

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

BAZI KESİRLİ MERTEBEDEN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
YENİ METOTLARLA NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS

Umut BEKTAŞ

HAZİRAN-2023
GÜMÜŞHANE



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**BAZI KESİRLİ MERTEBEDEN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
YENİ METOTLARLA NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**

**NUMERICAL SOLUTIONS OF SOME FRACTIONAL PARTIAL
DIFFERENTIAL EQUATIONS BY NEW METHODS**

YÜKSEK LİSANS

Umut BEKTAŞ

**HAZİRAN-2023
GÜMÜŞHANE**



T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

BAZI KESİRLİ MERTEBEDEN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
YENİ METOTLARLA NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

NUMERICAL SOLUTIONS OF SOME FRACTIONAL PARTIAL
DIFFERENTIAL EQUATIONS BY NEW METHODS

YÜKSEK LİSANS

Umut BEKTAŞ

Danışman: Dr. Öğretim Üyesi Halil ANAÇ

HAZİRAN-2023
GÜMÜŞHANE

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlamış olduğum “**Bazı Kesirli Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Yeni Metotlarla Nümerik Çözümleri**” isimli bu tezimin, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, alıntı yaptığım tüm çalışmaları kaynakçada belirttiğimi ve Gümüşhane Üniversitesi’nin lisanslı kullanıcısı olduğu intihal yazılım programı ile Lisansüstü Eğitim Enstitüsü’nün belirlediği kısıtlara uygun olarak raporladığımı taahhüt ederim. Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivinde saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği’nin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

15/06/2023

.....
Umut BEKTAŞ

TEŞEKKÜR

Çalışmalarında bana ilgisini ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, kıymetli zamanını ve bilgilerini benimle paylaşan; gösterdiği sonsuz anlayış ve ilgiyle tezimin ortaya çıkmasına yardımcı olan saygıdeğer danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Halil ANAÇ' a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans öğrenimim süresince emeklerinden ve yardımlarından dolayı bölümümüzün kıymetli hocalarına teşekkürü bir borç bilirim.

Yüksek lisans öğrenimim boyunca her zaman yanımda olan ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen kıymetli eşim Yeliz BEKTAŞ' a sevgili oğullarım Eymen Kuzey ve Efe Karan'a ve canım kızım İpek Miray' a teşekkürlerimi sunarım.

Umut BEKTAŞ
GÜMÜŞHANE-2023

ÖZET

Bu tez, beş ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde kesirli türevin oluşumu ve gelişimi hakkında bilgi verilmektedir. İkinci bölümde gerekli tanım ve teoremler yazılmıştır. Üçüncü bölümde kullanılan yöntemlerden bahsedilmektedir. Dördüncü bölümde ise Kesirli mertebeden Zakharov-Kuznetsov (KMZK) denklemleri, kesirli mertebeden Newell-Whitehead-Segel (KMNWS) denklemleri, kesirli mertebeden bağlı Burgers (KMBB) denklemleri için q -homotopi Shehu analiz dönüşüm yöntemi (q -HSADY), kesirli Shehu dönüşümü ayrıştırma yöntemi (KSDAY) olarak adlandırılan iki yeni yöntem kullanılarak yeni sayısal çözümler araştırılmaktadır. Bu yöntemlerin etkili ve güvenilir olduğunu doğrulamak için sayısal simülasyonlar yapılmaktadır. Elde edilen çözümler ile analitik çözümler arasında karşılaştırmalar yapılmaktadır. Son bölümde ise yeni önerilen her iki yeni tekniğin de doğrusal olmayan uyumlu kesirli problemleri çözmek için oldukça etkili olduğu görülmektedir.

Anahtar Kelimeler: q -homotopi Shehu Analiz Dönüşüm Yöntemi, Kesirli Shehu Dönüşümü Ayrıştırma Yöntemi

SUMMARY

This thesis consists of five main chapters. In the first chapter, information about the formation and development of the fractional derivative is given. In the second part, necessary definitions and theorems are written. In the third section, the methods used are mentioned. In the fourth chapter, fractional Zakharov-Kuznetsov equations, fractional Newell-Whitehead-Segel equations, q-homotopy Shehu analysis transformation method (q-HSATM) for fractional coupled Burgers equations, fractional Shehu transform decomposition method (FSTDm) New numerical solutions were investigated using two different methods called. Numerical simulations have been performed to verify that these methods are effective and reliable. Comparisons between the obtained solutions and analytical solutions were made. In the last chapter, it has been seen that both newly proposed techniques are quite effective for solving nonlinear coherent fractional problems.

Keywords: q-homotopy Shehu Analysis Transform Method, Fractional Shehu Transform Decomposition Method

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	III
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI.....	IV
TEŞEKKÜR.....	V
ÖZET.....	VI
SUMMARY	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
TABLolar DİZİNİ	IX
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	XI
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	XIII
1. GİRİŞ	1
2.TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	5
3.KULLANILAN METOTLAR.....	7
3.1. q-Homotopi Shehu Analiz Dönüşüm Yöntemi (q-HSADY)	7
3.2. Kesirli Shehu Dönüşümü Ayrıştırma Yöntemi (KSDAY).....	10
4.YAPILAN ÇALIŞMALAR	12
4.1 KMZK (2,2,2) Denklemi için q-HSADY çözümü.....	13
4.1. KMZK (2,2,2) Denklemi için KSDAY çözümü	15
4.2. KMZK (3,3,3) Denklemi için q-HSADY çözümü.....	23
4.2. KMZK (3,3,3) Denklemi için KSDAY çözümü	25
4.3. KMDONWS Denklemi için q-HSADY çözümü	33
4.3. KMDONWS Denklemi için KSDAY çözümü	34
4.4. KMBB Denklemleri için q-HSADY çözümü	41
4.4. KMBB Denklemleri için KSDAY çözümü.....	45
5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME	61
KAYNAKÇA.....	62
ÖZGEÇMİŞ	65

TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 1. Örnek 4.1 de $t = 0.5, \rho = 0.001, h = -1$ ve $n = 1$ olmak üzere farklı μ ' ler için farklı x, y ve t değerleriyle q-HSADY denklemi için sayısal çözümler	20
Tablo 2. Örnek 4.1 dede $t = 0.5, \rho = 0.001, h = -1$ ve $n = 1$ olmak üzere farklı μ ' ler için farklı x, y ve t değerleriyle KSDAY denklemi için sayısal çözümler	21
Tablo 3. Örnek 4.1 de $t = 0.5, \rho = 0.001, h = -1$ ve $n = 1$ olmak üzere farklı μ ' ler için farklı x, y ve t değerleriyle q-HSADY ile KSDAY çözümlerinin karşılaştırılması.....	22
Tablo 4. Örnek 4.2 de $t = 0.5, \rho = 0.001, h = -1$ ve $n = 1$ olmak üzere farklı μ ' ler için farklı x, y ve t değerleriyle q-HSADY için sayısal çözümler.....	30
Tablo 5. Örnek 4.2 de $t = 0.5, \rho = 0.001, h = -1$ ve $n = 1$ olmak üzere farklı μ ' ler için farklı x, y ve t değerleriyle KSDAY denklemi için sayısal çözümler.....	31
Tablo 6. Örnek 4.2 de $t = 0.5, \rho = 0.001, h = -1$ ve $n = 1$ (83) denkleminin analitik çözümünün, q-HSADY ve KSDAY çözümlerinin karşılaştırılması.....	32
Tablo 7. Örnek 4.3 te $t = 0.5, \rho = 0.001, h = -1$ ve $n = 1$ olmak üzere farklı μ ' ler için farklı x, y ve t değerleriyle q-HSADY için sayısal çözümler.....	39
Tablo 8. Örnek 4.3 te $t = 0.5, \rho = 0.001, h = -1$ ve $n = 1$ olmak üzere farklı μ ' ler için farklı x, y ve t değerleriyle KSDAY denklemi için sayısal çözümler.....	40
Tablo 9. Örnek 4.3 te $t = 0.5, \rho = 0.001, h = -1$ ve $n = 1$ (94) denkleminin analitik çözümünün, q-HSADY ve KSDAY çözümlerinin karşılaştırılması.....	40
Tablo 10. Örnek 4.4 de $t = 0.5, \rho = 0.001, h = -1$ ve $n = 1$ olmak üzere farklı μ ' ler için farklı x, y ve t değerleriyle q-HSADY için sayısal çözümler.....	56
Tablo 11. Örnek 4.4 de $t = 0.5, \rho = 0.001, h = -1$ ve $n = 1$ olmak üzere farklı μ ' ler için farklı x, y ve t değerleriyle KSDAY denklemi için sayısal çözümler.....	57
Tablo 12. Örnek 4.4 de $t = 0.5, Re = 100, h = -1, n = 1$ ve $\alpha = 1$ olmak üzere farklı β ' lar için farklı x, y değerleriyle $v(x, y, t)$ ' nin q-HSADY için sayısal çözümler	58
Tablo 13. Örnek 4.4 de $t = 0.5, Re = 100$ ve $\alpha = 1$ olmak üzere olmak üzere farklı β ' lar için farklı x, y değerleriyle $v(x, y, t)$ ' nin KSDAY için sayısal çözümler...	58

Tablo 14. Örnek 4.4 de $t = 0.5, Re = 100, h = -1, n = 1, \beta = 1$ ve $\alpha = 1$ olmak üzere denkleminin $w(x, y, t)$ için analitik çözümünün, q-HSADY ve KSDAY çözümlerinin karşılaştırılması.....	59
Tablo 15. Örnek 4.4 de $t = 0.5, Re = 100, h = -1, n = 1, \beta = 1$ ve $\alpha = 1$ olmak üzere denkleminin $v(x, y, t)$ için analitik çözümünün, q-HSADY ve KSDAY çözümlerinin karşılaştırılması.....	60



ŞEKİLLER DİZİNİ

- Şekil 1. Örnek 4.1 için $t = 0.5, \rho = 0.001, h = -1, n = 1, \mu = 1$ olmak üzere
- (a) q-HSADY çözümü
 - (b) KSDAY çözümü
 - (c) Örnek 4.1 denkleminin analitik çözümü
 - (d) Mutlak hata = $|v_{analitik} - v_{q-HSADY}|$
 - (e) Mutlak hata = $|v_{analitik} - v_{KSDAY}|$ 19
- Şekil 2. Örnek 4.1 için $x = 0.5, \rho = 0.001, h = -1, n = 1, y = 1$ olmak üzere farklı μ değerleri için
- (a) q-HSADY çözümleri ile analitik çözümün karşılaştırılması
 - (b) KSDAY çözümleri ile analitik çözümün karşılaştırılması20
- Şekil 3. Örnek 4.2 için $t = 0.5, \rho = 0.001, h = -1, n = 1, \mu = 1$ olmak üzere
- (a) q-HSADY çözümü
 - (b) KSDAY çözümü
 - (c) Analitik çözüm
 - (d) Mutlak hata = $|v_{analitik} - v_{q-HSADY}|$
 - (e) Mutlak hata = $|v_{analitik} - v_{KSDAY}|$ 29
- Şekil 4. Örnek 4.2 için $t = 0.5, \rho = 0.001, h = -1, n = 1, y = 1$ olmak üzere farklı μ değerleri için
- (a) q-HSADY çözümleri ile analitik çözümün karşılaştırılması
 - (b) KSDAY çözümleri ile analitik çözümün karşılaştırılması30
- Şekil 5. Örnek 4.3 için $\beta = 1, h = -1, n = 1, \alpha = 1$ olmak üzere
- (a) q-HSADY çözümü
 - (b) KSDAY çözümü
 - (c) Analitik çözüm
 - (d) Mutlak hata = $|v_{analitik} - v_{q-HSADY}|$
 - (e) Mutlak hata = $|v_{analitik} - v_{KSDAY}|$ 38
- Şekil 6. Örnek 4.3 için $\beta = 1, h = -1, n = 1, x = 0.5$ olmak üzere farklı α değerleri için
- (a) q-HSADY çözümleri
 - (b) KSDAY çözümleri39
- Şekil 7. Örnek 4.4 için $t = 0.5, \alpha = 1, \beta = 1, Re = 100, h = -1, n = 1$ için
- (a) $w(x, y, t)$ için q-HSADY çözümü
 - (b) $v(x, y, t)$ için q-HSADY çözümü
 - (c) $w(x, y, t)$ için analitik çözüm
 - (d) $v(x, y, t)$ için analitik çözüm
 - (e) Mutlak hata = $|w_{analitik} - w_{q-HSADY}|$
 - (f) Mutlak hata = $|v_{analitik} - v_{q-HSADY}|$ 51
- Şekil 8. Örnek 4.4 için $t = 0.5, \alpha = 1, \beta = 1, Re = 100, h = -1, n = 1$ için
- (a) $w(x, y, t)$ için KSDAY çözümü
 - (b) $v(x, y, t)$ için KSDAY çözümü
 - (c) $w(x, y, t)$ için analitik çözüm
 - (d) $v(x, y, t)$ için analitik çözüm
 - (e) Mutlak hata = $|w_{analitik} - w_{KSDAY}|$
 - (f) Mutlak hata = $|v_{analitik} - v_{KSDAY}|$ 55
- Şekil 9. Örnek 4.4 için $x = 0.5, Re = 100, h = -1, n = 1, y = 1$ olmak üzere farklı α, β değerleri için

(a) q-HSADY $w(x, y, t)$ çözümleri ile analitik çözümün karşılaştırılması	
(b) q-HSADY $v(x, y, t)$ çözümleri ile analitik çözümün karşılaştırılması	55
Şekil 10. Örnek 4.4 için $x = 0.5, Re = 100, h = -1, n = 1, y = 1$ olmak üzere farklı α, β değerleri için	
(a) KSDAY $w(x, y, t)$ çözümleri ile analitik çözümün karşılaştırılması	
(b) KSDAY $v(x, y, t)$ çözümleri ile analitik çözümün karşılaştırılması	56



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

KMZK	: Kesirli mertebeden Zakharov-Kuznetsov
KMNWS	: Kesirli mertebeden Newell-Whitehead-Segel
KMBB	: Kesirli mertebeden Bağlı Burgers
q-HSADY	: q-homotopi Shehu analiz dönüşüm yöntemi
KSDAY	: Kesirli Shehu dönüşüm ayrıştırma yöntemi
$D^\alpha(f)$	: f fonksiyonunun α mertebeden kesirli türevi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar
E_α	: Mittag-Leffler fonksiyonu
$\mathbb{S}$	: Shehu dönüşümü
$\mathbb{S}^{-1}$	: Ters Shehu dönüşümü
H_m	: Homotopi polinomu

1. GİRİŞ

Mühendislik bilimleri, fizik, kimya ve biyoloji gibi birçok alanda oluşan problemin özelliklerini açıklayan matematiksel modellerin kurulması oldukça önemlidir. Bu modellemelerde ortaya konulan problemlerin çözülebilmesi ihtiyacı karşımıza diferansiyel denklemleri çıkartmaktadır. Doğada var olan problemlerin modellenmesinde tamsayı mertebeden diferansiyel denklemler ile fiziksel olayları açıklamadaki eksiklikleri giderebilmesi ve bu problemlerin daha iyi modellenenebilmesi için kesirli mertebeden diferansiyel denklemler kullanılmaktadır. Son yıllarda kesirli hesap konusu oldukça önem kazanmaktadır. Güncel bir konu olmasına rağmen kesirli hesap temelleri oldukça eski olup, 1695 yılına dayanmaktadır. Leibniz' in, Eylül 1695' te, L' Hospital' e sorduğu “tamsayı mertebeden türevler, kesirli mertebeden türevlere genişletilebilir mi?” sorusuyla ortaya çıkmıştır. Daha sonra 1730’ da Euler, 1772 ’de Lagrange, 1812’ de Laplace, 1819’ da Lacroix, 1822’de Fourier, 1832’de Liouville, 1847’de Riemann, 1865’ de Holmgren, 1867’ de Grünwald, 1868’ de Letnikov, 1869’ da Sonin, 1884’ te Laurent, 1888’ de Nekrassov, 1890’ da Krug ve 1917’ de Weyl gibi birçok matematikçi tarafından kesirli hesap üzerine önemli çalışmalar yapılmıştır (Kilbas vd., 2006).

Kesirli mertebeden türevlerinin matematiksel temeli, özellikle Liouville, Riemann, Caputo olmak üzere Miller ve Ross, Podlubny ve diğerleri gibi öncülerin ortak çabalarıyla atılmıştır (Liouville, 1832; Riemann,1896; Caputo,1969; Miller, ve Ross,1993). Kesirli mertebeli hesap teorisi pratik projelerle ilişkilendirilmiştir. Kimyasal fizik, kaos teorisi, elektrodinamik, optik ve sinyal işleme gibi çeşitli uygulama alanlarında kesirli hesap sıklıkla kullanılmaktadır (Veeresha vd., 2019; ,Prakasha vd., 2019). Yukarıdaki olaylarda ortaya çıkan keyfi mertebeden diferansiyel denklemlerin analitik ve sayısal çözümleri, günlük hayatta ortaya çıkan doğrusal olmayan problemlerin doğasını ve davranışını tanımlamada önemli bir rol oynamaktadır.

Kesirli türevin klasik türevden en önemli farkı, kesirli türevin tek bir tanımının olmamasıdır. Kesirli analizde birden fazla türev tanımının varlığı problemin türüne en uygun olanının kullanılması olanağını sağlamaktadır. Bu türev tanımlarından bazıları Liouville, Riemann, Weyl, Fourier, Laplace, Lagrange, Euler, Abel, Lacroix, Grünwald ve Letnikov gibi tanımlardır. Bu tanımların en çok kullanılanları Riemann - Liouville, Grünwald - Letnikov ve Caputo kesirli türevleridir (Kilbas vd, 2006; Miller ve Ross, 1993; Podlubny, 1999). Literatürde olan bu tanımlar birbirleri arasında geçişler sağlamasına rağmen fiziksel yorumları açısından farklılıklar göstermektedir.

Kesirli mertebeden modeller, türevlenebilirlik kavramlarını genişletir, uzay ve zaman kesirli mertebe türevleri aracılığıyla yerel olmayan ve sistem belleği etkilerini birleştirir. Bu özellikler, sorunu küçük ve daha küçük bölümlere ayırmadan fenomenleri çoklu zaman ve uzay ölçeklerinde modellememize izin verir. Kesirli dereceli bir modelin çoklu ölçekleri ne ölçüde kapsayacağı, kesirli türevlerin karmaşık fenomenlerin göze çarpan özelliklerini sınırlayabileceği veya yakalayabileceği temeldeki bir varsayıma dayanır. Ayrıca, klasik türevler doğası gereği yereldir, yani klasik türevleri kullanarak bir noktanın komşuluğundaki değişiklikleri tanımlayabiliriz, ancak kesirli türevleri kullanarak bir aralıktaki değişiklikleri tanımlayabiliriz. Bu özellik, deprem titreşimleri, difüzyon, esneklik, sinyal analizi, kuantum mekaniği ve diğerleri gibi daha fazla fiziksel fenomeni simüle etmek için keyfi mertebeden türevlerini uygun hale getirir. Disiplinler arası alanlarda birçok sistemin kesirli diferansiyel denklemler ile daha doğru ve daha rahat bir şekilde tanımlanabileceği bulunmuştur. Son zamanlarda, kesirli türevler, çeşitli karmaşık problemleri analiz etmek için yaygın olarak kullanılmaktadır. Örneğin, visko-elastik malzemelerin matematiksel modellenmesi, kesirli hesap yardımıyla incelenmektedir. Uyumlu türevi olan kesirli Burgers tipi denklemlerin yaklaşık analitik çözümü artık güç serileri yöntemi yardımıyla araştırılmıştır (Kurt vd., 2019). Polinom yöntemi için tam bir ayırım sisteminin yardımıyla zaman-kesirli birleştirilmiş Drinfel'd–Sokolov–Wilson denklemlerinin tam hareket eden dalga çözümlerini elde etmişlerdir (Singh vd., 2018). Zaman-kesirli Phi-4 denkleminin yeni analitik çözümü, Rezazadeh vd. nin 2018'de yaptığı çalışmadaki uyumlu kesirli türev aracılığıyla genişletilmiş doğrudan cebirsel yöntem kullanılarak araştırılmıştır ve birçok bilim insanı, kesirli hesabı karmaşık problemlerin doğasını anlamak için bir araç olarak düşünmektedir (Hilfer, 2000; Prakasha vd., 2019).

Son zamanlarda, kesirli hesap birçok gerçek problemin modellenmesinde kullanılmaktadır. Dünya problemlerinin kesirli matematiksel modellenmesi hızlı bir şekilde artmaktadır. Dolayısıyla, birçok araştırmacı kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemler üzerinde çalışmaktadır. Kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemler, farklı bilim alanlarında birçok olayı analiz etmek için kullanılmaktadır (Baleanu vd., 2009).

Caputo ve uyumlu türev anlamında zaman-kesirli Newell-Whitehead-Segel (NWS) denkleminin çözümü son yıllarda dikkatleri üzerine çekmiştir. Caputo anlamında zaman-kesirli NWS problemine sayısal ve kesin çözümler geliştirmek için varyasyonel iterasyon yaklaşımı kullanılmıştır. Caputo türevi anlamında kesirli NWS denklemleri için yaklaşık analitik çözümler elde etmek için kesirli varyasyon yineleme yöntemini kullanılmıştır.

NWS denklemlerini çözmek için uyumlu Sumudu dönüşümü ve Adomian ayrıştırma yaklaşımı kullanılmaktadır. Caputo zaman-kesirli NWS denklemlerinin yaklaşık ve kesin çözümlerini belirlemek için Sumudu ayrıştırma yaklaşımı kullanıldı. Caputo anlamında zaman-kesirli NWS' yi çözmek için Adomian ayrıştırma yöntemi kullanılmaktadır. Kesirli güç serisi metodolojisi kullanılarak, Caputo anlamında zaman-kesirli NWS denklemleri çözülür. Caputo anlamında kesirli mertebeden NWS denklemlerinin artık güç serileri yöntemi kullanılarak yaklaşık analitik çözümleri elde edilmiştir (Elarbibenattia ve Belghaba, 2021; Prakash vd., 2019; Nadeem vd., 2021; Prakash ve Verma, 2019; Saadeh vd., 2019; Ahmed ve Elbadri, 2020; Ali vd., 2019).

Öte yandan, son otuz yılda bir takım keşfedilen yeni yöntemler, yeni hesaplama algoritmaları ve geliştirilen sembolik programlamalar doğrusal olmayan kesirli mertebeden diferansiyel denklem sistemlerini açıklamaya yardımcı olmuştur. Doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemler için analitik ve sayısal çözümler oldukça önemlidir. Çünkü karmaşık olayların çoğu matematiksel olarak doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemlerle modellenmektedir. Bununla bağlantılı olarak literatürde bu denklemleri çözmek için birçok yöntem bulunmaktadır. Bu yöntemler; Adomian ayrıştırma yöntemi (AAY) (Wazwaz, 1999), diferansiyel dönüşüm metodu (DDM) (Ayaz, 2004; Merdan vd., 2019), homotopi analiz yöntemi (HAY) (Liao, 2004), varyasyonel yineleme yöntemi (VYY) (He, 1999), homotopi pertürbasyon yöntemi (HPY) (He, 2003)' dir.

Zakharov-Kuznetsov denklemleri, başlangıçta, güçlü bir şekilde manyetize edilmiş kayıpsız plazmadaki zayıf doğrusal olmayan tipteki iyon-akustik dalgaları göstermek için türetilmiştir (Zakharov ve Kuznetsov, 1974). Kesirli mertebeden Zakharov-Kuznetsov denklemleri, varyasyonel yineleme yöntemi (VYY) (Molliq vd., 2009), homotopi pertürbasyon dönüşümü yöntemi (HPDY) (Kumar vd. 2014), pertürbasyon-yinelemeli algoritma ve artık güç serisi yöntemi (Senol vd., 2018) ve yeni yinelemeli Sumudu dönüşüm yöntemi (YYSDY) (Anaç vd., 2020; Prakash vd., 2018) gibi farklı tekniklerle incelenmiştir.

1992' de Liao Shijun, homotopi adı verilen temel diferansiyel geometri ve topoloji kavramını uygulayarak homotopi analiz yöntemini (HAY) (Liao, 1992; Liao, 1997) önermiştir. HAY, bilim ve teknolojiye ortaya çıkan problemler için doğrusallaştırma ve pertürbasyon olmaksızın yaklaşık analitik çözümü bulmak için etkin bir şekilde kullanılmıştır. Bu nedenle, bu sınırlamaların üstesinden gelmek için, bu algoritmanın halihazırda mevcut dönüştürme teknikleri ile bir kombinasyonuna ihtiyaç duyulmuştur. Singh ve arkadaşları tarafından (Singh vd., 2016) q-homotopi analiz metodu (q-HAM) ve

Laplace dönüşümünün bir birleşimi olan, q -homotopi analiz dönüşüm metodu (q -HADM) önerilmiştir. Bu yöntem, izin verilen kısa bir bölgede hızlı bir şekilde kesin çözüme yakınsayan seri çözümü kontrol etmekte ve sonuca ulaştırmaktadır. Önerilen tekniğin geliştirilmesi, doğrusal ve doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemleri hem sayısal hem de analitik olarak çözmek için iki güçlü algoritmayı birleştirme kapasitesidir. Yarı-analitik tekniklerle Laplace dönüşümünün, bilim ve teknolojiye ortaya çıkan doğrusal olmayan karmaşık modeller ve fenomenlerin çözümlerini hesaplamak için daha az işlem zamanı gerektirdiğini ortaya koymaktadır. q -HADM çözümü, iki yardımcı parametre $\hbar$ ve n' yi içerir, bu da çözümün yakınsamasını ayarlanmasına ve kontrol edilmesine olanak sağlamaktadır. Önerilen tekniğin, elde edilen sonuçların büyük verimliliğini korurken, diğer geleneksel tekniklerle karşılaştırıldığında zaman ve işin hesaplanmasını azaltabileceğini söyleyebiliriz. Son zamanlarda, Srivastava ve arkadaşları gibi birçok bilin insanı, kesirli mertebeden titreşim denklemi modeli incelemektedir (Srivastava vd., 2017), Singh ve arkadaşları tarafından, ısı-dağılım denkleminin çözümünü bulmak için bu yöntem kullanılır (Singh vd., 2018), Bulut ve arkadaşları rastgele mertebeden HIV enfeksiyonu modelini analiz etmişlerdir (Bulut vd., 2018), Prakash ve arkadaşları kesirli mertebeden çok boyutlu telgraf denklemi için yaklaşık analitik çözümü bulmuşlardır (Prakash vd., 2019), Kumar ve arkadaşları Lienard denkleminin modelini analiz etmişlerdir (Kumar vd., 2018) ve birçok yazar doğrusal olmayan problemler için yaklaşık analitik çözüm bulmaktadırlar (Veeresha vd., 2019; Prakash vd., 2019).

Bu tezde, iki yeni nümerik metot önerilmektedir. Bu yöntemlerden birincisi; q -homotopi analiz dönüşüm yönteminin, kesirli Shehu dönüşümü ile birleşmesinden oluşan q -homotopi Shehu analiz dönüşüm yöntemidir (q -HSADY), ikincisi ise, Adomian ayrıştırma metodunun, kesirli Shehu dönüşümü ile birleşmesinden oluşan kesirli Shehu dönüşümü ayrıştırma yöntemidir (KSDAY), bu metotlar yeni hibrit metotlardır. Kesirli mertebeden Zakharov-Kuznetsov (KMZK) denklemleri, kesirli mertebeden Newell-Whitehead-Segel (KMNWS) denklemleri, kesirli mertebeden bağlı Burgers denklemleri için önerilen iki hibrit metot olan q -homotopi Shehu analiz dönüşüm yöntemi (q -HSADY) ve kesirli Shehu dönüşümü ayrıştırma yöntemi (KSDAY) kullanılarak yeni sayısal çözümler elde edilmektedir. Önerilen yöntemlerin etkili ve güvenilir olduğunu doğrulamak için sayısal simülasyonlar yapılmaktadır. Elde edilen çözümler ile analitik çözümler arasındaki karşılaştırma, her iki yeni tekniğin de doğrusal olmayan kesirli mertebeden problemleri çözmek için oldukça kolay ve etkili olduğunu göstermektedir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu kısımda tezde kullanılan temel tanım ve teoremler verilmektedir.

Tanım 1 (Hilfer, 2000). $f \in C_\mu, \mu \geq -1$ fonksiyonunun $a \geq 0$ dereceli Riemann-Liouville kesirli integral operatörü aşağıdaki gibidir:

$$I^a f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x (x-t)^{a-1} f(t) dt, & a > 0, x > 0, \\ I^0 f(x) = f(x), & a = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Burada $\Gamma(\cdot)$ Gamma fonksiyonunu temsil etmektedir.

Tanım 2 (Hilfer, 2000; Samko vd., 1993). Bir $f(x)$ fonksiyonunun Caputo kesirli türevi şu şekilde tanımlanır:

$$D^a f(x) = I^{a-n} D^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-a)} \int_0^x (x-t)^{n-a-1} f^{(n)}(t) dt. \quad (2)$$

Burada $n-1 < a \leq n, n \in N, x > 0, f \in C_{-1}^n$.

Teorem 1 (Wang ve Liu, 2016). Eğer $f \in C_\mu, \mu, \gamma \geq -1, \alpha, \beta \geq 0$ olmak üzere aşağıdaki özellikler mevcuttur.

- (i) $I^\alpha I^\beta f(x) = I^\beta I^\alpha f(x) = I^{\alpha+\beta} f(x),$
- (ii) $I^\alpha x^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} x^{\alpha+\gamma},$
- (iii) $D^\alpha I^\alpha f(x) = f(x),$
- (iv) $I^\alpha D^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0^+) \frac{x^k}{k!}, x > 0.$

Tanım 3 (Mittag-Leffler, 1903). Mittag-Leffler fonksiyonunun tanımı

$$E_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(na+1)}. \quad (3)$$

ile verilmiştir. Mittag-Leffler fonksiyonu E_a ile gösterilmektedir.

Tanım 4 (Maitama ve Zhao, 2019). $0 < \alpha \leq 1$, $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli fonksiyon olsun. $f(t)$ fonksiyonunun Shehu dönüşümü

$$A = \left\{ f(t): \exists K, \varphi_1, \varphi_2 > 0, |f(t)| < K \exp\left(\frac{t}{\varphi_i}\right), \text{ if } t \in (-1)^i \times [0, \infty) \right\}$$

kümesi üzerinde

$$\mathbb{S}[f(t)] = V(s, u) = \int_0^{\infty} e^{\frac{-st}{u}} f(t) dt. \quad (4)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Tanım 5 (Maitama ve Zhao, 2019). $\mathbb{S}[f(t)] = V(s, u)$ olsun. O halde Shehu dönüşümünün Caputo kesirli türevi

$$\mathbb{S}[D_t^\mu f(t)] = \left(\frac{s}{u}\right)^\mu V(s, u) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{s}{u}\right)^{\mu-k-1} f^{(k)}(0^+). \quad (5)$$

şeklinde verilmektedir. Burada $t > 0$ ve $n - 1 < \mu \leq n$ ' dir.

Teorem 2 (Shehu dönüşümünün varlığı için yeter koşul) (Maitama ve Zhao, 2019): Eğer $v(t)$ fonksiyonu her sonlu $0 \leq t \leq \beta$ aralığında parçalı sürekli ve $t > \beta$ için α üstel dereceye sahip ise bu fonksiyonun $V(s, u)$ Shehu dönüşümü mevcuttur.

İspat: Herhangi bir pozitif sayı β için, cebirsel olarak

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{st}{u}\right) v(t) dt &= \int_0^{\beta} \exp\left(-\frac{st}{u}\right) v(t) dt \\ &+ \int_{\beta}^{\infty} \exp\left(-\frac{st}{u}\right) v(t) dt \end{aligned} \quad (6)$$

sonucuna varılır.

$v(t)$ fonksiyonu her $0 \leq t \leq \beta$ sonlu aralığında parçalı olduğu için sağ taraftaki birinci integral vardır. Ayrıca, $v(t)$ fonksiyonu $t > \beta$ için üstel α mertebesinde olduğundan, sağ taraftaki ikinci integral mevcuttur. Bu iddiayı doğrulamak için aşağıdaki durumu ele alınmaktadır.

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\beta}^{\infty} \exp\left(-\frac{st}{u}\right) v(t) dt \right| &\leq \int_{\beta}^{\infty} \left| \exp\left(-\frac{st}{u}\right) v(t) \right| dt \\
&\leq \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{st}{u}\right) |v(t)| dt \\
&\leq \int_{\beta}^{\infty} \exp\left(-\frac{st}{u}\right) N \exp(\alpha t) dt \\
&= N \int_{\beta}^{\infty} \exp\left(-\frac{(s-\alpha u)t}{u}\right) dt \\
&= -\frac{uN}{(s-\alpha u)} \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \left[\exp\left(-\frac{(s-\alpha u)t}{u}\right) \right]_{\gamma}^{\infty} \\
&= -\frac{uN}{s-\alpha u}
\end{aligned}$$

dur.

Teorem 3 (Maitama ve Zhao, 2019) $\mathbb{S}[f(t)] = V(s, u)$ olsun. Öyleyse,

1. c reel bir sabit ise,

$$\mathbb{S}[c] = c \frac{u}{s}, \quad (7)$$

dir.

2. w reel bir sabit ise, o zaman;

$$\mathbb{S}[t^w] = \Gamma\left(1 + \frac{w}{\alpha}\right) \left(\frac{u}{s}\right)^{1+\frac{w}{\alpha}} \quad (8)$$

dır.

3. KULLANILAN METOTLAR

Bu bölümde, tezde kullanılan yöntemler sunulmuştur.

3.1. q-Homotopi Shehu Analiz Dönüşüm Yöntemi (q-HSADY)

$$D_t^{\mu} v(x, y, t) + Mv(x, y, t) + Nv(x, y, t) = f(x, y, t), n-1 < \mu \leq n, \quad (9)$$

kesirli mertebeden doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Burada M doğrusal operatörü, N doğrusal olmayan operatörü, $f(x, y, t)$ kaynak terimini gösterir. D_t^{μ} , μ . mertebeden Caputo anlamda bir kesirli türev operatörüdür.

Şimdi, (9) denkleminde Shehu dönüşümünü uygulayarak ve başlangıç koşulunu kullanarak,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{S}{u}\right)^\mu \mathbb{S}[v(x, y, t)] - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{S}{u}\right)^{\mu-k-1} v^{(k)}(x, y, 0) + \mathbb{S}[Mv(x, y, t) + Nv(x, y, t)] \\ & = \mathbb{S}[f(x, y, t)] \end{aligned} \quad (10)$$

eşitliği bulunmaktadır.

(10) denklemini sadeleştirilirse,

$$\begin{aligned} & \mathbb{S}[v(x, y, t)] - \left(\frac{u}{S}\right)^\mu \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{S}{u}\right)^{\mu-k-1} v^{(k)}(x, y, 0) + \left(\frac{u}{S}\right)^\mu \mathbb{S}[Mv(x, y, t) + Nv(x, y, t) \\ & - f(x, y, t)] = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

elde edilir. Reel $\varphi(x, y, t; q)$ fonksiyonu için homotopi analiz metodu (HAM) yardımıyla doğrusal olmayan operatörü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} N[\varphi(x, y, t; q)] &= \mathbb{S}[\varphi(x, y, t; q)] - \left(\frac{u}{S}\right)^\mu \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{S}{u}\right)^{\mu-k-1} \varphi^{(k)}(x, y, t; q)(0^+) + \left(\frac{u}{S}\right)^\mu \\ & \times \{\mathbb{S}[M\varphi(x, y, t; q) + N\varphi(x, y, t; q) - f(x, y, t)]\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Burada $q \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ dir.

Aşağıdaki gibi bir homotopi kurulur:

$$(1 - nq)\mathbb{S}[\varphi(x, y, t; q) - v_0(x, y, t)] = hqH(x, y, t)N[\varphi(x, y, t; q)]. \quad (13)$$

Burada, $h \neq 0$ bir yardımcı parametredir ve $\mathbb{S}$, Shehu dönüşümünü gösterir. $q = 0$ ve $q = \frac{1}{n}$ için, (9) denklemindeki sonuçlar sırasıyla sağlanır:

$$\varphi(x, y, t; 0) = v_0(x, y, t), \quad \varphi\left(x, y, t; \frac{1}{n}\right) = v(x, y, t). \quad (14)$$

Bu nedenle, q 'yu 0' dan $\frac{1}{n}$ 'ye yükselterek, $\varphi(x, y, t; q)$ çözümü $v_0(x, y, t)$ 'den $v(x, y, t)$ çözümüne yakınsar. Taylor teoremi q civarında açılıp $\varphi(x, y, t; q)$ 'yu genişleterek, şu ifade elde edilir:

$$\varphi(x, y, t; q) = v_0(x, y, t) + \sum_{i=1}^{\infty} v_m(x, y, t) q^m. \quad (15)$$

Burada,

$$v_m(x, y, t) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \varphi(x, y, t; q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} \quad (16)$$

dır. (15) denklemi, $q = \frac{1}{n}$ 'de uygun n ve h için $v_0(x, y, t)$ 'ye yakınsar. Ardından, orijinal doğrusal olmayan denkleminin çözümlerinden biri

$$v(x, y, t) = v_0(x, y, t) + \sum_{m=1}^{\infty} v_m(x, y, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m \quad (17)$$

şeklinde bulunur.

Sıfırıncı mertebeden deformasyon denkleminin q 'ya göre m –kez türevi alınırsa ve $m!$ 'ye bölersek, sonra $q = 0$ için

$$\mathbb{S}[v_m(x, y, t) - k_m v_{m-1}(x, y, t)] = hH(x, y, t) \mathcal{R}_m(\vec{v}_{m-1}) \quad (18)$$

olarak bulunur.

Burada vektörler

$$\vec{v}_m = \{v_0(x, y, t), v_1(x, y, t), \dots, v_m(x, y, t)\}. \quad (19)$$

ile tanımlıdır. (18) denklemin ters Shehu dönüşümü uygulandığında

$$u_m(x, y, t) = k_m u_{m-1}(x, y, t) + h\mathbb{S}^{-1}[H(x, y, t) \mathcal{R}_m(\vec{u}_{m-1})] \quad (20)$$

eşitliği bulunur. Burada,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_m(\vec{v}_{m-1}) &= \mathbb{S}[v_{m-1}(x, y, t)] - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) \left(\frac{u}{s}\right)^\mu \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{s}{u}\right)^{\mu-k-1} v^{(k)}(x, y, t; q)(0^+)\right) \\ &+ \mathbb{S}[f(x, y, t)] + \left(\frac{u}{s}\right)^\mu \mathbb{S}[Rv_{m-1} + H_{m-1}] \end{aligned} \quad (21)$$

dir.

Burada

$$k_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1, \\ n, & m > 1 \end{cases} \quad (22)$$

dir. Burada, H_m homotopi polinomudur ve aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$\begin{aligned} H_m &= \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \varphi(x, y, t; q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} \quad \text{ve} \\ \varphi(x, y, t; q) &= \varphi_0 + q\varphi_1 + q^2\varphi_2 + \dots \end{aligned} \quad (23)$$

(20) ve (21) denklemleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} v_m(x, y, t) &= (k_m + h)v_{m-1}(x, y, t) - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) \\ &\times \mathbb{S}^{-1} \left(\left(\frac{u}{s}\right)^\mu \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{s}{u}\right)^{\mu-k-1} v^{(k)}(x, y, t; q)(0^+)\right) + \mathbb{S}[f(x, y, t)] \right) \\ &+ h\mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{s}\right)^\mu \mathbb{S}(Rv_{m-1}(x, y, t) + H_{m-1}(x, y, t)) \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

şeklinde bulunur. q-HSADY kullanılarak seri çözümü

$$v(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} v_m(x, y, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m \quad (25)$$

olarak elde edilir.

3.2. Kesirli Shehu Dönüşümü Ayrıştırma Yöntemi (KSDAY)

$$D_t^\mu v(x, y, t) + Mv(x, y, t) + Nv(x, y, t) = f(x, y, t), n-1 < \mu \leq n, \quad (26)$$

kesirli mertebeden doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Burada M doğrusal operatörü, N doğrusal olmayan operatörü, $f(x, y, t)$ kaynak terimini gösterir. D_t^μ , μ -yüncü mertebeden Caputo anlamda bir kesirli türev operatörüdür. Şimdi, (26) denklemine Shehu dönüşümünü uygulayarak ve başlangıç koşulunu kullanarak,

$$\begin{aligned} \left(\frac{S}{u}\right)^\mu \mathbb{S}[v(x, y, t)] - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{S}{u}\right)^{\mu-k-1} v^{(k)}(x, y, 0) + \mathbb{S}[Mv(x, y, t) + Nv(x, y, t)] \\ = \mathbb{S}[f(x, y, t)] \end{aligned} \quad (27)$$

eşitliği bulunmaktadır

(27) denklemini düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \mathbb{S}[v(x, y, t)] - \left(\frac{u}{S}\right)^\mu \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{S}{u}\right)^{\mu-k-1} v^{(k)}(x, y, 0) + \left(\frac{u}{S}\right)^\mu \mathbb{S}[Mv(x, y, t) + Nv(x, y, t) \\ - f(x, y, t)] = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

bulunur.

(28) denklemine ters Shehu dönüşümü uygulanırsa,

$$v(x, y, t) = H(x, y, t) - \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{u}{S}\right)^\mu \mathbb{S}[Mv(x, y, t) + Nv(x, y, t)] \right] \quad (29)$$

olur. Burada $H(x, y, t)$, başlangıç koşulundan ve homojen olmayan terimden elde edilir. Şimdi, sonsuz seri çözümünün şu şekilde olduğunu varsayalım:

$$v(x, y, t) = \sum_{l=0}^{\infty} v_l(x, y, t) \quad (30)$$

dir.

(29) ve (30) denklemlerini kullanarak,

$$\sum_{l=0}^{\infty} v_l(x, y, t) = H(x, y, t) - \mathbb{S}^{-1} \left(\left(\frac{u}{s} \right)^{\mu} \mathbb{S} \left[M \sum_{l=0}^{\infty} v_l(x, y, t) + \sum_{l=0}^{\infty} A_l \right] \right) \quad (31)$$

elde edilir. Burada A_l , Adomian polinomudur ve doğrusal olmayan $Nv(x, y, t)$ terimini gösterir. (31) denkleminin her iki tarafı karşılaştırılırsa,

$$v_0(x, y, t) = H(x, y, t), \quad (32)$$

$$v_1(x, y, t) = -\mathbb{S}^{-1} \left(\left(\frac{u}{s} \right)^{\mu} \mathbb{S} [Mv_0(x, y, t) + A_0] \right), \quad (33)$$

$$v_2(x, y, t) = -\mathbb{S}^{-1} \left(\left(\frac{u}{s} \right)^{\mu} \mathbb{S} [Mv_1(x, y, t) + A_1] \right), \quad (34)$$

$\vdots$

olur. Benzer şekilde, genelleştirilirse

$$v_{l+1}(x, y, t) = -\mathbb{S}^{-1} \left(\left(\frac{u}{s} \right)^{\mu} \mathbb{S} [Mv_l(x, y, t) + A_l] \right), l \geq 1. \quad (35)$$

elde edilir.

Son olarak, yaklaşık çözüm $v(x, y, t)$

$$v(x, y, t) = \sum_{l=0}^{\infty} v_l(x, y, t) \quad (36)$$

olarak bulunur.

4.YAPILAN ÇALIŞMALAR

Örnek 4.1 (Anaç ve Bektaş, 2022; Veeresha ve Prakasha, 2019) Aşağıdaki kesirli mertebeden Zakharov-Kuznetsov (KMZK) (2,2,2) denklemini inceleyelim.

$$\frac{\partial^{\mu} v}{\partial t^{\mu}} + \frac{\partial v^2}{\partial x} + \frac{1}{8} \frac{\partial^3 v^2}{\partial x^3} + \frac{1}{8} \frac{\partial^3 v^2}{\partial x \partial y^2} = 0, \quad 0 < \mu \leq 1 \quad (37)$$

dir.

Bu denklemin başlangıç koşulu,

$$v(x, y, 0) = \frac{4}{3} \rho \sinh^2(x + y) \quad (38)$$

dır. Burada ρ reel sabittir.

Durum (i) : KMZK (2,2,2) Denklemi için q-HSADY çözümü

Şimdi, (37) denkleminde Shehu dönüşümünü uygulayarak ve (38) başlangıç koşulunu kullanarak,

$$\mathbb{S}[v(x, y, t)] = \frac{u}{s} \left(\frac{4}{3} \rho \sinh^2(x + y) \right) - \frac{u^\mu}{s^\mu} \mathbb{S} \left[\frac{\partial v^2}{\partial x} + \frac{1}{8} \frac{\partial^3 v^2}{\partial x^3} + \frac{1}{8} \frac{\partial^3 v^2}{\partial x \partial y^2} \right] \quad (39)$$

elde edilir. (39) denklemini kullanarak doğrusal olmayan operatörü,

$$\begin{aligned} N[\varphi(x, y, t; q)] &= \mathbb{S}[\varphi(x, y, t; q)] - \frac{u}{s} \left(\frac{4}{3} \rho \sinh^2(x + y) \right) \\ &+ \frac{u^\mu}{s^\mu} \mathbb{S} \left[\frac{\partial (\varphi(x, y, t; q))^2}{\partial x} + \frac{1}{8} \frac{\partial^3 (\varphi(x, y, t; q))^2}{\partial x^3} + \frac{1}{8} \frac{\partial^3 (\varphi(x, y, t; q))^2}{\partial x \partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (40)$$

olacak şekilde tanımlanır. Önerilen algoritmayı uygulayarak, m . dereceden deformasyon denklemi şu şekilde tanımlanır:

$$\mathbb{S}[v_m(x, y, t) - k_m v_{m-1}(x, y, t)] = h \mathfrak{R}_m[\vec{v}_{m-1}] \quad (41)$$

dir.

Burada,

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_m[\vec{v}_{m-1}] &= \mathbb{S}[v_{m-1}(x, y, t)] - \left(1 - \frac{k_m}{n} \right) \frac{u}{s} \left(\frac{4}{3} \rho \sinh^2(x + y) \right) \\ &+ \frac{u^\mu}{s^\mu} \mathbb{S} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{j=0}^r V_j V_{r-j} \right) + \frac{1}{8} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(\sum_{j=0}^r V_j V_{r-j} \right) \right. \\ &\left. + \frac{1}{8} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \left(\sum_{j=0}^r V_j V_{r-j} \right) \right] \end{aligned} \quad (42)$$

tür. (41) denkleminde ters Shehu dönüşümü uygulanırsa,

$$v_m(x, y, t) = k_m v_{m-1}(x, y, t) + h \mathbb{S}^{-1}[\mathfrak{R}_m[\vec{v}_{m-1}]] \quad (43)$$

olarak bulunur. Başlangıç koşulunun kullanılmasıyla,

$$v_0(x, y, t) = \frac{4}{3} \rho \sinh^2(x + y) \quad (44)$$

olur.

$v_1(x, y, t)$ değerini bulmak için, (43) eşitliğinde $m = 1$ koyarak,

$$v_1(x, y, t) = k_1 v_0(x, y, t) + h S^{-1}[\mathcal{R}_1[\vec{v}_0]] \quad (45)$$

bulunur.

(42) denklemi kullanılarak $m = 1$ için

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1(\vec{v}_0) = & \mathbb{S}[\vec{v}_0(x, y, t)] - \left(1 - \frac{0}{n}\right) \frac{u}{s} \left(\frac{4}{3} \rho \sinh^2(x + y)\right) \\ & + \frac{u^\mu}{s^\mu} \mathbb{S} \left[\frac{\partial v_0^2}{\partial x} + \frac{1}{8} \frac{\partial^3 v_0^2}{\partial x^3} + \frac{1}{8} \frac{\partial^3 v_0^2}{\partial x \partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (46)$$

olarak elde edilir.

O halde (46) denklemi, (45) denkleminde yerine konulursa,

$$v_1(x, y, t) = \frac{32 h \rho^2 t^\mu}{9 \Gamma(\mu + 1)} (10 \cosh^2(x + y) - 7) \cosh(x + y) \sinh(x + y) \quad (47)$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde, $v_2(x, y, t)$, değerini bulmak için, (43)-(44) denklemlerine $m = 2$ koyarak

$$\begin{aligned} v_2(x, y, t) = & \frac{32 (n + h) h t^\mu}{9 \Gamma(\mu + 1)} ((10 \cosh^2(x + y) - 7) \cosh(x + y) \rho^2 \sinh(x + y)) \\ & + \frac{256 h^2 \rho^3 t^{2\mu}}{9 \Gamma(2\mu + 1)} (1460 \cosh^6(x + y) - 2498 \cosh^4(x + y) + 1139 \cosh^2(x + y) \\ & - 89) \end{aligned} \quad (48)$$

olarak elde edilir. Bu şekilde, diğer terimler elde edilebilir. Böylece, (37) denkleminin q-HSADY çözümü

$$v(x, y, t) = v_0(x, y, t) + \sum_{m=1}^{\infty} v_m(x, y, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m \quad (49)$$

ile tanımlanır.

Eğer (49) denklemine $\mu = 1, n = 1, h = -1$ koyarsak, elde edilen sonuç $L \rightarrow \infty$ iken

$$\sum_{m=1}^L v_m(x, y, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m \quad (50)$$

serisi, KMZK (2,2,2) denkleminin analitik çözümü olan

$$v(x, y, t) = \frac{4}{3} \rho \sinh^2(x + y - \rho t) \quad (51)$$

ye yakınsar.

Durum (ii): KMZK (2,2,2) Denklemi için KSDAY çözümü

Şimdi, (37) denkleminin her iki tarafına Shehu dönüşümü uygulanırsa,

$$\mathbb{S}[v(x, y, t)] = \frac{u}{s} \left(\frac{4}{3} \rho \sinh^2(x + y) \right) - \frac{u^\mu}{s^\mu} \mathbb{S} \left[\frac{\partial v^2}{\partial x} + \frac{1}{8} \frac{\partial^3 v^2}{\partial x^3} + \frac{1}{8} \frac{\partial^3 v^2}{\partial x \partial y^2} \right] \quad (52)$$

olarak bulunur. (52) denkleme ters Shehu dönüşümü uygulandığında,

$$v(x, y, t) = \left(\frac{4}{3} \rho \sinh^2(x + y) \right) - \mathbb{S}^{-1} \left(\frac{u^\mu}{s^\mu} \mathbb{S} \left[\frac{\partial v^2}{\partial x} + \frac{1}{8} \frac{\partial^3 v^2}{\partial x^3} + \frac{1}{8} \frac{\partial^3 v^2}{\partial x \partial y^2} \right] \right) \quad (53)$$

$v(x, y, t)$ bilinmeyen fonksiyonunun sonsuz seri çözümünün

$$v(x, y, t) = \sum_{l=0}^{\infty} v_l(x, y, t) \quad (54)$$

olduğunu varsayalım.

$$v^2 = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \quad (55)$$

doğrusal olmayan terimlerini gösteren Adomian polinomlarıdır. Şimdi, (53) denklemini yeniden yazarsak;

$$\sum_{l=0}^{\infty} v_l(x, y, t) = \frac{4}{3} \rho \sinh^2(x + y) - \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{u^\mu}{s^\mu} \mathbb{S} \left[\frac{\partial}{\partial x} \sum_{l=0}^{\infty} A_l + \frac{1}{8} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \sum_{l=0}^{\infty} A_l + \frac{1}{8} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \sum_{l=0}^{\infty} A_l \right] \right\} \quad (56)$$

olur. (56) denkleminin her iki tarafını karşılaştırarak, (38) başlangıç koşulunu ve (56) denkleminde de yararlanarak kolayca

$$v_0(x, y, t) = \frac{4}{3} \rho \sinh^2(x + y), \quad (57)$$

$$v_1(x, y, t) = \frac{-32\rho^2 t^\mu}{9\Gamma(\mu+1)} (10\cosh^2(x + y) - 7) \cosh(x + y) \sinh(x + y), \quad (58)$$

$$v_2(x, y, t) = \frac{128\rho^3 t^{2\mu}}{27\Gamma(2\mu+1)} (1200\cosh^6(x + y) - 2080\cosh^4(x + y) + 968\cosh^2(x + y) - 79) \quad (59)$$

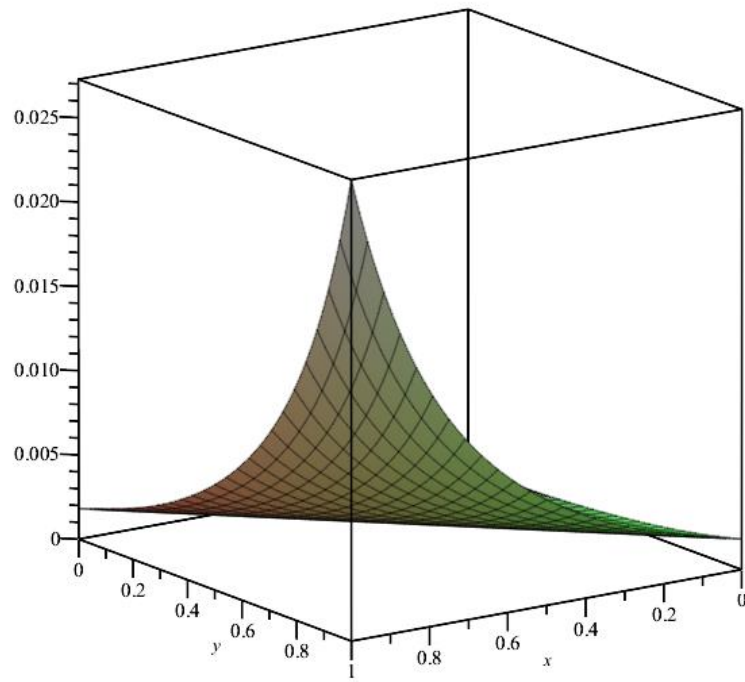
⋮

iterasyonları bulunur. Benzer şekilde

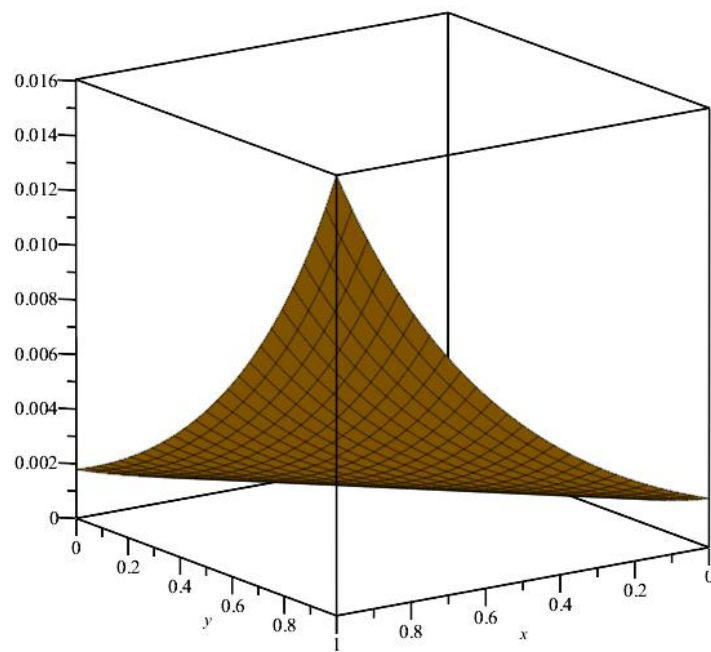
$$\begin{aligned} v(x, y, t) &= \sum_{l=0}^{\infty} v_l(x, y, t) = v_0(x, y, t) + v_1(x, y, t) + v_2(x, y, t) + \dots \\ &= \frac{4}{3} \rho \sinh^2(x + y) - \frac{32\rho^2 t^\mu}{9\Gamma(\mu+1)} (10\cosh^2(x + y) - 7) \cosh(x + y) \sinh(x + y) + \\ &\quad \frac{128\rho^3 t^{2\mu}}{27\Gamma(2\mu+1)} (1200\cosh^6(x + y) - 2080\cosh^4(x + y) + 968\cosh^2(x + y) - 79), \quad (60) \end{aligned}$$

çözümleri elde edilir. $v(x, y, t)'$ nin q-HSADY çözümünün, problemin analitik çözümü ile mükemmel bir uyum içinde olduğu bulunmuştur. Örnekteki $v(x, y, t)$ değişkeninin sonuçlarını daha iyi anlamak için Şekil 1'de çizilmiştir. Şekil 1'de bu çözümlerin daha yüksek doğrulukta olduğunu gözlemliyoruz.

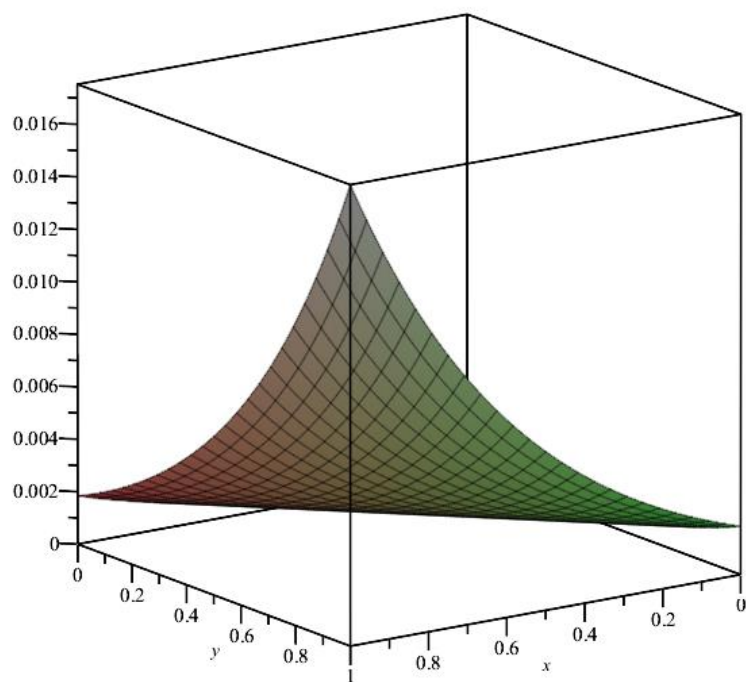
(a)



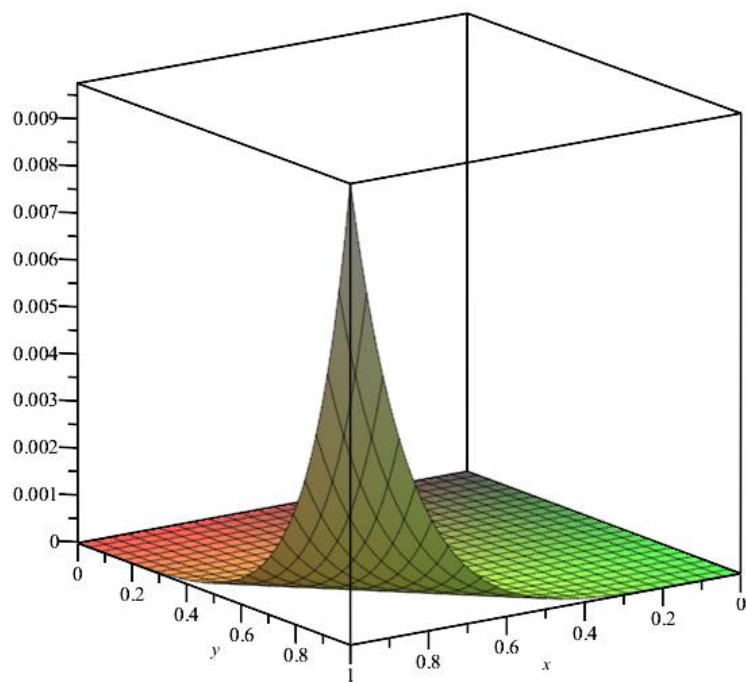
(b)



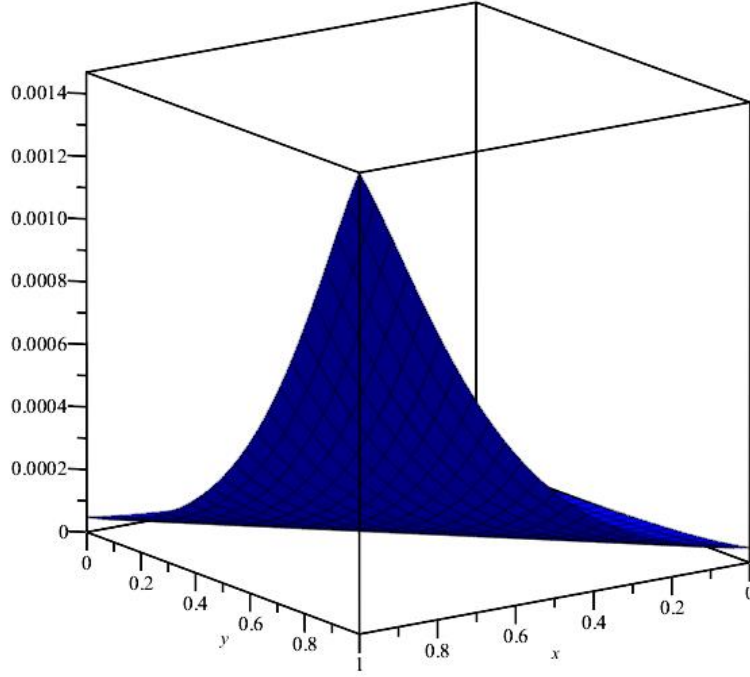
(c)



(d)



(e)



Şekil 1. Örnek 4.1 için $t = 0.5, \rho = 0.001, h = -1, n = 1, \mu = 1$ olmak üzere

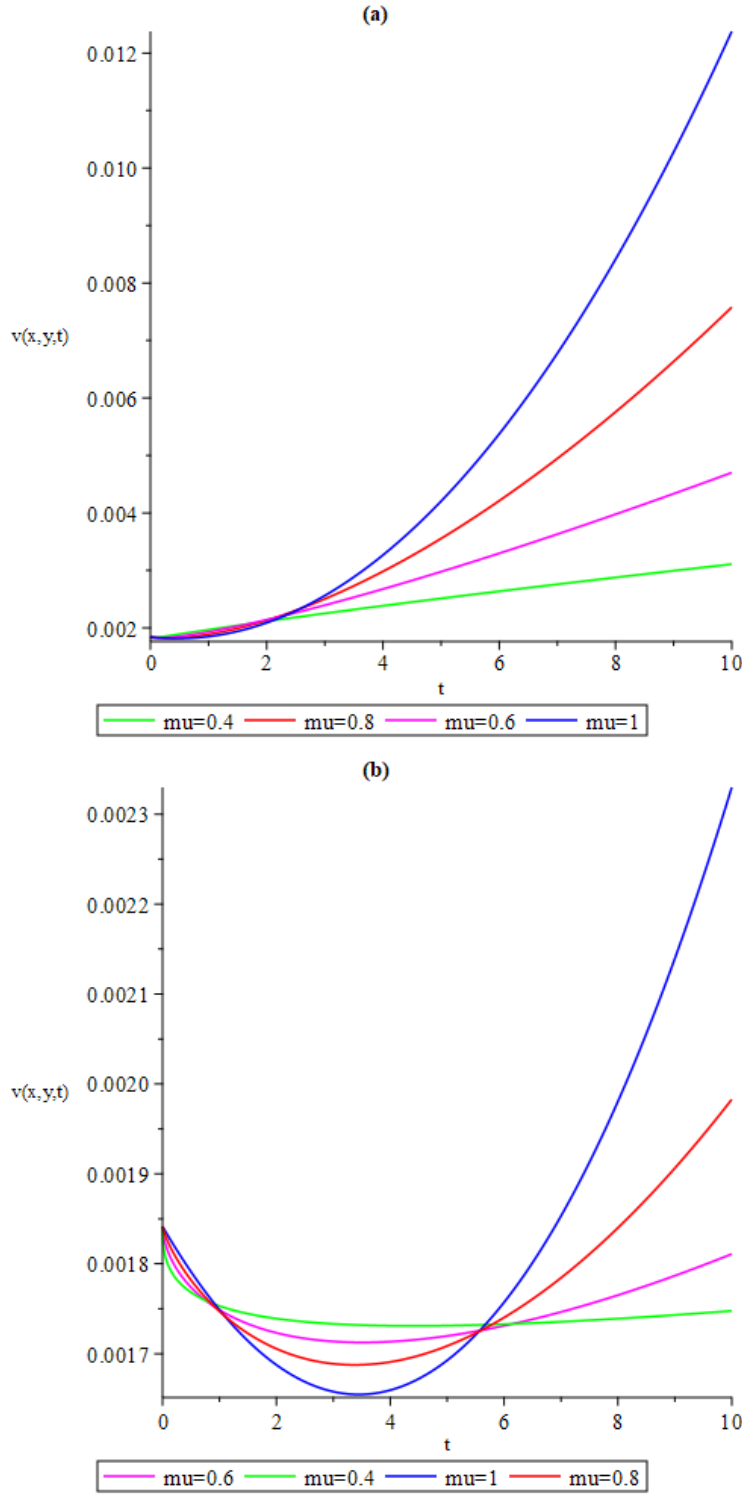
(a) q-HSADY çözümü

(b) KSDAY çözümü

(c) Örnek 4.1 denkleminin analitik çözümü

(d) Mutlak hata = $|v_{analitik} - v_{q-HSADY}|$

(e) Mutlak hata = $|v_{analitik} - v_{KSDAY}|$



Şekil 2. Örnek 4.1 için $x = 0.5, \rho = 0.001, h = -1, n = 1, y = 1$ olmak üzere farklı μ değerleri için

- (a) q-HSADY çözümleri ile analitik çözümün karşılaştırılması
(b) KSDAY çözümleri ile analitik çözümün karşılaştırılması

Tablo 1. Örnek 4.1 de $t = 0.5, \rho = 0.001, h = -1$ ve $n = 1$ olmak üzere farklı μ ' ler için farklı x ve y değerleriyle q-HSADY denklemi için sayısal çözümler

x	y	$\mu = 0.55$	$\mu = 0.7$	$\mu = 0.85$	$\mu = 1$
0.1	0.1	4.637813477	4.637875404	4.637843940	4.637795713
	0.2	4.637823412	4.637804196	4.637795713	4.637791548

Tablo 1. (Devamı)

x	y	$\mu = 0.55$	$\mu = 0.7$	$\mu = 0.85$	$\mu = 1$
0.2	0.3	4.637846506	4.637818954	4.637805312	4.637798001
	0.4	4.637865894	4.637833084	4.637815429	4.637805347
	0.5	4.637882745	4.637846706	4.637825954	4.637813477
	0.1	4.637897554	4.637855564	4.637836755	4.637822277
	0.2	4.637820793	4.637802431	4.637794325	4.637790346
	0.3	4.637842856	4.637816532	4.637803497	4.637796511
	0.4	4.637861383	4.637830033	4.637813163	4.637803532
	0.5	4.637877483	4.637843049	4.637823219	4.637811300
0.3	0.1	4.637891634	4.637855564	4.637833542	4.637819707
	0.2	4.637818288	4.637800744	4.637793000	4.637789199
	0.3	4.637839372	4.637814218	4.637801764	4.637795088
	0.4	4.637857073	4.637839554	4.637810999	4.637801796
	0.5	4.637872456	4.637839554	4.637820608	4.637809218
0.4	0.1	4.637885977	4.637851512	4.637830469	4.637817253
	0.2	4.637815896	4.637799133	4.637791733	4.637788101
	0.3	4.637836040	4.637812006	4.637800107	4.637793728
	0.4	4.637852953	4.637824333	4.637808932	4.637800138
	0.5	4.637867651	4.637836214	4.637818112	4.637807229
0.5	0.1	4.637880571	4.637847640	4.637827534	4.637814905
	0.2	4.637813610	4.637797592	4.637790523	4.637787053
	0.3	4.637832856	4.637809894	4.637798524	4.637792431
	0.4	4.637849017	4.637821671	4.637806955	4.637798553
	0.5	4.637863061	4.637833023	4.637815726	4.637805328

Tablo 2. Örnek 4.1 de $t = 0.5, \rho = 0.001, h = -1$ ve $n = 1$ olmak üzere farklı μ ' ler için farklı x ve y değerleriyle KSDAY denklemi için sayısal çözümler

x	y	$\mu = 0.55$	$\mu = 0.7$	$\mu = 0.85$	$\mu = 1$
0.1	0.1	4.637740585	4.637766597	4.637776212	4.637776212
	0.2	4.637699943	4.637747195	4.637765255	4.637773716
	0.3	4.637656027	4.637724933	4.637752166	4.637765210
	0.4	4.637608630	4.637699540	4.637736652	4.637754824
	0.5	4.637557841	4.637670924	4.637718491	4.637742304
0.2	0.1	4.637741651	4.637766506	4.637775694	4.637779882
	0.2	4.637702814	4.637747968	4.637765223	4.637773309
	0.3	4.637660847	4.637726693	4.637752718	4.637765182
	0.4	4.637615552	4.637702428	4.637737892	4.637755257
	0.5	4.637567018	4.637675083	4.637720539	4.637743293
0.3	0.1	4.637742670	4.637766420	4.637775198	4.637779200
	0.2	4.637705559	4.637748706	4.637765193	4.637772920
	0.3	4.637665454	4.637728377	4.637753245	4.637765154
	0.4	4.637622170	4.637705190	4.637739078	4.637755672
	0.5	4.637575788	4.637679058	4.637722495	4.637744239
0.4	0.1	4.637743644	4.637766338	4.637774725	4.637778549
	0.2	4.637708182	4.637749412	4.637765166	4.637772548
	0.3	4.637669858	4.637729986	4.637753748	4.637765129
	0.4	4.637628495	4.637707829	4.637740212	4.637756067
	0.5	4.637584171	4.637682858	4.637724366	4.637745144
0.5	0.1	4.637744575	4.637766260	4.637774274	4.637777927
	0.2	4.637710688	4.637750086	4.637765140	4.637772193

Tablo 2. (Devamı)

x	y	$\mu = 0.55$	$\mu = 0.7$	$\mu = 0.85$	$\mu = 1$
	0.3	4.637674068	4.637731524	4.637754230	4.637765104
	0.4	4.637634541	4.637710352	4.637741296	4.637756446
	0.5	4.637592185	4.637686491	4.637726154	4.637746006

Tablo 3. Örnek 4.1 de $t = 0.5, \rho = 0.001, h = -1$ ve $n = 1$ olmak üzere farklı μ ' ler için farklı x ve y değerleriyle q-HSADY ile KSDAY çözümlerinin karşılaştırılması

x	y	$ u_{analitik} - u_{q-HSADY} $	$ u_{analitik} - u_{KSDAY} $
0.01	0.01	1.532534×10^{-10}	1.033881×10^{-6}
	0.02	8.98411×10^{-10}	2.091697×10^{-6}
	0.03	2.242169×10^{-9}	3.173798×10^{-6}
	0.04	4.401091×10^{-9}	4.280754×10^{-6}
	0.05	7.811066×10^{-9}	5.413265×10^{-6}
0.02	0.01	1.388450×10^{-10}	1.029203×10^{-6}
	0.02	6.22104×10^{-10}	2.081990×10^{-6}
	0.03	1.849505×10^{-9}	3.159190×10^{-6}
	0.04	3.761302×10^{-9}	4.261112×10^{-6}
	0.05	7.967740×10^{-9}	5.388541×10^{-6}
0.03	0.01	9.13870×10^{-11}	1.024578×10^{-6}
	0.02	6.73431×10^{-10}	2.072696×10^{-6}
	0.03	1.686756×10^{-9}	3.144920×10^{-6}
	0.04	4.515243×10^{-9}	4.241948×10^{-6}
	0.05	8.333249×10^{-9}	5.364087×10^{-6}
0.04	0.01	9.80123×10^{-11}	1.019964×10^{-6}
	0.02	5.29414×10^{-10}	1.541550×10^{-6}
	0.03	1.448935×10^{-9}	3.130594×10^{-6}
	0.04	3.922085×10^{-9}	4.222478×10^{-6}
	0.05	7.646288×10^{-9}	5.339685×10^{-6}
0.05	0.01	2.022579×10^{-10}	3.076806×10^{-6}
	0.02	4.081000×10^{-10}	2.053866×10^{-6}
	0.03	2.223376×10^{-9}	3.116386×10^{-6}
	0.04	3.679459×10^{-9}	4.203485×10^{-6}
	0.05	8.037882×10^{-9}	5.315467×10^{-6}

Örnek 4.2 (Anaç ve Bektaş, 2022; Veeresha ve Prakasha, 2019): Aşağıdaki kesirli mertebeden Zakharov-Kuznetsov (KMZK) (3,3,3) denklemini inceleyelim.

$$\frac{\partial^\mu v}{\partial t^\mu} + \frac{\partial v^3}{\partial x} + 2 \frac{\partial^3 v^3}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 v^3}{\partial x \partial y^2} = 0, \quad 0 < \mu \leq 1 \quad (61)$$

dir.

Bu denklemin başlangıç koşulu,

$$v(x, y, 0) = \frac{3}{2}\rho \sinh\left(\frac{x+y}{6}\right) \quad (62)$$

dır. Burada ρ reel sabittir.

Durum (i): KMZK (3,3,3) Denklemi için q-HSADY çözümü

Şimdi, (61) denkleminde Shehu dönüşümünü uygulayarak ve (62) başlangıç koşulunu kullanarak,

$$\mathbb{S}[v(x, y, t)] = \frac{u}{s} \left(\frac{3}{2}\rho \sinh\left(\frac{x+y}{6}\right) \right) - \frac{u^\mu}{s^\mu} \mathbb{S} \left[\frac{\partial v^3}{\partial x} + 2 \frac{\partial^3 v^3}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 v^3}{\partial x \partial y^2} \right]. \quad (63)$$

elde edilir. (63) denklemini kullanarak doğrusal olmayan operatörü,

$$\begin{aligned} N[\varphi(x, y, t; q)] &= \mathbb{S}[\varphi(x, y, t; q)] - \frac{u}{s} \left(\frac{3}{2}\rho \sinh\left(\frac{x+y}{6}\right) \right) \\ &+ \frac{u^\mu}{s^\mu} \mathbb{S} \left[\frac{\partial (\varphi(x, y, t; q))^3}{\partial x} + 2 \frac{\partial^3 (\varphi(x, y, t; q))^3}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 (\varphi(x, y, t; q))^3}{\partial x \partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (64)$$

olacak şekilde tanımlanır. Önerilen algoritmayı uygulayarak, m . dereceden deformasyon denklemi şu şekilde tanımlanır:

$$\mathbb{S}[v_m(x, y, t) - k_m v_{m-1}(x, y, t)] = h \mathfrak{R}_m[\vec{v}_{m-1}] \quad (65)$$

dir.

Burada,

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_m[\vec{v}_{m-1}] &= \mathbb{S}[v_{m-1}(x, y, t)] - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) \frac{u}{s} \left(\frac{3}{2}\rho \sinh\left(\frac{x+y}{6}\right) \right) \\ &+ \frac{u^\mu}{s^\mu} \mathbb{S} \left[\frac{\partial}{\partial x} \sum_{r=0}^{m-1} \left(\sum_{j=0}^r V_j V_{r-j} \right) V_{m-1-r} + 2 \frac{\partial^3}{\partial x^3} \sum_{r=0}^{m-1} \left(\sum_{j=0}^r V_r V_{r-j} \right) V_{m-1-r} \right. \\ &\left. + 2 \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \sum_{r=0}^{m-1} \left(\sum_{j=0}^r V_r V_{r-j} \right) V_{m-1-r} \right] \end{aligned} \quad (66)$$

tür. (65) denkleminde ters Shehu dönüşümü uygulanırsa,

$$v_m(x, y, t) = k_m v_{m-1}(x, y, t) + h \mathbb{S}^{-1}[\mathfrak{R}_m[\vec{v}_{m-1}]] \quad (67)$$

olarak bulunur. Başlangıç koşulunun kullanılmasıyla,

$$v_0(x, y, t) = \frac{3}{2} \rho \sinh\left(\frac{x+y}{6}\right) \quad (68)$$

olur.

$v_1(x, y, t)$ değerini bulmak için, (67) eşitliğinde $m = 1$ koyarak ,

$$v_1(x, y, t) = k_1 v_0(x, y, t) + h \mathbb{S}^{-1}[\mathfrak{R}_1[\vec{v}_0]] \quad (69)$$

bulunur.

(66) denklemi kullanılarak $m = 1$ için,

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_1(\vec{v}_0) = & \mathbb{S}[\vec{v}_0(x, y, t)] - \left(1 - \frac{0}{n}\right) \frac{u}{s} \left(\frac{3}{2} \rho \sinh\left(\frac{x+y}{6}\right)\right) \\ & + \frac{u^\mu}{s^\mu} \mathbb{S} \left[\frac{\partial v_0^3}{\partial x} + 2 \frac{\partial^3 v_0^3}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 v_0^3}{\partial x \partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (70)$$

olarak elde edilir.

O halde (70) denklemi, (69) denkleminde yerine konulursa,

$$v_1(x, y, t) = \frac{ht^\mu}{\Gamma(\mu+1)} \left(\frac{27\rho^3 \cosh^3\left(\frac{x+y}{6}\right)}{8} - 3\rho^3 \cosh\left(\frac{x+y}{6}\right) \right) \quad (71)$$

olur.

Benzer şekilde, $v_2(x, y, t)$, değerini bulmak için, (66)-(67) denklemlerine $m = 2$ koyarak

$$\begin{aligned} v_2(x, y, t) = & \frac{(n+h)ht^\mu}{\Gamma(\mu+1)} \left(\frac{27\rho^3 \cosh^3\left(\frac{x+y}{6}\right)}{8} - 3\rho^3 \cosh\left(\frac{x+y}{6}\right) \right) \\ & + \frac{3h^2\rho^5 t^{2\mu}}{32\Gamma(2\mu+1)} \sinh\left(\frac{x+y}{6}\right) \left(765 \cosh^4\left(\frac{x+y}{6}\right) - 729 \cosh^2\left(\frac{x+y}{6}\right) + 91 \right) \end{aligned} \quad (72)$$

olarak elde edilir. Bu şekilde, diğer terimler elde edilebilir. Böylece, (61) denkleminin q-HSADY çözümü

$$v(x, y, t) = v_0(x, y, t) + \sum_{m=1}^{\infty} v_m(x, y, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m \quad (73)$$

ile tanımlanır.

Eğer (73) denkleminde $\mu = 1, n = 1, h = -1$ koyarsak, elde edilen sonuç $L \rightarrow \infty$ iken

$$\sum_{m=1}^L v_m(x, y, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m \quad (74)$$

serisi, KMZK (3,3,3) denkleminin analitik çözümü olan

$$v(x, y, t) = \frac{3}{2} \rho \sinh\left(\frac{x + y - \rho t}{6}\right) \quad (75)$$

ya yakınsar.

Durum (ii): KMZK (3,3,3) Denklemi için KSDAY çözümü

Şimdi, (61) denkleminin her iki tarafına Shehu dönüşümü uygulanırsa,

$$\mathbb{S}[v(x, y, t)] = \frac{u}{s} \left(\frac{3}{2} \rho \sinh\left(\frac{x+y}{6}\right)\right) - \frac{u^\mu}{s^\mu} \mathbb{S} \left[\frac{\partial v^3}{\partial x} + 2 \frac{\partial^3 v^3}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 v^3}{\partial x \partial y^2} \right] \quad (76)$$

olarak bulunur. (76) denkleminde ters Shehu dönüşümü uygulandığında,

$$v(x, y, t) = \left(\frac{3}{2} \rho \sinh\left(\frac{x+y}{6}\right)\right) - \mathbb{S}^{-1} \left(\frac{u^\mu}{s^\mu} \mathbb{S} \left[\frac{\partial v^3}{\partial x} + 2 \frac{\partial^3 v^3}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 v^3}{\partial x \partial y^2} \right] \right) \quad (77)$$

elde edilir.

$v(x, y, t)$ bilinmeyen fonksiyonunun sonsuz seri çözümünün

$$v(x, y, t) = \sum_{l=0}^{\infty} v_l(x, y, t) \quad (78)$$

olduğunu varsayalım.

$$v^3 = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \quad (79)$$

doğrusal olmayan terimlerini gösteren Adomian polinomlarıdır. Şimdi, (77) denklemini yeniden yazarsak;

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} v_l(x, y, t) = & \frac{3}{2} \rho \sinh\left(\frac{x+y}{6}\right) - \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{u^\mu}{s^\mu} \mathbb{S} \left[\frac{\partial}{\partial x} \sum_{l=0}^{\infty} A_l + 2 \frac{\partial^3}{\partial x^3} \sum_{l=0}^{\infty} A_l \right. \right. \\ & \left. \left. + 2 \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \sum_{l=0}^{\infty} A_l \right] \right\} \end{aligned} \quad (80)$$

olur. (80) denkleminin her iki tarafını karşılaştırarak, (62) başlangıç koşulunu ve (80) denkleminde de yararlanarak kolayca

$$v_0(x, y, t) = \frac{3}{2} \rho \sinh\left(\frac{x+y}{6}\right), \quad (81)$$

$$v_1(x, y, t) = \frac{-t^\mu}{\Gamma(\mu+1)} \left(\frac{27\rho^3 \cosh^3\left(\frac{x+y}{6}\right)}{8} - 3\rho^3 \cosh\left(\frac{x+y}{6}\right) \right), \quad (82)$$

$$\begin{aligned} v_2(x, y, t) = & \frac{3\rho^5 t^{2\mu}}{32\Gamma(2\mu+1)} \sinh\left(\frac{x+y}{6}\right) \\ & \times \left(765 \cosh^4\left(\frac{x+y}{6}\right) - 729 \cosh^2\left(\frac{x+y}{6}\right) + 91 \right), \end{aligned} \quad (83)$$

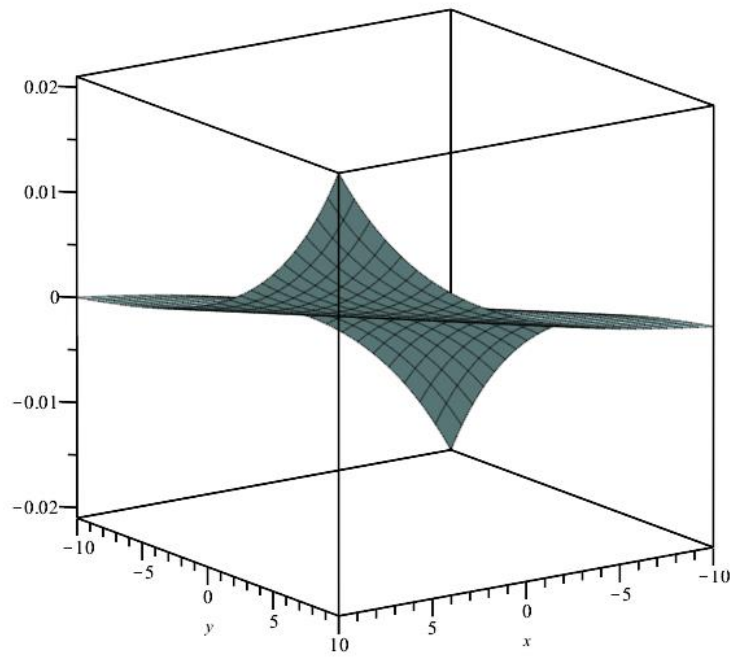
⋮

iterasyonları bulunur. Benzer şekilde

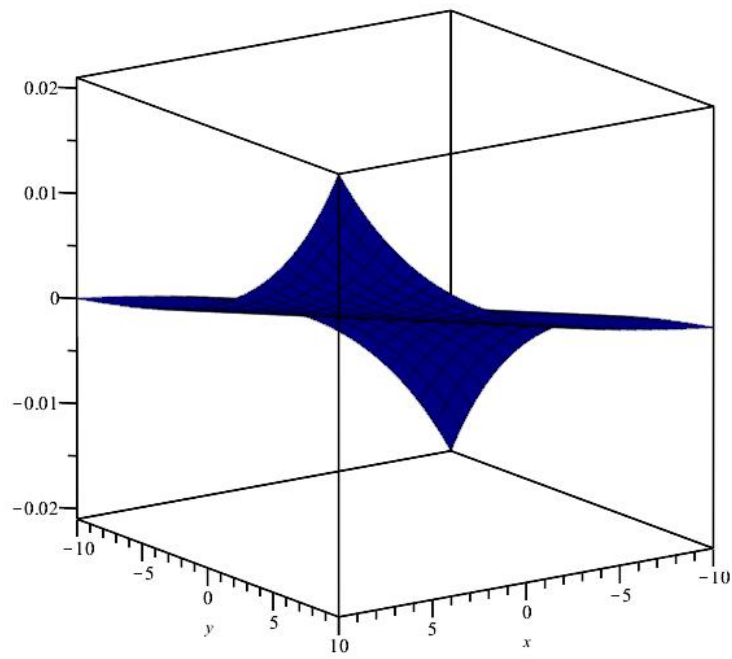
$$\begin{aligned} v(x, y, t) = & \sum_{l=0}^{\infty} v_l(x, y, t) = v_0(x, y, t) + v_1(x, y, t) + v_2(x, y, t) + \dots \\ = & \frac{3}{2} \rho \sinh\left(\frac{x+y}{6}\right) - \frac{t^\mu}{\Gamma(\mu+1)} \left(\frac{27\rho^3 \cosh^3\left(\frac{x+y}{6}\right)}{8} - 3\rho^3 \cosh\left(\frac{x+y}{6}\right) \right) \\ & + \frac{3\rho^5 t^{2\mu}}{32\Gamma(2\mu+1)} \sinh\left(\frac{x+y}{6}\right) \\ & \times \left(765 \cosh^4\left(\frac{x+y}{6}\right) - 729 \cosh^2\left(\frac{x+y}{6}\right) + 91 \right), \end{aligned} \quad (84)$$

çözümleri elde edilir. $v(x, y, t)$ 'nin q-HSADY çözümünün, problemin analitik çözümü ile mükemmel bir uyum içinde olduğu bulunmuştur. Örnekteki $v(x, y, t)$ değişkeninin sonuçlarını daha iyi anlamak için Şekil 3' te çizilmiştir. Şekil 3' te bu çözümlerin daha yüksek doğrulukta olduğunu gözlemliyoruz.

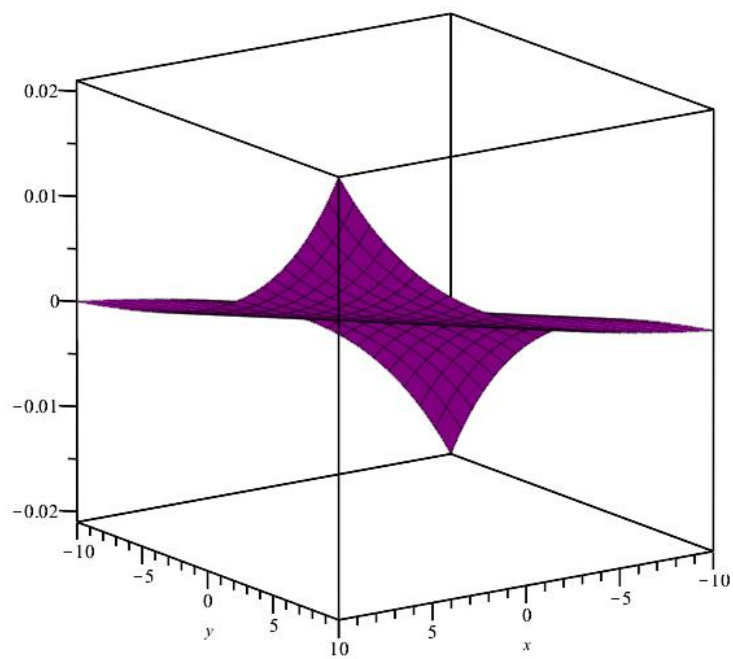
(a)



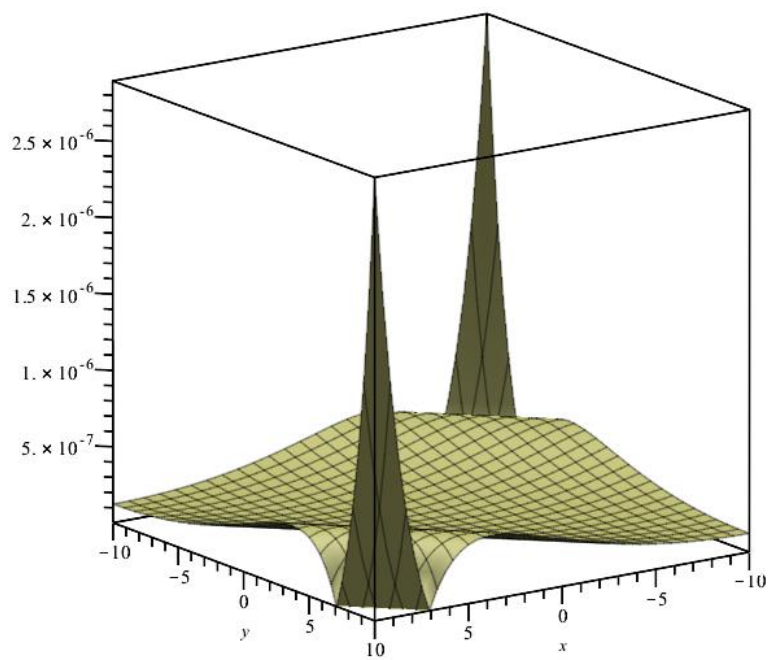
(b)



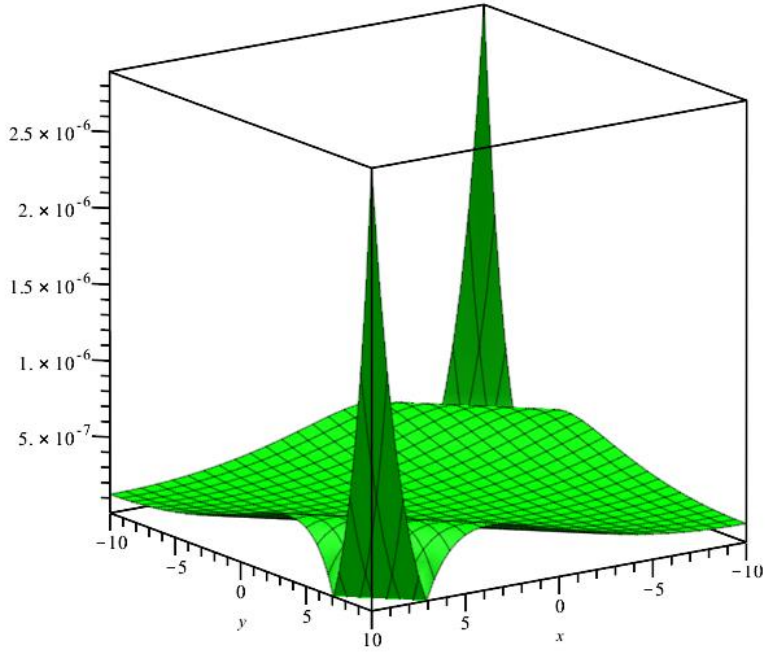
(c)



(d)



(e)



Şekil 3. Örnek 4.2 için $t = 0.5$, $\rho = 0.001$, $h = -1$, $n = 1$, $\mu = 1$ olmak üzere

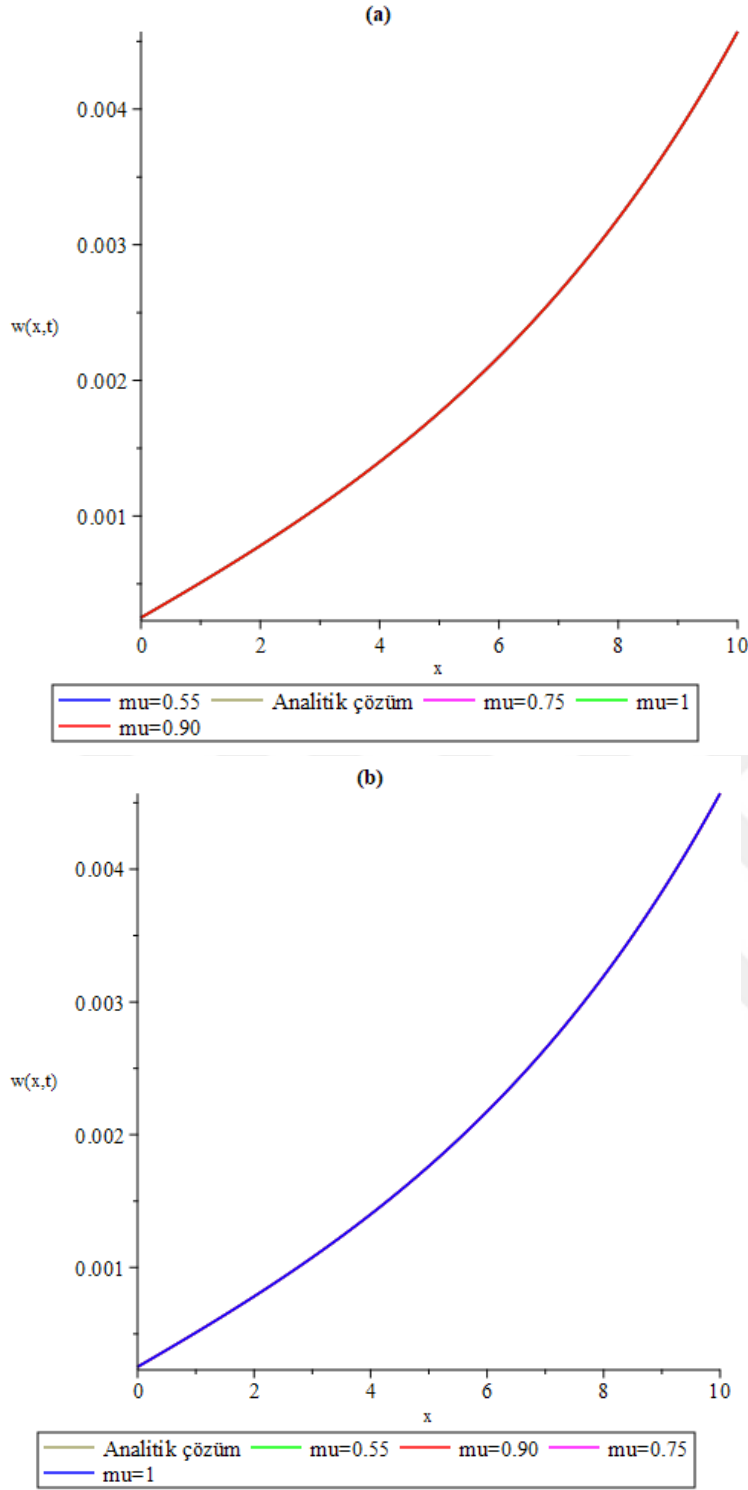
(a) q-HSADY çözümü

(b) HSDAY çözümü

(c) Analitik çözüm

(d) Mutlak hata = $|v_{analitik} - v_{q-HSADY}|$

(e) Mutlak hata = $|v_{analitik} - v_{HSADY}|$



Şekil 4. Örnek 4.2 için $t = 0.5, \rho = 0.001, h = -1, n = 1, y = 1$ olmak üzere farklı μ değerleri için

- (a) q-HSADY çözümleri ile analitik çözümün karşılaştırılması
(b) HSDAY çözümleri ile analitik çözümün karşılaştırılması

Tablo 4. Örnek 4.2 de $t = 0.5, \rho = 0.001, h = -1$ ve $n = 1$ olmak üzere farklı μ ' ler için farklı x ve y değerleriyle q-HSADY için sayısal çözümler

x	y	$\mu = 0.55$	$\mu = 0.7$	$\mu = 0.85$	$\mu = 1$
0.1	0.1	0.0000500089685	0.0000500090030	0.0000500090374	0.0000500090703
	0.2	0.0000750309589	0.0000750309938	0.0000750310286	0.0000750310286

Tablo 4. (Devamı)

x	y	$\mu = 0.55$	$\mu = 0.7$	$\mu = 0.85$	$\mu = 1$
0.2	0.3	0.0001000737901	0.0001000738257	0.0001000738612	0.0001000738951
	0.4	0.0001251444189	0.0001251444553	0.0001251444916	0.0001251445263
	0.5	0.0001502498093	0.0001502498466	0.0001502498839	0.0001502499195
	0.1	0.0000750309589	0.0000750309938	0.0000750310286	0.0000750310619
	0.2	0.0001000737901	0.0001000738257	0.0001000738612	0.0001000738951
0.3	0.3	0.0001251444189	0.0001251444553	0.0001251444916	0.0001251445263
	0.4	0.0001502498093	0.0001502498466	0.0001502498839	0.0001502499195
	0.5	0.0001753969353	0.0001753969738	0.0001753970123	0.0001753970491
	0.1	0.0001000737901	0.0001000738257	0.0001000738612	0.0001000738951
	0.2	0.0001251444189	0.0001251444553	0.0001251444916	0.0001251445263
0.4	0.3	0.0001502498093	0.0001502498466	0.0001502498839	0.0001502499195
	0.4	0.0001753969353	0.0001753969738	0.0001753970123	0.0001753970491
	0.5	0.0002005927819	0.0002005928218	0.0002005928617	0.0002005928998
	0.1	0.0001251444189	0.0001251444553	0.0001251444916	0.0001251445263
	0.2	0.0001502498093	0.0001502498466	0.0001502498839	0.0001502499195
0.5	0.3	0.0001753969353	0.0001753969738	0.0001753970123	0.0001753970491
	0.4	0.0002005927819	0.0002005928218	0.0002005928617	0.0002005928998
	0.5	0.0002258443489	0.0002258443905	0.0002258444319	0.0002258444715
	0.1	0.0001502498093	0.0001502498466	0.0001502498839	0.0001502499195
	0.2	0.0001753969353	0.0001753969738	0.0001753970123	0.0001753970491
	0.3	0.0002005927819	0.0002005928218	0.0002005928617	0.0002005928998
	0.4	0.0002258443489	0.0002258443905	0.0002258444319	0.0002258444715
	0.5	0.0002511586501	0.0002511586934	0.0002511587366	0.0002511587779

Tablo 5. Örnek 4.2 de $t = 0.5, \rho = 0.001, h = -1$ ve $n = 1$ olmak üzere farklı μ ' ler için farklı x ve y değerleriyle KSDAY denklemi için sayısal çözümler

x	y	$\mu = 0.55$	$\mu = 0.7$	$\mu = 0.85$	$\mu = 1$
0.1	0.1	0.0000500089685	0.0000500090030	0.0000500090374	0.0000500090703
	0.2	0.0000750309589	0.0000750309938	0.0000750310286	0.0000750310619
	0.3	0.0001000737901	0.0001000738257	0.0001000738612	0.0001000738951
	0.4	0.0001251444189	0.0001251444553	0.0001251444916	0.0001251445263
	0.5	0.0001502498093	0.0001502498466	0.0001502498839	0.0001502499195
0.2	0.1	0.0000750309589	0.0000750309938	0.0000750310286	0.0000750310619
	0.2	0.0001000737901	0.0001000738257	0.0001000738612	0.0001000738951
	0.3	0.0001251444189	0.0001251444553	0.0001251444916	0.0001251445263
	0.4	0.0001502498093	0.0001502498466	0.0001502498839	0.0001502499195
	0.5	0.0001753969353	0.0001753969738	0.0001753970123	0.0001753970491
0.3	0.1	0.0001000737901	0.0001000738257	0.0001000738612	0.0001000738951
	0.2	0.0001251444189	0.0001251444553	0.0001251444916	0.0001251445263
	0.3	0.0001502498093	0.0001502498466	0.0001502498839	0.0001502499195
	0.4	0.0001753969353	0.0001753969738	0.0001753970123	0.0001753970491
	0.5	0.0002005927819	0.0002005928218	0.0002005928617	0.0002005928998
0.4	0.1	0.0001251444189	0.0001251444553	0.0001251444916	0.0001251445263
	0.2	0.0001502498093	0.0001502498466	0.0001502498839	0.0001502499195
	0.3	0.0001753969353	0.0001753969738	0.0001753970123	0.0001753970491
	0.4	0.0002005927819	0.0002005928218	0.0002005928617	0.0002005928998
	0.5	0.0002258443489	0.0002258443905	0.0002258444319	0.0002258444715
0.5	0.1	0.0001502498093	0.0001502498466	0.0001502498839	0.0001502499195
	0.2	0.0001753969353	0.0001753969738	0.0001753970123	0.0001753970491

Tablo 5. (Devamı)

x	y	$\mu = 0.55$	$\mu = 0.7$	$\mu = 0.85$	$\mu = 1$
0.3	0.0002005927819	0.0002005928218	0.0002005928617	0.0002005928998	
0.4	0.0002258443489	0.0002258443905	0.0002258444319	0.0002258444715	
0.5	0.0002511586501	0.0002511586934	0.0002511587366	0.0002511587779	

Tablo 6. Örnek 4.2 de $t = 0.5, \rho = 0.001, h = -1$ ve $n = 1$ denklemin analitik çözümünün, q-HSADY ve KSDAY çözümlerinin karşılaştırılması

x	y	$ u_{analitik} - u_{q-HSADY} $	$ u_{analitik} - u_{KSDAY} $
0.01	0.01	1.2481315×10^{-7}	1.2481315×10^{-7}
	0.02	1.2481399×10^{-7}	1.2481399×10^{-7}
	0.03	1.2481516×10^{-7}	1.2481516×10^{-7}
	0.04	1.2481668×10^{-7}	1.2481668×10^{-7}
	0.05	1.2481852×10^{-7}	1.2481852×10^{-7}
0.02	0.01	1.2481399×10^{-7}	1.2481399×10^{-7}
	0.02	1.2481516×10^{-7}	1.2481516×10^{-7}
	0.03	1.2481668×10^{-7}	1.2481668×10^{-7}
	0.04	1.2481852×10^{-7}	1.2481852×10^{-7}
	0.05	1.2482072×10^{-7}	1.2482072×10^{-7}
0.03	0.01	1.2481516×10^{-7}	1.2481516×10^{-7}
	0.02	1.2481668×10^{-7}	1.2481668×10^{-7}
	0.03	1.2481852×10^{-7}	1.2481852×10^{-7}
	0.04	1.2482072×10^{-7}	1.2482072×10^{-7}
	0.05	1.2482323×10^{-7}	1.2482323×10^{-7}
0.04	0.01	1.2481668×10^{-7}	1.2481668×10^{-7}
	0.02	1.2481852×10^{-7}	1.2481852×10^{-7}
	0.03	1.2482072×10^{-7}	1.2482072×10^{-7}
	0.04	1.2482323×10^{-7}	1.2482323×10^{-7}
	0.05	1.2482608×10^{-7}	1.2482608×10^{-7}
0.05	0.01	1.2481668×10^{-7}	1.2481668×10^{-7}
	0.02	1.2481852×10^{-7}	1.2481852×10^{-7}
	0.03	1.2482072×10^{-7}	1.2482072×10^{-7}
	0.04	1.2482323×10^{-7}	1.2482323×10^{-7}
	0.05	1.2482608×10^{-7}	1.2482608×10^{-7}

Örnek 4.3 (Areshi vd., 2022): Aşağıdaki kesirli mertebeden doğrusal olmayan Newell-Whitehead-Segel (KMDONWS) denklemini inceleyelim.

$$\frac{\partial^\alpha w(x, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + 2w(x, t) - 3w^2(x, t), 0 < \alpha < 1. \quad (85)$$

Bu denklemin başlangıç koşulları,

$$w(x, 0) = \beta \quad (86)$$

dır. Burada β , keyfi bir sabittir.

Durum (i): KMDONWS Denklemini için q-HSADY çözümü

Şimdi, (85) denkleminde Shehu dönüşümünü uygulayarak ve (86) başlangıç koşulunu kullanarak,

$$S[w(x, t)] - \frac{u}{s} w(x, 0) - \left(\frac{u}{s}\right)^\alpha S \left[\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + 2w(x, t) - 3w^2(x, t) \right] = 0 \quad (87)$$

elde edilir. (87) denklemini kullanarak doğrusal olmayan operatörleri,

$$N[\varphi(x, t; q)] = S[\varphi(x, t; q)] - \frac{u}{s} w(x, 0) - \left(\frac{u}{s}\right)^\alpha \times S \left[\frac{\partial^2 \varphi(x, t; q)}{\partial x^2} + 2\varphi(x, t; q) - 3\varphi^2(x, t; q) \right] \quad (88)$$

olacak şekilde tanımlanır. Önerilen algoritmayı uygulayarak, m . dereceden deformasyon denklemini şu şekilde tanımlanır:

$$S[w_m(x, t) - k_m w_{m-1}(x, t)] = h \mathcal{R}_m(\vec{w}_{m-1}) \quad (89)$$

dir. Burada,

$$\mathcal{R}_m(\vec{w}_{m-1}) = S[\vec{u}_{m-1}(x, t)] - \frac{u}{s} w(x, 0) - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) \left(\frac{u}{s}\right)^\alpha \times S \left[\frac{\partial^2 w_{m-1}(x, t)}{\partial x^2} + 2w_{m-1}(x, t) - 3 \sum_{i=0}^{m-1} w_i(x, t) w_{m-1-i}(x, t) \right] \quad (90)$$

dir. (89) denkleminde ters Shehu dönüşümü uygulanırsa,

$$w_m(x, t) = k_m w_{m-1}(x, t) + h S^{-1}[\mathcal{R}_m(\vec{w}_{m-1})], \quad (91)$$

olarak bulunur. Başlangıç koşulunun kullanılmasıyla,

$$w_0(x, t) = \beta, \quad (92)$$

olur.

$w_1(x, t)$ değerini bulmak için, (91) eşitliğinde $m = 1$ koyarak,

$$w_1(x, t) = \frac{h(3\beta^2 - 2\beta)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \quad (93)$$

olarak bulunur.

$w_2(x, t)$ değerini bulmak için, (91) eşitliğinde $m = 2$ koyarak,

$$w_2(x, t) = \frac{h(n + h)(3\beta^2 - 2\beta)t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} - \frac{h^2(-18\beta^3 + 18\beta^2 - 4\beta)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \quad (94)$$

olarak elde edilir.

Bu şekilde, diğer terimler elde edilebilir. Böylece, (85) denklemlerinin q-HSADY çözümleri

$$w(x, t) = w_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} w_m(x, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m \quad (95)$$

ile tanımlanır.

(95) denklemine $\alpha = 1, n = 1, h = -1$ koyarsak, elde edilen sonuç KMDONWS denkleminin analitik çözümü olan

$$w(x, t) = \frac{-\frac{2}{3}\beta e^{2t}}{-\frac{2}{3} + \beta - \beta e^{2t}}, \quad (96)$$

ye yakınsar.

Durum (ii): KMDONWS Denklemi için KSDAY çözümü

Şimdi, (85) denkleminin her iki tarafına Shehu dönüşümü uygulanırsa,

$$S[w(x, t)] - \frac{u}{s}w(x, 0) - \left(\frac{u}{s}\right)^\alpha S\left[\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + 2w(x, t) - 3w^2(x, t)\right] = 0 \quad (97)$$

(97) denklemine ters Shehu dönüşümü uygulandığında,

$$w(x, t) = \beta + \mathbb{S}^{-1}\left[\left(\frac{u}{s}\right)^\alpha S\left[\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + 2w(x, t) - 3w^2(x, t)\right]\right] \quad (98)$$

$u(x, t)$ bilinmeyen fonksiyonunun sonsuz seri çözümünün

$$w(x, t) = \sum_{r=0}^{\infty} w_r(x, t) \quad (99)$$

olduğunu varsayalım.

$$w^2 = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \quad (100)$$

doğrusal olmayan terimlerini gösteren Adomian polinomlarıdır. Şimdi, (98) denklemini yeniden yazarsak;

$$\sum_{r=0}^{\infty} w_r(x, t) = \beta + \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{u^\mu}{s^\mu} \mathbb{S} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{l=0}^{\infty} w_r(x, t) + 2 \sum_{l=0}^{\infty} w_r(x, t) - 3 \sum_{l=0}^{\infty} A_l \right] \right\} \quad (101)$$

olur. (101) denkleminin her iki tarafını karşılaştırarak, (86) başlangıç koşulunu ve (101) denklemden de yararlanarak kolayca

$$w_0(x, t) = \beta, \quad (102)$$

$$w_1(x, t) = -\frac{(3\beta^2 - 2\beta)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad (103)$$

$$w_2(x, t) = -\frac{(-18\beta^3 + 18\beta^2 - 4\beta)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \quad (104)$$

⋮

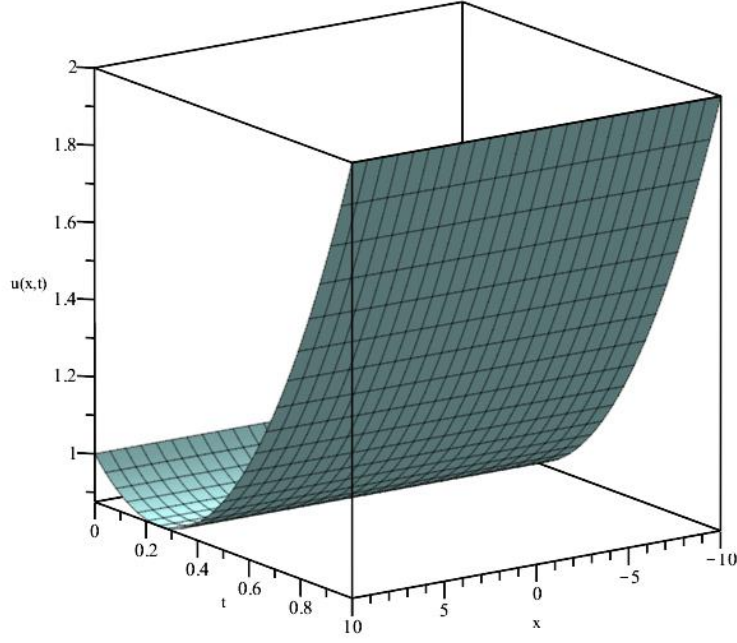
iterasyonları bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \sum_{r=0}^{\infty} w_r(x, t) = w_0(x, t) + w_1(x, t) + w_2(x, t) + \dots \\ &= \beta - \frac{(3\beta^2 - 2\beta)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{(-18\beta^3 + 18\beta^2 - 4\beta)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \end{aligned} \quad (105)$$

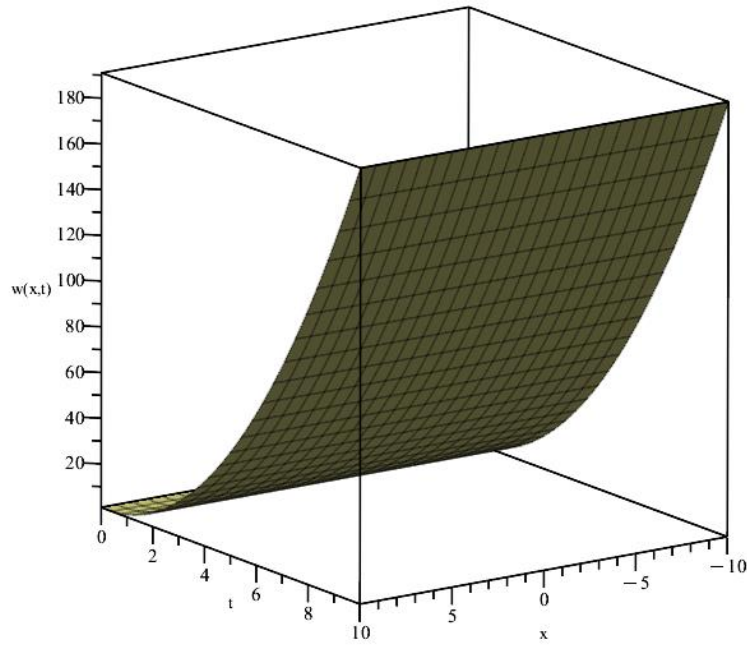
çözümleri elde edilir. $w(x, t)$ 'nin KSDAY çözümünün, problemin analitik çözümüne oldukça iyi bir yaklaşımda bulunduğu görülmüştür. Örnekteki $w(x, t)$ değişkeninin sonuçlarını daha iyi anlamak için Şekil 5' te çizilmiştir. Şekil 5' te bu çözümlerin daha

yüksek doğrulukta olduğunu gözlemliyoruz.

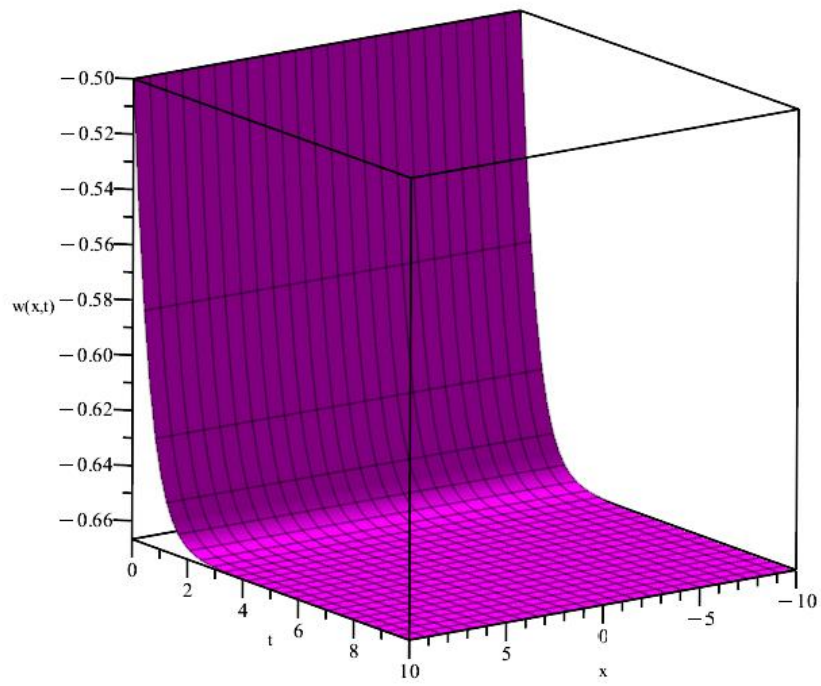
(a)



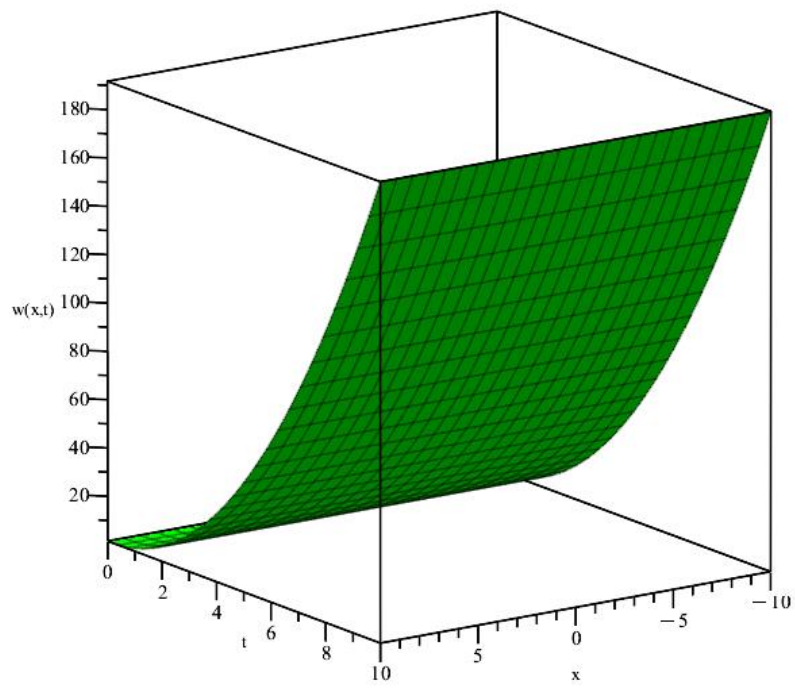
(b)



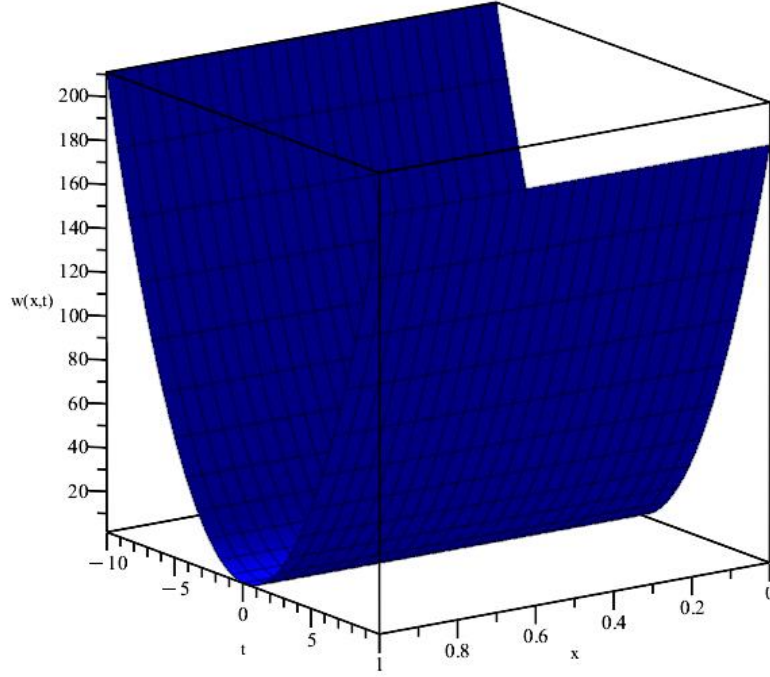
(c)



(d)



(e)



Şekil 5. Örnek 4.3 için $\beta = 1, h = -1, n = 1, \alpha = 1$ olmak üzere

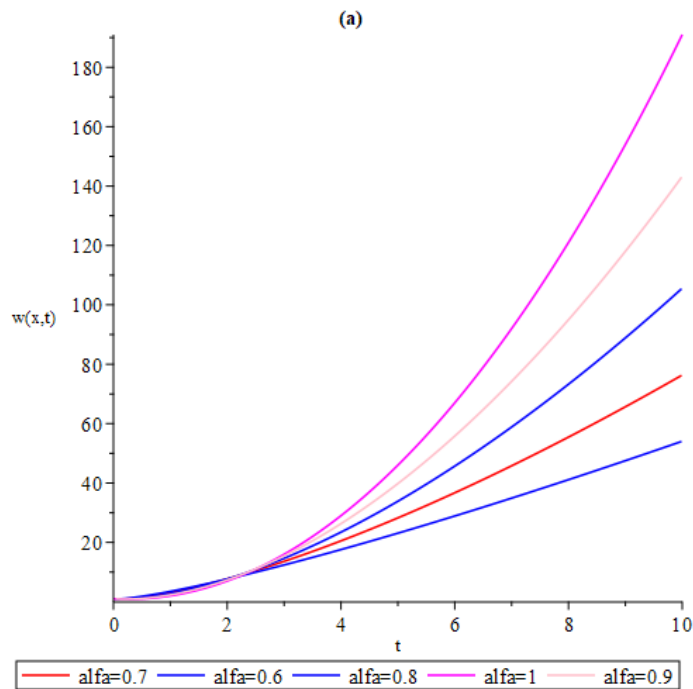
(a) q-HSADY çözümü

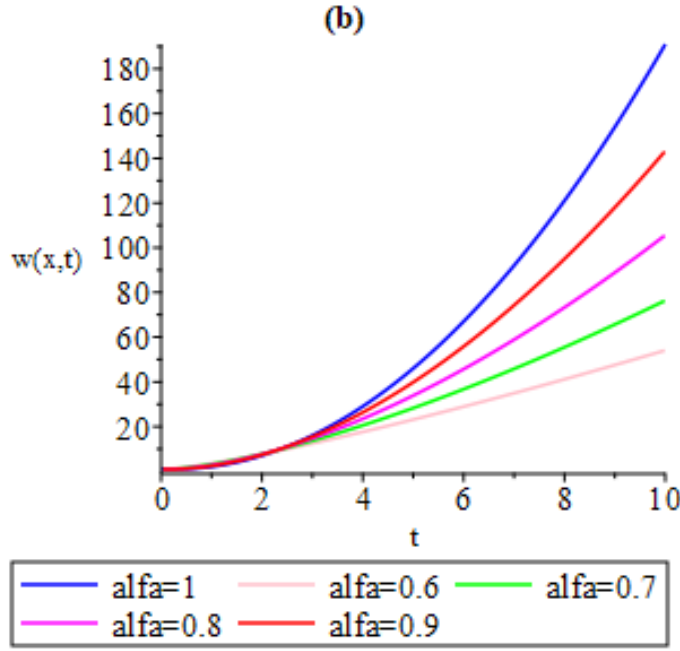
(b) KSDAY çözümü

(c) Analitik çözüm

(d) Mutlak hata = $|v_{analitik} - v_{q-HSADY}|$

(e) Mutlak hata = $|v_{analitik} - v_{KSDAY}|$





Şekil 6. Örnek 4.3 için $\beta = 1, h = -1, n = 1, x = 0.5$ olmak üzere farklı α değerleri için
(a) q-HSADY çözümleri
(b) KSDAY çözümleri

Tablo 7. Örnek 4.3 te $\beta = 1, h = -1$ ve $n = 1$ olmak üzere farklı α ' lar için farklı x ve t değerleriyle q-HSADY için sayısal çözümler

x	t	$\alpha = 0.55$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.85$	$\alpha = 1$
0.1	0.1	0.986541975	0.908609313	0.902289520	0.920000000
	0.2	1.186592539	0.981593058	0.898614665	0.880000000
	0.3	1.436421155	1.123029211	0.954396196	0.880000000
	0.4	1.715393138	1.313322074	1.060076977	0.920000000
	0.5	2.014758244	1.542750939	1.210324936	1.000000000
0.2	0.1	0.986541975	0.908609313	0.902289520	0.920000000
	0.2	1.186592539	0.981593058	0.898614665	0.880000000
	0.3	1.436421155	1.123029211	0.954396196	0.880000000
	0.4	1.715393138	1.313322074	1.060076977	0.920000000
	0.5	2.014758244	1.542750939	1.210324936	1.000000000
0.3	0.1	0.986541975	0.908609313	0.902289520	0.920000000
	0.2	1.186592539	0.981593058	0.898614665	0.880000000
	0.3	1.436421155	1.123029211	0.954396196	0.880000000
	0.4	1.715393138	1.313322074	1.060076977	0.920000000
	0.5	2.014758244	1.542750939	1.210324936	1.000000000
0.4	0.1	0.986541975	0.908609313	0.902289520	0.920000000
	0.2	1.186592539	0.981593058	0.898614665	0.880000000
	0.3	1.436421155	1.123029211	0.954396196	0.880000000
	0.4	1.715393138	1.313322074	1.060076977	0.920000000
	0.5	2.014758244	1.542750939	1.210324936	1.000000000
0.5	0.1	0.986541975	0.908609313	0.902289520	0.920000000
	0.2	1.186592539	0.981593058	0.898614665	0.880000000
	0.3	1.436421155	1.123029211	0.954396196	0.880000000

Tablo 7. (Devamı)

x	t	$\alpha = 0.55$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.85$	$\alpha = 1$
	0.4	1.715393138	1.313322074	1.060076977	0.920000000
	0.5	2.014758244	1.542750939	1.210324936	1.000000000

Tablo 8. Örnek 4.3 te $\beta = 1$ olmak üzere farklı α ' lar için farklı x ve t değerleriyle KSDAY denklemleri için sayısal çözümler

x	t	$\alpha = 0.55$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.85$	$\alpha = 1$
0.1	0.1	0.986541975	0.908609313	0.902289520	0.920000000
	0.2	1.186592539	0.981593058	0.898614665	0.880000000
	0.3	1.436421155	1.123029211	0.954396196	0.880000000
	0.4	1.715393138	1.313322074	1.060076977	0.920000000
	0.5	2.014758244	1.542750939	1.210324936	1.000000000
0.2	0.1	0.986541975	0.908609313	0.902289520	0.920000000
	0.2	1.186592539	0.981593058	0.898614665	0.880000000
	0.3	1.436421155	1.123029211	0.954396196	0.880000000
	0.4	1.715393138	1.313322074	1.060076977	0.920000000
	0.5	2.014758244	1.542750939	1.210324936	1.000000000
0.3	0.1	0.986541975	0.908609313	0.902289520	0.920000000
	0.2	1.186592539	0.981593058	0.898614665	0.880000000
	0.3	1.436421155	1.123029211	0.954396196	0.880000000
	0.4	1.715393138	1.313322074	1.060076977	0.920000000
	0.5	2.014758244	1.542750939	1.210324936	1.000000000
0.4	0.1	0.986541975	0.908609313	0.902289520	0.920000000
	0.2	1.186592539	0.981593058	0.898614665	0.880000000
	0.3	1.436421155	1.123029211	0.954396196	0.880000000
	0.4	1.715393138	1.313322074	1.060076977	0.920000000
	0.5	2.014758244	1.542750939	1.210324936	1.000000000
0.5	0.1	0.986541975	0.908609313	0.902289520	0.920000000
	0.2	1.186592539	0.981593058	0.898614665	0.880000000
	0.3	1.436421155	1.123029211	0.954396196	0.880000000
	0.4	1.715393138	1.313322074	1.060076977	0.920000000
	0.5	2.014758244	1.542750939	1.210324936	1.000000000

Tablo 9. Örnek 4.3 te $\beta = 1$, $h = -1$ ve $n = 1$ (94) denkleminin analitik çözümünün, q-HSADY ve KSDAY çözümlerinin karşılaştırılması

x	t	$ u_{analitik} - u_{q-HSADY} $	$ u_{analitik} - u_{KSDAY} $
0.01	0.01	3.6013×10^{-6}	3.6013×10^{-6}
	0.02	0.0000283040	0.0000283040
	0.03	0.0000938800	0.0000938800
	0.04	0.0002187580	0.0002187580
	0.05	0.0004201420	0.0004201420
0.02	0.01	3.6013×10^{-6}	3.6013×10^{-6}
	0.02	0.0000283040	0.0000283040
	0.03	0.0000938800	0.0000938800
	0.04	0.0002187580	0.0002187580
	0.05	0.0004201420	0.0004201420
0.03	0.01	3.6013×10^{-6}	3.6013×10^{-6}
	0.02	0.0000283040	0.0000283040

Tablo 9. (Devamı)

x	t	$ u_{analitik} - u_{q-HSADY} $	$ u_{analitik} - u_{KSDAY} $
0.04	0.03	0.0000938800	0.0000938800
	0.04	0.0002187580	0.0002187580
	0.05	0.0004201420	0.0004201420
	0.01	3.6013×10^{-6}	3.6013×10^{-6}
	0.02	0.0000283040	0.0000283040
0.05	0.03	0.0000938800	0.0000938800
	0.04	0.0002187580	0.0002187580
	0.05	0.0004201420	0.0004201420
	0.01	3.6013×10^{-6}	3.6013×10^{-6}
	0.02	0.0000283040	0.0000283040
	0.03	0.0000938800	0.0000938800
	0.04	0.0002187580	0.0002187580
	0.05	0.0004201420	0.0004201420

Örnek 4.4 (Singh vd., 2016) Aşağıdaki kesirli mertebeden bağlı Burgers denklemlerini (KMBBD) inceleyelim.

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha w}{\partial t^\alpha} + w \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \\ \frac{\partial^\beta v}{\partial t^\beta} + w \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right], \end{cases} 0 < x, y < 1, \quad 0 < \alpha, \beta < 1, t > 0. \quad (106)$$

Bu denklemin başlangıç koşulları,

$$w(x, y, 0) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4 \left(1 + \exp \left(\left(\frac{Re}{32} \right) (-4x + 4y) \right) \right)}, \quad (107)$$

$$v(x, y, 0) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4(1 + \exp((Re/32)(-4x + 4y)))}. \quad (108)$$

dır. Burada Re, Reynolds sayısıdır.

Durum (i): KMBB Denklemleri için q-HSADY çözümü

Şimdi, (106) denklemlerine Shehu dönüşümünü uygulayarak ve (107)-(108) başlangıç koşullarını kullanarak,

$$S[w(x, y, t)] - \frac{u}{s} w(x, y, 0) + \left(\frac{u}{s} \right)^\alpha S \left[w \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right] = 0, \quad (109)$$

$$S[v(x, y, t)] - \frac{u}{s} v(x, y, 0) + \left(\frac{u}{s}\right)^\alpha S \left[w \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \right] = 0 \quad (110)$$

elde edilir. (109)-(110) denklemlerini kullanarak doğrusal olmayan operatörleri,

$$\begin{aligned} N^1[\varphi(x, y, t; q), \psi(x, y, t; q)] &= S[\varphi(x, y, t; q)] - \frac{u}{s} w(x, y, 0) + \left(\frac{u}{s}\right)^\alpha \\ &\times \left\{ S \left[\varphi(x, y, t; q) \frac{\partial \varphi(x, y, t; q)}{\partial x} + \psi(x, y, t; q) \frac{\partial \varphi(x, y, t; q)}{\partial y} - \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 \varphi(x, y, t; q)}{\partial x^2} \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. + \frac{\partial^2 \varphi(x, y, t; q)}{\partial y^2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (111)$$

$$\begin{aligned} N^2[\varphi(x, y, t; q), \psi(x, y, t; q)] &= S[\psi(x, y, t; q)] - \frac{u}{s} v(x, y, 0) + \left(\frac{u}{s}\right)^\alpha \\ &\times \left\{ S \left[\varphi(x, y, t; q) \frac{\partial \psi(x, y, t; q)}{\partial x} + \psi(x, y, t; q) \frac{\partial \psi(x, y, t; q)}{\partial y} - \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 \psi(x, y, t; q)}{\partial x^2} \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. + \frac{\partial^2 \psi(x, y, t; q)}{\partial y^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (112)$$

olacak şekilde tanımlanır. Önerilen algoritmayı uygulayarak, m . dereceden deformasyon denklemleri şu şekilde tanımlanır:

$$S[w_m(x, y, t) - k_m w_{m-1}(x, y, t)] = h \mathcal{R}_{1,m}(\vec{w}_{m-1}), \quad (113)$$

$$S[v_m(x, y, t) - k_m v_{m-1}(x, y, t)] = h \mathcal{R}_{2,m}(\vec{v}_{m-1}) \quad (114)$$

dir. Burada,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{1,m}(\vec{w}_{m-1}) &= S[\vec{w}_{m-1}(x, y, t)] - \frac{u}{s} w(x, y, 0) + \left(\frac{u}{s}\right)^\alpha \\ &\times \left\{ S \left[\sum_{r=0}^{m-1} w_r \frac{\partial w_{m-1-r}}{\partial x} + \sum_{r=0}^{m-1} v_r \frac{\partial w_{m-1-r}}{\partial y} - \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 w_{m-1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_{m-1}}{\partial y^2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (115)$$

$$\mathcal{R}_{2,m}(\vec{v}_{m-1}) = S[\vec{v}_{m-1}(x, y, t)] - \frac{u}{s} v(x, y, 0) + \left(\frac{u}{s}\right)^\alpha$$

$$\times \left\{ S \left[\sum_{r=0}^{m-1} w_r \frac{\partial v_{m-1-r}}{\partial x} + \sum_{r=0}^{m-1} v_r \frac{\partial v_{m-1-r}}{\partial y} - \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 v_{m-1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{m-1}}{\partial y^2} \right] \right\} \quad (116)$$

‘tür. (115)-(116) denklemlerine ters Shehu dönüşümü uygulanırsa,

$$w_m(x, y, t) = k_m w_{m-1}(x, y, t) + h S^{-1}[\mathcal{R}_{1,m}(\vec{w}_{m-1})], \quad (117)$$

$$v_m(x, y, t) = k_m v_{m-1}(x, y, t) + hS^{-1}[\mathcal{R}_{2,m}(\vec{v}_{m-1})] \quad (118)$$

olarak bulunur. Başlangıç koşulunun kullanılmasıyla,

$$w_0(x, y, t) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4(1 + \exp((\text{Re}/32)(-4x + 4y)))}, \quad (119)$$

$$v_0(x, y, t) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4(1 + \exp((\text{Re}/32)(-4x + 4y)))} \quad (120)$$

olur.

$w_1(x, y, t)$ ve $v_1(x, y, t)$ değerlerini bulmak için, (117)-(118) eşitliklerinde $m = 1$ koyarak,

$$w_1(x, y, t) = h\text{Re} \frac{\exp(-\text{Re}(x - y)/8)t^\alpha}{128(1 + \exp(-\text{Re}(x - y)/8))^2\Gamma(\alpha + 1)}, \quad (121)$$

$$v_1(x, y, t) = -h\text{Re} \frac{\exp(-\text{Re}(\zeta - \mu)/8)t^\beta}{128(1 + \exp(-\text{Re}(\zeta - \mu)/8))^2\Gamma(\beta + 1)} \quad (122)$$

olarak bulunur.

$w_2(x, y, t)$ ve $v_2(x, y, t)$ değerlerini bulmak için, (117)-(118) eşitliklerinde $m = 2$ koyarak,

$$\begin{aligned} w_2(x, y, t) = & (n + h)h\text{Re} \frac{\exp(-\text{Re}(x - y)/8)t^\alpha}{128(1 + \exp(-\text{Re}(x - y)/8))^2\Gamma(\alpha + 1)} \\ & - h^2\text{Re}^2 \frac{\exp(-\text{Re}(x - y)/8)}{4096(1 + \exp(-\text{Re}(x - y)/8))^4\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)} \\ & \times \left[\left(\frac{-\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \right) \exp(-\text{Re}(x - y)/8) \right. \\ & \left. + \frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)(\exp(-\text{Re}(\zeta - \mu)/4) - 1)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)}, \right] \quad (123) \end{aligned}$$

$$v_2(x, y, t) = -(n + h)h\text{Re} \frac{\exp(-\text{Re}(x - y)/8)t^\beta}{128(1 + \exp(-\text{Re}(x - y)/8))^2\Gamma(\beta + 1)}$$

$$\begin{aligned}
& +h^2(\text{Re})^2 \frac{\exp(-\text{Re}(x-y)/8)}{4096(1 + \exp(-\text{Re}(x-y)/8))^4 \Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \\
& \times \left[\left(\frac{-\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)t^{2\beta}}{\Gamma(2\beta+1)} + \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \right) \exp(-\text{Re}(x-y)/8) \right. \\
& \left. + \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)(\exp(-\text{Re}(x-y)/4) - 1)t^{2\beta}}{\Gamma(2\beta+1)} \right]
\end{aligned} \tag{124}$$

olarak elde edilir.

Bu şekilde, diğer terimler elde edilebilir. Böylece, (106) denklemlerinin q-HSADY çözümleri

$$w(x, y, t) = w_0(x, y, t) + \sum_{m=1}^{\infty} w_m(x, y, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m, \tag{125}$$

$$v(x, y, t) = v_0(x, y, t) + \sum_{m=1}^{\infty} v_m(x, y, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m \tag{126}$$

ile tanımlanır.

(125)-(126) denklemlerine $\alpha = 1, \beta = 1, n = 1, h = -1$ koyarsak, elde edilen sonuç $L \rightarrow \infty$ iken

$$\sum_{m=1}^L w_m(x, y, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m, \tag{127}$$

$$\sum_{m=1}^L v_m(x, y, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m, \tag{128}$$

serileri, KMBBD' lerinin analitik çözümleri olan

$$w(x, y, t) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4(1 + \exp((\text{Re}/32)(-4x + 4y - t)))}, \tag{129}$$

$$v(x, y, t) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4(1 + \exp((\text{Re}/32)(-4x + 4y - t)))} \tag{130}$$

ye yakınsarlar.

Durum (ii): KMBB Denklemleri için KSDAY çözümü

Şimdi, (106) denklemlerine Shehu dönüşümünü uygulayarak ve (107)-(108) başlangıç koşullarını kullanarak,

$$S[w(x, y, t)] - \frac{u}{s} w(x, y, 0) + \left(\frac{u}{s}\right)^\alpha S \left[w \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right] = 0, \quad (131)$$

$$S[v(x, y, t)] - \frac{u}{s} v(x, y, 0) + \left(\frac{u}{s}\right)^\alpha S \left[w \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \right] = 0 \quad (132)$$

elde edilir.

(131)-(132) denklemlerine ters Shehu dönüşümü uygulandığında,

$$w(x, y, t) = w(x, y, 0) - \mathbb{S}^{-1} \left(\left(\frac{u}{s}\right)^\alpha S \left[w \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right] \right), \quad (133)$$

$$v(x, y, t) = v(x, y, 0) - \mathbb{S}^{-1} \left(\left(\frac{u}{s}\right)^\alpha S \left[w \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \right] \right) \quad (134)$$

olur.

$w(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ bilinmeyen fonksiyonlarının sonsuz seri çözümlerinin

$$w(x, y, t) = \sum_{l=0}^{\infty} w_l(x, y, t), \quad (135)$$

$$v(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} v_m(x, y, t), \quad (136)$$

olduğunu varsayalım.

$$w \frac{\partial w}{\partial \zeta} + v \frac{\partial w}{\partial \mu} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l, \quad (137)$$

$$w \frac{\partial v}{\partial \zeta} + v \frac{\partial v}{\partial \mu} = \sum_{l=0}^{\infty} H_l, \quad (138)$$

doğrusal olmayan terimlerini gösteren Adomian polinomlarıdır. Şimdi, (134)-(135) denklemlerini yeniden yazarsak;

$$\sum_{l=0}^{\infty} w_l(x, y, t) = w(x, y, 0) - \mathbb{S}^{-1} \left(\left(\frac{u}{s} \right)^{\alpha} \mathbb{S} \left[\sum_{l=0}^{\infty} H_l - \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \sum_{l=0}^{\infty} w_l(x, y, t) + \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \sum_{l=0}^{\infty} w_l(x, y, t) \right] \right] \right), \quad (139)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} v_m(x, y, t) = v(x, y, 0) - \mathbb{S}^{-1} \left(\left(\frac{u}{s} \right)^{\alpha} \mathbb{S} \left[\sum_{l=0}^{\infty} A_l - \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \sum_{m=0}^{\infty} v_m(x, y, t) + \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \sum_{m=0}^{\infty} v_m(x, y, t) \right] \right] \right) \quad (140)$$

olarak bulunur.

(139)-(140) denklemlerinin her iki tarafını karşılaştırarak ve (107)-(108) başlangıç koşullarını kullanarak, (139)-(140) denklemlerinden faydalananarak,

$$w_0(x, y, t) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4(1 + \exp((Re/32)(-4x + 4y)))}, \quad (141)$$

$$v_0(x, y, t) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4(1 + \exp((Re/32)(-4x + 4y)))} \quad (142)$$

olur.

$w_1(x, y, t)$ ve $v_1(x, y, t)$ değerlerini bulmak için, (139)-(140) eşitliklerinde $m = 1$ koyarak,

$$w_1(x, y, t) = -Re \frac{\exp(-Re(x - y)/8)t^{\alpha}}{128(1 + \exp(-Re(x - y)/8))^2 \Gamma(\alpha + 1)}, \quad (143)$$

$$v_1(x, y, t) = Re \frac{\exp(-Re(x - y)/8)t^{\beta}}{128(1 + \exp(-Re(x - y)/8))^2 \Gamma(\beta + 1)} \quad (144)$$

olarak bulunur.

$u_2(x, y, t)$ ve $w_2(x, y, t)$ değerlerini bulmak için, (139)-(140) eşitliklerinde $m = 2$ koyarak,

$$w_2(x, y, t) = -\text{Re}^2 \frac{\exp\left(-\frac{\text{Re}(x-y)}{8}\right)}{4096 \left(1 + \exp\left(-\frac{\text{Re}(x-y)}{8}\right)\right)^4 \Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \\ \times \left[\left(\frac{-\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \right) \exp(-\text{Re}(x-y)/8) \right. \\ \left. + \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)(\exp(-\text{Re}(x-y)/4) - 1)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \right], \quad (145)$$

$$v_2(x, y, t) = (\text{Re})^2 \frac{\exp(-\text{Re}(x-y)/8)}{4096(1 + \exp(-\text{Re}(x-y)/8))^4 \Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \\ \times \left[\left(\frac{-\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)t^{2\beta}}{\Gamma(2\beta+1)} + \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \right) \exp(-\text{Re}(x-y)/8) \right. \\ \left. + \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)(\exp(-\text{Re}(x-y)/4) - 1)t^{2\beta}}{\Gamma(2\beta+1)} \right] \quad (146)$$

elde edilir.

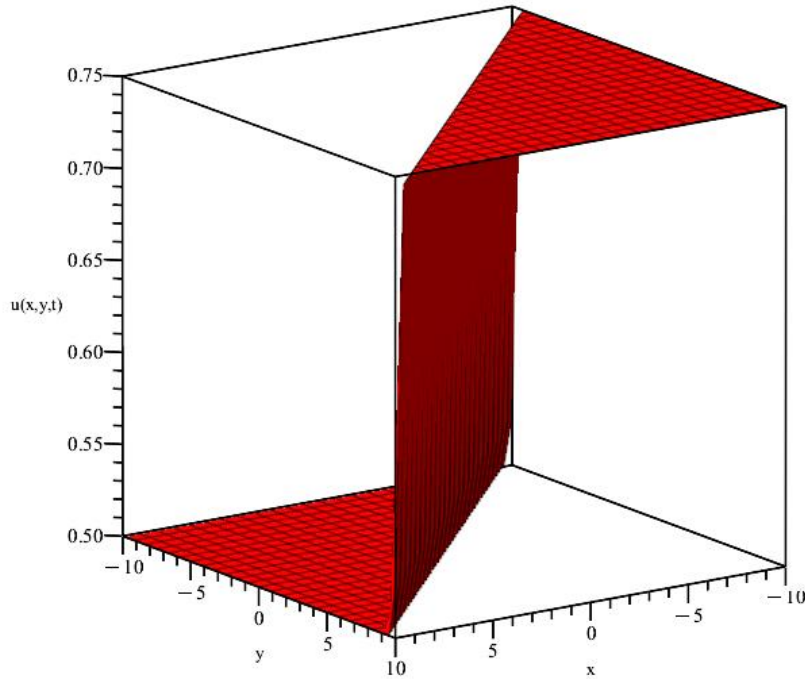
Böylece,

$$w(x, y, t) = \sum_{l=0}^{\infty} w_l(x, y, t) = w_0(x, y, t) + w_1(x, y, t) + w_2(x, y, t) + \dots \\ = \frac{3}{4} - \frac{1}{4 \left(1 + \exp\left(\left(\frac{\text{Re}}{32}\right)(-4x + 4y)\right)\right)} - \text{Re} \frac{\exp(-\text{Re}(x-y)/8)t^\alpha}{128(1 + \exp(-\text{Re}(x-y)/8))^2 \Gamma(\alpha+1)} \\ - \text{Re}^2 \frac{\exp\left(-\frac{\text{Re}(x-y)}{8}\right)}{4096 \left(1 + \exp\left(-\frac{\text{Re}(x-y)}{8}\right)\right)^4 \Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \\ \times \left[\left(\frac{-\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \right) \exp(-\text{Re}(x-y)/8) \right. \\ \left. + \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)(\exp(-\text{Re}(x-y)/4) - 1)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \right], \quad (147) \\ v(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} v_m(x, y, t) = v_0(x, y, t) + v_1(x, y, t) + v_2(x, y, t) + \dots$$

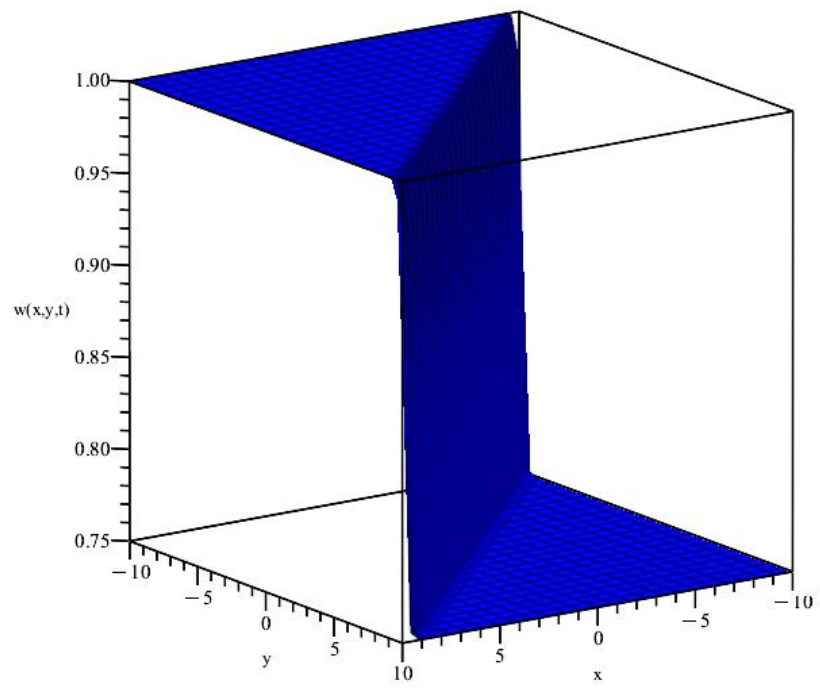
$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{4} + \frac{1}{4(1 + \exp((\text{Re}/32)(-4x + 4y)))} + \text{Re} \frac{\exp(-\text{Re}(x - y)/8)t^\beta}{128(1 + \exp(-\text{Re}(x - y)/8))^2\Gamma(\beta + 1)} \\
&+ (\text{Re})^2 \frac{\exp(-\text{Re}(x - y)/8)}{4096(1 + \exp(-\text{Re}(x - y)/8))^4\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)} \\
&\times \left[\left(\frac{-\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)t^{2\beta}}{\Gamma(2\beta + 1)} + \frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \right) \exp(-\text{Re}(x - y)/8) \right. \\
&\left. + \frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)(\exp(-\text{Re}(x - y)/4) - 1)t^{2\beta}}{\Gamma(2\beta + 1)} \right] \tag{148}
\end{aligned}$$

çözümleri elde edilir. $w(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ 'nin KSDAY çözümlerinin, problemin analitik çözümü ile mükemmel bir uyum içinde olduğu bulunmuştur. Örnekteki $w(x, y, t)$ ve $v(x, y, t)$ değişkenlerinin sonuçlarını daha iyi anlamak için Şekil 7' de çizilmiştir. Şekil 7' de bu çözümlerin daha yüksek doğrulukta olduğunu gözlemliyoruz.

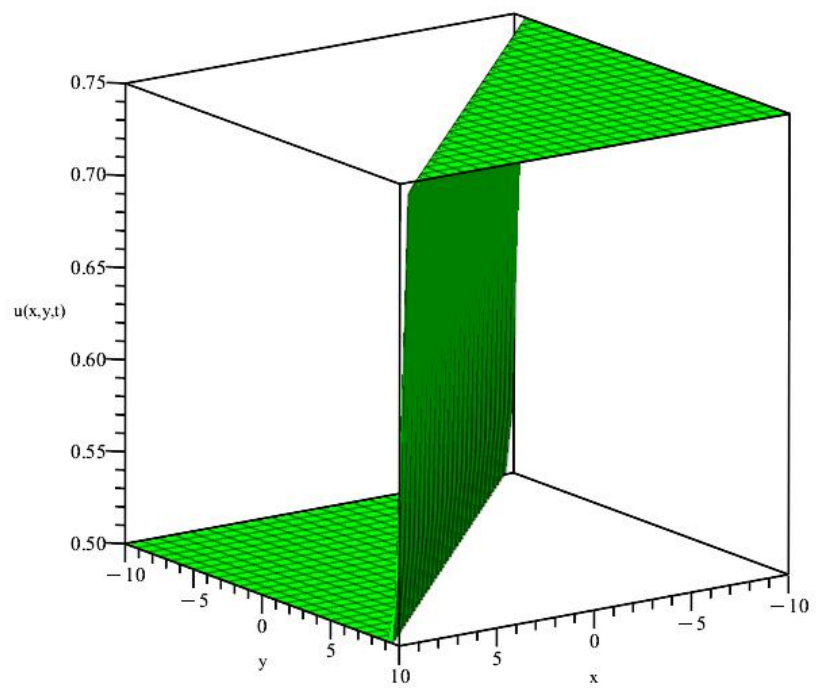
(a)



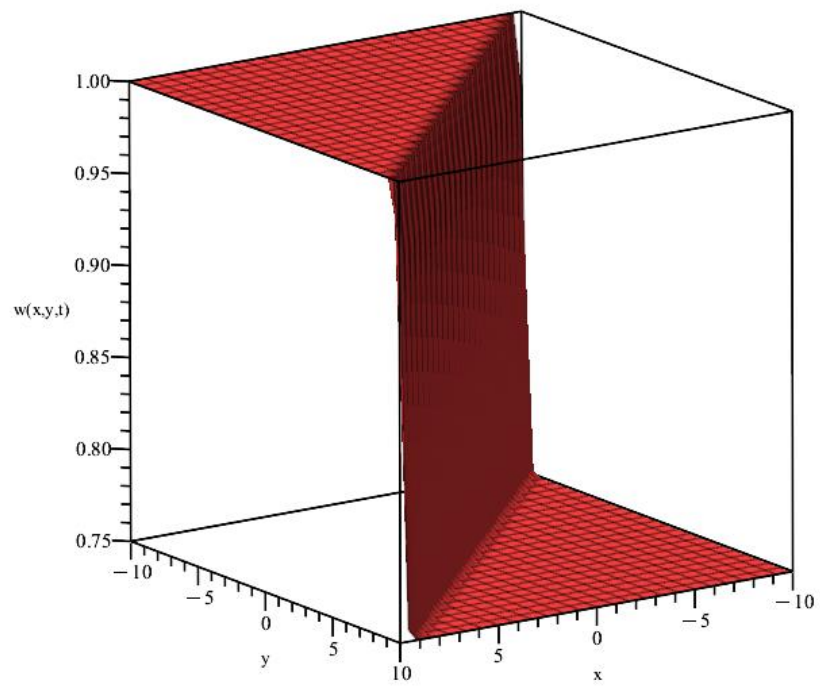
(b)



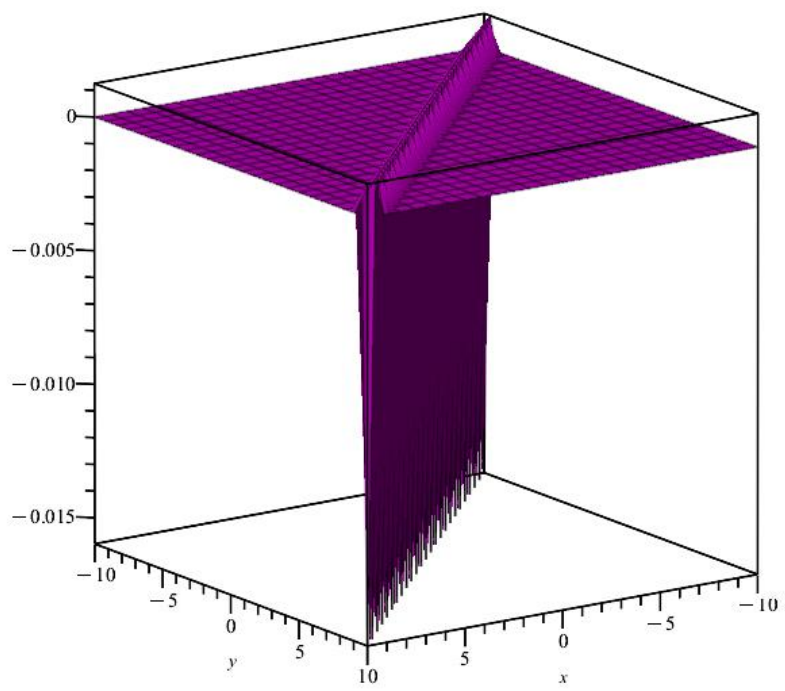
(c)



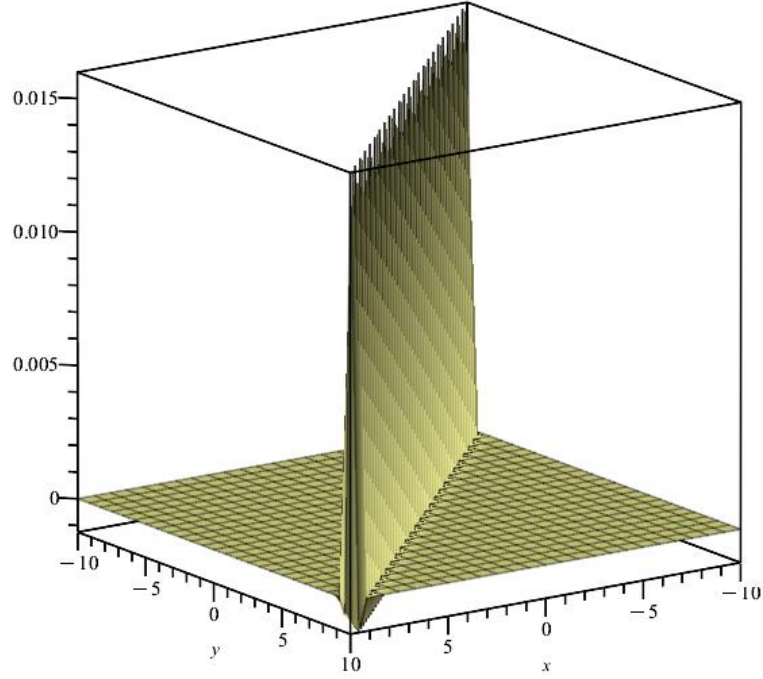
(d)



(e)



(f)



Şekil 7. Örnek 4.4 için $t = 0.5, \alpha = 1, \beta = 1, Re = 100, h = -1, n = 1$ için

(a) $w(x, y, t)$ için q-HSADY çözümü

(b) $v(x, y, t)$ için q-HSADY çözümü

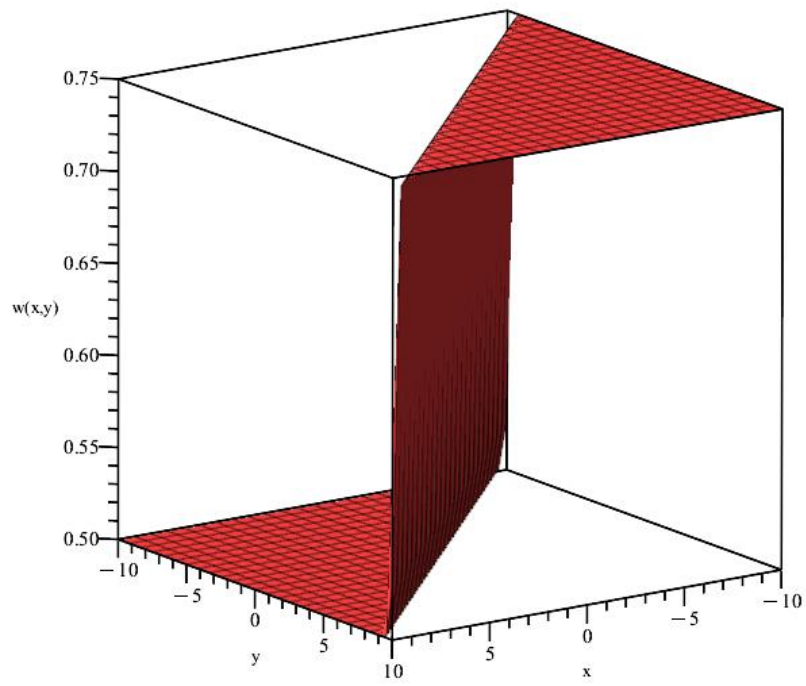
(c) $w(x, y, t)$ için analitik çözüm

(d) $v(x, y, t)$ için analitik çözüm

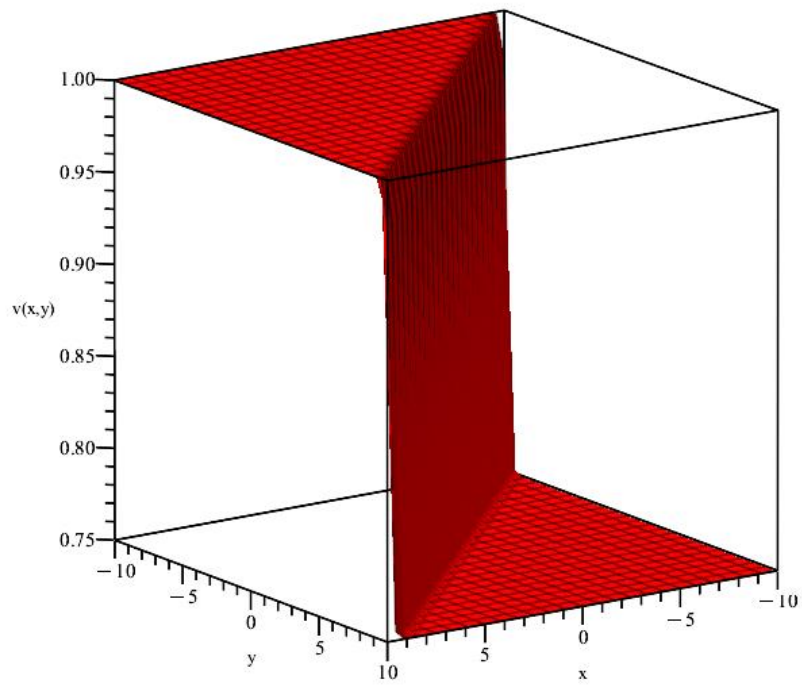
(e) Mutlak hata = $|w_{analitik} - w_{q-HSADY}|$

(f) Mutlak hata = $|v_{analitik} - v_{q-HSADY}|$

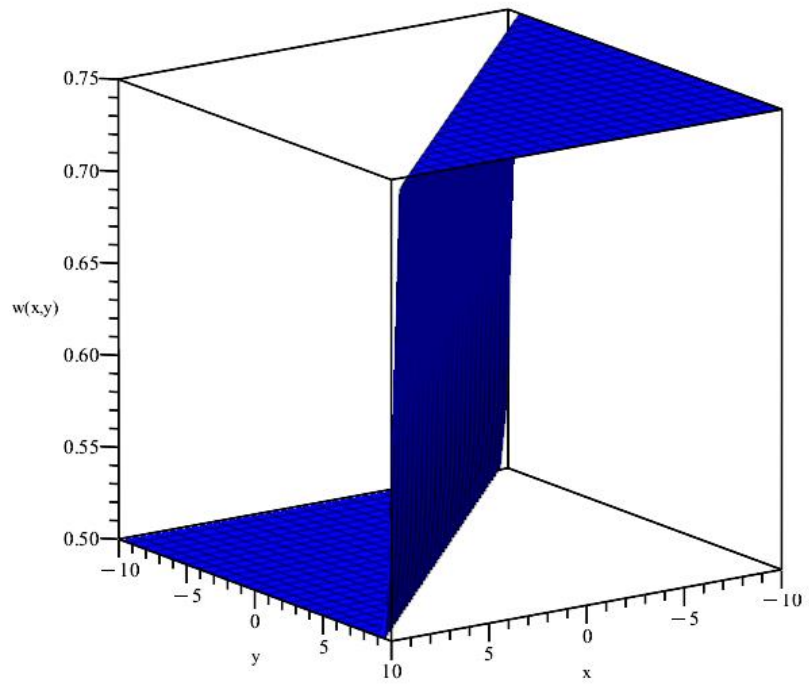
(a)



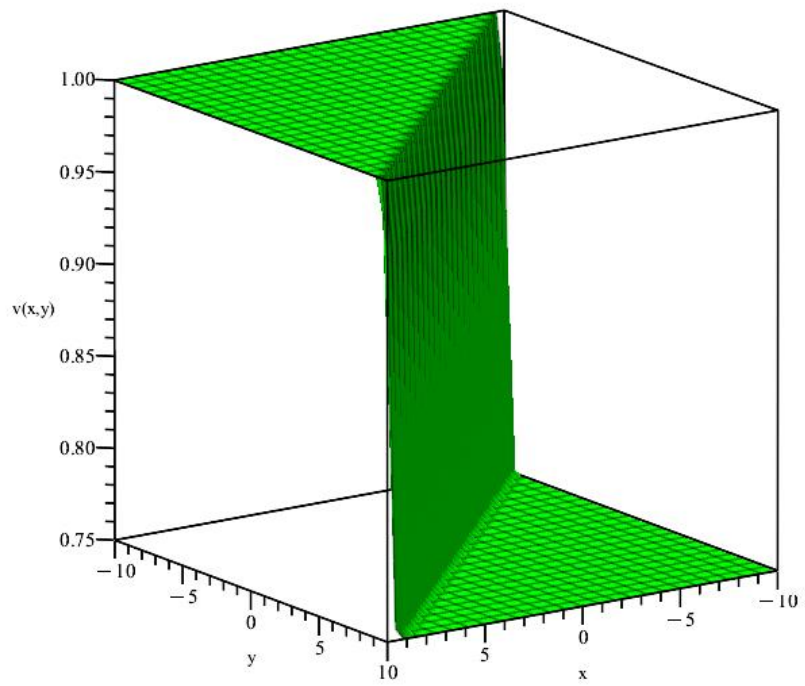
(b)



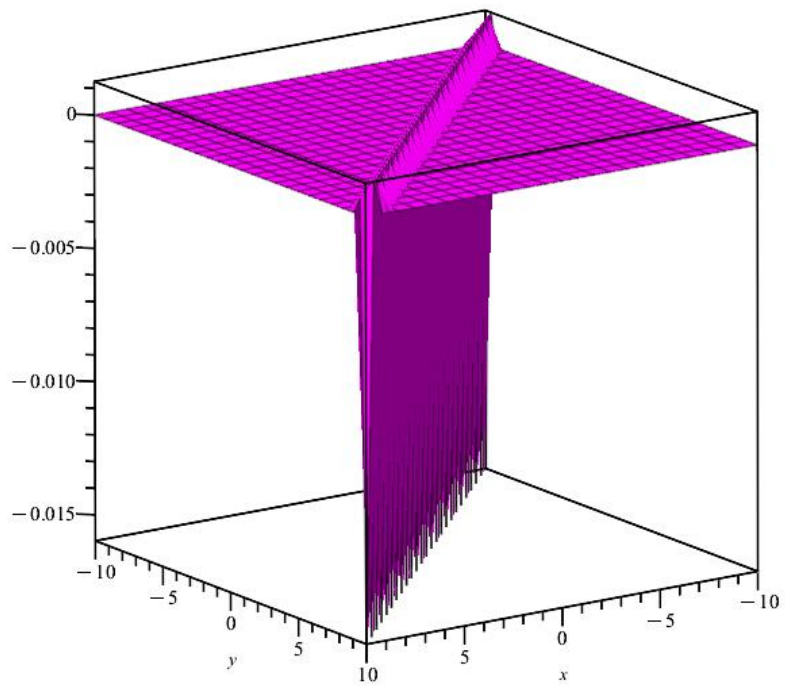
(c)



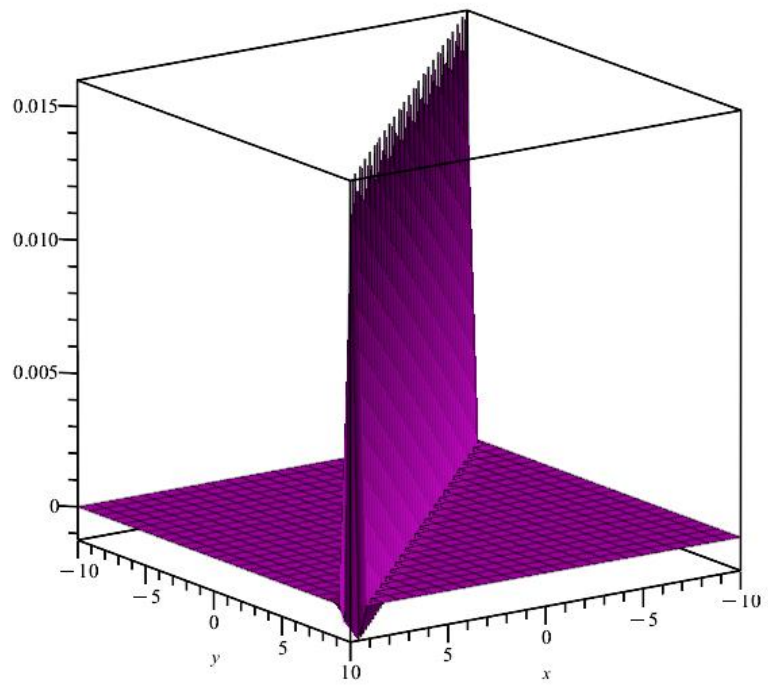
(d)



(e)

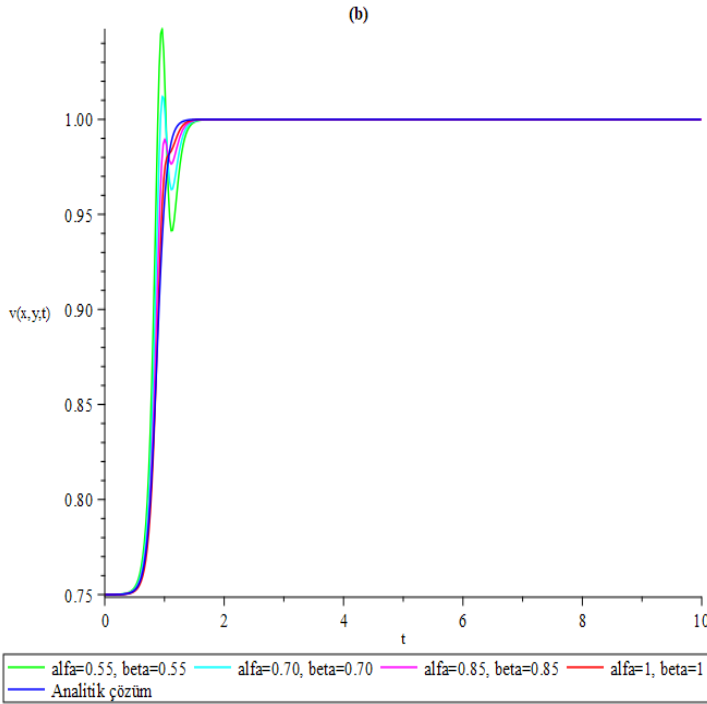
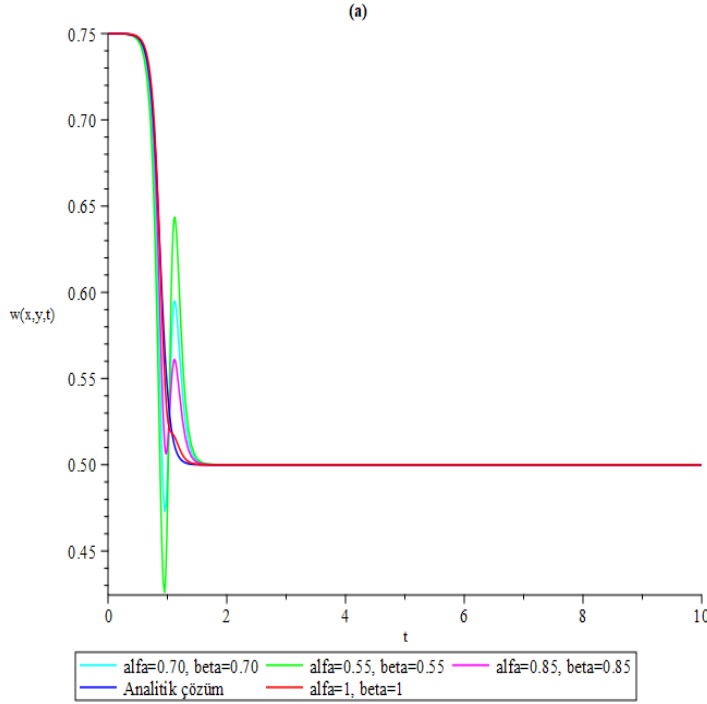


(f)



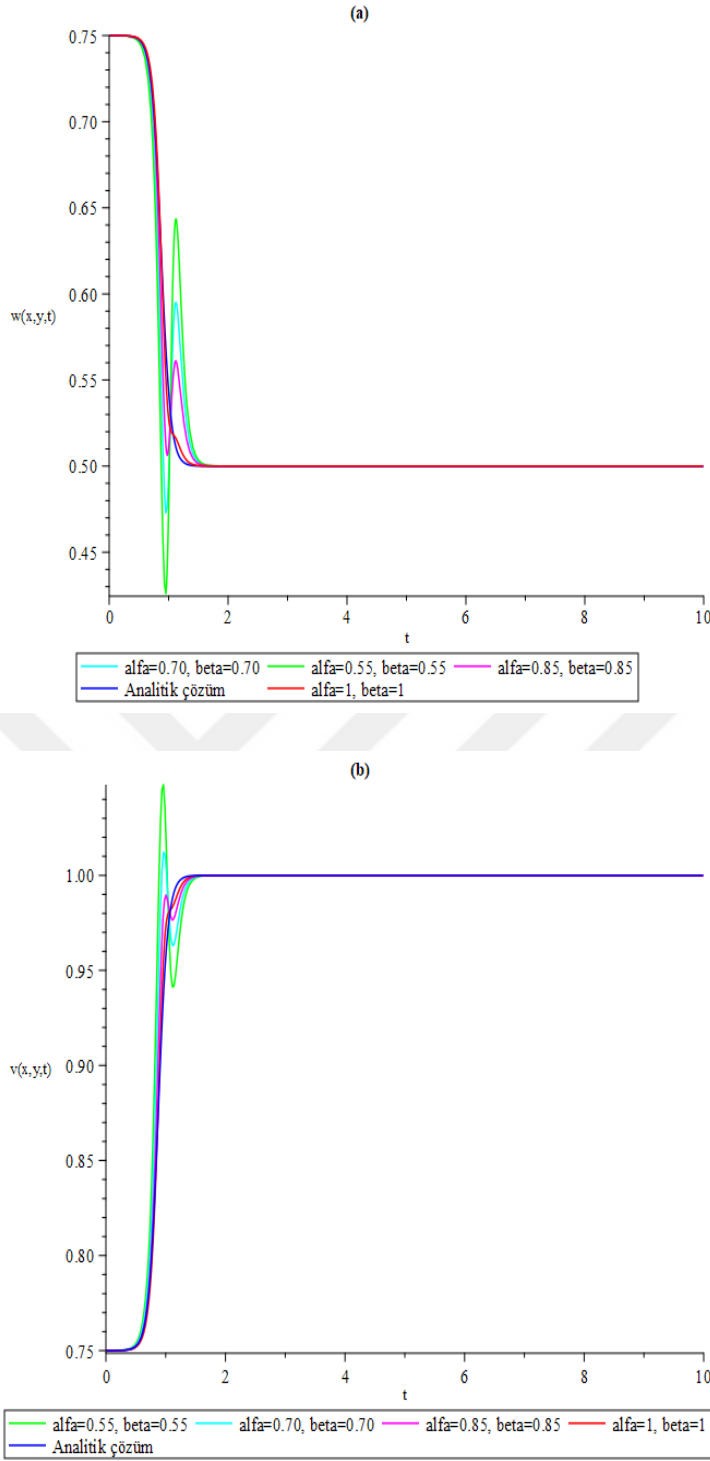
Şekil 8. Örnek 4.4 için $t = 0.5, \alpha = 1, \beta = 1, Re = 100, h = -1, n = 1$ için

- (a) $w(x, y, t)$ için KSDAY çözümü
- (b) $v(x, y, t)$ için KSDAY çözümü
- (c) $w(x, y, t)$ için analitik çözüm
- (d) $v(x, y, t)$ için analitik çözüm
- (e) Mutlak hata = $|w_{analitik} - w_{KSDAY}|$
- (f) Mutlak hata = $|v_{analitik} - v_{KSDAY}|$



Şekil 9. Örnek 4.4 için $x = 0.5, Re = 100, h = -1, n = 1, y = 1$ olmak üzere farklı α, β değerleri için

- (a) q-HSADY $w(x, y, t)$ çözümleri ile analitik çözümün karşılaştırılması
- (b) q-HSADY $v(x, y, t)$ çözümleri ile analitik çözümün karşılaştırılması



Şekil 10. Örnek 4.4 için $x = 0.5, Re = 100, h = -1, n = 1, y = 1$ olmak üzere farklı α, β değerleri için

(a) KSDAY $w(x, y, t)$ çözümleri ile analitik çözümün karşılaştırılması

(b) KSDAY $v(x, y, t)$ çözümleri ile analitik çözümün karşılaştırılması

Tablo 10. Örnek 4.4 de $t = 0.5, Re = 100, h = -1, n = 1$ ve $\beta = 1$ olmak üzere farklı α ' lar için farklı x, y değerleriyle $w(x, y, t)$ ' nin q-HSADY için sayısal çözümleri

x	y	$\alpha = 0.55$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.85$	$\alpha = 1$
0.1	0.1	0.5051186770	0.5088260690	0.5166198748	0.5273437500

Tablo 10. (Devamı)

x	y	$\alpha = 0.55$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.85$	$\alpha = 1$
0.2	0.2	0.5003980018	0.5389457141	0.5712559823	0.5974078528
	0.3	0.6266025790	0.6509116808	0.6704624271	0.6855030474
	0.4	0.7077119587	0.7165529014	0.7235970002	0.7289501769
	0.5	0.7372185060	0.7399346407	0.7420932709	0.7437282216
	0.1	0.5707221498	0.5432957620	0.5260105116	0.5173540324
0.3	0.2	0.5051186770	0.5088260690	0.5166198748	0.5273437500
	0.3	0.5003980018	0.5389457141	0.5712559823	0.5974078528
	0.4	0.6266025790	0.6509116808	0.6704624271	0.6855030474
	0.5	0.7077119587	0.7165529014	0.7235970002	0.7289501769
	0.1	0.5439768322	0.5274194867	0.5162491980	0.5097284239
0.4	0.2	0.5707221498	0.5432957620	0.5260105116	0.5173540324
	0.3	0.5051186770	0.5088260690	0.5166198748	0.5273437500
	0.4	0.5003980018	0.5389457141	0.5712559823	0.5974078528
	0.5	0.6266025790	0.6509116808	0.6704624271	0.6855030474
	0.1	0.5158212171	0.5099438254	0.5059235302	0.5035112213
0.5	0.2	0.5439768322	0.5274194867	0.5162491980	0.5097284239
	0.3	0.5707221498	0.5432957620	0.5260105116	0.5173540324
	0.4	0.5051186770	0.5088260690	0.5166198748	0.5273437500
	0.5	0.5003980018	0.5389457141	0.5712559823	0.5974078528
	0.1	0.5048422224	0.5030509491	0.5018211703	0.5010779842
	0.2	0.5158212171	0.5099438254	0.5059235302	0.5035112213
	0.3	0.5439768322	0.5274194867	0.5162491980	0.5097284239
	0.4	0.5707221498	0.5432957620	0.5260105116	0.5173540324
	0.5	0.5051186770	0.5088260690	0.5166198748	0.5273437500

Tablo 11. Örnek 4.4 de $t = 0.5$, $Re = 100$ ve $\beta = 1$ olmak üzere farklı α ' lar için farklı x, y değerleriyle $w(x, y, t)$ ' nin KSDAY için sayısal çözümleri

x	y	$\alpha = 0.55$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.85$	$\alpha = 1$
0.1	0.1	0.5051186770	0.5088260690	0.5166198748	0.5273437500
	0.2	0.5003980018	0.5389457141	0.5712559823	0.5974078528
	0.3	0.6266025790	0.6509116808	0.6704624271	0.6855030474
	0.4	0.7077119587	0.7165529014	0.7235970002	0.7289501769
	0.5	0.7372185060	0.7399346407	0.7420932709	0.7437282216
0.2	0.1	0.5707221498	0.5432957620	0.5260105116	0.5173540324
	0.2	0.5051186770	0.5088260690	0.5166198748	0.5273437500
	0.3	0.5003980018	0.5389457141	0.5712559823	0.5974078528
	0.4	0.6266025790	0.6509116808	0.6704624271	0.6855030474
	0.5	0.7077119587	0.7165529014	0.7235970002	0.7289501769
0.3	0.1	0.5439768322	0.5274194867	0.5162491980	0.5097284239
	0.2	0.5707221498	0.5432957620	0.5260105116	0.5173540324
	0.3	0.5051186770	0.5088260690	0.5166198748	0.5273437500
	0.4	0.5003980018	0.5389457141	0.5712559823	0.5974078528
	0.5	0.6266025790	0.6509116808	0.6704624271	0.6855030474
0.4	0.1	0.5158212171	0.5099438254	0.5059235302	0.5035112213
	0.2	0.5439768322	0.5274194867	0.5162491980	0.5097284239
	0.3	0.5707221498	0.5432957620	0.5260105116	0.5173540324
	0.4	0.5051186770	0.5088260690	0.5166198748	0.5273437500
	0.5	0.5003980018	0.5389457141	0.5712559823	0.5974078528
0.5	0.1	0.5048422224	0.5030509491	0.5018211703	0.5010779842

Tablo 11. (Devamı)

x	y	$\alpha = 0.55$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.85$	$\alpha = 1$
	0.2	0.5158212171	0.5099438254	0.5059235302	0.5035112213
	0.3	0.5439768322	0.5274194867	0.5162491980	0.5097284239
	0.4	0.5707221498	0.5432957620	0.5260105116	0.5173540324
	0.5	0.5051186770	0.5088260690	0.5166198748	0.5273437500

Tablo 12. Örnek 4.4 de $t = 0.5, Re = 100, h = -1, n = 1$ ve $\alpha = 1$ olmak üzere farklı β ' lar için farklı x, y değerleriyle $v(x, y, t)$ ' nin q-HSADY için sayısal çözümleri

x	y	$\beta = 0.55$	$\beta = 0.7$	$\beta = 0.85$	$\beta = 1$
0.1	0.1	0.9948813229	0.9911739307	0.9833801252	0.9726562500
	0.2	0.9996019982	0.9610542859	0.9287440177	0.9025921472
	0.3	0.8733974210	0.8490883192	0.8295375729	0.8144969526
	0.4	0.7922880413	0.7834470986	0.7764029998	0.7710498231
	0.5	0.7627814940	0.7600653593	0.7579067291	0.7562717784
0.2	0.1	0.9292778506	0.9567042375	0.9739894880	0.9826459680
	0.2	0.9948813229	0.9911739307	0.9833801252	0.9726562500
	0.3	0.9996019982	0.9610542859	0.9287440177	0.9025921472
	0.4	0.8733974210	0.8490883192	0.8295375729	0.8144969526
	0.5	0.7922880413	0.7834470986	0.7764029998	0.7710498231
0.3	0.1	0.9560231680	0.9725805137	0.9837508017	0.9902715758
	0.2	0.9292778506	0.9567042375	0.9739894880	0.9826459680
	0.3	0.9948813229	0.9911739307	0.9833801252	0.9726562500
	0.4	0.9996019982	0.9610542859	0.9287440177	0.9025921472
	0.5	0.8733974210	0.8490883192	0.8295375729	0.8144969526
0.4	0.1	0.9841787826	0.9900561747	0.9940764696	0.9964887783
	0.2	0.9560231680	0.9725805137	0.9837508017	0.9902715758
	0.3	0.9292778506	0.9567042375	0.9739894880	0.9826459680
	0.4	0.9948813229	0.9911739307	0.9833801252	0.9726562500
	0.5	0.9996019982	0.9610542859	0.9287440177	0.9025921472
0.5	0.1	0.9951577778	0.9969490505	0.9981788296	0.9989220154
	0.2	0.9841787826	0.9900561747	0.9940764696	0.9964887783
	0.3	0.9560231680	0.9725805137	0.9837508017	0.9902715758
	0.4	0.9292778506	0.9567042375	0.9739894880	0.9826459680
	0.5	0.9948813229	0.9911739307	0.9833801252	0.9726562500

Tablo 13. Örnek 4.4 de $t = 0.5, Re = 100$ ve $\alpha = 1$ olmak üzere farklı β ' lar için farklı x, y değerleriyle $v(x, y, t)$ ' nin KSDAY için sayısal çözümleri

x	y	$\beta = 0.55$	$\beta = 0.7$	$\beta = 0.85$	$\beta = 1$
0.1	0.1	0.9948813229	0.9911739307	0.9833801252	0.9726562500
	0.2	0.9996019982	0.9610542859	0.9287440177	0.9025921472
	0.3	0.8733974210	0.8490883192	0.8295375729	0.8144969526
	0.4	0.7922880413	0.7834470986	0.7764029998	0.7710498231
	0.5	0.7627814940	0.7600653593	0.7579067291	0.7562717784
0.2	0.1	0.9292778506	0.9567042375	0.9739894880	0.9826459680
	0.2	0.9948813229	0.9911739307	0.9833801252	0.9726562500
	0.3	0.9996019982	0.9610542859	0.9287440177	0.9025921472
	0.4	0.8733974210	0.8490883192	0.8295375729	0.8144969526
	0.5	0.7922880413	0.7834470986	0.7764029998	0.7710498231
0.3	0.1	0.9560231680	0.9725805137	0.9837508017	0.9902715758
	0.2	0.9292778506	0.9567042375	0.9739894880	0.9826459680

Tablo 13. (Devamı)

x	y	$\beta = 0.55$	$\beta = 0.7$	$\beta = 0.85$	$\beta = 1$
0.4	0.3	0.9948813229	0.9911739307	0.9833801252	0.9726562500
	0.4	0.9996019982	0.9610542859	0.9287440177	0.9025921472
	0.5	0.8733974210	0.8490883192	0.8295375729	0.8144969526
	0.1	0.9841787826	0.9900561747	0.9940764696	0.9964887783
	0.2	0.9560231680	0.9725805137	0.9837508017	0.9902715758
0.5	0.3	0.9292778506	0.9567042375	0.9739894880	0.9826459680
	0.4	0.9948813229	0.9911739307	0.9833801252	0.9726562500
	0.5	0.9996019982	0.9610542859	0.9287440177	0.9025921472
	0.1	0.9951577778	0.9969490505	0.9981788296	0.9989220154
	0.2	0.9841787826	0.9900561747	0.9940764696	0.9964887783
	0.3	0.9560231680	0.9725805137	0.9837508017	0.9902715758
	0.4	0.9292778506	0.9567042375	0.9739894880	0.9826459680
	0.5	0.9948813229	0.9911739307	0.9833801252	0.9726562500

Tablo 14. Örnek 4.4 de $t = 0.5, Re = 100, h = -1, n = 1, \beta = 1$ ve $\alpha = 1$ olmak üzere denkleminin $w(x, y, t)$ için analitik çözümünün, q-HSADY ve KSDAY çözümlerinin karşılaştırılması

x	y	$ w_{analitik} - w_{q-HSADY} $	$ w_{analitik} - w_{KSDAY} $
0.01	0.01	0.0159783015	0.0159783015
	0.02	0.0172002434	0.0172002434
	0.03	0.0179598734	0.0179598734
	0.04	0.0182159752	0.0182159752
	0.05	0.0179564299	0.0179564299
0.02	0.01	0.0143607206	0.0143607206
	0.02	0.0159783015	0.0159783015
	0.03	0.0172002434	0.0172002434
	0.04	0.0179598734	0.0179598734
	0.05	0.0182159752	0.0182159752
0.03	0.01	0.0124336423	0.0124336423
	0.02	0.0143607206	0.0143607206
	0.03	0.0159783015	0.0159783015
	0.04	0.0172002434	0.0172002434
	0.05	0.0179598734	0.0179598734
0.04	0.01	0.0102951342	0.0102951342
	0.02	0.0124336423	0.0124336423
	0.03	0.0143607206	0.0143607206
	0.04	0.0159783015	0.0159783015
	0.05	0.0172002434	0.0172002434
0.05	0.01	0.0080470696	0.0080470696
	0.02	0.0102951342	0.0102951342
	0.03	0.0124336423	0.0124336423
	0.04	0.0143607206	0.0143607206
	0.05	0.0159783015	0.0159783015

Tablo 15. Örnek 4.4 de $t = 0.5, Re = 100, h = -1, n = 1, \beta = 1$ ve $\alpha = 1$ olmak üzere denkleminin $v(x, y, t)$ için analitik çözümünün, q-HSADY ve KSDAY çözümlerinin karşılaştırılması

x	y	$ v_{analitik} - v_{q-HSADY} $	$ v_{analitik} - v_{KSDAY} $
0.01	0.01	0.0159783015	0.0159783015
	0.02	0.0172002434	0.0172002434
	0.03	0.0179598734	0.0179598734
	0.04	0.0182159752	0.0182159752
	0.05	0.0179564299	0.0179564299
0.02	0.01	0.0143607206	0.0143607206
	0.02	0.0159783015	0.0159783015
	0.03	0.0172002434	0.0172002434
	0.04	0.0179598734	0.0179598734
	0.05	0.0182159752	0.0182159752
0.03	0.01	0.0124336423	0.0124336423
	0.02	0.0143607206	0.0143607206
	0.03	0.0159783015	0.0159783015
	0.04	0.0172002434	0.0172002434
	0.05	0.0179598734	0.0179598734
0.04	0.01	0.0102951342	0.0102951342
	0.02	0.0124336423	0.0124336423
	0.03	0.0143607206	0.0143607206
	0.04	0.0159783015	0.0159783015
	0.05	0.0172002434	0.0172002434
0.05	0.01	0.0080470696	0.0080470696
	0.02	0.0102951342	0.0102951342
	0.03	0.0124336423	0.0124336423
	0.04	0.0143607206	0.0143607206
	0.05	0.0159783015	0.0159783015

5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Kesirli mertebeden Zakharov-Kuznetsov (KMZK) denklemleri, kesirli mertebeden Newell-Whitehead-Segel (KMNWS) denklemleri, kesirli mertebeden bağlı Burgers (KMBB) denklemleri, iki yeni hibrit yöntem olan q -homotopi Shehu analiz dönüşüm yöntemi (q -HSADY) ve kesirli Shehu dönüşümü ayrıştırma yöntemi (KSDAY) kullanılarak yeni sayısal çözümler üretilmektedir. q -homotopi Shehu analiz dönüşüm yöntemi ve kesirli Shehu dönüşümü ayrıştırma yöntemi yeni önerilen çözüm metotları olmaktadır. Önerilen bu metotların etkili ve güvenilir olduğunu doğrulamak için bu yöntemlerle çözümler elde edilmektedir. Bu çözümlerin 2-boyutlu ve 3-boyutlu grafikleri, Maple yazılım programında çizdirilmektedir. Ayrıca bu çözümlerin mutlak hata hesapları tablolarda gösterilmektedir. Elde edilen çözümler ile analitik çözümler arasındaki karşılaştırma, her iki yeni tekniğin de doğrusal olmayan kesirli problemleri çözmek için oldukça etkili olduğunu göstermektedir. Önerilen metotların, başka kesirli mertebeden doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerini elde etmekte, bu alandaki tezlere ve çalışmalara katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

KAYNAKÇA

- Ahmed, S. A. ve Elbadri, M. (2020). Solution of newell–whitehead–segel equation of fractional order by using sumudu decomposition method. *order*, 8(6), 631-636.
- Ali, M., Alquran, M. ve Jaradat, I. (2019). Asymptotic-sequentially solution style for the generalized Caputo time-fractional Newell–Whitehead–Segel system. *Advances in Difference Equations*, 2019(1), 1-9.
- Anaç, H., Merdan, M. ve Kesemen, T. (2020). Solving for the random component time-fractional partial differential equations with the new Sumudu transform iterative method. *SN Applied Sciences*, 2(6), 1-11.
- Anaç, H., Bektaş, U. (2022). The New Solutions of Fractional Zakharov-Kuznetsov Equations. 5 th International Online Conference on Mathematical Advances and Applications (ICOMAA-2022), 11-14 Mayıs 2022, İstanbul
- Areshi, M., Khan, A., Shah, R. ve Nonlaopon, K. (2022). Analytical investigation of fractional-order Newell-Whitehead-Segel equations via a novel transform. *Aims Math*, 7(4), 6936-6958.
- Ayaz, F. (2004). Applications of differential transform method to differential-algebraic equations. *Applied Mathematics and Computation*, 152(3), 649-657.
- Baleanu, D., Defterli, O. ve Agrawal, O. P. (2009). A central difference numerical scheme for fractional optimal control problems. *Journal of Vibration and Control*, 15(4), 583-597.
- Elarbibenattia, M. ve Belghaba, K. (2021). Solution of newel-whitehead-segel equation using conformable fractional sumudu decomposition method. *Journal of Science and Arts*, 21(2), 479-486.
- He, J. H. (1999). Variational iteration method—a kind of non-linear analytical technique: some examples. *International journal of non-linear mechanics*, 34(4), 699-708.
- He, J. H. (2003). Homotopy perturbation method: a new nonlinear analytical technique. *Applied Mathematics and computation*, 135(1), 73-79.
- Hilfer, R. (Ed.). (2000). *Applications of fractional calculus in physics*. World scientific.
- Kilbas, A. A., Srivastava, H. M. ve Trujillo, J. J. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations* (Vol. 204). Elsevier.
- Kumar, D., Singh, J. ve Kumar, S. (2014). Numerical computation of nonlinear fractional Zakharov–Kuznetsov equation arising in ion-acoustic waves. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 22(3), 373-378.

- Kurt, A., Şenol, M., Tasbozan, O. ve Chand, M. (2019). Two reliable methods for the solution of fractional coupled Burgers' equation arising as a model of polydisperse sedimentation. *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences*, 4(2), 523-534.
- Liao, S. (2004). On the homotopy analysis method for nonlinear problems. *Applied mathematics and computation*, 147(2), 499-513.
- Maitama, S. ve Zhao, W. (2019). New integral transform: Shehu transform a generalization of Sumudu and Laplace transform for solving differential equations. arXivpreprint arXiv: 1904.11370.
- Miller KS, Ross B (1993) An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. Wiley
- Mittag-Leffler GM (1903) Sur la nouvelle fonction $E\alpha(x)$. CR Acad Sci Paris 137:554–558.
- Molliq, R. Y., Noorani, M. S. M., Hashim, I. ve Ahmad, R. R. (2009). Approximate solutions of fractional Zakharov–Kuznetsov equations by VIM. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 233(2), 103-108.
- Nadeem, M., He, J. H. ve Islam, A. (2021). The homotopy perturbation method for fractional differential equations: part 1 Mohand transform. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 31(11), 3490-3504.
- Podlubny, I. (1999). Fractional-order systems and PI/sup/spl lambda//D/sup/spl mu//-controllers. *IEEE Transactions on automatic control*, 44(1), 208-214.
- Prakash, A., Kumar, M. ve Baleanu, D. (2018). A new iterative technique for a fractional model of nonlinear Zakharov–Kuznetsov equations via Sumudu transform. *Applied Mathematics and Computation*, 334, 30-40.
- Prakash, A. ve Verma, V. (2019). Numerical method for fractional model of Newell–Whitehead–Segel equation. *Frontiers in Physics*, 7, 15.
- Prakash, A., Goyal, M. ve Gupta, S. (2019). Fractional variational iteration method for solving time-fractional Newell–Whitehead–Segel equation. *Nonlinear Engineering*, 8(1), 164-171.
- Prakasha, D. G., Veeresha, P. ve Baskonus, H. M. (2019). Two novel computational techniques for fractional Gardner and Cahn–Hilliard equations. *Computational and Mathematical Methods*, 1(2), e1021.
- Saadeh, R., Alaroud, M., Al-Smadi, M., Ahmad, R. R. ve Salma Din, U. K. (2019). Application of fractional residual power series algorithm to solve Newell–Whitehead–Segel equation of fractional order. *Symmetry*, 11(12), 1431.

- Samko, S. G., Kilbas, A. A. ve Marichev, O. I. (1993). *Fractional integrals and derivatives* (Vol. 1). Yverdon-les-Bains, Switzerland: Gordon and Breach science publishers, Yverdon.
- Singh, J., Kumar, D. ve Swroop, R. (2016). Numerical solution of time-and space-fractional coupled Burgers' equations via homotopy algorithm. *Alexandria Engineering Journal*, 55(2), 1753-1763.
- Singh, J., Kumar, D., Baleanu, D. ve Rathore, S. (2018). An efficient numerical algorithm for the fractional Drinfeld–Sokolov–Wilson equation. *Applied Mathematics and Computation*, 335, 12-24.
- Wang, K. ve Liu, S. (2016). A new Sumudu transform iterative method for time-fractional Cauchy reaction-diffusion equation. *Springer Plus*, 5(1), 865.
- Wazwaz, A. M. (1999). A reliable modification of Adomian decomposition method. *Applied mathematics and computation*, 102(1), 77-86.
- Veeresha, P., Prakasha, D. G. ve Baskonus, H. M. (2019). Solving smoking epidemic model of fractional order using a modified homotopy analysis transform method. *Mathematical Sciences*, 13(2), 115-128.
- Veeresha, P. ve Prakasha, D. G. (2019). Solution for fractional Zakharov–Kuznetsov equations by using two reliable techniques. *Chinese Journal of Physics*, 60, 313-330.
- Veeresha, P., Prakasha, D. G. ve Singh, J. (2020). Solution for fractional forced KdV equation using fractional natural decomposition method. *AIMS Mathematics*, 5(2), 798-810.

ÖZGEÇMİŞ

2002 yılında Giresun Anadolu Öğretmen Lisesi'nden mezun oldu. 2004 yılında Balıkesir Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'nde başladığı lisans eğitimini 2009 yılında tamamladı. 2012 yılında Gümüşhane Üniversitesi İletişim Fakültesinde bilgisayar işletmeni olarak çalışmaya başlamış ve hala aynı yerde görevini sürdürmektedir. Evli ve üç çocuk babasıdır.

