

BAZI KAPULA TAHMİN YÖNTEMLERİ VE BİR UYGULAMA

Yusuf Gökhan ÖZBAKIŞ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İSTATİSTİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ARALIK 2006

ANKARA

Yusuf Gökhan ÖZBAKIŞ tarafından hazırlanan BAZI KAPULA TAHMİN YÖNTEMLERİ VE BİR UYGULAMA adlı bu tezin Yüksek Lisans/Doktora tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Salih ÇELEBİOĞLU

Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği / oy çokluğu ile İstatistik Anabilim Dalında Yüksek lisans/Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: : Prof. Dr. Fikri ÖZTÜRK _____

Üye : Prof. Dr. Müslim EKİNİ _____

Üye : Prof. Dr. Hamza GAMGAM _____

Üye : Prof. Dr. Semra ERBAŞ _____

Üye : Doç. Dr. Salih ÇELEBİOĞLU _____

Tarih : 21/12/2006

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Yusuf Gökhan ÖZBAKİŞ

BAZI KAPULA TAHMİN YÖNTEMLERİ VE BİR UYGULAMA**(Yüksek Lisans Tezi)****Yusuf Gökhan ÖZBAKİŞ****GAZİ ÜNİVERSİTESİ****FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ****Aralık 2006****ÖZET**

Kapulalar, rastgele değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını modellemek amacıyla kullanılmaktadır. Son yıllarda kapulaların İstatistiksel özelliklerinin araştırılması artarak sürmekte ve özellikle ekonominin çeşitli alanlarında uygulamaları hızla yaygınlaşmaktadır. Bu çalışmanın amacı, bazı kapula tahmin yöntemleri hakkında bilgi vermek ve bir uygulama ile örneklendirmektir. Bu amaçla, İMKB, İstanbul Menkul Kıymetler Borsası ile BOVESPA, São Paulo Borsası arasındaki bağımlılık yapısı kapula tahmin yöntemiyle incelenmeye çalışılmıştır. İki borsa arasındaki ilişkiye ki-kare uyum iyiliği ölçütüne göre en uygun düşen ailenin parametrik olmayan yöntemle elde edilen $\theta = 0,69356$ parametrelili Ali-Mikhail-Haq kapula ailesi olduğu görülmüştür. Ayrıca en çok sözde olabilirlik yöntemi ve parametrik olmayan yöntemler bir simülasyon denemesiyle karşılaştırılmış ve aralarında önemli bir fark bulunamamıştır.

Bilim Kodu : 212
Anahtar Kelimeler : Kapula Tahmini, Bağımlılık Yapısı, Borsa
Sayfa Adedi : 71
Tez Yöneticisi : Doç. Dr. Salih ÇELEBİOĞLU

SOME METHODS OF COPULA ESTIMATION AND AN APPLICATION
(M.Sc. Thesis)

Yusuf Gökhan ÖZBAKİŞ

GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
December 2006

ABSTRACT

Copulas are used for modelling the dependence structure between random variables. In recent years, researches on statistical properties of copulas have been going on increasingly and their applications especially in various areas of economics have been spread rapidly. The purpose of this study is to examine some methods of copula estimation and illustrate with a real life application. For this reason, it is tried to investigate the dependence structure between ISE, Istanbul Stock Exchange and BOVESPA, The São Paulo Stock Exchange by the copula estimation method. It has been seen that the Ali-Mikhail-Haq copula family with parameter $\theta = 0,69356$ estimated by the nonparametric method is the best fitted family under the Chi-square goodness-of-fit criterion for the dependence structure between the two stock exchanges. In addition, the maximum pseudo-likelihood method and the nonparametric methods are compared by a simulation trial and it has not been seen a significant difference between them.

Science Code : 212

Key Words : Copula Estimation, Dependence Structure, Stock Exchange

Page Number : 71

Adviser : Assoc. Prof. Dr. Salih ÇELEBİOĞLU

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında değerli bilgi ve deneyimleri ile bana destek olan danışmanım Sayın Doç. Dr. Salih ÇELEBİOĞLU'na, her zaman yanımda olan sevgili anne ve babama, eşime ve özellikle dedeme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	x
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	xii
1. GİRİŞ.....	1
2. KAPULALAR.....	2
2.1. Kapulaların Kullanıldığı Alanlar.....	2
2.2. Kapulaların Tanımı ve Matematiksel Özellikleri.....	2
2.3. Arşimedyen Kapulalar.....	6
2.3.1. Arşimedyen kapulaların kullanıldığı alanlar.....	7
2.3.2. Arşimedyen kapulaların özellikleri.....	7
2.4. Üreticilerin Özellikleri.....	7
2.5. Rastgele Örnek Üretme.....	9
3. BAĞIMLILIK VE SIRA SAYILARI.....	10
4. BAZI BAĞIMLILIK KATSAYILARI.....	15
4.1. Pearson'un Korelasyon Katsayısı.....	15
4.2. Spearman'ın Ro'su.....	17
4.3. Kendall'ın To'su.....	20

Sayfa

5. KAPULA TAHMİN YÖNTEMLERİ.....	24
5.1. Parametrik Yöntemler.....	24
5.1.1. Tam en çok olabilirlik yöntemi.....	24
5.1.2. IFM (marjinallere ilişkin çıkarsama fonksiyonları) yöntemi.....	26
5.2. Yarı-Parametrik Yöntem.....	28
5.2.1. En çok sözde olabilirlik yöntemi.....	28
5.3. Parametrik olmayan yöntemler.....	34
5.3.1. Kendall'ın to'suna dayanan yöntem.....	34
5.3.2. Spearman'ın ro'suna dayanan yöntem.....	36
5.4. Diğer Yöntemler.....	39
5.5. Uyum İyiiliği Testi.....	39
6. UYGULAMALAR.....	40
6.1. Bazı Tanımlar.....	40
6.1.1. İstanbul Menkul Kıymetler Borsası (İMKB).....	40
6.1.2. İMKB Ulusal-100 Endeksi.....	40
6.1.3. Sao Paulo Borsası (BOVESPA).....	41
6.1.4. BOVESPA Endeksi (IBOVESPA).....	41
6.1.5. Endeks hesaplaması.....	41
6.2. İMKB-BOVESPA Bağımlılık Yapısının Araştırılması.....	42
6.2.1. Veri kümesi.....	42
6.2.2. Kendall'ın to'su ve Ali-Mikhail-Haq kapula ailesinin tahmini.....	43

Sayfa

6.2.3. Kendall'ın to'su ve Gumbel-Hougaard kapula ailesinin tahmini.....	44
6.2.4. Kendall'ın to'su ve Clayton kapula ailesinin tahmini.....	45
6.2.5. Spearman'ın ro'su ve Plackett kapula ailesinin tahmini.....	46
6.2.6. Kendall'ın to'su ve Frank kapula ailesinin tahmini.....	47
6.3. EÇSO Yöntemi Ve Parametrik Olmayan Yöntemlerin Bir Simulasyon Denemesi ile Karşılaştırılması.....	49
6.3.1. Kendall'ın to'su ve Farlie-Gumbel-Morgenstern ailesinin tahmini.....	50
6.3.2. Spearman'ın ro'su ve Farlie-Gumbel-Morgenstern ailesinin tahmini.....	51
6.3.3. EÇSO ve Farlie-Gumbel-Morgenstern ailesinin tahmini.....	52
7. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	55
KAYNAKLAR.....	57
EKLER.....	59
EK-1 İMKB Ulusal-100, IBOVESPA, Dolar.....	60
ÖZGEÇMİŞ.....	71

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 2.1. Bazı Arşimedyen kapula ailelerine ilişkin fonksiyonlar ve üreticiler	8
Çizelge 3.1. Veri kümesi.....	10
Çizelge 3.2. Veri kümesi için sıra sayıları	13
Çizelge 5.1. EÇSO yönteminde θ için güven aralığı hesaplanmasında kullanılacak M_i ve N_i sabitleri	34
Çizelge 5.2. Bazı kapula ailelerine ilişkin parametre aralıkları ve ilişki katsayıları.....	38
Çizelge 6.1. Dolar bazlı İMKB Ulusal-100 Endeksi ve Dolar bazlı IBOVESPA günlük yüzde değişimine ilişkin değişkenlere ait gözlenen frekanslar.....	43
Çizelge 6.2. $\hat{\theta}=0,69356$ için Ali-Mikhail-Haq kapula ailesine ilişkin beklenen frekanslar	44
Çizelge 6.3. $\hat{\theta}=1,370332$ için Gumbel-Hougaard kapula ailesine ilişkin beklenen frekanslar.....	45
Çizelge 6.4. $\hat{\theta}=0,740665$ için Clayton kapula ailesine ilişkin beklenen frekanslar	46
Çizelge 6.5. $\hat{\theta}=3,4631$ için Plackett kapula ailesine ilişkin beklenen frekanslar	47
Çizelge 6.6. $\hat{\theta}=2,53127$ için Frank kapula ailesine ilişkin beklenen frekanslar.....	48
Çizelge 6.7. Koşullu dağılım yöntemi ile $\theta = 0,60$ parametrelili Farlie-Gumbel-Morgenstern ailesinden üretilen 5000 adet (u,v) rastgele çifte ait gözlenen frekanslar	50
Çizelge 6.8. $\hat{\theta}=0,585$ için Farlie-Gumbel-Morgenstern kapula ailesine ilişkin beklenen frekanslar.....	51
Çizelge 6.9. $\hat{\theta}=0,59037$ için Farlie-Gumbel-Morgenstern kapula ailesine ilişkin beklenen frekanslar	52

Çizelge**Sayfa**

Çizelge 6.10. $\hat{\theta}=0,6004563485$ için Farlie-Gumbel-Morgenstern kapula ailesine ilişkin beklenen frekanslar	53
---	----

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 3.1. a) (X_i, Y_i) çiftlerini, b) $(Z_i, T_i) = (e^{X_i}, e^{Y_i})$ çiftlerini gösterir.....	11
Şekil 3.2. a) (X_i, Y_i) 'lere ait sıra sayıları (R_i, S_i) 'ler b) $(Z_i, T_i) = (e^{X_i}, e^{Y_i})$ 'lere ait sıra sayıları (R^*_i, S^*_i) 'ler ($1 \leq i \leq 30$).....	13
Şekil 5.1. a) Farlie-Gumbel-Morgenstern kapula ailesi modeli ile Çizelge 3.2.'deki 30 adet (R_i, S_i) çiftleri için oluşturulan $l(\theta)$ fonksiyonu b) Farlie-Gumbel-Morgenstern kapula ailesi modeli ile Çizelge 3.2.'deki 30 adet (R_i, S_i) çiftleri için oluşturulan $\dot{l}(\theta)$ fonksiyonu.....	33

1. GİRİŞ

İstatistiğin önemli amaçlarından biri örnek verilerinden yararlanarak yığın parametrelerinin tahminine çalışmaktır. Tahmin çabalarında araştırılan konuya göre ele alınan değişkenler arasındaki bağımlılık yapısı öncelikli sorunlardan biri olarak karşımıza çıkar. Rastgele değişkenler arasındaki bağımlılık yapısı hakkında bilgi veren bağımlılık ölçülerini belirlemenin çeşitli yöntemleri vardır. Bu yapıyı araştırırken, hangi ölçünün kullanılacağına çalışılan verinin karakteristik özelliklerine bakarak karar verilir.

Değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını belirleme araçlarından biri, değişkenler arasından bağımlı değişken olarak kabul edilecek biri ile bağımsız değişkenler olarak alınacak diğerleri arasındaki matematiksel bağıntıyı ortaya koyan regresyon analizidir. Çoğunlukla uygulanan biçimiyle regresyon analizi, değişkenler arasındaki ilişkilerin doğrusal olduğunu ve hata terimlerinin dağılımının normal olduğunu varsayar. Ancak uygulamada birçok durumda bu varsayımların tamamen sağlanması mümkün olmaz ve bu varsayımlardan az ya da çok sapmalar söz konusu olur.

Değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını birçok cebirsel özellikleriyle birlikte belirleyen araçlardan bir diğeri de kapulalardır. Son yıllarda özellikle işletme, finans ve risk analizi gibi alanlarda oldukça yaygın olarak kullanılan kapulalar, özellikle ekonomik değişkenler arasındaki ilişkilerin yanlış yorumlanmasına neden olabilecek Pearson korelasyon katsayısının dezavantajlarını ortadan kaldırır.

Biz bu çalışmada, kapula ve bağımlılık kavramlarını ele alıp önemli birkaç kapula tahmin yönteminden ve kapula ailelerinden bahsedeceğiz. Sonuç olarak, bir uygulama ile elimizdeki veri kümesinin bağımlılık yapısını kapulalar ile modellemeye ve uygun kapula tahmin yöntemlerini tanıtmaya çalışacağız. Ayrıca bir simülasyon uygulamasıyla yarı-parametrik bir yöntemle parametrik olmayan yöntemleri karşılaştıracacağız.

2. KAPULALAR

Kapulalar, çok değişkenli dağılım fonksiyonlarını kendi tek değişkenli marjinal dağılım fonksiyonlarına bağlarlar. Kapulalar, rastgele değişkenler arasındaki bağımlılık yapılarını ortaya koyarlar.

2.1. Kapulaların Kullanıldığı Alanlar

1. Çok değişkenli bağımlılık mekanizmalarının araştırılmasında,
2. Yeni çok değişkenli dağılımların elde edilmesinde,
3. Stokastik modellemede,
4. Yeni parametrik olmayan bağımlılık ölçülerini geliştirmede,
5. Çok değişkenli dağılım ailelerinin temsilinde,
6. Markov süreçlerine yeni yaklaşımlarda kullanılmaktadır.

2.2. Kapulaların Tanımı ve Matematiksel Özellikleri

Bu bölümde çok değişkenli ve iki değişkenli kapula fonksiyonlarının matematiksel özellikleri verilmiştir.

$C: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ fonksiyon aşağıdaki özellikleri sağladığında n-boyutlu kapula adını alır :

1. $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ve $u_i \in [0, 1]$ için en az bir $u_i = 0$ ise
 $C(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0$;
2. Eğer u_k haricindeki bütün koordinatlar 1 ise
 $C(1, 1, \dots, u_k, \dots, 1) = u_k$;
3. Bütün $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in [0, 1]^n$ için $a_i \leq b_i$ olmak üzere ve her $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $u_{j1} = a_j$ ve $u_{j2} = b_j$ olmak üzere,

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_n} . C(u_{1i_1}, \dots, u_{ni_n}) \geq 0 .$$

Benzer şekilde $C: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu aşağıda belirtilen özellikleri

1. $C(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0$ $C(u, 0) = 0$; $u, v \in [0, 1]$;
2. $C(1, v) = v$, $C(u, 1) = u$; $u, v \in [0, 1]$;
3. $a_1 \leq a_2$, $b_1 \leq b_2$ ve $a_1, a_2, b_1, b_2 \in [0, 1]$ iken,
 $C(a_1, b_1) + C(a_2, b_2) - C(a_1, b_2) - C(a_2, b_1) \geq 0$

sağladığında 2-boyutlu kapula adını alır [1].

2.1. Teorem (Sklar Teoremi)

Sürekli marjinal dağılım fonksiyonları $F_1, F_2, \dots, F_n$ ile verilen bir n -boyutlu dağılım fonksiyonu F için tek bir $C: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ kapulası vardır öyle ki $x_i \in \mathbb{R}$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)) \quad (2.1)$$

olur.

Tersine, eğer C bir kapula ve $F_1, F_2, \dots, F_n$ dağılım fonksiyonlarıysa, o zaman Eş. 2.1'de tanımlanan F fonksiyonu, marjinalleri $F_1, F_2, \dots, F_n$ olan bir ortak dağılım fonksiyonudur.

Bu teorem kapulalar için hem bir yapı planı, hem de çok değişkenli dağılımların parametrelendirilmesini sağlar. Gerçekten, $F_1, F_2, \dots, F_n$ marjinalleri ile verilen çok değişkenli bir F fonksiyonunda,

$u_i \in [0, 1]$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ için,

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = F(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2), \dots, F_n^{-1}(u_n))$$

fonksiyonu otomatik olarak bir kapuladır [1].

2.1. Örnek

$$H(x, y) = \begin{cases} 2xy^2 - x^2y^2 - xy^4 + x^2y^4 & 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1 \\ x & y \geq 1, 0 \leq x < 1 \\ y^2 & x \geq 1, 0 \leq y < 1 \\ 1 & x \geq 1, y \geq 1 \\ 0 & x < 0 \text{ veya } y < 0 \end{cases}$$

iki değişkenli H dağılım fonksiyonunun kapulasını bulalım.

Çözüm

F ve G fonksiyonları H fonksiyonunun marjinalleri olmak üzere

$$F(x) = \lim_{y \rightarrow 1} H(x, y) = 2x(1)^2 - x^2(1)^2 - x(1)^4 + x^2(1)^4$$

$$F(x) = x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$G(y) = \lim_{x \rightarrow 1} H(x, y) = 2(1)y^2 - (1)^2y^2 - (1)y^4 - (1)^2y^4$$

$$G(y) = y^2, \quad 0 \leq y \leq 1$$

Bu marjinallerin tersleri;

$$u = F(x) = x \Rightarrow x = u, \quad 0 \leq u \leq 1$$

$$v = G(y) = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{v}, \quad 0 \leq v \leq 1$$

olup, artık kapulayı Sklar teoreminden

$$C(u, v) = 2u(\sqrt{v})^2 - u^2(\sqrt{v})^2 - u(\sqrt{v})^4 + u^2(\sqrt{v})^4$$

$$= 2uv - u^2v - uv^2 + u^2v^2$$

$$= uv[1 + (1 - u) - v(u - 1)]$$

$$C(u, v) = uv[1 + (1 - u)(1 - v)]$$

biçiminde elde ederiz. Şimdi bu fonksiyonun kapula özelliklerini sağlayıp sağlamadığına bakalım:

1. $C(0, v) = (0)v[1 + (1 - 0)(1 - v)] = C(u, 0) = u(0)[1 + (1 - u)(1 - 0)] = 0$
2. $C(1, v) = (1)v[1 + (1 - 1)(1 - v)] = v, C(u, 1) = u(1)[1 + (1 - u)(1 - 1)] = u$
3. $a_1 \leq a_2, b_1 \leq b_2$ iken $C(a_1, b_1) + C(a_2, b_2) - C(a_1, b_2) - C(a_2, b_1) \geq 0$

olması gerekmektedir.

$$C(a_1, b_1) = a_1 b_1 [1 + (1 - a_1)(1 - b_1)] = 2a_1 b_1 - a_1^2 b_1 - a_1 b_1^2 - a_1^2 b_1^2 \quad (x)$$

$$C(a_2, b_2) = a_2 b_2 [1 + (1 - a_2)(1 - b_2)] = 2a_2 b_2 - a_2^2 b_2 - a_2 b_2^2 - a_2^2 b_2^2 \quad (y)$$

$$C(a_1, b_2) = a_1 b_2 [1 + (1 - a_1)(1 - b_2)] = 2a_1 b_2 - a_1^2 b_2 - a_1 b_2^2 - a_1^2 b_2^2 \quad (z)$$

$$C(a_2, b_1) = a_2 b_1 [1 + (1 - a_2)(1 - b_1)] = 2a_2 b_1 - a_2^2 b_1 - a_2 b_1^2 - a_2^2 b_1^2 \quad (t)$$

$x + y - z - t \geq 0$ olduğu a_1, a_2, b_1 ve b_2 değişkenlerine $[0, 1]$ aralığında sıralamaya uygun değerler verilerek görülebilir [2].

C herhangi bir kapula olmak üzere, $W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v)$ olacağı gösterilebilir. Burada $W(u, v) = \max\{u + v - 1, 0\}$ ve $M(u, v) = \min\{u, v\}$ olarak tanımlanmıştır ve bu kapulalara sırasıyla *Fréchet-Hoeffding* alt ve üst sınırları denir. Ayrıca $\Pi(u, v) = u.v$ çarpım kapulası da bağımsızlık durumunu ifade ettiği için, bağımsızlık kapulası olarak adlandırılır [1].

Kapulalar rastgele değişkenlere uygulanan kesin artan dönüşümler altında değişmez kalırlar. Bu özellik ve değişkenlere uygulanan kesin azalan dönüşümlerin kapulada meydana getirdiği değişimler izleyen teoremden ifade edilmiştir.

2.2. Teorem

X ve Y , C_{XY} kapulasına sahip sürekli rastgele değişkenler olsun. α ve β sırasıyla X ve Y rastgele değişkenlerinin değer kümesi üzerinde kesin monoton dönüşümler ise:

O zaman aşağıdaki özellikler geçerlidir:

1. Eğer α ve β kesin artansa

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = C_{XY}(u, v);$$

2. Eğer α kesin artan ve β kesin azalansa

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = u - C_{XY}(u, 1 - v);$$

3. Eğer α kesin azalan ve β kesin artansa

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = v - C_{XY}(1 - u, v);$$

4. Eğer α ve β 'nin her ikisi de kesin azalansa

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = u + v - 1 + C_{XY}(1 - u, 1 - v)$$

'dir [1].

Ayrıca kapulalar bağımlılık katsayılarının ifade edilmesinde de yer alırlar. Bu ifadelere bağımlılık katsayılarının anlatıldığı kesimde yer verilecektir. Bunun yanında kapulalardan çok değişkenli dağılımların simetri özelliklerinin, pozitif bölge-negatif bölge bağımlılık, kuyruk bağımlılık, stokastik monotonluk ve olabilirlik oran bağımlılığı gibi çeşitli bağımlılık özelliklerinin incelenmesinde yararlanılır. Bu konuda daha fazla bilgi için [1,3].

2.3. Arşimedyen Kapulalar

Kapulalar, çok değişkenli dağılımlar için genel bir yapı sağlarlar. Bir kapula ailesini belirlemek için iki ana yöntem, Arşimedyen ve bileşikleştirme yaklaşımlarıdır. Arşimedyen kapulalar birkaç neden yüzünden uygulamalarda geniş bir yer tutar:

1. Bu ailenin kolayca inşa edilebilmesi,
2. Bu sınıfa ait ailelerin büyük değişkenlikler içermesi,
3. Bu sınıfın üyelerinin sahip olduğu çok güzel cebirsel özellikler (incelikler) [4].

2.3.1. Arşimedyen kapulaların kullanıldığı alanlar

Arşimedyen kapulalar çeşitli bağımlılık yapılarını yansıtmaları gereği

1. Menkul kıymet borsası,
2. Sigorta matematiği,
3. Portföy paylaşımı,
4. Ömür verileri analizi

gibi alanlarda kullanılmaktadır [4].

2.3.2. Arşimedyen kapulaların özellikleri

Arşimedyen yaklaşımı, çok değişkenli bir kapulanın, basit tek değişkenli bir fonksiyona, üreticiye indirgenmesine izin verir. Basitlik olması açısından, iki değişkenli bir kapula düşünelim. $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$, sürekli, kesin azalan, konveks ve $\varphi(1) = 0$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. Bir Arşimedyen kapula

$$C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)); u, v \in (0, 1]$$

biçiminde yazılabilir. φ 'ye C kapulasının üreticisi denir. Bir üretici bir Arşimedyen kapula belirler [1].

2.4. Üreticilerin Özellikleri

Yukarıda sözle ifade ettiğimiz kapulaların üreticisi kavramının özelliklerini matematiksel olarak ifade edelim.

1. $\varphi(1) = 0$;
2. her $t \in (0, 1)$ için $\varphi'(t) < 0$ 'dır. Yani φ , azalan bir fonksiyondur;
3. her $t \in (0, 1)$ için $\varphi''(t) \geq 0$ 'dır. Yani φ , konveks (dışbükey) bir fonksiyondur.

İzleyen teorem Arşimedyen kapulaların temel özelliklerini vermektedir.

2.3. Teorem

C, üreticisi φ olan bir Arşimedyen kapula olsun. O zaman aşağıdaki özellikler gerçekleşir:

1. C simetriktir; yani, $C(u,v)=C(v,u)$ (her $u,v \in I$);
2. C birleşmelidir; yani, $C(C(u,v),w) = C(u,C(v,w))$ (her $u, v, w \in I$);
3. Eğer $c > 0$ herhangi bir sabitse, $c \varphi$ de C'nin üreticisidir [1].

İzleyen çizelgede bazı Arşimedyen kapula aileleri ve bunların üreticilerine ilişkin bazı eşitlikler verilmiştir.

Çizelge 2.1. Bazı Arşimedyen kapula ailelerine ilişkin fonksiyonlar ve üreticiler [5].

Aileler	Kapulanın Genel Formu	Üreticiler	Parametre Aralığı
Ali-Mikail-Haq	$u v [1 - \theta (1 - u)(1 - v)]^{-1}$	$\ln \frac{1 - \theta (1 - t)}{t}$	$-1 \leq \theta < 1$
Clayton	$[u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1]^{-\frac{1}{\theta}}$	$\frac{1}{\theta} (t^{-\theta} - 1)$	$\theta > 0$
Frank	$-\frac{1}{\theta} \ln \left[1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)} \right]$	$-\ln \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}$	$(-\infty, \infty) - \{0\}$
Gumbel-Hougaard	$\exp \left\{ - [(-\ln u)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta}]^{\frac{1}{\theta}} \right\}$	$(-\ln t)^{\theta}$	$[1, \infty)$

2.5. Rastgele Örnek Üretme

Kapulararın temel uygulamalarından biri Simülasyon ve Monte Carlo çalışmalarıdır. Bu kesimde belirli bir ortak dağılımdan bir örnek üretme probleminin üzerinde duracağız. Böyle örnekler gerçek dünya sistemlerini veya istatistiksel çalışmalara ilişkin matematiksel modelleri, yeni bir istatistiksel metodu rakipleriyle karşılaştırmada sağlamlık özelliklerini veya küçük örnek sonuçlarının asimptotik uyuşumunu çalışmada kullanılabilir.

Kapulası $C(u, v)$ olan dağılımla ilgili (u, v) gözlem çiftleri üretmenin bir yolu koşullu dağılım yöntemidir. Bu yöntem için, aşağıda belirtilen $c_u(v)$ ile göstereceğimiz $F(x) = u$ verildiğinde $G(y) = v$ 'nin koşullu dağılım fonksiyonuna ihtiyacımız vardır.

$$c_u(v) = P\{G(y) < v | F(x) = u\} = \frac{\partial C(u, v)}{\partial u}$$

Bu fonksiyon bulunduktan sonra rastgele örnek üretme işlemi üç adımda tamamlanır:

1. İki bağımsız düzgün dağılıma sahip u ve t değerlerini üretiniz.
2. $c_u^{(-1)}$, c_u 'nin yarı tersi olmak üzere $v = c_u^{(-1)}(t)$ 'yi bulunuz.
3. İstenen çift (u, v) 'dir.

Dolayısıyla dağılımı $H(x, y) = C(F(x), G(y))$ olan rastgele örneği elde etmek için aşağıdaki 4. Adım algoritmaya eklenir:

4. (u, v) çiftlerinden $(F^{-1}(u), G^{-1}(v))$ çiftleri elde edilir.

3. BAĞIMLILIK VE SIRA SAYILARI

Her biri sürekli dağılım fonksiyonlarına sahip $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ şeklinde bir rastgele örnek düşünelim ve bu örnek çiftlerinin ortak davranışını karakterize eden $H(x, y)$ iki değişkenli dağılım fonksiyonunu belirlemek istediğimizi varsayalım.

$F(x)$ ve $G(y)$ sürekli olduğunda

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)); \quad x, y \in R$$

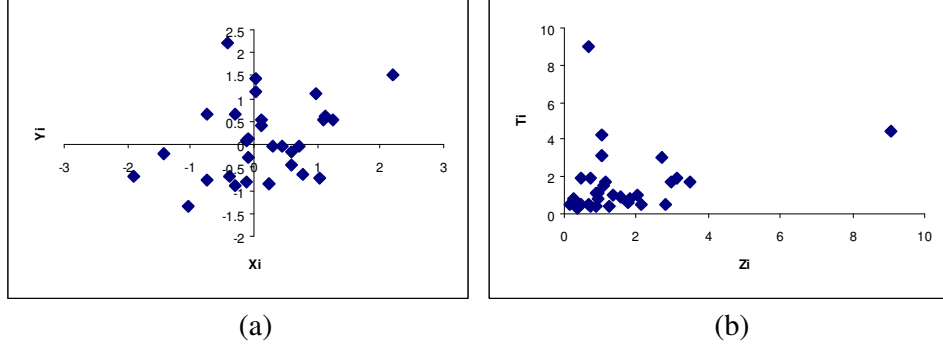
olacak şekilde tek bir kapula vardır (Bkz. 2.1. Teorem). Buna göre $F(x)$ 'nin X için ve $G(y)$ 'nin Y için tam bir tanımlama vermesine, $F(x)$ ve $G(y)$ sürekli olduğunda X ve Y değişkenleri arasındaki ortak bağımlılık tam ve tek türlü C kapulası ile karakterize edilebilir.

Örneğin, standart normal dağılımdan gelen 30 adet X_i, Y_i çifti gözlenmiş olsun. Basitlik olması için ve genelliği bozmaksızın bu çiftleri $X_1 < X_2 < \dots < X_{30}$ olacak şekilde numaralayalım.

Çizelge 3.1. Veri kümesi

i	X_i	Y_i	i	X_i	Y_i	i	X_i	Y_i
1	-1,90	-0,71	11	-0,11	-0,83	21	0,58	-0,44
2	-1,43	-0,19	12	-0,09	-0,27	22	0,59	-0,17
3	-1,04	-1,33	13	-0,08	0,11	23	0,70	-0,03
4	-0,75	-0,76	14	0,02	1,14	24	0,76	-0,64
5	-0,73	0,67	15	0,02	1,45	25	0,99	1,10
6	-0,42	2,20	16	0,11	0,42	26	1,04	-0,74
7	-0,38	-0,71	17	0,13	0,53	27	1,10	0,52
8	-0,30	-0,90	18	0,24	-0,84	28	1,14	0,63
9	-0,28	0,68	19	0,30	-0,03	29	1,25	0,52
10	-0,13	0,07	20	0,43	-0,05	30	2,20	1,50

X ve Y arasındaki bağımlılık yapısı (sözgelimi, X ve Y arasındaki doğrusal birliktelik) için serpe diyagramlarına bakmak temel olarak bir hata değildir; çünkü bu şekillerle hem X ve Y arasındaki bağımlılık yapısı, hem de bu değişkenlerin ortak davranışları görsel olarak kavranabilir.



Şekil 3.1. a) (X_i, Y_i) çiftlerini, b) $(Z_i, T_i) = (e^{X_i}, e^{Y_i})$ çiftlerini gösterir.

Dikkat edilirse orijinalinden aşırı derecede farklı olan $Z_i = \exp(X_i)$ ve $T_i = \exp(Y_i)$, $1 \leq i \leq 30$ şeklinde dönüştürülmüş çiftlerin serpme diyagramı ile orijinal verilerin serpme diyagramları aynı görsel etkiyi gösterirler ve $(X, Y), (Z, T)$ çiftlerinin arasındaki bağımlılık yapısı aynı C kapulası tarafından karakterize edilir.

Genel olarak ϑ ve ψ tersleri ϑ^{-1} ve ψ^{-1} olan artan dönüşümler olsun. $Z = \vartheta(X)$ ve $T = \psi(Y)$ olan (Z, T) çiftinin kapulası C , (X, Y) çiftinin kapulasına eşittir (bkz. Teorem 2.2).

Bunu sağlayabiliriz:

$$H^*(z, t) = C^*\{F^*(z), G^*(t)\}, \quad (3.1)$$

(Z, T) çiftinin dağılım fonksiyonunun Sklar gösterimi olsun, Böylece Z ve T 'nin marjinal dağılım fonksiyonları,

$$F^*(z) = P(Z \leq z) = P\{X \leq \vartheta^{-1}(z)\} = F\{\vartheta^{-1}(z)\}$$

ve

$$G^*(t) = P(T \leq t) = P\{Y \leq \psi^{-1}(t)\} = G\{\psi^{-1}(t)\}$$

şeklinde olur.

Öte yandan her $z, t \in \Re$ değerleri için

$$\begin{aligned} H^*(z, t) &= P(Z \leq z, T \leq t) = P\{X \leq \vartheta^{-1}(z), Y \leq \psi^{-1}(t)\} \\ &= H(\vartheta^{-1}(z), \psi^{-1}(t)) = C[F\{\vartheta^{-1}(z)\}, G\{\psi^{-1}(t)\}] \\ &= C\{F^*(z), G^*(t)\} \end{aligned} \tag{3.2}$$

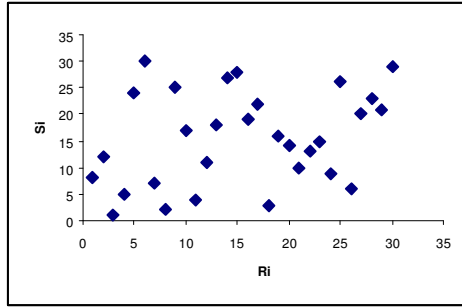
olur.

Eş. 3.1 ve Eş. 3.2 karşılaştırıldığında $C^* = C$ olduğu görülür. Sonuç olarak bu, (X, Y) rastgele çiftlerinin kapulası C 'nin, monoton artan dönüşümler altında değişmez kalması özelliğini gösterir. Bunların bağımlılık yapısını gösteren grafikler de bu özelliği yansıtır.

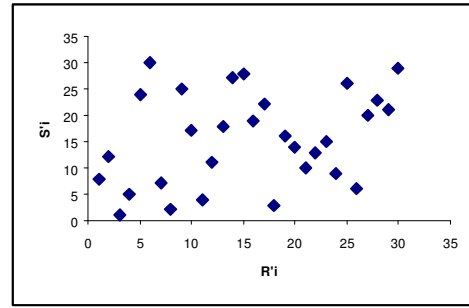
Bu şekilde dönüşüme uğrayan veriler için, sıra sayıları istatistiklerinden önemli bilgiler elde edilebilir. R_i ; $X_1, X_2, \dots, X_n$ içindeki X_i 'nin sırası ve S_i ; $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ içindeki Y_i 'nin sırası olmak üzere. Çizelge 3.1'deki veri kümesi için oluşturulan sıra sayıları Çizelge 3.2'de gösterilmiştir.

Çizelge 3.2. Veri kümesi için sıra sayıları

i	Ri	Si	i	Ri	Si	i	Ri	Si
1	1	8	11	11	4	21	21	10
2	2	12	12	12	11	22	22	13
3	3	1	13	13	18	23	23	15
4	4	5	14	14	27	24	24	9
5	5	24	15	15	28	25	25	26
6	6	30	16	16	19	26	26	6
7	7	7	17	17	22	27	27	20
8	8	2	18	18	3	28	28	23
9	9	25	19	19	16	29	29	21
10	10	17	20	20	14	30	30	29



(a)



(b)

Şekil 3.2. a) (X_i, Y_i) 'lere ait sıra sayıları (R_i, S_i) 'ler

b) $(Z_i, T_i) = (e^{X_i}, e^{Y_i})$ 'lere ait sıra sayıları (R^*_i, S^*_i) 'ler $(1 \leq i \leq 30)$

Dikkat edilirse, (X_i, Y_i) çiftleriyle oluşturulan (R_i, S_i) sıra sayıları çiftlerinin serpmme diyagramı ile (Z_i, T_i) çiftleriyle oluşturulan (R^*_i, S^*_i) sıra sayıları çiftlerinin serpmme diyagramının tamamen aynı olduğu görülmektedir. Bu sıra sayıları çiftlerinin tamamen aynı oluşu, (X, Y) ve (Z, T) çiftlerinin aynı C kapulasına sahip olmasına; bir başka deyişle, (X, Y) rastgele çiftlerine uygulanan monoton artan dönüşümlerin C kapulasını değiştirmemesine karşı gelmektedir.

Eksenler $1/(n+1)$ 'nin katları kullanılarak düzenlendiğinde $[0,1]^2$ birim karesi elde edilir. Birim kare; $I(A)$, A kümesinin gösterge fonksiyonu olmak üzere

$$C_n(u, v) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I\left(\frac{R_i}{n+1} \leq u, \frac{S_i}{n+1} \leq v\right) \quad \text{örnekleme kapulasının tanım kümesidir.}$$

Verilen herhangi bir (u, v) çifti için, $C_n(u, v)$ 'nin bilinmeyen $C(u, v)$ niceliğinin $C(u, v)$ ortalamalı ve normal dağılmış büyük örneklerde sıra sayılarına dayalı bir tahmin edici olduğu gösterilebilir [6].

4. BAZI BAĞIMLILIK KATSAYILARI

C kapulasının örneğe dayalı en iyi gösterimi olan C_n örnekleme kapulasından ve bu kapulanın (X, Y) çiftinin bağımlılığını karakterize ettiğinden bahsetmiştik. Dolayısıyla bağımlılığı, hem örnekleme yoluyla ve hem de teorik olarak, sırasıyla C_n ve C 'yi kullanarak ölçmek anlamlı olur. Bu düşüncenin bizi iyi bilinen iki parametre dışı bağımlılık ölçüsü, Spearman'ın ρ 'su ve Kendall'ın τ 'suna nasıl ulaştırdığını açıklayalım ve Pearson Korelasyon Katsayısı ile karşılaştıralım.

4.1. Pearson Korelasyon Katsayısı

4.1. Tanım

$(X, Y)^T$ rastgele vektörünün bileşenleri sıfırdan farklı ve sonlu varyansa sahip olsun.

$$r = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X) Var(Y)}}$$

sayısına Pearson korelasyon katsayısı denir.

Ayrıca Pearson korelasyon katsayısı kapula cinsinden

$$r = \frac{1}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} \int_0^1 \int_0^1 [C(u, v) - uv] dF_X^{-1}(u) dF_Y^{-1}(v)$$

biçiminde de ifade edilebilir [7].

Pearson korelasyon katsayısı değişkenler arasındaki doğrusal ilişkiyi ölçer; dolayısıyla çoğunlukla doğrusal korelasyon katsayısı veya kısaca doğrusal korelasyon olarak da anılır. Doğrusal korelasyon, doğrusal bağımlılığın ölçüsüdür. Tam doğrusal bağımlılık durumunda $Y = aX + b$, $a \in R \setminus \{0\}$ için hemen hemen

kesin olarak $|r|=1$ olur. Aksi taktirde $-1 < r < 1$ olur. Aynı zamanda doğrusal korelasyon $\alpha, \gamma \in R \setminus \{0\}, \beta, \delta \in R$ için $r(\alpha X + \beta, \gamma Y + \delta) = \text{sign}(\alpha \gamma) r(X, Y)$, özelliğine de sahiptir. Dolayısıyla doğrusal korelasyon, doğrusal dönüşümlerden etkilenmez. A, B; $m \times n$ boyutlu matrisler, $a, b \in R^m$ ve $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ rastgele n -vektörler olduğundan ve $\text{Cov}(\mathbf{AX} + \mathbf{a}, \mathbf{BY} + \mathbf{b}) = \mathbf{A} \text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \mathbf{B}^T$ olur. Buradan $\alpha \in R^n$ için $\text{Var}(\alpha^T \mathbf{X}) = \alpha^T \text{Cov}(\mathbf{X}) \alpha$, olur; burada $\text{Cov}(\mathbf{X}) = \text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ 'dir. Dolayısıyla doğrusal kombinasyonun varyansı tamamen bileşenler arasındaki kovaryanslarla belirlenir [8].

Doğrusal korelasyon yaygın olarak kullanılan, ancak genelde yanlış anlaşılan bir bağımlılık ölçüsüdür. Korelasyon, eliptik dağılımlarda bağımlılığın doğal sayısal ölçüsü olarak uygun olabilir. Bununla birlikte, çoğu rastgele değişkenin ortak dağılımı eliptik değildir ve doğrusal korelasyon kullanımı böyle durumlarda yanıltıcı olabilir [8].

4.2. Tanım

$(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ şeklinde iki değişkenli bir kitleden gelen n -birimlik rastgele örnek olsun.

$$r_n = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}} \in [-1, 1].$$

sayısına örnek korelasyon katsayısı denir. Örnek korelasyon katsayısı r_n , yığın korelasyon katsayısı r 'nin yansız bir tahmin edicisidir.

4.2. Spearman'ın Ro'su

Bağımlılığı ölçmek için doğal bir düşünce, Pearson'ın yaklaşımını taklit ederek (R_i, S_i) sıra sayıları çiftleri arasındaki korelasyonu veya eşdeğer olarak C_n 'nin

destek kümesini oluşturan $(\frac{R_i}{n+1}, \frac{S_i}{n+1})$ arasındaki korelasyonu hesaplamaktır. Bu

bizi doğrudan $\bar{R} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i = \frac{n+1}{2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i = \bar{S}$ olmak üzere

$$\rho_n = \frac{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})(S_i - \bar{S})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2 \sum_{i=1}^n (S_i - \bar{S})^2}} \in [-1, 1]$$

şeklinde gösterilen örneğe ait Spearman'ın ro'suna götürür.

Bu katsayı için daha kolay ve uygun bir biçim,

$$\rho_n = \frac{12}{n.(n+1).(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^n R_i \cdot S_i - 3 \cdot \frac{n+1}{n-1}$$

şeklinde olup, örnek korelasyon katsayısı r_n ile aynı formu paylaşır. Bilindiği gibi, Spearman'ın ro'su r_n 'ye benzer şekilde değişkenler bağımsız olduğunda beklenen değerce sıfır olmaktadır. Bununla birlikte ρ_n , örnek korelasyon katsayısı r_n 'e benzer şekilde, eğer değişkenler bağımsız ise sıfırdır. Bununla birlikte ρ_n 'in r_n 'ye göre bazı üstünlükleri söz konusudur.

Örneğin, $E(\rho_n) = \pm 1$ eşitliği ancak ve ancak X ile Y arasında *fonksiyonel* bir bağımlılık varsa, yani, (X, Y) 'nin kapulası iki Fréchet-Hoeffding sınırı olan M ve W 'dan birine eşitse sağlanır. Buna karşılık, $E(r_n) = \pm 1$ eşitliği ancak ve ancak X

ile Y 'den biri diğ erinin doğ rusal fonksiyonuysa sağ lanır. Bu durum çok daha kısıtlayıcıdır [6].

Ayrıca, r Cauchy gibi kalın-kuyruklu dağılımlar için mevcut değildir. Böyle durumlarda r_n 'de teorik bir değ ere sahip değildir.

Buna karş ılık, aş ağıdaki eşitlikte gösterilen ρ ,

$$\rho = 12 \int_{[0,1]^2} uv dC(u,v) - 3 = 12 \int_{[0,1]^2} C(u,v) dudv - 3 \quad (4.1)$$

her zaman tanımlı olup, ρ_n yığın parametresini ρ 'nun yansız tahmin edicisidir [6].

Eş. 4.1 Hoeffding (1940) tarafından ispatlanmış, Quesada-Molina (1992) tarafından

$$12 \int_{[0,1]^2} C_n(u,v) dudv - 3 = \frac{12}{n} \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{n+1} \cdot \frac{S_i}{n+1} - 3 = \frac{n-1}{n+1} \rho_n$$

olarak genişletilmiştir.

Böylece $n \rightarrow \infty$ ise $C_n \rightarrow C$ olduğ undan $\rho_n \rightarrow \rho$ olması kaçınılmazdır.

X ile Y 'nin bağımsızlığı hipotezi $H_0 : C = \Pi$ altında ρ_n 'nin dağılımı büyük örnek çaplarında ortalaması sıfır ve varyansı $\frac{1}{n-1}$ olan normal dağılıma yaklaşır. Buna göre, sö zgelimi, $\sqrt{n-1} |\rho_n| > z_{\alpha/2} = 1,96$ ise, $\alpha = \%5$ anlam düzeyinde H_0 hipotezi reddedilebilir [6].

4.1. Örnek

Basit bir hesaplamayla bilgi veri kümesindeki 30 gözlem için $\rho_n = 0,29255$ ve $r_n = -0,32978$ olarak buluruz. Bu örnek için bağımsızlık hipotezi H_0 'ı reddetmek için bir sebep yoktur. Sözelimi, Z standart normal dağılmış bir rastgele değişkense, ρ_n 'ye dayalı testi $\sqrt{29}|0,29255| = 1.57543 < z_{\alpha/2} = 1,96$ olduğundan, $\alpha = \%5$ anlam düzeyinde H_0 hipotezinin reddedilmesi için yeterli kanıt bulunamaz.

Bir (C_θ) parametrik kapula ailesi için, ρ , tipik olarak θ 'nın monoton artan bir fonksiyonudur. Bunun için yeterli koşul $\theta < \theta' \Rightarrow C_\theta(u, v) \leq C_{\theta'}(u, v)$ (her $u, v \in [0,1]$) olmasıdır. Bu gösterim bizi “pozitif bölge bağımlılığı” kavramına götürür.

4.2. Örnek

$H(x, y) = C\{F(x), G(y)\}$, $F(x) : N(\mu, \sigma^2)$ ve $G(y) : \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$ marjinal dağılımlarına sahip ve C , aşağıda verilen Farlie-Gumbel-Morgenstern kapula ailesi olsun:

$$C_\theta(u, v) = uv + \theta uv(1-u)(1-v), \quad u, v \in [0,1], \quad \theta \in [-1,1]$$

Şimdi bu aile için ρ ve θ arasındaki bağıntıyı bulmaya çalışalım.

$$\rho = 12 \int_{[0,1]^2} uv dC_\theta(u, v) - 3 = 12 \int_0^1 \int_0^1 uvc_\theta(u, v) dv du - 3$$

Burada $c_\theta(u, v) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C_\theta(u, v) = 1 + \theta(1-2u)(1-2v)$ ve C_θ mutlak sürekli olduğundan,

$$\int_0^1 \int_0^1 uvc_{\theta}(u,v)dvdu = \frac{1}{4} + \frac{\theta}{36}$$

ve

$$\rho = 12 \int_0^1 \int_0^1 uvc_{\theta}(u,v)dvdu - 3 = 12 \left(\frac{1}{4} + \frac{\theta}{36} \right) - 3 = \frac{\theta}{3}$$

olarak bulunur.

4.3. Kendall'in To'su

Sıra sayılarına dayanan ve sıkça kullanılan bir diğer bağımlılık ölçüsü de Kendall'in to' sudur. $(X_i, Y_i); i=1,2,\dots,n$ rastgele örneğinde P_n uyumlu çiftlerin sayısını, Q_n uyumsuz çiftlerin sayısını göstermek üzere, bu örnekten hesaplanan Kendall'in to'su

$$\tau_n = \frac{P_n - Q_n}{\binom{n}{2}} = \frac{4}{n(n-1)} P_n - 1$$

ile verilir. Burada (X_i, Y_i) ve (X_j, Y_j) çiftleri eğer $(X_i - X_j).(Y_i - Y_j) > 0$ ise uyumlu, $(X_i - X_j).(Y_i - Y_j) < 0$ ise uyumsuz olarak adlandırılır. X ve Y sürekli olduğundan, $(X_i - X_j).(Y_i - Y_j) = 0$ durumu görülmez. $(X_i - X_j).(Y_i - Y_j) > 0$ durumu ancak ve ancak $(R_i - R_j).(S_i - S_j) > 0$ ise gerçekleşeceğinden, τ_n 'nin sıra sayılarının bir fonksiyonu olduğu açıktır. Ayrıca τ_n , C_n örnekleme kapulasının da bir fonksiyonudur. Bu durumu açıklamak, yani τ_n ile C_n arasındaki ilişkiyi görmek için aşağıda belirtilen fonksiyon tanımlansın:

$$\text{Herhangi iki } i \neq j \text{ için } I_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ eger } X_j < X_i, Y_j < Y_i \text{ ise} \\ 0 \text{ diger durumlarda} \end{cases}$$

ve

$i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $I_{ii} = 1$

olsun.

Buna göre, $(I_{ij} + I_{ji}) = 1$ durumu ancak ve ancak (X_i, Y_i) ve (X_j, Y_j) çiftleri uyumlu olduğunda ortaya çıktığından,

$$P_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} (I_{ij} + I_{ji}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} I_{ij} = -n + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n I_{ij}$$

olmaktadır [6].

$$W_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I_{ij} = \frac{1}{n} \# \{j : X_j \leq X_i, Y_j \leq Y_i\}$$

der ve,

$$\bar{W} = (W_1 + W_2 + \dots + W_n) / n$$

olarak alırsak,

$$\tau_n = 4 \frac{n}{n-1} \bar{W} - \frac{n+3}{n-1}$$

şeklinde yazılabilir [6].

Artık τ_n ve C_n arasındaki ilişki

$$W_i = C_n \left(\frac{R_i}{n+1}, \frac{S_i}{n+1} \right)$$

tanımından ve

$$\bar{W} = \int_{[0,1]^2} C_n(u,v) dC_n(u,v)$$

özelliğinden çıkar, denilebilir [6].

Böylece 1948’de Hoeffding’in elde ettiği gibi $C_n \rightarrow C$ olması, aşağıdaki sonucu ortaya koyar:

$$\tau_n = 4 \frac{n}{n-1} \bar{W} - \frac{n+3}{n-1} \rightarrow \tau = 4 \int_{[0,1]^2} C(u,v) dC(u,v) - 1;$$

yani τ_n , yığın parametresi τ için asimptotik yansız bir tahmin edicidir [6].

τ_n ’nin dağılımı ortalaması sıfır ve varyansı $2(2n+5)/\{9n(n-1)\}$ olan normal dağılıma yaklaştığından, $H_0 : C = \Pi$ bağımsızlık testi, τ_n ’ye dayandırılabilir. Buna göre, sözgelimi, $\sqrt{\frac{9n(n-1)}{2(2n+5)}} |\tau_n| > 1,96$ olduğunda H_0 hipotezi $\alpha = \%5$ anlam düzeyinde reddedilebilir [6].

4.3. Örnek

Veri kümesindeki 30 gözlemden $\tau_n = 0,1954$ olarak kolayca hesaplanabilir.

Dolayısıyla,

$$\sqrt{\frac{9 \cdot 30 \cdot 29}{2 \cdot 65}} |0,1954| = 1.51647 < z_{\alpha/2} = 1,96$$

olduğundan $\alpha = \%5$ anlam düzeyinde H_0 bağımsızlık hipotezini reddetmenin hiçbir nedeni yoktur.

Spearman'ın ro'sunda olduğu gibi, Kendall'ın to'sunun teorik değeri τ da, $\theta < \theta' \Rightarrow C_\theta(u, v) \leq C_{\theta'}(u, v)$ (her $u, v \in [0,1]$) koşulunu sağlayan ve pozitif bölge bağımlı denemeler (C_θ) kapulaları için, θ 'nın monoton artan bir fonksiyonudur.

4.4. Örnek

Farlie-Gumbel-Morgenstern kapula ailesi için τ ve θ arasındaki bağıntı,

$$C_\theta(u, v) = uv + \theta uv(1-u)(1-v), \quad u, v \in [0,1], \quad \theta \in [-1,1]$$

olmak üzere,

$$\tau = 4 \int_{[0,1]^2} C_\theta(u, v) dC_\theta(u, v) - 1 = 4 \int_0^1 \int_0^1 C_\theta(u, v) c_\theta(u, v) du dv - 1 = 4 \left(\frac{\theta}{18} + \frac{1}{4} \right) - 1 = \frac{2\theta}{9}$$

biçimindedir.

5. KAPULA TAHMİN YÖNTEMLERİ

Parametrik bir (C_θ) kapula ailesinin, X ve Y rastgele değişkenleri arasındaki bağımlılık yapısı için seçilmiş bir model olduğunu kabul edelim. Elimizde $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ şeklinde n-birimlik bir rastgele örnek var olsun. Bu örnekten θ nasıl tahmin edilebilir ? Bu bölümde θ 'nın bir gerçek sayı ya da çok-boyutlu olmasına bağlı olarak bazı tahmin yöntemlerinden söz edeceğiz.

5.1. Parametrik Yöntemler

Bu kesimde Tam En Çok Olabilirlik ve IFM(Marjinallere ilişkin çıkarsama fonksiyonları) yöntemlerini tanıtacağız.

5.1.1. Tam en çok olabilirlik yöntemi

Bu tahmin yöntemini tanıtmadan önce kanonik gösterim olarak adlandırılan gösterimi belirtelim. Bir çok değişkenli dağılımın

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)) \cdot \prod_{j=1}^n f_j(x_j)$$

biçiminde gösterimi onun kanonik gösterimidir [9].

Bu gösterimde

$$c(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)) = \frac{\partial^n C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n))}{\partial F_1(x_1) \cdot \partial F_2(x_2) \dots \partial F_n(x_n)},$$

C kapulasının n. mertebeden kısmî türevi, dolayısıyla c kapula yoğunluğu ve f_j 'ler standart tek değişkenli marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarıdır.

Çok değişkenli yoğunluk fonksiyonu için belirtilen bu kanonik gösterim bize kapulaların istatistiksel modellenmesi probleminin çözümünün iki adımda yapılabileceğini göstermektedir:

- a. Marjinal dağılımların belirlenmesi
- b. Uygun kapula fonksiyonunun tanımlanması,

$\mathfrak{X} = \{x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt}\}_{t=1}^T$ şeklinde gösterilen örnek veri matrisi olsun. Böylece tanımlanacak log-olabilirlik fonksiyonunun gösterimi aşağıdaki gibi olur:

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^T \log\{c(F_1(x_{1t}), F_2(x_{2t}), \dots, F_n(x_{nt}))\} + \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^n \log f_j(x_{jt});$$

burada θ marjinallere ve kapulaya ilişkin parametreler vektörüdür [9].

Eğer, marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarının kümesi ve kapula biliniyorsa, yukarıda belirtilen log-olabilirlik fonksiyonu yazılabilir ve en çok olabilirlik tahmin edicisi $\hat{\theta}_{MLE} = \max_{\theta \in \Theta} l(\theta)$ bulunabilir.

Bu kesimde çok değişkenli model (yani kapula) ve bu modelin bütün marjinalleri (yani tek değişkenli olasılık yoğunluk fonksiyonları) için asimptotik en çok olabilirlik teorisinin uygunluk koşullarının sağlandığını varsaydık. Bu uygunluk koşulları altında en çok olabilirlik tahmin edicisi tanımlıdır ve tutarlı, asimptotik etkin bir tahmin edicidir. Ayrıca, asimptotik normal dağılıma sahiptir [9];

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_{MLE} - \theta_0) \rightarrow N(0, \mathfrak{I}^{-1}(\theta_0)).$$

Burada $\mathfrak{I}(\theta_0)$ Fisher'in bilgi matrisi ve θ_0 doğru parametrik değerdir. $\hat{\theta}_{MLE}$ 'in kovaryans matrisi (yani Fisher' in bilgi matrisi), olabilirlik fonksiyonunun negatif Hessian matrisinin tersi ile tahmin edilir.

5.1.2. IFM (marjinallere ilişkin çıkarsama fonksiyonları) yöntemi

En çok olabilirlik yöntemi için, marjinal dağılımların parametreleri ve kapula tarafından açıklanan bağımlılık yapısının parametreleri gerekeceğinden, özellikle çok boyutlu durumlarda karışık ve zor hesaplanmalar ile karşılaşılır. Fakat, log-olabilirlik fonksiyonuna bakıldığında bu fonksiyonun iki pozitif terimden oluştuğu görülür. Birinci terim kapula yoğunluğu ve onun parametrelerinden oluşurken, ikinci terim marjinallerden ve kapula yoğunluğunun bütün parametrelerini içerir. Tahmin iki adımda yapılır:

Adım 1: Tek değişkenli marjinal dağılımların tahminini yaparak, marjinal parametreleri θ_1 tahmin edilir:

$$\hat{\theta}_1 = \text{ArgMax}_{\theta_1} \sum_{i=1}^T \sum_{j=1}^n \log f_j(x_{ji}; \theta_1).$$

Adım 2: Elde edilen $\hat{\theta}_1$ ile kapula parametresi θ_2 tahmin edilir:

$$\hat{\theta}_2 = \text{ArgMax}_{\theta_2} \sum_{i=1}^T \log c(F_1(x_{1i}), F_2(x_{2i}), \dots, F_n(x_{ni}); \theta_2, \hat{\theta}_1).$$

Bu yöntem IFM (Marjinallere ilişkin çıkarsama fonksiyonları) yöntemi olarak adlandırılır. IFM adı, ‘Inference Functions for Margins’ deyiminden gelmektedir [3].

IFM tahmin edicisi $\hat{\theta}_{IFM} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)'$ vektörü ile gösterilir.

l log-olabilirlik fonksiyonu, l_j , j. marjinalin log-olabilirlik fonksiyonu, l_c ise kapulanın log-olabilirlik fonksiyonu olsun. O zaman, IFM tahmin edicisi aşağıda belirtilen eşitliğin çözümüdür:

$$\left(\frac{\partial l_1}{\partial \theta_{11}}, \frac{\partial l_2}{\partial \theta_{12}}, \dots, \frac{\partial l_n}{\partial \theta_{1n}}, \frac{\partial l_c}{\partial \theta_2} \right) = 0'.$$

EÇO tahmin edicisi ise aşağıda belirtilen eşitliğin çözümüdür:

$$\left(\frac{\partial l}{\partial \theta_{11}}, \frac{\partial l}{\partial \theta_{12}}, \dots, \frac{\partial l}{\partial \theta_{1n}}, \frac{\partial l}{\partial \theta_2} \right) = 0'.$$

Bu iki tahmin edici genelde birbirine eşit çıkmamaktadır.

IFM tahmin edicisi EÇO tahmin edicisinden daha kolay hesaplanabilmektedir. Bu yüzden, IFM tahmin edicisinin EÇO tahmin edicisine göre asimptotik etkinliğinin araştırılması mantıklı olacaktır. Bunun için, iki tahmin edicinin asimptotik kovaryans matrislerinin karşılaştırılması gerekir.

IFM teorisi, parametreler vektörünün tahmini için uygun sonuç eşitliklerinin kümesinin kullanılmasına dayanan özel bir durumdur. Bu durumdaki her sonuç eşitliği aslında bir skor fonksiyonudur. (yani eşitliğin sol tarafı, her marjinal yoğunluğa ait log-olabilirliğinin kısmî türevinden oluşur.)

EÇO tahmin edicisi gibi, IFM tahmin edicisinin de gereken uygunluk koşulları altında asimptotik normallik özelliğine sahip olduğu Joe tarafından kanıtlanmıştır:

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_{IFM} - \theta_0) \rightarrow N(0, G^{-1}(\theta_0));$$

burada $G(\theta_0)$ Godambe bilgi matrisi ve θ_0 doğru parametrik değerdir [3,9].

l log-olabilirlik fonksiyonu, l_j , j. marjinalin log-olabilirlik fonksiyonunu, l_c ise kapulanın log-olabilirlik fonksiyonu olsun. Böylece skor fonksiyonu,

$$s(\theta) = \left(\frac{\partial l_1}{\partial \theta_{11}}, \frac{\partial l_2}{\partial \theta_{12}}, \dots, \frac{\partial l_n}{\partial \theta_{1n}}, \frac{\partial l_c}{\partial \theta_2} \right)'$$

şeklinde olur.

Godambe bilgi matrisi ise aşağıda belirtilen formu alır;

$$G(\theta_0) = D^{-1}V(D^{-1})';$$

burada

$$D = E \left[\frac{\partial s(\theta)}{\partial \theta} \right], \quad V = E[s(\theta)s(\theta)']$$

şeklindedir. Bu kovaryans matrisinin tahmini için birçok türev hesaplanması gerekmektedir. 1997’de Joe bu tahmin için Jacknife yöntemini ya da diğer Bootstrap yöntemlerinden birini kullanmayı önermiş, IFM tahmin edicisinin EÇO tahmin edicisine göre daha etkin olduğunu göstermiştir [3,9].

5.2. Yarı-Parametrik Yöntem

5.2.1. En çok sözde olabilirlik yöntemi

Klâsik istatistikte, en çok olabilirlik tahmini, çoğunlukla daha etkin olan ve özellikle θ parametresi çok boyutlu olduğunda bu etkinliğin daha da arttığı momentler yöntemine iyi bir alternatiftir. Bu kesimde bu yaklaşımın, bağımlılık parametresinin sıra sayılarına dayalı olduğu bir tahmine uyarlanması verilecektir. Söz konusu uyarlama genel hatlarıyla Oakes tarafından tanımlanmış[10], daha sonra Genest [11] ile Shih ve Louis [12] tarafından biçimlendirilmiş ve çalışılmıştır.

c_θ yoğunluğuna sahip C_θ kapulasının mutlak sürekli olmasını gerektiren en çok sözde olabilirlik yöntemi, basit olarak sıra sayılara dayalı

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^n \log \left\{ c_\theta \left(\frac{R_i}{n+1}, \frac{S_i}{n+1} \right) \right\}$$

log-olabilirlik fonksiyonunun maksimum hale getirecek parametrenin tahminini elde eder. Bu yöntemin formu, klâsik log-olabilirlik fonksiyonu

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^n \log \{ c_\theta (F(X_i), G(X_i)) \}$$

ifadesinde bilinmeyen F ve G marjinal dağılım fonksiyonlarının yerine

$$F_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n I(X_i \leq x) = \frac{R_i}{n+1}$$

$$G_n(y) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n I(Y_i \leq y) = \frac{S_i}{n+1}$$

örnekten hesaplanmış değerlerinin tekrar ölçeklenmiş versiyonlarının konulmasıyla elde edilir. En çok sözde olabilirlik yöntemi, daha çok sayısal işlem içerdiği ve c_θ yoğunluğunun var olmasını gerektirdiği için, Kendall'ın τ 'su ve Spearman'ın ρ 'sunu içeren yöntemlere göre yüzeysel olarak daha az çekiciliğe sahiptir. Bununla birlikte bu yöntem bağımlılık parametresi θ 'nın gerçek sayı olmasını gerektirmediğinden, genelde diğer yöntemlere göre daha fazla uygulanabilir.

Çok değişkenli bir θ parametresinin tahmini ve güven bölgesinin hesaplanması [11]'de verilmiştir. Kolaylık açısından burada yalnızca θ 'nın gerçek sayı olduğu durumu ele alınacaktır.

$$\dot{c}_\theta(u, v) = \frac{\partial c_\theta(u, v)}{\partial \theta}$$

olsun. Genest aşağıdaki eşitliğin kökü $\hat{\theta}_n$ 'nin oldukça yumuşak olan yeterlilik koşulları altında bir tek olduğunu göstermiştir [11].

$$l(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} l(\theta) = \sum_{i=1}^n \dot{c}_\theta\left(\frac{R_i}{n+1}, \frac{S_i}{n+1}\right) / c_\theta\left(\frac{R_i}{n+1}, \frac{S_i}{n+1}\right) = 0$$

Ayrıca, $\hat{\theta}_n \approx N(\theta, \frac{v^2}{n})$ olup burada v^2 'nin sadece C_θ 'ya bağlı olduğu gösterilmiştir [11].

v^2 'nin tutarlı bir tahmini,

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (M_i - \bar{M})^2$$

ve

$$\hat{\beta}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (N_i - \bar{N})^2$$

olmak üzere,

$$\hat{v}^2 = \frac{\hat{\sigma}_n^2}{\hat{\beta}_n^2}$$

ile verilir.

Burada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için, sözde gözlemler olarak isimlendirilen M_i ve N_i gözlemlerinin hesaplanmasında aşağıdaki adımlar izlenir.

Adım 1: $X_1 < X_2 < \dots < X_n$ olacak şekilde $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ orijinal verisinden $R_1 = 1, \dots, R_n = n$ sıra sayıları tanımlanır. Benzer şekilde Y_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ küçükten büyüğe sıralanarak, S_i 'ler tanımlanır. Böylece (R_i, S_i) sıra sayıları çiftleri elde edilir.

Adım 2: $L(\theta, u, v) = \log c_\theta(u, v)$ yazılır ve sırayla θ , u ve v 'ye göre türevleri L_θ , L_u ve L_v hesaplanır.

Adım 3: $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $N_i = L_\theta\left(\hat{\theta}_n, \frac{i}{n+1}, \frac{S_i}{n+1}\right)$ olarak alınır.

Adım 4: $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için

$$M_i = N_i - \frac{1}{n} \sum_{j=i}^n L_\theta\left(\hat{\theta}_n, \frac{j}{n+1}, \frac{S_j}{n+1}\right) L_u\left(\hat{\theta}_n, \frac{j}{n+1}, \frac{S_j}{n+1}\right) - \frac{1}{n} \sum_{S_j \geq S_i} L_\theta\left(\hat{\theta}_n, \frac{j}{n+1}, \frac{S_j}{n+1}\right) L_v\left(\hat{\theta}_n, \frac{j}{n+1}, \frac{S_j}{n+1}\right)$$

olarak alınır [6].

5.1. Örnek

Çizelge 3.1'deki veri kümesi için Farlie-Gumbel-Morgenstern kapula ailesini model olarak seçelim.

Bu durumda,

$$c_{\theta}(u, v) = 1 + \theta(1 - 2u)(1 - 2v)$$

ve

$$\frac{\dot{c}_{\theta}(u, v)}{c_{\theta}(u, v)} = \frac{(1 - 2u)(1 - 2v)}{1 + \theta(1 - 2u)(1 - 2v)}$$

olur.

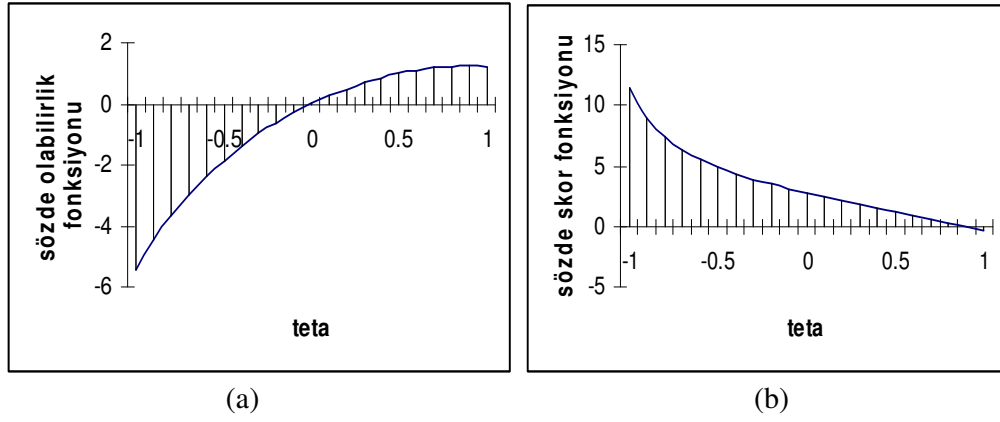
Buna göre bu modelin log sözde olabilirlik modeli:

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^n \log \left\{ 1 + \theta \left(1 - \frac{2R_i}{n+1} \right) \left(1 - \frac{2S_i}{n+1} \right) \right\}$$

ve sözde skor fonksiyonu:

$$\begin{aligned} \dot{l}(\theta) &= \frac{\partial}{\partial \theta} l(\theta) = \sum_{i=1}^n \frac{\left(1 - \frac{2R_i}{n+1} \right) \left(1 - \frac{2S_i}{n+1} \right)}{1 + \theta \left(1 - \frac{2R_i}{n+1} \right) \left(1 - \frac{2S_i}{n+1} \right)} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{(n+1-2R_i)(n+1-2S_i)}{(n+1)^2 + \theta(n+1-2R_i)(n+1-2S_i)} \end{aligned}$$

olur.



Şekil 5.1. a) Farlie-Gumbel-Morgenstern kapula ailesi modeli ile Çizelge 3.2.’deki 30 adet (R_i, S_i) çiftleri için oluşturulan $l(\theta)$ fonksiyonu
 b) Farlie-Gumbel-Morgenstern kapula ailesi modeli ile Çizelge 3.2.’deki 30 adet (R_i, S_i) çiftleri için oluşturulan $\dot{l}(\theta)$ fonksiyonu

$$\dot{l}(\theta) = \sum_{i=1}^{30} \frac{(n+1-2R_i)(n+1-2S_i)}{(n+1)^2 + \theta(n+1-2R_i)(n+1-2S_i)} = 0$$

denkleminin tek kökü $\hat{\theta}_n = 0,90119$ olur.

L_θ , L_u ve L_v denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$L_\theta(\theta, u, v) = \frac{(1-2u)(1-2v)}{1 + \theta(1-2u)(1-2v)}$$

$$L_u(\theta, u, v) = \frac{-2\theta(1-2v)}{1 + \theta(1-2u)(1-2v)}$$

$$L_v(\theta, u, v) = \frac{-2\theta(1-2u)}{1 + \theta(1-2u)(1-2v)}$$

Çizelge 5.1. EÇSO yönteminde θ için güven aralığı hesaplanmasında kullanılacak M_i ve N_i sabitleri

i	Ni	Mi	i	Ni	Mi	i	Ni	Mi
1	0,32	0,40	11	0,18	0,11	21	-0,14	-0,22
2	0,17	0,23	12	0,06	-0,02	22	-0,07	-0,15
3	0,45	0,50	13	-0,03	-0,11	23	-0,02	-0,09
4	0,35	0,37	14	-0,08	-0,16	24	-0,29	-0,37
5	-0,56	-0,55	15	-0,03	-0,11	25	0,30	0,22
6	-1,19	-1,17	16	0,01	-0,08	26	-0,66	-0,73
7	0,24	0,20	17	0,04	-0,05	27	0,18	0,11
8	0,31	0,26	18	-0,15	-0,23	28	0,29	0,23
9	-0,33	-0,40	19	0,01	-0,07	29	0,24	0,20
10	-0,04	-0,11	20	-0,03	-0,11	30	0,47	0,44

M_i ve N_i değerleri yardımıyla $\hat{v}_n^2 = \frac{0,124463}{0,117948} = 1,05524$ olarak hesaplanır. θ için

$1 - \alpha = \%95$ güven katsayılı güven aralığı $\hat{\theta}_n \pm 1,96 \cdot \hat{v}_n / \sqrt{n} = [0,533594; 1]$ olarak tahmin edilir.

5.3. Parametrik Olmayan Yöntemler

5.3.1. Kendall'in to'suna dayanan yöntem

Bu yöntemin anlaşılmasını kolaylaştırmak için yine,

$$C_\theta(u, v) = uv + \theta uv(1-u)(1-v), \quad u, v \in [0,1], \quad \theta \in [-1,1]$$

Farlie-Gumbel-Morgenstern kapula ailesini göz önüne alalım.

Bu aile için Kendall'in to'sunun teorik değerini

$$\tau = 2\theta/9$$

olarak bulmuştuk ve θ 'nın gerçek sayı olduğundan söz etmiştik. Amacımız θ 'yı tahmin etmek olduğundan,

$$\tilde{\theta}_n = \frac{9}{2} \tau_n$$

sonucuna ulaşabiliriz.

τ_n sıra sayılarına dayanan bir istatistik olduğundan, kullanacağımız yöntemin parametrik olmayan bir yöntem olduğu söylenebilir.

Genel olarak, $\theta = g(\tau)$ şeklinde düzgün bir fonksiyona sahipse, $\tilde{\theta}_n = g(\tau_n)$ şeklinde tanımlanan $\tilde{\theta}_n$ 'nin θ için Kendall'ın to'suna dayalı bir tahmin edici olduğu söylenebilir.

Genest ve Rivest

$$\tilde{W}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I_{ji} = \frac{1}{n} \# \{j : X_i \leq X_j, Y_i \leq Y_j\}$$

ve

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (W_i + \tilde{W}_i - 2\bar{W})^2$$

olmak üzere $\sqrt{n} \frac{\tau_n - \tau}{4S} \approx N(0,1)$ olduğunu göstermiştir [13].

Delta Metodu uygulandığında, $n \rightarrow \infty$ ise, $\tilde{\theta}_n \approx N(\theta, \frac{1}{n} \{4S \cdot g'(\tau_n)\}^2)$ olur.

Böylece, θ için $1 - \alpha$ güven katsayılı güven aralığı aşağıdaki şekli alır:

$$\tilde{\theta}_n \pm z_{\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n}} 4S_n |g'(\tau_n)|$$

Ayrıca Arşimedyen kapula aileleri için,

$$\tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt$$

eşitliğinin var olduğu Genest ve Mackay tarafından gösterilmiştir [14].

Not: Bazı Arşimedyen kapulalar için Kendall'ın τ 'sünü belirten gösterimler Çizelge 5.2.'de görülebilir.

5.3.2. Spearman'ın ρ 'suna dayanan yöntem

Bu yöntemi yine, $C_\theta(u, v) = uv + \theta uv(1-u)(1-v)$, $u, v \in [0, 1]$, $\theta \in [-1, 1]$ şeklinde tanımlanan Farlie-Gumbel-Morgenstern kapula ailesini seçerek örneklendirelim. Bu aile için Spearman'ın ρ 'sunun teorik değeri $\rho = \theta/3$ olarak bulunmuştur. Bu aile için θ gerçek bir sayıdır ve amacımız θ 'yı tahmin etmek olduğundan yukarıdaki eşitlikten $\tilde{\theta}_n = 3\rho_n$ sonucuna ulaşırız. Öte yandan ρ_n sıra sayılarına dayanan bir istatistik olduğundan, kullanacağımız yöntemin parametrik olmayan bir yöntem olduğu söylenebilir.

Genel olarak, $\theta = h(\rho)$ şeklinde bir fonksiyona sahipse, $\tilde{\theta}_n = g(\rho_n)$ şeklinde tanımlanan $\tilde{\theta}_n$ 'nin θ 'nın Spearman'ın ρ 'suna dayalı bir tahmin edici olduğu söylenebilir.

Gaenssler ve Stute, 1987’de $\rho_n \approx N(\rho, \frac{\sigma^2}{n})$ sonucuna varmışlardır [6]. Buradaki asimptotik varyans σ^2 ’nin ilgili C kapulasına bağlı olduğunu 2002’de Borkowf ayrıntılı olarak göstermiştir.

Kendall’in to’suna dayalı yöntemde olduğu gibi Delta Metodu uygulandığında,

$$\tilde{\theta}_n \approx N(\theta, \frac{1}{n} \{\sigma_n \cdot h'(\rho_n)\}^2)$$

olur; burada σ_n^2 , σ^2 için uygun olan bir tahmin edicidir. Böylece, θ için $1 - \alpha$ katsayılı güven aralığı,

$$\tilde{\theta}_n \pm z_{\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n}} \sigma_n |h'(\rho_n)|$$

olur.

Borkowf temelde yatan C kapulasının yerine C_n uygulanırsa, σ^2 için tutarlı bir tahmin edici olan σ_n^2 ’nin,

$$\sigma_n^2 = 144(-9A_n^2 + B_n + 2C_n + 2D_n + 2E_n)$$

şekilinde olduğu göstermiştir.

Burada,

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{n+1} \frac{S_i}{n+1}$$

$$B_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{R_i}{n+1} \right)^2 \left(\frac{S_i}{n+1} \right)^2$$

$$C_n = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{R_i}{n+1} \frac{S_i}{n+1} \cdot I(R_k \leq R_i, S_k \leq S_i) + \frac{1}{4} - A_n$$

$$D_n = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{S_i}{n+1} \frac{S_j}{n+1} \max \left(\frac{R_i}{n+1} \frac{R_j}{n+1} \right)$$

$$E_n = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{R_i}{n+1} \frac{R_j}{n+1} \max \left(\frac{S_i}{n+1} \frac{S_j}{n+1} \right)$$

olarak tanımlanmıştır [6].

Çizelge 5.2. Bazı kapula ailelerine ilişkin parametre aralıkları ve ilişki katsayıları [5]

Aileler	Parametre Aralığı	Kendall'in To'su	Spearman'in Ro'su
Ali-Mikhail- Haq	$-1 \leq \theta \leq 1$	$\left(\frac{3\theta - 2}{\theta} \right) - \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{\theta} \right)^2 \ln(1 - \theta)$	-
Clayton	$\theta \geq 0$	$\frac{\theta}{\theta + 2}$	-
Farlie- Gumbel- Morgenstern	$-1 \leq \theta \leq 1$	$\frac{2}{9} \theta$	$\frac{1}{3} \theta$
Frank	$\theta \neq 0$	$1 - \frac{4}{\theta} [D_1(-\theta) - 1]$	$1 - \frac{12}{\theta} [D_2(-\theta) - D_1(-\theta)]$
Gumbel- Hougaard	$\theta \geq 1$	$1 - \theta^{-1}$	-
Normal (Gaussian)	$-1 \leq \theta \leq 1$	$\frac{2}{\pi} \arcsin(\theta)$	$\frac{6}{\pi} \arcsin\left(\frac{\theta}{2}\right)$
Plackett	$\theta \geq 0$	-	$\frac{(\theta + 1)}{(\theta - 1)} - \frac{2\theta \ln \theta}{(\theta - 1)^2}$

Not: Bu çizelgedeki D_1 ve D_2 'ler Debye fonksiyonu olarak adlandırılır ve aşağıdaki eşitlikle ifade edilir:

$$D_k(-x) = D_k(x) + \frac{kx}{k+1}$$

$$D_k(x) = \frac{k}{x_0} \int_0^x \frac{t^k}{e^t - 1} dt$$

eşitliği kullanılır.

5.4. Diğer Yöntemler

Kapula tahmin yöntemleri uygulamalarda karşılaşılan varsayım ve yeni tahmin yöntemlerine bağlı olarak gün geçtikçe çeşitlenmektedir. Ortaya çıkan yeni tahmin yöntemleri varsayımları uygun düştüğünde çoğunlukla birbiriyle karşılaştırılmakta veya karşılaştırılmayı beklemektedir. Tsukahara kendi geliştirdiği “minimum uzaklık” ve “denklem tahmin etme yaklaşımı”na dayalı iki yeni tahmin ediciyi EÇSO tahmin edicisiyle karşılaştırmak amacıyla yaptığı simülasyon çalışmasında EÇSO tahmin edicisinin daha küçük ortalama hata kareye sahip olduğunu gözlemiştir [15]. Joe IFM tekniğinin asimptotik etkinliğini farklı durumlarda ölçmeye çalışmıştır [16]. Joe ve IFM tekniği üzerinde çalışanlar bu tekniğin seçilen uygun olmayan marjinal dağılımlardan önemli derecede olumsuz yönde etkilendiğini belirtmektedirler [6].

5.5. Uyum İyiliği Testi

Uyum iyiliği testi için kullanacağımız yöntem, gözlenen frekanslar ile teorik frekanslar arasındaki farklara dayanan ve $sd = (I - 1)(J - 1) - p - (q - 1)$ serbestlik derecesi ile Ki-Kare testine dayanır. Buradaki p tahmin edilen parametre sayısını, q birleştirilen hücre sayısını, I satır sayısını ve J ise sütun sayısını gösterir. Bu yolla, eldeki veri kümesinin hangi kapula ailesine uygun olduğu saptanabilir [13].

6. UYGULAMALAR

6.1. Bazı Tanımlar

Bu kesimde uygulamada geçen bazı kavramlar kısaca tanıtılmıştır.

Bu amaçla İstanbul Menkul Kıymetler Borsası ile ilgili bilgiler için İMKB'nin internet sayfasından, BOVESPA ile ilgili bilgiler için ilgili borsanın internet adresinden yararlanılmıştır.

6.1.1. İstanbul Menkul Kıymetler Borsası (İMKB)

İstanbul Menkul Kıymetler Borsası (İMKB), hisse senedi, hazine bonoları ve devlet tahvilleri, gelir ortaklığı sertifikaları, özel sektör tahvilleri, yabancı menkul kıymetler, gayrimenkul sertifikaları ve uluslararası menkul kıymet alım satımının yapılmasını sağlamak amacıyla 26 Aralık 1985 günü kurulmuş olup, 3 Ocak 1986 günü faaliyete başlamıştır. Türkiye'deki tek menkul kıymetler borsasıdır.

Sermaye Piyasası Kurulu (SPK), Türk sermaye piyasalarında düzenleme ve denetleme yetkileri ile donatılmış bir kurum olarak, yatırımcıların, kamunun ve bunların yatırımlarının korunmasını sağlamak amacıyla İMKB'yi ve İMKB üyelerini denetlemekle görevlidir.

6.1.2. İMKB Ulusal-100 Endeksi

İMKB Hisse Senetleri Piyasası Endeksleri, borsada işlem gören hisse senetlerinin fiyat ve getirilerinin bütünsel ve sektörel bazda performanslarının ölçülmesi amacıyla oluşturulmuştur. İMKB fiyat endeksleri tüm seans süresince, getiri endeksleri ise sadece seans sonunda hesaplanmakta ve yayımlanmakta olup, İMKB Ulusal-100 Endeksi ulusal pazar için temel endeks olarak kullanılmaktadır.

İMKB Ulusal-100 Endeksi, ulusal pazarda işlem gören menkul kıymet yatırım ortaklıkları hariç, bir takım kriter ve belirli şartlarla seçilmiş 100 şirketin hisse senetlerinden oluşmakta olup, İMKB Ulusal-30 ve İMKB Ulusal-50 hisse senetlerini otomatik olarak kapsamaktadır. İMKB Ulusal-100 Endeksinin başlangıç değeri Ocak 1986=1'dir.

6.1.3. São Paulo Borsası (BOVESPA)

São Paulo Borsası (BOVESPA), 23 Ağustos 1890 yılında kurulmuştur. Brezilya ekonomisine ve ulusal pazarına hizmeti uzun yıllara dayanan köklü bir kurumdur. 1990-2000 yılları arasında teknolojik devrim niteliğinde süreçlerden geçen BOVESPA Latin Amerika'nın ana borsası haline gelmiş olup, halen Brezilya'nın São Paulo kentinde faaliyete devam etmektedir.

6.1.4. BOVESPA Endeksi (IBOVESPA)

BOVESPA Endeksi, içeriğinde bulunan hisselerin getirisini hesaplamakta ve fiyat çeşitliliğini göstermektedir. Başlangıç tarihi 02 Ocak 1968=100 olan BOVESPA Endeksi, Brezilya ulusal pazarının ortalama performansının ölçülmesinde kullanılan temel göstergedir.

6.1.5. Endeks hesaplanması

Genel olarak Endeksin t zamanındaki değerini hesaplamak için aşağıdaki genel yapı kullanılır.

$$E_t = \sum_{i=1}^N P_{it} \cdot Q_{it} \quad \text{Burada,}$$

E_t : t zamanındaki endeks

N : endeksin içerdiği hisse sayısı

P_{it} : i' inci hissenin t zamanındaki fiyatı

Q_{it} : i' inci hissenin t zamanındaki toplam sayısı (ödenmiş veya çıkarılmış sermayesi)

6.2. İMKB-BOVESPA Bağımlılık Yapısının Araştırılması

Gelişmekte olan piyasalar olarak kabul edilen Türkiye ve Brezilya ulusal pazarlarının performansları arasında ne tür bir ilişki olduğunu araştıracağız. Bu bağımlılık yapısını uygun kapula ailesini bularak ve daha çok parametrik olmayan yöntemler kullanarak tahmin edeceğiz.

6.2.1. Veri kümesi

Elimizdeki ham veri, 03.01.2005 tarihinden, 25.08.2006 tarihine kadar olan zaman aralığında, İMKB ve BOVESPA'nın her ikisinin de işlem gördüğü günler seçilerek oluşturulan, 402 birimlik İMKB Ulusal-100 Endeksi, IBOVESPA ve T.C. Merkez Bankası Dolar Alış Fiyatlarını içermektedir.

Çalışmamızda kullanacağımız veri ise Dolar bazlı İMKB Ulusal-100 Endeksi ve Dolar bazlı IBOVESPA'nın günlük % değişimlerinden oluşan 401 birimlik veridir. Dolar bazlı endeksler, her iki borsanın endekslerinin T.C. Merkez Bankası Dolar Alış Fiyatına bölünmesiyle reel hale getirilmiş endekslerdir.

Çizelge 6.1. çalışmamızdaki iki değişkenin gözlenen frekanslarının 5×5 'lik çapraz çizelgesini göstermektedir. İki değişken için hücre sınırları $j = 1, 2, \dots, 5$ için yaklaşık olarak $[401 \times j / 5]$ sıra sayısına sahip istatistiklerine karşı gelen değerler olarak alınmıştır.

Çizelge 6.1. Dolar bazlı İMKB Ulusal-100 Endeksi ve Dolar bazlı IBOVESPA günlük yüzde değişimine ilişkin değişkenlere ait gözlenen frekanslar

Değişkenler	$Y_{(80)}$	$Y_{(160)}$	$Y_{(240)}$	$Y_{(320)}$	$Y_{(401)}$	Toplam
$X_{(80)}$	34	17	13	10	6	80
$X_{(160)}$	21	19	14	15	11	80
$X_{(240)}$	10	18	18	18	16	80
$X_{(320)}$	8	18	16	16	22	80
$X_{(401)}$	7	8	19	21	26	81
Toplam	80	80	80	80	81	401

Not: Burada X, Dolar bazlı İMKB Ulusal-100 Endeksinin günlük yüzde değişimine ve Y ise Dolar bazlı IBOVESPA'nın yüzde değişimine ilişkin değişkenleri simgelemektedir.

Elimizdeki veri kümesine ait Spearman'ın ro'su 0,393869 olarak, Kendall'in to'su da 0,27025 olarak tahmin edilmiştir. Bundan sonraki çalışmamız, bu bağımlılık yapısını Spearman'ın ro'su ve Kendall'in to'suna dayanan yöntemler ile en iyi tahmin edecek kapula ailesini bulmak ve bu kapulanın parametresini tahmin etmek olacaktır. Bunu gerçekleştirmek için çeşitli kapula ailelerini ele alacak ve bizim verilerimize en uygun düşen aileyi bulmaya çalışacağız.

6.2.2. Kendall'in to'su ve Ali-Mikhail-Haq kapula ailesinin tahmini

Kendall'in to'su ve Ali-Mikhail-Haq kapula ailesi arasında aşağıda belirtilen bağıntıyı Çizelge 5.2.'de daha önce vermiştik.

$$\tau = \left(\frac{3\theta - 2}{\theta} \right) - \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{\theta} \right)^2 \ln(1 - \theta)$$

Bu denklemden Kendall'in to'sunu 0,27025 olarak verecek Ali-Mikhail-Haq kapula ailesinin parametresinin tahmini $\hat{\theta} = 0,69356$ olarak elde edilir.

Çizelge 6.2. $\hat{\theta}=0,69356$ için Ali-Mikhail-Haq kapula ailesine ilişkin beklenen frekanslar.

Değişkenler	$Y_{(80)}$	$Y_{(160)}$	$Y_{(240)}$	$Y_{(320)}$	$Y_{(401)}$	Toplam
$X_{(80)}$	29	19	14	10	8	80
$X_{(160)}$	19	19	15	15	12	80
$X_{(240)}$	14	15	18	17	16	80
$X_{(320)}$	10	15	17	18	20	80
$X_{(401)}$	8	12	16	20	25	81
Toplam	80	80	80	80	81	401

Çizelge 6.1.’deki Dolar bazlı İMKB Ulusal-100 Endeksi ve Dolar bazlı IBOVESPA günlük yüzde değişimine ilişkin değişkenlere ait gözlenen frekanslar ile Çizelge 6.2.’deki $\hat{\theta}=0,69356$ için Ali-Mikhail-Haq kapula ailesine ilişkin beklenen frekanslara göre ki-kare değeri 7,389 bulunmuştur. Böylece; 16 serbestlik derecesinde 0,05 anlamlılık düzeyinde ki-kare çizelge değeri 26,296 olduğundan, veri kümesinin Ali-Mikhail-Haq kapula ailesine uyduğunu söyleyen H_0 hipotezi istatistiksel olarak reddedilemez.

6.2.3. Kendall’ın to’su ve Gumbel-Hougaard kapula ailesinin tahmini

Kendall’ın to’su ve Gumbel-Hougaard kapula ailesi arasında aşağıda belirtilen bağıntıyı Çizelge 5.2.’de daha önce vermiştik.

$$\tau = 1 - \theta^{-1}$$

Bu denklemden Kendall’ın to’sunu 0,27025 olarak verecek Gumbel-Hougaard kapula ailesinin parametresinin tahmini $\hat{\theta} = 1,370332$ olarak bulunur.

Çizelge 6.3. $\hat{\theta}=1,370332$ için Gumbel-Hougaard kapula ailesine ilişkin beklenen frekanslar.

Değişkenler	$Y_{(80)}$	$Y_{(160)}$	$Y_{(240)}$	$Y_{(320)}$	$Y_{(401)}$	Toplam
$X_{(80)}$	28	20	15	11	6	80
$X_{(160)}$	20	20	18	14	8	80
$X_{(240)}$	15	18	18	17	12	80
$X_{(320)}$	11	14	17	21	17	80
$X_{(401)}$	6	8	12	17	38	81
Toplam	80	80	80	80	81	401

Çizelge 6.1.’deki Dolar bazlı İMKB Ulusal-100 Endeksi ve Dolar bazlı IBOVESPA günlük yüzde değişimine ilişkin değişkenlere ait gözlenen frekanslar ile Çizelge 6.3.’deki $\hat{\theta}=1,370332$ için Gumbel-Hougaard kapula ailesine ilişkin beklenen frekanslara göre ki-kare değeri 20,99 bulunmuştur. Böylece, 16 serbestlik derecesinde 0,05 anlamlılık düzeyinde ki-kare çizelge değeri 26,296 olduğundan, veri kümesinin Gumbel-Hougaard kapula ailesine uyduğunu söyleyen H_0 hipotezi istatistiksel olarak reddedilemez.

6.2.4. Kendall’in to’su ve Clayton kapula ailesinin tahmini

Kendall’in to’su ve Clayton kapula ailesi arasında aşağıda belirtilen bağıntıyı Çizelge 5.2.’de daha önce vermiştik.

$$\tau = \frac{\theta}{\theta + 2}$$

Bu denklemden Kendall’in to’sunu 0,27025 olarak verecek Clayton kapula ailesinin parametresinin tahmini $\hat{\theta} = 0,740665$ olarak elde edilir.

Çizelge 6.4. $\hat{\theta}=0,740665$ için Clayton kapula ailesine ilişkin beklenen frekanslar

Değişkenler	$Y_{(80)}$	$Y_{(160)}$	$Y_{(240)}$	$Y_{(320)}$	$Y_{(401)}$	Toplam
$X_{(80)}$	39	18	10	8	5	80
$X_{(160)}$	18	18	18	14	12	80
$X_{(240)}$	10	18	17	18	17	80
$X_{(320)}$	8	14	18	19	21	80
$X_{(401)}$	5	12	17	21	26	81
Toplam	80	80	80	80	81	401

Çizelge 6.1.’deki Dolar bazlı İMKB Ulusal-100 Endeksi ve Dolar bazlı IBOVESPA günlük yüzde değişimine ilişkin değişkenlere ait gözlenen frekanslar ile Çizelge 6.4.’deki $\hat{\theta}=0,740665$ için Clayton kapula ailesine ilişkin beklenen frekanslara göre ki-kare değeri 8,26 olarak bulunmuştur. Böylece, 16 serbestlik derecesinde 0,05 anlamlılık düzeyinde ki-kare çizelge değeri 26,296 olduğundan, veri kümesinin Clayton kapula ailesine uyduğunu söyleyen H_0 hipotezi istatistiksel olarak reddedilemez.

6.2.5. Spearman’ın ρ ’su ve Plackett kapula ailesinin tahmini

Spearman’ın ρ ’su ve Plackett kapula ailesi arasında aşağıda belirtilen bağıntıyı Çizelge 5.2.’de daha önce vermiştik.

$$\rho = \frac{(\theta + 1)}{(\theta - 1)} - \frac{2\theta \ln \theta}{(\theta - 1)^2}$$

Bu denklemden Spearman’ın ρ ’sunu 0,393869 olarak verecek Plackett kapula ailesinin parametresinin tahmini $\hat{\theta} = 3,4631$ olarak bulunur.

Çizelge 6.5. $\hat{\theta}=3,4631$ için Plackett kapula ailesine ilişkin beklenen frekanslar.

Değişkenler	$Y_{(80)}$	$Y_{(160)}$	$Y_{(240)}$	$Y_{(320)}$	$Y_{(401)}$	Toplam
$X_{(80)}$	31	20	14	9	6	80
$X_{(160)}$	20	21	17	13	9	80
$X_{(240)}$	14	17	19	17	13	80
$X_{(320)}$	9	13	17	21	20	80
$X_{(401)}$	6	9	13	20	33	81
Toplam	80	80	80	80	81	401

Çizelge 6.1.’deki Dolar bazlı İMKB Ulusal-100 Endeksi ve Dolar bazlı IBOVESPA günlük yüzde değişimine ilişkin değişkenlere ait gözlenen frekanslar ile Çizelge 6.5.’deki $\hat{\theta}=3,4631$ için Plackett kapula ailesine ilişkin beklenen frekanslara göre ki-kare değeri 12,51 olarak bulunmuştur. Böylece, 16 serbestlik derecesinde 0,05 anlamlılık düzeyinde ki-kare çizelge değeri 26,296 olduğundan, veri kümesinin Plackett kapula ailesine uyduğunu söyleyen H_0 hipotezi istatistiksel olarak reddedilemez.

6.2.6. Kendall’in To’su ve Frank kapula ailesinin tahmini

Kendall’in to’su ve Frank kapula ailesi arasında aşağıda belirtilen bağıntıyı Çizelge 5.2.’de daha önce vermiştik.

$$\tau = 1 - \frac{4}{\theta} [D_1(-\theta) - 1]$$

Burada D_1 , Debye fonksiyonu olarak adlandırılır ve aşağıdaki eşitlikle ifade edilir:

$$D_1(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{t^1}{e^t - 1} dt$$

ve

$$D_1(-x) = D_1(x) + \frac{x}{2}$$

eşitliği kullanılır.

Frank kapula ailesinin parametre tahmininin yapılırken Debye fonksiyonundaki integralin hesaplanmasında, [a,b] integral aralığının m tane alt aralığa bölünmesine

dayanan $\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^m f(x^k)\Delta x$ Riemann toplamı yöntemi kullanılmıştır.

[0,1] aralığının 10 adet alt aralığa bölünmesiyle, bize Kendall'ın to'sunu 0,27025 olarak verecek Frank kapula ailesinin parametresinin tahmini $\hat{\theta} = 2,53127$ olarak bulunmuştur.

Çizelge 6.6. $\hat{\theta} = 2,53127$ için Frank kapula ailesine ilişkin beklenen frekanslar.

Değişkenler	$Y_{(80)}$	$Y_{(160)}$	$Y_{(240)}$	$Y_{(320)}$	$Y_{(401)}$	Toplam
$X_{(80)}$	30	21	14	9	6	80
$X_{(160)}$	21	20	17	13	9	80
$X_{(240)}$	14	17	18	17	14	80
$X_{(320)}$	9	13	17	20	21	80
$X_{(401)}$	6	9	14	21	31	81
Toplam	80	80	80	80	81	401

Çizelge 6.1.'deki Dolar bazlı İMKB Ulusal-100 Endeksi ve Dolar bazlı IBOVESPA günlük yüzde değişimine ilişkin değişkenlere ait gözlenen frekanslar ile Çizelge 6.6.'deki $\hat{\theta} = 2,53127$ için Frank kapula ailesine ilişkin beklenen frekanslara göre ki-kare değeri 10,16 olarak elde edilmiştir. Böylece, 16 serbestlik derecesinde 0,05 anlamlılık düzeyinde ki-kare çizelge değeri 26,296 olduğundan, veri kümesinin Frank kapula ailesine uyduğunu söyleyen H_0 hipotezi istatistiksel olarak reddedilemez.

Buraya kadar tahmin ettiğimiz 5 farklı kapula ailesinin veri kümемizin bağımlılık yapısına uyduğu reddedilememiştir, Fakat bu 5 farklı kapula ailesinden bize en küçük ki-kare değeri 7,389'u veren aile, $\hat{\theta}=0,69356$ için Ali-Mikhail-Haq kapula ailesidir. Böylece, istatistiksel olarak bu ailenin veri kümемize diğer ailelerden daha iyi uyduğu söylenebilir.

6.3. EÇSO Yöntemi ve Parametrik Olmayan Yöntemlerin Bir Simülasyon Denemesi ile Karşılaştırılması

Bölüm 2.5'te Kapulaların temel uygulamalarından biri Simülasyon ve Monte Carlo çalışmaları olduğundan ve bir istatistiksel metodu rakipleriyle karşılaştırmada kullanılabileceğinden söz etmiştik. Bu kesimde yarı parametrik bir tahmin yöntemi olan en çok sözde olabilirlik ile Kendall'ın τ 'suna dayanan ve Spearman'ın ρ 'suna dayanan parametrik olmayan tahmin yöntemlerini bir Simülasyon denemesi ile karşılaştırmaya çalışacağız. Simülasyon çalışmalarının yapısı gereği iki yöntemin karşılaştırılması için Simülasyon denemelerinin defalarca tekrarlanması ve daha sonra elde edilen sonuçların karşılaştırılması gerekmektedir. Bu nedenle burada verilen karşılaştırma ele alınan iki yöntemi tam bir karşılaştırmaktan daha çok, karşılaştırma için bir örneklendirme olarak görülmelidir.

Bu amaçla, parametresi $\theta = 0,60$ olan Farlie-Gumbel-Morgenstern kapula ailesinden 5000 adet (u,v) gözlem çifti, Bölüm 2.5'te bahsedilen koşullu dağılım yöntemi ile üretilmiştir. Üretilen değişkenlere ilişkin Spearman'ın ρ 'su, $\rho=0,19679$ olarak ve Kendall'ın τ 'su, $\tau=0,13$ olarak hesaplanmıştır. Çizelge 6.7 bu değişkenlerin gözlenen frekanslarının 8×8 'lik çapraz çizelgesini göstermektedir. İki değişken için hücre sınırları $j = 1,2,...,8$ için $[5000 \times j / 8]$ sayı sıralı istatistiklerine karşı gelen değerler olarak alınmıştır

Çizelge 6.7. Koşullu dağılım yöntemi ile $\theta = 0,60$ parametrelili Farlie-Gumbel-Morgenstern ailesinden üretilen 5000 adet (u,v) rastgele çifte ait gözlenen frekanslar.

Değişkenler	$Y_{(625)}$	$Y_{(1250)}$	$Y_{(1875)}$	$Y_{(2500)}$	$Y_{(3125)}$	$Y_{(3750)}$	$Y_{(4375)}$	$Y_{(5000)}$	Toplam
$X_{(625)}$	103	100	96	95	78	65	58	30	625
$X_{(1250)}$	107	88	88	69	75	71	71	56	625
$X_{(1875)}$	95	99	79	76	77	61	72	66	625
$X_{(2500)}$	103	92	71	73	85	71	67	63	625
$X_{(3125)}$	65	87	80	77	77	77	76	86	625
$X_{(3750)}$	62	55	69	80	79	92	96	92	625
$X_{(4375)}$	47	59	65	68	76	100	96	114	625
$X_{(5000)}$	43	45	77	87	78	88	89	118	625
Toplam	625	625	625	625	625	625	625	625	5000

6.3.1. Kendall'in to'su ve Farlie-Gumbel-Morgenstern ailesinin tahmini

Kendall'in to'su ve Farlie-Gumbel-Morgenstern kapula ailesi arasında aşağıda belirtilen bağıntıyı Çizelge 5.2.'te daha önce vermiştik.

$$\tau = 2\theta/9$$

Bu denklemde bize Kendall'in to'sunu 0,13 olarak verecek Farlie-Gumbel-Morgenstern kapula ailesinin parametresinin tahmini $\hat{\theta} = 0,585$ olarak hesaplanır.

Çizelge 6.8. $\hat{\theta}=0,585$ için Farlie-Gumbel-Morgenstern kapula ailesine ilişkin beklenen frekanslar.

Değişkenler	$Y_{(625)}$	$Y_{(1250)}$	$Y_{(1875)}$	$Y_{(2500)}$	$Y_{(3125)}$	$Y_{(3750)}$	$Y_{(4375)}$	$Y_{(5000)}$	Toplam
$X_{(625)}$	113,2	103,1	93,1	83,1	73,1	63,1	53,1	43,2	625
$X_{(1250)}$	103,1	96,0	88,8	81,7	74,6	67,4	60,3	53,1	625
$X_{(1875)}$	93,1	88,8	84,6	80,3	76,0	71,7	67,4	63,1	625
$X_{(2500)}$	83,1	81,7	80,3	78,8	77,4	76,0	74,6	73,1	625
$X_{(3125)}$	73,1	74,6	76,0	77,4	78,8	80,3	81,7	83,1	625
$X_{(3750)}$	63,1	67,4	71,7	76,0	80,3	84,6	88,8	93,1	625
$X_{(4375)}$	53,1	60,3	67,4	74,6	81,7	88,8	96,0	103,1	625
$X_{(5000)}$	43,2	53,1	63,1	73,1	83,1	93,1	103,1	113,2	625
Toplam	625	625	625	625	625	625	625	625	5000

Çizelge 6.7.'deki koşullu dağılım yöntemi ile parametresi $\theta = 0,60$ olan Farlie-Gumbel-Morgenstern kapula ailesinden üretilen 5000 adet (u,v) değişkenlerine ait gözlenen frekanslar ile Çizelge 6.8.'deki $\hat{\theta}=0,585$ için Farlie-Gumbel-Morgenstern kapula ailesine ilişkin beklenen frekanslara göre ki-kare değeri 49,06 çıkmıştır. Böylece; 49 serbestlik derecesinde 0,05 anlamlılık düzeyinde Ki-Kare çizelge değeri 66,339 olduğundan, veri kümesinin Farlie-Gumbel-Morgenstern kapula ailesine uyduğunu söyleyen H_0 hipotezi istatistiksel olarak reddedilemez.

6.3.2. Spearman'ın ρ 'su ve Farlie-Gumbel-Morgenstern ailesinin tahmini

Spearman'ın ρ 'su ve Farlie-Gumbel-Morgenstern kapula ailesi arasında aşağıda belirtilen bağıntıyı Çizelge 5.3.'de daha önce vermiştik:

$$\rho = \theta/3$$

Bu denklemde bize Spearman'ın ρ 'sunu 0,19679 olarak verecek Farlie-Gumbel-Morgenstern kapula ailesinin parametresinin tahmini $\hat{\theta} = 0,59037$ olarak hesaplanır.

Çizelge 6.9. $\hat{\theta}=0,59037$ için Farlie-Gumbel-Morgenstern kapula ailesine ilişkin beklenen frekanslar.

Değişkenler	$Y_{(625)}$	$Y_{(1250)}$	$Y_{(1875)}$	$Y_{(2500)}$	$Y_{(3125)}$	$Y_{(3750)}$	$Y_{(4375)}$	$Y_{(5000)}$	Toplam
$X_{(625)}$	113,4	103,3	93,3	83,2	73,1	63,0	52,9	42,8	625
$X_{(1250)}$	103,4	96,1	88,9	81,7	74,5	67,3	60,1	53,0	625
$X_{(1875)}$	93,3	88,9	84,6	80,3	76,0	71,6	67,3	63,0	625
$X_{(2500)}$	83,2	81,7	80,3	78,8	77,4	76,0	74,5	73,1	625
$X_{(3125)}$	73,1	74,5	76,0	77,4	78,8	80,3	81,7	83,2	625
$X_{(3750)}$	63,0	67,3	71,6	76,0	80,3	84,6	88,9	93,3	625
$X_{(4375)}$	53,0	60,1	67,3	74,5	81,7	88,9	96,1	103,4	625
$X_{(5000)}$	42,8	52,9	63,0	73,1	83,2	93,3	103,3	113,4	625
Toplam	625	625	625	625	625	625	625	625	5000

Çizelge 6.7.'deki Koşullu dağılım yöntemi ile parametresi $\theta = 0,60$ olan Farlie-Gumbel-Morgenstern kapula ailesinden üretilen 5000 adet (u,v) değişkenlerine ait gözlenen frekanslar ile Çizelge 6.9.'deki $\hat{\theta}=0,59037$ için Farlie-Gumbel-Morgenstern kapula ailesine ilişkin beklenen frekanslara göre ki-kare değeri 48,95 çıkmıştır. Böylece; 49 serbestlik derecesinde 0,05 anlamlılık düzeyinde Ki-Kare çizelge değeri 66,339 olduğundan, veri kümesinin Farlie-Gumbel-Morgenstern kapula ailesine uyduğunu söyleyen H_0 hipotezi istatistiksel olarak reddedilemez.

6.3.3. EÇSO ile Farlie-Gumbel-Morgenstern ailesinin tahmini

Daha önce Örnek 5.1.'de Farlie-Gumbel-Morgenstern kapula ailesinin en çok sözde olabilirlik yöntemi ile tahmininden ayrıntılı olarak bahsetmiştik ve bu ailenin sözde skor fonksiyonun:

$$\dot{l}(\theta) = \sum_{i=1}^n \frac{(n+1-2R_i)(n+1-2S_i)}{(n+1)^2 + \theta(n+1-2R_i)(n+1-2S_i)}$$

olduğunu söylemiştik.

Sözde skor fonksiyonu; $\dot{l}(\theta)=0$ olarak verecek Farlie-Gumbel-Morgenstern kapula ailesinin parametresinin tahmini $\hat{\theta} = 0,6004563485$ olarak hesaplanır.

Çizelge 6.10. $\hat{\theta}=0,6004563485$ için Farlie-Gumbel-Morgenstern kapula ailesine ilişkin beklenen frekanslar.

Değişkenler	$Y_{(625)}$	$Y_{(1250)}$	$Y_{(1875)}$	$Y_{(2500)}$	$Y_{(3125)}$	$Y_{(3750)}$	$Y_{(4375)}$	$Y_{(5000)}$	Toplam
$X_{(625)}$	114,3	104,0	93,6	83,3	73,0	62,6	52,3	41,9	625
$X_{(1250)}$	104,0	96,5	89,2	81,8	74,4	67,1	59,7	52,2	625
$X_{(1875)}$	93,6	89,2	84,8	80,3	75,9	71,5	67,1	62,6	625
$X_{(2500)}$	83,3	81,8	80,3	78,9	77,4	75,9	74,4	73,0	625
$X_{(3125)}$	73,0	74,4	75,9	77,4	78,9	80,3	81,8	83,3	625
$X_{(3750)}$	62,6	67,1	71,5	75,9	80,3	84,8	89,2	93,6	625
$X_{(4375)}$	52,3	59,7	67,1	74,4	81,8	89,2	96,5	104,0	625
$X_{(5000)}$	41,9	52,2	62,6	73,0	83,3	93,6	104,0	114,3	625
Toplam	625	625	625	625	625	625	625	625	5000

Çizelge 6.7.'deki Koşullu dağılım yöntemi ile parametresi $\theta = 0,60$ olan Farlie-Gumbel-Morgenstern kapula ailesinden üretilen 5000 adet (u,v) değişkenlerine ait gözlenen frekanslar ile Çizelge 6.9.'deki $\hat{\theta}=0,6004563485$ için Farlie-Gumbel-Morgenstern kapula ailesine ilişkin beklenen frekanslara göre ki-kare değeri 48,82 çıkmıştır. Böylece; 49 serbestlik derecesinde 0,05 anlamlılık düzeyinde ki-kare çizelge değeri 66,339 olduğundan, veri kümesinin Farlie-Gumbel-Morgenstern kapula ailesine uyduğunu söyleyen H_0 hipotezi istatistiksel olarak reddedilemez.

Şu ana kadar kullandığımız üç tahmin yönteminde de beklenildiği gibi Farlie-Gumbel-Morgenstern kapula ailesinin veri kümemizin bağımlılık yapısına uyduğu reddedilememiştir ve kullandığımız yöntemlerin hepsi $\theta=0,60$ olarak ürettiğimiz verilerden θ tahminini bu değere çok yaklaşık olarak tahmin etmeyi başarmışlardır. Üç yöntemde de Ki-Kare değerleri birbirlerine çok yakın çıkmıştır. Hesaplanan

ki-kare değerleri karşılaştırıldığında bu yöntemler içinde herhangi birinin diğerlerine göre elle tutulur bir üstünlük sağladığı söylenemez. Burada, doğal olarak ekilenrnek çapı büyük olsa da, dahance de belirtildiği gibi, buradaki karşılaştırma birrneklendirme olarak anlaşılmalıdır.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, kapula tahmin yöntemleri üzerinde durulmuş ve birinde gerçek hayat verilerinin kullanıldığı, diğerinde ise Simülasyon yoluyla rastgele üretilen verilerin kullanıldığı iki ayrı uygulama yapılmıştır.

Gerçek hayat verilerinin kullanıldığı uygulamada, gelişmekte olan piyasalar olarak kabul edilen Türkiye ve Brezilya ulusal pazarlarının performansları arasında ne tür bir ilişki olduğunu araştırmak için 03.01.2005 tarihinden, 25.08.2006 tarihine kadar olan zaman aralığında her iki borsanın da açık olduğu günlere isabet eden, Dolar bazlı İMKB Ulusal-100 Endeksi ve Dolar bazlı IBOVESPA'nın günlük % değişimlerinden oluşan 401 birimlik veri kümesi kullanılmış ve “Kapula” kavramı ile modellenmesi üzerinde durulmuştur. Uygulanabilirliği diğer yöntemlere göre çok daha mümkün ve kolay olan parametrik olmayan kapula tahmin yöntemleri ile değişik kapula aileleri seçilerek tahminlerde bulunulmuş ve Ali-Mikhail-Haq kapula ailesinin $\hat{\theta}=0,69356$ için, istatistiksel olarak veri kümemize diğer ailelere göre daha iyi uyduğu görülmüştür.

Simülasyon yoluyla yapılan denemede, en çok sözde olabilirlik tahmin yöntemi ile Kendall'ın to'suna dayanan ve Spearman'ın ro'suna dayanan parametrik olmayan tahmin yöntemlerini karşılaştırma çalışmalarını örneklendirmek amaçlanmış ve koşullu dağılım yöntemi ile parametresi $\theta = 0,60$ olan Farlie-Gumbel-Morgenstern kapula ailesinden üretilen 5000 adet (u,v) rastgele veri çifti kullanılmıştır. Bu uygulamada, kullanılan üç tahmin yönteminin de beklendiği gibi Farlie-Gumbel-Morgenstern kapula ailesinin veri kümемizin bağımlılık yapısına uyduğunu reddedemediği ve her üç yöntemin de $\theta=0,60$ olarak ürettiğimiz verilerden θ tahminini bu değere çok yaklaşık olarak elde ettiği görülmüştür. Sonuç olarak, Ki-Kare değerleri birbirlerine çok yakın çıkmış ve bu deneme örneği için bu yöntemler içinde herhangi birinin diğerlerine göre elle tutulur bir üstünlük sağladığı istatistiksel olarak görülememiştir.

Daha önce gerçek hayat verilerinin kullanıldığı uygulamada, Türkiye ve Brezilya ulusal pazarlarının performansları arasında ne tür bir ilişki olduğunu araştırmak için “Kapula” kavramı ile modellenmesi üzerinde durduğumuzu söylemiştik. Fakat, bu tarz çalışmalarda zaman serilerine de yer verilebilir. Zaman serileriyle gerçekleştirilen çalışmalarda durağanlık ve mevsimsellik sorunları ele alınır, ayrıca döviz ve borsa gibi piyasa verilerinin hafta sonları işlem görmemelerinden kaynaklanan etkiler tartışılabilir. Bu sebeple, böyle çalışmalarda zaman serileri analizine de yer vermek, daha gerçekçi sonuçlar elde etmek açısından faydalı olabilir.

KAYNAKLAR

1. Nelsen, R.B., “An Introduction to Copulas”, *Springer Verlag*, New York, 5-43,89-121, 125-179 (1999).
2. Karaca, M., “Bankacılıkta havale, menkul ve risk işlemlerinin bağımlılık yapısı”, Yüksek Lisans Tezi, *Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara, 21-32 (2002).
3. Joe, H., “Multivariate Models and Dependence Concepts”, *Chapman and Hall*, London, 12-35, 297-322 (1997).
4. Çelebioğlu, S., “Arşimedyen kapulalar ve bir uygulama”, *Selçuk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi*, 22:43-52 (2003).
5. Frees, E. W. And Valdez, E. A., “Understanding relationships using copulas”, *North American Actuarial Journal*, 2 (1):1-25 (1998).
6. Genest, C., And Favre, A.C., “Everything you always wanted to know about copulas but were afraid to ask”, *Journal of Hydrologic Engineering*, 12: inpress (2007).
7. Schweizer, B. And Wolff, E. F., “On nonparametric measures of dependence for random variables”, *The Annals of Statistics*, 9(4):879-885 (1981).
8. Açmaz, Ö. A., “Çapraz döviz kurlarının bağımlılık yapısının kapulalarla incelenmesi”, Yüksek Lisans Tezi, *Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara, 10-11 (2005).
9. Cherubini, U., Luciano, E. And Vecchiado, W., “Copula Methods In Finance”, *John Wiley&Sons*, England, 154-160 (2004).
10. Oakes, D., “Multivariate survival distributions”, *Journal of Nonparametric Statistics*, 3 (3-4):343-354 (1994).
11. Genest, C., Ghoudi, K. And Rivest, L. P., “A semiparametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distribution”, *Biometrika*, 40:543-552 (1995).
12. Shih, J. H. And Louis, T. A., “Inferences on the association parameter in copula models for bivariate survival data”, *Biometrics*, 51:1384-1399 (1995).
13. Genest, C. And Rivest, L. P., “Statistical inference procedures for bivariate Archimedean copulas”, *JASA*, 88:1034 – 1043 (1993).

14. Genest, C. And MacKay, R. J., “Copules archimédiennes et familles de lois bidimensionnelles dont les marges sont données”, *Canadian Journal of Statistics*, 14:145-159 (1986).
15. Tsukahara, H., “Semiparametric estimation in copula models”, *Canadian Journal of Statistics*, 33:357-375 (2005).
16. Joe, H., “Asymptotic efficiency of the two-stage estimation method for copula-based models”, *Journal of Multivariate Analysis*, 94:401-419 (2005).

EKLER

EK-1 İMKB Ulusal-100, IBOVESPA, Dolar

TARİH	DOLAR	İMKB	BOVESPA	İMKB / DOLAR	BOVESPA / DOLAR	İMKB / DOLAR GÜNLÜK DEĞİŞİM %	BOVESPA / DOLAR GÜNLÜK DEĞİŞİM %
03.01.2005	1,34	25445,15	25722	19041,50	19248,67	-----	-----
04.01.2005	1,34	25042,00	24848	18711,80	18566,84	-1,73	-3,54
05.01.2005	1,34	24422,94	24691	18189,42	18389,07	-2,79	-0,96
06.01.2005	1,38	24561,85	24366	17830,74	17688,57	-1,97	-3,81
07.01.2005	1,40	25308,25	24747	18077,32	17676,43	1,38	-0,07
10.01.2005	1,37	25604,65	24291	18658,20	17700,94	3,21	0,14
11.01.2005	1,38	26110,17	24369	18890,30	17630,59	1,24	-0,40
12.01.2005	1,37	26271,34	24509	19124,51	17841,60	1,24	1,20
13.01.2005	1,37	26493,02	24805	19292,91	18063,65	0,88	1,24
14.01.2005	1,35	26362,68	24924	19527,91	18462,22	1,22	2,21
17.01.2005	1,35	26863,20	24515	19904,56	18164,64	1,93	-1,61
18.01.2005	1,33	26813,13	24089	20134,51	18088,91	1,16	-0,42
19.01.2005	1,34	26918,10	24271	20142,25	18161,48	0,04	0,40
24.01.2005	1,34	26469,43	24197	19806,52	18106,11	-1,67	-0,30
25.01.2005	1,33	26859,99	24197	20133,42	18137,32	1,65	0,17
26.01.2005	1,33	27056,02	24530	20388,86	18485,31	1,27	1,92
27.01.2005	1,33	27302,74	24029	20579,44	18111,86	0,93	-2,02
28.01.2005	1,33	27074,09	23968	20295,42	17967,02	-1,38	-0,80
31.01.2005	1,33	27330,35	24350	20569,24	18326,18	1,35	2,00
01.02.2005	1,33	27849,79	24149	20947,57	18163,97	1,84	-0,89
02.02.2005	1,33	27936,53	24605	21080,99	18567,01	0,64	2,22
03.02.2005	1,32	27554,79	24873	20870,10	18838,90	-1,00	1,46
04.02.2005	1,32	27813,16	25731	21124,99	19543,52	1,22	3,74
09.02.2005	1,32	27528,07	26313	20807,31	19888,89	-1,50	1,77
10.02.2005	1,32	27308,78	26415	20657,17	19981,09	-0,72	0,46
11.02.2005	1,33	27736,29	26670	20812,10	20012,01	0,75	0,15
14.02.2005	1,32	28003,60	26531	21271,25	20152,68	2,21	0,70
15.02.2005	1,31	28164,08	26610	21517,37	20330,05	1,16	0,88
16.02.2005	1,31	27661,58	26384	21194,99	20216,08	-1,50	-0,56
17.02.2005	1,31	27000,44	27090	20669,40	20737,96	-2,48	2,58

EK-1 (Devam) İMKB Ulusal-100, IBOVESPA, Dolar

TARİH	DOLAR	İMKB	BOVESPA	İMKB / DOLAR	BOVESPA / DOLAR	İMKB / DOLAR GÜNLÜK DEĞİŞİM %	BOVESPA / DOLAR GÜNLÜK DEĞİŞİM %
18.02.2005	1,31	27293,22	26756	20914,34	20502,68	1,19	-1,13
21.02.2005	1,30	26864,27	26853	20664,82	20656,15	-1,19	0,75
22.02.2005	1,30	26657,40	26740	20480,49	20543,95	-0,89	-0,54
23.02.2005	1,29	26921,27	27198	20825,61	21039,68	1,69	2,41
24.02.2005	1,30	27354,57	28436	21074,40	21907,55	1,19	4,12
25.02.2005	1,29	28031,45	28425	21721,39	22026,35	3,07	0,54
28.02.2005	1,29	28396,17	28139	22038,16	21838,57	1,46	-0,85
01.03.2005	1,28	27768,46	28139	21719,56	22009,39	-1,45	0,78
02.03.2005	1,28	27226,38	28199	21323,92	22085,68	-1,82	0,35
03.03.2005	1,28	27558,88	28668	21577,58	22445,98	1,19	1,63
04.03.2005	1,27	27663,22	29197	21764,93	22971,68	0,87	2,34
07.03.2005	1,27	27789,92	29455	21883,55	23194,74	0,55	0,97
08.03.2005	1,25	27698,34	29021	22086,23	23140,90	0,93	-0,23
09.03.2005	1,26	27746,37	28514	22047,18	22657,13	-0,18	-2,09
10.03.2005	1,26	27519,81	28567	21858,47	22690,23	-0,86	0,15
11.03.2005	1,27	27572,79	28074	21630,81	22024,01	-1,04	-2,94
14.03.2005	1,26	26936,75	28098	21395,35	22317,71	-1,09	1,33
15.03.2005	1,28	26547,17	27587	20804,99	21619,91	-2,76	-3,13
16.03.2005	1,29	25331,70	27826	19684,28	21622,50	-5,39	0,01
17.03.2005	1,32	24475,97	28085	18508,75	21237,90	-5,97	-1,78
18.03.2005	1,32	25348,51	27593	19241,32	20945,04	3,96	-1,38
21.03.2005	1,31	24636,68	27411	18805,19	20922,83	-2,27	-0,11
22.03.2005	1,33	25218,21	26618	18965,34	20018,05	0,85	-4,32
23.03.2005	1,33	24439,26	26248	18389,21	19750,19	-3,04	-1,34
24.03.2005	1,36	25068,49	26701	18459,86	19662,00	0,38	-0,45
28.03.2005	1,35	24842,21	28257	18460,44	20997,99	0,00	6,79
29.03.2005	1,36	24479,67	25842	18034,23	19037,87	-2,31	-9,33
30.03.2005	1,38	24600,92	26469	17777,80	19127,76	-1,42	0,47
31.03.2005	1,37	25557,76	26610	18647,13	19414,85	4,89	1,50
01.04.2005	1,35	25740,76	26773	19121,05	19887,83	2,54	2,44
04.04.2005	1,34	25445,11	26406	18947,88	19663,41	-0,91	-1,13
05.04.2005	1,36	25682,54	26038	18884,22	19145,59	-0,34	-2,63
06.04.2005	1,36	26056,61	25695	19097,49	18832,45	1,13	-1,64
07.04.2005	1,34	25831,22	26307	19209,65	19563,47	0,59	3,88
08.04.2005	1,34	25786,45	25884	19307,02	19380,05	0,51	-0,94
11.04.2005	1,35	25370,26	25899	18855,64	19248,61	-2,34	-0,68
12.04.2005	1,34	25077,96	26206	18703,73	19545,05	-0,81	1,54
13.04.2005	1,34	25293,24	26066	18909,42	19487,14	1,10	-0,30
14.04.2005	1,34	24541,95	24984	18372,47	18703,40	-2,84	-4,02
15.04.2005	1,35	23853,34	24655	17669,14	18262,96	-3,83	-2,35

EK-1 (Devam) İMKB Ulusal-100, IBOVESPA, Dolar

TARİH	DOLAR	İMKB	BOVESPA	İMKB / DOLAR	BOVESPA / DOLAR	İMKB / DOLAR GÜNLÜK DEĞİŞİM %	BOVESPA / DOLAR GÜNLÜK DEĞİŞİM %
18.04.2005	1,37	23285,94	24877	16968,55	18127,96	-3,97	-0,74
19.04.2005	1,37	24143,88	25566	17597,58	18634,11	3,71	2,79
20.04.2005	1,37	24175,89	25062	17660,82	18308,13	0,36	-1,75
22.04.2005	1,36	24730,75	24767	18246,09	18272,83	3,31	-0,19
25.04.2005	1,35	24798,07	25231	18370,30	18691,01	0,68	2,29
26.04.2005	1,36	24483,97	25304	18049,37	18653,89	-1,75	-0,20
27.04.2005	1,36	24070,13	25241	17763,93	18628,04	-1,58	-0,14
28.04.2005	1,36	23519,63	24439	17260,85	17935,56	-2,83	-3,72
29.04.2005	1,37	23591,64	24843	17182,55	18093,95	-0,45	0,88
02.05.2005	1,38	24252,96	24704	17518,75	17844,55	1,96	-1,38
03.05.2005	1,38	24137,94	24715	17506,48	17925,01	-0,07	0,45
04.05.2005	1,37	24560,22	25474	17973,08	18641,79	2,67	4,00
05.05.2005	1,34	25099,87	25435	18690,80	18940,35	3,99	1,60
06.05.2005	1,34	24950,82	25589	18671,57	19149,14	-0,10	1,10
09.05.2005	1,34	24702,24	25464	18404,29	18971,84	-1,43	-0,93
10.05.2005	1,35	24688,26	24762	18286,25	18340,86	-0,64	-3,33
11.05.2005	1,36	24662,88	24698	18194,67	18220,58	-0,50	-0,66
12.05.2005	1,36	25114,43	24117	18405,59	17674,61	1,16	-3,00
13.05.2005	1,35	25325,67	23887	18722,31	17658,76	1,72	-0,09
16.05.2005	1,36	24921,28	24378	18308,32	17909,20	-2,21	1,42
17.05.2005	1,38	24846,11	24412	18056,77	17741,28	-1,37	-0,94
18.05.2005	1,38	25205,51	24898	18329,95	18106,32	1,51	2,06
20.05.2005	1,37	25464,89	24522	18576,66	17888,82	1,35	-1,20
23.05.2005	1,36	24329,06	24214	17936,49	17851,67	-3,45	-0,21
24.05.2005	1,38	24140,93	24545	17464,32	17756,64	-2,63	-0,53
25.05.2005	1,38	24119,79	24478	17513,64	17773,74	0,28	0,10
27.05.2005	1,38	24453,14	25255	17747,96	18329,95	1,34	3,13
30.05.2005	1,37	24977,78	25424	18243,94	18569,86	2,79	1,31
31.05.2005	1,37	25236,48	25207	18480,14	18458,55	1,29	-0,60
01.06.2005	1,36	25230,81	25948	18620,52	19149,82	0,76	3,74
02.06.2005	1,36	25799,12	26639	18976,92	19594,70	1,91	2,32
03.06.2005	1,34	26051,55	26365	19389,36	19622,66	2,17	0,14
06.06.2005	1,36	25533,07	25556	18838,03	18854,95	-2,84	-3,91
07.06.2005	1,36	25478,03	25026	18726,96	18394,71	-0,59	-2,44
08.06.2005	1,35	25779,75	24701	19045,32	18248,37	1,70	-0,80
09.06.2005	1,36	25499,99	24483	18736,22	17988,98	-1,62	-1,42
10.06.2005	1,36	25725,19	24950	18972,78	18401,06	1,26	2,29
13.06.2005	1,35	25609,99	24901	18938,10	18413,81	-0,18	0,07
14.06.2005	1,37	25929,93	25744	18897,99	18762,48	-0,21	1,89
15.06.2005	1,36	26209,42	25481	19217,94	18683,82	1,69	-0,42

EK-1 (Devam) İMKB Ulusal-100, IBOVESPA, Dolar

TARİH	DOLAR	İMKB	BOVESPA	İMKB / DOLAR	BOVESPA / DOLAR	İMKB / DOLAR GÜNLÜK DEĞİŞİM %	BOVESPA / DOLAR GÜNLÜK DEĞİŞİM %
16.06.2005	1,37	26579,72	25750	19361,68	18757,28	0,75	0,39
17.06.2005	1,36	26529,32	26092	19503,98	19182,47	0,73	2,27
20.06.2005	1,35	26709,17	26045	19743,62	19252,66	1,23	0,37
21.06.2005	1,35	26746,40	25721	19772,60	19014,56	0,15	-1,24
22.06.2005	1,36	26779,27	25678	19715,28	18904,51	-0,29	-0,58
23.06.2005	1,35	27021,54	24815	20044,17	18407,39	1,67	-2,63
24.06.2005	1,35	27033,40	24916	20027,71	18459,03	-0,08	0,28
27.06.2005	1,35	26597,80	25255	19751,82	18754,64	-1,38	1,60
28.06.2005	1,34	26811,40	25261	19937,09	18784,21	0,94	0,16
29.06.2005	1,34	27135,90	25126	20206,94	18710,25	1,35	-0,39
30.06.2005	1,34	26957,32	25051	20097,91	18676,66	-0,54	-0,18
01.07.2005	1,33	27616,86	25311	20706,95	18978,03	3,03	1,61
04.07.2005	1,33	27702,25	25044	20822,50	18824,41	0,56	-0,81
05.07.2005	1,34	27377,55	24674	20478,38	18456,13	-1,65	-1,96
06.07.2005	1,34	27781,35	24516	20733,90	18296,89	1,25	-0,86
07.07.2005	1,34	27689,50	24449	20613,04	18200,70	-0,58	-0,53
08.07.2005	1,36	27842,43	24422	20547,92	18023,62	-0,32	-0,97
11.07.2005	1,34	27808,07	25015	20699,77	18620,66	0,74	3,31
12.07.2005	1,34	27689,24	25536	20723,93	19112,34	0,12	2,64
13.07.2005	1,33	28061,92	25855	21075,42	19417,95	1,70	1,60
14.07.2005	1,33	28500,87	25919	21501,98	19554,13	2,02	0,70
15.07.2005	1,33	28427,27	25221	21399,63	18986,00	-0,48	-2,91
18.07.2005	1,32	28402,65	25321	21479,73	19149,21	0,37	0,86
19.07.2005	1,33	28675,40	25270	21609,19	19042,95	0,60	-0,55
20.07.2005	1,33	28713,45	25704	21626,46	19359,80	0,08	1,66
21.07.2005	1,33	28992,13	25842	21872,60	19496,04	1,14	0,70
22.07.2005	1,32	29188,09	25391	22110,51	19234,15	1,09	-1,34
25.07.2005	1,32	29273,25	24530	22175,02	18581,93	0,29	-3,39
26.07.2005	1,33	28730,69	24868	21566,35	18666,87	-2,74	0,46
27.07.2005	1,34	29164,82	25337	21748,56	18894,11	0,84	1,22
28.07.2005	1,34	29343,03	26068	21953,49	19503,22	0,94	3,22
29.07.2005	1,33	29615,29	26042	22255,42	19570,15	1,38	0,34
01.08.2005	1,32	29776,69	26298	22537,61	19904,63	1,27	1,71
02.08.2005	1,32	29543,48	26788	22463,11	20368,00	-0,33	2,33
03.08.2005	1,32	29727,05	26714	22552,96	20267,05	0,40	-0,50
04.08.2005	1,31	30123,59	26469	22947,81	20163,78	1,75	-0,51
05.08.2005	1,31	29945,44	26517	22878,33	20259,00	-0,30	0,47
08.08.2005	1,31	29924,83	26711	22880,06	20422,82	0,01	0,81
09.08.2005	1,31	29701,00	27291	22629,33	20793,14	-1,10	1,81
10.08.2005	1,32	29683,21	27116	22528,24	20579,84	-0,45	-1,03

EK-1 (Devam) İMKB Ulusal-100, IBOVESPA, Dolar

TARİH	DOLAR	İMKB	BOVESPA	İMKB / DOLAR	BOVESPA / DOLAR	İMKB / DOLAR GÜNLÜK DEĞİŞİM %	BOVESPA / DOLAR GÜNLÜK DEĞİŞİM %
11.08.2005	1,31	29111,84	26633	22175,38	20287,17	-1,57	-1,42
12.08.2005	1,32	28175,93	26950	21368,06	20438,34	-3,64	0,75
15.08.2005	1,34	28074,94	27375	20998,46	20474,94	-1,73	0,18
16.08.2005	1,35	28257,65	27080	20953,32	20080,08	-0,21	-1,93
17.08.2005	1,34	27906,28	27416	20819,37	20453,60	-0,64	1,86
18.08.2005	1,36	28000,00	26899	20609,45	19799,06	-1,01	-3,20
19.08.2005	1,36	28456,86	26643	20914,93	19581,80	1,48	-1,10
22.08.2005	1,37	28951,44	27260	21169,52	19932,73	1,22	1,79
23.08.2005	1,36	29191,60	26769	21445,49	19665,74	1,30	-1,34
24.08.2005	1,35	29372,23	26712	21707,36	19741,33	1,22	0,38
25.08.2005	1,36	29814,17	27401	21843,48	20075,46	0,63	1,69
26.08.2005	1,36	30020,40	27094	22001,03	19856,36	0,72	-1,09
29.08.2005	1,35	30015,12	27384	22184,12	20239,47	0,83	1,93
01.09.2005	1,35	31947,95	27962	23712,57	20754,10	6,89	2,54
02.09.2005	1,33	31701,62	28312	23757,21	21217,03	0,19	2,23
05.09.2005	1,33	31879,45	28522	23924,54	21404,88	0,70	0,89
06.09.2005	1,33	31832,50	28854	23952,22	21711,06	0,12	1,43
08.09.2005	1,33	31485,39	28828	23741,06	21737,29	-0,88	0,12
09.09.2005	1,33	32202,66	29307	24225,28	22046,94	2,04	1,42
12.09.2005	1,33	32711,13	29086	24678,33	21943,42	1,87	-0,47
13.09.2005	1,33	32541,11	28873	24457,81	21700,86	-0,89	-1,11
14.09.2005	1,33	32632,44	29049	24550,44	21854,50	0,38	0,71
15.09.2005	1,33	33271,11	29366	24925,91	22000,30	1,53	0,67
16.09.2005	1,33	33294,26	29815	24948,86	22341,70	0,09	1,55
19.09.2005	1,33	33221,15	30076	24922,09	22562,64	-0,11	0,99
20.09.2005	1,34	33719,30	30058	25176,81	22443,07	1,02	-0,53
21.09.2005	1,33	33863,82	30837	25385,17	23116,19	0,83	3,00
22.09.2005	1,33	33465,61	30678	25075,39	22986,66	-1,22	-0,56
23.09.2005	1,33	33250,45	31294	24979,68	23509,88	-0,38	2,28
26.09.2005	1,34	33516,04	31141	25086,86	23309,13	0,43	-0,85
27.09.2005	1,34	33319,18	30874	24822,45	23000,82	-1,05	-1,32
28.09.2005	1,34	32744,95	31317	24480,38	23412,83	-1,38	1,79
29.09.2005	1,34	33396,23	31208	24855,78	23227,15	1,53	-0,79
30.09.2005	1,34	33333,23	31583	24864,41	23558,85	0,03	1,43
03.10.2005	1,34	34300,90	31856	25555,73	23734,17	2,78	0,74
04.10.2005	1,36	35624,79	31283	26275,84	23073,46	2,82	-2,78
05.10.2005	1,34	34775,67	30163	26014,12	22563,58	-1,00	-2,21
06.10.2005	1,34	33510,39	29227	24924,05	21738,19	-4,19	-3,66
07.10.2005	1,35	33413,61	29972	24727,01	22180,12	-0,79	2,03
10.10.2005	1,35	33505,96	30277	24887,44	22489,04	0,65	1,39

EK-1 (Devam) İMKB Ulusal-100, IBOVESPA, Dolar

TARİH	DOLAR	İMKB	BOVESPA	İMKB / DOLAR	BOVESPA / DOLAR	İMKB / DOLAR GÜNLÜK DEĞİŞİM %	BOVESPA / DOLAR GÜNLÜK DEĞİŞİM %
11.10.2005	1,34	34040,21	30614	25463,95	22900,96	2,32	1,83
13.10.2005	1,35	32054,34	29880	23780,95	22167,82	-6,61	-3,20
14.10.2005	1,36	31440,03	29770	23095,59	21868,80	-2,88	-1,35
17.10.2005	1,36	31850,68	30241	23344,09	22164,32	1,08	1,35
18.10.2005	1,35	31586,83	29067	23318,20	21457,99	-0,11	-3,19
19.10.2005	1,36	30766,71	29297	22689,31	21605,46	-2,70	0,69
20.10.2005	1,36	31403,90	28344	23008,21	20766,36	1,41	-3,88
21.10.2005	1,36	31428,62	29175	23122,88	21464,83	0,50	3,36
24.10.2005	1,36	31845,70	29834	23462,54	21980,40	1,47	2,40
25.10.2005	1,36	31669,96	29498	23331,34	21731,25	-0,56	-1,13
26.10.2005	1,35	31474,44	29729	23231,80	21943,46	-0,43	0,98
27.10.2005	1,35	31273,31	29132	23201,51	21612,88	-0,13	-1,51
28.10.2005	1,35	31038,52	29318	23037,57	21760,56	-0,71	0,68
31.10.2005	1,35	31963,99	30193	23724,48	22410,01	2,98	2,98
01.11.2005	1,34	32791,99	30899	24440,63	23029,74	3,02	2,77
07.11.2005	1,34	33830,10	30952	25184,32	23041,76	3,04	0,05
08.11.2005	1,36	33749,43	30970	24899,98	22849,34	-1,13	-0,84
09.11.2005	1,36	33848,29	30666	24917,76	22575,09	0,07	-1,20
10.11.2005	1,35	34709,65	30724	25623,54	22681,23	2,83	0,47
11.11.2005	1,36	34096,32	30510	25109,60	22468,52	-2,01	-0,94
14.11.2005	1,36	34171,51	30218	25168,67	22256,76	0,24	-0,94
16.11.2005	1,36	34866,57	30482	25703,33	22471,07	2,12	0,96
17.11.2005	1,35	35127,34	31087	25981,76	22993,34	1,08	2,32
18.11.2005	1,35	35314,31	31102	26108,47	22994,23	0,49	0,00
21.11.2005	1,36	35654,99	31110	26132,36	22801,23	0,09	-0,84
22.11.2005	1,36	35254,14	31489	25945,05	23174,12	-0,72	1,64
23.11.2005	1,36	36179,29	31942	26580,92	23467,78	2,45	1,27
24.11.2005	1,35	36907,79	31944	27278,48	23609,76	2,62	0,60
25.11.2005	1,35	36759,89	31919	27191,28	23610,47	-0,32	0,00
28.11.2005	1,35	36621,47	31357	27106,94	23210,21	-0,31	-1,70
29.11.2005	1,36	37495,22	31651	27667,67	23355,22	2,07	0,62
30.11.2005	1,35	38088,65	31916	28220,09	23646,74	2,00	1,25
01.12.2005	1,35	38296,91	32617	28368,08	24160,74	0,52	2,17
02.12.2005	1,35	38573,71	32832	28562,54	24311,00	0,69	0,62
05.12.2005	1,35	39130,73	32701	28927,87	24174,61	1,28	-0,56
06.12.2005	1,35	38917,82	33223	28796,02	24582,32	-0,46	1,69
07.12.2005	1,35	38441,59	32756	28504,81	24288,89	-1,01	-1,19
08.12.2005	1,35	38587,77	32480	28589,89	24064,61	0,30	-0,92
09.12.2005	1,35	37496,18	32921	27754,39	24367,88	-2,92	1,26
12.12.2005	1,35	38202,19	32970	28304,21	24427,65	1,98	0,25

EK-1 (Devam) İMKB Ulusal-100, IBOVESPA, Dolar

TARİH	DOLAR	İMKB	BOVESPA	İMKB / DOLAR	BOVESPA / DOLAR	İMKB / DOLAR GÜNLÜK DEĞİŞİM %	BOVESPA / DOLAR GÜNLÜK DEĞİŞİM %
13.12.2005	1,35	37741,70	33419	28012,84	24804,42	-1,03	1,54
14.12.2005	1,34	37870,57	33629	28219,50	25058,87	0,74	1,03
15.12.2005	1,34	37631,57	33193	28146,28	24826,48	-0,26	-0,93
16.12.2005	1,34	37716,70	33291	28125,80	24825,50	-0,07	0,00
19.12.2005	1,34	37960,13	33005	28246,25	24559,12	0,43	-1,07
20.12.2005	1,34	37729,42	33066	28105,94	24632,00	-0,50	0,30
21.12.2005	1,34	38210,24	33517	28455,64	24960,53	1,24	1,33
22.12.2005	1,34	38353,12	33512	28519,57	24919,69	0,22	-0,16
23.12.2005	1,35	38919,51	33331	28908,50	24757,48	1,36	-0,65
26.12.2005	1,34	39139,08	33297	29132,18	24783,77	0,77	0,11
27.12.2005	1,34	39015,86	33370	29064,26	24858,46	-0,23	0,30
28.12.2005	1,34	39220,17	33139	29196,88	24669,84	0,46	-0,76
29.12.2005	1,34	39837,27	33455	29680,58	24925,50	1,66	1,04
30.12.2005	1,34	39777,70	33455	29618,54	24910,65	-0,21	-0,06
02.01.2006	1,34	39790,72	33507	29654,73	24971,68	0,12	0,25
03.01.2006	1,34	40665,44	34540	30254,77	25697,49	2,02	2,91
04.01.2006	1,34	41362,47	35002	30823,81	26083,91	1,88	1,50
05.01.2006	1,33	41722,40	34936	31330,18	26234,14	1,64	0,58
06.01.2006	1,33	41905,41	35475	31512,57	26676,94	0,58	1,69
16.01.2006	1,33	43628,83	36533	32843,14	27501,51	4,22	3,09
17.01.2006	1,33	44076,91	36119	33215,46	27218,54	1,13	-1,03
18.01.2006	1,33	42622,90	35805	32102,81	26967,69	-3,35	-0,92
19.01.2006	1,33	43645,23	36858	32783,92	27685,72	2,12	2,66
20.01.2006	1,33	44465,68	36694	33435,36	27591,55	1,99	-0,34
23.01.2006	1,33	43851,42	36363	32968,51	27338,55	-1,40	-0,92
24.01.2006	1,32	44434,54	37399	33642,14	28315,41	2,04	3,57
25.01.2006	1,32	45746,17	37399	34732,50	28394,96	3,24	0,28
26.01.2006	1,32	45784,09	38014	34800,92	28894,80	0,20	1,76
27.01.2006	1,32	45315,15	37822	34407,86	28718,30	-1,13	-0,61
30.01.2006	1,32	44891,25	38242	34052,38	29008,57	-1,03	1,01
31.01.2006	1,32	44590,22	38382	33731,92	29035,48	-0,94	0,09
01.02.2006	1,32	45250,66	38484	34283,40	29156,75	1,63	0,42
02.02.2006	1,32	44841,03	37304	34029,77	28309,93	-0,74	-2,90
03.02.2006	1,32	44228,02	37261	33473,11	28200,26	-1,64	-0,39
06.02.2006	1,32	44855,61	37321	33999,55	28288,49	1,57	0,31
07.02.2006	1,32	44652,96	36561	33746,19	27630,74	-0,75	-2,33
08.02.2006	1,32	43842,68	36499	33141,34	27590,14	-1,79	-0,15
09.02.2006	1,33	44117,47	36882	33218,49	27770,50	0,23	0,65
10.02.2006	1,32	44772,93	36975	33816,41	27926,74	1,80	0,56
13.02.2006	1,32	44046,29	36113	33348,19	27341,76	-1,38	-2,09

EK-1 (Devam) İMKB Ulusal-100, IBOVESPA, Dolar

TARİH	DOLAR	İMKB	BOVESPA	İMKB / DOLAR	BOVESPA / DOLAR	İMKB / DOLAR GÜNLÜK DEĞİŞİM %	BOVESPA / DOLAR GÜNLÜK DEĞİŞİM %
14.02.2006	1,32	43507,51	36626	32855,69	27658,96	-1,48	1,16
15.02.2006	1,32	43803,98	37239	33157,20	28187,87	0,92	1,91
16.02.2006	1,33	45361,34	38256	34049,95	28716,41	2,69	1,88
17.02.2006	1,32	46244,32	38421	34911,91	29005,74	2,53	1,01
20.02.2006	1,32	46689,01	38539	35365,10	29191,79	1,30	0,64
21.02.2006	1,31	46710,93	38165	35676,26	29149,16	0,88	-0,15
22.02.2006	1,31	46265,39	38246	35279,39	29164,25	-1,11	0,05
23.02.2006	1,32	46553,57	38405	35148,03	28995,85	-0,37	-0,58
24.02.2006	1,31	46838,10	38610	35680,73	29412,66	1,52	1,44
01.03.2006	1,31	47492,97	39177	36365,21	29997,70	1,92	1,99
02.03.2006	1,31	46890,80	39125	35862,94	29923,52	-1,38	-0,25
03.03.2006	1,30	46366,23	39239	35724,04	30232,68	-0,39	1,03
06.03.2006	1,30	45997,07	38353	35480,62	29584,23	-0,68	-2,14
07.03.2006	1,30	43889,75	37422	33745,77	28772,87	-4,89	-2,74
08.03.2006	1,32	42340,43	37289	32015,45	28195,84	-5,13	-2,01
09.03.2006	1,34	42863,37	36312	32088,16	27183,71	0,23	-3,59
10.03.2006	1,34	42521,94	36890	31823,04	27608,14	-0,83	1,56
13.03.2006	1,34	44345,95	36792	32995,50	27375,00	3,68	-0,84
14.03.2006	1,34	42906,72	37541	32074,99	28063,84	-2,79	2,52
15.03.2006	1,34	43236,71	38243	32189,33	28471,56	0,36	1,45
16.03.2006	1,33	44051,34	38156	33148,72	28712,47	2,98	0,85
17.03.2006	1,33	44688,12	38049	33691,28	28685,92	1,64	-0,09
20.03.2006	1,32	44426,27	38203	33756,00	29027,43	0,19	1,19
21.03.2006	1,33	44399,44	37398	33461,03	28184,49	-0,87	-2,90
22.03.2006	1,34	44328,80	37850	33205,09	28352,06	-0,76	0,59
23.03.2006	1,34	44531,22	37473	33167,90	27910,77	-0,11	-1,56
24.03.2006	1,33	43273,94	37577	32480,63	28204,61	-2,07	1,05
27.03.2006	1,34	42710,46	37641	31854,46	28073,54	-1,93	-0,46
28.03.2006	1,34	41742,09	36682	31183,39	27403,26	-2,11	-2,39
29.03.2006	1,35	42507,02	37491	31570,87	27845,37	1,24	1,61
30.03.2006	1,36	42941,70	37776	31663,25	27854,30	0,29	0,03
31.03.2006	1,34	42911,32	37951	31958,98	28264,69	0,93	1,47
03.04.2006	1,34	44028,40	38717	32815,38	28856,67	2,68	2,09
04.04.2006	1,34	44070,94	38802	32915,78	28980,51	0,31	0,43
05.04.2006	1,33	44088,59	39053	33102,03	29321,27	0,57	1,18
06.04.2006	1,33	43710,59	39285	32865,11	29537,59	-0,72	0,74
07.04.2006	1,33	44284,17	38926	33276,35	29250,08	1,25	-0,97
10.04.2006	1,33	43099,34	38474	32417,71	28938,70	-2,58	-1,06
11.04.2006	1,34	42890,29	37901	32079,50	28347,79	-1,04	-2,04
12.04.2006	1,33	42505,02	38427	31884,34	28825,29	-0,61	1,68

EK-1 (Devam) İMKB Ulusal-100, IBOVESPA, Dolar

TARİH	DOLAR	İMKB	BOVESPA	İMKB / DOLAR	BOVESPA / DOLAR	İMKB / DOLAR GÜNLÜK DEĞİŞİM %	BOVESPA / DOLAR GÜNLÜK DEĞİŞİM %
13.04.2006	1,34	41919,25	38082	31376,68	28504,49	-1,59	-1,11
17.04.2006	1,34	41860,66	38462	31146,32	28617,56	-0,73	0,40
18.04.2006	1,34	42864,85	39572	31931,50	29478,55	2,52	3,01
19.04.2006	1,34	43732,47	39937	32719,19	29879,55	2,47	1,36
20.04.2006	1,32	43872,79	39774	33139,05	30043,05	1,28	0,55
24.04.2006	1,32	45278,39	39751	34239,56	30059,74	3,32	0,06
25.04.2006	1,32	45352,51	39738	34407,49	30147,94	0,49	0,29
26.04.2006	1,32	44745,54	40410	33980,51	30688,03	-1,24	1,79
27.04.2006	1,32	43752,02	39751	33105,34	30077,94	-2,58	-1,99
28.04.2006	1,32	43880,43	40363	33255,35	30589,62	0,45	1,70
02.05.2006	1,31	44413,62	41016	33823,49	31236,01	1,71	2,11
03.05.2006	1,32	44647,82	40919	33934,65	31100,55	0,33	-0,43
04.05.2006	1,31	44251,44	40975	33769,41	31269,08	-0,49	0,54
05.05.2006	1,32	44212,76	41417	33550,43	31428,90	-0,65	0,51
08.05.2006	1,31	44712,89	41515	34048,80	31613,62	1,49	0,59
09.05.2006	1,31	44563,26	41979	33955,55	31986,44	-0,27	1,18
10.05.2006	1,33	43598,99	41751	32729,52	31342,24	-3,61	-2,01
11.05.2006	1,34	43713,19	40847	32546,49	30412,48	-0,56	-2,97
12.05.2006	1,35	41970,80	40211	30986,19	29686,97	-4,79	-2,39
15.05.2006	1,39	40268,68	39271	28951,53	28234,24	-6,57	-4,89
16.05.2006	1,45	41044,06	39416	28310,15	27187,20	-2,22	-3,71
17.05.2006	1,45	40439,24	38290	27919,94	26436,07	-1,38	-2,76
18.05.2006	1,42	39643,68	37807	27947,61	26652,80	0,10	0,82
22.05.2006	1,49	36351,06	36496	24432,76	24530,18	-12,58	-7,96
23.05.2006	1,51	37235,49	36110	24732,97	23985,39	1,23	-2,22
24.05.2006	1,52	36100,70	35791	23792,72	23588,61	-3,80	-1,65
25.05.2006	1,54	36730,24	37568	23900,47	24445,60	0,45	3,63
26.05.2006	1,54	38593,47	38629	25067,21	25090,28	4,88	2,64
29.05.2006	1,52	38908,60	38145	25549,02	25047,61	1,92	-0,17
30.05.2006	1,52	37860,80	36412	24864,25	23912,79	-2,68	-4,53
31.05.2006	1,54	38132,21	36530	24812,73	23770,17	-0,21	-0,60
01.06.2006	1,56	38395,24	37748	24612,33	24197,44	-0,81	1,80
02.06.2006	1,56	39285,80	37942	25171,91	24310,89	2,27	0,47
05.06.2006	1,53	37964,03	36739	24860,21	24058,02	-1,24	-1,04
06.06.2006	1,58	37464,43	36577	23764,31	23201,40	-4,41	-3,56
07.06.2006	1,56	36709,55	35264	23593,77	22664,70	-0,72	-2,31
08.06.2006	1,55	35338,66	35437	22828,59	22892,12	-3,24	1,00
09.06.2006	1,55	34802,58	35074	22507,00	22682,53	-1,41	-0,92
12.06.2006	1,54	34330,32	32847	22334,47	21369,46	-0,77	-5,79
13.06.2006	1,54	32384,42	33554	21042,51	21802,47	-5,78	2,03

EK-1 (Devam) İMKB Ulusal-100, IBOVESPA, Dolar

TARİH	DOLAR	İMKB	BOVESPA	İMKB / DOLAR	BOVESPA / DOLAR	İMKB / DOLAR GÜNLÜK DEĞİŞİM %	BOVESPA / DOLAR GÜNLÜK DEĞİŞİM %
14.06.2006	1,60	32899,74	32941	20555,91	20581,69	-2,31	-5,60
16.06.2006	1,58	34048,04	34398	21489,55	21710,43	4,54	5,48
19.06.2006	1,58	34807,73	33897	21984,29	21409,08	2,30	-1,39
20.06.2006	1,59	34601,40	33632	21704,55	21096,47	-1,27	-1,46
21.06.2006	1,61	33762,00	34546	20985,83	21473,15	-3,31	1,79
22.06.2006	1,64	34228,99	34316	20853,53	20906,54	-0,63	-2,64
23.06.2006	1,66	33132,30	34661	19950,80	20871,32	-4,33	-0,17
26.06.2006	1,69	31950,56	34631	18867,70	20450,57	-5,43	-2,02
27.06.2006	1,68	32470,42	34375	19286,30	20417,56	2,22	-0,16
28.06.2006	1,64	33207,10	34834	20279,15	21272,67	5,15	4,19
29.06.2006	1,61	34031,08	36486	21113,71	22636,80	4,12	6,41
30.06.2006	1,60	35453,31	36630	22118,23	22852,33	4,76	0,95
03.07.2006	1,57	35456,47	37357	22588,06	23798,82	2,12	4,14
04.07.2006	1,57	36481,23	37367	23267,57	23832,51	3,01	0,14
05.07.2006	1,54	35385,02	36378	23052,13	23699,02	-0,93	-0,56
06.07.2006	1,57	35698,74	36533	22739,50	23270,91	-1,36	-1,81
07.07.2006	1,59	36202,23	36101	22800,25	22736,49	0,27	-2,30
10.07.2006	1,55	36148,39	36140	23359,22	23353,80	2,45	2,72
11.07.2006	1,55	35955,80	36553	23182,33	23567,38	-0,76	0,91
12.07.2006	1,54	35815,54	36229	23288,60	23557,45	0,46	-0,04
13.07.2006	1,54	35010,46	35354	22681,04	22903,60	-2,61	-2,78
14.07.2006	1,58	33831,69	35349	21442,32	22403,98	-5,46	-2,18
17.07.2006	1,57	32702,89	34866	20766,38	22139,95	-3,15	-1,18
18.07.2006	1,58	33617,96	35130	21222,12	22176,63	2,19	0,17
19.07.2006	1,58	33554,41	36785	21303,03	23354,07	0,38	5,31
20.07.2006	1,57	35311,04	35846	22518,36	22859,51	5,70	-2,12
21.07.2006	1,55	34988,80	35510	22637,68	22974,90	0,53	0,50
24.07.2006	1,54	34959,03	36224	22650,66	23470,26	0,06	2,16
25.07.2006	1,55	35264,40	36680	22811,57	23727,28	0,71	1,10
26.07.2006	1,53	35984,53	36594	23525,45	23923,90	3,13	0,83
27.07.2006	1,52	36747,28	36887	24225,25	24317,36	2,97	1,64
28.07.2006	1,50	36101,89	37381	24077,56	24930,64	-0,61	2,52
31.07.2006	1,50	36037,92	37077	24099,18	24794,04	0,09	-0,55
01.08.2006	1,48	35742,75	36839	24132,57	24872,73	0,14	0,32
02.08.2006	1,50	35721,64	37288	23881,29	24928,47	-1,04	0,22
03.08.2006	1,50	35262,86	37451	23517,98	24977,32	-1,52	0,20
04.08.2006	1,49	36159,61	37847	24302,45	25436,52	3,34	1,84
07.08.2006	1,48	35967,54	37697	24258,14	25424,56	-0,18	-0,05
08.08.2006	1,46	36535,74	37600	25036,48	25765,78	3,21	1,34
09.08.2006	1,46	37563,33	37255	25761,83	25550,37	2,90	-0,84

EK-1 (Devam) İMKB Ulusal-100, IBOVESPA, Dolar

TARİH	DOLAR	İMKB	BOVESPA	İMKB / DOLAR	BOVESPA / DOLAR	İMKB / DOLAR GÜNLÜK DEĞİŞİM %	BOVESPA / DOLAR GÜNLÜK DEĞİŞİM %
10.08.2006	1,45	37389,25	37353	25824,87	25799,83	0,24	0,98
11.08.2006	1,44	37418,11	36944	25902,06	25573,86	0,30	-0,88
14.08.2006	1,44	37631,07	36556	26107,31	25361,45	0,79	-0,83
15.08.2006	1,45	37806,51	37295	26021,41	25669,35	-0,33	1,21
16.08.2006	1,47	38433,41	37677	26221,88	25705,81	0,77	0,14
17.08.2006	1,45	37885,28	37558	26214,56	25988,10	-0,03	1,10
18.08.2006	1,43	37384,79	37551	26119,46	26235,59	-0,36	0,95
21.08.2006	1,44	37164,93	37160	25871,86	25868,43	-0,95	-1,40
22.08.2006	1,45	37130,81	36677	25637,51	25324,17	-0,91	-2,10
23.08.2006	1,45	37121,81	35512	25641,92	24529,94	0,02	-3,14
24.08.2006	1,45	36651,38	35797	25268,10	24679,08	-1,46	0,61
25.08.2006	1,47	36861,66	35957	25026,59	24412,38	-0,96	-1,08

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : ÖZBAKİŞ, Yusuf Gökhan
 Uyuğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 19.02.1981 Zonguldak
 Medeni hali : Evli
 Telefon : 0 (505) 265 86 69
 Faks : 0 (422) 323 39 76
 e-mail : gokhanozbakis@tuik.gov.tr

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi / İstatistik Bölümü	--
Lisans	ODTÜ / İstatistik Bölümü	2004
Lise	Ankara Atatürk Anadolu Lisesi	1999

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2004-...	TÜİK Bölge Müdürlüğü, Malatya	Uzman Yardımcısı

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Sinema, Futbol, Balık tutmak.