C(X, K) = \sup_{8 \leq t \leq 9} \left(\max \left\{ \left| \underline{X(t)} - \underline{K(t)} \right|, \left| \overline{X(t)} - \overline{K(t)} \right| \right\} \right) \leq 3$$

olacağından her $t \in [8, 9]$ için $\left| \underline{X(t)} - \underline{K(t)} \right| \leq 3$, $\left| \overline{X(t)} - \overline{K(t)} \right| \leq 3$ ve dolayısıyla $4 \leq \underline{X(t)} \leq 10$ ve $5 \leq \overline{X(t)} \leq 11$ olur.

Bu durumda

$$A = \{X = [\underline{X}, \overline{X}] \in \Omega_C(\mathbb{R}) : \underline{X} \geq 4 \text{ ve } \overline{X} \geq 4\}$$

olmak üzere, $X \in D$ iken $(TX)(t) = X(t) \in A$ elde edilir. Böylece $u(t, s, (TX)(s))$ ifadesinin anlamlı olduğu görülür.

Şimdi (i) ve (ii) şartlarının sağlanıp sağlanmadığını inceleyelim.

$X, Y \in D$ ve $t, s \in [8, 9]$ olmak üzere, $X(t), Y(t) \in A$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \left| \underline{u(t, s, TX(t))} - \underline{u(t, s, TY(t))} \right| &= \left| \sqrt{\underline{X(t)}} - \sqrt{\underline{Y(t)}} \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \left| \underline{X(t)} - \underline{Y(t)} \right| \end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\left| \overline{u(t, s, TX(t))} - \overline{u(t, s, TY(t))} \right| \leq \frac{1}{2} \left| \overline{X(t)} - \overline{Y(t)} \right|$$

elde edilir.

Diğer taraftan $X, Y \in D$ ve $t \in [8, 9]$ olmak üzere,

$$\left| \underline{(TX)(t)} - \underline{(TY)(t)} \right| = \left| \underline{X(t)} - \underline{Y(t)} \right|$$

ve

$$\left| \overline{(TX)(t)} - \overline{(TY)(t)} \right| = \left| \overline{X(t)} - \overline{Y(t)} \right|$$

olduğundan

$$K = \frac{1}{2} \text{ ve } L = 1$$

dir.

Ayrıca

$$a = 8, \quad b = 9 \text{ ve } \alpha = \frac{1}{2}$$

olduğu da göz önüne alınırsa

$$\frac{KL(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} < 1$$

olur. Dolayısıyla (i) ve (ii) şartları sağlanır.

Teorem 3.0.1 gereğince (3.0.4) denkleminin $D = B[K, 3] \subset C([8, 9], \Omega_C(\mathbb{R}))$ kümesinde bir çözümü vardır.

Şimdi bu çözümü araştıralım.

$$X_0(t) = \left[\frac{t}{2}, t \right] \text{ alnırsa,}$$

$$\begin{aligned} X_1(t) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t \frac{\sqrt{\left[\frac{s}{2}, s\right]}}{\sqrt{t-s}} ds \\ &= \left[\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t \frac{\sqrt{\frac{s}{2}}}{\sqrt{t-s}} ds, \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{t-s}} ds \right] \\ &= \left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{t}{2}, \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{2}} t \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_2(t) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t \frac{\sqrt{\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{s}{2}, \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{2}} s\right]}}{\sqrt{t-s}} ds \\ &= \left[\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t \frac{\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{s}{2}}}{\sqrt{t-s}} ds, \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t \frac{\sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{2}} s}}{\sqrt{t-s}} ds \right] \\ &= \left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{4}} \frac{t}{2}, \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{4}} t \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_3(t) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t \frac{\sqrt{\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{4}} \frac{s}{2}, \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{4}} s\right]}}{\sqrt{t-s}} ds \\ &= \left[\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t \frac{\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{4}} \frac{s}{2}}}{\sqrt{t-s}} ds, \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t \frac{\sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{4}} s}}{\sqrt{t-s}} ds \right] \\ &= \left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{7}{8}} \frac{t}{2}, \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{7}{8}} t \right] \end{aligned}$$

ve genel olarak

$$X_n(t) = \left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{2^n-1}{2^n}} \frac{t}{2}, \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{2^n-1}{2^n}} t \right]$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(t) &= \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{2^n-1}{2^n}} \frac{t}{2}, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{2^n-1}{2^n}} t \right] \\ &= \left[\frac{\pi}{4} t, \frac{\pi}{4} t \right] \end{aligned}$$

olduğundan

$$X_n(t) = \left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{2^n-1}{2^n}} \frac{t}{2}, \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{2^n-1}{2^n}} t \right]$$

şeklindeki dizi $C([8, 9], \Omega_C(\mathbb{R}))$ uzayının $B[K, 3]$ kapalı yuvarında

$$X(t) = \left[\frac{\pi}{4}t, \frac{\pi}{4}t \right]$$

noktasına yakınsar. Dizinin terimleri ve yakınsadığı nokta $B[K, 3]$ kapalı yuvarındadır. Ayrıca

$$X(t) = \left[\frac{\pi}{4}t, \frac{\pi}{4}t \right]$$

fonksiyonu (3.0.4) denkleminin bir çözümüdür.

Gerçekten de (3.0.4) denkleminde

$$\underline{X(s)} = \frac{\pi}{4}s$$

yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t \sqrt{\frac{\pi}{4}s} ds &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t \sqrt{\frac{s}{t-s}} ds \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\pi}{2} \right) t \\ &= \frac{\pi}{4}t \\ &= \underline{X(t)} \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Örnek 3.0.2. $C([0, \frac{\pi}{2}], \Omega_C(\mathbb{R}))$ uzayında

$$X(t) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{3})} \int_0^t \frac{\sin X(s)}{2(t-s)^{-2/3}} ds \quad (3.0.5)$$

şeklindeki interval integral denklemini göz önüne alalım.

$B[\theta, \frac{\pi}{2}]$ kapalı yuvarı $C([0, \frac{\pi}{2}], \Omega_C(\mathbb{R}))$ 'nin tam olan bir alt uzayıdır. Bu denklemin çözümünü $B[\theta, \frac{\pi}{2}]$ kümesinde arayacağız. $X \in B[\theta, \frac{\pi}{2}]$ ise

$$\begin{aligned} H_C(X, \theta) &= \sup_{0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}} \left(\max \left\{ \left| \underline{X(t)} - \underline{\theta(t)} \right|, \left| \overline{X(t)} - \overline{\theta(t)} \right| \right\} \right) \\ &= \sup_{0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}} \left(\max \left\{ \left| \underline{X(t)} \right|, \left| \overline{X(t)} \right| \right\} \right) \\ &\leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

olacağından $X(t) \subset [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dir. Ayrıca $f(x) = \sin x$ fonksiyonu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ üzerinde artan reel değerli bir fonksiyon olduğundan, her $X \in B[\theta, \frac{\pi}{2}]$ için,

$$\sin X(t) = [\sin \underline{X(t)}, \sin \overline{X(t)}]$$

intervali anlamlıdır. (3.0.5) denklemi için,

$$(TX)(t) = \frac{\sin X(t)}{2} = \frac{1}{2} [\sin \underline{X(t)}, \sin \overline{X(t)}]$$

ve

$$a = 0, \quad b = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha = \frac{1}{3}$$

dir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \left| \underline{(TX)(t)} - \underline{(TY)(t)} \right| &= \frac{1}{2} \left| \sin \underline{X(t)} - \sin \underline{Y(t)} \right| \\ &= \left| \sin \left(\frac{\underline{X(t)} - \underline{Y(t)}}{2} \right) \right| \left| \cos \left(\frac{\underline{X(t)} + \underline{Y(t)}}{2} \right) \right| \\ &\leq \left| \sin \left(\frac{\underline{X(t)} - \underline{Y(t)}}{2} \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \left| \underline{X(t)} - \underline{Y(t)} \right| \end{aligned}$$

ve benzer olarak

$$\left| \overline{(TX)(t)} - \overline{(TY)(t)} \right| \leq \frac{1}{2} \left| \overline{X(t)} - \overline{Y(t)} \right|.$$

yazılabilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \left| \underline{u(t, s, (TX)(t))} - \underline{u(t, s, (TY)(t))} \right| &\leq \left| \underline{(TX)(t)} - \underline{(TY)(t)} \right|, \\ \left| \overline{u(t, s, (TX)(t))} - \overline{u(t, s, (TY)(t))} \right| &\leq \left| \overline{(TX)(t)} - \overline{(TY)(t)} \right| \end{aligned}$$

olduğundan

$$L = \frac{1}{2} \text{ ve } K = 1$$

alınabilir. Böylece (i) şartı sağlanır. Ayrıca

$$\frac{KL(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} = 0,65 < 1$$

olmaktadır. Böylece (3.0.5) interval integral denkleminin $B\left[\theta, \frac{\pi}{2}\right] \subset C\left([0, \frac{\pi}{2}], \Omega_C(\mathbb{R})\right)$ yuvarında bir $X = X(t)$ çözümü mevcuttur.

Örnek 3.0.3. $C\left([0, \frac{1}{2}], \Omega_C(\mathbb{R})\right)$ uzayında,

$$X(t) = \int_0^t ([0, s] + X(s)) ds \quad (3.0.6)$$

interval integral denklemi için,

$$a = 0, \quad b = \frac{1}{2}, \quad \alpha = 1$$

dir. Burada

$$\begin{aligned} \underline{u(t, s, (TX)(t))} &= \underline{(TX)(t)}, \\ \overline{u(t, s, (TX)(t))} &= s + \overline{(TX)(t)} \end{aligned}$$

ve $(TX)(t) = X(t)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \left| \underline{(TX)(t)} - \underline{(TY)(t)} \right| &= \left| \underline{X(t)} - \underline{Y(t)} \right|, \\ \left| \overline{(TX)(t)} - \overline{(TY)(t)} \right| &= \left| \overline{X(t)} - \overline{Y(t)} \right| \end{aligned}$$

olduğundan $L = 1$ dir. Ayrıca

$$\left| \underline{u(t, s, (TX)(t))} - \underline{u(t, s, (TY)(t))} \right| = \left| \underline{(TX)(t)} - \underline{(TY)(t)} \right|$$

ve

$$\left| \overline{u(t, s, (TX)(t))} - \overline{u(t, s, (TY)(t))} \right| = \left| \overline{(TX)(t)} - \overline{(TY)(t)} \right|$$

olduğundan $K = 1$ dir.

Böylece

$$\frac{KL(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} = \frac{1}{2} < 1$$

olduğundan Teorem 3.0.1 gereğince (3.0.6) denkleminin $C\left([0, \frac{1}{2}], \Omega_C(\mathbb{R})\right)$ uzayında bir çözümü vardır.

Şimdi bu çözümü araştıralım.

$X_0 = [0, 0]$ alınrsa

$$\begin{aligned} X_1(t) &= \int_0^t [0, s] + X_0(s) ds \\ &= \left[\int_0^t 0 + \overline{X_0(s)} ds, \int_0^t (s + \overline{X_0(s)}) ds \right] \\ &= \left[\int_0^t 0 ds, \int_0^t (s + 0) ds \right] \\ &= \left[0, \frac{t^2}{2} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_2(t) &= \left[\int_0^t 0 ds, \int_0^t \left(s + \frac{s^2}{2} \right) ds \right] \\ &= \left[0, \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_3(t) &= \left[\int_0^t 0 ds, \int_0^t \left(s + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{6} \right) ds \right] \\ &= \left[0, \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} \right] \end{aligned}$$

ve genel olarak

$$\begin{aligned} X_n(t) &= \left[\int_0^t 0 ds, \int_0^t \left(s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + \dots + \frac{s^n}{n!} \right) ds \right] \\ &= \left[0, \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots + \frac{t^{(n+1)}}{(n+1)!} \right] \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Daha sonra bu dizinin limiti alınrsa, (3.0.6) denklemin çözümü

$$\begin{aligned} X(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(t) \\ &= \left[0, \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{t^{(k+1)}}{(k+1)!} \right] \\ &= [0, e^t - t - 1] \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Gerçekten de (3.0.6) denkleminde

$$X(s) = [0, e^s - s - 1]$$

yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\int_0^t ([0, s] + [0, e^s - s - 1]) \, ds &= \int_0^t ([0, e^s - 1]) \, ds \\ &= \left[\int_0^t 0 \, ds, \int_0^t (e^s - 1) \, ds \right] \\ &= [0, e^t - t - 1] \\ &= X(t)\end{aligned}$$

olduğu görülür.



KAYNAKLAR

- [1] C. C. McCluskey, *Complete global stability for an SIR epidemic model with delay distributed or discrete*, **Nonlinear Anal.**, 11 (2010) 55-59.
- [2] S. Hu, M. Khavanin and W. Zhuang, *Integral equations arising in the kinetic theory of gases*, **Appl. Anal.**, 34 (1989) 261-266.
- [3] M. Bocher, *An Introduction to The Study of Integral Equations*, Cambridge University Press Werahouse, 1909.
- [4] Y. Aksoy, *İntegral Denklemler*, Cilt 1, Y.T.Ü. yayınları, 1998.
- [5] D. O'Regan, *Existence theory for nonlinear Volterra integrodifferential and integral equations*, **J. Math. Anal. Appl.**, 284 (1998) 317-341.
- [6] J. Banas, B. Rzepka, *On existence and asymptotic stability of solutions of a nonlinear integral equation*, **J. Math. Anal. Appl.**, 284 (2003) 165-173.
- [7] I. K. Argyros, *Quadratic equations and applications to Chandrasekhars and related equations*, **Bull. Austral. Math. Soc.**, 32 (1985) 275-292.
- [8] A. D. Freed, K. Diethelm, Y. Luchko, *Fractional-order viscoelasticity (FOV): Constitutive developments using the fractional calculus: First annual report*, Technical Memorandum, TM-2002-211914, NASA Glenn Research Center, Cleveland, 2002.
- [9] P. J. Torvik, R. L. Bagley, *On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials*, **J. Appl. Mech.**, 51 (1984) 294-298.
- [10] S. Arshad and V. Lupulescu, *On the fractional differential equations with uncertainty*, **Nonlinear Anal.**, 74 (2011) 3685-3693.
- [11] V. Lupulescu, *Fractional calculus for interval-valued functions*, **Fuzzy Sets and Systems**, 265 (2015), 63-85.
- [12] V. Lupulescu and N.V. Hoa, *Interval Abel Integral Equations*, **Soft Comput.**, (2016). doi:10.1007/s00500-015-1980-2.
- [13] Y. Shen, *The Cauchy type problem for interval-valued fractional differential equations with the Riemann-Liouville gH -fractional derivative*, **Adv. Difference Equ.**, (2016) doi: 10.1186/s13662-016-0827-1.
- [14] M.T. Malinowski, *Interval differential equations with a second type Hukuhara derivative*, **Appl. Math. Lett.** 24 (2011) 2118-2123.

- [15] S. Salahshour and M. Khan, *Exact solutions of nonlinear interval Volterra integral equations*, **Int. J. Ind. Math.**, Article ID: IJIM-00291 (2012).
- [16] S. Çakan, Ü. Çakan, *On solvability of some nonlinear fractional interval integral equations*, **Fractional Differential Calculus**, 2 (2017) 235-246.
- [17] S. Markov, *Calculus for interval functions of a real variables*, **Computing** 22 (1979), 325-337.
- [18] L. Stefanini, *A generalization of Hukuhara difference and division for interval and fuzzy arithmetic*, **Fuzzy Sets and Systems**, 161 (2010) 1564-1584.
- [19] Chalco-Cano Y, Román-Flores H, Jiménez-Gamero MD, *Generalized derivative and π -derivative for set-valued functions*. **Inf. Sci.**, 181 (2011) 2177–2188.
- [20] R.J. Aumann, *Integrals of set-valued functions*, **J. Math. Anal. Appl.**, 12 (1965) 1-12.
- [21] F. Hiai, H. Umegaki, *Integrals, conditional expectations and martingales of multivalued functions*, **J. Multivar. Anal.**, 7 (1977) 149-182.
- [22] S. G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland, (1993).
- [23] Y. Soykan, *Metrik Uzaylar ve Topolojisi*, Nobel Yayıncılık, 2012.

ÖZGEÇMİŞ

08.04.1990 tarihinde Malatya’ da doğdu. 2004 yılında Rahmi Akıncı İlköğretim Okulunu, 2007 yılında ise Hacı Ahmet Akıncı Lisesini bitirdi. 2009 yılında başladığı İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü 2014 yılında bitirdi ve 2016 yılında İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisansa başladı. Halen Milli Eğitim Bakanlığında matematik öğretmenliği yapmaktadır.

