

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**BAZI KOMPARTMANLI MODELLERİN RASTGELE ETKİLER ALTINDA
İNCELENMESİ**

DOKTORA TEZİ

Zafer BEKİRYAZICI

**ARALIK 2017
TRABZON**



KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**BAZI KOMPARTMANLI MODELLERİN RASTGELE ETKİLER ALTINDA
İNCELENMESİ**

Zafer BEKİRYAZICI

**Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
"DOKTOR (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.**

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 20 / 11 / 2017

Tezin Savunma Tarihi : 15 / 12 / 2017

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Tülay KESEMEN

İkinci Danışman : Doç. Dr. Mehmet MERDAN

Trabzon 2017

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**Matematik Ana Bilim Dalında
Zafer BEKİRYAZICI Tarafından Hazırlanan**

**BAZI KOMPARTMANLI MODELLERİN RASTGELE ETKİLER ALTINDA
İNCELENMESİ**

**başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 28 /11 /2017 gün ve 1729 sayılı
kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda
DOKTORA TEZİ
olarak kabul edilmiştir.**

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Tahir KHANİYEV

Üye : Prof. Dr. Hüseyin DEMİR

Üye : Prof. Dr. Funda KARAÇAL

Üye : Doç. Dr. Tülay KESEMEN

Üye : Doç. Dr. Zafer KÜÇÜK



Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu tezin oluşması sürecindeki çalışmalarımın her anında bana yardımcı olan, fikir vermekle kalmayıp bana örnek ve öncü olan değerli danışman hocalarım Doç. Dr. Tülay KESEMEN ve Doç. Dr. Mehmet MERDAN'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Bu fikrin ortaya çıkmasında çok önemli katkıları olan Prof. Dr. Tahir KHANİYEV'e saygı ve şükranlarımı sunarım. Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü ile İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü hocalarıma ve Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Matematik Bölümü'ndeki mesai arkadaşlarıma teşekkür ederim. En önemlisi de her zaman yanımda olan ve desteklerini esirgemeyen sevgili eşim Merve BEKİRYAZICI ile başta kıymetli annem Kadriye BEKİRYAZICI olmak üzere aileme en derin şükranlarımı sunarım.

Zafer BEKİRYAZICI
Trabzon 2017

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Doktora Tezi olarak sunduğum “Bazı Kompartmanlı Modellerin Rastgele Etkiler Altında İncelenmesi” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanlarım Doç. Dr. Tülay KESEMEN ve Doç. Dr. Mehmet MERDAN’ın sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 15 / 12 / 2017

Zafer BEKİRYAZICI

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET	VII
SUMMARY	VIII
ŞEKİLER DİZİNİ	IX
TABLolar DİZİNİ.....	XI
SEMBOLLER DİZİNİ	XII
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş	1
1.1.1. Matematiksel Modelleme	1
1.1.2. Salgın Hastalık Modelleri	2
1.1.3. SIR Modeli ve Kompartmanlı Modeller	3
1.1.4. Deterministik ve Rastgele Modeller	6
1.2. Literatür Araştırması.....	11
1.3. Tez İçeriği.....	17
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	19
2.1. Deterministik Diferansiyel Denklemlerde Yaklaşık Çözümler	19
2.1.1. Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi (DDY)	19
2.1.2. Modifiye Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi	20
2.1.3. Runge-Kutta Yöntemi.....	23
2.2. Rastgele Kompartmanlı Modeller İçin Yöntemler	25
2.2.1. Kuadratik Orta Analizinin Temelleri.....	25
2.2.2. Rastgele Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi ve Momentler.....	28
2.2.3. Monte-Carlo Yöntemi ve Rastgele Denklemlerin Simülasyonu	30
2.3. Uygulamalar	30
2.3.1. Klasik Kompartmanlı Model: SIR Modeli	31
2.3.2. Çocuk Felci İçin SVEIR Tipinde Bir Kompartmanlı Model.....	50

2.3.3.	Hepatit B İçin SIIR Tipinde Bir Kompartmanlı Model.....	84
2.3.4.	Stokastik Etkiler Altında Model Dinamikleri.....	106
3.	BULGULAR.....	114
4.	İRDELEME	116
5.	SONUÇLAR.....	117
6.	ÖNERİLER.....	120
7.	KAYNAKLAR	121
ÖZGEÇMİŞ		



Doktora Tezi

ÖZET

BAZI KOMPARTMANLI MODELLERİN RASTGELE ETKİLER ALTINDA
İNCELENMESİ

Zafer BEKİRYAZICI

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Tülay KESEMEN
İkinci Danışman: Doç. Dr. Mehmet MERDAN
2017, 130 Sayfa

Bu çalışmada salgın hastalık modellerinin rastgele etkiler altındaki dinamikleri araştırılmaktadır. Literatürde genellikle deterministik kompartmanlı modeller kullanılarak analiz edilen salgın hastalıklar yapıları itibarıyla rastgele davranışlar sergileyebilmektedir. Bu rastgele yapının incelenmesi için çalışma kapsamında deterministik kompartmanlı modeller rastgele etki terimleri aracılığıyla rastgele hale getirilmektedir. Rastgele modellerin sayısal karakteristiklerini incelemek için Monte Carlo simülasyonlarının yanı sıra literatürde yer alan rastgele diferansiyel dönüşüm yönteminin bir modifikasyonu da sunulmaktadır. Modifiye rastgele dönüşüm yöntemi ile modellerin momentleri için yaklaşık çözümler elde edilmekte ve bulgular simülasyon sonuçları ile de karşılaştırılmaktadır. Bu yöntemler ile SIR, SVEIR ve SIIR tipli üç kompartmanlı modelin rastgele incelemeleri verilmektedir. Normal dağılım ve Beta dağılımı kullanılarak modeller için elde edilen sonuçlar deterministik ve stokastik sonuçlarla da karşılaştırılarak modellerin rastgele yapıları yorumlanmaktadır. Modifiye rastgele Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi ile rastgele modellerin momentleri için elde edilen yaklaşık çözümlerdeki hatanın azaltıldığı sayısal verilerin karşılaştırılması ile gösterilmektedir.

Anahtar Kelimeler: Rastgele Etki, Rastgele Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi, Modifiye Rastgele Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi, Normal Dağılım, Beta Dağılımı, Simülasyon, Moment

PhD. Thesis

SUMMARY

INVESTIGATION OF SOME COMPARTMENTAL MODELS UNDER RANDOM EFFECTS

Zafer BEKİRYAZICI

Karadeniz Technical University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program

Supervisor: Assoc. Prof. Tülay KESEMEN
Second Supervisor: Assoc. Prof. Mehmet MERDAN
2017, 130 Pages

In this study, the dynamics of epidemic models are investigated under random effects. Epidemics, which are usually analyzed with deterministic compartmental models in literature, can produce random behavior. The scope of the study is to randomize deterministic compartmental models by using random effect terms to analyze such random structures. A modification of the random Differential Transformation Method, which is already available in literature, is presented along with Monte Carlo simulations to investigate the numerical characteristics of random models. The modified random Differential Transformation Method is used to obtain approximations for the moments of the models and the findings are compared with the results of the simulations. Random investigations of three SIR, SVEIR, SIIR type compartmental models are given by using these methods. The results of the models obtained with normal and Beta distributions are compared with deterministic and stochastic to comment on the random structure of the models. Comparison of numerical data is used to show that the modified random Differential Transformation Method decreases the amount of error in the approximations obtained for the moments of the random models.

Key Words: Random Effects, Random Differential Transformation Method, Modified Random Differential Transformation Method, Normal Distribution, Beta Distribution, Simulation, Moments

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1. SIR modelinin akış şeması	5
Şekil 2. Monte-Carlo algoritmasının akış şeması	31
Şekil 3. SIR modelinin deterministik yaklaşık çözümleri	39
Şekil 4. SIR modelinin beklenen değerleri	43
Şekil 5. SIR modelinin ikinci momentleri	44
Şekil 6. SIR modelinin varyansları	44
Şekil 7. SIR modelinin standart sapmaları	45
Şekil 8. SIR modelinin varyasyon katsayıları	46
Şekil 9. SIR modelinin güven aralıkları	46
Şekil 10. SIR modelinin üçüncü merkezi momentleri	47
Şekil 11. SIR modelinin çarpıklık katsayıları	47
Şekil 12. SIR modelinin dördüncü merkezi momentleri	48
Şekil 13. SIR modelinin basıklık katsayıları	49
Şekil 14. Çocuk Felci modelinin akış şeması	53
Şekil 15. Deterministik Çocuk Felci modelinin çözümleri	54
Şekil 16. SVEIR modelinin beklenen değerleri	66
Şekil 17. SVEIR modelinin varyansları	67
Şekil 18. SVEIR modelinin varyasyon katsayıları	68
Şekil 19. R kompartmanının varyasyon katsayısı	69
Şekil 20. SVEIR modelinin güven aralıkları	69
Şekil 21. β parametresinin deterministik, normal ve beta dağılımları ile grafikleri	71
Şekil 22. SVEIR modelinin genel Beta etkilerle beklenen değerleri	77
Şekil 23. SVEIR modelinin genel Beta etkilerle varyansları	78
Şekil 24. SVEIR modelinin genel Beta etkilerle varyasyon katsayıları	79
Şekil 25. R kompartmanının Beta etkilerle varyasyon katsayısı	80
Şekil 26. SVEIR modelinin genel Beta etkilerle güven aralıkları	80
Şekil 27. SIIR modelinin akış şeması	86
Şekil 28. SIIR modelinin deterministik çözümleri	88
Şekil 29. [3,1] mertebesinde MRDDY ile deterministik çözüm ve RDDY yaklaşımı ...	92

Şekil 30.	[2,2] mertebesinde MRDDY ile deterministik çözüm ve RDDY yaklaşımı...	92
Şekil 31.	SIIR modelinin normal rastgele etkiler altında beklenen değerleri.....	94
Şekil 32.	SIIR modelinin normal rastgele etkiler altında varyansları.....	95
Şekil 33.	SIIR modelinin normal rastgele etkiler altında varyasyon katsayıları	96
Şekil 34.	SIIR modelinin normal rastgele etkiler altında güven aralıkları	97
Şekil 35.	I_2 için deterministik çözüm ile MRDDY ve RDDY yaklaşımı	100
Şekil 36.	SIIR sisteminin genel Beta etkiler altında beklenen değerleri	102
Şekil 37.	SIIR sisteminin genel Beta etkiler altında varyansları	103
Şekil 38.	SIIR sisteminin genel Beta etkiler altında varyasyon katsayıları.....	104
Şekil 39.	SIIR sisteminin genel Beta etkiler altında güven aralıkları.....	105
Şekil 40.	SVEIR sisteminin stokastik Euler yöntemi ile çözümleri.....	108
Şekil 41.	SVEIR sisteminin stokastik Milstein yöntemi ile çözümleri	108
Şekil 42.	SIIR sisteminin stokastik Euler yöntemi ile çözümleri	109
Şekil 43.	SIIR sisteminin stokastik Milstein yöntemi ile çözümleri	110
Şekil 44.	SVEIR sisteminin stokastik çözümleri ve rastgele halinin güven aralıkları .	111
Şekil 45.	SIIR sisteminin stokastik çözümleri ve rastgele halinin güven aralıkları	112

TABLÖLER DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 1. $t \in [0,2.5]$ için S kompartmanının beklenen değerine ait sonuçlar	40
Tablo 2. $t \in [0,2.5]$ için I kompartmanının beklenen değerine ait sonuçlar	41
Tablo 3. $t \in [0,1]$ için S kompartmanının varyansına ait sonuçlar	42
Tablo 4. $t \in [0,1]$ için I kompartmanının varyansına ait sonuçlar	42
Tablo 5. SVEIR modelinin parametreleri, tanımları ve değerleri	52
Tablo 6. SVEIR modelinin deterministik parametreleri için uç değerleri	55
Tablo 7. $t \in [0,1.5]$ için I kompartmanına ait sonuçlar	63
Tablo 8. $t \in [0,2.5]$ için R kompartmanına ait sonuçlar	64
Tablo 9. SVEIR modelinin varyasyon katsayıları için maksimum değerler	79
Tablo 10. $t \in [0,1.5]$ için I kompartmanına ait sonuçlar	84
Tablo 11. SIIR modelinin parametreleri, tanımları ve değerleri	87
Tablo 12. SIIR modelinin deterministik parametreleri için uç değerleri	88
Tablo 13. $I_2(t)$ için yaklaşık çözümler ve beklenen değerlerin karşılaştırılması	93
Tablo 14. $I_2(t)$ için beta etkiler altında yaklaşık çözümler – beklenen değerler	101
Tablo 15. SIIR modelinin varyasyon katsayıları için maksimum değerler	105

SEMBOLLER DİZİNİ

$E(X)$	: X rastgele değişkeninin beklenen değeri
$E(X^n)$	: X rastgele değişkeninin n . momenti
$Var(X)$	: X rastgele değişkeninin varyansı
$std(X)$	: X rastgele değişkeninin standart sapması
$CV(X)$	: X rastgele değişkeninin varyasyon katsayısı
$M_X(t)$	: X rastgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu
$cov(X, Y)$	: X ve Y rastgele değişkenlerinin kovaryansı
$P(A)$	: A olayının olasılığı
Ω	: Örnek uzay
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
γ_1	: X rastgele değişkeninin çarpıklık katsayısı
γ_2	: X rastgele değişkeninin basıklık katsayısı
$B(a, b)$	: Beta fonksiyonu
R_0	: Hastalığın üreme katsayısı
$\text{l. i. m. } X(t)$	: $X(t)$ rastgele süresinin kuadratik orta anlamda limiti
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	: İç çarpım

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Harezmi 9. yy. başlarında cebirin temellerini oluşturan kitabında ikinci dereceye kadar olan bazı denklemlerin analitik çözüm yöntemlerini sunmuştur. Bu çözüm yöntemlerinin başta miras paylaşımı ve ticaret problemleri gibi bazı sorunların çözümünde kullanımını içeren kitabın Latinceye çevirisinin ardından tüm dünyada gündelik problemlerin denklemler kullanılarak modellenmesi ve çözümlerinin araştırılması hız kazanmıştır [55]. Matematiksel modelleme günümüzde temel bilimler, sağlık ve mühendisliğin yanında ekonomi, matematiksel sosyoloji ve matematiksel psikoloji gibi sosyal bilimlerde de önemli bir çalışma alanı haline gelmiştir.

1.1.1. Matematiksel Modelleme

Matematiksel modelleme bir olayın işleyişinin denklemlerle ifade edilmesidir. Tıp, biyoloji, fizik ve finans gibi birçok alandaki olaylar diferansiyel denklemler ve diferansiyel denklem sistemleri kullanılarak incelenmektedir. Bu alanlarda kullanılmakta olan nüfus modelleri, reaksiyon modelleri, bilişim ağları modelleri gibi modeller incelenmekte olan olayın işleyişi hakkında bilgi sunmanın yanı sıra geçmiş ve gelecek davranışları hakkında tahmin yapabilme imkânı da sağlamaktadır.

Modellenecek olay hakkında sahip olunan bilgi miktarına göre farklı tipteki matematiksel modellerden uygun olanlar kullanılabilir. Model değişkenlerinin birbirlerine bağımlılıklarına göre doğrusal (lineer)/doğrusal olmayan (nonlinear) modeller; sistemin zamana bağlı değişim gösterme durumuna göre statik/dinamik modeller; modellenen olayın rastgele bileşenlere sahip olmasına göre deterministik/rastgele (stokastik) modeller model çeşitlerinin bazılarıdır [75].

İncelenmekte olan olaya ait değişkenler, parametreler ve model bileşenlerinin birbirleri ile ilişkilerinin analizi ardından tüm bu parçaların denklemlerde bir araya getirilmesi ile modeller kurulmaktadır. Matematiksel modellerde ihtiyaca göre adi-kısmi-kesirli türevli diferansiyel denklemler kullanılabilir ve bu denklemlerde sisteme ait eldeki

veriler kullanılarak sistemin bilinmeyen yönleri hakkında çıkarımlar yapılmaya çalışılabilir. Diferansiyel denklem sistemleri kullanarak oluşturulan modeller aracılığı ile incelenen doğal süreçlerden biri de salgın hastalıklardır.

1.1.2. Salgın Hastalık Modelleri

Günümüzdeki matematiksel modelleme çalışmalarının önemli bir kısmını epidemiyoloji (salgın hastalık) modelleri oluşturmaktadır. Modelleme çalışmalarından elde edilen sonuçların hastalıklarla mücadele konusundaki politikalara yön verdiği ve araştırmalara katkıda bulunduğu bilinmektedir [84]. Dünya Sağlık Örgütü, “Centre for the Mathematical Modelling of Infectious Diseases” (İngiltere) ve “BC Centre for Disease Control” (Kanada) gibi birçok merkez hastalıkların matematiksel modellenmesi üzerine yoğun çalışmalar yürütmektedir.

Her ne kadar M.Ö. 5. yy. sonlarında Atina’da görülen veba salgınına ait kayıtlarda hastalığın ilerlemesi ve ölü sayılarıyla ilgili matematiksel veriler olsa da, salgın hastalıkların modellenmesine dair çalışmalara 18. yy. ortalarına kadar rastlanmamaktadır. 1760 yılında Daniel Bernoulli matematiksel bir çalışma ile çiçek hastalığının ölüm oranlarını incelemiş ve aşılamanın genel etkilerine dair sonuçları Paris’te sunmuştur. Çiçek salgının etkili olduğu bu dönemde D’Alembert gibi bilim adamları da aşılamanın olumlu etkilerini gözler önüne seren matematiksel çalışmalar yayımlamıştır. Ancak Bernoulli’nin 1766 yılında yayımlanan “Essai d’une nouvelle analyse de la mortalite causee per la petite verole” isimli çalışması ilk salgın hastalık modeli olarak kabul edilmektedir [40].

Salgın hastalıkların modellenmesiyle ilgili çalışmalar özellikle 19. yy. sonlarında bakteriyolojinin gelişmesi ve bilimin insanların nasıl hasta olduklarını açıklayabilme yeteneğini kazanmasıyla ivme kazanmıştır. William Hamer 20. yy. başlarında kütle etkisi kanunu kullanarak salgın hastalıkların davranışlarını açıklamıştır. Kütle etkisi, hastalığa duyarlı insanlar ile hastalığın bulaştığı insanların karşılaşmasının ve böylece hastalığın yayılmasının bu iki grubun büyüklükleriyle orantılı olduğu prensibine dayanmaktadır. Ardından Ronald Ross’un 1902 yılında kendisine Nobel kazandıran sıtma ile ilgili çalışmaları ve 1927’de Kermack ve McKendrick’in eşik teoremi ile şekillenen SIR modeli günümüzde kullanılan birçok epidemiyolojik modelin temelini oluşturmuştur [5, 75, 116]. McKermack ve Kendrick tarafından “A contribution to the mathematical theory of epidemics” adlı çalışmalarında kullanılan SIR modeli ve bir hastalığın salgına

dönüşebilmesi için geçmesi gereken seviyeyi belirten eşik teoremi günümüzde hemen her salgın hastalık için kullanılmakta olan ve binlerce çalışmadan oluşan kompartmanlı modellerle ilgili çalışmalara öncü olmuştur. Kompartmanlı modeller özel bir matematiksel modelleme çeşididir ve 1980 sonrası tüm dünyada etkisini gösteren HIV virüsü hastalığı, 2000 sonrası etkili olan Kuş Gribi, Ebola ve son dönemde de Zika gibi ateşli hastalıklarla ilgili literatürde birçok deterministik kompartmanlı modelleri içeren çalışmalara rastlamak mümkündür.

1.1.3. SIR Modeli ve Kompartmanlı Modeller

Kompartmanlı modeller bir topluluktaki bireyleri hastalık durumlarına göre kompartman adı verilen bölümlerde gruplandırır ve hastalığın gidişatının bu gruplardaki değişimlerin analizi aracılığıyla yapılması prensibine dayanır. Kermack ve McKendrick tarafından 1927’de yayımlanan SIR model kompartmanlı modellerin en basitlerindendir ve bu modellerin temelini oluşturur [64].

Kompartmanlı modellerde bireylerin sınıflandırıldıkları gruplar sınıflandırmaya uygun olarak adlandırılmaktadır. SIR modeli, topluluğu hastalığa duyarlı (susceptible) – hasta (infected) – iyileşmiş (recovered) şeklinde üç gruba ayırır. Model ismini kompartmanlardan alırken, kompartmanlar da isimlerini bireylerin hastalıkla ilgili durumlarından alırlar.

Klasik kompartmanlı model olarak adlandırılan SIR modeli kullanılarak, farklı hastalıklar ve durumları modellemek için yeni modeller türetilabilmektedir. Örneğin, hastalığa maruz kalmış ancak henüz hastalığın vücutta aktif hale gelmediği durumların mümkün olduğu hastalıklarda, bu tip enfeksiyonları temsil etmek için yeni bir kompartman olarak E (exposed) eklenerek SEIR modeli oluşturulabilmektedir. Benzer şekilde, aynı modele yeni parametrelerin eklenmesiyle SIR modeli ve türevi olan kompartmanlı modellerin farklı versiyonlarını da oluşturmak mümkündür. SIS, SEIR, SEIRS, MSEIR gibi farklı kompartmanlardan oluşan salgın hastalık modelleri bu türevlerin bazılarındandır.

SIR modelinin bir hastalıkla ilgili etkin matematiksel inceleme yapılmasını sağlayan bazı varsayımları bulunmaktadır. Salgın sürecinde toplulukta yaşanan değişimler, bu varsayımlara uygun olarak denklemlerle ifade edilir ve denklemler incelenir. Bu varsayımlar şöyle belirtilebilir [56, 74]:

- Sabit Topluluk Hacmi:

$$N(t) \rightarrow \text{sabit}$$

Dinamik bir model olan SIR modelinde incelenmekte olan topluluktaki bireylerin tamamı S, I ve R gruplarından birine dâhildir. Herhangi bir t anında hastalığa duyarlı bireylerin sayısını gösteren $S(t)$, hastalıklı bireylerin sayısını gösteren $I(t)$ ve hastalıktan iyileşmiş bireylerin sayısını gösteren $R(t)$ değişkenlerinin biraya gelmesiyle oluşan toplam nüfus $N(t)$ ile gösterilir ve sabittir:

$$S(t) + I(t) + R(t) = N(t) \rightarrow \text{sabit}.$$

Bu varsayımın sonucu olarak hastalığa duyarlı insanlar yalnızca hastalık bulaşması durumunda I kompartmanına geçerek gruplarından çıkabilirler. Benzer şekilde I grubuna dâhil olan bireyler de yalnızca iyileşmeleri durumunda R grubuna dâhil olarak gruplarından ayrılabilirler. Ek olarak sabit kabul edilen $N(t)$ değerinin yeterince büyük olduğu kabul edilmektedir. Bu kabul burada sıralanan varsayımlara dâhil edilmeyen durumların olası etkilerinin, N yeterince büyük olduğunda göz ardı edilebilecek düzeyde kalmasını sağlar.

- Sabit Doğum/Ölüm Oranı:

S kompartmanından yalnızca I kompartmanına, I kompartmanından da yalnızca R kompartmanına geçilebildiğinden her t anında $N(t)$ toplam nüfusunun sabit kalabilmesi için doğum/ölüm oranlarının aynı olması gerekmektedir. Modellerde incelenmekte olan toplulukların birey sayısı ve gerçek hayattaki ortalama doğum/ölüm oranları göz önünde bulundurulunca, aradaki farkın SIR modelinin kurulumunda göz ardı edildiği görülmektedir. Bu nedenle doğum/ölüm oranları SIR modelinde eşit kabul edilmektedir. Benzer şekilde toplam nüfusun sabit kalabilmesi için göç alma/verme oranı da eşit olarak varsayılmaktadır.

- Eşit Karışım:

Model kompartmanlar arasındaki geçişlerin denklemlerde etkin bir şekilde temsil edilmesi için her bireyin diğer tüm bireylerle – hasta olsun ya da olmasın – aynı olasılıkla karşılaşma ihtimalinin olduğunu varsaymaktadır. Benzer şekilde, kompartmanlardaki bireylerin diğer kompartmanlara geçiş olasılıklarının da aynı olması için her bireyin hastalanmaya ve iyileşmeye yatkınlıklarının eşit olduğu varsayılır (Bireylerin yaş, cinsiyet, ırk, gelir durumu vb. özellikleri hastalanma ve iyileşmeyi etkilememektedir). Bireylerin ayrıca hastalığa maruz kalır kalmaz hastalandıkları da kabul edilmektedir.

- Kalıcı Bağışıklık

SIR modeli toplumda hastalığa karşı bağışıklığı olan bireylerin olmadığını varsayar. Ayrıca hastalıktan iyileşen bireylerin de hastalığa karşı kalıcı olarak bağışıklık kazandığı varsayılmaktadır.



Şekil 1. SIR modelinin akış şeması

Akış şeması Şekil 1 ile verilen SIR modeli bu varsayımlar altında aşağıdaki denklem sistemi ile ifade edilir:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= -\frac{\beta SI}{N}, \\
 \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta SI}{N} - \gamma I, \\
 \frac{dR}{dt} &= \gamma I.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Başlangıç şartları $S(0) = S_0, I(0) = I_0, R(0) = R_0$ şeklinde modellenecek duruma göre herhangi bir keyfi k sabiti için $S(t) + I(t) + R(t) = N(t) = k$ şartını sağlayacak şekilde verilir. (1) denklem sisteminde β parametresi hastalığın bulaşma oranını, γ parametresi ise bireylerin iyileşme oranını belirtmektedir.

SIR modelinin varsayımlarının herhangi bir olayın modellenmesine uygun olmadığı durumlarda (1) denklem sisteminden çeşitli modifikasyonlarla yeni modeller türetilir. Örneğin SIR modeli herhangi bir bireyde doğuştan gelen bağışıklık olmadığını varsayar, ancak bazı hastalıklara karşı pasif bağışıklığı olan bireyler mevcuttur. Bu tip bireylerin M (Maternally-derived immunity: Doğuştan kazanılan bağışıklık) kompartmanına dahil edilmeleriyle oluşturulan MSIR kullanılabilir. Hastalığın bulaştıktan sonra hemen aktif olması varsayımının geçerli olmadığı durumlarda E kompartmanının eklenmesiyle SEIR

modeli kullanılmaktadır. Doğum/ölüm oranlarının göz ardı edilemeyeceği durumlar için de SIR modelinin aşağıdaki hali kullanılmaktadır [55]:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \mu N - \mu S - \beta IS/N, \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta IS}{N} - \gamma I - \mu I, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - \mu R.\end{aligned}\tag{2}$$

(2) denklem sistemi için de başlangıç şartları $S(0) = S_0, I(0) = I_0, R(0) = R_0$ şeklindedir. Burada μ doğum ölüm oranını belirtmektedir ve S kompartmanına doğum ile katılan μN kadar birey diğer kompartmanlardan $\mu S, \mu I$ ve μR kadar bireyin ayrılmasıyla dengelenmektedir.

$$N = S + I + R \Rightarrow \mu N = \mu S + \mu I + \mu R.$$

SIR modeli yukarıda belirtilen varsayımlar altında deterministik olarak çalışılmaya uygun bir modeldir. Ancak gerçek hayatta SIR ve türevi modellerin varsayımlarının uygun olmadığı durumlar da bulunmaktadır. SIR ve türevi deterministik modellerin doğa koşullarına her zaman uymayan varsayımlarından biri de toplam nüfus sayısının yeterince büyük olması ve bunun sonucunda verilerdeki küçük değişikliklerin göz ardı edilebilmesi varsayımdır. İncelenmekte olan toplam nüfus sayısının yeterince fazla olmadığı durumlarda (örneğin belirli bir bölgede) parametreler, başlangıç değerleri ve model değişkenleri ile ilgili kabullerin gerçekteki değerlerinin farklı olması model sonuçlarında göz ardı edilemeyecek değişikliklere yol açabilmektedir [56]. Bu gibi durumlarda deterministik bir incelemeden ziyade rastgele (stokastik) bir modelleme yaklaşımı daha uygundur.

1.1.4. Deterministik ve Rastgele Modeller

Deterministik olaylar aynı koşullar altında gerçekleştiklerinde aynı şekilde sonuçlanmaktadır. Örneğin, su aynı koşullar altında her defasında aynı sıcaklıkta buharlaşır. Ancak doğada bazı olaylar aynı koşullar altında farklı sonuçlanabilmektedir. Örneğin bir zarın aynı koşullarda atılması olayında her denemede zarın üst yüzündeki sayı

farklı olabilmektedir. Rastgele durumlar içeren olayların denklemlerde modellenmesi için rastgele değişkenler ve stokastik süreçler kullanılabilir.

SIR modeli ve türevi olan kompartmanlı modellerin en önemli bileşenlerinden biri hastalıkların kendilerine özgü özelliklerini tanımlamakta kullanılan parametrelerdir. Örneğin (1) denklem sistemi ile verilen klasik SIR modelinde β ve γ , (2) denklem sistemi ile verilen modifiye SIR modelinde ise β, γ ve μ bu modeller ile incelenecek hastalığa dair önemli özelliklerin denklem sisteminde ifade edilmelerini sağlarlar.

Literatürde matematiksel modelleme çalışmalarının büyük kısmının deterministik olarak incelendiği görülmektedir. Bu çalışmalardaki modellerin parametreleri ve başlangıç koşulları gibi bileşenleri deterministik çokluklar olarak ele alınmaktadırlar. Ancak özellikle model parametrelerinin değerleri gerçek hayatta deterministik olmayabilirler. Örnek olarak (1) ve (2) sistemlerinde β parametresi hastalığa duyarlı bireylerle hastalıklı bireylerin teması sonucunda hastalığın yayılmasının oranını belirtmektedir. (1) ile verilen SIR modeli ile (2) ile verilen modifiye SIR modeli örneklerinde görüldüğü gibi bu modeller ve bu modelleri temel alan kompartmanlı modellerin neredeyse tamamı doğrusal olmayan denklem sistemlerinden oluşmaktadırlar. Dolayısıyla bu sistemlerin kesin çözümlerinin elde edilmesi genelde çok zordur ve çalışmalar bu modellerin yaklaşık çözümlerinin sayısal incelemelerine yoğunlaşmaktadır.

β parametresi deterministik modelleme çalışmalarındaki sayısal analizlerde $\beta = 1$ değeri kullanılarak incelenmektedir. Ancak bu değer deterministik bir çokluk olarak ele alınması modellenen olayın gerçek hayattaki işleyişini tam anlamıyla yansıtamaması anlamına gelmektedir. Deterministik modelin bu eksikliğinin bir kaynağı da SIR modelinin varsayımlarıdır. SIR modeli ve bu modeli temel alan deterministik kompartmanlı modeller bireyler arasındaki farkları, bireylerin sosyal alışkanlıklarını, yaşam biçimlerini, yaşlarını ve cinsiyetleri gibi birçok özelliklerini göz ardı ederek tüm bireyleri eşit olarak kabul etmektedir. Ancak gerçek hayatta aynı eve yaşayan insanların birbirleriyle daha çok sık karşılaştığı, aynı işyerinde benzer bireylerin daha sık temasta bulunduğu, okullarda benzer yaş grubundan bireylerin bir araya geldiği aşikârdır. Bu nedenle, SIR modelinin β parametresi örneğindeki gibi deterministik modellerin parametrelerinin sabit değerler kullanılarak incelenmesi, hastalığın gerçek hayattaki dinamiklerinin kurulan denklem sisteminde tam anlamıyla modellenmesinin önüne geçmektedir. Bu parametrelerin, parametreler ile modellenen hastalık bileşenlerinin gerçek hayattaki davranışlarına uygun

şekilde, rastgele olarak ele alınması modellerin gerçeğe daha uygun sonuçlar vermesini sağlayabilir.

Modellerdeki parametrelerin rastgele çokluklar olarak ele alınmasının daha gerçekçi bir yaklaşım olacağı, bu parametrelerin deterministik olarak kullanılan değerlerinin nasıl belirlendiğinin incelenmesiyle de görülebilir. Parametrelerin değerleri genellikle gerçek hayatta hastalıklarla ilgili karşılaşılan durumlardan elde edilen verilerin istatistiksel olarak analizi sonucunda belirlenmektedir. Örneğin 2008 yılında J. Mossong vd. tarafından Avrupa'daki çeşitli ülkelerden 7290 kişinin bir günlük davranışlarının incelenmesi sonucunda toplam 97904 temas kaydedilmiştir [83]. Çalışma sonucunda bir bireyin bir günde farklı bireylerle ortalama 13.4 kez temasta bulunduğu belirtilmektedir. Ancak bu değerin Almanya'daki bireyler için 7.95 ortalama ve 6.26 standart sapmaya sahip olduğu, İtalya'da ise 19.77 ortalama ve 12.27 standart sapmaya sahip olduğu görülmektedir. Benzer şekilde hafta içi günlerde Pazar gününe oranla %30-%40 daha fazla temas gözlemlendiği de aynı çalışmada görülmektedir. Dolayısıyla bu çalışmada anketlerle elde edilen verilerde ortalama 13.4 günlük temas sayısı için yaklaşık 10.6 standart sapma elde edildiği belirtilebilir. Benzer şekilde 2004 yılında S. Cauchemez vd. tarafından grip hastalığının hane içerisinde yayılmasına ilişkin yapılan bir çalışmada 15 gün boyunca 334 haneden elde edilen veriler Monte Carlo örnekleme ve Bayesci sonuç çıkarımı metotları ile incelenmiştir. Bu çalışmada toplumsal hastalık bulaşma olasılığı, haneden hastalık bulaşma olasılığı ve hastalık süresi verilerine ait istatistiksel sonuçlar verilmektedir. Toplumsal hastalık bulaşma olasılığı 0.08 ortalama ve 0.02 standart sapmalı bir değer olarak belirtilmiştir [29]. 2014 yılında J. A. Gilbert vd. tarafından salgın hastalık modellerinin belirsizlik analiziyle ilgili bir çalışmada hastalığın yayılma oranı olarak temas oranı ile hastalığın bulaşma olasılığının çarpımı kullanılmıştır [48]. Benzer bir yaklaşım ile [83] ve [29] çalışmalarındaki verilerle SIR modelindeki β parametresi için yaklaşık bir değer oluşturulabilir:

$$\beta = \text{günlük ortalama temas sayısı} \times \text{hastalık bulaşma olasılığı}.$$

Kaynak çalışmalarda bireylerin farklı bireylerle bir günde ortalama 13.4 kez temasta bulunduğu ve toplumdan hastalığın 0.08 olasılıkla bulaştığı verileri kullanılarak $13.4 \times 0.08 = 1.072$ sonucu elde edilir.

SIR modeli ve bu modeli temel alan kompartmanlı modellerdeki parametrelerin değerleri hemen her zaman bu ve benzeri şekildeki hesaplamalar aracılığıyla bulunmaktadır. Ancak görüldüğü gibi hesaplarda kullanılan bazı değerler gerçekte önemli

miktarda sapma gösterebilen büyüklüklerdir. SIR modeli kullanılarak 2014/2015 yıllarında Afrika’da yaşanan Ebola salgının modellenmesi için 2016 yılında J. Bartlett vd. tarafından yapılan çalışmada Amerika Birleşik Devletleri’ndeki “Centers for Disease Control and Transmission (CDC)” aracılığıyla bölgedeki 13 ülkede yaşanan salgınla ilgili veriler incelenmiştir [11]. SIR modelinin yaşa bağlı bir modifikasyonunun kullanıldığı çalışmada, denklem sisteminin çözümlerinden parametreler için elde edilen sonuçların hastalığa ait verilere en küçük kareler yöntemiyle uydurulması sonucu β ve γ parametrelerinin verilerin toplandığı 160 gün boyunca değişimi gösterilmiştir. Bu çalışmada Sierra Leone’de 160 günlük Ebola salgını döneminde hastalığın yayılma oranını belirten β için (0,0.153), insanların hayatını kaybetme oranını belirten δ parametresi için (0,0.032) aralıklarında değerlerin gözlemlendiği belirtilmektedir. [11], [29] ve [83] çalışmalarının üçünde de farklı istatistiksel yaklaşımlar ve gerçek veriler kullanılarak kompartmanlı modellerin parametrelerinin ne ölçüde değişiklikler gösterebildiği sunulmuştur.

Deterministik salgın hastalık modelleri, parametrelerin gerçek hayatta tasvir ettikleri olayın rastgele davranışlarını daha etkin bir şekilde modelleyebilmeleri için modifiye edilebilirler. Hastalığın doğal işleyişindeki rastgele yapıyı modelde temsil etmek için yapılabilecek değişikliklerden biri parametrelerin rastgele değişkenler haline getirilmeleridir. Deterministik modellerin analizinde sabit büyüklükler olarak değerlendirilen parametrelerin birer rastgele değişkene dönüştürülmeleri, bu modellerin de birer rastgele diferansiyel denklem sistemine dönüşmeleri anlamına gelmektedir.

Deterministik diferansiyel denklemler kullanılarak üç şekilde rastgele diferansiyel denklemler elde edilebilmektedir.

$$X'(t) = f(X(t), Y(t), t), \quad t \in T; X(t_0) = X_0 \quad (3)$$

şeklindeki bir adi diferansiyel denklem göz önünde bulundursun [Soong, 1973]. Bu adi diferansiyel denklemi

i. Rastgele başlangıç değerleri ile

$$X'(t) = f(X(t), Y(t), t), \quad t \in T; X(t_0) = \mathbf{X}_0$$

şeklinde bir X_0 rastgele değişkeni kullanarak,

ii. Rastgele homojen olmayan terim ile

$$X'(t) = f(X(t), t) + \mathbf{Y}(t), \quad t \in T; X(t_0) = X_0$$

şeklinde bir rastgele $Y(t)$ sürecini kullanarak ve

iii. Rastgele katsayılar ile

$$X'(t) + \mathbf{A}(t)X(t) = Y(t), \quad t \in T; X(t_0) = X_0 \quad (4)$$

şeklinde bir rastgele $A(t)$ süreci kullanarak bir rastgele diferansiyel denklem haline getirebiliriz (Rastgele süreçler $A(t) = A(t, \omega)$ şeklinde yalnızca zaman değişkenine bağlı gösterilmiştir) [105].

(1) ile ifade edilen SIR modeli ve (2) ile ifade edilen modifiye SIR modeli 3 adet doğrusal olmayan deterministik adi diferansiyel denklemden oluşmaktadır. Benzer şekilde kompartmanlı modeller de deterministik diferansiyel denklem sistemleridir. Bu modellerin parametrelerinin gerçekteki rastgele davranışları (iii) tipindeki rastgele diferansiyel denklemlerin kullanılması ile denklem sistemine yansıtılabilir. Bunun için bu denklemlerdeki değişkenlerin katsayıları olarak görev üstelenen parametreler birer rastgele değişken haline getirilerek rastgele diferansiyel denklem sistemleri oluşturulabilmektedir. Kurulan rastgele diferansiyel denklem sistemleri rastgele modelleri oluşturacaktır.

Modellenen olayların gerçek hayattaki davranışlarını denklemlerde temsil etmenin bir başka yolu da stokastik diferansiyel denklemlerin kullanılmasıdır. Rastgele diferansiyel denklemler kullanılarak kurulan modellerde, olayın sadece parametreler ile temsil edilen yönlerinin rastgele davranışları denklemlere yansıtılabilmektedir. Denklemlerin başlangıç koşulları, değişkenlerin bağımlılıkları ve homojen olmayan kısımlarının yapıları gibi farklı yönlerinde de rastgele bir yapıya sahip olmaları mümkündür. Dolayısıyla bu çeşit olaylardaki “genel” rastgele yapı yalnızca parametrelerin rastgele olarak incelenmesi ile temsil edilemez. Bu aşamada denklemlere stokastik gürültü terimleri eklenmesi ile elde edilecek stokastik diferansiyel denklemler, modellenecek olaydaki rastgele yapıyı tüm yönleriyle ifade edebilme özelliğine sahiptir. Bir stokastik diferansiyel denklem

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t \quad (5)$$

şeklinde ifade edilmektedir [68]. Burada $X(t)$ ile ifade edilen deterministik fonksiyonun stokastik analizin terminolojisine uygun olarak X_t şeklinde ifade edildiğine dikkat edilmelidir. Denklemden W_t ile Wiener süreci gösterilmektedir. $a(t, X_t)$ fonksiyonu stokastik diferansiyel denklemin sürüklenme (drift) katsayısı, $b(t, X_t)$ ise difüzyon (diffusion) katsayısı olarak adlandırılmaktadır. (3) adi diferansiyel denklemine,

modellenecek olayın gerçekteki genel rastgele hareketini temsil edecek stokastik gürültünün eklenmesi ile (5) stokastik diferansiyel denklemi elde edilir.

(1) ile ifade edilen SIR modeli ve benzeri kompartmanlı modeller için parametrelerin rastgele değişkenler haline getirilmesi ile oluşturulan (4) denklemi şeklindeki rastgele diferansiyel denklem sistemleri ve stokastik gürültü terimlerinin eklenmesi ile oluşturulan (5) denklemi şeklindeki stokastik diferansiyel denklem sistemleri ile rastgele davranış analizi yapılabilmektedir. Rastgele diferansiyel denklemlerin çözümleri birer rastgele değişken iken, stokastik diferansiyel denklemlerin çözümleri birer stokastik süreç olduğu için bu modellerin çözüm yöntemleri farklı olsalar da, elde edilecek sonuçlar ile modellenen olayların rastgele yapılarını inceleme olanağı sunmaktadırlar. Bu çalışma kapsamında deterministik kompartmanlı modellerin rastgele ve stokastik modellere dönüştürülmesi aracılığıyla modellenen olayların rastgele dinamiklerinin incelenmesi ve sahip oldukları rastgele altyapının yorumlanması amaçlanmaktadır.

1.2. Literatür Araştırması

Salgın hastalıklarla ilgili matematiksel çalışmalar Daniel Bernoulli'nin 1766 yılında çiçek hastalığı ve aşılama üzerine yaptığı analizlerden sonra yeni bir boyuta taşınmıştır. 19. yy. başlarında Nobel ödüllü İngiliz doktor Sir Ronald Ross ve İngiliz matematikçi Hilda Phoebe Hudson tarafından hastalıkların yayılmasının matematiksel incelenmesi üzerine yayımlanan çalışmalar kompartmanlı modellerin gelişimine önemli katkı sağlamıştır [101, 102, 103]. 1927 yılında İskoç biyokimyacı William Ogilvy Kermack ve İskoç fizyolog (Yarbay) Anderson Gray McKendrick tarafından yayımlanan çalışma ile salgın hastalıkların yayılma dinamikleri, hastalığın salgına dönüşebileceğini gösteren üreme katsayısı vb. faydalı sonuçların elde edilmesine imkan sağlayan kompartmanlı modeller sunulmuştur. Ancak kompartmanlı modeller, A. G. McKendrick tarafından 1926 yılında yayımlanan "Applications of Mathematics to Medical Problems" [77] başlıklı çalışması gibi ilk dönemlerde çok dikkat çekmemiştir. Bu çalışmanın salgın hastalıklar ve nüfus artışı için stokastik modellerde kullanımına dair sonuçları 1939'da yayımlayan William Feller kitabında McKendrick'in çalışması için "Bu dikkat çekici çalışmanın pratikte fark edilmemiş olması talihsizliktir" yorumunu yapmıştır [45].

Kompartmanlı modeller 1980'li yıllarda görülen HIV vakaları ve bu hastalıkla ilgili çalışmaların yoğunlaşması ile birlikte odak noktası haline gelmiştir. HIV 2016 yılı

itibarıyla yaklaşık 36.7 milyon insana bulaşmıştır ve sadece 2015 yılında 1.1 milyon insan bu virüsten kaynaklanan sebeplerle hayatını kaybetmiştir [122]. Bugüne kadar yaklaşık 35 milyon insanın ölümüne yol açan HIV, 1980’lerin ortalarında tanımlanmasının ardından birçok bilimsel çalışmaya konu olmuştur. Sir Roy Malcolm Anderson ve Robert McCredie May gibi alanın önde gelen bilim adamları HIV virüsünün tanımlanmasının ardından hastalığın yayılmasını incelemek için kompartmanlı modelleri kullanmışlardır [6, 39, 76]. HIV virüsünün kompartmanlı modellerle incelenmesinin ilk örneklerinden biri 1988 yılında R. M. Anderson tarafından “The role of mathematical models in the study of HIV transmission and the epidemiology of AIDS” başlıklı çalışmada şu denklem sistemi ile verilmiştir [6]:

$$\begin{aligned}\frac{dX(t)}{dt} &= -(\lambda + \mu)X(t), \\ \frac{dY(t)}{dt} &= \lambda X(t) - (\nu + \mu)Y(t), \\ \frac{dA(t)}{dt} &= \nu Y(t) - \alpha A(t).\end{aligned}\tag{6}$$

HIV virüsünün yayılmasını modelleyen bu denklem sisteminde topluluktaki hastalığa duyarlı bireyler $X(t)$, hastalık bulaşmış bireyler $Y(t)$ ve AIDS’li bireyler $A(t)$ ile belirtilmektedir. Günümüzdeki uygulamalarda çoğunlukla S, I, R, M, E gibi hastalıkla ilişkili durumlarıyla adlandırılan kompartmanların, salgın hastalık modellerinin 1980 sonrası ilk örneklerinden olan bu çalışmada X, Y, A ile isimlendirildiği görülmektedir. Bu modelde λ ile kişi başı ortalama enfeksiyon oranı, α ile AIDS hastalarının ölüm oranı, μ ile hastalığa duyarlı bireyler ile hastalık bulaşmış bireylerin kişi başı ortalama ölüm oranı gösterilmektedir. Virüsün bulaşmasının ardından bireylerin AIDS’li hale gelmesi için gereken ortalama kuluçka süresi $1/\nu$ ile gösterilirken sistemde zaman t değişkeni ile temsil edilmektedir. (6) sistemi, sadece hastalığa duyarlı bireyler ile hastalık bulaşmış bireylerin sayılarının zamanla değişimini belirttiği için, SI (Susceptible-Infected) modellerinin bir versiyonudur. Burada S ve I kompartmanlarının değişimini belirten denklemlerin, modellenen hastalığın özelliklerine göre (1) ve (2) modellerindeki S ve I kompartmanlarından farklı oluşturulduğu görülebilmektedir.

1980’li yıllar ve sonrasında HIV virüsünün dünya çapında yol açtığı ölümler, bu hastalıkla ilgili çalışmaları ve bu çalışmalar kapsamında matematiksel modelleme

çalışmalarının sayılarını da artırmıştır. Bu dönem sonrasında HIV gibi dünya çapında etkili olan birçok hastalıkla ilgili tıbbi çalışmaların yanında matematiksel modelle çalışmalarına da önem verildiği ve hastalıkla mücadelede bu modellerin sonuçlarının göz önüne alındığı görülmektedir. Özellikle 2013-2016 arasında Batı Afrika’da yaklaşık 11,000 kişinin ölümüne neden olan Ebola [86, 95], 2012 sonrası dünya çapında etkili olan MERS (Orta Doğu Solunum Sendromu) [67] ve 2009’da binlerce insanın ölümüne yol açan Domuz Gribi [124] kompartmanlı matematiksel modeller kullanılarak incelenen salgın hastalıklardan yalnızca birkaçıdır. Son olarak 2015 yılında Brezilya kaynaklı olarak başlayan ve tüm dünyada etkili olan Zika virüsü hastalığı da matematiksel modelleme çalışmalarına konu olmuştur [70, 93].

1933 yılında A.N. Kolmogorov tarafından yayımlanan (İngilizce ismiyle) “Foundations of the Theory of Probability” ile Olasılık kuramı aksiyomatik bir altyapıya kavuşmuştur [69]. Olasılık kuramında 20. yüzyılın ilerleyen dönemlerinde rastgele değişkenlerin kuadratik orta anlamda yakınsaklıklarını temel alan kuadratik orta analizi (mean-square calculus) kavramının tanıtılması, rastgele diferansiyel denklemler kavramının matematiksel modelleme çalışmalarında daha önemli bir bileşen haline gelmesinin önünü açmıştır. Rastgele diferansiyel denklemler (RDD) rastgele bileşenlere sahip olan diferansiyel denklemlerdir ve kuadratik orta analizini temel alan çalışmalar ile diferansiyel denklemler için uygulanan yöntemlerden bazıları rastgele diferansiyel denklemler için de kullanılabilir hale gelmiştir. Kuadratik orta analizi ile ilgili faydalı bilgiler sunan T. T. Soong [104, 105] ve A. Papoulis [92] gibi yazarların kaynakları sonrası 21. yy. başlarında matematiksel modellerde de rastgele diferansiyel denklemler kullanılmaya başlamıştır.

Bir X rastgele değişkeni ve $X_n, n = 1, 2, \dots$ rastgele değişkenler dizisi bir $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlı olsunlar. $\lim_{n \rightarrow \infty} E[|X_n - X|^2] = 0$ koşulu sağlandığında X_n rastgele değişkenler dizisi X rastgele değişkenine kuadratik orta anlamda yakınsaktır denir ve $X_n \xrightarrow{\text{m.s.}} X$ (m.s.: mean-square) ile gösterilir [1, 105]. Rastgele değişkenlerin kuadratik orta anlamda yakınsaklıkları ve L_2 uzayının özellikleri kullanılarak, kuadratik orta anlamda süreklilik ve kuadratik orta türevin detayları ile Soong tarafından “Random Differential Equations in Science and Engineering” adlı kitapta verilmektedir. Kuadratik orta anlamda türevle tanımı kullanılarak rastgele diferansiyel denklemlerle ilgili işlemlerin altyapıları oluşturulmuş ve matematiksel modeller dâhil birçok alanda daha detaylı olarak kullanılmalarına imkân sağlanmıştır.

Diferansiyel denklemlerde kullanılan yöntemlerin kuadratik orta analizini temel olarak rastgele diferansiyel denklemlere uygulanmasına örnek olarak Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi (DDY; Differential Transformation Method - DTM) verilebilir [113]. Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi'nin rastgele diferansiyel denklemlere uygulanması ile ilgili teorik altyapının sunulduğu [113] çalışması sonrası bazı rastgele bileşenli diferansiyel denklemler [66], doğrusal rastgele diferansiyel denklemler [114] ve belirsizlik içeren parabolik difüzyon denklemi [50] için uygulamaları literatüre kazandırılmıştır. Benzer şekilde stokastik sonlu-elemanlar yöntemi (SFEM) [42], rastgele Euler yöntemi [59], rastgele değişken dönüşümü yöntemi (Random Variable Transformation Method - RVT) [27, 115], Homotopy Analizi yöntemi (HAM) [49], çok adım yöntemleri (Multistep) [36], yerel doğrusallaştırma yöntemi (Local Linearization Method) [23] rastgele diferansiyel denklemlere uygulanan diğer yöntemlerden bazılarıdır. Bu yöntemlerin Caratheodory diferansiyel denklemi, rastgele Bernoulli diferansiyel denklemi, rastgele Riccati diferansiyel denklemi, rastgele Airy diferansiyel denklemi, rastgele Hermite diferansiyel denklemi, rastgele Legendre diferansiyel denklemi gibi rastgele bileşenlere sahip olan denklemlere uygulamaları mevcuttur [21, 22, 25, 26, 33, 59]. Ancak rastgele diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemleri ve uygulamaları ile ilgili literatürün yukarıda listelenen çalışmalardan çok da fazlasını içerdiğini söylemek mümkün değildir. Çalışmaların genel olarak kuadratik orta analizi ile rastgele diferansiyel denklemlerin sayısal çözüm yöntemleri için temelleri içeren bazı kaynak çalışmalar [19, 35] ve RVT yönteminin [43, 115] uygulamaları etrafında yoğunlaştığı görülmektedir. Bu çalışmalara ek olarak 1979 yılında rastgele katsayılı rastgele diferansiyel denklemler için sonlu elemanlar yöntemi üzerine [110] de bir çalışma bulunmaktadır.

Kuadratik orta anlamda incelenen rastgele diferansiyel denklemlerde rastgele terimlerin genel olarak, diferansiyel denklemin bağımsız değişkeni t ile uyum içinde, $X(t, w) = X_t$ şeklinde zamana bağlı olarak değişim gösteren stokastik terimler olarak ele alındığı görülmektedir. Söz konusu bu denklemlerin rastgele bileşenlerdeki belirsizliğin de denklemin deterministik bileşenleri gibi zamana bağlı olarak değiştiği görülmektedir. Bu örneklerin yanı sıra rastgele diferansiyel denklemlerdeki belirsizliğin analizinde “çok terimli kaos” (polynomial chaos) [72] yöntemi de kullanılmaktadır. Wiener [118] tarafından adlandırılan ve denklemlerdeki belirsizliğin (rastgele bileşenlerin) polinom açılımları yardımıyla [62] incelenmesini sağlayan bu yöntemin yanı sıra rastgele diferansiyel denklemler için düzenleme (collocation), kuvvet serileri açılımı ve yolsal

yaklaşım (pathwise approximation) tabanlı bazı yöntemlere de literatürde rastlamak mümkündür [19, 53, 123].

Rastgele bileşenlere sahip denklem ve sistemlerin analizinde en yaygın olarak kullanılan yöntem ise hiç şüphesiz Monte-Carlo yöntemidir [80]. Rastgele denklemlerin benzetiminde (simülasyon) Monte-Carlo yöntemlerinin sıklıkla kullanılmalarının nedenlerinden biri kolaylıkla hemen her denklemde kullanılabilme olanaklarının bulunmasıdır. Bu yöntemin gerçek değere yakınsama hızının düşük olması oldukça büyük bir hesap yükü gerektirse de [72] gelişen bilgisayar teknolojisi ve yöntemin pratikliği hala Monte-Carlo simülasyonlarının popüleritesini korumasını sağlamaktadır. Metropolis ve Ulam “The Monte Carlo Method” adlı çalışmalarında [80] bu yöntemin mantığını açıklamak için ünlü bir kart oyununu örnek vermektedirler. Metropolis ve Ulam bu kart oyununda başarılı bir sonuç elde etme olasılığının hesabının, oyuncu kabiliyeti gibi bazı faktörler devre dışı bırakılsa bile, olasılık teorisinin yöntemleriyle zorlu bir iş olduğu vurgulamaktadır. Buna alternatif olarak ise ilgili oyunun yeterince büyük sayıdaki örneğinin incelenmesi ve bu örneklerdeki başarı sayısının hesaplanmasının pratik bir çözüm olacağı belirtilmektedir. Bu prensip ışığında Monte-Carlo yöntemi, bir deneyin yeterli sayıda tekrarının kullanılması ile sonucun istatistiksel özelliklerinin gözlemlenmesini temel almaktadır. Monte Carlo yönteminde hata deney sayısı ile ters orantılıdır [72], dolayısıyla simülasyonlarda yeterince iyi bir sonuç alınabilmesi için deneyin birçok kez tekrarlanması gerekmektedir. Bu da hesap zamanı ve yükünün artmasına yol açmaktadır ve Monte Carlo yönteminin dezavantajlarından biridir. Buna rağmen Monte Carlo yöntemi, literatüre girdiği 1940’lı yıllardan itibaren, pratikliği sebebiyle rastgele bileşenlere sahip birçok deneyin sonuçlarının incelenmesinde kullanılmıştır [3, 12, 33].

Rastgele diferansiyel denklemlerin incelenmesinde kuadratik orta analizi ve Monte Carlo simülasyonlarını içeren çalışmalara sıklıkla rastlamak mümkün olsa da, bu durumun rastgele diferansiyel denklem sistemleri için de geçerli olduğunu söylemek mümkün değildir. Rastgele nüfus modelleri ve lojistik model için kuadratik orta analizini içeren bir çalışma bu matematiksel modellerin rastgele çözümlerini sunmaktadır [37]. Benzer bir inceleme, rastgele başlangıç koşulları ile nüfus modelleri için de ilerleyen yıllarda yapılmıştır [95]. Lineer rastgele modellerle kuadratik orta anlamda detaylı bir inceleme içeren bir doktora tezi de 2010 yılında Valencia’da yayımlanmıştır [73]. Özellikle kompartmanlı modeller açısından, diferansiyel denklem sistemlerinin rastgele koşullar

altında incelemeleri birkaç örnekten ibarettir. Bu çalışmaların ilk örneği kompartmanlı modellerdeki S kompartmanı için rastgele başlangıç koşulları kullanarak simülasyon sonuçları elde edilen ve sonuçların yorumlanmasını içeren 2005 tarihli çalışmadır [63]. Bu çalışma yalnızca tek kompartman için ve yalnızca tek bir dağılımla başlangıç koşullarının rastgele alınmasını içermektedir. 2008 yılında Kuple (Coupled-Bağlaşık) diferansiyel denklem sistemlerinin belirsiz başlangıç koşulları ve kaynak terim (source term) ile [20] incelenmesi, kuple diferansiyel denklemlerden oluşan kompartmanlı matematiksel modeller için de öncü bir çalışmadır. Nitekim 2010 yılında yayımlanan “Epidemic models with random coefficients” isimli çalışma rastgele katsayılar içeren SIR ve SIRS modelleri için çok terimli kaos yöntemiyle rastgele sonuçları incelemektedir [31]. Bu çalışmadan önce 2009 yılında rastgele dinamik sistemlerin sayısal karakteristikleri ile ilgili simülasyon içeren bir çalışma yapılmıştır [16]. Rastgelelik içeren epidemiyolojik kompartmanlı modeller ile ilgili en güncel çalışmalar ise 2015 ve 2016 yıllarında M.C. Casaban vd. tarafından yayımlanmıştır [24, 28]. Bu çalışmalarda SI ve SIS kompartmanlı modelleri başlangıç değerleri ve parametreleri rastgele değişkenler olacak şekilde ele alınmış ve Rastgele Değişken Dönüşümü (RVT) yöntemi kullanılarak çözümün olasılık dağılımı ve R_0 üreme katsayısının rastgele yorumu hakkında sonuçlar verilmiştir. Bu çalışmalar dışında rastgele bileşenler içeren modellerin İspanya’daki uyuşturucu kullanımı [4], bakteri üremesi [106] ve Monod kinetikleri [107], biyokimyasal reaksiyonlar [13], Dang Humması [14], Sıtma [12], bakteri direnci [78] ve Hepatit C hastalığı [79] gibi özel konulardaki uygulamalarını içeren çalışmalar da literatürde mevcuttur. Bu uygulamaların bir kısmının tez çalışmaları dahilinde literatüre kazandırıldığı düşünüldüğünde, rastgele diferansiyel denklem sistemleri ile kompartmanlı modeller üzerine çalışmaların sayısının az olduğu fark edilebilmektedir. Kompartmanlı matematiksel modeller genellikle çok boyutlu denklem sistemlerinden oluşmaktadırlar. Dolayısıyla bu sistemler rastgele bileşenler ile birlikte göz önüne alınınca, yaklaşık çözüm yöntemleri ve simülasyon çalışmalarıyla kesin değere yakınsayan sonuçlar elde edilebilmesi için yüklü miktarda hesap ve zaman gerektiren çalışmalara ihtiyaç duyulmaktadır. Bu hesap ve zaman yükü gereksinimi, rastgele kompartmanlı modeller ile ilgili literatürün için yalnızca SI, SIS ve SIR modelleri ile ilgili birkaç çalışmayla sınırlı kalmasının başlıca nedenlerindendir.

Olayların gerçek hayattaki rastgele davranışını denklemlere yansıtmak için rastgele değişkenlere alternatif olarak stokastik süreçler de kullanılabilir. Ancak rastgele değişkenler ve rastgele diferansiyel denklemlerin aksine stokastik süreçler ve stokastik

diferansiyel denklemler ile ilgili çok geniş bir literatür mevcuttur. 1905 yılında Albert Einstein'ın modern fiziğin kuruluşuna büyük katkı sağlayan dört makalesinden biri olan Brown Hareketi (Brownian Motion) ile ilgili çalışması stokastik diferansiyel denklemlerin temellerindendir [41, 89]. Ancak stokastik diferansiyel denklemlerle ilgili detaylı analiz yapılabilmesi ve sonuçlar elde edilmesi 1940 yılında Japon matematikçi Kiyoshi Itô'nun öncülük yaptığı Stokastik integral [58] ve Stokastik analiz (Stochastic Calculus) ile gerçekleşmiştir. Stokastik analizin gelişmesi stokastik integral denklem, stokastik diferansiyel denklem ve stokastik kontrol gibi yapıların yanı sıra stokastik Euler yöntemi ve stokastik Milstein yöntemi gibi stokastik yaklaşık çözüm yöntemlerinin de gelişmesini sağlamıştır [68, 128]. Stokastik diferansiyel denklemler hakkındaki geniş literatüre paralel olarak stokastik modeller ve stokastik kompartmanlı modellerle de ilgili birçok çalışmaya rastlamak mümkündür. Finanstan [94] sosyal bilimlere [34] ve sağlığa [57] kadar hemen her alanda stokastik modelleme çalışmaları devam etmektedir. Benzer şekilde kompartmanlı modeller için de SIR [32] ve SIRS [71] ile SEIR [126] modelleri gibi bir çok türevi üzerine literatürde onlarca çalışma bulunmaktadır. Özellikle finans alanındaki stokastik modellerde, rastgele modellere benzer şekilde, Monte Carlo simülasyonları yaygın olarak kullanılan yöntemlerdendir. Sağlık alanındaki stokastik modelleme çalışmalarında [2, 57] deterministik model sonuçları ile karşılaştırma odaklı incelemeler de sıklıkla karşılaşılan çalışmalar arasındadırlar.

1.3. Tez İçeriği

Bu tez çalışması dâhilinde deterministik diferansiyel denklem sistemlerinden oluşan kompartmanlı modellerin “rastgele etki” terimleri kullanılarak rastgele diferansiyel denklem sistemlerine dönüştürülmesi ve bu sayede hastalığın dinamiklerini temsil eden model değişkenlerinin sayısal karakteristiklerinin ölçülmesi amaçlanmaktadır. Oluşturulacak olan rastgele modeller için yaklaşık çözümler araştırılacak, bu yaklaşık çözümler simülasyon sonuçları ve deterministik sonuçlarla karşılaştırılarak yaklaşık moment formüllerinin geçerliliği ve deterministik-rastgele sonuçlar arasındaki farklar yorumlanacaktır. Ek olarak deterministik modellere “stokastik gürültü” terimleri eklenerek stokastik modeller de kurulacak ve stokastik çözümler kullanılarak hastalığın stokastik davranışı, stokastik-rastgele sonuçların uyumu ve stokastik-deterministik sonuçların karşılaştırılması hakkında incelemeler yapılacaktır. Rastgele etki terimlerinin işleyişi ve

rastgele-stokastik model kurulumunun detaylarının daha anlaşılır olması için yapılacak analizlerin 2017 yılında yayımlanmış iki deterministik modele uygulamaları yapılacaktır. Bu modeller L. Nkamba vd. tarafından yayımlanan Poliomyelitis (Polio – Çocuk Felci) hastalığı modeli [87] ve yılında T. Khan vd. tarafından yayımlanan olan Hepatit B hastalığı modelidir [65].

Literatürde rastgele katsayı kullanılarak oluşturulmuş diferansiyel denklemlerde bu katsayılar, denklem değişkenleri gibi, zamana bağlı stokastik süreçler tarzında ele alınmıştır. Ancak bu çalışma dahilinde rastgele katsayılar, modellerdeki parametrelerin deterministik değerlerine eklenecek – zamandan bağımsız – rastgele gürültü görevindeki rastgele etki terimleri kullanılarak oluşturulacaktır. Ayrıca Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi'nin (DDY) rastgele diferansiyel denklemlerde uygulamaları ile ilgili literatürde var olan çalışmalara da değinilmiştir. Ancak DDY ile elde edilen yaklaşık çözümün Laplace-Pade yöntemi ile modifiye edilmesine dayanan Modifiye Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi (MDDY: Modified Differential Transformation Method - MDTM) ilk kez rastgele diferansiyel denklem sistemlerinde kullanılacaktır. MDDY kullanılarak uygulama için kullanılacak kompartmanlı modeller için yaklaşık çözümler elde edilecek ve model bileşenleri için yaklaşık moment formülleri hesaplanacaktır. Yaklaşık beklenen değer ve yaklaşık varyans – yaklaşık güven aralığı formülleri, modellerin deterministik ve stokastik çözümleri ile karşılaştırılacaktır. Bu şekilde “rastgele etki” kullanılarak oluşturulan elde edilen yaklaşık moment formüllerinin deterministik davranışlarla ne denli uyumlu olduğu ve yaklaşık güven aralıklarının hastalığın stokastik gerçekleşmeleri ile ilgili ne denli güvenilir sonuçlar verdiği gözlemlenecektir. Stokastik gürültü – rastgele etki uyumu/farklarının yorumlanması ve rastgele analizlerin hastalıkla ilgili yapılacak çıkarımlara ne denli katkısının bulunduğu ile ilgili incelemeler de rastgele modelleme ilgili yapılacak bu çalışmaların önemini ortaya koyacaktır.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu bölümde tez çalışmalarında kullanılacak olan yaklaşık çözüm yöntemleri ile rastgele modellere uygulanacak kuadratik orta analizi ve Monte-Carlo simülasyonu ile ilgili bilgiler verilmektedir. Ek olarak çocuk felci ve Hepatit B hastalığına dair iki kompartmanlı model üzerinde rastgele ve stokastik modelleme çalışmaları ve rastgele davranış analizi de bu bölümde yapılacaktır.

2.1. Deterministik Diferansiyel Denklemlerde Yaklaşık Çözümler

Tezde incelenecek olan denklem sistemlerinde Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi (DDY), Modifiye Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi ve dördüncü mertebeden Runge-Kutta Yöntemi kullanılacaktır.

2.1.1. Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi (DDY)

Bir $x(t)$ fonksiyonunun Diferansiyel Dönüşümü [88, 97, 127] şöyle tanımlanır: $x(t)$ fonksiyonu bir D bölgesinde analitik bir fonksiyon olmak üzere bu fonksiyonun k -ıncı türevinin Diferansiyel Dönüşümü, $t_0 \in D$ olmak üzere,

$$X(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k x(t)}{dt^k} \right]_{t=t_0}, \forall t \in D \quad (7)$$

ile tanımlanır. Burada $x(t)$ orijinal fonksiyon iken $X(k)$ dönüştürülmüş fonksiyondur. $X(k)$ nın ters diferansiyel dönüşümü ise

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} X(k) (t - t_0)^k, \forall t \in D \quad (8)$$

şeklinde tanımlanır. (7) ve (8) eşitlikleri kullanılarak

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^k}{k!} \left[\frac{d^k x(t)}{dt^k} \right]_{t=t_0}, \forall t \in D \quad (9)$$

elde edilir. (9) eşitliği ile de görülebileceği gibi DDY Taylor açılımını temel alan bir yöntemdir. Uygulamalarda $\sum_{k=n+1}^{\infty} X(k)(t-t_0)^k$ terimi yeteri derecede küçük değere sahip olduğu için göz ardı edilmektedir. Bu şekilde $x(t)$ fonksiyonunu temsil etmesi için her $t \in D$ için

$$x(t) = \sum_{k=0}^n X(k)(t-t_0)^k \quad (10)$$

şekildeki sonlu seri kullanılır. (7) ve (9) kullanılarak DDY yönteminde gerekli olabilecek bazı işlemler için aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

Teorem 2.1.1 [7] DDY yönteminde aşağıdaki matematiksel işlemlere karşılık gelen dönüştürülmüş fonksiyonlar kullanılır:

- (i) $z(t) = x(t) \pm y(t)$ ise $Z(k) = X(k) \pm Y(k)$,
- (ii) $z(t) = cy(t)$ ise $Z(k) = cY(k)$,
- (iii) $z(t) = \frac{dy(t)}{dt}$ ise $Z(k) = (k+1)Y(k+1)$,
- (iv) $z(t) = \frac{d^n y(t)}{dt^n}$ ise $Z(k) = \frac{(k+n)!}{k!} Y(k+n)$,
- (v) $z(t) = x(t)y(t)$ ise $Z(k) = \sum_{k_1=0}^k X(k_1)Y(k-k_1)$,
- (vi) $z(t) = t^n$ ise $Z(k) = \delta(k-n) = \begin{cases} 1 & k = n, \\ 0 & k \neq n. \end{cases}$

Uygulamalarda DDY yönteminde kullanılacak iterasyon (terim) sayısı olan n , incelenilen problem için gözlemlenen yakınsama hızına göre değişmektedir.

2.1.2. Modifiye Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi (MDDY)

Literatürde klasik Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi'nin başta çok adımlı yöntemler olmak üzere farklı modifikasyonları mevcut olsa da [15] bu çalışmada Padé yaklaşımını temel alan ve bazı kaynaklarda DTM-Padé Yöntemi olarak da adlandırılan Modifiye Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi kullanılacaktır [82]. Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi ile diferansiyel denklemler için kuvvet serileri şeklinde analitik çözümler üretilmektedir.

Ancak özellikle kompartmanlı modeller özelinde görülebildiği gibi uzun zaman aralıklarında yapılan incelemelerde (t değeri büyük olduğunda yani $t \rightarrow \infty$ iken) kuvvet serileri temelli yaklaşım yöntemleri çok kullanışlı olmamaktadır [100]. Bu dezavantajı kaldırmak için polinom formundaki yaklaşımları polinomların rasyonel fonksiyonlarına dönüştüren Padé yaklaşımı kullanılmaktadır [9]. DDY Yöntemi ile Padé yaklaşımının birleşimi olan bu yöntem kullanılarak sonsuz tanım aralığına sahip problemlerde başarılı elde edilen başarılı sonuçlar literatürde mevcuttur [51, 99, 100].

Bir $x(t)$ fonksiyonunun $[p/q]$ Padé yaklaşımı p -inci mertebeden bir polinomun q -uncu mertebeden bir polinoma bölümüdür. Bu polinomlar, yaklaşımın kuvvet serisinin baş katsayılarının $x(t)$ in kuvvet serisinin ilk $(p + q + 1)$ terimiyle uyuşması esasına göre seçilirler [17]. Bir $x(t)$ fonksiyonunu temsil eden bir $\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ kuvvet serisini ele alalım [99]:

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i. \quad (11)$$

Bu fonksiyonun Padé yaklaşımı payı ve paydası polinom olan bir kesirdir ve

$$[L/M] = \frac{P_L(t)}{Q_M(t)} \quad (12)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $P_L(t)$ ve $Q_M(t)$ sırasıyla en fazla L -inci ve M -ince dereceden polinomlardır. Dolayısıyla (11) ve (12) denklemlerinde,

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \dots, \quad (13)$$

$$P_L(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3 + \dots + p_L t^L, \quad (14)$$

$$Q_M(t) = q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + q_3 t^3 + \dots + q_M t^M, \quad (15)$$

olduğu görülmektedir. Bu durumda (12) denkleminin pay ve paydasında sırasıyla $L + 1$ ve $M + 1$ katsayı bulunmaktadır. Pay ve paydanın birer katsayı ile çarpılması $[L, M]$ ikilisini değiştirmeyeceğinden

$$Q_M(0) = 1 \quad (16)$$

normallik koşulu kullanılmaktadır. Bu koşul ile birlikte (12) denkleminde payda $L + 1$ ve paydada M adet olmak üzere toplam $L + M + 1$ adet bilinmeyen katsayı olduğu görülür. Dolayısıyla (11) denkleminde uyum için $[L, M]$ aracılığıyla $1, t, t^2, \dots, t^{L+M}$ mertebeleri kullanılmalıdır. Bu şekilde sadece bir $[L, M]$ yaklaşımının olduğu [10] ve [17] ile gösterilmiştir. Kuvvet serisi gösterimi kullanılarak

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i = \frac{p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3 + \dots + p_L t^L}{q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + q_3 t^3 + \dots + q_M t^M} + O(t^{L+M+1}) \quad (17)$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned} (p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \dots + p_L t^L)(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots) \\ = q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + q_3 t^3 + \dots + q_M t^M + O(t^{L+M+1}) \end{aligned} \quad (18)$$

elde edilir. (18) denkleminde

$$\begin{aligned} a_0 &= p_0, \\ a_1 + a_0 q_1 &= p_1, \\ a_2 + a_1 + a_1 q_2 &= p_2, \\ &\vdots \\ a_L + a_{L-1} q_1 + \dots + a_0 q_L &= p_L, \end{aligned} \quad (19)$$

ve

$$\begin{aligned} a_{L+1} + a_L q_1 + \dots + a_{L-M+1} q_M &= 0, \\ a_{L+2} + a_{L+1} q_1 + \dots + a_{L-M+2} q_M &= 0, \\ &\vdots \\ a_{L+M} + a_{L+M-1} q_1 + \dots + a_L q_M &= 0, \end{aligned} \quad (20)$$

denklemleri elde edilir, burada $n < 0$ iken $a_n = 0$ ve $j > M$ iken $q_j = 0$ dir. (19) ve (20) denklemleri tekil değilseler

$$[L/M] = \frac{\begin{vmatrix} a_{L-M+1} & a_{L-M+2} & \cdots & a_{L+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_L & a_{L+1} & \cdots & a_{L+M} \\ \sum_{j=M}^L a_{j-M} t^j & \sum_{j=M-1}^L a_{j-M+1} t^j & \cdots & \sum_{j=0}^L a_j t^j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{L-M+1} & a_{L-M+2} & \cdots & a_{L+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_L & a_{L+1} & \cdots & a_{L+M} \\ t^M & t^{M-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix}} \quad (21)$$

şeklinde çözülebilirler. Toplamlarda alt indis üst indisi geçtiğinde, toplam sıfır ile değiştirilmektedir. Alternatif formlar şöyledir:

$$\begin{aligned} [L/M] &= \sum_{j=0}^{L-M} a_j t^j + t^{L-M+1} w_{L/M}^T W_{L/M}^{-1} w_{L/M}, \\ &= \sum_{j=0}^{L+n} a_j t^j + t^{L+n+1} w_{(L+M)/M}^T W_{L/M}^{-1} w_{(L+n)/M} \end{aligned} \quad (22)$$

burada

$$W_{L/M} = \begin{bmatrix} a_{L-M+1} - t a_{L-M+2} & \cdots & a_L - t a_{L+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_L - t a_{L+1} & \cdots & a_{L+M+1} - t a_{L+M} \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$w_{L/M} = \begin{bmatrix} a_{L-M+1} \\ a_{L-M+2} \\ \vdots \\ a_L \end{bmatrix} \quad (24)$$

şeklinde [99, 100]. $[L/M]$ yaklaşımının inşasında her bir L ve M seçimi farklı bir yaklaşım vermektedir. Yöntemin en zor yanlarından biri en iyi yaklaşımın elde edilmesi için kullanılması gereken L ve M sayılarının belirlenmesidir. Uygulamalarda genel olarak $L = M$ şeklindeki seçimlerin iyi yaklaşımlar oluşturduğu gözlemlenmiştir [99].

2.1.3. Runge-Kutta Yöntemi

Diferansiyel denklemlerin kesin çözümlerine ulaşmanın mümkün olmadığı veya çok zor olduğu durumlarda analitik veya yaklaşık-analitik yöntemlerin yanında kullanılan bir

diğer yöntem de sayısal (nümerik) çözüm yöntemleridir. Euler yöntemi (Birinci mertebeden Runge-Kutta yöntemi-RK1), Orta nokta yöntemi (İkinci mertebeden Runge-Kutta yöntemi-RK2) gibi sayısal yöntemlerin temeli,

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(y(t), t) \quad (25)$$

formundaki bir adi diferansiyel denklemin çözümü olan $y(t)$ için bir yaklaşık değerin elde edilmesidir. Elde edilen $y^*(t)$ yaklaşık değeri ile $y(t)$ gerçek değeri arasındaki hata, yaklaşık değerin hesaplanma yöntemine göre değişir. Bu nedenle bu sayısal yöntemlerin en çok kullanılanlarından biri dördüncü mertebeden Runge-Kutta Yöntemidir (RK4). Bu yöntem bir $y(t_0) = y_0$ başlangıç koşulu ile bir h adım boyu içerisindeki dört test noktasındaki artışların (bu noktalarındaki eğimlerin) ağırlıklı ortalamasını kullanarak $y^*(t_0 + h)$ yaklaşık değerinin hesaplanması temeline dayanır. Dolayısıyla, RK4 yönteminde dört test noktası kullanarak hesap yapıldığından hata terimi $O(h^5)$ mertebesindedir [96].

(25) şeklindeki adi diferansiyel denklem için, $y_{n+1} = y(t_{n+1})$ ve $t_{n+1} = t_n + h$ olmak üzere, y_{n+1}^* yaklaşık sayısal çözümü dördüncü mertebe Runge-Kutta aşağıdaki yinelemeli (iteratif) formülle hesaplanır:

$$y_{n+1}^* = y_n^* + \frac{1}{6}(K_1 + K_2 + K_3 + K_4)h,$$

$$K_1 = f(y_n^*, t_n),$$

$$K_2 = f\left(y_n^* + \frac{1}{2}h, t_n + \frac{1}{2}hK_1\right),$$

$$K_3 = f\left(y_n^* + \frac{1}{2}h, t_n + \frac{1}{2}hK_2\right),$$

$$K_4 = f(y_n^* + h, t_n + hK_3).$$

Daha küçük adım boyları kullanılarak, tekrarlı şekilde birkaç adım için uygulanabilen RK4 yöntemi, gelişen bilgisayar teknolojisi ile birlikte günümüzde de yaygın olarak kullanılmaktadır. Alman matematikçiler C. Runge ve M. W. Kutta tarafından 20. yy. başlarında geliştirilen bu yöntem tez çalışmasında özellikle rastgele diferansiyel denklem sistemlerinin simülasyonu işleminde kullanılacaktır.

2.2. Rastgele Kompartmanlı Modeller için Yöntemler

Deterministik diferansiyel denklemlerin incelenmesinde kullanılan yöntemlerin ardından bu bölümde rastgele diferansiyel denklemler ve rastgele denklem sistemleri için kullanılan yöntemler incelenecektir.

2.2.1. Kuadratik Orta Analizinin Temelleri

Önceki bölümlerde sunulan deterministik yöntemlerin rastgele yapılarda kullanılmasının mümkün olduğu durumlar da bulunmaktadır. Ancak uygulamada çoğunlukla bir rastgele olayın olası gerçekleşmelerinin her birinin özelliklerinden ziyade bu gerçekleşmelerin ortalaması veya standart sapması gibi sayısal karakteristikleri ile ilgilenildiği için bu yöntemlerden farklı bir yapıya ihtiyaç duyulmaktadır. Kuadratik orta analizi stokastik süreçlerde her bir realizasyonundansa sürecin önemli realizasyonlarına odaklanarak bu süreçle ilgili rastgele incelemeler yapılmasını sağlamaktadır [108].

Kuadratik orta analizinin temel yapı taşları “Kuadratik orta anlamda limit”, “Kuadratik orta anlamda süreklilik”, “Kuadratik orta anlamda türev” ve “Kuadratik orta anlamda integral” kavramlarıdır. Kuadratik orta analizinin tüm işlemleri bu kavramların üzerinde inşa edildiği için bu kısımda sadece kuadratik orta analizinin temel tanımları verilmektedir. Bu tanımların temelinde, giriş kısmında bahsedilmiş olan, “Kuadratik orta anlamda yakınsaklık” kavramı kullanılmaktadır.

Tanım 2.2.1.1 (p -inci mertebeden rastgele değişken) [114] Bir $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlı bir X rastgele değişkeni, $p \geq 1$ bir reel sayı ve $E[\cdot]$ beklenen değer operatörü olmak üzere,

$$E[|X|^p] < \infty$$

koşulunu sağlıyorsa, p -inci mertebeden bir rastgele değişkendir.

Tüm p -inci mertebeden rastgele değişkenlerin L_p uzayı,

$$\|X\|_p = (E[|X|^p])^{1/p}$$

normu ile birlikte bir Banach uzayıdır [8]. Özel olarak, $p = 2$ için $E[|X|^2] < \infty$ koşulunu sağlayan ikinci mertebeden rastgele değişkenlerin uzayı L_2 , ikinci mertebeden X ve Y rastgele değişkenleri için tanımlanan

$$\langle X, Y \rangle = E[|UV|] = \sum_i E[|U_i V_i|]$$

iç çarpım ile birlikte bir Hilbert uzayıdır [8, 114].

Tanım 2.2.1.2 (Kuadratik orta anlamda yakınsaklık ve limit) [105] Bir $\{X_n\}$ rastgele değişkenler dizisi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n - X\| = 0$$

koşulu sağlanır ise $n \rightarrow \infty$ iken bir X rastgele değişkenine “kuadratik orta anlamda yakınsar” veya “ L_2 ’de yakınsar” denir. X rastgele değişkeni bu durumda $\{X_n\}$ dizisinin “kuadratik orta anlamda limiti”dir ve $X_n \xrightarrow{\text{m.s.}} X$ veya

$$\text{l. i. m. } X_n = X$$

ile gösterilir. “l. i. m.” yazımı “kuadratik orta anlamda limit (limit in the mean)” kullanıldığını belirtmektedir. Kuadratik orta anlamda limitin önemli bir özelliği de beklenen değer operatörü ile değişmeli olmasıdır: $X_n \xrightarrow{\text{m.s.}} X$ ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\{X_n\} \rightarrow E\{X\}$$

olur [105]. Kuadratik orta anlamda yakınsaklığın ve kuadratik orta anlamda limitin rastgele denklemlerin analizinde temel yapı taşı oluşturmaları, L_2 uzayında tanımlı $\|X\|_2 = (E[|X|^2])^{1/2}$ normu ile de ilgilidir. Bu norm tanımından, $X_n \xrightarrow{\text{m.s.}} X$ ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n - X\| = \lim_{n \rightarrow \infty} ((E[|X_n - X|^2])^{1/2}) \rightarrow 0$$

olması $\lim_{n \rightarrow \infty} E\{X_n\} \rightarrow E\{X\}$ çıkarımını doğruladığı gibi, rastgele değişkenler dizilerinde her bir değişken için inceleme yapmak zorunda kalmadan dizinin geneli ile ilgili eğilimi elde etme imkanı sağlar.

Kuadratik orta analizi kullanılarak incelenen rastgele denklemlerde ve denklem sistemlerindeki rastgele diferansiyel denklemlerin, katsayıları rastgele olan ve zaman değişkenine de bağlı olan rastgele süreçler olduğu daha önce belirtilmişti. Dolayısıyla, kuadratik orta anlamda süreklilik, türev ve integral tanımlarını, literatüre uygun olarak, rastgele süreçler için sunmak daha uygundur. Bunun için öncelikle stokastik süreçlerin aşağıdaki tanımı verilmelidir.

Tanım 2.2.1.3 (Stokastik süreç) [1] $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ bir olasılık uzayı ve $T \subseteq \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ olsun. Reel değerli $X(\omega, t)$ her $t \in T$ için Ω örnek uzayında tanımlanmış bir rastgele değişken ise bu fonksiyon bir rastgele fonksiyon olarak adlandırılır. Eğer $T = \mathbb{R}^+$ ise ve t

parametresi zamanı ifade ediyorsa bu durumda $X(\omega, t)$ rastgele fonksiyonuna “stokastik süreç” denir.

Stokastik süreçlerin $X(\omega, t)$ gösteriminde bazen ω argümanı göz ardı edilerek $X(t)$ veya X_t gösterimleri de kullanılır. İlerleyen kısımlarda literatüre ve incelenmekte olan sistemlerdeki “zamana bağlı rastgele değişken katsayısı” işlevine uygun olarak $X(t)$ gösterimi ile devam edilecektir.

Bir bağımsız ve aynı dağılıma sahip (independent and identically distributed – i.i.d.) rastgele değişkenler dizisi aşık bir stokastik süreç örneğidir [38]. Dolayısıyla $\tau > 0$ için belirli bir $(t, t + \tau)$ zaman aralığı içerisindeki $X(t_i), t_i \in (t, t + \tau)$ rastgele fonksiyonlarının bir $X(t^*), t^* \in (t, t + \tau)$ rastgele fonksiyonuna kuadratik orta anlamda yakınsamasının

$$\lim_{t_i \rightarrow t^*} \|X(t_i) - X(t^*)\| = 0 \Rightarrow \text{l.i.m.}_{t_i \rightarrow t^*} X(t_i) = X(t^*)$$

şeklindeki yorumlanması, özellikle $X(t^*) = \text{l.i.m.}_{t_i \rightarrow t^*} X(t_i) = \text{l.i.m.}_{\tau \rightarrow 0} X(t + \tau)$ [108] gösterimi ile, deterministik analizden rastgele analize geçişin temsilcisidir. Bu bağlamda X_n rastgele değişkenler dizisinin L_2 ’de bir X rastgele değişkenine yakınsaması, X rastgele değişkeninin bu rastgele değişkenler dizisini domine etmesi olarak yorumlanabilir [52].

Tanım 2.2.1.4 (Kuadratik orta anlamda süreklilik) [105] İkinci mertebeden bir $X(t), t \in T$ stokastik süreci sabit bir t anında $t + \tau \in T$ için

$$\text{l.i.m.}_{\tau \rightarrow 0} X(t + \tau) = X(t)$$

veya

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \|X(t + \tau) - X(t)\| = 0$$

koşullarını sağlıyorsa “kuadratik orta anlamda süreklidir” veya “kuadratik orta süreklidir” denir.

İkinci mertebeden stokastik süreç tanımı, $E[\cdot]$ beklenen değer operatörü için $E[|X|^p] < \infty$ şartını sağlayan X rastgele değişkeninin p -inci mertebeden bir rastgele değişkenin tanımını temel alarak aşağıdaki gibi verilir.

Tanım 2.2.1.5 (İkinci mertebeden stokastik süreç) [105] Bir $X(t), t \in T$ stokastik süreci ikinci mertebeden ise aşağıdaki koşulları sağlar:

- (i) Beklenen değeri $E\{X(t)\}$, T üzerinde sonludur.
- (ii) $X(t), t \in T$ stokastik süreci, ancak ve ancak kovaryans fonksiyonu $cov(X(t), X(s)), T \times T$ üzerine tanımlı ve sonluysa ikinci mertebeden bir stokastik süreçtir.

Bu tanımın ikinci özelliği aracılığıyla $cov(X(t), X(t))$ nin $T \times T$ üzerinde varlığı ve sonluluğu kullanılarak T üzerinde

$$cov(X(t), X(t)) = E\{X^2(t)\} < \infty$$

sonucu elde edilir.

Burada dikkat edilmesi gereken bir nokta kuadratik orta anlamda sürekliliğin, sürecin her bir sürecin gerçekleşmeleri düzeyinde sürekliliğin özelliklerinin sağlandığını belirtmemesidir [105].

Tanım 2.2.1.6 (Kuadratik orta anlamda türev) [105] Bir $X(t), t \in T$ ikinci mertebeden stokastik süreci bir t anında

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} [X(t + \tau) - X(t)]/\tau = X'(t)$$

şeklinde tanımlanan sınırlı mertebe rastgele sürecine sahip ise, $X'(t)$ sürecine $X(t)$ sürecinin t anında “kuadratik orta türevi” denir.

Bu tanım kullanılarak, yüksek mertebeden türevler de benzer şekilde tanımlanabilir.

2.2.2. Rastgele Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi ve Momentler

Stokastik süreçler için tanımlanan kuadratik orta süreklilik ve kuadratik orta türev tanımları kullanılarak 2.1.1 kısmında tanımlanan Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi rastgele diferansiyel denklemlere uygulanmaktadır. Rastgele Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi (RDDY) aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

k negatif olmayan bir tamsayı olsun. $\{u(t), t \in T\}$ dördüncü mertebe stokastik sürecinin $t \in T$ anında k -ıncı mertebeden dördüncü mertebeden orta anlamda türevi var olsun ve $u^{(k)}(t)$ ile gösterilsin (kuadratik orta anlamında türev L_2 'de yakınsaklık ve süreklilik üzerinde tanımlanmış ise dördüncü mertebeden orta anlamda türev benzer şekilde L_4 ve dördüncü mertebeden stokastik süreçlerle tanımlanır). $u(t)$ sürecinin rastgele diferansiyel dönüşümü

$$U(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k(u(t))}{dt^k} \right]_{t=t_0} \quad (26)$$

ile tanımlanır [113]. Burada U dönüştürülmüş stokastik süreç iken türev kuadratik orta anlamdadır. U sürecinin ters dönüşümü de benzer şekilde,

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)(t - t_0)^k \quad (27)$$

şeklindedir.

Burada (27) denkleminde tanımlanan serinin yakınsak olduğu bölgedeki herhangi bir kapalı aralıkta dördüncü mertebeden orta anlamda düzgün yakınsak olduğu varsayılmaktadır. (26) ve (27) denklemlerinin iyi tanımlılığı ile aşağıdaki işlemlerin rastgele diferansiyel dönüşüm için ispatı [113] tarafından verilmektedir.

Teorem 2.2.2.1 [113] k negatif olmayan herhangi bir tamsayı olsun ve $\{f(t): t \in T\}$ ile $\{g(t): t \in T\}$ dördüncü mertebeden stokastik süreçlerinin k -ıncı dereceden dördüncü mertebeden orta anlamda türevleri $t \in T$ anında var olsunlar ve $f^{(k)}(t)$ ve $g^{(k)}(t)$ ile gösterilsinler. Aşağıdaki sonuçlar rastgele diferansiyel dönüşüm yöntemi için geçerlidir:

- (i) $u(t) = f(t) \pm g(t)$ şeklinde ise $u(t)$ 'nin rastgele diferansiyel dönüşümü $U(k) = F(k) \pm G(k)$ ile tanımlanır,
- (ii) Bir λ dördüncü mertebeden rastgele değişkeni için, $u(t) = \lambda f(t)$ ise $u(t)$ 'nin rastgele diferansiyel dönüşümü $U(k) = \lambda F(k)$ ile tanımlanır,
- (iii) $u(t) = d^m(g(t))/dt^m$ şeklinde ise $u(t)$ 'nin rastgele diferansiyel dönüşümü $U(k) = (k + 1) \dots (k + m)G(k + m)$ ile tanımlanır,
- (iv) $u(t) = f(t)g(t)$ şeklinde verilmiş ise $u(t)$ 'nin rastgele diferansiyel dönüşümü $U(k) = \sum_{n=0}^k F(n)G(k - n)$ ile tanımlanır.

Burada m negatif olmayan bir tamsayı iken F ve G ile sırasıyla f ve g nin dönüştürülmüş fonksiyonları gösterilmektedir.

Uygulamalarda $t_0 = 0$ kullanımına uygun olarak, bir $u(t)$ rastgele fonksiyonu için rastgele Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi (RDDY) ile elde edilen

$$u(t) = \sum_{k=0}^n U(k)t^k$$

kuvvet serisi çözümü için

$$E(u(t)) = \sum_{k=0}^n E(U(k))t^k,$$

$$Var(u(t)) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n cov(U(i), U(j)) t^{i+j},$$

şeklindeki yaklaşık formülleri kullanılarak beklenen değer ve varyans hesabı yapılabilmektedir [44, 49]. Burada $cov(U(i), U(j))$ ile $U(i)$ ve $U(j)$ fonksiyonlarının

$$cov(U(i), U(j)) = E(U(i)U(j)) - E(U(i))E(U(j)), i, j = 0, \dots, n,$$

ile tanımlanan kovaryans fonksiyonu belirtilmektedir.

Rastgele diferansiyel dönüşüm yöntemi, örnek modellere uygulandıktan sonra elde edilecek beklenen değer ve varyans formülleri deterministik Laplace-Padé yaklaşımı kullanılarak modifiye edilebilmektedir.

2.2.3. Monte-Carlo Yöntemi ve Rastgele Denklemlerin Simülasyonu

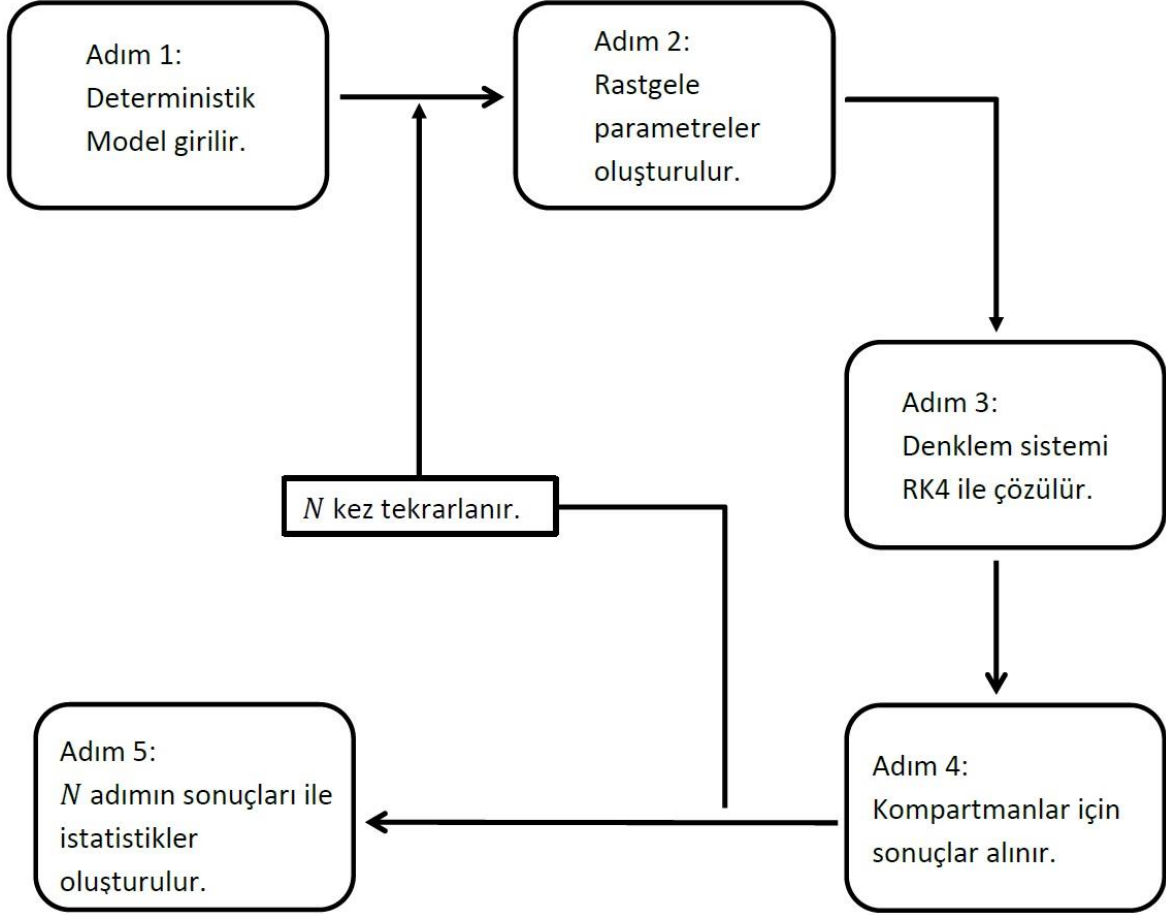
Monte-Carlo yöntemi temel olarak rastgele sistemin her bir denemesi için birer rastgele parametre ürettikten sonra bu parametreleri kullanan denklem sisteminin yaklaşık çözümlerini belirlemektedir. Daha sonra N tekrar sayısı kadar denemeden elde edilen çözümler kullanılarak denklem bileşenlerine ait sayısal karakteristikler belirlenmektedir. Bu algoritma aşağıdaki şekilde adım adım gösterilmektedir (Şekil 2).

Monte-Carlo yöntemi ile incelenecek rastgele denklem sistemi için, tekrar sayısı N kez, rastgele katsayılar üretilecektir. Üretilen rastgele katsayılar kullanılarak N farklı deterministik denklem sistemi oluşturulacak ve bu sistemler RK4 yöntemi ile çözülecektir. Elde edilen sayısal çözümler ile kompartmanlara ait beklenen değer, varyans, standart sapma, değişim katsayısı, merkezi momentler ve güven aralıkları gibi sayısal karakteristikler elde edilecektir. Bu karakteristikler modelin rastgele davranışlarının yorumlanması ve hastalığa ilişkin çıkarımların yapılabilmesi açısından büyük önem taşımaktadırlar.

2.3. Uygulamalar

Bu bölümde rastgele diferansiyel dönüşüm yöntemi ve Monte Carlo yöntemi kullanılarak SIR modeli [54], Çocuk felci [87] ve Hepatit B [65] hastalıklarına ait üç kompartmanlı model incelenecektir. Rastgele DDY kullanılarak elde edilecek moment

formülleri Laplace-Padé yaklaşımı ile modifiye edilecek ve tüm sonuçlar karşılaştırılarak hastalıklarla ilgili yorumlar yapılacaktır.



Şekil 2. Monte-Carlo algoritmasının akış şeması

2.3.1. Klasik Kompartmanlı Model: SIR Modeli

Öncelikle 1.1.3 bölümünde verilen klasik SIR modeli ile “rastgele etki” terimleri kullanılarak rastgele modelin nasıl elde edildiği ve bu rastgele model için rastgele Modifiye Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi (MDDY) ve Monte-Carlo Yöntemi ile kısa ve uzun dönemdeki rastgele davranışların araştırılacaktır.

(1) denklem sisteminde $S(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ değişkenleri sırasıyla hastalığa duyarlı, hasta ve iyileşmiş insanların t anındaki sayılarını göstermektedir. $S(t) + I(t) + R(t) = N$ toplam nüfusu gösterirken, β ve γ parametreleri sırasıyla hastalığın bulaşma ve hastalıktan iyileşme oranlarını göstermektedir. SIR modeli kullanılarak incelenecek hastalıklardaki

rastgele yapının incelenebilmesi için, β ve γ parametreleri rastgele etki terimleri kullanılarak rastgele hale getirilir ve oluşacak rastgele diferansiyel denklemler ile bir rastgele model kurulmuş olur.

Modelin analizini yapmak için t anındaki kompartman nüfuslarını veren $S(t), I(t)$ ve $R(t)$ değişkenleri toplam nüfusa bölünerek $s(t), i(t)$ ve $r(t)$ toplumdaki hastalığa duyarlı, hasta ve iyileşmiş insan oranlarını gösteren yeni kompartmanlar elde edilir:

$$S(t) + I(t) + R(t) = N \Rightarrow \frac{S(t)}{N} + \frac{I(t)}{N} + \frac{R(t)}{N} = 1.$$

$S(t)/N = s(t)$ ve $I(t)/N = i(t)$ ve $r(t) = 1 - s(t) - i(t)$ olduğundan (1) modeline denk olan (2) denklem sistemi kullanılarak S,I ve R kompartmanları için elde edilecek tüm sonuçlar aynı şekilde elde edilebilir:

$$\begin{aligned} \frac{ds(t)}{dt} &= -\beta si, \\ \frac{di(t)}{dt} &= \beta si - \gamma i. \end{aligned} \tag{28}$$

SIR modelinin deterministik ve rastgele analizinde kullanılacak parametreler ve başlangıç değerleri şu şekildedir [54]: Hastalığın bulaşma oranı $\beta = 1$, hastalıktan iyileşme oranı $\gamma = 1/3$, başlangıçta toplumdaki hastalığa duyarlı insan oranı $s(0) = 0.99$ ve başlangıçta toplumdaki hasta insan oranı $i(0) = 0.01$.

β ve γ parametreleri rastgele etki terimleri ile şu şekilde rastgele hale getirilirler:

$$\beta^* = 1 + \sigma_1 \eta_1,$$

$$\gamma^* = 1/3 + \sigma_2 \eta_2.$$

Yeni rastgele parametreler β^* ve γ^* , parametrelerin deterministik değerlerine $\sigma_i \eta_i, i = 1, 2$ rastgele etkilerinin eklenmesi ile oluşturulurlar. Burada $\sigma_i, i = 1, 2$, rastgele etkinin miktarını belirler ve oluşturulacak rastgele değişkenin standart sapmasıdır. $\eta_i, i = 1, 2$ ise birbirinden bağımsız standart normal dağılıma sahip rastgele değişkenlerdir. (1) modelini normal rastgele etkiler kullanarak rastgele hale getirmek için η_i değişkenleri kullanılmış olsa da farklı olasılık dağılımına sahip rastgele etkiler kullanılması da mümkündür.

Rastgele etkinin detaylarından önce, bu etkiler için kullanılacak olan “Normal Dağılım” sunulacaktır. Gauss Dağılımı (Gaussian Distribution) olarak da adlandırılan normal dağılım sürekli bir olasılık dağılımdır ve istatistikte en çok kullanılan dağılımlardan biridir. Özellikle dağılımı tam olarak bilinmeyen rastgele çoklukların dağılımlarında

kullanılması, en yaygın olarak kullanılan dağılım olmasının en önemli nedenlerindendir [79]. Ayrıca Merkezi Limit Teoremi sonlu varyansa sahip olan yeterince büyük sayıdaki bağımsız ve aynı dağılıma sahip rastgele değişkenin ortalamasının yaklaşık olarak normal dağılıma sahip olduğunu belirtmektedir. Dolayısıyla uygulamada rastgele yapıdaki birçok durumda bu dağılım tercih edilir. Ek olarak, birçok bağımsız etkenin etkisi altındaki (bilimsel hesap hataları vb.) fiziksel büyüklüklerin de normal dağılıma sahip olduğu bilindiğinden, farklı rastgele bileşenlerin etkisi altındaki rastgele davranışları incelenecek olan model parametreleri için normal dağılımın kullanılması en uygun seçenektir.

Bir X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, x \in (-\infty, \infty)$$

şeklindeyse, bu rastgele değişken μ ortalama ve σ^2 varyanslı normal dağılıma sahiptir denir ve $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ile gösterilir. Normal dağılıma sahip bir X rastgele değişkeninde $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ değişken dönüşümü ile standart normal Y rastgele değişkeni elde edilebilmektedir. $\mu = 0$ ve $\sigma = 1$ ile normal dağılımın özel bir durumu olan standart normal dağılım için olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}, y \in (-\infty, \infty)$$

şeklinde dir. Normal ve standart normal dağılımların olasılık yoğunluk fonksiyonu ortalamaları civarında simetriktir, dolayısıyla bu dağılımlara sahip rastgele değişkenlerin ortalamalarının altında veya üstünde değerler almaları eşit olasılıklıdır. Bu özellik ve bilimsel hesaplarda hataların normal dağılıma sahip olduğunun bilinmesi, genellikle ortalamaları bilinen ancak dağılımları kesin olarak bilinmeyen parametreler için normal dağılımın kullanılmasını ideal hale getirmektedir. $\beta^* = 1 + \sigma_1\eta_1$ olduğundan, beklenen değer in özellikleri ile [45]

$$E(\beta^*) = E(1 + \sigma_1\eta_1) = 1 + E(\sigma_1)E(\eta_1) = 1,$$

$$Var(\beta^*) = Var(1 + \sigma_1\eta_1) = \sigma_1^2 Var(\eta_1) = \sigma_1^2$$

elde edilmektedir. Dolayısıyla rastgele etki, deterministik modelde 1 sabit değeri kullanılarak incelenilen β parametresini, 1 ortalamaya sahip olan σ_1 standart sapmalı ve normal dağılıma sahip bir rastgele değişkene dönüştürmektedir.

Rastgele etki terimleri, literatürde var olan rastgele modellerde katsayı olarak kullanılan zamana bağımlı stokastik fonksiyonların aksine zamandan bağımsızdır ve yalnızca parametrelerin deterministik değerleri ve uygulamalarda gösterdikleri

dağılımlarına bağımlıdır. Uygulamalardan parametrelerin dağılımları veya sapma miktarlarının elde edilemediği durumlarda varsayımsal olarak standart sapma ataması da yapılabilmektedir. Örneğin bu çalışmada parametrelerin ortalamadan gerçek sapma miktarları bilinmediği için ortalamalarının %5'i miktarında standart sapmaya sahip olduklarını varsayalım. Bu durumda

$$\sigma_1 = std(\beta^*) = \frac{5}{100} \times E(\beta^*) = \frac{5}{100} \times \beta = 0.05,$$

$$\sigma_2 = std(\gamma^*) = \frac{5}{100} \times E(\gamma^*) = \frac{5}{100} \times \gamma = \frac{1}{60}$$

olmaktadır. Dolayısıyla yeni parametreler

$$\beta^* = 1 + 0.05\eta_1, \quad \gamma^* = 1/3 + (1/60)\eta_2$$

olarak şekillenirler. Bu parametreler kullanılarak yeni rastgele model aşağıdaki gibi elde edilmektedir:

$$\begin{aligned} \frac{ds(t)}{dt} &= -\beta^* si = -(1 + 0.05\eta_1)si, \\ \frac{di(t)}{dt} &= \beta^* si - \gamma^* i = (1 + 0.05\eta_1)si - \left(\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{60}\right)\eta_2\right)i \end{aligned} \quad (29)$$

(29) rastgele modeli kullanılarak SIR modeli ile incelenen hastalıkların rastgele davranışlarını analiz etmek mümkündür.

Rastgele modelin kısa dönemdeki davranışlarını belirlemek için kompartmanların yaklaşık beklenen değer ve varyans formülleri rastgele MDDY yöntemi ile elde edebilir. (29) modeli DDY uygulanırsa

$$\begin{aligned} (k+1)s(k+1) &= -\beta^* \sum_{m=0}^k i(m)s(k-m), \\ (k+1)i(k+1) &= \beta^* \sum_{m=0}^k i(m)s(k-m) - \gamma^* i(k). \end{aligned} \quad (30)$$

halini alacaktır. (30) modeli kullanılarak $s(t)$ ve $i(t)$ değişkenleri için n terimli yaklaşık analitik çözümler elde edilebilir ve bu çözümler ile rastgele değişkenlerin beklenen değer ve varyans gibi karakteristikleri incelenebilir. Burada $s(t)$ ve $i(t)$ değişkenlerinin (29)

rastgele modelinde β^* ve γ^* rastgele değişkenlerine bağımlı olarak tanımlanmaları dolayısıyla, kendilerinin de birer rastgele değişken haline geldiklerine dikkat edilmelidir. $n = 4$ terim ile (karışıklık olmaması için parametrelerde “*” notasyonu kullanılmamıştır)

$$\begin{aligned} s(t) &= 0.99 + (-0.0099\beta)t + (-0.004851\beta^2 + 0.00495\beta\gamma)t^2 \\ &\quad + (-0.00155199\beta^3 + 0.0032175\beta^2\gamma - 0.00165\beta\gamma^2)t^3, \\ i(t) &= 0.01 + (0.0099\beta - 0.01\gamma)t \\ &\quad + (0.004851\beta^2 - 0.0099\beta\gamma + 0.005\gamma^2)t^2 \\ &\quad + (0.00155199\beta^3 - 0.0048345\beta^2\gamma + 0.00495\beta\gamma^2 - 0.0016\gamma^3)t^3 \end{aligned} \quad (31)$$

yaklaşık çözümleri elde edilir. $s(t)$ için yaklaşık çözüm

$$s(t) = \sum_{k=0}^3 S(k)t^k$$

olduğundan

$$\begin{aligned} S(0) &= 0.99; S(1) = -0.0099\beta, \quad S(2) = -0.004851\beta^2 + 0.00495\beta\gamma, \\ S(3) &= -0.00155199\beta^3 + 0.0032175\beta^2\gamma - 0.00165\beta\gamma^2 \end{aligned}$$

şeklindedir. Rastgele DDY yöntemi ile beklenen değer ($n = 4$ ile uyumlu olacak şekilde)

$$E(s(t)) = \sum_{k=0}^{n-1} E(S(k))t^k$$

olarak tanımlandığından $s(t)$ için yaklaşık beklenen değer

$$E(s(t)) = E(S(0)) + E(S(1))t + E(S(2))t^2 + E(S(3))t^3$$

şeklinde hesaplanır. Benzer şekilde $i(t)$ için de

$$E(i(t)) = E(I(0)) + E(I(1))t + E(I(2))t^2 + E(I(3))t^3$$

olacaktır. Burada

$$\begin{aligned} I(0) &= 0.01, \quad I(1) = 0.0099\beta - 0.01\gamma, \\ I(2) &= 0.004851\beta^2 - 0.0099\beta\gamma + 0.005\gamma^2, \\ I(3) &= 0.00155199\beta^3 - 0.0048345\beta^2\gamma + 0.00495\beta\gamma^2 - 0.0016\gamma^3. \end{aligned}$$

Rastgele parametreler normal dağılıma sahip olduklarından, normal dağılıma sahip bir $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ rastgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

kullanılarak bu değişkenin momentleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$E(X) = \mu,$$

$$E(X^2) = \mu^2 + \sigma^2,$$

$$E(X^3) = \mu(\mu^2 + 3\sigma^2),$$

$$E(X^4) = \mu^4 + 6\mu^2\sigma^2 + 3\sigma^4.$$

Bu formüller kullanılarak normal dağılıma sahip β ve γ rastgele değişkenlerinin ilk dört momentleri şöyle elde edilir:

$$E(\beta) = 1, E(\beta^2) = 1.0025, E(\beta^3) = 1.0075, E(\beta^4) = 1.01501875,$$

$$E(\gamma) = \frac{1}{3}, E(\gamma^2) = 0.1113888888888889, E(\gamma^3) = 0.037314814814815,$$

$$E(\gamma^4) = 0.012531095679012.$$

Bu momentler ve $E(s(t)) = \sum_{k=0}^{n-1} E(S(k))t^k$ ile $E(i(t)) = \sum_{k=0}^{n-1} E(I(k))t^k$ eşitlikleri kullanılarak $s(t)$ ve $i(t)$ için rastgele DDY yöntemi ile elde edilen yaklaşık beklenen değerler şöyledir:

$$E(s(t)) = 0.99 - 0.0099t - 0.0032131275t^2 - 0.000672240341666667t^3 \quad (32)$$

ve

$$E(i(t)) = 0.01 + 0.0065666666666667t + 0.0021200719444444t^2 + 0.0004372848169628708t^3. \quad (33)$$

Benzer şekilde (31) ile verilen yaklaşık çözümler ve varyans için verilen eşitlik ile $s(t)$ değişkeninin yaklaşık varyansı ($cov(S(i), S(j)) = cov(S(j), S(i))$):

$$\begin{aligned} Var(s(t)) &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} cov(S(i), S(j))t^{i+j} \\ &= cov(S(0), S(0)) + [cov(S(1), S(0)) + 2cov(S(1), S(1))]t \\ &\quad + [cov(S(1), S(1)) + 2cov(S(0), S(2))]t^2 \\ &\quad + [2cov(S(3), S(0)) + 2cov(S(2), S(1))]t^3 \\ &\quad + [cov(S(2), S(2)) + cov(S(3), S(1))]t^4 \\ &\quad + [2cov(S(3), S(2))]t^5 + cov(S(3), S(3))t^6. \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanabilir. Benzer formül $i(t)$ değişkeni için de elde edilebilmektedir.

$$(cov(S(i), S(j)) = E(S(i)S(j)) - E(S(i))E(S(j))$$

tanımı da kullanılarak bu kovaryanslar hesaplanır:

$$cov(S(0), S(0)) = cov(0.99, 0.99) = 0,$$

$$cov(S(0), S(1)) = cov(0.99, -0.0099\beta) = 0,$$

$$cov(S(0), S(2)) = cov(0.99, -0.004851\beta^2 + 0.00495\beta\gamma) = 0,$$

$$cov(S(0), S(3)) = cov(0.99, -0.00155199\beta^3 + 0.0032175\beta^2\gamma - 0.00165\beta\gamma^2) = 0.$$

Benzer yöntemle (31) eşitliklerinden elde edilen $S(k)$, $k = 1, 2, 3$ kullanılarak kovaryanslar için:

$$cov(S(1), S(1)) = 2.4502 \times 10^{-7},$$

$$cov(S(1), S(2)) = 1.9929 \times 10^{-7},$$

$$cov(S(1), S(3)) = 6.6698 \times 10^{-8},$$

$$cov(S(2), S(2)) = 1.6920 \times 10^{-7},$$

$$cov(S(2), S(3)) = 5.7638 \times 10^{-8},$$

$$cov(S(3), S(3)) = 1.9747 \times 10^{-8}$$

sonuçları elde edilir. Dolayısıyla $s(t)$ için yaklaşık varyans

$$Var(s(t)) = [2.4502 \times 10^{-7}]t^2 + [3.9857 \times 10^{-7}]t^3 + [3.0317 \times 10^{-7}]t^4 + [1.1528 \times 10^{-7}]t^5 + [1.9747 \times 10^{-8}]t^6 \quad (34)$$

olarak bulunur.

(31) eşitliklerinden elde edilen $I(k)$, $k = 1, 2, 3$ kullanılarak

$$cov(I(0), I(0)) = cov(0.01, 0.01) = 0,$$

$$cov(I(0), I(1)) = cov(0.01, 0.0099\beta - 0.01\gamma) = 0,$$

$$cov(I(0), I(2)) = cov(0.01, 0.004851\beta^2 - 0.0099\beta\gamma + 0.005\gamma^2) = 0,$$

$$cov(I(0), I(3)) = 0,$$

$$cov(I(1), I(1)) = 2.7820 \times 10^{-7},$$

$$cov(I(1), I(2)) = 1.7669 \times 10^{-7},$$

$$cov(I(1), I(3)) = 5.52448 \times 10^{-8},$$

$$cov(I(2), I(2)) = 1.1461 \times 10^{-7},$$

$$cov(I(2), I(3)) = 3.6014 \times 10^{-8},$$

$$cov(I(3), I(3)) = 1.1335 \times 10^{-8}$$

bulunur ve $i(t)$ için yaklaşık varyans

$$\begin{aligned} Var(i(t)) = & [2.7280 \times 10^{-7}]t^2 + [3.5338 \times 10^{-7}]t^3 + [2.2530 \times 10^{-7}]t^4 \\ & + [7.2027 \times 10^{-7}]t^5 + [1.1335 \times 10^{-8}]t^6 \end{aligned} \quad (35)$$

olarak elde edilir.

(32)-(33) ile verilen yaklaşık beklenen değerler ve (34)-(35) ile verilen yaklaşık varyanslar Laplace-Padé tekniği kullanılarak modifiye edilirlse, aşağıdaki modifiye formüller elde edilir. $s(t)$ için $n = 4$ terim kullanılarak rastgele MDDY yöntemi ile

$$\begin{aligned} E(s(t)) = & 0.0003385884842t + 1.006312564 \\ & - 0.01631256376e^{(0.6276504823t)} \end{aligned} \quad (36)$$

(Padé [3,1] aracılığı ile) yaklaşık beklenen değer elde edilir. Bu modifiye beklenen değer $i(t)$ için (Padé [2,2] aracılığı ile)

$$\begin{aligned} E(i(t)) = & (0.009999999997cosh(0.4515828670t) \\ & - 0.01017492338sinh(0.4515828670t))e^{1.116148774t} \end{aligned} \quad (37)$$

şeklindedir. Benzer şekilde $n = 4$ terim kullanılarak rastgele MDDY yöntemi ile $s(t)$ ve $i(t)$ değişkenlerinin yaklaşık varyansları sırasıyla (Pade [5,1] ile)

$$\begin{aligned} Var(s(t)) = & -0.000001058727564t + 10^{-7}(-2.392651763t^3 \\ & - 5.568605751 - 7.614294641t^2 \\ & + 5.568605751e^{1.901243527t}) \end{aligned} \quad (38)$$

ve (Pade [5,1] ile)

$$\begin{aligned} Var(i(t)) = & 10^{-7}(-8.282393827 - 2.104095788t^3 - 7.853181401t^2 \\ & + 8.282393827e^{1.598468709t}) - 0.000001323914737t \end{aligned} \quad (39)$$

elde edilir.

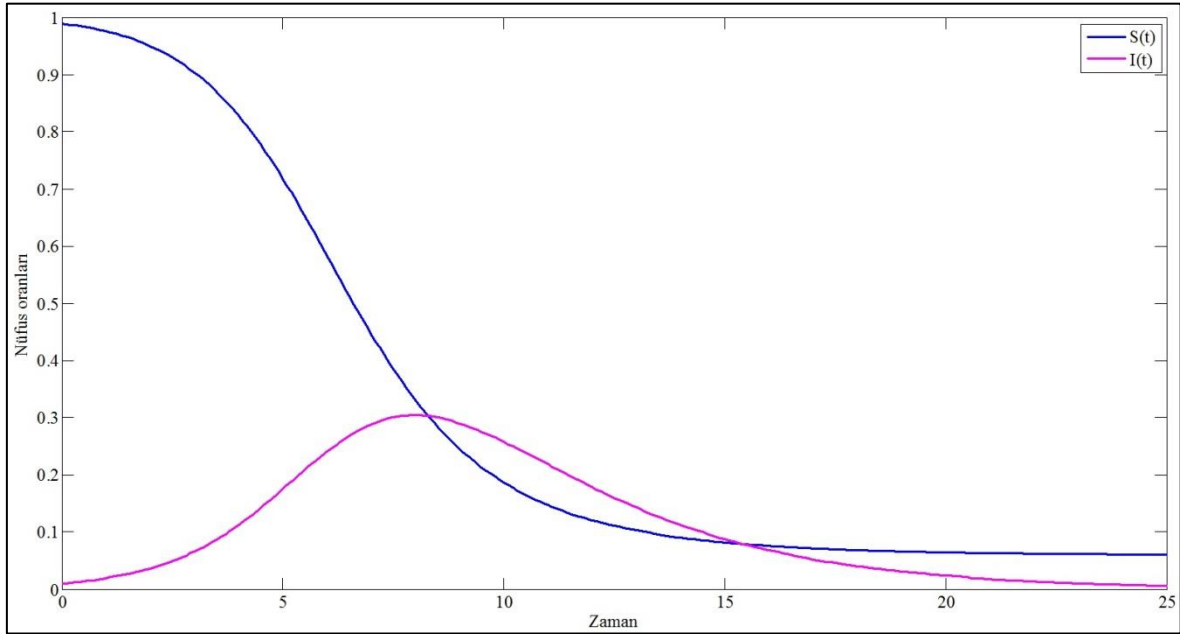
(28) modeli için deterministik DDY ile elde edilen yaklaşık analitik çözümler ($n = 4$) adım ile şu şekildedir:

$$s(t) = 0.99 - 0.0099t - 0.003201t^2 - 0.0006628233333t^3 \quad (40)$$

ve

$$i(t) = 0.01 + 0.006566666666667t + 0.002106555556t^2 + 0.0004287616050t^3. \quad (41)$$

(28) modeli için MATLAB ile elde edilen yaklaşık çözüm aşağıda verilmektedir (Şekil 3). $s(t)$ için (40) ile verilen yaklaşık analitik çözümün Şekil 3'teki deterministik yaklaşık çözüm, (29) modelinin simülasyonundan elde edilen yaklaşık beklenen değer, rastgele DDY ile elde edilen yaklaşık beklenen değer (32) ve modifiye rastgele DDY ile elde edilen yaklaşık beklenen değer (36) ile $t \in [0, 2.5]$ aralığında karşılaştırılması tabloda verilmektedir (Tablo 1).



Şekil 3. SIR modelinin deterministik yaklaşık çözümleri

$s(t)$ için (41) ile verilen yaklaşık analitik çözümün Şekil 3'teki deterministik yaklaşık çözüm, (29) modelinin simülasyonundan elde edilen yaklaşık beklenen değer, rastgele DDY ile elde edilen yaklaşık beklenen değer (33) ve modifiye rastgele DDY ile elde edilen yaklaşık beklenen değer (37) ile $t \in [0,2.5]$ aralığında karşılaştırılması tabloda verilmektedir (Tablo 2).

Tablo 1. $t \in [0,2.5]$ için S kompartmanının beklenen değerine ait sonuçlar

t	Deterministik (MATLAB)	Deterministik DDY ($n = 4$)	Rastgele Simülasyon	Rastgele DDY ($n = 4$)	Rastgele MDDY
0	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900	0.9900
0.1	0.9890	0.9890	0.9890	0.9890	0.9890
0.2	0.9879	0.9879	0.9879	0.9879	0.9879
0.3	0.9867	0.9867	0.9867	0.9867	0.9867
0.4	0.9855	0.9855	0.9855	0.9855	0.9855
0.5	0.9842	0.9842	0.9842	0.9842	0.9842
0.6	0.9827	0.9828	0.9827	0.9828	0.9827
0.7	0.9812	0.9813	0.9812	0.9813	0.9812
0.8	0.9796	0.9797	0.9796	0.9797	0.9796
0.9	0.9779	0.9780	0.9779	0.9780	0.9779
1.0	0.9761	0.9762	0.9761	0.9762	0.9761
1.1	0.9742	0.9744	0.9742	0.9743	0.9741
1.2	0.9721	0.9724	0.9721	0.9723	0.9721
1.3	0.9699	0.9703	0.9699	0.9702	0.9699
1.4	0.9679	0.9680	0.9676	0.9680	0.9675
1.5	0.9651	0.9657	0.9651	0.9657	0.9650
1.6	0.9625	0.9633	0.9625	0.9632	0.9623
1.7	0.9597	0.9607	0.9597	0.9606	0.9595
1.8	0.9567	0.9579	0.9567	0.9578	0.9564
1.9	0.9535	0.9551	0.9535	0.9550	0.9532
2.0	0.9502	0.9521	0.9502	0.9520	0.9498
2.1	0.9467	0.9490	0.9466	0.9488	0.9461
2.2	0.9429	0.9457	0.9429	0.9455	0.9422
2.3	0.9389	0.9422	0.9389	0.9421	0.9380
2.4	0.9348	0.9386	0.9347	0.9384	0.9336
2.5	0.9303	0.9349	0.9302	0.9347	0.9288

Beklenen değerler için rastgele DDY ile elde edilen yaklaşımın modifiye rastgele DDY ile daha az hata içeren bir hale dönüştürüldüğü tablolardaki sonuçlardan görülmektedir. Benzer şekilde $s(t)$ ve $i(t)$ için (29) modelinin simülasyonundan elde edilen varyans değerleri, rastgele DDY ile elde edilen (34)-(35) yaklaşık varyansları ve modifiye rastgele

DDY ile elde edilen (38)-(39) yaklaşık varyansları ile $t \in [0,1]$ aralığında karşılaştırılırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir (Tablo 3-4).

Tablo 2. $t \in [0,2.5]$ için I kompartmanın beklenen değerine ait sonuçlar

t	Deterministik (MATLAB)	Deterministik DDY ($n = 4$)	Rastgele Simülasyon	Rastgele DDY ($n = 4$)	Rastgele MDDY
0	0.01000	0.0100	0.01000	0.0100	0.0100
0.1	0.01068	0.0107	0.01068	0.0107	0.0107
0.2	0.01140	0.0114	0.01140	0.0114	0.0114
0.3	0.01217	0.0122	0.01217	0.0122	0.0122
0.4	0.01300	0.0130	0.01299	0.0130	0.0130
0.5	0.01387	0.0139	0.01387	0.0139	0.0139
0.6	0.01481	0.0148	0.01480	0.0148	0.0148
0.7	0.01580	0.0158	0.01580	0.0158	0.0158
0.8	0.01686	0.0168	0.01686	0.0168	0.0169
0.9	0.01799	0.0179	0.01798	0.0179	0.0180
1.0	0.01919	0.0191	0.01918	0.0191	0.0192
1.1	0.02046	0.0203	0.02046	0.0204	0.0205
1.2	0.02182	0.0217	0.02182	0.0217	0.0218
1.3	0.02325	0.0230	0.02326	0.0231	0.0233
1.4	0.02479	0.0245	0.02479	0.0245	0.0248
1.5	0.02641	0.0260	0.02642	0.0261	0.0264
1.6	0.02813	0.0277	0.02815	0.0277	0.0281
1.7	0.02996	0.0294	0.02999	0.0294	0.0300
1.8	0.03190	0.0311	0.03193	0.0312	0.0319
1.9	0.03395	0.0330	0.03399	0.0331	0.0339
2.0	0.03611	0.0350	0.03618	0.0351	0.0361
2.1	0.03841	0.0371	0.03849	0.0372	0.0384
2.2	0.04084	0.0392	0.04093	0.0394	0.0408
2.3	0.04341	0.0415	0.04351	0.0416	0.0433
2.4	0.04611	0.0438	0.04624	0.0440	0.0459
2.5	0.04897	0.0463	0.04912	0.0465	0.0487

Tablo 1’de rastgele sistemin simülasyonunda $s(t)$ için $t = 2.5$ anında elde edilen 0.9302 değerine göre rastgele DDY ve rastgele MDDY yaklaşımlarının mutlak hata yüzdeleri sırasıyla

$$RDDY \rightarrow 100 \times \frac{|0.9302 - 0.9347|}{0.9302} \simeq \%0.48$$

ve

$$MRDDY \rightarrow 100 \times \frac{|0.9302 - 0.9288|}{0.9302} \simeq \%0.15$$

şeklindedir. Benzer şekilde rastgele MDDY ile hatanın azaltıldığı $i(t)$ için elde edilen sonuçlardan da görülmektedir

$$\text{RDDY} \rightarrow 100 \times \frac{|0.04912 - 0.0465|}{0.04912} \simeq \%5.33$$

ve

$$\text{MRDDY} \rightarrow 100 \times \frac{|0.04912 - 0.0487|}{0.04912} \simeq \%0.86.$$

Tablo 3. $t \in [0,1]$ için S kompartmanının varyansına ait sonuçlar

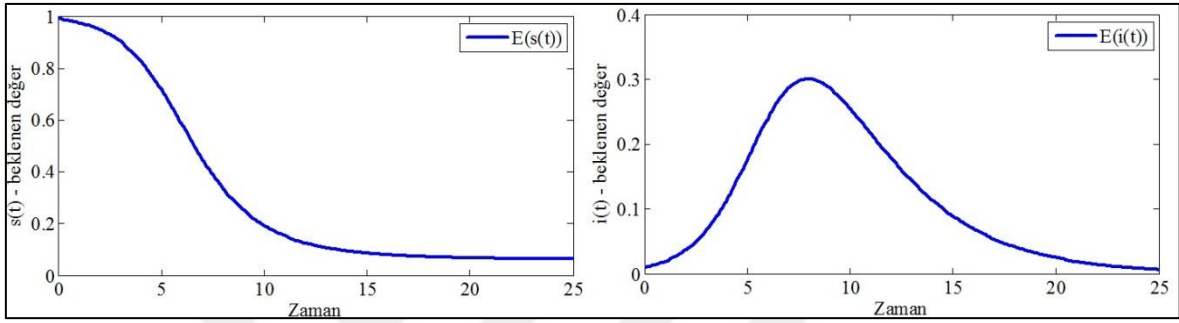
t	Rastgele Simülasyon	Rastgele DDY ($n = 4$)	Rastgele MDDY ($n = 4$)
0	5.874×10^{-29}	0	0
0.1	2.945×10^{-9}	2.8803×10^{-9}	2.8803×10^{-9}
0.2	1.381×10^{-8}	1.3513×10^{-8}	1.3514×10^{-8}
0.3	3.639×10^{-8}	3.5564×10^{-8}	3.5578×10^{-8}
0.4	7.564×10^{-8}	7.3735×10^{-8}	7.3821×10^{-8}
0.5	1.380×10^{-7}	1.3394×10^{-7}	1.3429×10^{-7}
0.6	2.315×10^{-7}	2.2348×10^{-7}	2.2458×10^{-7}
0.7	3.668×10^{-7}	3.5126×10^{-7}	3.5421×10^{-7}
0.8	5.667×10^{-7}	5.2802×10^{-7}	5.3496×10^{-7}
0.9	8.175×10^{-7}	7.6651×10^{-7}	7.8141×10^{-7}
1.0	1.169×10^{-6}	1.0818×10^{-6}	1.1115×10^{-6}

Tablo 4. $t \in [0,1]$ için I kompartmanının varyansına ait sonuçlar

t	Rastgele Simülasyon	Rastgele DDY ($n = 4$)	Rastgele MDDY ($n = 4$)
0	2.834×10^{-32}	0	0
0.1	3.055×10^{-9}	3.105×10^{-9}	3.105×10^{-9}
0.2	1.391×10^{-8}	1.412×10^{-8}	1.412×10^{-8}
0.3	3.564×10^{-8}	3.610×10^{-8}	3.611×10^{-8}
0.4	7.210×10^{-8}	7.226×10^{-8}	7.286×10^{-8}
0.5	1.282×10^{-7}	1.289×10^{-7}	1.290×10^{-7}
0.6	2.098×10^{-7}	2.099×10^{-7}	2.104×10^{-7}
0.7	3.246×10^{-7}	3.224×10^{-7}	3.238×10^{-7}
0.8	4.817×10^{-7}	4.744×10^{-7}	4.775×10^{-7}
0.9	6.922×10^{-7}	6.750×10^{-7}	6.817×10^{-7}
1.0	9.697×10^{-7}	9.348×10^{-7}	9.481×10^{-7}

Rastgele MDDY ile kısa dönemdeki sayısal karakteristikleri incelenen (29) modelinin uzun vadedeki sayısal karakteristiklerinin incelenmesi için MATLAB ile modelin simülasyonu yapılabilmektedir.

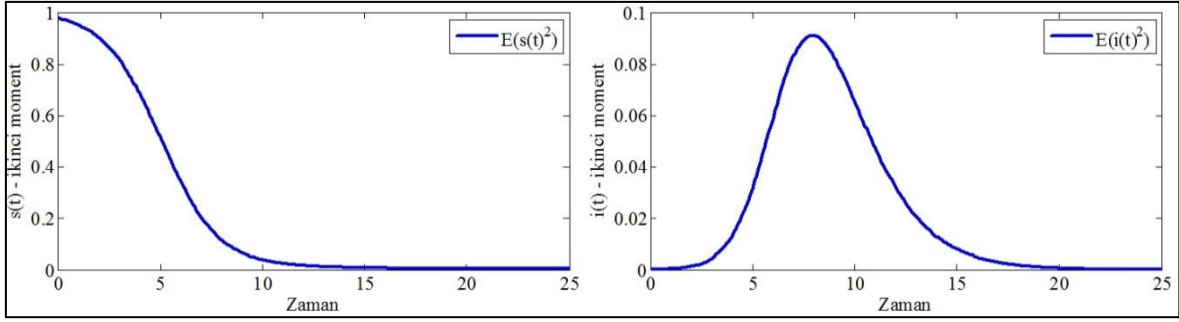
Modelin 100000 kez simüle edilmesiyle elde edilen sonuçlar modelin sayısal karakteristikleri ile ilgili aşağıdaki sonuçları vermektedir. (29) modelinde $s(t)$ ve $i(t)$ için elde edilen beklenen değerler şekilde görülmektedir (Şekil 4).



Şekil 4. SIR modelinin beklenen değerleri

Bu modelde t zaman değişkeninin gün sayısını belirtmektedir. Rastgele etkiler kullanılarak elde edilen (29) modelinin Monte-Carlo simülasyonları ile elde edilen sonuçlara göre $s(t)$ değişkeni için minimum değer $t = 25$ anında 0.06167 olarak, maksimum değer $t = 0$ anında 0.99 olarak elde edilmiştir. Dolayısıyla SIR modelinde rastgele etkiler altında, deterministik durumu benzer şekilde, hastalığa duyarlı insan oranında sürekli bir düşüş görüldüğü söylenebilir. $i(t)$ için minimum değer $t = 25$ anında 0.006398 ve maksimum değer $t = 7.8$ anında 0.3005 olarak elde edilmiştir. Buradan hastalığın ilk 7.8 gün için artışta olduğu ve nüfusun yaklaşık %30.05'ini etkilemesinin beklendiği çıkarımı yapılabilir. Hastalığın toplumda bu andan itibaren etkisini kaybetmeye başladığı şekillerden de görülebilmektedir. $t = 25$ anında topluluğun yalnızca yaklaşık %0.64'ü halen “hasta” olarak sınıflandırılmaktadır.

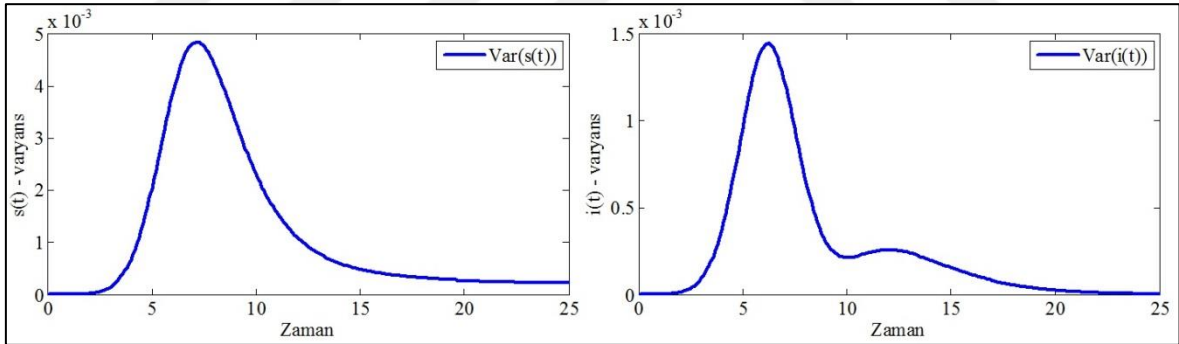
(29) modelinde $s(t)$ ve $i(t)$ için elde edilen ikinci momentler aşağıdaki şekilde görülmektedir (Şekil 5). İkinci momentler $s(t)$ ve $i(t)$ 'nin karelerinin beklenen değerini göstermektedir ve varyans değerlerinin hesaplanması için kullanılmaktadır.



Şekil 5. SIR modelinin ikinci momentleri

$s(t)$ için minimum ikinci moment $t = 25$ anında 0.004031 , maksimum ikinci moment ise $t = 0$ anında 0.9801 olarak elde edilmiştir. Benzer şekilde $i(t)$ için minimum ikinci moment $t = 25$ anında 4.363×10^{-5} , maksimum ikinci moment ise $t = 7.9$ anında 0.091 olarak bulunmuştur.

(29) modelinde $s(t)$ ve $i(t)$ için elde edilen varyanslar aşağıdaki şekilde görülmektedir (Şekil 6).

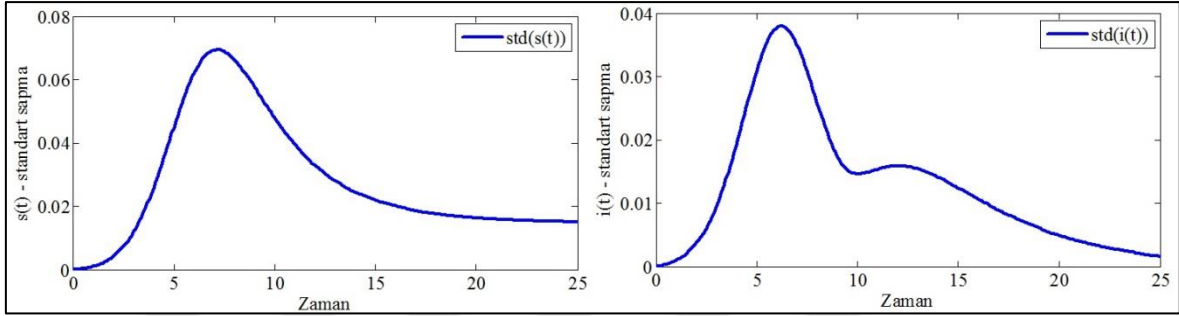


Şekil 6. SIR modelinin varyansları

Varyanslar aracılığı ile modelin S ve I kompartmanlarında rastgele etkiler altında yaşanması muhtemel olan değişimler ölçülebilmektedir. $s(t)$ için minimum varyans $t = 0$ anında 1.769×10^{-24} ve maksimum varyans $t = 7.2$ anında 0.004835 olarak ölçülmüştür. $i(t)$ için minimum varyans $t = 0$ anında 5.845×10^{-29} ve maksimum varyans $t = 6.2$ anında 0.001445 olarak ölçülmüştür.

(29) modelinde $s(t)$ ve $i(t)$ için elde edilen standart sapmalar aşağıdaki şekilde görülmektedir (Şekil 7).

Varyansın karekökü olarak tanımlanan standart sapma da varyansa benzer şekilde kompartmanların rastgele davranışlarındaki değişkenliğin ölçülmesi için gereklidir. $s(t)$ için minimum standart sapma $t = 0$ anında 1.33×10^{-12} , maksimum standart sapma $t = 7.2$ anında 0.06954 olarak ölçülmüştür. $i(t)$ için ise standart sapma $t = 0$ anında 7.645×10^{-15} ile minimum $t = 6.2$ anında 0.03801 ile maksimum değerini almıştır.



Şekil 7. SIR modelinin standart sapmaları

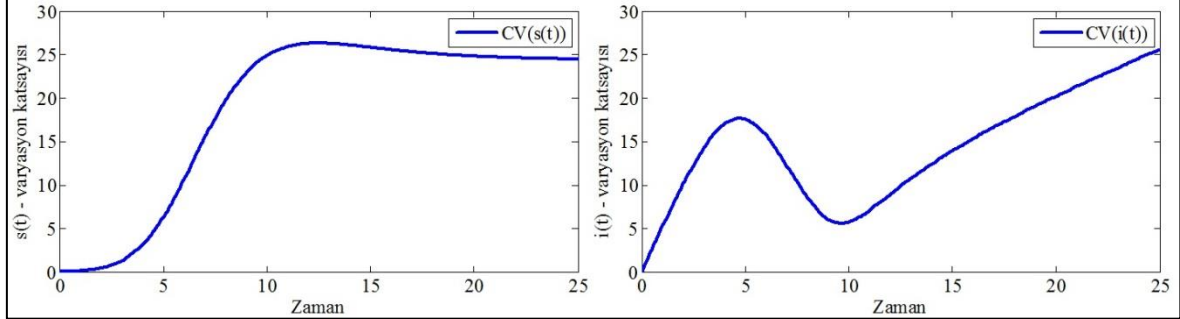
Varyans ve standart sapma grafiklerinden de görüldüğü gibi $t = 6 - 7$ günleri civarında hastalığın seyrinde göz ardı edilemeyecek değişikliklerin yaşanması mümkündür. Hastalığa duyarlı insanların oranı $t = 7.2$ için yaklaşık %7 düzeyine varan değişiklik gösterebilirken hasta insanların oranının $t = 6.2$ anında %3.8 civarında değişiklik gösterebildiği görülmektedir. Bu oranları varyasyon katsayısı aracılığıyla daha iyi gözlemek mümkündür.

(29) modelinde $s(t)$ ve $i(t)$ için elde edilen varyasyon katsayıları aşağıdaki şekilde görülmektedir (Şekil 8). Varyasyon katsayısı

$$\text{Varyasyon Katsayısı (CV)} = \frac{(100 \times \text{standart sapma})}{\text{beklenen değer}}$$

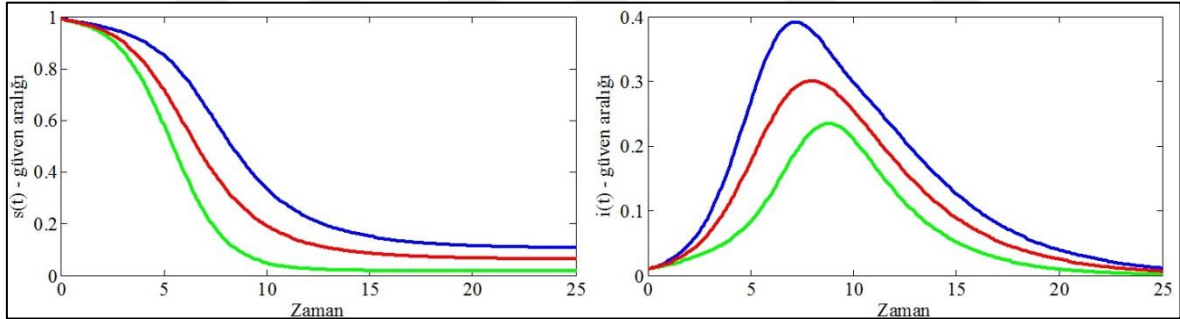
şeklinde hesaplanmaktadır ve yüzde olarak rastgele değişkendeki sapmanın beklentiye oranı aracılığıyla değişkenliği ölçmektedir. (29) modelinin kurulumu esnasında parametrelerin %5 varyasyon katsayısına sahip olacak şekilde rastgele hale getirildiği göz ardı edilmemelidir. Bu durumda $s(t)$ için $t = 0$ anında minimum CV 1.343×10^{-10} ve $t = 12.2$ anında maksimum CV 26.36 olarak elde edilmiştir. $t = 12.2$ sonrası da %25 civarında seyrettiği görülen CV, S kompartmanındaki sonuçlarda ne denli farklı değerlerin elde edilebileceğini göstermektedir. Benzer şekilde $i(t)$ için elde edilen $t = 0$ anındaki 7.645×10^{-11} minimum ve $t = 5$ anında elde edilen 25.65 maksimum varyasyon

katsayısı bu kompartman için de önemli derecede değişkenlik yaşanabildiğinin göstergesidir.



Şekil 8. SIR modelinin varyasyon katsayıları

Bu değişkenliği güven aralıkları kullanarak göstermek de mümkündür. (29) modelinde $s(t)$ ve $i(t)$ için elde edilen güven aralıkları aşağıdaki şekilde görülmektedir (Şekil 9).



Şekil 9. SIR modelinin güven aralıkları

Güven aralıkları

$$\left((E(s(t)) - K \cdot std(s(t))), (E(s(t)) + K \cdot std(s(t))) \right)$$

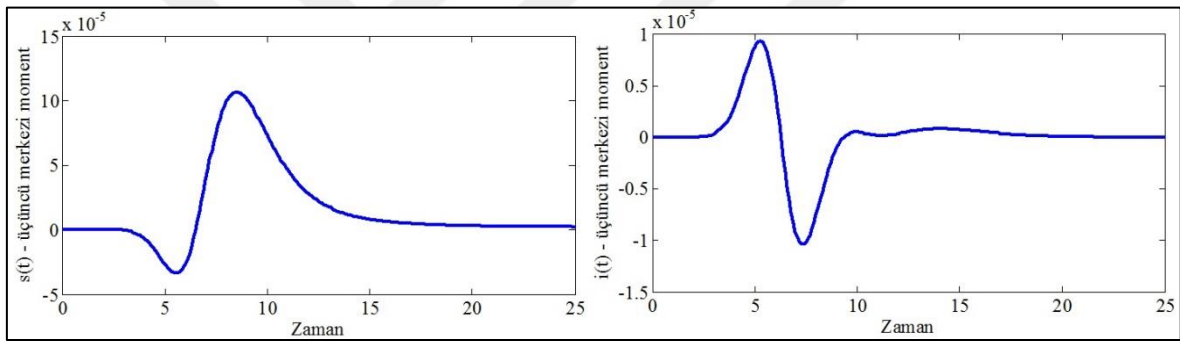
şeklinde hesaplanmaktadır ve $K = 3$ için rastgele değişkenin beklenen değerinin üç standart sapma civarında alabileceği değerleri göstermektedir. Normal dağılıma sahip bir rastgele değişkenin üç standart sapma için hesaplanan güven aralığı içerisinde değerler alma olasılığının yaklaşık %99.7 olduğu bilinmektedir. $s(t)$ ve $i(t)$ için hesaplanan güven aralıkları şekilde görülmektedir (Şekil 9). Şekillerde kırmızı eğriler beklenen değerleri, mavi eğriler güven aralıklarının üst limitlerini ve yeşil çizgiler ise güven aralıklarının alt

limitlerini göstermektedir. $s(t)$ için güven aralığı $t = 25$ anında 0.01643 ile minimum $t = 0$ anında ise $t = 0.99$ ile maksimum değerini almaktadır. $i(t)$ için güven aralığı $t = 25$ anında 0.001474 minimum değerini, $t = 7.2$ anında ise 0.3922 maksimum değerini almaktadır. Güven aralıkları aracılığı ile $t = 7.2$ anında beklenen değeri yaklaşık 0.2927 olan $i(t)$ için şu yorum yapılabilmektedir:

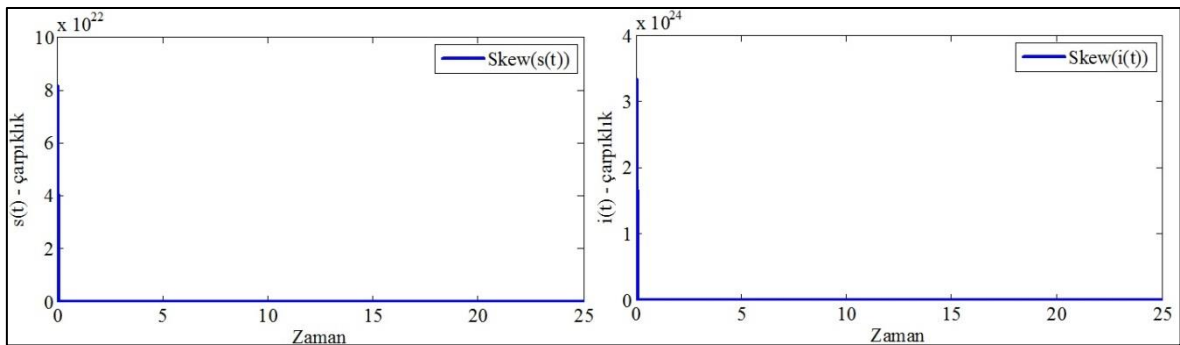
“Hasta insanların oranının ilk hafta sonunda yaklaşık %99 olasılıkla %20 ile %39 arasında olması beklenmektedir”.

$s(t)$ kompartmanı için de benzer yorum yapılabileceği gibi bu yorumun güven aralıkları kullanılarak farklı t anları için de yapılması mümkündür.

(29) modelinde $s(t)$ ve $i(t)$ için elde edilen üçüncü merkezi momentler ve çarpıklık katsayıları aşağıdaki şekillerde görülmektedir (Şekil 10-11).



Şekil 10. SIR modelinin üçüncü merkezi momentleri



Şekil 11. SIR modelinin çarpıklık katsayıları

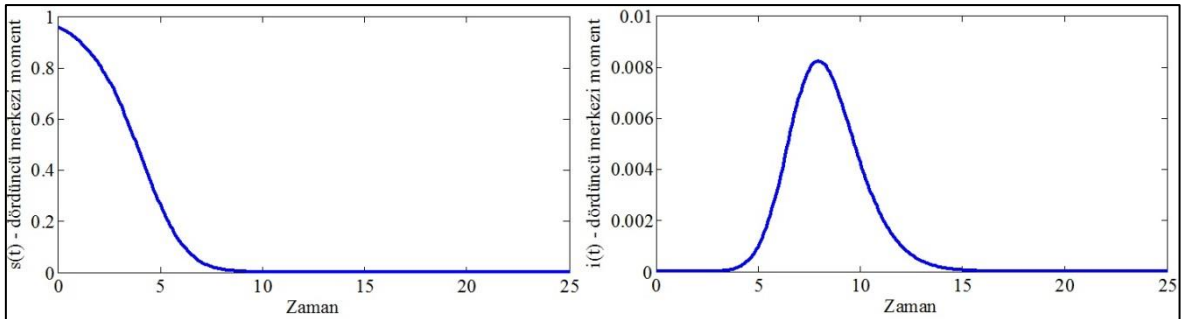
Üçüncü merkezi momentler ($s(t)$ için $\mu_3 = E\left(\left(s(t) - E(s(t))\right)^3\right)$ olarak hesaplanır) ve bu merkezi moment kullanılarak

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\left(\sqrt{\text{Var}(s(t))}\right)^3}$$

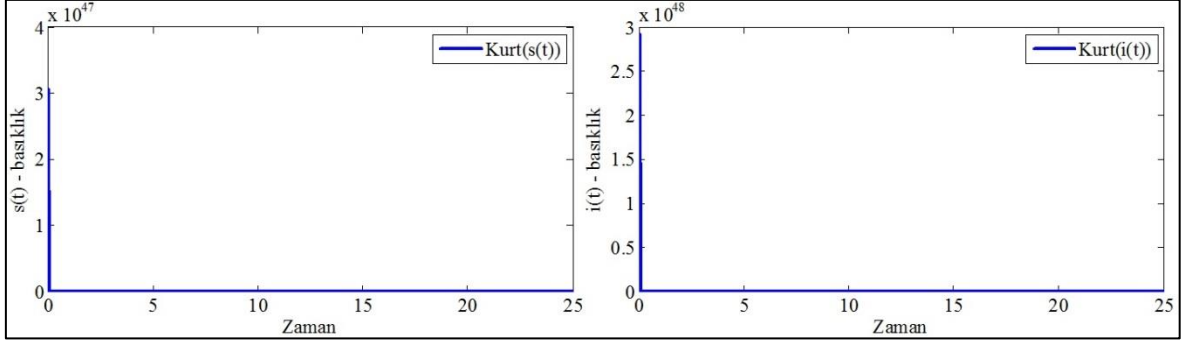
ile hesaplanan çarpıklık katsayısı (Skewness – Asimetre katsayısı) bir rastgele değişkeninin dağılımının simetrik olmayışının ölçüsüdür. Bu katsayının pozitif veya negatif olmasına göre dağılım sola veya sağa çarpık olduğu yorumlanabilmektedir. Pozitif çarpıklığa sahip bir rastgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiğinde sağ taraftaki kuyruğu daha uzun ve yoğunluk sol tarafta daha konsantredir ve dağılım “sağdan çarpıktır” denir. Benzer şekilde sol taraftaki kuyruğu daha uzun olan ve yoğunluğu sağ tarafta olan dağılımlar negatif çarpıklığa sahiptir ve “soldan çarpık” olarak adlandırılırlar.

(29) modelinde $s(t)$ için üçüncü merkezi moment $t = 5.6$ anında 3.382×10^{-5} minimum değerini ve $t = 8.5$ anında 0.0001068 maksimum değerini almaktadır. $s(t)$ için çarpıklık katsayısı $t = 3.7$ anında -0.3797 minimum değerini ve $t = 0$ anında 8.137×10^{22} maksimum değerini almaktadır. Benzer şekilde $i(t)$ için üçüncü merkezi moment $t = 7.3$ anında -1.045×10^{-5} minimum değerini ve $t = 5.3$ anında $t = 9.307 \times 10^{-6}$ maksimum değerini almaktadır. $i(t)$ için çarpıklık katsayısı ise $t = 8.2$ anında 0.438 minimum değerini ve $t = 0$ anında 3.336×10^{24} maksimum değerini almaktadır. $s(t)$ ve $i(t)$ değişkenlerinin çarpıklık katsayılarının pozitif başlayıp ardından sıfırın altına düştüğü, daha sonra sırasıyla 6 ve 8. günlerde tekrar pozitif hale gelip bu şekilde devam ettikleri görülmektedir.

(29) modelinde $s(t)$ ve $i(t)$ için elde edilen dördüncü merkezi momentler ve basıklık katsayıları aşağıdaki şekillerde görülmektedir (Şekil 12-13).



Şekil 12. SIR modelinin dördüncü merkezi momentleri



Şekil 13. SIR modelinin basıklık katsayıları

Dördüncü merkezi momentler $(s(t))$ için $\mu_4 = E\left(\left(s(t) - E(s(t))\right)^4\right)$ olarak hesaplanır ve bu merkezi moment kullanılarak

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\left(Var(s(t))\right)^2} - 3$$

ile hesaplanan basıklık katsayısı (Kurtosis – Diklik katsayısı), bir rastgele değişkenin dağılımının basıklığının ölçüsüdür. Buradaki “-3” terimi, basıklığın normal dağılımın basıklığına kıyasla yapılması olanağı sağlar çünkü normal dağılım için $\mu_4/\left(Var(s(t))\right)^2$ değeri 3 olmaktadır. Pozitif basıklığı olan bir dağılımda olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği ortalamasında daha sivri ve dolayısıyla yoğunluk fonksiyonunun kuyrukları daha yüksektir. Negatif basıklığı olan bir dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiği ortalamasında daha düşüktür ve dolayısıyla kuyrukları daha ince şekilde yayılmıştır.

(29) modelinde $s(t)$ için dördüncü merkezi moment $t = 25$ anında 1.552×10^{-5} minimum değerini ve $t = 0$ anında 0.9606 maksimum değerini almaktadır. $s(t)$ için basıklık katsayısı $t = 12.4$ anında 222.4 minimum değerini ve $t = 10$ anında 3.07×10^{47} maksimum değerini almaktadır. $i(t)$ için dördüncü merkezi moment $t = 25$ anında 1.816×10^{-9} minimum değerini ve $t = 8$ anında 0.008218 maksimum değerini almaktadır. $i(t)$ için basıklık katsayısı ise $t = 25$ anında 247.3 minimum değerini elde ederken $t = 0$ anında 2.928×10^{48} maksimum değerini elde etmektedir. Sonuçlardan da görülebildiği basıklık değerleri her iki değişken için de süreç boyunca pozitif olarak elde edilmektedir ve buna göre değişkenlerin dağılımları normal dağılıma göre daha sivridir.

$s(t)$ ve $i(t)$ için elde edilen rastgele sonuçlar $r(t) = 1 - s(t) - i(t)$ koşulundan da faydalanarak R kompartmanı hakkında da yorum yapabilmeyi sağlar. Örneğin 25 günlük

dönemde simülasyonu yapılan hastalık dönemi için $t = 25$ anında S ve I kompartmanlarının beklenen değerleri

$$E(s(25)) = 0.06167, E(i(25)) = 0.006398$$

olarak elde edilmiştir. Dolayısıyla hastalıktan iyileşen insanların oranını gösteren $r(t)$ için

$$E(r(25)) = 1 - E(s(25)) - E(i(25)) = 1 - 0.06167 - 0.006398 = 0.9319$$

sonucuna ulaşılmaktadır. Bu da 25. gün sonunda toplam nüfusun %93'ünden fazlasının artık hastalıktan iyileştiği anlamına gelmektedir.

2.3.2. Çocuk Felci İçin SVEIR Tipinde Bir Kompartmanlı Model

Çocuk Felci (Poliomyelitis veya Polio) hastalığı “Poliovirus (PV)” adlı virüsten kaynaklanan bulaşıcı bir hastalıktır. Çocuk felci hastalığı en çok beş yaşının altındaki çocukları tehdit etmektedir. Çok bulaşıcı olan bu hastalık sinir sistemini etkileyerek, birkaç saat içinde felce neden olabilmektedir. Bir tedavisi bulunmayan bu hastalıktan aşı ile korunmak mümkündür [121].

Çocuk Felci ilk olarak Michael Underwood tarafından 1789 yılında tanımlanmıştır. 18. yy. öncesinde, tarihi kayıtlar ile antik dönemlerde de var olduğu düşünülen hastalık özellikle 20. yy. da dünya çapında geniş kitleleri etkisi altına almıştır. Özellikle 1952 yılında Amerika’da görülen salgında, felçli vakaların sayısı bile 21000’i aşmıştır [30]. Ancak 1988’de Dünya Sağlık Örgütü (WHO- World Health Organization) öncülüğünde dünya çapında çocuk felcini yok etme hareketi çalışmaları kapsamında geliştirilen koruyucu aşılar sayesinde tüm dünyada görülen vakalarda büyük bir azalma olmuştur. Örneğin 1988’de yaklaşık 350000 çocuk felci vakası olduğu düşünülmekte iken 2016’da rapor edilen vaka sayısı 37’ye düşmüştür. Dünya Sağlık Örgütü’nün GIVS (Global Immunization Vision and Strategy) hareketi sayesinde sadece çocuk felci nedeniyle felç tehlikesiye karşı karşıya kalabilecek insan birçok kurtarılmıştır. Çocuk felci aşısının tekrarlı uygulamaları çocukları hayat boyunca korumaya yetmektedir [121].

Çocuk Felci, PV virüsünün sindirim sistemi ve bağırsaklara yerleşmesiyle oluşan enfeksiyon sonucu oluşmaktadır. En çok anneden veya kirlenmiş yiyecek içecekten ağız-sindirim yoluyla bulaşan virüsün doğal konağı insanlardır [87, 121]. Merkezi sinir sistemini etkilemeyen zayıf Çocuk Felci ile merkezi sinir sistemini etkileyerek felce sebep olabilen büyük çaptaki Çocuk Felci hastalığının olası iki gerçekleşme şeklidir. PV

enfeksiyonu yaklaşık %95, salgın durumunda bile, herhangi bir belirti göstermezken bazı durumlarda ateş, baş ağrısı ve kusma gibi belirtiler görülebilmektedir [81]. Zayıf PV enfeksiyonları yaklaşık 3 gün içinde sonlanmaktadır. Ancak enfeksiyonların 200'de 1'i kalıcı felçle sonuçlanmaktadır. Felçle sonuçlanan enfeksiyonlarda %5-%10 oranında solunum kaslarının etkilenme sonucu hasta hayatını kaybetmektedir. Dünya çapında ülkelerin büyük çoğunluğunda Çocuk Felci hastalığının yok edildiği düşünülse de, hastalığın tedavisi olmaması dolayısıyla tüm dünyada virüs yok edilmeden hastalık tehlikesi devam etmektedir [121]. 2013 yılından beri Kamerun DSÖ tarafından PV yayılan ülke olarak tanımlanmıştır [87]. Dolayısıyla son yıllarda tekrar artan vakalar, bu hastalıkla ilgili çalışmalara daha da önem kazandırmıştır.

Literatürde Çocuk Felci hastalığıyla ilgili kayda değer sayıda matematiksel modelleme çalışması bulunmaktadır. Bu çalışmalar hastalığın yayılması [60], aşılama ile hastalığın kontrolü [18] ve salgın durumunda olası müdahale yöntemleri [112] gibi konuların modeller ile incelenmesine yoğunlaşmaktadır. Tez dahilinde incelenecek model aşılamanın hastalığın yayılmasını kontrol altına almada etkisini inceleyen SVEIR tarzı bir kompartmanlı modeldir [87]. SIR modelini temel alan bu çalışmada, aşılama insanları potansiyel olarak hala az da olsa hastalanma riski taşıdıkları için V (Vaccinated - Aşılınmış) kompartmanı, virüsün bulaştığı ancak henüz hastalığın tam olarak başlamadığı hastalar olduğu için ise E (Exposed – Virüse maruz kalmış) kompartmanı modele dahil edilmiştir. Modeli oluşturan denklem sistemi şöyle verilmektedir [87]:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \Lambda - (d_S + p)S - \beta SI, \\
 \frac{dV}{dt} &= pS - d_V V - \theta \beta VI, \\
 \frac{dE}{dt} &= \beta I(S + \theta V) - (d_E + \varepsilon)E, \\
 \frac{dI}{dt} &= \varepsilon E - (d_I + \gamma)I, \\
 \frac{dR}{dt} &= \gamma I - d_R R.
 \end{aligned} \tag{42}$$

(42) denklem sisteminde S kompartmanı hastalığa duyarlı insanları, V kompartmanı hastalığa karşı aşılınmış ancak hala az da olsa hasta olma ihtimali olan insanları, E kompartmanı virüsün bulaştığı ancak henüz vücutta gizli evrede bulunduğu insanları, I

kompartmenti hastalığın bulaştığı insanları ve R kompartmenti da iyileşmiş insanları içermektedir. (42) denklem sisteminin çözümlerinin biyolojik olarak anlamlı olması açısından, kompartmentlar için elde edilecek çözümlerin negatif olmayan değerler olması gerekmektedir:

$$S(t) \geq 0, V(t) \geq 0, E(t) \geq 0, I(t) \geq 0, R(t) \geq 0.$$

Tablo 5. SVEIR modelinin parametreleri, tanımları ve değerleri [87].

Parametre	Tanım	Değer
d_S	Hastalığa duyarlı insanların doğal ölüm oranı	0.0551
d_V	Aşılanmış insanların doğal ölüm oranı	0.0551
d_E	Virüse maruz kalmış insanların doğal ölüm oranı	0.0551
d_I	Hastalıklı insanların doğal ölüm oranı	0.08
d_R	İyileşmiş insanların doğal ölüm oranı	0.0551
Λ	Hastalığa duyarlı insanlara katılım oranı	2.5
p	Aşılanma oranı	1
β	Etkileşim oranı	0.1
θ	Aşı etki oranı ($1 - \theta$)	0.1
ε	Hastalığın ortalama gizlilik evresi oranı	0.05
γ	İyileşme oranı	0.005

Modelde t değişkeni, gün sayısını belirten zaman değişkeni olarak yorumlanmaktadır. Tablo 5 ile verilen parametre değerleri, başlangıç değerleri ile birlikte (42) denklem sisteminin sayısal çözümünün incelenmesinde kullanılacaktır [87]:

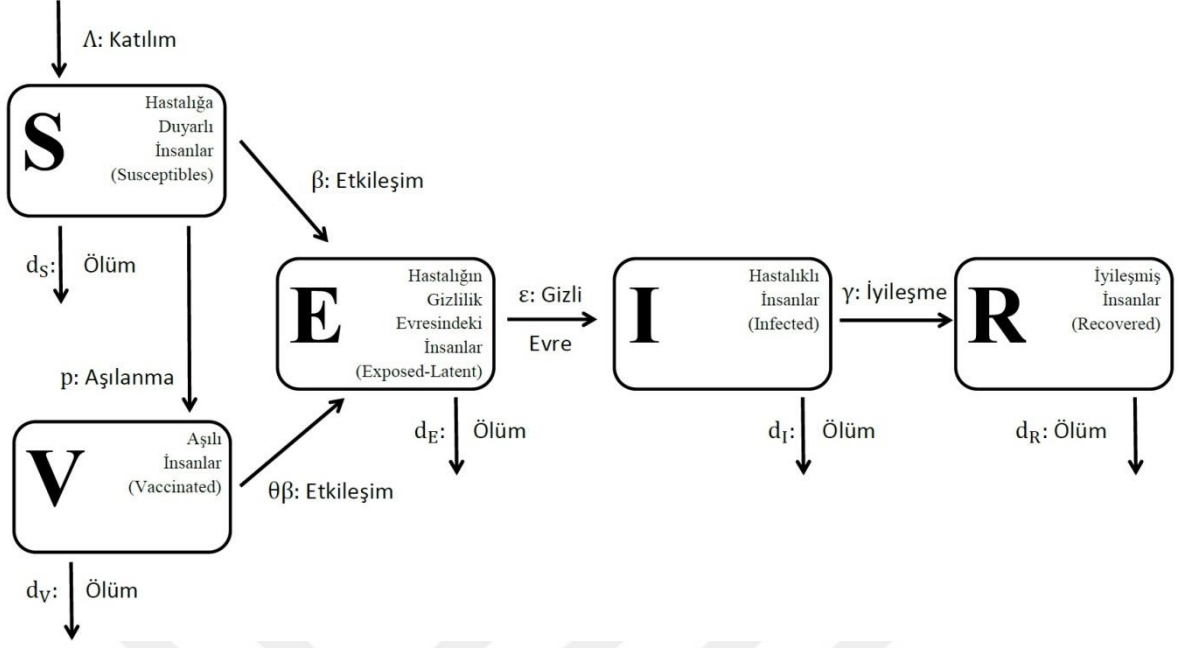
$$S(0) = 20, \quad V(0) = 15, \quad E(0) = 5, \quad I(0) = 5.$$

Başlangıç değerleri, başlangıçta 15'i aşılanmış 35 kişilik bir topluluğa, 5'i hastalığın gizlilik evresinde olan 10 virüslü kişinin katılması durumunu belirtmektedir.

Dolayısıyla (42) modeli, zaman içerisinde bu toplulukta hastalığın ilerleyişini, hastalığa duyarlı, aşı, hastalığın gizli evresinde, hastalıklı ve iyileşmiş insan gruplarının sayılarındaki değişimlerin aracılığıyla tasvir etmektedir. SIR modelinin bir modifikasyonu olan bu modelin akış şeması şekilde gösterilmektedir (Şekil 14). Kompartmanlı modellerin sabit nüfus varsayımı dolayısıyla kompartmanların toplamından oluşan

$$S(t) + V(t) + E(t) + I(t) + R(t) = N(t) \rightarrow \text{sabit}$$

$N(t)$ değeri sabittir.



Şekil 14. Çocuk Felci modelinin akış şeması [87].

Bu nedenle

$$R(t) = N(t) - S(t) - V(t) - E(t) - I(t)$$

olması ve R değişkeninin diğer kompartmanların denklemlerinde görülmemesi göz önünde bulundurularak sistemin davranışları ilk dört denklem kullanılarak da belirlenebilir. Ayrıca hastalığa duyarlı, aşı, gizli evredeki ve iyileşmiş insanların doğal ölüm oranları d_S, d_V, d_E, d_R aynı değere sahip olduklarından bu örnek için tek bir d ölüm oranı parametresi olarak alabiliriz.

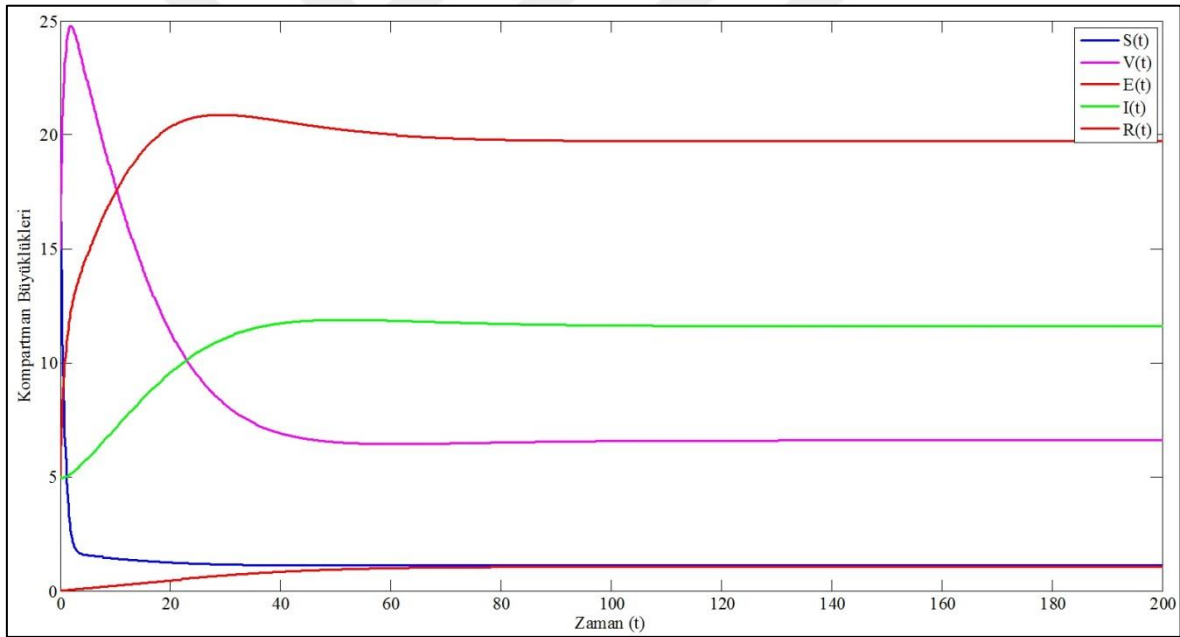
$$d_S = d_V = d_E = d_R = d.$$

Bu durumda (42) modeli şu hali alır:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \Lambda - (d + p)S - \beta SI, \\ \frac{dV}{dt} &= pS - dV - \theta\beta VI, \\ \frac{dE}{dt} &= \beta I(S + \theta V) - (d + \varepsilon)E, \\ \frac{dI}{dt} &= \varepsilon E - (d_I + \gamma)I, \end{aligned}$$

(43)

(43) denklemi Çocuk Felci hastalığının verilen başlangıç ve parametre değerleri kullanılarak modellenmektedir. Kaynak makalede aşılama oranını gösteren p parametresi $[0,1]$ arasında değerler alabilmektedir ancak çalışma kapsamında toplulukta herkesin aşılandığını göstermek için burada $p = 1$ alınmıştır. Benzer şekilde aşının etki oranı $1 - \theta$ için $\theta \in [0,1]$ olması muhtemel gösterilmiş ancak burada %90 oranında etkili bir aşırı belirtmek için $\theta = 0.1$ alınmıştır. Hastalığa neden olan virüsün etkisine paralel olarak iyileşme süresini belirten γ parametresi için 0.005, 0.2, 0.5 değerleri kullanılmıştır ancak bu çalışmada güçlü bir virüsü belirtmek için $\gamma = 0.005$ kullanılmıştır. Son olarak gizlilik evresini belirten ε parametresi için 0.05 ve 0.5 olası değerler olarak gösterilmiştir ancak burada gizlilik evresi için $\varepsilon = 0.05$ kullanılmıştır. Bu parametre seçimleri altında deterministik modelde davranışlar şu şekilde gerçekleşmektedir (Şekil 15):



Şekil 15. Deterministik Çocuk Felci modelinin çözümleri

Kullanılan parametrelere göre kaynak çalışmada aşılamanın olduğu durumda

$$R_0 = \frac{\varepsilon\beta\Lambda}{(d_S + p)(d_E + \varepsilon)(d_I + \gamma)} \left(1 + \frac{\theta p}{d_V}\right)$$

olarak verilen üreme katsayısı Tablo 5 ile verilen parametrelere göre $R_0 = 3.733$ değerini almaktadır. Bu değer $R_0 = 3.733 > 1$ olduğundan hastalığın salgın halini alması beklenir ki Şekil 15 ile verilen sonuçlarda $E(t)$ ve $I(t)$ ile verilen virüslü insanların sayısında artış

olurken $S(t)$ ve $V(t)$ ile verilen sağlıklı insanların sayısındaki azalış bu durumu doğrulamaktadır. Deterministik sonuçlara göre en büyük ve en küçük değerler tabloda verilmiştir (Tablo 6).

Tablo 6. SVEIR modelinin deterministik parametreleri için uç değerleri

	En küçük değer (ve zamanı)		En büyük değer (ve zamanı)	
$S(t)$	1.114	$t = 48.72$	20	$t = 0$
$V(t)$	6.426	$t = 59.74$	24.79	$t = 1.768$
$E(t)$	5	$t = 0$	20.9	$t = 29.16$
$I(t)$	4.964	$t = 0.422$	11.89	$t = 48.98$

İncelenilen zaman aralığının sonunu gösteren $t = 200$ için kompartman değerleri şöyle elde edilmiştir:

$$S(200) = 1.128; V(200) = 6.587; E(200) = 19.740; I(200) = 11.610.$$

Toplam nüfus sabit olduğu için ilk andaki nüfus:

$$N(0) = S(0) + V(0) + E(0) + I(0) + R(0) = 45 = N(200)$$

olmalıdır. Dolayısıyla,

$$R(200) = N(200) - S(200) - V(200) - E(200) - I(200) = 5.935$$

olarak elde edilir. Yüzdeye vurulursa yaklaşık %13.19 oranında insanın 200 gün sonunda hastalıktan iyileşebildiği görülmektedir. Hastalığın tedavisinin olmaması ve sadece koruyucu önlemlerin zayıf enfeksiyonlarda etkili olduğu göz önünde bulundurulursa, parametreler aracılığı ile güçlü bir virüsün tasvir edildiği bu sonuçlar, kaynak çalışmadakilere benzer şekilde olası durumu doğru bir şekilde resmetmektedir. Dolayısıyla, parametrelerin rastgele hale getirilmesi ile Çocuk Felci hastalığı modelinin rastgele davranışları incelenebilir. Her ne kadar (42) modeli ile (43) modeli denk olsalar da, yaklaşık beklenen değer hesapları $I(t)$ ve $R(t)$ kompartmanları için yapılacağından analizler (42) modeli kullanılarak yapılacaktır.

(42) denklem sisteminin parametrelerini rastgele hale getirmek için öncelikle normal dağılım kullanılacak olursa, yeni parametreler aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\Lambda^* = \Lambda + s_1\eta_1, d^* = d + s_2\eta_2,$$

$$p^* = p + s_3\eta_3, \beta^* = \beta + s_4\eta_4,$$

$$\theta^* = \theta + s_5\eta_5, \varepsilon^* = \varepsilon + s_6\eta_6,$$

$$d_I^* = d_I + s_7\eta_7, \gamma^* = \gamma + s_8\eta_8.$$

Burada yeni parametreler $\{\Lambda^*, d^*, p^*, \beta^*, \theta^*, \varepsilon^*, d_I^*, \gamma^*\}$, deterministik parametrelerin değerlerine $s_i\eta_i, i = \overline{1,8}$ şeklindeki rastgele etki terimlerinin eklenmesiyle elde edilmektedirler. Rastgele etki terimlerini oluşturan $s_i, i = \overline{1,8}$ terimleri rastgele etkinin miktarını belirten standart sapma miktarlarıyken $\eta_i, i = \overline{1,8}$ bağımsız standart normal rastgele değişkenlerdir. $X_0 = \mu_0 + \sigma_0\eta_0$ ile tanımlanan herhangi bir X_0 için

$$E(X_0) = E(\mu_0 + \sigma_0\eta_0) = E(\mu_0) + E(\sigma_0\eta_0) = \mu_0 + \sigma_0 \cdot 0 = \mu_0,$$

$$Var(X_0) = Var(\mu_0 + \sigma_0\eta_0) = Var(\sigma_0\eta_0) = \sigma_0^2$$

Olduğundan $\{\Lambda^*, d^*, p^*, \beta^*, \theta^*, \varepsilon^*, d_I^*, \gamma^*\}$ şeklinde tanımlanan rastgele değişkenler, ortalamaları Tablo 1’de verilen deterministik değerler ve standart sapmaları $s_i, i = \overline{1,8}$ olan normal rastgele değişkenlerdir. Parametrelere ait dağılımlar ve dağılımların ortalama-varyanslarının bilindiği durumlarda standart sapma bu bilgiler aracılığıyla belirlenebilse de çoğu durumda parametrelerle ilgili kesin bilgiler mevcut değildir. Böyle uygulamalarda rastgele etki için kullanılacak standart sapma miktarları varsayımlara göre belirlenebilir. Örneğin $\{\Lambda^*, d^*, p^*, \beta^*, \theta^*, \varepsilon^*, d_I^*, \gamma^*\}$ parametreleri için standart sapma, ortalamalarının %5’i kadar olsun. Bu durumda,

$$s_1 = 5 \times \frac{\Lambda}{100}; s_2 = 5 \times \frac{d}{100}; s_3 = 5 \times \frac{p}{100}; s_4 = 5 \times \frac{\beta}{100};$$

$$s_5 = 5 \times \frac{\theta}{100}; s_6 = 5 \times \frac{\varepsilon}{100}; s_8 = 5 \times \frac{d_I}{100}; s_7 = 5 \times \frac{\gamma}{100}.$$

Bu şekilde belirlenen standart sapmalar ile, tüm parametreler için varyasyon katsayısı (CV-Coefficient of Variation) yaklaşık %5 olarak belirlenmiş olur (standart sapmalar tanım olarak beklenen değerlerin %5’i olarak belirlendiklerinden):

$$CV = \frac{\left(100 \times \left(5 \times \frac{\text{beklenen değer}}{100}\right)\right)}{\text{beklenen değer}}.$$

Dolayısıyla rastgele parametreler şu hali alırlar:

$$\Lambda^* = \Lambda + s_1\eta_1 = 2.5 + 0.125\eta_1, \quad d^* = d + s_2\eta_2 = 0.0551 + 0.002755\eta_2$$

$$p^* = p + s_3\eta_3 = 1 + 0.05\eta_3, \quad \beta^* = \beta + s_4\eta_4 = 0.1 + 0.005\eta_4,$$

$$\theta^* = \theta + s_5\eta_5 = 0.1 + 0.005\eta_5, \quad \varepsilon^* = \varepsilon + s_6\eta_6 = 0.05 + 0.0025\eta_6,$$

$$d_I^* = d_I + s_7\eta_7 = 0.08 + 0.004\eta_7, \quad \gamma^* = \gamma + s_8\eta_8 = 0.005 + 0.00025\eta_8.$$

(42) denklem sistemindeki parametreler $\{\Lambda^*, d^*, p^*, \beta^*, \theta^*, \varepsilon^*, d_I^*, \gamma^*\}$ rastgele parametreleri ile değiştirildiğinde, rastgele katsayılı diferansiyel denklemlerden oluşan bir rastgele model elde edilmiş olur:

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda^* - (d^* + p^*)S - \beta^*SI,$$

$$\frac{dV}{dt} = p^*S - d^*V - \theta^*\beta^*VI,$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta^*I(S + \theta^*V) - (d^* + \varepsilon^*)E, \quad (44)$$

$$\frac{dI}{dt} = \varepsilon^*E - (d_I^* + \gamma^*)I,$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma^*I - d^*R.$$

(44) denklem sisteminde rastgele parametreler yerlerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= (2.5 + 0.125\eta_1) - ((0.0551 + 0.002755\eta_2) + (1 + 0.05\eta_3))S \\ &\quad - (0.1 + 0.005\eta_4)SI, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= (1 + 0.05\eta_3)S - (0.0551 + 0.002755\eta_2)V \\ &\quad - (0.1 + 0.005\eta_5)(0.1 + 0.005\eta_4)VI, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= (0.1 + 0.005\eta_4)I(S + (0.1 + 0.005\eta_5)V) \\ &\quad - ((0.0551 + 0.002755\eta_2) + (0.05 + 0.0025\eta_6))E, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\frac{dI}{dt} = (0.05 + 0.0025\eta_6)E - ((0.08 + 0.004\eta_7) + (0.005 + 0.00025\eta_8))I,$$

$$\frac{dR}{dt} = (0.005 + 0.00025\eta_8)I - (0.0551 + 0.002755\eta_2)R.$$

$$S(0) = 20, V(0) = 15, E(0) = 5, I(0) = 5, R(0) = 0.$$

rastgele modeli elde edilir. (45) modeli, (42) deterministik modelinin rastgele davranışlarının yalnızca $\eta_i, i = \overline{1,8}$ bağımsız standart normal rastgele değişkenleri kullanılarak incelenebilmesini sağlar. Parametrelerin deterministik değerlerine “rastgele gürültü” olarak görev üstlenen terimlerin eklenmesiyle oluşturulan rastgele etkiler altındaki (45) modeli, hastalığın kısa ve uzun dönemdeki rastgele davranışlarının, literatürdeki benzer rastgele analizlerden çok daha basit bir şekilde yapılabilmesini sağlamaktadır. Rastgele sistemin incelenmesi için yeni oluşturulan rastgele parametrelerin ve rastgele kompartmanların birbirlerinden bağımsız oldukları varsayılmaktadır.

(45) modeli kullanılarak, Çocuk Felci hastalığının kısa dönem içerisindeki rastgele davranışları incelenmek için S, V, E, I, R kompartmanlarının yaklaşık analitik çözümleri elde edilecektir. (45) modeline rastgele Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi uygulanırsa,

$$\delta(k) = f(x) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

olmak üzere, aşağıdaki sistem elde edilir:

$$\begin{aligned} (k+1)S(k+1) &= \Lambda^* \delta(k) - (d^* + p^*)S(k) - \beta^* \sum_{m=0}^k I(m)S(k-m), \\ (k+1)V(k+1) &= p^*S(k) - d^*V(k) - \theta^* \beta^* \sum_{m=0}^k I(m)V(k-m), \\ (k+1)E(k+1) &= \beta^* \sum_{m=0}^k I(m)S(k-m) + \theta^* \sum_{m=0}^k I(m)V(k-m) \\ &\quad - (d^* + \varepsilon^*)E(k), \\ (k+1)I(k+1) &= \varepsilon^*E(k) - (d_I^* + \gamma^*)I(k), \\ (k+1)R(k+1) &= \gamma^*I(k) - d^*R(k). \end{aligned} \tag{46}$$

elde edilir. Başlangıç şartları ile birlikte rastgele $n = 3$ terimle:

$$\begin{aligned} S(t) &= 20 + (-100\beta - 20d + \lambda - 20p)t \\ &\quad + \left(100d\beta + 100p\beta + 10d^2 - \frac{1}{2}d\lambda + 20dp - \frac{1}{2}p\lambda + 10p^2 + 250\beta^2 \right. \\ &\quad \left. + 50\beta d_I + 50\beta\gamma - \frac{5}{2}\beta\lambda - 50\beta\varepsilon \right) t^2, \\ V(t) &= 15 + (-75\beta\theta - 15d + 20p)t \end{aligned}$$

$$+ \left(-50p\beta - 20dp + \frac{1}{2}p\lambda - 10p^2 + 75\beta d\theta + \frac{15}{2}d^2 + \frac{375}{2}\beta^2\theta^2 + \frac{75}{2}\beta d_I\theta + \frac{75}{2}\beta\gamma\theta - 50\beta p\theta - \frac{75}{2}\beta\theta\varepsilon \right) t^2,$$

$$E(t) = 5 + (75\beta\theta + 100\beta - 5d - 5\varepsilon)t$$

$$+ \left(-250\beta^2 - 100d\beta - 50\beta d_I - 50\beta\gamma + \frac{5}{2}\beta\lambda - 50p\beta - \frac{375}{2}\beta^2\theta^2 + \frac{5}{2}\varepsilon^2 - 75\beta d\theta - \frac{75}{2}\beta d_I\theta - \frac{75}{2}\beta\gamma\theta + 50\beta p\theta + \frac{5}{2}d^2 + 5d\varepsilon \right) t^2,$$

$$I(t) = 5 + (-5d_I - 5\gamma + 5\varepsilon)t$$

$$+ \left(\frac{75}{2}\beta\theta\varepsilon + 50\beta\varepsilon - \frac{5}{2}d\varepsilon - \frac{5}{2}\varepsilon^2 + \frac{5}{2}d_I^2 + 5d_I\gamma - \frac{5}{2}d_I\varepsilon + \frac{5}{2}\gamma^2 - \frac{5}{2}\gamma\varepsilon \right) t^2,$$

$$R(t) = 5\gamma t + \left(-\frac{5}{2}d_I\gamma - \frac{5}{2}\gamma^2 + \frac{5}{2}\gamma\varepsilon - \frac{5}{2}d\gamma \right) t^2$$

elde edilir. (karışıklık olmaması için rastgele değişkenlerdeki “*” notasyonları kullanılmayacaktır). Burada örnek olarak $I(t)$ için $I(t) = \sum_{k=0}^{n-1} I(k) t^k$ seri açılımına göre

$$I(0) = 5,$$

$$I(1) = -5d_I - 5\gamma + 5\varepsilon,$$

$$I(2) = \frac{75}{2}\beta\theta\varepsilon + 50\beta\varepsilon - \frac{5}{2}d\varepsilon - \frac{5}{2}\varepsilon^2 + \frac{5}{2}d_I^2 + 5d_I\gamma - \frac{5}{2}d_I\varepsilon + \frac{5}{2}\gamma^2 - \frac{5}{2}\gamma\varepsilon$$

olmaktadır.

$$E(I(t)) = \sum_{k=0}^{n-1} E(I(k)) t^k$$

olduğundan ($n = 3$ ile uygun olarak), bu örnek için yaklaşık beklenen değer

$$E(I(t)) = E(I(0)) + E(I(1))t + E(I(2))t^2$$

şeklinde elde edilmektedir.

$$E(I(0)) = E(5) = 5,$$

$$E(I(1)) = E(-5d_I - 5\gamma + 5\varepsilon) = -5E(d_I) - 5E(\gamma) + 5E(\varepsilon),$$

$$\begin{aligned} E(I(2)) &= E\left(\frac{75}{2}\beta\theta\varepsilon + 50\beta\varepsilon - \frac{5}{2}d\varepsilon - \frac{5}{2}\varepsilon^2 + \frac{5}{2}d_I^2 + 5d_I\gamma - \frac{5}{2}d_I\varepsilon + \frac{5}{2}\gamma^2 - \frac{5}{2}\gamma\varepsilon\right) \\ &= \frac{75}{2}E(\beta\theta\varepsilon) + 50E(\beta\varepsilon) - \frac{5}{2}E(d\varepsilon) - \frac{5}{2}E(\varepsilon^2) + \frac{5}{2}E(d_I^2) + 5E(d_I\gamma) \\ &\quad - \frac{5}{2}E(d_I\varepsilon) + \frac{5}{2}E(\gamma^2) - \frac{5}{2}E(\gamma\varepsilon). \end{aligned}$$

X, Y bağımsız rastgele değişkenleri için $E(XY) = E(X)E(Y)$ olduğundan

$$E(I(2)) = \frac{75}{2}E(\beta)E(\theta)E(\varepsilon) + 50E(\beta)E(\varepsilon) - \frac{5}{2}E(d)E(\varepsilon) - \frac{5}{2}E(\varepsilon^2) + \frac{5}{2}E(d_I^2) \\ + 5E(d_I)E(\gamma) - \frac{5}{2}E(d_I)E(\varepsilon) + \frac{5}{2}E(\gamma^2) - \frac{5}{2}E(\gamma)E(\varepsilon).$$

$\{\Lambda^*, d^*, p^*, \beta^*, \theta^*, \varepsilon^*, d_I^*, \gamma^*\}$ rastgele parametreleri Normal dağılıma sahip olduklarından, normal dağılıma sahip bir $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ rastgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu kullanılarak bu değişkenin momentleri hesaplanır. Normal dağılıma sahip $\{\Lambda, d, p, \beta, \theta, \varepsilon, d_I, \gamma\}$ rastgele değişkenlerinin ilk dört momentleri şöyle elde edilir:

$$E(\Lambda) = 2.5; E(\Lambda^2) = 6.265625; E(\Lambda^3) = 15.7421875; E(\Lambda^4) = 39.64916992, \\ E(d) = 0.0551; E(d^2) = 0.0030436; E(d^3) = 0.000168539; \\ E(d^4) = 9.35579 \times 10^{-6}, \\ E(p) = 1; E(p^2) = 1.0025; E(p^3) = 1.0075; E(p^4) = 1.01501875, \\ E(\beta) = 0.1; E(\beta^2) = 0.010025; E(\beta^3) = 0.0010075; E(\beta^4) = 0.000101502, \\ E(\theta) = 0.1; E(\theta^2) = 0.010025; E(\theta^3) = 0.0010075; E(\theta^4) = 0.000101502, \\ E(\varepsilon) = 0.05; E(\varepsilon^2) = 0.00250625; E(\varepsilon^3) = 0.000125938; \\ E(\varepsilon^4) = 6.34387 \times 10^{-6}, \\ E(d_I) = 0.08; E(d_I^2) = 0.006416; E(d_I^3) = 0.00051584; \\ E(d_I^4) = 4.15752 \times 10^{-6}, \\ E(\gamma) = 0.005; E(\gamma^2) = 2.50625 \times 10^{-5}; E(\gamma^3) = 1.25938 \times 10^{-7}; \\ E(\gamma^4) = 6.34387 \times 10^{-10}.$$

Rastgele parametrelerin momentleri yerlerine yazılırsa beklenen değer şu şekilde elde edilmektedir:

$$E(I(t)) = 5 - 0.175t + 0.26307453125t^2.$$

Benzer şekilde $R(t)$ için

$$R(0) = 0; R(1) = 5\gamma; R(2) = -\frac{5}{2}d_I\gamma - \frac{5}{2}\gamma^2 + \frac{5}{2}\gamma\varepsilon - \frac{5}{2}d\gamma$$

olduğundan

$$E(R(t)) = 0.025t - 0.00112640625t^2$$

olmaktadır. $n = 3$ adım kullanılarak elde edilen açılımlar kullanılarak varyans için yapılması gereken hesaplar şöyle gösterilir ($cov(R(i), R(j)) = cov(R(j), R(i))$):

$$Var(R(t)) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} cov(R(i), R(j))t^{i+j}$$

$$\begin{aligned} Var(R(t)) &= cov(R(0), R(0)) + 2cov(R(0), R(1))t \\ &\quad + \left((cov(R(1), R(1)) + 2cov(R(0), R(2))) \right) t^2 \\ &\quad + 2cov(R(1), R(2))t^3 + cov(R(2), R(2))t^4. \end{aligned}$$

$R(0) = 0$ olduğundan $cov(R(0), R(i)) = 0, i = 1, 2, 3$ olmaktadır.

$$(cov(R(1), R(1)) = E(R(1)R(1)) - E(R(1))E(R(1)).$$

$R(1) = 5\gamma$ ve $E(R(1)) = 0.025$ olmak üzere,

$$E(R(1)R(1)) = E(25\gamma^2) = 25E(\gamma^2) = 25(2.50625 \times 10^{-5}) = 0.0006265625$$

$$E(R(1))E(R(1)) = (5E(\gamma))^2 = 25E(\gamma)^2 = 25(0.005)^2 = 0.000625$$

$$(cov(R(1), R(1)) = 0.0006265625 - 0.000625 = 0.0000015625.$$

Benzer hesaplarla

$$(cov(R(1), R(2)) = -6.6491 \times 10^{-8},$$

$$(cov(R(2), R(2)) = 8.2076 \times 10^{-9}$$

olmaktadır. Dolayısıyla $n = 3$ adımda $R(t)$ 'nin yaklaşık varyans formülü DDY ile

$$Var(R(t)) = 0.0000015625t^2 - 1.3298 \times 10^{-7}t^3 + 8.2076 \times 10^{-9}t^4$$

olarak elde edilir. Buradan normal dağılıma sahip bir rastgele değişkenin değerlerinin %99.7'sinin ortalamasının üç standart sapma civarında olması kuralını kullanarak $R(t)$ için %99.7'lik güven aralığını şöyle elde ederiz:

$$\begin{aligned} &\left(E(R(t)) - 3\sqrt{Var(R(t))}, E(R(t)) + 3\sqrt{Var(R(t))} \right) \\ &= \left(0.025t - 0.00112640625t^2 \right. \\ &\quad \left. - 3\sqrt{0.0000015625t^2 - 1.3298 \times 10^{-7}t^3 + 8.2076 \times 10^{-9}t^4}, 0.025t \right. \\ &\quad \left. - 0.00112640625t^2 \right. \\ &\quad \left. + 3\sqrt{0.0000015625t^2 - 1.3298 \times 10^{-7}t^3 + 8.2076 \times 10^{-9}t^4} \right). \end{aligned}$$

Bu yaklaşımlarda $n = 3$ olarak kullanılan adım sayısı artırılarak, hata miktarı azaltılabilir. Ancak her ne kadar daha fazla adım kullanmak hatayı azaltacak olsa da, parametreler ve değişkenler için yapılan bağımsızlık varsayımının her zaman yaklaşık çözümlerde gerçek değerden uzaklaşmalara neden olabileceği unutulmamalıdır.

Deterministik (42) sisteminde $I(t)$ değişkeni için $n = 5$ kullanılarak deterministik Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi ile şu yaklaşık çözüm elde edilir:

$$I(t) = 5 - 0.175t + 0.26305t^2 - 0.1310419996t^3 + 0.05385815978t^4. \quad (47)$$

(42) sisteminin rastgele karşılığı olan (45) sistemi için (46) sistemi kullanılarak $I(t)$ değişkeninin beklenen değeri Rastgele Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi ile $n = 5$ kullanarak benzer şekilde elde edilir:

$$E(I(t)) = 5 - 0.175t + 0.26307453125t^2 - 0.131148360545833t^3 + 0.054008971778864t^4. \quad (48)$$

(48) yaklaşık çözümü, Laplace-Padé yöntemi kullanılarak modifiye edilerek daha uzun aralıkta gerçek $E(I(t))$ değerine yakınsayan bir çözüm üretilebilir. MAPLE bilgisayar yazılımı kullanılarak [3,2] mertebesinde Padé yaklaşımı ile modifiye edilmiş rastgele modifiye Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi ile (48) yaklaşık beklenen değeri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E(I(t)) = 4.356046001 + [0.2715615205 \sinh(0.9507723071t) + 0.643953998 \cosh(0.9507723071t)]e^{(-0.6727082555t)}. \quad (49)$$

$I(t)$ için Şekil 15 ile grafiği verilen deterministik yaklaşık sayısal çözümler, (47) deterministik yaklaşık analitik çözümünün değerleri, (48) rastgele yaklaşık beklenen değer formülü ve (49) rastgele modifiye beklenen değer formülünün değerleri tabloda verilmektedir. (45) rastgele modelinin simülasyonundan elde edilen beklenen değerler de $t \in [0,1.5]$ için tabloya eklenmiştir (Tablo 7).

Monte-Carlo yöntemi ile elde edilen rastgele simülasyon değerlerinin, büyük sayılar kanununa göre yeterli sayıda tekrar kullanıldığı takdirde, gerçek beklenen değerlere oldukça yakın olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla rastgele değerler (C) göz önünde bulundurulduğundan $t = 0.6$ sonrasında DDY ile elde edilen yaklaşımın (D) gerçek değerden uzaklaştığı görülmektedir. Ancak modifiye edilen yaklaşım (E) $t = 1.5$ anında bile gerçek beklenen değere oldukça yakın sonuç vermektedir.

Tablo 7. $t \in [0,1.5]$ için I kompartmanına ait sonuçlar

t	A Deterministik (MATLAB)	B Deterministik DDY ($n = 5$)	C Rastgele Simülasyon	D Rastgele DDY ($n = 5$)	E Rastgele MDDY
0	5.000	5.000	5.000	5.000	5.000
0.1	4.985	4.985	4.985	4.985	4.985
0.2	4.975	4.975	4.975	4.975	4.975
0.3	4.968	4.968	4.968	4.968	4.968
0.4	4.965	4.965	4.965	4.965	4.965
0.5	4.965	4.965	4.965	4.965	4.965
0.6	4.967	4.968	4.967	4.968	4.967
0.7	4.972	4.974	4.972	4.974	4.972
0.8	4.978	4.983	4.979	4.983	4.979
0.9	4.986	4.995	4.988	4.995	4.987
1.0	4.996	5.011	4.997	5.011	4.997
1.1	5.007	5.030	5.008	5.030	5.009
1.2	5.020	5.054	5.020	5.054	5.022
1.3	5.033	5.083	5.034	5.083	5.036
1.4	5.047	5.118	5.048	5.118	5.051
1.5	5.062	5.160	5.063	5.160	5.067

(42) deterministik sistemi ve (45) rastgele sistemi için R kompartmanının çözümleri, DDY ve rastgele DDY ile elde edilen yaklaşık çözümler ve simülasyon sonuçları aşağıdaki tabloda verilmektedir (Tablo 8).

$R(t)$ değişkeninin (46) sistemi kullanılarak Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi ile $n = 5$ için elde edilen yaklaşık analitik çözümü

$$R(t) = 0.025t - 0.00112625t^2 + 0.000459102125t^3 - 0.0001701266313t^4 \quad (50)$$

şeklindedir. (45) rastgele modelinde rastgele Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi ile $n = 5$ için beklenen değer için elde edilen yaklaşık analitik formül şu şekildedir:

$$E(R(t)) = 0.025t - 0.00112640625t^2 + 0.0004418316219875001t^3 - 0.0001702643628382569t^4 \quad (51)$$

(51) eşitliği [3,2] mertebesinde Padé yaklaşımı ile modifiye edilerek $E(R(t))$ beklenen değeri için daha uzun aralıkta gerçek değere yakınsayan modifiye yaklaşık analitik çözüm elde edilir:

$$E(R(t)) = 0.001626893221 + 0.02308555873t - 0.001626893221e^{(-11176746725t)}. \quad (52)$$

Tablo 8. $t \in [0,2.5]$ için R kompartmanına ait sonuçlar

t	F Deterministik (MATLAB)	G Deterministik DDY ($n = 5$)	H Rastgele Simülasyon	J Rastgele DDY ($n = 5$)	K Rastgele MDDY
0	0	0	0	0	0
0.1	0.00249	0.00249	0.00249	0.00249	0.00249
0.2	0.00496	0.00496	0.00496	0.00496	0.00496
0.3	0.00741	0.00741	0.00742	0.00741	0.00741
0.4	0.00985	0.00985	0.00985	0.00984	0.00985
0.5	0.01227	0.01227	0.01228	0.01226	0.01227
0.6	0.01468	0.01467	0.01469	0.01467	0.01468
0.7	0.01707	0.01707	0.01708	0.01706	0.01707
0.8	0.01946	0.01945	0.01947	0.01944	0.01946
0.9	0.02184	0.02181	0.02185	0.02180	0.02184
1.0	0.02421	0.02416	0.02422	0.02415	0.02421
1.1	0.02657	0.02650	0.02658	0.02648	0.02658
1.2	0.02892	0.02882	0.02894	0.02879	0.02893
1.3	0.03127	0.03112	0.03129	0.03108	0.03129
1.4	0.03361	0.03340	0.03363	0.03335	0.03363
1.5	0.03595	0.03565	0.03597	0.03560	0.03598
1.6	0.03828	0.03788	0.03830	0.03781	0.03832
1.7	0.04060	0.04008	0.04063	0.03999	0.04065
1.8	0.04292	0.04224	0.04295	0.04214	0.04299
1.9	0.04524	0.04437	0.04527	0.04425	0.04532
2.0	0.04756	0.04645	0.04759	0.04631	0.04764
2.1	0.04987	0.04848	0.04990	0.04831	0.04997
2.2	0.05217	0.05045	0.05222	0.05026	0.05229
2.3	0.05448	0.05237	0.05451	0.05215	0.05462
2.4	0.05678	0.05422	0.05681	0.05397	0.05694
2.5	0.05907	0.05599	0.05911	0.05571	0.05926

(50), (51), (52) formüllerinin (G-J-K), Şekil 15 ile grafiği verilen deterministik yaklaşık sayısal çözümler ve (45) rastgele modelinin simülasyonundan elde edilen beklenen değerler ile $t \in [0, 2.5]$ aralığında karşılaştırılması tabloda verilmiştir (Tablo 4).

Tablo 4'te görüldüğü üzere, toplam nüfus için $t = 2.5$ anında $R(t)$ değişkeninin beklenen değeri için rastgele DDY ve rastgele MDDY yöntemleriyle elde edilen değerlerinin mutlak hata oranları şu şekildedir:

Rastgele DDY için:

$$\frac{|0.05911 - 0.05571|}{0.05911} \times 100 \simeq \%5.75,$$

Rastgele MDDY için:

$$\frac{|0.05911 - 0.05926|}{0.05911} \times 100 \simeq \%0.25.$$

Yalnızca $n = 5$ terim kullanılarak elde edilen yaklaşım kullanılarak $t \in [0, 2.5]$ aralığında rastgele MDDY ile çok daha düşük bir hata oranı yakalanabildiği görülmektedir. Tablo 3'teki değerler kullanılarak $I(t)$ değişkeninin beklenen değeri için benzer analiz yapılırsa:

Rastgele DDY için:

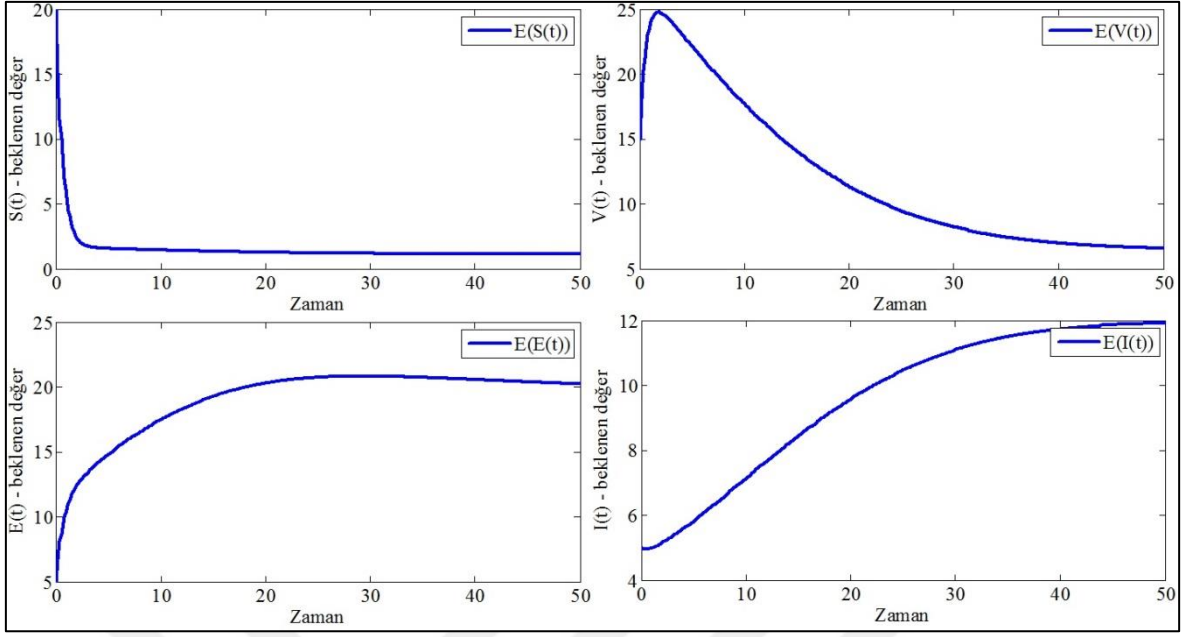
$$\frac{|5.063 - 5.160|}{5.063} \times 100 \simeq \%1.92,$$

Rastgele MDDY için:

$$\frac{|5.063 - 5.067|}{5.063} \times 100 \simeq \%0.08.$$

İki durumda da elde edilen hata oranlarında %95'ten fazla azalma görülmüştür.

(45) modelinin uzun vadedeki rastgele davranışları, (43) sisteminde rastgele parametreler Monte-Carlo simülasyonları ile incelenecektir. S, V, E, I kompartmanlarının beklenen değeri (43) modelinin MATLAB programı kullanılarak 100000 kez simüle edilmesiyle aşağıdaki gibi elde edilmektedir (Şekil 16).



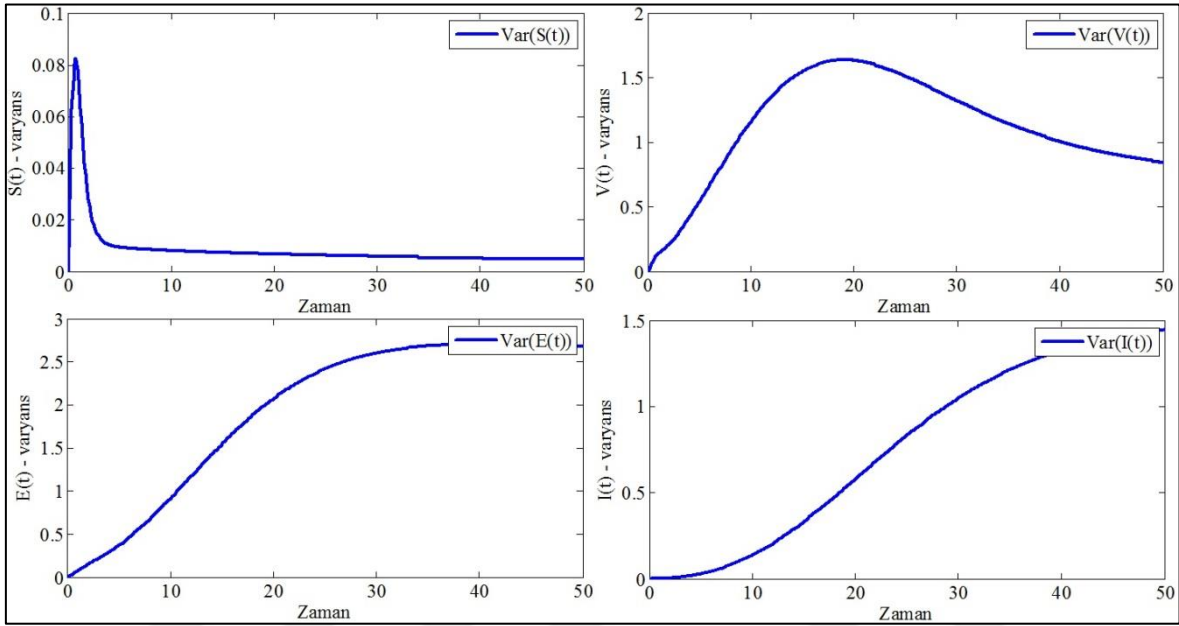
Şekil 16. SVEIR modelinin beklenen değerleri

SVEIR modelinin rastgele etkiler altında incelenmesi sonucu kompartmanlar için elde edilen beklenen değerlerin, modelin deterministik çözümü için elde edilen değerler ile benzer olduğu gözlemlenmektedir (t gün sayısını belirtmektedir). Şekil 15 ile verilen deterministik çözümlere göre kompartmanlar için aşağıdaki uç değerler Tablo 6'da verilmişti. Rastgele model için beklenen değerler ise benzer şekilde şu değerleri almaktadırlar: Hastalığa duyarlı insanların sayısını gösteren $S(t)$ değişkeninin beklenen değeri $t = 50$ anında 1.116 minimum, $t = 0$ anında 20 maksimum değerini almaktadır. Hastalığa karşı aşılanmış insanların sayısını gösteren $V(t)$ değişkeni $t = 50$ anında 6.57 minimum değerini, $t = 1.8$ anında 24.77 maksimum değerini almaktadır. Hastalığın gizli evresindeki insanların sayısını gösteren $E(t)$ değişkeni $t = 0$ anında 5 minimum değerini, $t = 28.1$ anında 20.88 maksimum değerini almaktadır. Hasta insanların sayısını gösteren $I(t)$ değişkeni $t = 0.1$ anında 4.965 minimum değerini, $t = 50$ anında 11.91 maksimum değerini almaktadır.

Beklenen değerlerden de görüldüğü gibi hastalığa duyarlı insanların sayısı (t gün sayısı olarak yorumlanmaktadır) sürecin ilk günlerinde büyük bir azalma yaşamaktadır. Aşılanan insan sayısındaki ani artış topluluğun hızlıca aşılandığını göstermektedir. Ancak modelleme için kullanılan parametreler daha önce belirtildiği gibi hastalığın çok ağır bir şekilde gerçekleştiği durumu belirtmektedir. Dolayısıyla $S(t)$ ve $V(t)$ değişkenlerinin beklentilerindeki azalmalara karşılık $E(t)$ ve $I(t)$ değişkenlerinin beklentilerindeki artışlar

bu durumu doğrulamaktadır. $E(t)$ ve $I(t)$ değişkenlerinin beklenen değerlerinin sürecin sonuna kadar arttığı şekilden de görülmektedir.

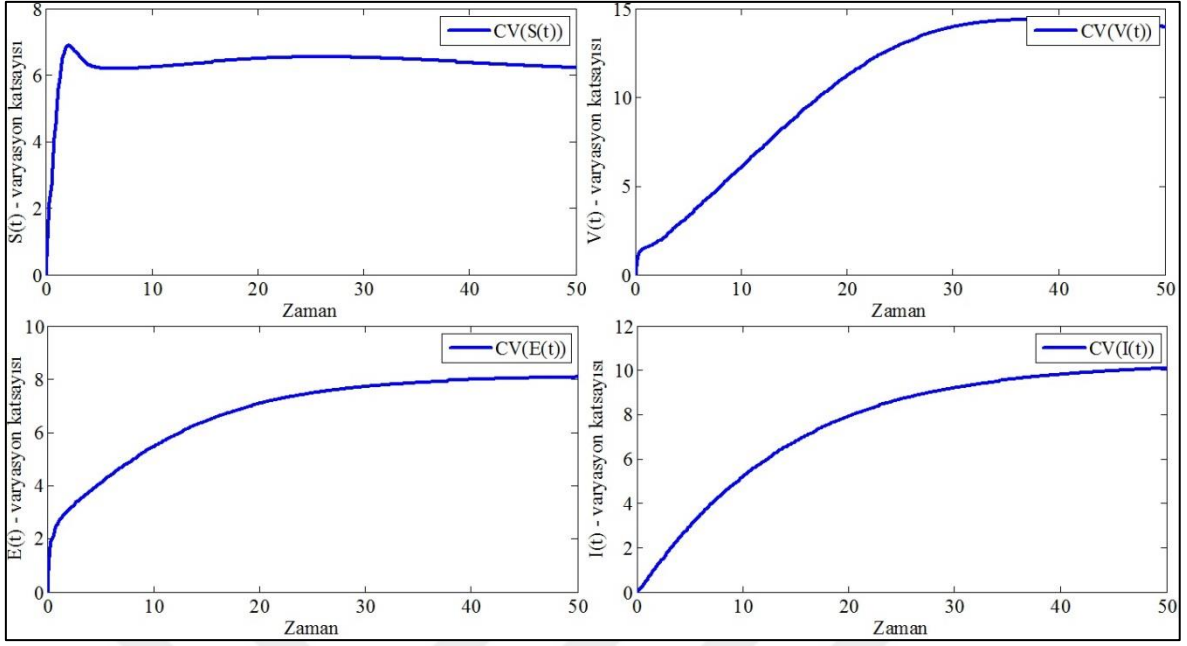
(43) modelinde $S(t), V(t), E(t), I(t)$ için elde edilen varyanslar aşağıdaki şekilde görülmektedir (Şekil 17).



Şekil 17. SVEIR modelinin varyansları

Rastgele modelin varyansları incelendiğinde $S(t)$ için minimum varyansın $t = 0$ anında 0 ile ve maksimum varyansın $t = 0.7$ anında 0.08246 ile elde edildiği görülmektedir. $V(t)$ için minimum varyans $t = 0$ anında 0 iken maksimum varyans $t = 19.2$ anında 1.637 olmaktadır. $E(t)$ için minimum varyans $t = 0$ anında 0 ile minimum değerini alırken $t = 39.3$ anında 2.689 maksimum değerini almaktadır. $I(t)$ için minimum varyans $t = 0$ anında 0 olmakta iken $t = 50$ anında 1.435 maksimum varyansı elde edilmektedir. Varyans için elde edilen sonuçlar kullanılarak aşağıdaki varyasyon katsayıları ve güven aralıkları ile kompartmanlardaki olası değişimler incelenecektir.

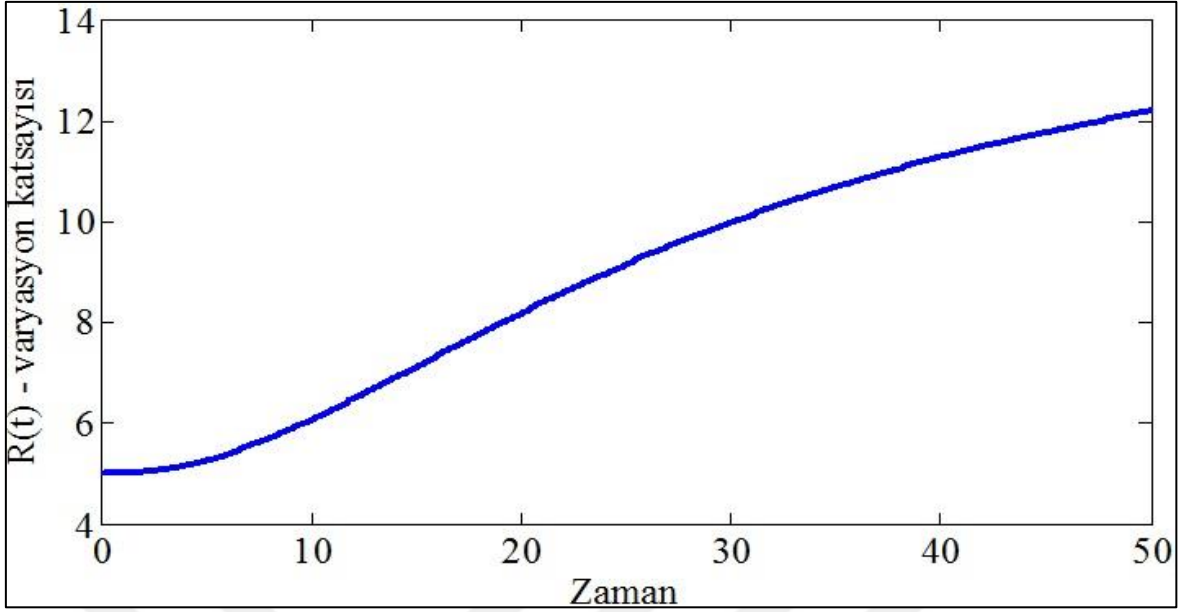
(43) modelinde $S(t), V(t), E(t), I(t)$ için elde edilen varyasyon katsayıları aşağıdaki şekilde görülmektedir (Şekil 18).



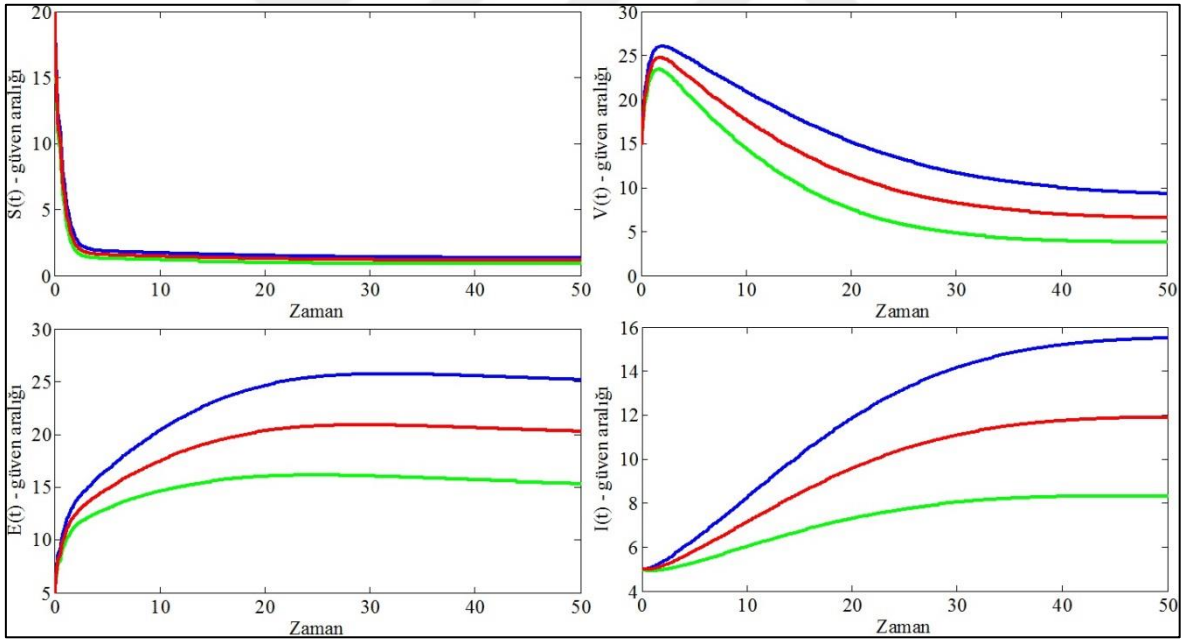
Şekil 18. SVEIR modelinin varyasyon katsayıları

$S(t)$ için varyasyon katsayısı $t = 0$ anında 0 minimum değerini ve $t = 2.2$ anında 6.902 maksimum değerini almaktadır. $V(t)$ değişkeni $t = 0$ anında 0 minimum değerini ve $t = 36.1$ anında 14.38 maksimum değerini almaktadır. $E(t)$ değişkeni $t = 0$ anında 0 minimum değerini ve $t = 50$ anında 8.051 maksimum değerini almaktadır. $I(t)$ değişkeni $t = 0.7$ anında 4.966 minimum değerini ve $t = 50$ anında 10.06 maksimum değerini almaktadır. $R(t)$ değişkeni için ise varyasyon katsayısı aşağıdaki gibi elde edilmektedir. (Şekil 19).

Rastgele model tüm parametreler %5 varyasyon katsayısına sahip olacak şekilde kurulduğu halde bu parametrelere bağlı olan kompartmanların çok değişken varyasyon katsayılarına sahip olduğu görülmektedir. S ve E kompartmanları en fazla değişkenliğe sahip oldukları günlerde yaklaşık %7 – %8 varyasyon katsayısına sahip iken V kompartmanı için bu değerin %14’ü aştığı görülmektedir. Dolayısıyla bu sonuçlardan V kompartmanı için elde edilecek deterministik sonuçlardaki hata paylarının daha fazla olmasının beklenmesi çıkarımı yapılabilir.



Şekil 19. R kompartmanının varyasyon katsayısı



Şekil 20. SVEIR modelinin güven aralıkları

(43) modelinde $S(t), V(t), E(t), I(t)$ için elde edilen güven aralıkları şekilde görülmektedir (Şekil 20). Rastgele model normal dağılıma sahip parametreler kullanılarak oluşturulduğundan üç standart sapma için elde edilen yukarıdaki güven aralıklarının %99.7 olasılıkla kompartmanların sonuçlarını içerdiği varsayılmaktadır. $S(t)$ için minimum değer $t = 46.5$ anında 0.9072 olarak elde edilirken maksimum değer $t = 0$

anında 20 olmaktadır. $V(t)$ için minimum değer $t = 50$ anında 3.82 iken maksimum değer $t = 2$ anında 26.1 olarak elde edilmektedir. $E(t)$ için minimum değer $t = 0$ anında 5 iken $t = 30.4$ anında 25.72 maksimum değeri elde edilmektedir. $I(t)$ için minimum değer $t = 1$ anında 4.912 olmakta iken maksimum değer $t = 50$ anında 15.51 olarak bulunmaktadır.

$N = S(t) + V(t) + E(t) + I(t) + R(t)$ koşulunu kullanarak kompartmanların toplam nüfustaki oranını belirleyebilir ve $R(t)$ için beklenen oranı simülasyon sonuçlarını kullanarak bulabiliriz. $t = 50$ için

$$S(50) = 1.116, V(50) = 6.57, E(50) = 20.28, I(50) = 11.91$$

olduğundan toplam nüfus $N = 45$ kullanılarak beklentiler

$$s(50) = \frac{1.116}{45} = 0.0248; v(50) = 0.146; e(50) = 0.4507; i(50) = 0.2647$$

olmaktadır. Dolayısıyla 50 günlük sürenin sonunda hastalığa duyarlı insanların oranı %2.48, aşılanmış insanların oranı %14.6, hastalığın gizli evresindeki insanların oranı %45.07, hasta insanların oranı ise %26.47 olmaktadır. Dolayısıyla $r(t) = R(t)/N$ için

$$r(50) = 1 - s(t) - v(t) - e(t) - i(t) = 1 - 0.0248 - 0.146 - 0.4507 - 0.2647$$

olduğundan $r(50) = 0.01138$ olmaktadır. Buradan iyileşmiş insanların oranının 50 gün sonunda yaklaşık %1.14 olmasının beklendiği görülmektedir.

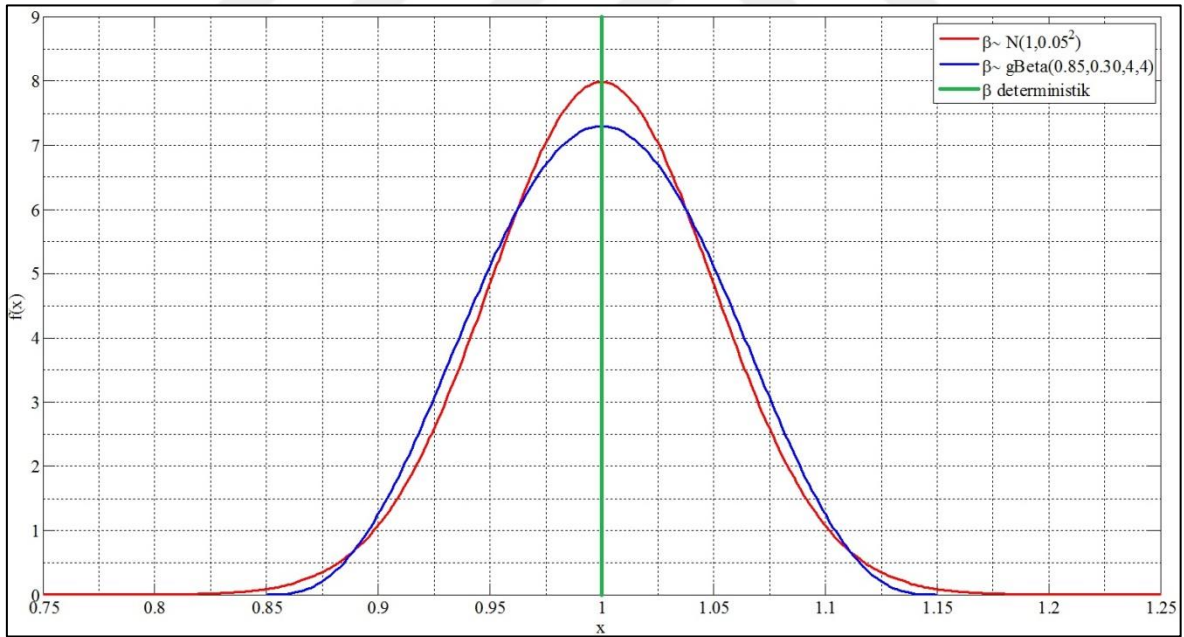
Kaynak çalışmada 45 insanlık bir topluluk için yapılan inceleme daha geniş kitleler için (örneği $N = 1000$ için) yapılarak belirli bölgelere veya ülkelere de uygulanabilir. Literatürde Çin nüfusu için $N = 1.36 \times 10^9$ kullanılarak yapılan kompartmanlı modelleme çalışmaları da mevcuttur [111].

Rastgele model için normal dağılımdan farklı olasılık dağılımlarına sahip rastgele etki terimlerinin de kullanılması mümkündür. Örnek olarak kullanılabilecek birçok olasılık dağılımı olsa da bu çalışmada normal dağılımla karşılaştırılmak üzere seçilecek olan dağılım genel Beta dağılımıdır. Beta dağılımı literatürde gümüşüğü verilerinin dağılımı ve HIV virüsünün yayılma olasılığının incelenmesinde kullanılmıştır [109, 119]. Biyokimyasal reaksiyonların modellenmesi için de kullanılmış olan Beta dağılımı [13], normal dağılıma benzer şekilde sürekli bir olasılık dağılımıdır. Bir X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{B(a, b)d^{a+b-1}} (x - c)^{a-1} (c + d - x)^{b-1}, x \in (c, c + d), a > 0, b > 0$$

şeklindeyse, X rastgele değişkeni genel Beta dağılımına sahiptir denir ($X \sim gBeta(c, d, a, b)$ olarak gösterilecektir) [13]. Burada a ve b dağılımın sırasıyla sol ve sağ şekil parametreleri iken c parametresi dağılımın konumunu belirlemek için ve d parametresi dağılımın açıklığını ölçmek için kullanılır. $B(a, b)$ ile Beta fonksiyonu gösterilmektedir. Normal dağılım ortalama değeri civarında simetrik olduğundan Beta dağılımında da simetrik bir dağılım elde etmek için $a = b$ seçimi yapılacaktır [46]. Bu şekilde deterministik modelde sabit bir değer olarak değerlendirilen model parametreleri, rastgele modellerde bu sabit değerın sağında ve solunda değerler alması olasılıkları eşit olan rastgele değişkenler olarak değerlendirilecektir (Şekil 21). Bu özelliklere sahip genel Beta dağılımının seçilmesindeki en önemli neden, sonsuz aralıkta değerler alabilen normal dağılım ile sınırlı bir aralıkta değerler alan bir olasılık dağılımının karşılaştırılmasıdır.

Örnek olarak (42) deterministik denkleminin sayısal analizinde $p = 1$ ile incelenen p parametresinin, (43) modelinde $p^* \sim N(1, 0.05^2)$ normal rastgele değişkeni ve Beta dağılımında nasıl davranış gösterdiği aşağıdaki şekilde görülebilir (Şekil 21).



Şekil 21. β parametresinin deterministik, normal ve beta dağılımları ile grafikleri

Genel Beta dağılımının konum parametresi c ve açıklığını belirleyen ölçek parametresi d seçilirken, bu rastgele değişkenin alacağı değerlerin kümesinin normal dağılımın değerler

kümesiyle mümkün olduğunca örtüşmesi amaçlanmıştır. μ ortalama ve σ standart sapmalı bir normal dağılıma sahip rastgele değişkenin aldığı değerlerin %99.73 olasılıkla

$$(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$$

aralığında olduğu bilinmektedir. Genel Beta dağılımına sahip bir rastgele değişkenin ise, dağılım sınırlı tanım kümesine sahip olduğundan, tüm değerleri

$$(c, c + d)$$

aralığındadır. Dolayısıyla β parametresi için normal dağılımda kullanılan μ, σ parametreleri ile genel Beta dağılımında kullanılan c, d parametreleri şekildeki gibi seçilerek rastgele değişkenlerin tanım kümeleri örtüştürülebilir.

Bunun için $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ aralığının açıklığı olan 6σ ile $(c, c + d)$ aralığının açıklığı olan d eşit olacak şekilde seçim yapılmalıdır. Bu örnek için $\beta \sim N(1, 0.05^2)$ olduğundan

$$6\sigma = 6 \times 0.05 = 0.30 = d$$

olmaktadır. Genel Beta dağılımının, normal dağılıma denk olarak parametrenin ortalama değerinin civarında eşit dağılımlı olması için, $a = b$ seçilmiştir (genel Beta dağılımı $a = b > 1$ olduğunda normal dağılım gibi çan şeklinde olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olabilir). c konum parametresi ise, açıklığın yarısı β 'nin deterministik değerinin sonunda kalacak, yarısı sağında kalacak şekilde $c = 0.85$ olarak belirlenmiştir.

Bu şekilde $(c = 0.85, d = 0.30, a = 4, b = 4)$ parametrelili genel Beta dağılımına sahip rastgele β parametresinin değerlerinin tamamı

$$(0.85, 1.15)$$

aralığında iken, $(\mu = 1, \sigma = 0.05)$ parametrelerine sahip normal dağılıma sahip rastgele β parametresinin değerleri %99.73 olasılıkla aynı $(0.85, 1.15)$ aralığındadır. Modelin tüm parametreleri, ortalamaları deterministik değerlerle ve tanım aralıkları normal dağılımın %99.73 olasılıklı tanım aralığıyla aynı olacak şekilde genel Beta dağılımına sahip rastgele değişkenler haline getirilecektir.

Bir Z rastgele değişkeni, olasılık yoğunluk fonksiyonu [47]

$$f(z) = \frac{1}{B(a, b)} z^{a-1} (1 - x)^{b-1}, z \in [0, 1], a > 0, b > 0$$

şeklinde ise standart Beta dağılımına sahiptir denir ve $Z \sim Beta(a, b)$ ile gösterilir. Burada $B(a, b)$ beta fonksiyonudur ve a, b parametreleri sol ve sağ şekil parametreleridir. Standart Beta dağılımına sahip rastgele değişken $[0, 1]$ aralığında değerler alır ve $a = b$ için simetriktir. Genel Beta dağılımına sahip bir X rastgele değişkeni ($X \sim gBeta(c, d, a, b)$)

$$X = c + dZ$$

şeklinde bir standart Beta dağılımına sahip rastgele değişken kullanılarak gösterilebilmektedir. Standart Beta dağılımına sahip bir Z rastgele değişkeni için beklenen değer ve varyans

$$E(Z) = \frac{a}{a+b}; \text{Var}(Z) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

[Forbes et al., 2011] olduğundan $X = c + dZ$ eşitliği ve beklenen değer operatörünün özellikleri ile genel Beta dağılımının beklenen değer ve varyansı

$$E(X) = E(c + dZ) = c + dE(Z) = c + d \frac{a}{a+b},$$

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(c + dZ) = d^2 \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

şeklinde elde edilir.

(43) modelinin parametreleri $\{\Lambda^{**}, d^{**}, p^{**}, \beta^{**}, \theta^{**}, \varepsilon^{**}, d_I^{**}, \gamma^{**}\}$ şeklinde genel Beta dağılımına sahip rastgele değişkenler haline getirilecektir. Her rastgele değişkenin normal dağılıma sahip olduğu durumda standart sapması $s_i, i = \overline{1,8}$, deterministik değeri ve normal dağılımının ortalaması olan deterministik değerinin %5'i olarak belirlenmiştir. Dolayısıyla genel Beta dağılımı için

$$\Lambda^{**} = c_1 + d_1 Z_1,$$

$$d^{**} = c_2 + d_2 Z_2,$$

$$p^{**} = c_3 + d_3 Z_3,$$

$$\beta^{**} = c_4 + d_4 Z_4,$$

$$\theta^{**} = c_5 + d_5 Z_5,$$

$$\varepsilon^{**} = c_6 + d_6 Z_6,$$

$$d_I^{**} = c_7 + d_7 Z_7,$$

$$\gamma^{**} = c_8 + d_8 Z_8$$

şeklinde $c_i, i = \overline{1,8}$ konum parametreleri, $d_i, i = \overline{1,8}$ ölçek parametreleri ve bağımsız $Z_i, i = \overline{1,8}$ standart beta rastgele değişkenleri ile tanımlanacak olan yeni rastgele parametrelerde $c_i, d_i, i = \overline{1,8}$ aşağıdaki yöntemle belirlenir:

$$\begin{aligned}
\Lambda^* &\sim N(2.5, 0.125^2), \Lambda^{**} = c_1 + d_1 Z_1 \\
\Rightarrow d_1 &= 6 \times s_1 = 6 \times \left(\Lambda \times \frac{5}{100} \right) = 6 \times \left(2.5 \times \frac{5}{100} \right) = \Lambda \times \frac{3}{10} = \frac{3}{4}, \\
\Rightarrow c_1 &= \Lambda - \frac{d_1}{2} = \Lambda - \frac{\left(\Lambda \times \frac{3}{10} \right)}{2} = \Lambda \times \frac{17}{20} = 2.5 - \frac{3}{8} = \frac{17}{8}, \\
\Rightarrow \Lambda^{**} &\sim gBeta\left(\frac{17}{8}, \frac{3}{4}, 4, 4\right).
\end{aligned}$$

Bu durumda her bir $\{\Lambda^{**}, d^{**}, p^{**}, \beta^{**}, \theta^{**}, \varepsilon^{**}, d_I^{**}, \gamma^{**}\}$ parametresi için c_i değeri deterministik değerinin $\frac{17}{20}$ 'si, d_i değeri ise deterministik değerinin $\frac{3}{10}$ 'u olmalıdır. Her genel Beta dağılımına sahip rastgele değişken için normal dağılımla uyumlu bir olasılık yoğunluk fonksiyonu yakalamak adına $a_i = b_i = 4$ olarak seçilmiştir.

$$\begin{aligned}
d^* &\sim N(0.0551, 0.002755^2), d^{**} = c_2 + d_2 Z_2 \\
\Rightarrow d^{**} &\sim gBeta(0.046835, 0.01653, 4, 4), \\
p^* &\sim N(1, 0.05^2), p^{**} = c_3 + d_3 Z_3 \Rightarrow p^{**} \sim gBeta\left(\frac{17}{20}, \frac{3}{10}, 4, 4\right), \\
\beta^* &\sim N(0.1, 0.005^2), \beta^{**} = c_4 + d_4 Z_4 \Rightarrow \beta^{**} \sim gBeta\left(\frac{17}{200}, \frac{3}{100}, 4, 4\right), \\
\theta^* &\sim N(0.1, 0.005^2), \theta^{**} = c_5 + d_5 Z_5 \Rightarrow \theta^{**} \sim gBeta\left(\frac{17}{200}, \frac{3}{100}, 4, 4\right), \\
\varepsilon^* &\sim N(0.05, 0.0025^2), \varepsilon^{**} = c_6 + d_6 Z_6 \Rightarrow \varepsilon^{**} \sim gBeta\left(\frac{17}{400}, \frac{3}{200}, 4, 4\right), \\
d_I^* &\sim N(0.08, 0.004^2), d_I^{**} = c_7 + d_7 Z_7 \Rightarrow d_I^{**} \sim gBeta\left(\frac{17}{250}, \frac{3}{125}, 4, 4\right), \\
\gamma^* &\sim N(0.005, 0.00025^2), \gamma^{**} = c_8 + d_8 Z_8 \Rightarrow \gamma^{**} \sim gBeta\left(\frac{17}{4000}, \frac{3}{2000}, 4, 4\right).
\end{aligned}$$

Bu durumda $\{\Lambda^{**}, d^{**}, p^{**}, \beta^{**}, \theta^{**}, \varepsilon^{**}, d_I^{**}, \gamma^{**}\}$ rastgele parametrelerinin beklenen değerleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$X \sim gBeta(c, d, a, b) \text{ için } E(X) = c + d \frac{a}{a+b} \text{ ve } Var(X) = d^2 \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} \text{ olduğundan:}$$

$$\Lambda^{**} \sim gBeta\left(\frac{17}{8}, \frac{3}{4}, 4, 4\right)$$

$$\Rightarrow E(\Lambda^{**}) = c_1 + d_1 \frac{a}{a+b} = c_1 + \frac{d_1}{2} = \frac{17}{8} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = 2.5 = \Lambda,$$

$$\begin{aligned} Var(\Lambda^{**}) &= d_1^2 \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} = d_1^2 \frac{1}{36} \\ &= \left(\Lambda \times \frac{3}{10}\right)^2 \times \frac{1}{36} = \Lambda^2 \times \frac{1}{400} = \frac{1}{64}. \end{aligned}$$

Dolayısıyla $\Lambda^{**} \sim gBeta\left(\frac{17}{8}, \frac{3}{4}, 4, 4\right)$ genel Beta dağılımına sahip rastgele değişkeninin beklenen değeri, normal dağılıma sahip olduğu halinin beklenen değeriyle aynı iken, varyansı ise bu değer in karesinin $\frac{1}{400}$ 'üdür. Buradan standart sapması

$$std(\Lambda^{**}) = \sqrt{Var(\Lambda^{**})} = \sqrt{\Lambda^2 \times \frac{1}{400}} = \frac{\Lambda}{20}$$

olarak elde edilir. Varyasyon katsayısı da

$$CV = 100 \times \frac{std(\Lambda^{**})}{E(\Lambda^{**})} = 100 \times \frac{\frac{\Lambda}{20}}{\Lambda} = 5$$

olur. Böylece, normal dağılıma sahip parametrelere benzer şekilde, ortalama değerleri ve varyasyon katsayıları aynı olan genel Beta dağılımına sahip rastgele $\{\Lambda^{**}, d^{**}, p^{**}, \beta^{**}, \theta^{**}, \varepsilon^{**}, d_l^{**}, \gamma^{**}\}$ parametreleri oluşturulmuş olur. Bu durum diğer parametreler için de gösterilecek olursa:

$$d^{**} \sim gBeta(0.046835, 0.01653, 4, 4) \Rightarrow E(d^{**}) = c_2 + \frac{d_2}{2} = 0.0551 = d,$$

$$\Rightarrow Var(d^{**}) = d_2^2 \frac{1}{36} = (0.01653)^2 \times \frac{1}{36} = 7.590025 \times 10^{-6}.$$

$$p^{**} \sim gBeta\left(\frac{17}{20}, \frac{3}{10}, 4, 4\right) \Rightarrow E(p^{**}) = c_3 + \frac{d_3}{2} = \frac{17}{20} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{2} = 1 = p,$$

$$\Rightarrow Var(p^{**}) = d_3^2 \frac{1}{36} = \frac{9}{100} \times \frac{1}{36} = \frac{1}{400}.$$

$$\beta^{**} \sim gBeta\left(\frac{17}{200}, \frac{3}{100}, 4, 4\right) \Rightarrow E(\beta^{**}) = c_4 + \frac{d_4}{2} = \frac{17}{200} + \frac{3}{100} \times \frac{1}{2} = 0.01 = \beta,$$

$$\Rightarrow Var(\beta^{**}) = d_4^2 \frac{1}{36} = \frac{1}{40000}.$$

$$\theta^{**} \sim gBeta\left(\frac{17}{200}, \frac{3}{100}, 4, 4\right) \Rightarrow E(\theta^{**}) = 0.01 = \theta, Var(\theta^{**}) = \frac{1}{40000}.$$

$$\varepsilon^{**} \sim gBeta\left(\frac{17}{400}, \frac{3}{200}, 4, 4\right) \Rightarrow E(\varepsilon^{**}) = c_6 + \frac{d_6}{2} = \frac{17}{400} + \frac{3}{200} \times \frac{1}{2} = 0.05 = \varepsilon,$$

$$\Rightarrow Var(\varepsilon^{**}) = d_6^2 \frac{1}{36} = \left(\frac{3}{200}\right)^2 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{160000}.$$

$$d_I^{**} \sim gBeta\left(\frac{17}{250}, \frac{3}{125}, 4, 4\right) \Rightarrow E(d_I^{**}) = 0.08 = d_I; Var(d_I^{**}) = \frac{1}{62500}.$$

$$\gamma^{**} \sim gBeta\left(\frac{17}{4000}, \frac{3}{2000}, 4, 4\right) \Rightarrow E(\gamma^{**}) = 0.005; Var(\gamma^{**}) = \frac{1}{1.6 \times 10^7}.$$

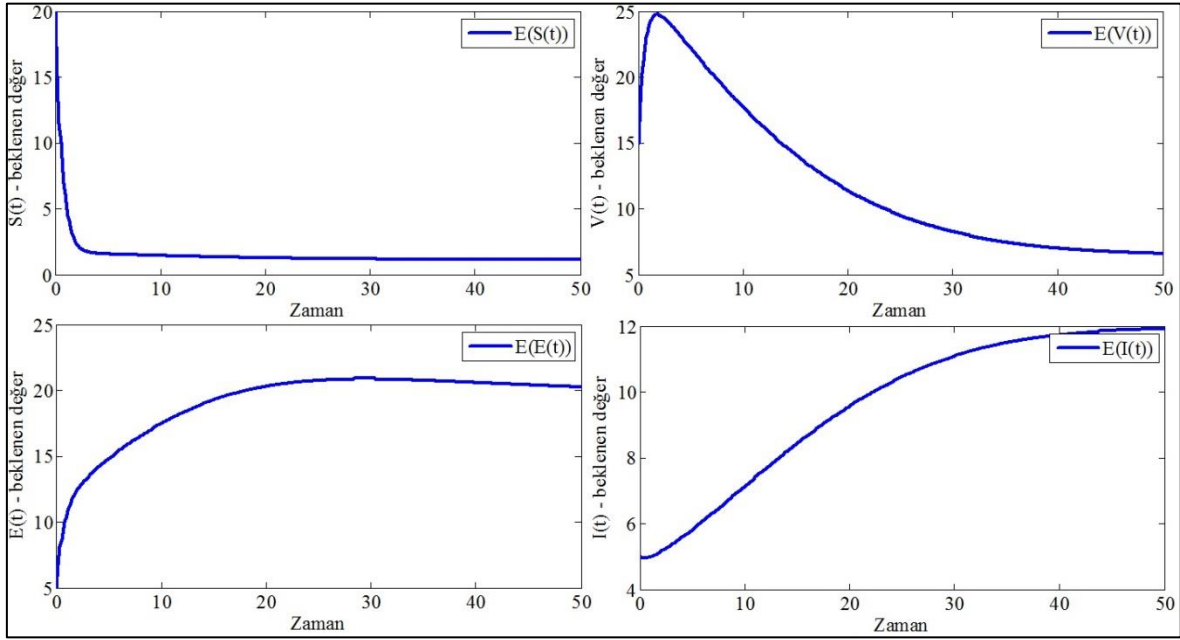
Bu özelliklere sahip olan parametrelerle oluşturulan

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \Lambda^{**} - (d^{**} + p^{**})S - \beta^{**}SI, \\ \frac{dV}{dt} &= p^{**}S - d^{**}V - \theta^{**}\beta^{**}VI, \\ \frac{dE}{dt} &= \beta^{**}I(S + \theta^{**}V) - (d^{**} + \varepsilon^{**})E, \\ \frac{dI}{dt} &= \varepsilon^{**}E - (d_I^{**} + \gamma^{**})I, \end{aligned} \tag{53}$$

modelinin simülasyonu ile $S(t), V(t), E(t), I(t), R(t)$ değişkenlerinin genel Beta dağılımına sahip rastgele etkiler altındaki davranışlarını inceleyebiliriz. Parametreler yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \left(\frac{17}{8} + \frac{3}{4}Z_1\right) - \left((0.046835 + 0.01653Z_2) + \left(\frac{17}{20} + \frac{3}{10}Z_3\right)\right)S \\ &\quad - \left(\frac{17}{200} + \frac{3}{100}Z_4\right)SI, \\ \frac{dV}{dt} &= \left(\frac{17}{20} + \frac{3}{10}Z_3\right)S - (0.046835 + 0.01653Z_2)V \\ &\quad - \left(\frac{17}{200} + \frac{3}{100}Z_5\right)\left(\frac{17}{200} + \frac{3}{100}Z_4\right)VI, \\ \frac{dE}{dt} &= \left(\frac{17}{200} + \frac{3}{100}Z_4\right)I\left(S + \left(\frac{17}{200} + \frac{3}{100}Z_5\right)V\right) \\ &\quad - \left((0.046835 + 0.01653Z_2) + \left(\frac{17}{400} + \frac{3}{200}Z_6\right)\right)E, \\ \frac{dI}{dt} &= \left(\frac{17}{400} + \frac{3}{200}Z_6\right)E - \left(\left(\frac{17}{250} + \frac{3}{125}Z_7\right) + \left(\frac{17}{4000} + \frac{3}{2000}Z_8\right)\right)I \end{aligned} \tag{54}$$

rastgele modeli elde edilmektedir. Bu modelin $Z_i, i = \overline{1,8}$ birbirinden bağımsız (4,4) parametrelili standart Beta rastgele değişkenlerinin oluşturulmasıyla MATLAB ile simülasyonu yapılacaktır. 100000 simülasyon sonucunda (40) modelinin sayısal karakteristikleri aşağıdaki gibi elde edilir.



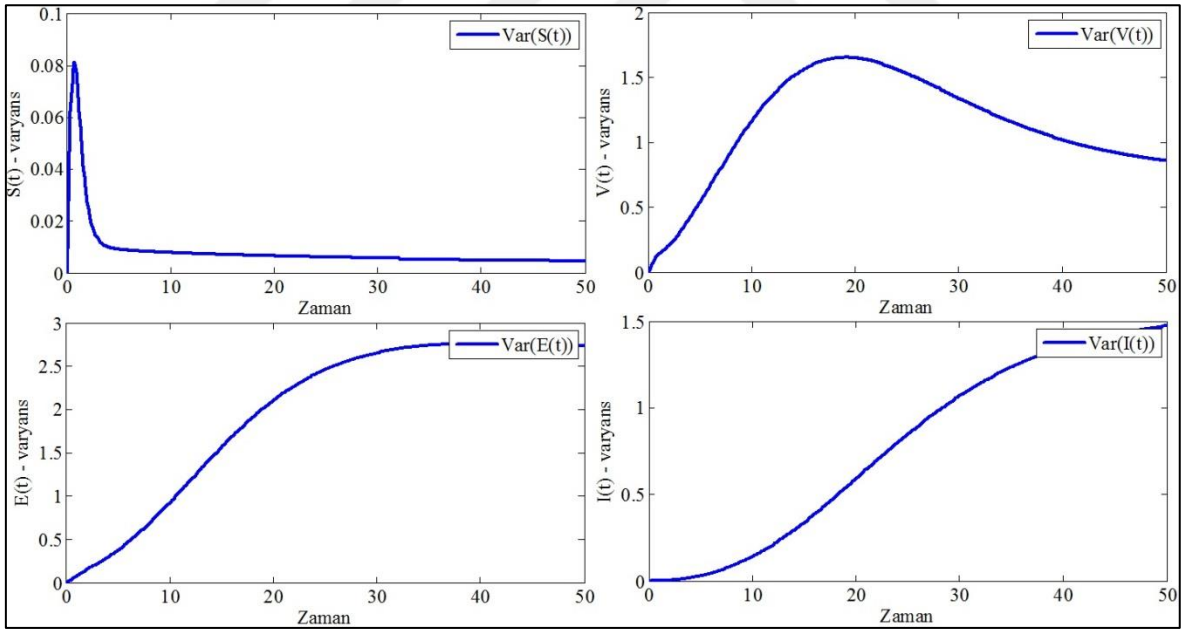
Şekil 22. SVEIR modelinin genel Beta etkilerle beklenen değerleri

(54) modelinin belirtilen özelliklere sahip $\{\Lambda^{**}, d^{**}, p^{**}, \beta^{**}, \theta^{**}, \varepsilon^{**}, d_I^{**}, \gamma^{**}\}$ genel Beta dağılımına sahip rastgele parametreleri için beklenen değerleri şekilde gösterilmektedir (Şekil 22).

Genel Beta dağılımına sahip rastgele parametreler için normal dağılımla hemen hemen aynı tanım aralığı ile eşit ortalama ve varyans belirlenmesi, iki rastgele modelin sayısal karakteristiklerinin benzer şekilde elde edilmesine yol açmıştır. $S(t)$ için beklenen değer $t = 50$ anında 1.117 minimum değerini, $t = 0$ anında 20 maksimum değerini almaktadır. $V(t)$ için $t = 50$ anında 6.588 minimum değeri elde edilirken $t = 1.9$ anında 24.78 maksimum değeri bulunmuştur. $E(t)$ değişkeni $t = 0$ anında 5 minimum değerini alırken $t = 28.2$ anında 20.89 maksimum değerini almaktadır. $I(t)$ değişkeni $t = 0.4$ anında 4.965 minimum değerini alırken $t = 50$ anında 11.91 maksimum değerini almaktadır.

(54) modelinde $S(t), V(t), E(t), I(t)$ için elde edilen varyanslar aşağıdaki şekilde görülmektedir (Şekil 23).

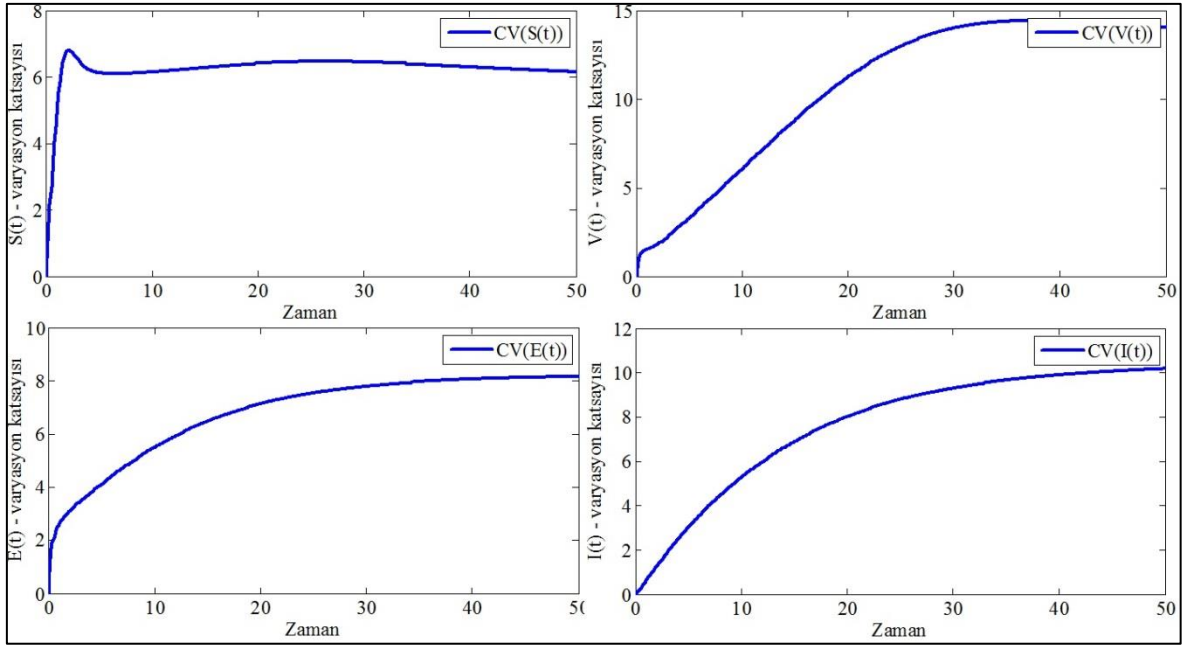
Genel Beta dağılımına sahip rastgele etkiler altında da normal dağılıma sahip rastgele etkiler altındaki varyans değerlerine benzer sonuçlara ulaşılmıştır. $S(t)$ hastalığa duyarlı insanların varyansı $t = 0$ anında 0 minimum değerini ve $t = 0.7$ anında 0.08114 maksimum değerini elde etmiştir. $V(t)$ aşılamanın insanların varyansı minimum değeri $t = 0$ anında 0 minimum değerini elde ederken $t = 18.9$ anında 1.668 maksimum değerini almıştır. $E(t)$ hastalığın gizli evresindeki insanların varyansı $t = 0$ anında 0 minimum değerini ve $t = 39.3$ anında 2.756 maksimum değerini almıştır. $I(t)$ hasta insanların varyansının minimum değeri $t = 0$ anında 0 olarak bulunurken $t = 50$ anında 1.473 olarak gerçekleşmiştir. Genel Beta dağılımına sahip rastgele etkiler altında varyansların değişimleri normal dağılıma sahip rastgele etkilerin oluşturduğu varyansla benzer olsa da Beta dağılımına sahip etkiler için $V(t), E(t)$ ve $I(t)$ değişkenlerinde varyansın bir miktar daha fazla olduğu görülmektedir.



Şekil 23. SVEIR modelinin genel Beta etkilerle varyansları

(54) modelinde $S(t), V(t), E(t), I(t)$ için elde edilen varyasyon katsayıları aşağıdaki şekilde görülmektedir (Şekil 24). Varyasyon katsayılarındaki değişimler de dolaylı olarak beklenen değerler ve varyanslar kullanılarak elde edildiklerinden, her iki rastgele etki için

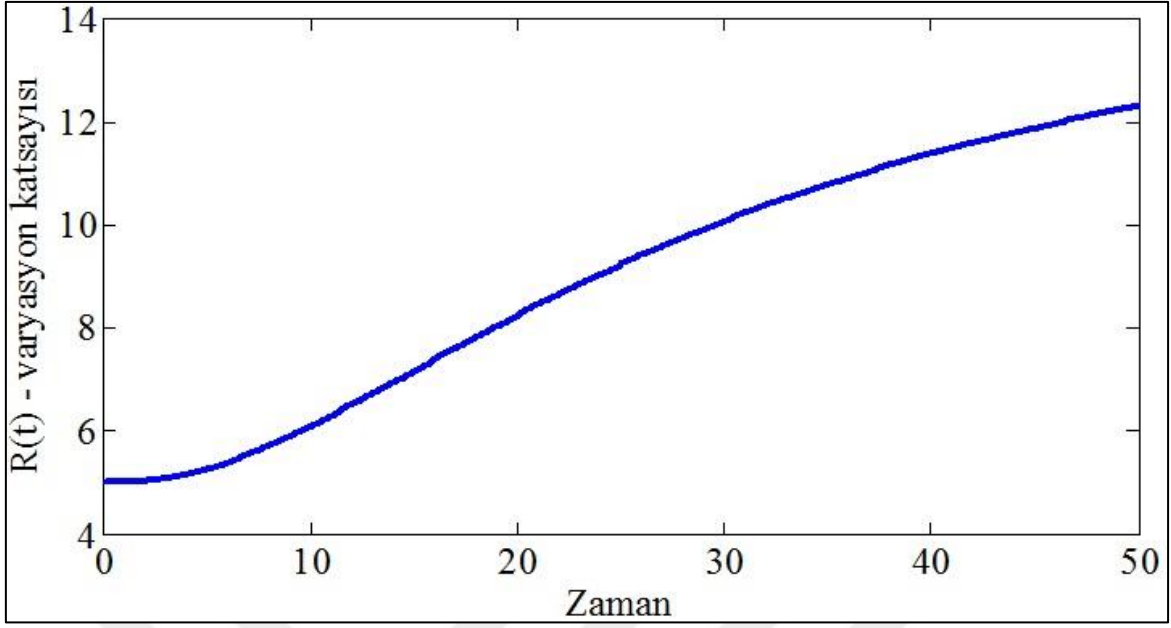
benzer grafikler meydana gelmiştir. Hastalığa duyarlı insanların $S(t)$ varyasyon katsayısı $t = 0$ anında 0 minimum değerini alırken $t = 2.2$ anında 6.84 maksimum değerini almaktadır. Aşılınmış insanların $V(t)$ varyasyon katsayısı $t = 0$ anında 0 minimum değerini ve $t = 37.6$ anında 14.53 maksimum değerini almaktadır. Hastalığın gizli evresindeki insanların $E(t)$ varyasyon katsayısı $t = 0$ anında 0 minimum değerini ve $t = 50$ anında 8.148 maksimum değerini almaktadır. Hasta insanların $I(t)$ varyasyon katsayısı minimum değerini $t = 0$ anında 0 ile ve maksimum değerini $t = 50$ anında 10.19 ile almaktadır.



Şekil 24. SVEIR modelinin genel Beta etkilerle varyasyon katsayıları

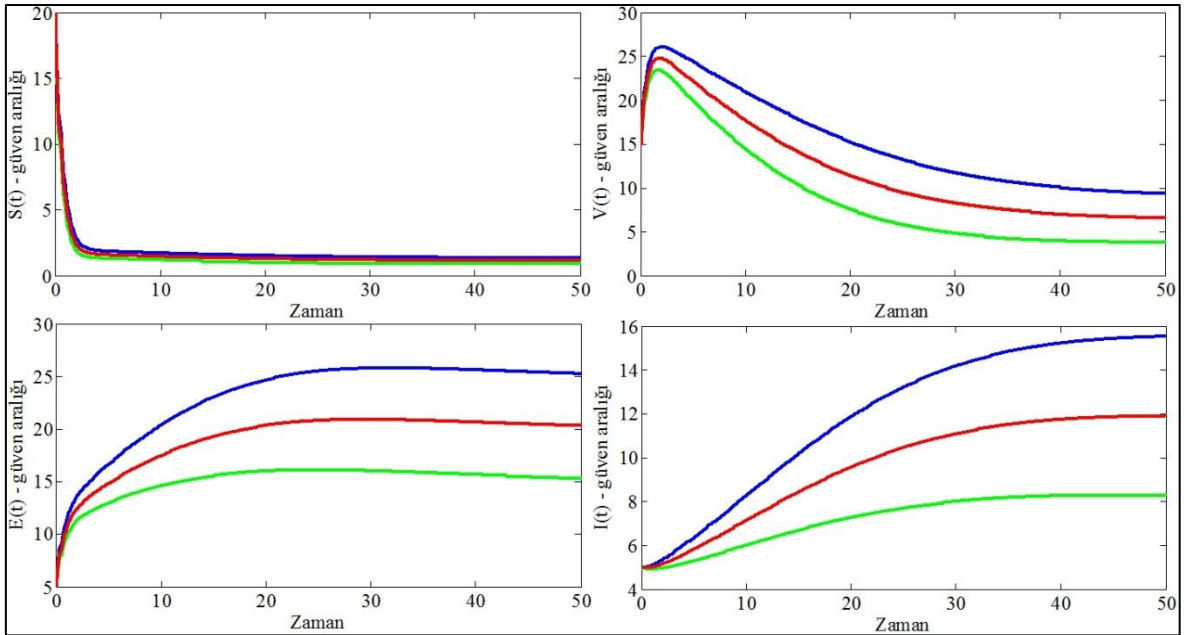
Tablo 9. SVEIR modelinin varyasyon katsayıları için maksimum değerler

	Normal dağılım ile varyasyon katsayısı	G. Beta dağılımı ile varyasyon katsayısı
$S(t)$	%6.902	%6.84
$V(t)$	%14.38	%14.53
$E(t)$	%8.051	%8.148
$I(t)$	%10.06	%10.19
$R(t)$	%12.1	%12.24



Şekil 25. R kompartmanının Beta etkilerle varyasyon katsayısı

Hastalıktan iyileşen insanların varyasyon katsayısının minimum değerini $t = 0.9$ anında 4.991 ile ve maksimum değerini $t = 50$ ile 12.24 ile aldığı görülmektedir (Şekil 25). Normal ve genel Beta dağılımlarına sahip rastgele etkilerin maksimum değerleri tabloda karşılaştırılmaktadır (Tablo 9).



Şekil 26. SVEIR modelinin genel Beta etkilerle güven aralıkları

(54) modelinde $S(t), V(t), E(t), I(t)$ için elde edilen güven aralıkları şekilde görülmektedir (Şekil 26).

Şekildeki güven aralıkları normal dağılıma benzer şekilde kompartmanların beklenen değerlerinin üç standart sapma civarlarında oluşturulmuştur ($S(t)$ için):

$$(E(S(t)) - 3 \cdot std(S(t)), E(S(t)) + 3 \cdot std(S(t))).$$

Güven aralıkları için mavi eğriler aralığın üst sınırını belirtirken yeşil çizgiler alt sınırı göstermektedir. $S(t)$ için güven aralığı minimum değerini $t = 45.8$ anında 0.9097 olarak ve maksimum değerini $t = 0$ anında 20 maksimum olarak elde etmektedir. $V(t)$ için güven aralığı $t = 50$ anında 3.8 minimum değerini ve $t = 2.1$ anında 26.11 maksimum değerini almaktadır. $E(t)$ için güven aralığı $t = 0$ anında 5 minimum değerini ve $t = 30.8$ anında 25.79 maksimum değerini almaktadır. $I(t)$ için güven aralığı $t = 2$ anında 4.909 minimum değerini ve $t = 50$ anında 15.55 maksimum değerini almaktadır.

$R(t)$ için sürecin sonundaki beklenen değer ilk duruma benzer şekilde diğer kompartmanların beklenen değerleri kullanılarak elde edilebilir. = 50 için

$$S(50) = 1.117, V(50) = 6.588, E(50) = 20.34, I(50) = 11.91$$

olduğundan toplam nüfus $N = 45$ kullanılarak

$$s(50) = \frac{1.117}{45} = 0.02482; v(50) = 0.1464; e(50) = 0.452; i(50) = 0.2647$$

olmaktadır. Dolayısıyla $r(t) = R(t)/N$ için

$$\begin{aligned} r(50) &= 1 - s(t) - v(t) - e(t) - i(t) \\ &= 1 - 0.02482 - 0.1464 - 0.452 - 0.2647 \end{aligned}$$

olduğundan $r(50) = 0.011208$ olmaktadır. Normal dağılıma sahip rastgele etkiler için 50 gün sonunda iyileşmiş insanların oranı %1.14 olarak elde edilmişken genel Beta dağılımı için bu değer %1.12 olarak bulunmuştur.

Genel Beta dağılımına sahip bir X rastgele değişkeni standart Beta dağılımına sahip bir Z rastgele değişkeni ile $X = c + dZ$ şeklinde gösterilebildiğine göre, X rastgele değişkeninin yüksek dereceli momentleri için

$$E(X^k) = E((c + dZ)^k)$$

gösterimi kullanılabilir. Standart Beta dağılımına sahip Z değişkeninin momentleri

$$E(Z^k) = \frac{a(a+1) \dots (a+(k-1))}{(a+b)(a+b+1) \dots (a+b+(k-1))}, k = 1, 2, \dots$$

şeklindedir [47]. Standart Beta dağılımına sahip Z değişkeni, $a = b = 4$ olduğundan,

$$E(Z) = \frac{a}{a+b} = \frac{1}{2}; E(Z^2) = \frac{4.5}{8.9} = \frac{5}{18};$$

$$E(Z^3) = \frac{4.5.6}{8.9.10} = \frac{1}{6}; E(Z^4) = \frac{4.5.6.7}{8.9.10.11} = \frac{7}{66}.$$

Dolayısıyla genel Beta dağılımına sahip değişken için

$$E(X) = E((c + dZ)) = c + dE(Z) = c + d\frac{a}{a+b} = c + \frac{d}{2};$$

$$E(X^2) = E((c + dZ)^2) = c^2 + 2cdE(Z) + d^2E(Z^2) = c^2 + cd + \frac{5d^2}{18};$$

$$E(X^3) = E((c + dZ)^3) = c^3 + 3c^2dE(Z) + 3cd^2E(Z^2) + d^3E(Z^3)$$

$$= c^3 + \frac{3c^2d}{2} + \frac{5cd^2}{6} + \frac{d^3}{6};$$

$$E(X^4) = E((c + dZ)^4)$$

$$= c^4 + 4c^3dE(Z) + 6c^2d^2E(Z^2) + 4cd^3E(Z^3) + d^4E(Z^4)$$

$$= c^4 + 2c^3d + \frac{5}{3}c^2d^2 + \frac{2}{3}cd^3 + \frac{7}{66}d^4.$$

Bu durumda genel Beta dağılımına sahip rastgele parametrelerin momentleri:

$$\Lambda^{**} \sim gBeta\left(\frac{17}{8}, \frac{3}{4}, 4, 4\right) \Rightarrow E(\Lambda^{**}) = 2.5, E(\Lambda^{**2}) = 6.265625,$$

$$E(\Lambda^{**3}) = 15.7421875, E(\Lambda^{**4}) = 38.590687144886367.$$

$$d^{**} \sim gBeta(0.046835, 0.01653, 4, 4) \Rightarrow E(d^{**}) = 0.0551,$$

$$E(d^{**2}) \simeq 0.003044, E(d^{**3}) \simeq 1.6854 \times 10^{-4}, E(d^{**4}) = 8.3733 \times 10^{-6},$$

$$p^{**} \sim gBeta\left(\frac{17}{20}, \frac{3}{10}, 4, 4\right) \Rightarrow E(p^{**}) = 1, E(p^{**2}) = 1.0025,$$

$$E(p^{**3}) = 1.0075, E(p^{**4}) \simeq 0.9392,$$

$$\beta^{**} \sim gBeta\left(\frac{17}{200}, \frac{3}{100}, 4, 4\right) \Rightarrow E(\beta^{**}) = 0.1, E(\beta^{**2}) = 0.010025,$$

$$E(\beta^{**3}) = 0.0010075, E(\beta^{**4}) \simeq 9.09891 \times 10^{-5},$$

$$\theta^{**} \sim gBeta\left(\frac{17}{200}, \frac{3}{100}, 4, 4\right) \Rightarrow E(\theta^{**}) = 0.1, E(\theta^{**2}) = 0.010025,$$

$$E(\theta^{**3}) = 0.0010075, E(\theta^{**4}) \simeq 9.09891 \times 10^{-5},$$

$$\varepsilon^{**} \sim gBeta\left(\frac{17}{400}, \frac{3}{200}, 4, 4\right) \Rightarrow E(\varepsilon^{**}) = 0.05, E(\varepsilon^{**2}) = 0.00250625,$$

$$E(\varepsilon^{**3}) \simeq 1.2594 \times 10^{-4}, E(\varepsilon^{**4}) \simeq 5.6766 \times 10^{-6},$$

$$d_I^{**} \sim gBeta\left(\frac{17}{250}, \frac{3}{125}, 4, 4\right) \Rightarrow E(d_I^{**}) = 0.08, E(d_I^{**2}) = 0.006416,$$

$$E(d_I^{**3}) = 5.1584 \times 10^{-4}, E(d_I^{**4}) \simeq 3.7243 \times 10^{-5},$$

$$\gamma^{**} \sim gBeta\left(\frac{17}{4000}, \frac{3}{2000}, 4, 4\right) \Rightarrow E(\gamma^{**}) = 0.005,$$

$$E(\gamma^{**2}) = 2.50625 \times 10^{-5}, E(\gamma^{**3}) \simeq 1.2594 \times 10^{-5},$$

$$E(\gamma^{**4}) \simeq 5.6675 \times 10^{-10}.$$

Bu momentler kullanılarak (46) denklem sistemi kullanılarak elde edilen ($n = 5$ için)

$$E(I(t)) = \sum_{k=0}^{n-1} E(I(k)) t^k; E(R(t)) = \sum_{k=0}^{n-1} E(R(k)) t^k$$

yaklaşık beklenen değerleri ile diğer kompartmanlar için beklenen değer ve varyansların yaklaşık formülleri hesaplanabilir. Normal dağılım için (48) eşitliğinde

$$E(I(t)) = 5 - 0.175t + 0.26307453125t^2 - 0.131148360545833t^2 \\ + 0.054008971778864t^4.$$

şeklinde bulunan $I(t)$ beklenen değeri genel Beta dağılımına sahip olduğu durumda

$$E(I(t)) = 5 - 0.175t + 0.26307453125t^2 - 0.131148360545833t^3 \\ + 0.054008208130904t^4. \quad (55)$$

şeklinde elde edilmektedir. Benzer şekilde genel Beta dağılım durumunda $R(t)$ için (51) ile elde edilen yaklaşık beklenti

$$E(R(t)) = 0.025t - 0.00112640625t^2 + 0.0004418316219875001t^3 \\ - 0.0001702643487476519t^4$$

şeklinde elde edilmektedir. Genel Beta dağılımına sahip rastgele etkiler için tekrar normal dağılım için bulunan yaklaşımlara oldukça yakın yaklaşımlar elde edilmiştir. $I(t)$ rastgele Diferansiyel dönüşüm yöntemi ile elde edilen yaklaşık beklenen değer (55), [3,2] mertebesinden Laplace-Pade yöntemi ile aşağıdaki gibi modifiye edilebilir:

$$E(I(t)) = 4.355956053 \\ + [0.2716410522 \sinh(0.9507440120t) \\ + 0.6440439466 \cosh(0.9507440120t)] e^{(-0.6727197825t)}. \quad (56)$$

Tablodan da görülebildiği gibi Modifiye rastgele Diferansiyel Dönüşüm yöntemi ile I kompartmanı için rastgele Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi ile elde edilen yaklaşık

beklenen değerden daha iyi bir yaklaşım elde edilmiştir. Ayrıca genel Beta dağılımına sahip rastgele etki ile oluşturulan rastgele model ve normal dağılıma sahip rastgele etkiler ile oluşturulan rastgele modellerin simülasyonlar ile elde edilen sayısal karakteristiklerine benzer şekilde, kompartmanlarının yaklaşık değerlerinin de birbirine çok benzer olduğu görülmektedir. Rastgele Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi ile benzer yaklaşık beklenen değerler elde edildiği için bu yaklaşımların modifikasyonları da benzer şekilde açığa çıkmıştır. Daha önce de belirtildiği gibi Beta dağılımı için de yaklaşımlarda daha fazla terim kullanarak hatayı azaltmak mümkündür.

Tablo 10. $t \in [0,1.5]$ için I kompartmanına ait sonuçlar

t	Deterministik (MATLAB)	Deterministik DDY ($n = 5$)	Rastgele Simülasyon	Rastgele DDY ($n = 5$) – (55)	Rastgele MDDY (56)
0	5.000	5.000	5.000	5.000	5.000
0.1	4.985	4.985	4.985	4.985	4.985
0.2	4.975	4.975	4.975	4.975	4.975
0.3	4.968	4.968	4.968	4.968	4.968
0.4	4.965	4.965	4.965	4.965	4.965
0.5	4.965	4.965	4.965	4.965	4.965
0.6	4.967	4.968	4.967	4.968	4.967
0.7	4.972	4.974	4.972	4.974	4.972
0.8	4.978	4.983	4.978	4.983	4.979
0.9	4.986	4.995	4.986	4.995	4.987
1.0	4.996	5.011	5.996	5.011	4.997
1.1	5.007	5.030	5.007	5.030	5.009
1.2	5.020	5.054	5.020	5.054	5.022
1.3	5.033	5.083	5.033	5.083	5.036
1.4	5.047	5.118	5.047	5.118	5.051
1.5	5.062	5.160	5.062	5.160	5.067

2.3.3. Hepatit B İçin SIIR Tipinde Bir Kompartmanlı Model

Hepatit B hastalığı “Hepatit B Virüsü (HBV)” adlı virüsten kaynaklanan bulaşıcı bir hastalıktır. Karaciğeri etkileyen bu hastalık akut veya kronik enfeksiyona yol açabilmektedir. Kısa dönemli akut enfeksiyonlarda bazı bireylerde herhangi bir belirti gözükmebilir ve hastalık kendiliğinden sonlanabilir. Ancak akut safhada virüsten kurtulamayan bireylerde altı aydan sonra hastalık kronik enfeksiyona dönüşür. Kronik Hepatit B enfeksiyonları siroz ve karaciğer kanserine yol açabilmektedir.

Hepatit B hastalığının akut aşamada herhangi bir tedavisi yoktur ancak kronik safhasında ilaçla tedavi mümkündür. Hastalığa neden olan HBV vücut dışında yedi günden fazla hayatta kalabilmektedir ve aşıyla korunmamış insanların vücuduna girdiği durumlarda enfeksiyona yol açabilmektedir. Hepatit B hastalığı bu hastalığı taşıyan kan ve diğer vücut sıvılarından bulaşabildiği gibi bu virüsü taşıyan anneden çocuğa geçmesi de mümkündür. Akut safhada bazı durumlarda herhangi bir belirti göstermeyebilen hastalığın belirtileri arasında aşırı yorgunluk, bulantı ve karın ağrısı gibi şikayetler bulunmaktadır. Hastalıktan korunmak için Dünya Sağlık Örgütü, özellikle yeni doğanlar başta olmak üzere, aşılanmayı tavsiye etmektedir. 1982 yılından beri kullanılabilen koruyucu aşı bireyleri enfeksiyondan ve kronik hastalığın gelişmesinden %95 etkiyle korumaktadır. Hastalık basit bir kan testi ile kolaylıkla teşhis edilebilmektedir [120].

Dünya çapında yaklaşık 257 milyon bireyin Hepatit B virüsünü taşıdığı düşünülmektedir. Batı Pasifik ve Afrika hastalığın nüfusun %6'sından fazlasına bulaşmış olduğu ve en yaygın olduğu bölgelerdir. Hastalık özellikle 6 yaş ve altı çocuklarda etkili olmaktadır; 1 yaş altı bebeklerde enfeksiyonlar %80-%90 oranında kronik enfeksiyona dönüşmekte iken bu oran 6 yaş altında %30-50 arası ve yetişkinlerde %5 altındadır. Yetişkinlerde kronik enfeksiyonlar %20-%30 oranında siroz veya karaciğer kanserine yol açmaktadır. 2015 yılında Hepatit B kaynaklı nedenlerden 887000 kişi hayatını kaybetmiştir [120].

Dünya çapında yaygın bir sağlık problemi olan Hepatit B için yapılan birçok matematiksel modelleme çalışması bulunmaktadır. Hepatit B enfeksiyonu üzerinde aşının etkisi [85], farklı güvenlik önlemlerinin hastalığın yayılma riskine etkisi [117] ve Hepatit B ile farklı hastalıkların aynı anda görülmesi [90] gibi konulara yoğunlaşan matematiksel modellerin genel olarak deterministik düzeyde yapıldığı görülmektedir. Bu çalışmada kullanılacak olan deterministik model akut ve kronik Hepatit B enfeksiyonlarında kontrol ve yayılma dinamiklerini incelemektedir. İki farklı enfeksiyon tipini ayrı olarak ele alan model, SIR modeline ikinci enfeksiyona sahip insanları ayrı olarak ele alan ek bir I kompartmanı eklenmesi ile oluşturulmuştur [65].

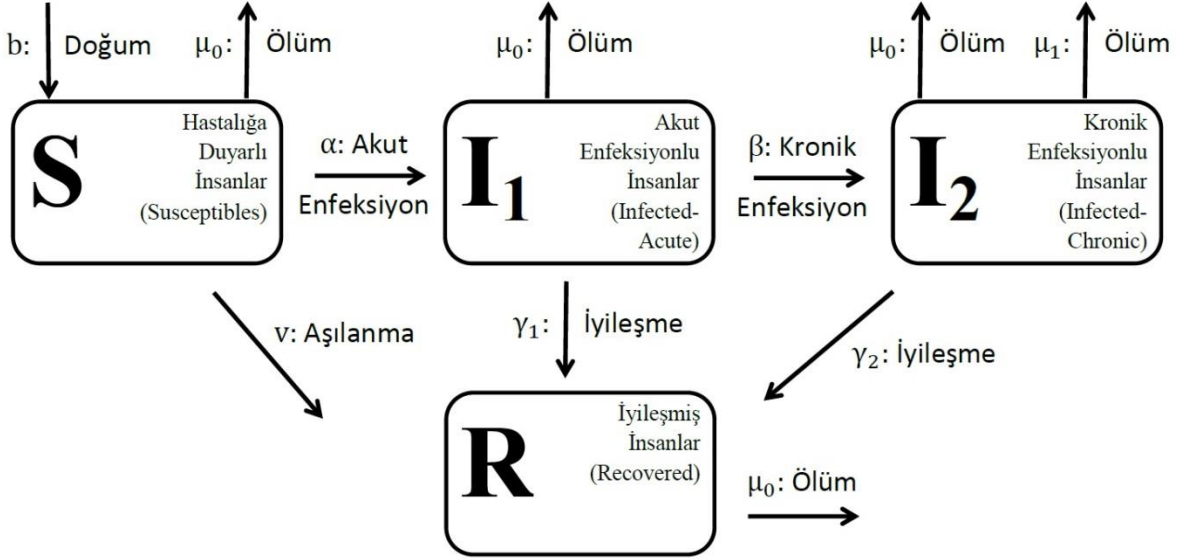
Beklenen değerler kompartmanların başlangıç gösterecek şekilde

$$S(0) \geq 0, I_1(0) \geq 0, I_2(0) \geq 0, R(0) \geq 0$$

belirlenir.

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= b - \alpha SI_2 - (\mu_0 + v)S, \\
\frac{dI_1}{dt} &= \alpha SI_2 - (\mu_0 + \beta + \gamma_1)I_1, \\
\frac{dI_2}{dt} &= \beta I_1 - (\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2)I_2, \\
\frac{dR}{dt} &= \gamma_1 I_1 + \gamma_2 I_2 + vS - \mu_0 R.
\end{aligned} \tag{57}$$

(57) modelinin akış şeması şekilde gösterilmektedir (Şekil 27).



Şekil 27. SIIR modelinin akış şeması [65].

(57) modelinin kompartmanları $S(t)$ – Hastalığa duyarlı insan sayısı, $I_1(t)$ – Akut Hepatit B enfeksiyonu olan insan sayısı, $I_2(t)$ – Kronik Hepatit B enfeksiyonu olan insan sayısı ve $R(t)$ hastalıktan iyileşen insan sayısı şeklindedir. Toplam nüfus

$$N(t) = S(t) + I_1(t) + I_2(t) + R(t)$$

şeklinde verilmektedir. Modelin parametreleri ise aşağıdaki tabloda açıklanmaktadır.

Modelde t ile gösterilen zaman değişkeninin tam ölçüsü kaynak çalışmada verilmemiş olsa da benzer Hepatit B modelleme çalışmalarında ve parametre değerleri için kaynak gösterilen çalışmalarda bu değer yıl sayısı olarak kabul edilmektedir [61, 91, 125].

Tablo 11. SIIR modelinin parametreleri, tanımları ve değerleri [65].

Parametre	Tanım	Değer
b	Doğum oranı	0.4
α	Akut hepatit enfeksiyonuna yakalanma oranı	0.005
μ_0	Doğal ölüm oranı	0.03
v	Aşılama oranı	0.02
β	Enfeksiyonun kronik safhaya geçiş oranı	0.01
γ_1	Akut safhada iyileşme oranı	0.05
μ_1	Hepatit B ilişkili ölüm oranı	0.002
γ_2	Kronik enfeksiyondan iyileşme oranı	0.06

$$S(0) = 100, \quad I_1(0) = 40, \quad I_2(0) = 20, \quad R(0) = 5$$

ile verilen başlangıç değerleri $t = 0$ anında 165 kişilik bir topluluk için 100 kişinin bu hastalığa karşı duyarlı bireylerden, 40 kişinin akut Hepatit B enfeksiyonuna sahip olan bireylerden, 20 kişinin kronik Hepatit B enfeksiyonuna sahip olan bireylerden ve 5 kişinin Hepatit B hastalığından iyileşmiş bireylerden oluşmasını temsil etmektedir. Dolayısıyla (57) denklem sistem ile yıllar içinde bu toplulukta kompartmanlardaki değişimlerin incelenmesi aracılığıyla topluluğun tamamında hastalığın seyrinin analiz edilmesi amaçlanmaktadır. Ek olarak incelenen model yıllar içinde toplam nüfustaki değişimi gösterirken doğum oranı ve ölüm oranlarını farklı ele aldığı için toplam nüfusun sabit olması koşulunu barındırmamaktadır ve toplam nüfusu incelemek için denklem sisteminin tamamının göz önünde bulundurulması gerekmektedir.

(57) denklem sistemi Tablo 11 ile verilen parametreler için deterministik olarak incelenecek olursa, kaynak çalışmada

$$R_0 = \frac{\alpha\beta b}{(\mu_0 + v)(\mu_0 + \beta + \gamma_1)(\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2)}$$

şeklinde verilen üreme katsayısı $R_0 = 0.0483 < 1$ olacağından hastalığın salgın halini almaması ve belli bir süre içinde hasta insanların toplulukta kalmaması beklenir. Şekil 28 ile verilen deterministik çözüm, MATLAB ile üretilmiştir ve kaynak makaledeki sonuçlara uygun olmasının yanı sıra bu beklentiyle de örtüşen sonuçlar sunmaktadır. Bu sonuçlara göre deterministik modelde elde edilen uç değerler tabloda gösterilmektedir (Tablo 12).

Deterministik inceleme sürecin sonunda kompartman nüfusları

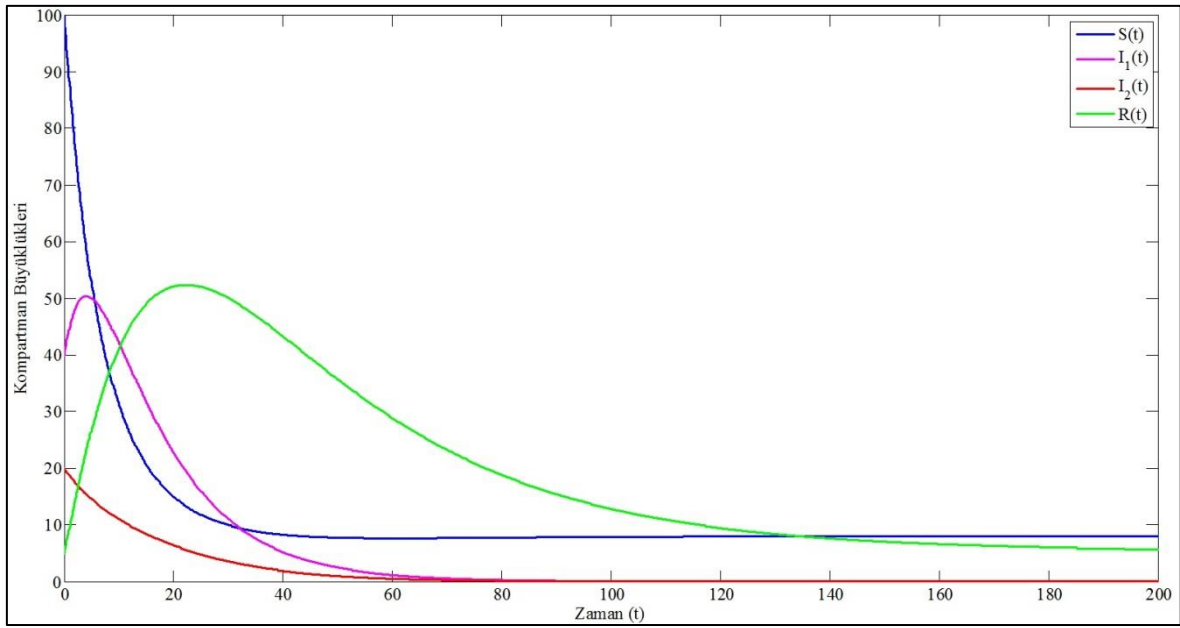
$$S(200) = 7.999; I_1(200) = 5.127 \times 10^{-5}; I_2(0) = 2.439 \times 10^{-5};$$

$$R(200) = 5.706$$

olarak bulunmaktadır.

Tablo 12. SIIR modelinin deterministik parametreleri için uç değerleri

	En küçük değer (ve zamanı)		En büyük değer (ve zamanı)	
$S(t)$	7.634	$t = 61.2$	100	$t = 0$
$I_1(t)$	5.127×10^{-5}	$t = 200$	50.35	$t = 4$
$I_2(t)$	2.439×10^{-5}	$t = 200$	20	$t = 0$
$R(t)$	5	$t = 0$	52.4	$t = 22.5$



Şekil 28. SIIR modelinin deterministik çözümleri

Üreme katsayısının öngördüğü şekilde uzun bir dönem sonunda hastalıklı kesimin toplumda yok denecek kadar azaldığı, kalan kesimin sağlıklı bireylerden oluştuğu görülmektedir. Hastalığın topluluktan temizlendiği söylenebilir.

(57) modelinin rastgele şartlar altında incelenmesi için $\{b, \alpha, \mu_0, v, \beta, \gamma_1, \mu_1, \gamma_2\}$ şartları öncelikle normal dağılıma sahip rastgele etkiler kullanılarak rastgele hale getirilecektir. Daha önceki rastgele modellere benzer şekilde %5 varyasyon katsayısına sahip rastgele katsayılar oluşturmak için parametreler, deterministik değerlerinin %5 oranında standart sapmaya sahip olacak şekilde ayarlanacak olursa:

$$b^* = b + s_1 \eta_1 = 0.4 + 0.02 \eta_1, \alpha^* = \alpha + s_2 \eta_2 = 0.005 + 2.5 \times 10^{-4} \eta_2, \\ \mu_0^* = \mu_0 + s_3 \eta_3 = 0.03 + 0.0015 \eta_3, v^* = v + s_4 \eta_4 = 0.02 + 0.001 \eta_4,$$

$$\beta^* = \beta + s_5\eta_5 = 0.01 + 0.0005\eta_5, \gamma_1^* = \gamma_1 + s_6\eta_6 = 0.05 + 0.0025\eta_6,$$

$$\mu_1^* = \mu_1 + s_7\eta_7 = 0.002 + 0.0001\eta_7, \gamma_2^* = \gamma_2 + s_8\eta_8 = 0.06 + 0.003\eta_8,$$

ile yeni $\{\beta^*, \alpha^*, \mu_0^*, v^*, \beta^*, \gamma_1^*, \mu_1^*, \gamma_2^*\}$ parametreleri elde edilir. Burada $\eta_i, i = \overline{1,8}$ birbirinden bağımsız standart normal dağılıma sahip rastgele değişkenlerdir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= b^* - \alpha^*SI_2 - (\mu_0^* + v^*)S, \\ \frac{dI_1}{dt} &= \alpha^*SI_2 - (\mu_0^* + \beta^* + \gamma_1^*)I_1, \\ \frac{dI_2}{dt} &= \beta^*I_1 - (\mu_0^* + \mu_1^* + \gamma_2^*)I_2, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma_1^*I_1 + \gamma_2^*I_2 + v^*S - \mu_0^*R, \end{aligned} \tag{58}$$

modeli şu hali alır:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= (0.4 + 0.02\eta_1) - (0.005 + 2.5 \times 10^{-4}\eta_2)SI_2 \\ &\quad - ((0.03 + 0.0015\eta_3) + (0.02 + 0.001\eta_4))S, \\ \frac{dI_1}{dt} &= (0.005 + 2.5 \times 10^{-4}\eta_2)SI_2 \\ &\quad - ((0.03 + 0.0015\eta_3) + (0.01 + 0.0005\eta_5) + (0.05 + 0.0025\eta_6))I_1, \\ \frac{dI_2}{dt} &= (0.01 + 0.0005\eta_5)I_1 \\ &\quad - ((0.03 + 0.0015\eta_3) + (0.002 + 0.0001\eta_7) + (0.06 + 0.003\eta_8))I_2, \\ \frac{dR}{dt} &= (0.05 + 0.0025\eta_6)I_1 + (0.06 + 0.003\eta_8)I_2 + (0.02 + 0.001\eta_4)S \\ &\quad - (0.03 + 0.0015\eta_3)R. \end{aligned} \tag{59}$$

(57) modelinin normal etkiler altındaki davranışları (59) modeli ile incelenecektir. Yalnızca $\eta_i, i = \overline{1,8}$ standart normal rastgele değişkenleri aracılığı ile rastgele analizi yapılacak olan sistem için öncelikle MRDDY ile yaklaşık beklenen değerler incelenecektir. (59) sistemine rastgele Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi uygulanırsa $S(0) = 100$, $I_1(0) = 40$, $I_2(0) = 20$, $R(0) = 5$ başlangıç koşulları ile birlikte

$$\begin{aligned}
(k+1)S(k+1) &= b^*\delta(k) - \alpha^* \sum_{m=0}^k I_2(m)S(k-m) - (\mu_0^* + v^*)S(k), \\
(k+1)I_1(k+1) &= \alpha^* \sum_{m=0}^k I_2(m)S(k-m) - (\mu_0^* + \beta^* + \gamma_1^*)I_1(k), \\
(k+1)I_2(k+1) &= \beta^*I_1(k) - (\mu_0^* + \mu_1^* + \gamma_2^*)I_2(k), \\
(k+1)R(k+1) &= \gamma_1^*I_1(k) + \gamma_2^*I_2(k) + v^*S(k) - \mu_0^*R(k)
\end{aligned} \tag{60}$$

sistemi elde edilir. (60) sistemi kullanılarak kompartmanların yaklaşık beklenen değerleri, varyansları ve güven aralıkları önceki örneklere benzer şekilde elde edilebilir. Örnek olarak I_2 kompartmanı için deterministik durumda DDY ile $n = 5$ terim kullanarak

$$\begin{aligned}
I_2(t) &= 20 - 1.44t + 0.09824t^2 - 0.007606026667t^3 \\
&\quad + 0.0005280719465t^4
\end{aligned} \tag{61}$$

elde edilmektedir. (60) sistemi aracılığıyla rastgele durumda $I_2(t)$ için $n = 3$ terim ile

$$\begin{aligned}
I_2(t) &= 20 + (40\beta^* - 20\mu_1^* - 20\mu_0^* - 20\gamma_2^*)t \\
&\quad + (1000\alpha^*\beta^* - 20\beta^{*2} - 20\beta^*\gamma_1^* - 20\beta^*\gamma_2^* - 40\beta^*\mu_0^* - 20\beta^*\mu_1^* \\
&\quad + 10\gamma_2^{*2} + 20\gamma_2^*\mu_0^* + 20\gamma_2^*\mu_1^* + 10\mu_0^{*2} + 20\mu_0^*\mu_1^* \\
&\quad + 10\mu_1^{*2})t^2
\end{aligned} \tag{62}$$

yaklaşık analitik çözümü elde edilir. Bu çözüm aracılığıyla $I_2(t)$ değişkeninin daha fazla terim kullanarak yaklaşık beklenen değerinin elde edilebilmesi için $\{b^*, \alpha^*, \mu_0^*, v^*, \beta^*, \gamma_1^*, \mu_1^*, \gamma_2^*\}$ rastgele parametrelerinin momentlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu momentler, normal dağılımın moment çıkaran fonksiyonu ile aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
E(b) &= 0.4; E(b^2) = 0.1604; E(b^3) = 0.0645; E(b^4) = 0.0260; \\
E(\alpha) &= 0.005; E(\alpha^2) = 2.5063 \times 10^{-5}; \\
E(\alpha^3) &= 1.2594 \times 10^{-7}; E(\alpha^4) = 6.3439 \times 10^{-10}; \\
E(\mu_0) &= 0.03; E(\mu_0^2) = 9.0225 \times 10^{-4}; \\
E(\mu_0^3) &= 2.7202 \times 10^{-5}; E(\mu_0^4) = 8.2217 \times 10^{-5}; \\
E(v) &= 0.02; E(v^2) = 4.01 \times 10^{-4};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(v^3) &= 8.06 \times 10^{-6}; E(v^4) = 1.624 \times 10^{-7}; \\
E(\beta) &= 0.01; E(\beta^2) = 1.0025 \times 10^{-4}; \\
E(\beta^3) &= 1.0075 \times 10^{-6}; E(\beta^4) = 1.0150 \times 10^{-8}; \\
E(\gamma_1) &= 0.05; E(\gamma_1^2) = 0.0025; \\
E(\gamma_1^3) &= 1.2594 \times 10^{-4}; E(\gamma_1^4) = 6.3439 \times 10^{-6}; \\
E(\mu_1) &= 0.002; E(\mu_1^2) = 4.01 \times 10^{-6}; \\
E(\mu_1^3) &= 1.209 \times 10^{-7}; E(\mu_1^4) = 1.624 \times 10^{-11}; \\
E(\gamma_2) &= 0.06; E(\gamma_2^2) = 0.0036; \\
E(\gamma_2^3) &= 2.1762 \times 10^{-4}; E(\gamma_2^4) = 1.3155 \times 10^{-5}
\end{aligned}$$

(rastgele parametrelerde basitlik için “*” kullanılmamıştır). Bu momentler kullanılarak RDDY ile $n = 5$ terim için $I_2(t)$ değişkeninin yaklaşık beklenen değeri

$$\begin{aligned}
E(I_2(t)) &= 20 - 1.44t + 0.0983476t^2 - 0.007618574666667t^3 \\
&\quad + 0.0005294906029981667t^4
\end{aligned} \tag{63}$$

olarak elde edilir. Bu yaklaşımdaki hatayı azaltmak için [3,1] mertebesinde Padé yaklaşımı kullanılarak elde edilen yaklaşık beklenen değer deterministik $I_2(t)$ ve (63) yaklaşık beklenen değeri ile karşılaştırılması aşağıdaki şekilde gösterilmektedir (Şekil 29).

$$\begin{aligned}
E(I_2(t)) &= -0.5936255492t + 16.35807223 + 3.641927770 \\
&\quad \times \exp^{-0.2323973742t}
\end{aligned} \tag{64}$$

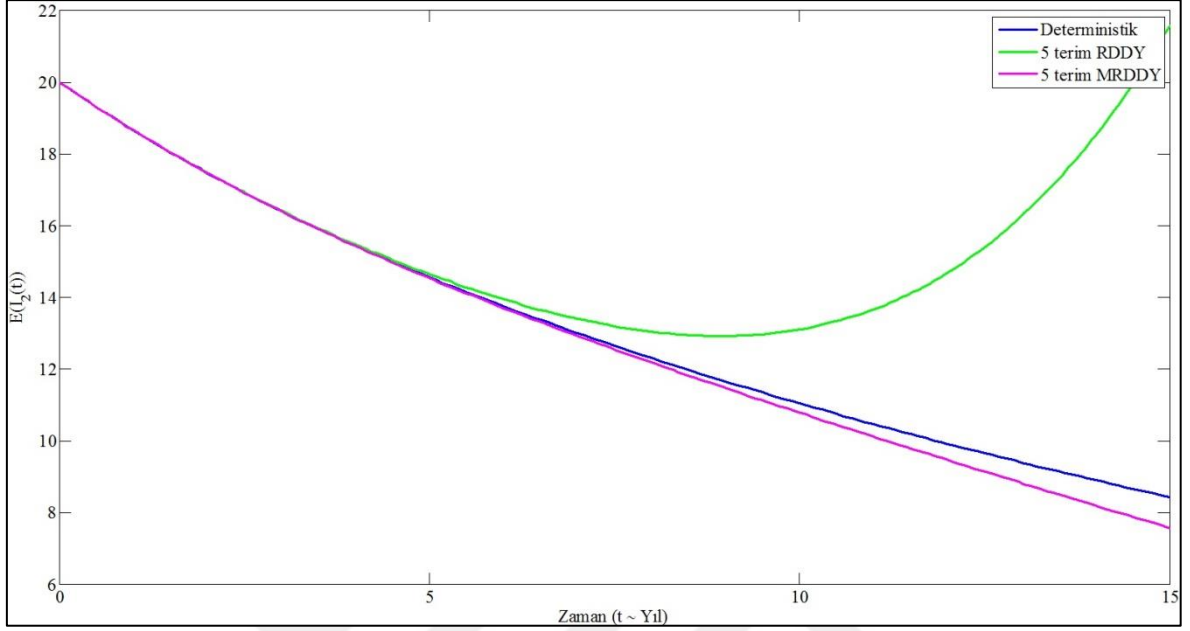
olarak elde edilen modifiye yaklaşık beklenen değer Şekil 29 ile verilmiştir. $I_2(t)$ için [2,2] mertebesinde Padé yaklaşımı kullanılarak MRDDY ile elde edilen başka bir yaklaşım da

$$\begin{aligned}
E(I_2(t)) &= (\exp^{-0.1695926773t})(16.39397640 \sinh(0.1190591897t) \\
&\quad + 20.00000001 \cosh(0.1190591897t))
\end{aligned} \tag{65}$$

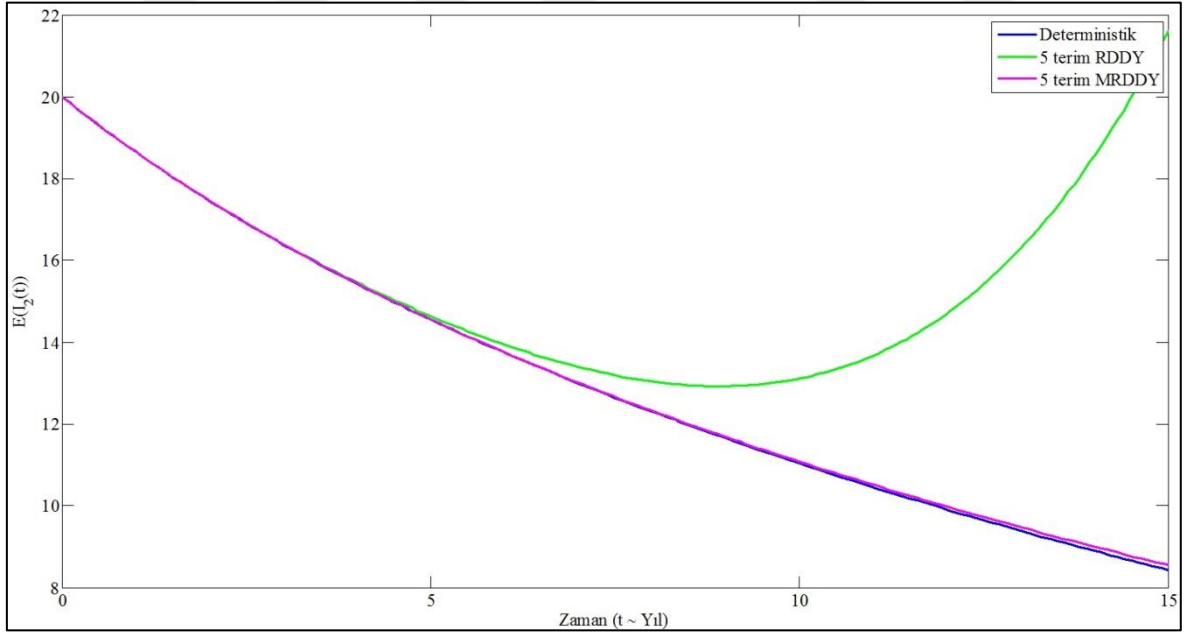
şeklindedir. (65) yaklaşımının deterministik $I_2(t)$ çözümü ve RDDY ile elde edilen beklenen değerle karşılaştırılması aşağıdaki şekilde görülmektedir (Şekil 30).

Şekillerden görüldüğü gibi Modifiye rastgele Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi (MRDDY) ile elde edilen yaklaşık beklenen değer rastgele Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

(RDDY) ile elde edilen yaklaşıma oranla çok daha az hata içermektedir. Daha fazla terim kullanılarak elde edilecek yaklaşımlarla bu hatanın daha da azaltılması mümkündür.



Şekil 29. [3,1] mertebesinde MRDDY ile deterministik çözüm ve RDDY yaklaşımı



Şekil 30. [2,2] mertebesinde MRDDY ile deterministik çözüm ve RDDY yaklaşımı

(59) rastgele modelinin simülasyonu ile $E(I_2(t))$ için $t = 7$ anında elde edilen değer 13.01 olmaktadır. RDDY ile elde edilen (63) yaklaşık beklenen değeri $t = 7$ için 13.6481 olduğundan mutlak hata oranı

$$100 \times \frac{|13.01 - 13.6481|}{13.01} \simeq \%4.90$$

olmaktadır.

Tablo 13. $I_2(t)$ için yaklaşık çözümler ve beklenen değerlerin karşılaştırılması

t	Deterministik (MATLAB)	Deterministik DDY ($n = 5$)	Rastgele Simülasyon	RDDY ($n = 5$)	MRDDY [2,2]	MRDDY [3,1]
0	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0
1.0	18.65	18.6512	18.65	18.6513	18.6512	18.6512
2.0	17.46	17.4606	17.46	17.4609	17.4600	17.4589
3.0	16.39	16.4016	16.40	16.4023	16.3957	16.3908
4.0	15.43	15.4602	15.43	15.4613	15.4350	15.4211
5.0	14.55	14.6353	14.56	14.6373	14.5599	14.5294
5.1	14.47	14.5595	14.47	14.5616	14.4765	14.4438
5.2	14.39	14.4850	14.39	14.4872	14.3939	13.3589
5.3	14.30	14.4119	14.31	14.4141	14.3119	14.2746
5.4	14.22	14.3400	14.23	14.3425	14.2306	14.1908
5.5	14.14	14.2695	14.15	14.2720	14.1500	14.1076
5.6	14.06	14.2004	14.07	14.2030	14.0700	14.0249
5.7	13.98	14.1327	13.99	14.1353	13.9907	13.9428
5.8	13.90	14.0664	13.91	14.0691	13.9121	13.8612
5.9	13.82	14.0015	13.83	14.0044	13.8340	13.7801
6.0	13.74	13.9381	13.75	13.9411	13.7566	13.6995
6.1	13.67	13.8762	13.68	13.8794	13.6798	13.6194
6.2	13.59	13.8159	13.60	13.8192	13.6036	13.5397
6.3	13.51	13.7572	13.52	13.7605	13.5280	13.4606
6.4	13.44	13.7000	13.45	13.7035	13.4529	13.3818
6.5	13.36	13.6445	13.37	13.6481	13.3785	13.3036
6.6	13.29	13.5906	13.30	13.5944	13.3046	13.2257
6.7	13.22	13.5385	13.22	13.5424	13.2312	13.1483
6.8	13.14	13.4881	13.15	13.4922	13.1584	13.0713
6.9	13.07	13.4395	13.08	13.4438	13.0862	12.9947
7.0	13.00	13.3928	13.01	13.3972	13.0144	12.9186
7.1	12.93	13.3479	12.93	13.3525	12.9433	12.8427
7.2	12.85	13.3050	12.86	13.3097	12.8726	12.7673
7.3	12.78	13.2640	12.79	13.2688	12.8024	12.6923
7.4	12.71	13.2250	12.72	13.2300	12.7327	12.6176
7.5	12.64	13.1881	12.65	13.1933	12.6636	12.5432

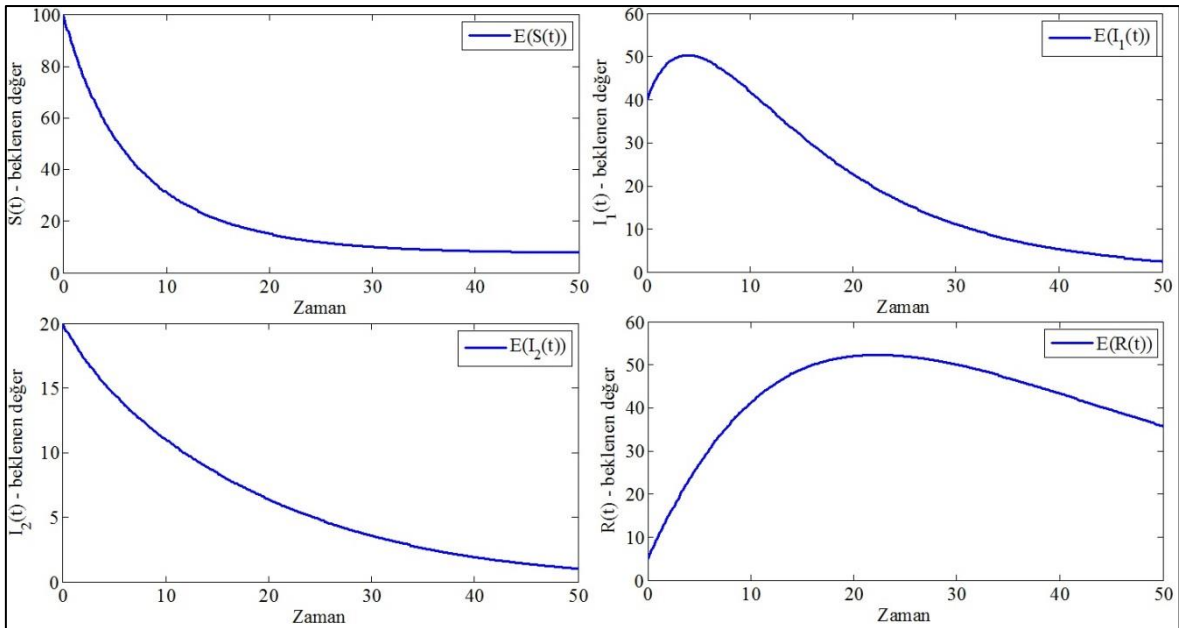
MRDDY ile elde edilen (64) yaklaşık beklenen değeri $t = 7$ için 12.9186 değerine sahip olduğundan mutlak hata oranı

$$100 \times \frac{|13.01 - 12.9186|}{13.01} \approx \%0.70$$

olurken [2,2] mertebesinde MRDDY ile elde edilen (65) yaklaşık beklenen değeri $t = 7$ için 13.0144 değerine sahip olduğundan mutlak hata oranı şu şekildedir:

$$100 \times \frac{|13.01 - 13.0144|}{13.01} \approx \%0.03$$

$I_2(t)$ için (57) deterministik sisteminden MATLAB ile elde edilen yaklaşık değerler, (62) ile elde edilen DDY yönteminden $n = 5$ terim ile elde edilen yaklaşık değerler, (59) rastgele modelinden elde edilen $E(I_2(t))$ ile MRDDY ile elde edilen (64) ve (65) yaklaşık beklenen değerleri tabloda karşılaştırılmaktadır (Tablo 13). Tabloda da görüldüğü RDDY ile elde edilen $E(I_2(t))$ yaklaşımı MRDDY ile [3,1] mertebesinde daha az hata içeren bir hal almaktadır. Şekil 30 ile verildiği gibi MRDDY ile [2,2] elde edilen yaklaşım ise uzun süre boyunca beklenen değeri yaklaşık olarak çok az hata ile vermektedir. Burada t değişkeni yıl sayısını verdiği için diğer değişkenlerin beklenen değerleri ve varyansları için de elde edilecek yaklaşımlar modelin rastgele davranışlarının öngörülmesinde yıl-ay dönüşümü yapılarak çok daha faydalı olma imkanına sahiptir.

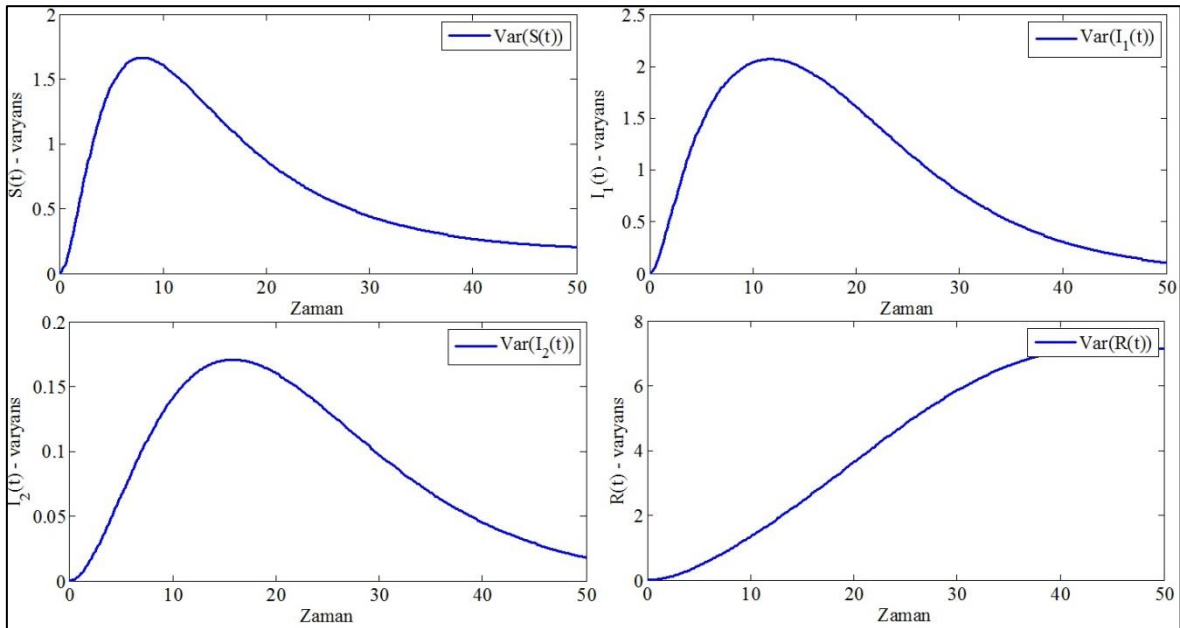


Şekil 31. SIIR modelinin normal rastgele etkiler altında beklenen değerleri

(59) modelinin rastgele davranışlarının daha uzun süreli olarak incelenmesi için Monte-Carlo simülasyonları yapılacaktır. 100000 adet tekrar kullanılarak (59) modelinin $S(t), I_1(t), I_2(t)$ ve $R(t)$ değişkenleri için beklenen değerler şekilde gösterilmektedir (Şekil 31).

Normal dağılıma sahip rastgele etkiler altında oluşturulan (59) modelinin beklenen değerleri ile (57) deterministik modelinin yaklaşık çözümlerinin birbirlerine uyumlu olduğu gözlemlenmektedir. Beklenen değerler ile yaklaşık çözümler arasındaki küçük sayısal farklılıklar rastgele etki terimlerinin sonuca etkisi olarak yorumlanabilir. $S(t)$ için beklenen değer $t = 50$ anında 7.763 ile minimum değerini alırken, $t = 0$ anında 100 maksimum değerini almaktadır. $I_1(t)$ değişkeninin beklenen değeri $t = 50$ anında 2.505 minimum değerini ve $t = 4$ anında 50.31 maksimum değerini almaktadır. $I_2(t)$ değişkenin beklenen değeri $t = 50$ anında 0.9956 minimum değerini ve $t = 0$ anında 20 maksimum değerini almaktadır. R kompartmanının beklenen değeri ise $t = 0$ anında 5 minimum değerini alırken $t = 22.4$ anında 52.39 maksimum değerini almaktadır. Hastalığın rastgele etkiler altında da R_0 üreme katsayısının gerektirdiği şekilde sonuçlar verdiği bu beklenen değerler ve grafiklerden anlaşılmaktadır.

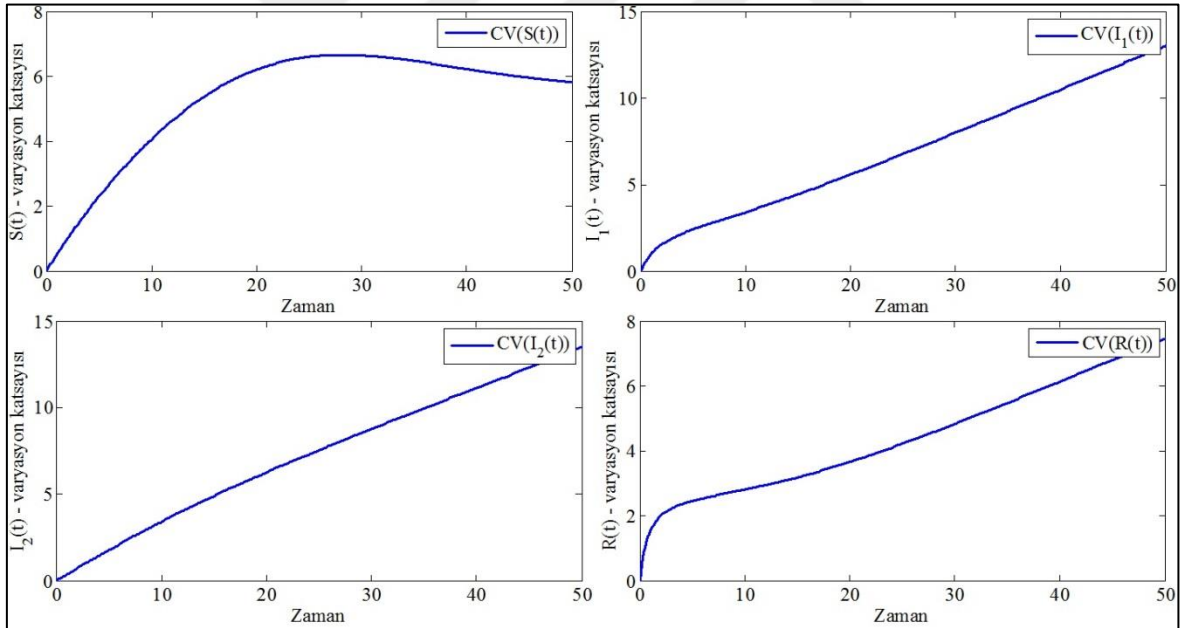
(59) modelinde $S(t), I_1(t), I_2(t)$ ve $R(t)$ için elde edilen varyanslar aşağıdaki şekilde görülmektedir (Şekil 32).



Şekil 32. SIIR modelinin normal rastgele etkiler altında varyansları

$S(t)$ değişkeninin varyansı $t = 0$ anında 0 minimum değerini ve $t = 8.1$ anında 1.671 maksimum değerini almaktadır. $I_1(t)$ değişkeninin varyansı $t = 0$ anında 0 minimum değerini ve $t = 11.4$ anında 2.058 maksimum değerini almaktadır. $I_2(t)$ değişkeninin varyansı $t = 0$ anında 0 minimum değerini ve $t = 15.6$ anında 0.1693 maksimum değerini almaktadır. $R(t)$ değişkeninin varyansı $t = 0$ anında 0 minimum değerini ve $t = 45.6$ anında 7.134 maksimum değerini almaktadır. $S(t), I_1(t), I_2(t)$ değişkenlerinin varyanslarının maksimum maksimum değerlerini aldıkları 10-15. yıla kadar değişkenliklerinde bir artma yaşandığı, ardından bu değişkenliğin varyanslardaki azalmaya paralel olarak azaldığı görülmektedir. $R(t)$ için ise varyanstaki artış 45. yıla kadar devam etmektedir.

(59) modelinde $S(t), I_1(t), I_2(t)$ ve $R(t)$ için elde edilen varyasyon katsayıları aşağıdaki şekilde görülmektedir (Şekil 33).

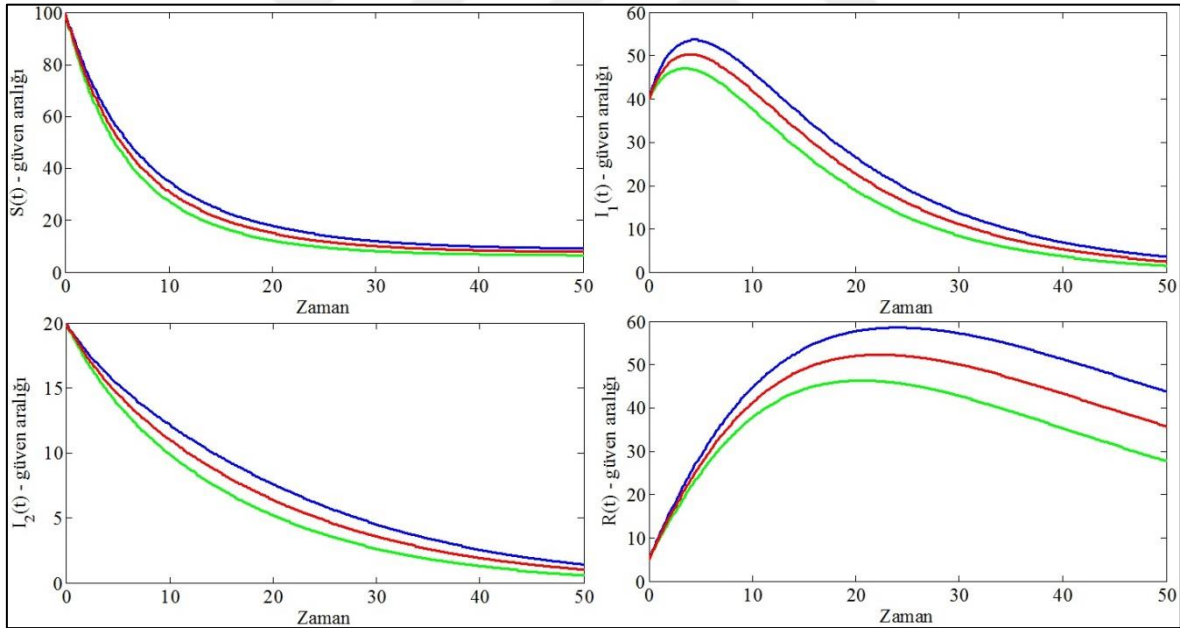


Şekil 33. SIIR modelinin normal rastgele etkiler altında varyasyon katsayıları

S kompartmanının varyasyon katsayısı minimum değerini $t = 0$ anında 0 ile alırken maksimum değerinin $t = 28.1$ anında 6.654 olarak elde edildiği gözükmemektedir. I_1 kompartmanı için minimum değer $t = 0$ anında 0 iken maksimum değer $t = 50$ anında 12.89 olmaktadır. I_2 kompartmanı için minimum değer $t = 0$ anında 0 iken maksimum değer $t = 50$ anında 13.43 şeklinde elde edilmektedir. R kompartmanının minimum değeri

$t = 0$ anında 0 iken maksimum değeri $t = 50$ anında 7.4 olarak bulunmaktadır. Tüm parametreler %5 varyasyon katsayısına sahip olacak şekilde oluşturulduğu ve $S(t)$ ile $R(t)$ değişkenlerinin varyasyon katsayısı en fazla %7 civarı olduğu halde $I_1(t)$ ve $I_2(t)$ değişkenlerinin varyasyon katsayılarının %13 civarında olduğu görülmektedir. Buradan I kompartmanları için elde edilecek deterministik sonuçların bazı durumlarda gerçekte elde edilecek değerlerden göz ardı edilemeyecek ölçüde farklılıklar gösterebileceği anlaşılmaktadır.

(59) modelinde $S(t), I_1(t), I_2(t)$ ve $R(t)$ için elde edilen güven aralıkları aşağıdaki şekilde görülmektedir (Şekil 34). Güven aralıkları ortalama değerlerin üç standart sapma civarında oluşturulan aralıklardan elde edilmektedir. Grafiklerde mavi eğriler güven aralıklarının üst sınırını gösterirken yeşil eğriler aralıkların alt sınırını göstermektedir. Normal dağılıma sahip parametreler kullanıldığı için rastgele değişkenlerin değerlerinin %99.73 olasılıkla bu verilen güven aralıkları içinde olacağı yorumu yapılabilir.



Şekil 34. SIIR modelinin normal rastgele etkiler altında güven aralıkları

$S(t)$ değişkeninin güven aralığı için minimum değer $t = 50$ anında elde edilen 6.413 ve maksimum değer $t = 0$ anında elde edilen 100 olarak bulunmaktadır. $I_1(t)$ değişkeninin güven aralığı için minimum değer $t = 50$ anında 1.536 ve maksimum değer $t = 4.4$ anında 53.67 olarak elde edilmektedir. $I_2(t)$ değişkeninin güven aralığı için minimum

değer $t = 50$ anında 0.5944 ve maksimum değer $t = 0$ anında 20 olarak elde edilmektedir. $R(t)$ değişkeninin güven aralığı için minimum değer $t = 0$ anında 5 ve maksimum değer $t = 24$ anında 58.64 olarak elde edilmektedir.

(57) modelinin rastgele etkiler altındaki davranışının incelenmesi için normal dağılıma sahip durumla karşılaştırma yapabilmek adına genel Beta dağılımına sahip rastgele etkiler altındaki

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= b^{**} - \alpha^{**}SI_2 - (\mu_0^{**} + v^{**})S, \\
 \frac{dI_1}{dt} &= \alpha^{**}SI_2 - (\mu_0^{**} + \beta^{**} + \gamma_1^{**})I_1, \\
 \frac{dI_2}{dt} &= \beta^{**}I_1 - (\mu_0^{**} + \mu_1^{**} + \gamma_2^{**})I_2, \\
 \frac{dR}{dt} &= \gamma_1^{**}I_1 + \gamma_2^{**}I_2 + v^{**}S - \mu_0^{**}R,
 \end{aligned} \tag{66}$$

modeli incelenecektir. 2.3.2 kısmında yapılan kıyaslamaya benzer şekilde genel Beta rastgele etkiler, tanım aralıkları normal rastgele parametrelerin %99.73 olasılıkla değerlerini aldıkları aralıkla örtüşecek şekilde oluşturulacaktır. Dolayısıyla yeni $\{b^{**}, \alpha^{**}, \mu_0^{**}, v^{**}, \beta^{**}, \gamma_1^{**}, \mu_1^{**}, \gamma_2^{**}\}$ genel Beta dağılımına sahip parametrelerinde c deterministik değerlerinin $\frac{17}{20}$ 'si, d ise deterministik değerlerinin $\frac{3}{10}$ 'u oranında belirlenecektir. Bu örnek için de her rastgele değişkende $a = b = 4$ olacaktır.

$$\begin{aligned}
 b^* &\sim N(0.4, 0.02) \Rightarrow b^{**} \sim gBeta\left(\frac{17}{50}, \frac{3}{25}, 4, 4\right), \\
 \alpha^* &\sim N(0.005, 2.5 \times 10^{-4}) \Rightarrow \alpha^{**} \sim gBeta\left(\frac{17}{4000}, \frac{3}{2000}, 4, 4\right), \\
 \mu_0^* &\sim N(0.03, 0.0015) \Rightarrow \mu_0^{**} \sim gBeta\left(\frac{51}{2000}, \frac{9}{1000}, 4, 4\right), \\
 v^* &\sim N(0.02, 0.001) \Rightarrow v^{**} \sim gBeta\left(\frac{17}{1000}, \frac{3}{500}, 4, 4\right), \\
 \beta^* &\sim N(0.01, 0.0005) \Rightarrow \beta^{**} \sim gBeta\left(\frac{17}{2000}, \frac{3}{1000}, 4, 4\right), \\
 \gamma_1^* &\sim N(0.05, 0.0025) \Rightarrow \gamma_1^{**} \sim gBeta\left(\frac{17}{400}, \frac{3}{200}, 4, 4\right), \\
 \mu_1^* &\sim N(0.002, 0.0001) \Rightarrow \mu_1^{**} \sim gBeta\left(\frac{17}{10000}, \frac{3}{5000}, 4, 4\right),
 \end{aligned}$$

$$\gamma_2^* \sim N(0.06, 0.003), \gamma_2^{**} \sim gBeta\left(\frac{51}{1000}, \frac{9}{500}, 4, 4\right)$$

ile tanımlanan parametreler kullanarak (66) modeli

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \left(\frac{17}{50} + \frac{3}{25}Z_1\right) - \left(\frac{17}{4000} + \frac{3}{2000}Z_2\right)SI_2 \\ &\quad - \left(\left(\frac{51}{2000} + \frac{9}{1000}Z_3\right) + \left(\frac{17}{1000} + \frac{3}{500}Z_4\right)\right)S, \\ \frac{dI_1}{dt} &= \left(\frac{17}{4000} + \frac{3}{2000}Z_2\right)SI_2 \\ &\quad - \left(\left(\frac{51}{2000} + \frac{9}{1000}Z_3\right) + \left(\frac{17}{2000} + \frac{3}{1000}Z_5\right) + \left(\frac{17}{400} + \frac{3}{200}Z_6\right)\right)I_1, \\ \frac{dI_2}{dt} &= \left(\frac{17}{2000} + \frac{3}{1000}Z_5\right)I_1 \\ &\quad - \left(\left(\frac{51}{2000} + \frac{9}{1000}Z_3\right) + \left(\frac{17}{10000} + \frac{3}{5000}Z_7\right) + \left(\frac{51}{1000} + \frac{9}{500}Z_8\right)\right)I_2, \\ \frac{dR}{dt} &= \left(\frac{17}{400} + \frac{3}{200}Z_6\right)I_1 + \left(\frac{51}{1000} + \frac{9}{500}Z_8\right)I_2 + \left(\frac{17}{1000} + \frac{3}{500}Z_4\right)S \\ &\quad - \left(\frac{51}{2000} + \frac{9}{1000}Z_3\right)R, \end{aligned} \tag{67}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. (67) kullanılarak Hepatit B hastalığının rastgele davranışlarının yalnızca birbirinden bağımsız $Z_i, i = \overline{1,8}$ standart Beta rastgele değişkenler kullanılarak incelenmesi mümkündür. RDDY ile elde edilen (62) yaklaşık çözümü kullanılarak Beta dağılımına sahip rastgele etkiler altında $I_2(t)$ değişkeninin yaklaşık beklenen değerini elde etmek için yeni rastgele parametrelerin momentleri gerekmektedir. Bu momentler, genel Beta dağılımının moment çıkaran fonksiyonu kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir (rastgele parametrelerde basitlik için “*” kullanılmamıştır):

$$E(b) = 0.4; E(b^2) = 0.1604; E(b^3) = 0.0645; E(b^4) = 0.0235;$$

$$E(\alpha) = 0.005; E(\alpha^2) = 2.5063 \times 10^{-5};$$

$$E(\alpha^3) = 1.2594 \times 10^{-7}; E(\alpha^4) = 5.6675 \times 10^{-10};$$

$$E(\mu_0) = 0.03; E(\mu_0^2) = 9.0225 \times 10^{-4};$$

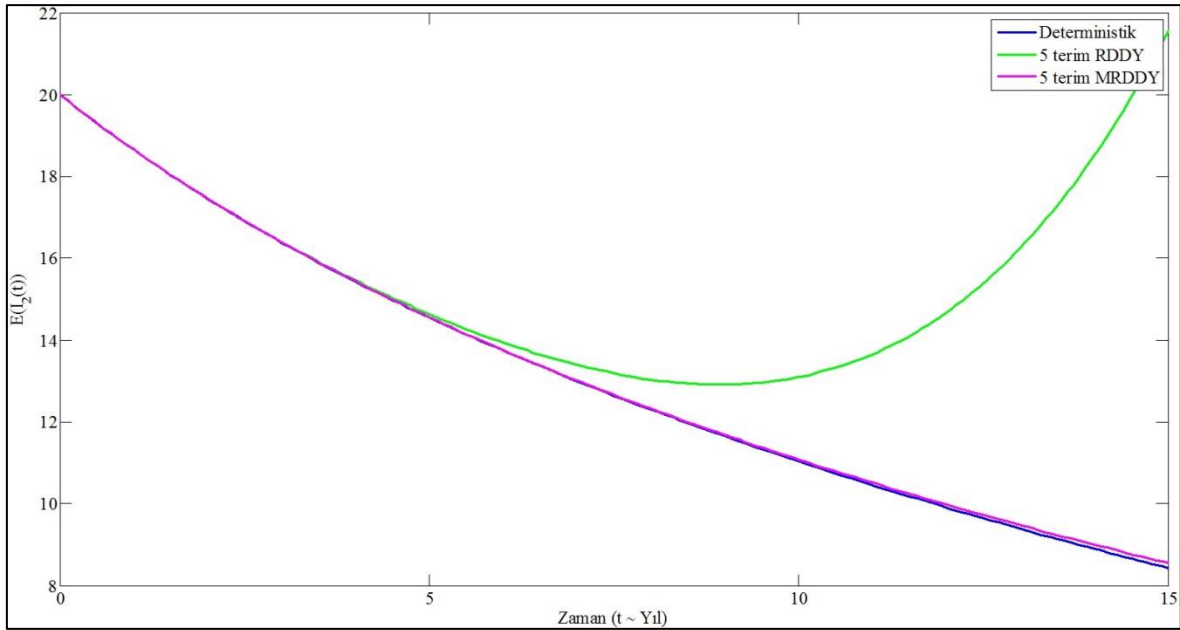
$$E(\mu_0^3) = 2.7203 \times 10^{-5}; E(\mu_0^4) = 7.3517 \times 10^{-5};$$

$$E(v) = 0.02; E(v^2) = 4.01 \times 10^{-4};$$

$$\begin{aligned}
E(v^3) &= 8.06 \times 10^{-6}; E(v^4) = 1.4517 \times 10^{-7}; \\
E(\beta) &= 0.01; E(\beta^2) = 1.0025 \times 10^{-4}; \\
E(\beta^3) &= 1.0075 \times 10^{-6}; E(\beta^4) = 9.0697 \times 10^{-9}; \\
E(\gamma_1) &= 0.05; E(\gamma_1^2) = 0.0025; \\
E(\gamma_1^3) &= 1.2594 \times 10^{-4}; E(\gamma_1^4) = 5.6767 \times 10^{-6}; \\
E(\mu_1) &= 0.002; E(\mu_1^2) = 4.01 \times 10^{-6}; \\
E(\mu_1^3) &= 8.06 \times 10^{-9}; E(\mu_1^4) = 1.4507 \times 10^{-11}; \\
E(\gamma_2) &= 0.06; E(\gamma_2^2) = 0.0036; \\
E(\gamma_2^3) &= 2.1762 \times 10^{-4}; E(\gamma_2^4) = 1.1775 \times 10^{-5}.
\end{aligned}$$

Bu momentler ile genel Beta dağılımına sahip rastgele etkiler altındaki modelde $I_2(t)$ değişkeni için yaklaşık beklenen değer $n = 5$ terim kullanarak RDDY ile aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
E(I_2(t)) &= 20 - 1.44t + 0.0983476t^2 - 0.0076181985333337t^3 \\
&\quad + 0.00052823851534253t^4.
\end{aligned} \tag{68}$$



Şekil 35. I_2 için deterministik çözüm ile MRDDY ve RDDY yaklaşımı

Bu yaklaşım, normal rastgele etkiler için uygulanan yönteme benzer şekilde [2,2] mertebesinde MRDDY ile şu hale getirilir:

$$E(I_2(t)) = (16.39330771 \sinh(0.1190492459t) + 20 \cosh(0.1190492459t)) (exp^{(-0.1695805460t)}). \quad (69)$$

Tablo 14. $I_2(t)$ için beta etkiler altında yaklaşık çözümler – beklenen değerler

t	Deterministik (MATLAB)	Deterministik DDY ($n = 5$)	Rastgele Simülasyon	RDDY ($n = 5$)	MRDDY [2,2]
0	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0
1.0	18.65	18.6512	18.65	18.6513	18.6512
2.0	17.46	17.4606	17.46	17.4609	17.4600
3.0	16.39	16.4016	16.40	16.4022	16.3957
4.0	15.43	15.4602	15.44	15.4612	15.4350
5.0	14.55	14.6353	14.57	14.6366	14.5599
5.1	14.47	14.5595	14.48	14.5608	14.4765
5.2	14.39	14.4850	14.40	14.4864	14.3939
5.3	14.30	14.4119	14.32	14.4132	14.3119
5.4	14.22	14.3400	14.24	14.3414	14.2306
5.5	14.14	14.2695	14.16	14.2709	14.1500
5.6	14.06	14.2004	14.08	14.2018	14.0701
5.7	13.98	14.1327	14.00	14.1341	13.9908
5.8	13.90	14.0664	13.92	14.0678	13.9121
5.9	13.82	14.0015	13.84	14.0029	13.8341
6.0	13.74	13.9381	13.76	13.9396	13.7566
6.1	13.67	13.8762	13.68	13.8777	13.6798
6.2	13.59	13.8159	13.61	13.8174	13.6036
6.3	13.51	13.7572	13.53	13.7586	13.5280
6.4	13.44	13.7000	13.46	13.7015	13.4530
6.5	13.36	13.6445	13.38	13.6460	13.3785
6.6	13.29	13.5906	13.31	13.5921	13.3046
6.7	13.22	13.5385	13.23	13.5400	13.2313
6.8	13.14	13.4881	13.16	13.4896	13.1585
6.9	13.07	13.4395	13.09	13.4410	13.0862
7.0	13.00	13.3928	13.02	13.3943	13.0145
7.1	12.93	13.3479	12.94	13.3494	12.9433
7.2	12.85	13.3050	12.87	13.3064	12.8726
7.3	12.78	13.2640	12.80	13.2654	12.8024
7.4	12.71	13.2250	12.73	13.2264	12.7328
7.5	12.64	13.1881	12.66	13.1895	12.6636
7.6	12.57	13.1532	12.59	13.1547	12.5949
7.7	12.50	13.1206	12.52	13.1220	12.5268
7.8	12.44	13.0301	12.46	13.0915	12.4590
7.9	12.37	13.0619	12.38	13.0633	12.3917
8.0	12.30	13.0361	12.31	13.0374	12.3250

$I_2(t)$ için (57) deterministik sisteminden MATLAB ile elde edilen yaklaşık değerler, (62) ile elde edilen DDY yönteminden $n = 5$ terim ile elde edilen yaklaşık değerler, (67) rastgele modeli için RDDY ile elde edilen (68) ve MRDDY ile elde edilen (69) yaklaşık beklenen değerleri tabloda karşılaştırılmaktadır (Tablo 14). Deterministik çözüm, (68) yaklaşık beklenen değeri ve (69) modifiye yaklaşık değeri Şekil 35'te görülmektedir.

(67) rastgele sisteminin simülasyonundan $I_2(t)$ için $t = 8$ anında elde edilen 12.32 değeri baz alınarak (68) ve (69) yaklaşık beklenen değerlerinin karşılaştırılması ile RDDY ve MRDDY hakkında yorum yapılabilir. RDDY için mutlak hata oranı

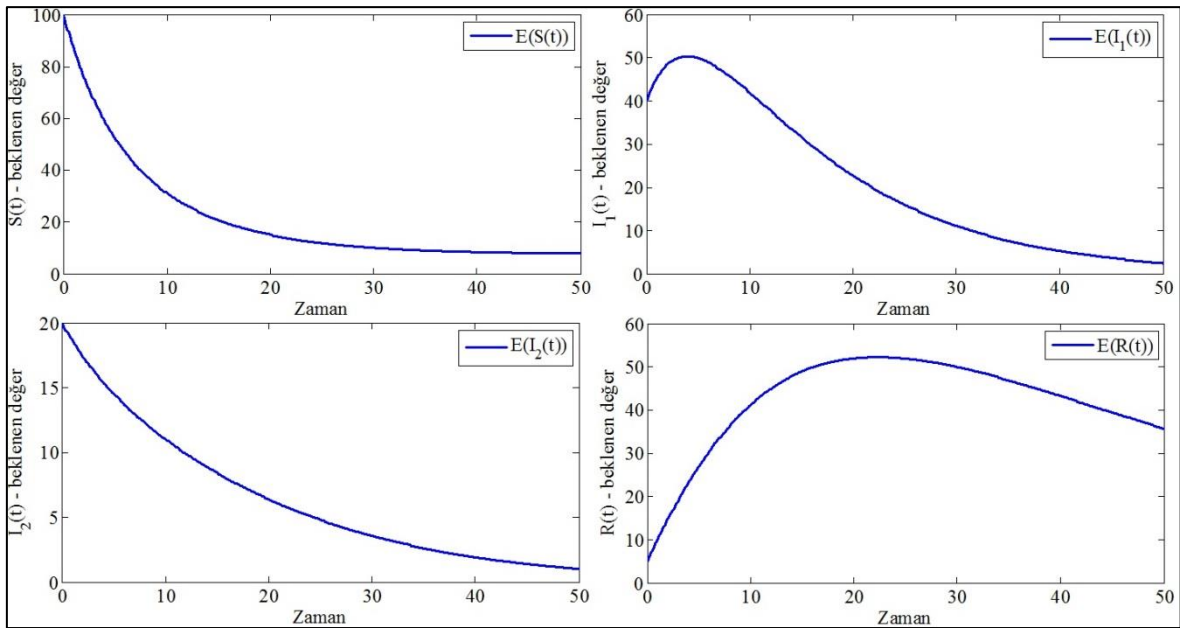
$$100 \times \frac{|12.32 - 13.0374|}{12.32} \approx 5.82$$

iken bu oran MRDDY için

$$100 \times \frac{|12.32 - 12.3250|}{12.32} \approx 0.04$$

olarak gerçekleşmektedir. MRDDY ile açığa çıkan hatanın önemli ölçüde azaltıldığı görülmektedir.

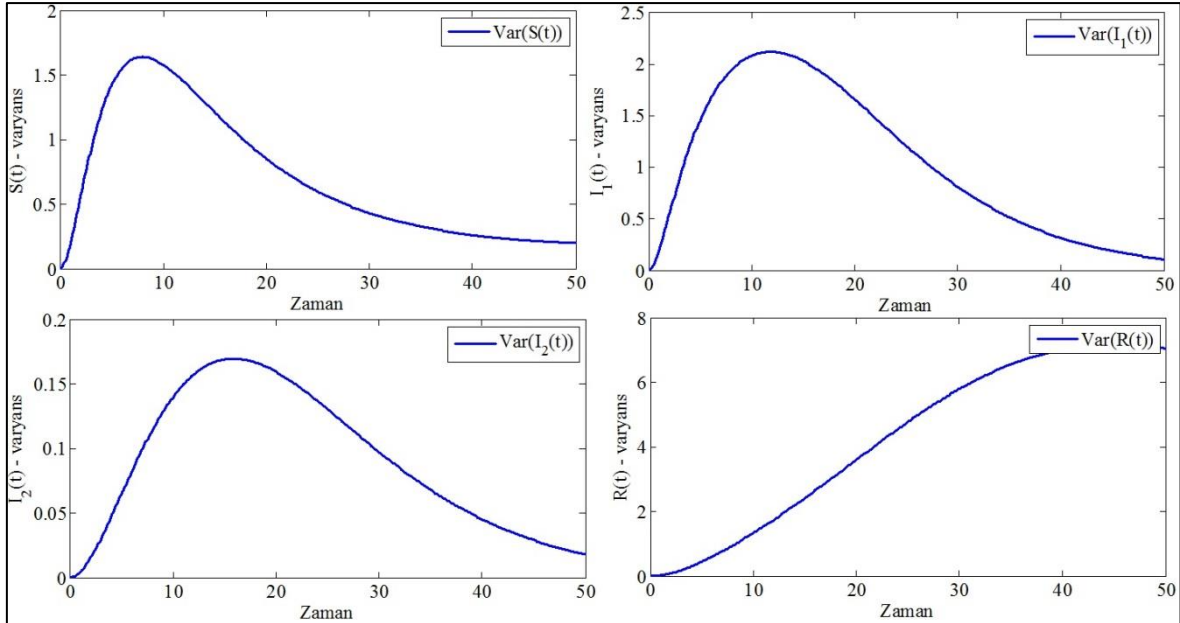
(67) modelinin rastgele davranışlarının geniş zaman aralığında incelenmesi için Monte-Carlo yöntemi ile sistemin simülasyonları yapılacaktır. 100000 adet tekrar kullanılarak (67) modelinin $S(t)$, $I_1(t)$, $I_2(t)$ ve $R(t)$ değişkenleri için beklenen değerler şekilde gösterilmektedir (Şekil 36).



Şekil 36. SIIR sisteminin genel Beta etkiler altında beklenen değerleri

Rastgele sistemin beta dağılımına sahip etkiler altında da normal etkiler altındaki model ve deterministik durum ile uyumlu sonuçlar verdiği görülmektedir. $S(t)$ değişkeninin beklenen değeri $t = 50$ anında 7.768 ile minimum değerini alırken $t = 0$ anında 100 ile maksimum değerini almaktadır. $I_1(t)$ değişkeninin beklentisi $t = 50$ anında 2.504 ile minimum değerine ulaşmakta ve $t = 4$ anında 50.3 maksimum değerini almaktadır. $I_2(t)$ değişkeninin beklenen değeri $t = 50$ anında 0.9933 minimum noktasında iken maksimum değerini $t = 0$ anında 20 ile yakalamaktadır. $R(t)$ değişkeninin beklenen değeri için minimum değer $t = 0$ anında 5 iken maksimum değer $t = 22.4$ anında 52.34 olmaktadır. Genel Beta dağılımına sahip rastgele etkiler altında da sistem R_0 üreme katsayısının gerektirdiği gibi hastalığın topluluktan silinmesine işaret eden şekilde sonuç vermektedir. Genel Beta rastgele etkiler için tanım aralığının normal dağılımla uyumlu şekilde seçilmesi, beklenen değerlerin normal dağılıma sahip rastgele etkiler için elde edilen beklenen değerlere uygun çıkmasını sağlamıştır.

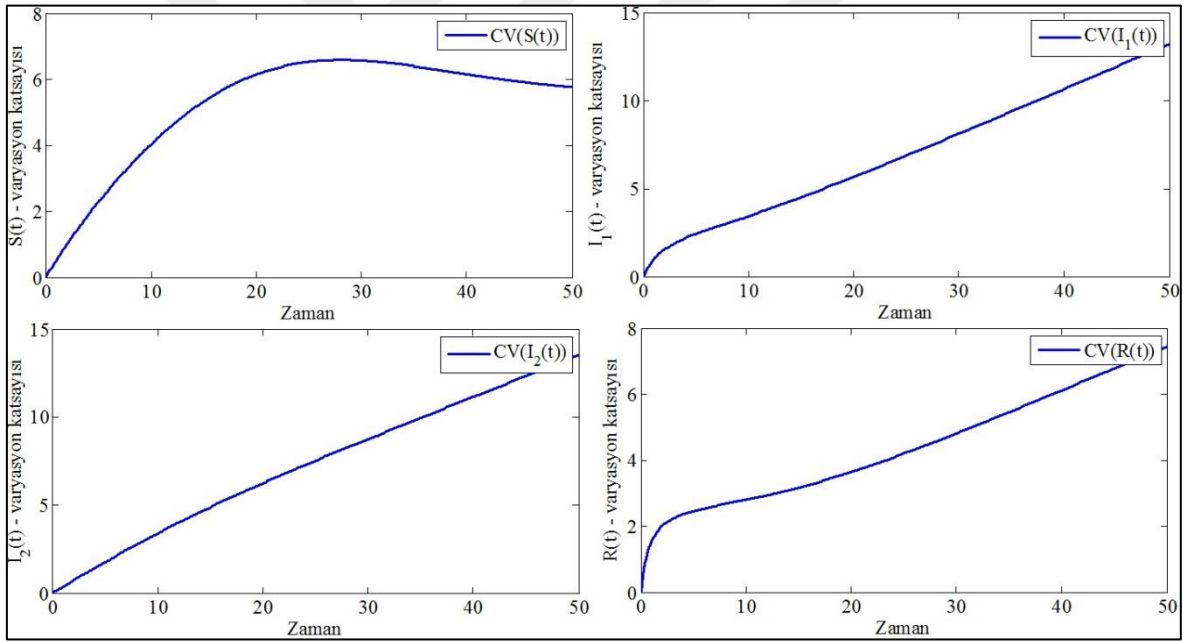
(67) modelinin $S(t), I_1(t), I_2(t)$ ve $R(t)$ değişkenleri için varyanslar şekilde gösterilmektedir (Şekil 37).



Şekil 37. SIIR sisteminin genel Beta etkiler altında varyansları

Genel Beta dağılımına sahip rastgele etkiler altındaki varyanslar da normal etkiler altındaki modelden elde edilen varyanslarla benzer şekilde bulunmuştur. $S(t)$ değişkeni için minimum varyans $t = 0$ anında 0 iken maksimum varyans $t = 8$ anında 1.659 olarak elde edilmektedir. $I_1(t)$ değişkeni için minimum varyans $t = 0$ anında 0 iken maksimum varyans $t = 11.3$ anında 2.017 olarak bulunmaktadır. $I_2(t)$ için minimum varyans $t = 0$ anında 0 iken maksimum varyans $t = 15.7$ anında 0.1691 olarak elde edilmektedir. $R(t)$ için minimum varyans $t = 0$ anında 0 iken maksimum varyans $t = 45.1$ anında 7.109 olarak elde edilmiştir. $S(t), I_1(t), I_2(t)$ için varyanslar 8-16. yıllar arasında maksimum düzeye ulaşırken $R(t)$ için bu değer 45. yıl şeklindedir.

(67) modelinin $S(t), I_1(t), I_2(t)$ ve $R(t)$ değişkenleri için varyasyon katsayıları şekilde gösterilmektedir (Şekil 38).



Şekil 38. SIIR sisteminin genel Beta etkiler altında varyasyon katsayıları

$S(t)$ değişkeni için varyasyon katsayısı $t = 0$ anında 0 ile minimum, $t = 28$ anında 6.651 ile maksimum değerini elde etmektedir. $I_1(t)$ değişkeni için varyasyon katsayısı $t = 0$ anında 0 ile minimum, $t = 50$ anında 12.89 ile maksimum değerine ulaşmaktadır. $I_2(t)$ değişkeni $t = 0$ anında 0 ile minimum, $t = 50$ anında 13.37 ile maksimum değerine ulaşmaktadır. $R(t)$ değişkeni $t = 0$ anında 0 ile minimum, $t = 50$ anında 7.393 ile maksimum değerine ulaşmaktadır.

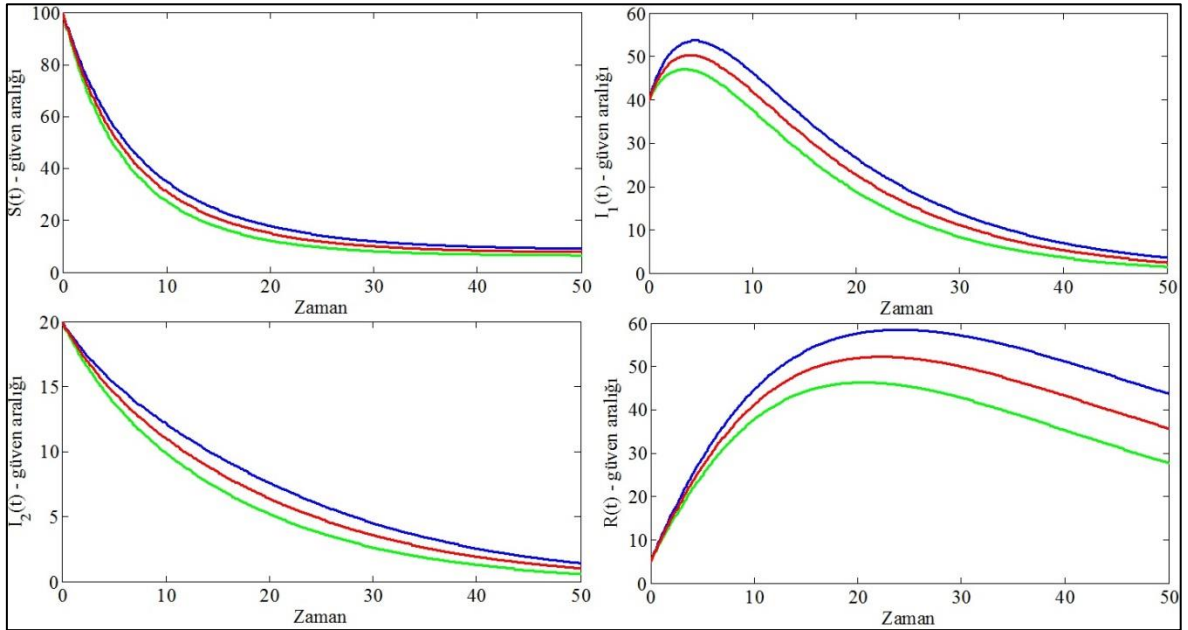
SIIR modelinin normal ve genel Beta rastgele etkiler altındaki maksimum değerleri karşılaştırıldığında neredeyse aynı değerlerin elde edildiği görülmektedir. Aynı beklenen değer-varyans ve %99.73 oranında benzer tanım aralıkları ile oluşturulan rastgele etkiler altında benzer varyasyon katsayıları oluşmuştur.

Tablo 15. SIIR modelinin varyasyon katsayıları için maksimum değerler

	Normal dağılım ile varyasyon katsayısı	G. Beta dağılımı ile varyasyon katsayısı
$S(t)$	%6.654	%6.651
$I_1(t)$	%12.89	%12.89
$I_2(t)$	%13.43	%13.37
$R(t)$	%7.4	%7.39

SIIR modelinin normal ve genel Beta rastgele etkiler altındaki maksimum değerleri karşılaştırıldığında neredeyse aynı değerlerin elde edildiği görülmektedir. Aynı beklenen değer-varyans ve %99.73 oranında benzer tanım aralıkları ile oluşturulan rastgele etkiler altında benzer varyasyon katsayıları oluşmuştur.

(67) modeli için varyasyon katsayıları şekilde gösterilmektedir (Şekil 39).



Şekil 39. SIIR sisteminin genel Beta etkiler altında güven aralıkları

Genel Beta dağılımına sahip rastgele etkiler altındaki SIIR modeli için de güven aralıkları ortalama değerlerin üç standart sapma civarında oluşturulmuştur. $S(t)$ değişkeni için güven aralığı $t = 50$ anında 6.416 minimum değerini ve $t = 0$ anında 100 maksimum değerini almaktadır. $I_1(t)$ değişkeni için güven aralığı $t = 50$ anında 1.536 minimum değerini ve $t = 4.4$ anında 53.62 maksimum değerini almaktadır. $I_2(t)$ değişkeni için güven aralığı $t = 50$ anında 0.5949 minimum değerini ve $t = 0$ anında 20 maksimum değerini almaktadır. $R(t)$ değişkeni için güven aralığı $t = 0$ anında 5 minimum değerini ve $t = 24.1$ anında 58.62 maksimum değerini almaktadır.

2.3.4. Stokastik Etkiler Altında Model Dinamikleri

Önceki kısımda Çocuk Felci ve Hepatit B hastalıkları için ele alınan sırasıyla (43) ve (57) tarzı deterministik modellerin rastgele koşullar altında analizi için çoğunlukla stokastik modeller kullanılmaktadır. Dolayısıyla bu modeller için normal rastgele etkiler kullanarak oluşturulan (45) ve (59) rastgele modellerinin sonuçlarını bu tarzdaki modeller ile karşılaştırmak adına deterministik modellere stokastik etkiler eklenerek stokastik diferansiyel denklem sistemleri oluşturulacaktır. (5) ile verilen

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t$$

formatında Ito stokastik diferansiyel denklemleri kullanarak (43) deterministik Çocuk Felci modeli için aşağıdaki stokastik modeli elde edilir:

$$\begin{aligned} dS(t) &= (\Lambda - (d + p)S - \beta SI)dt + \sigma_1 S(t)dW_{1t}, \\ dV(t) &= (pS - dV - \theta\beta VI)dt + \sigma_2 V(t)dW_{2t}, \\ dE(t) &= (\beta I(S + \theta V) - (d + \varepsilon)E)dt + \sigma_3 E(t)dW_{3t}, \\ dI(t) &= (\varepsilon E - (d_I + \gamma)I)dt + \sigma_4 I(t)dW_{4t}. \end{aligned} \tag{70}$$

Stokastik model için de başlangıç değerleri $S(0) = 20$, $V(0) = 15$, $E(0) = 5$, $I(0) = 5$ şeklindedir. (70) modelinde dW_{i_t} , $i = \overline{1,4}$ ile birbirinden bağımsız Wiener süreçleri ve σ_i , $i = \overline{1,4}$ ile stokastik diferansiyel denklemler için birbirinden bağımsız difüzyon katsayıları verilmektedir. (59) modelinde parametrelerin rastgele davranışlarını temsil etmek için rastgele etki terimleri parametrelere eklenmişken (70) modelinde

denklemlerdeki genel rastgele davranışı incelemek için stokastik etki terimleri denklemlere eklenmektedir. Dolayısıyla stokastik denklem sistemi modelin parametreleri dışındaki bileşenleri için de rastgele davranışların sonuçlarını içermektedir. Benzer şekilde (57) deterministik Hepatit B modeli

$$\begin{aligned}
 dS(t) &= (b - \alpha SI_2 - (\mu_0 + \nu)S)dt + \sigma_1 S(t)dW_{1t}, \\
 dI_1(t) &= (\alpha SI_2 - (\mu_0 + \beta + \gamma_1)I_1)dt + \sigma_2 I_1(t)dW_{2t}, \\
 dI_2(t) &= (\beta I_1 - (\mu_0 + \mu_1 + \gamma_2)I_2)dt + \sigma_3 I_2(t)dW_{3t}, \\
 dR(t) &= (\gamma_1 I_1 + \gamma_2 I_2 + \nu S - \mu_0 R)dt + \sigma_4 R(t)dW_{4t}.
 \end{aligned} \tag{71}$$

şeklinde stokastik hale getirilir. Başlangıç değerleri benzer şekilde deterministik başlangıç değerleridir: $S(0) = 100$, $I_1(0) = 40$, $I_2(0) = 20$, $I(0) = 5$. (70)-(71) modelleri stokastik süreçler içerdiğinden artık model değişkenleri de birer stokastik süreç haline gelmiştir ancak modeller arası geçişin anlaşılabilir olması açısından gösterimlerinde bir değişiklik yapılmamıştır.

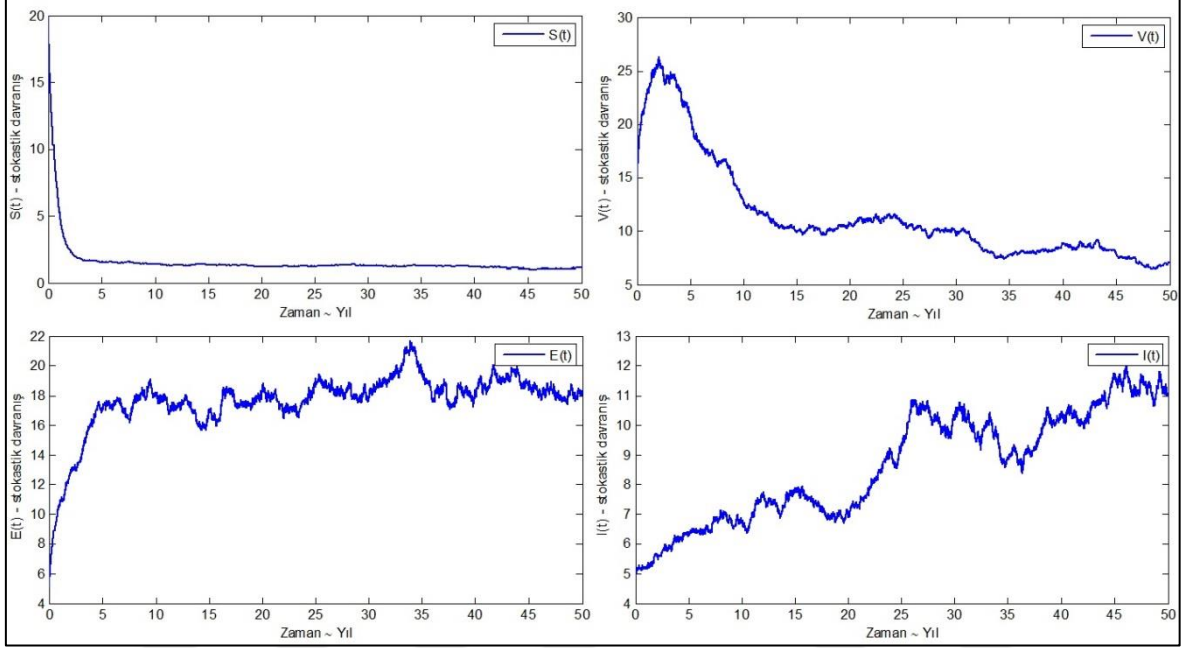
(70) ve (71) stokastik modellerinin birer olası gerçekleştirmelerinin sayısal çözümleri kullanılarak rastgele modelin beklenen değerleri ve varyansları ile karşılaştırılacak ve rastgele model için elde edilen sonuçlarla ilgili yorumlar yapılacaktır. Deterministik sayısal yöntemlerin stokastik denklemlere uyarlanışları literatürde mevcuttur. Bu yöntemlerden stokastik Euler (Euler-Maruyama) ve Milstein yöntemleri [68] kullanılarak modellerdeki Ito stokastik diferansiyel denklemleri için yaklaşımlar elde edilebilir. $t_0 \leq t \leq T$ üzerinde $X_{t_0} = X_0$ başlangıç koşulu ile (5) formundaki bir stokastik diferansiyel denklemin çözümü olan $X = X_t$, $t_0 \leq t \leq T$ stokastik sürecini ele alalım. $[t_0, T]$ aralığının $t_0 = \tau_1 < \dots < \tau_n < \dots < \tau_N = T$ şeklindeki bir ayrılışı için ($n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$) Euler-Maruyama yaklaşımı

$$Y_{n+1} = Y_n + a(\tau_n, Y_n)(\tau_{n+1} - \tau_n) + b(\tau_n, Y_n)(W_{n+1} - W_n) \tag{72}$$

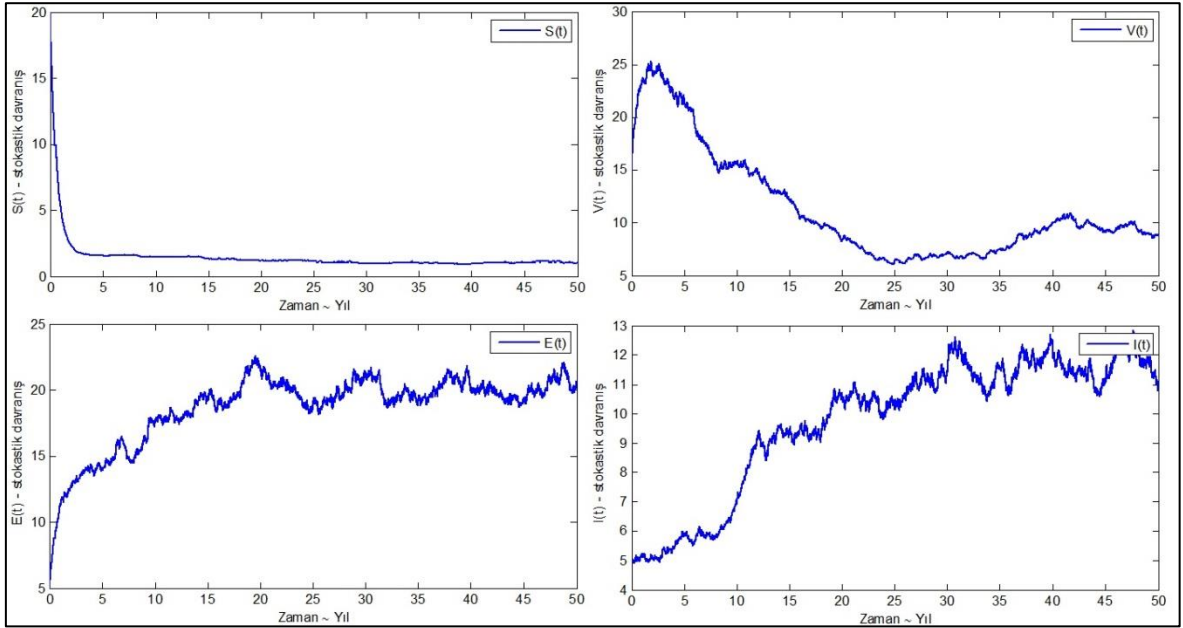
ardışık yöntemini sağlayan bir $Y = Y_t$, $t_0 \leq t \leq T$ stokastik sürecidir. Benzer şekilde Milstein yaklaşımı ise aynı koşullar altında

$$Y_{n+1} = Y_n + a(\tau_n, Y_n)\Delta + b(\tau_n, Y_n)\Delta W + \frac{1}{2}bb'(\Delta W)^2 \quad (72)$$

ardışık yöntemini sağlayan $Y = Y_t, t_0 \leq t \leq T$ stokastik sürecidir.



Şekil 40. SVEIR sisteminin stokastik Euler yöntemi ile çözümleri



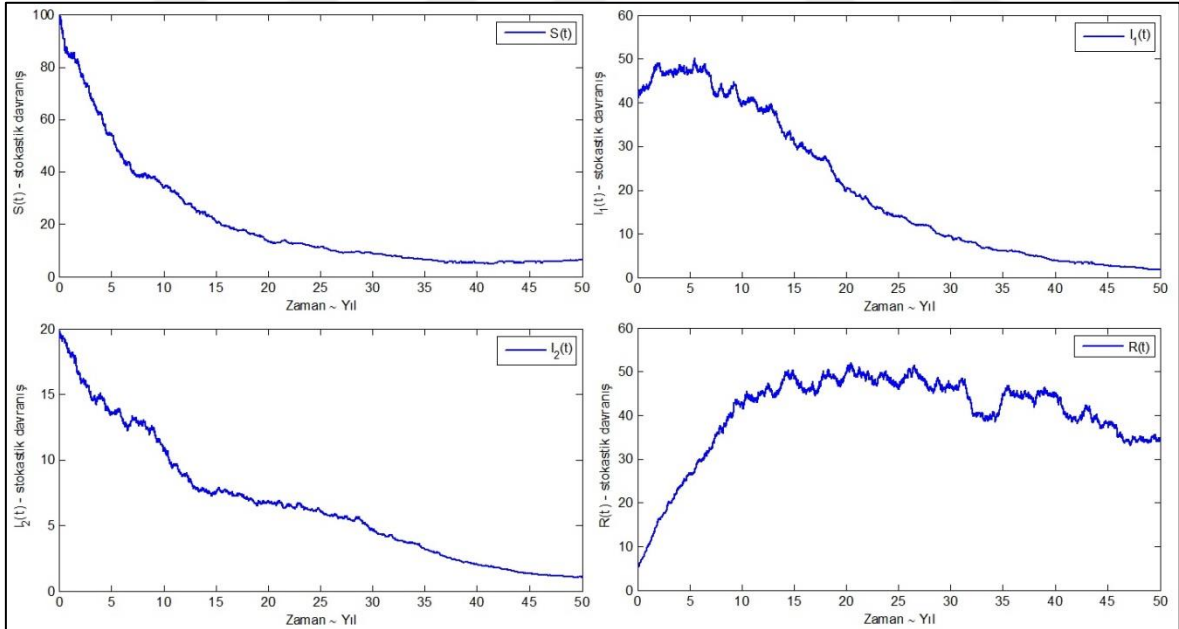
Şekil 41. SVEIR sisteminin stokastik Milstein yöntemi ile çözümleri

Burada adım boyu $\Delta = (\tau_{n+1} - \tau_n)$ ile gösterilmektedir. Bu yöntemler kullanılarak (70) modeli için elde edilen çözümler grafiklerde gösterilmektedir (Şekil 40 - 41).

Stokastik Euler-Maruyama yöntemi ile uç değerler şöyledir (Şekil 40): $S(t)$ değişkeni için minimum değer $t = 45.61$ anında 0.9918, maksimum değer ise $t = 0$ anında 20 olarak elde edilmektedir. $V(t)$ için minimum değer $t = 48.34$ anında 6.371, maksimum değer ise $t = 2.114$ anında 26.33 olarak bulunmuştur. $E(t)$ için minimum $t = 0$ anında 5 iken maksimum $t = 33.88$ anında 21.66 olmaktadır. $I(t)$ için minimum $t = 0.022$ anında 4.968 iken maksimum $t = 46.14$ anında 12.06 olmaktadır.

Stokastik Milstein yöntemi ile uç değerler şu şekilde elde edilmiştir (Şekil 41): $S(t)$ değişkeni için minimum değer $t = 19.31$ anında 0.9752, maksimum değer ise $t = 0$ anında 20 olarak bulunmaktadır. $V(t)$ için minimum değer $t = 24.79$ anında 6.048, maksimum değer ise $t = 1.909$ anında 25.26 olarak elde edilmiştir. $E(t)$ için minimum $t = 0$ anında 5 iken maksimum $t = 19.55$ anında 22.63 olarak bulunmuştur. $I(t)$ için minimum $t = 0.273$ anında 4.908 iken maksimum $t = 47.66$ anında 12.85 olmaktadır.

(71) modeli için elde edilen çözümler grafiklerde gösterilmektedir (Şekil 42 - 43).

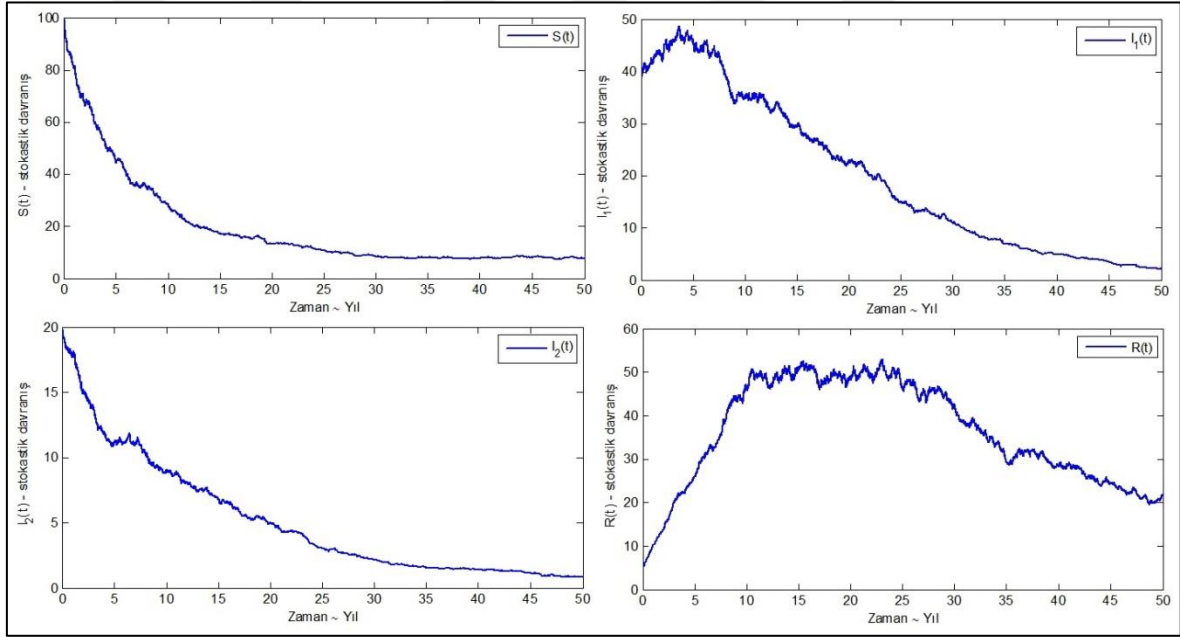


Şekil 42. SIIR sisteminin stokastik Euler yöntemi ile çözümleri

Stokastik Euler-Maruyama yöntemi ile uç değerler şöyledir (Şekil 42): $S(t)$ değişkeni için minimum değer $t = 49.98$ anında 6.584, maksimum değer ise $t = 0$ anında 100 olarak

elde edilmektedir. $I_1(t)$ için minimum değer $t = 49.5$ anında 1.768, maksimum değer ise $t = 5.523$ anında 50.27 olarak bulunmuştur. $I_2(t)$ için minimum $t = 50$ anında 0.9923 iken maksimum $t = 0$ anında 20 olmaktadır. $R(t)$ için minimum $t = 0$ anında 5 iken maksimum $t = 20.47$ anında 52.5 olmaktadır.

Stokastik Milstein yöntemi ile uç değerler şu şekilde elde edilmiştir (Şekil 43): $S(t)$ değişkeni için minimum değer $t = 47.32$ anında 7.254, maksimum değer ise $t = 0$ anında 100 olarak elde edilmektedir. $I_1(t)$ için minimum değer $t = 49.73$ anında 2.174, maksimum değer ise $t = 3.71$ anında 48.84 olarak elde edilmiştir. $I_2(t)$ için minimum $t = 49.82$ anında 0.864 iken maksimum $t = 0$ anında 20 olmaktadır. $R(t)$ için minimum $t = 0.001$ anında 4.998 iken maksimum $t = 23.11$ anında 53.16 olarak bulunmuştur.



Şekil 43. SIIR sisteminin stokastik Milstein yöntemi ile çözümleri

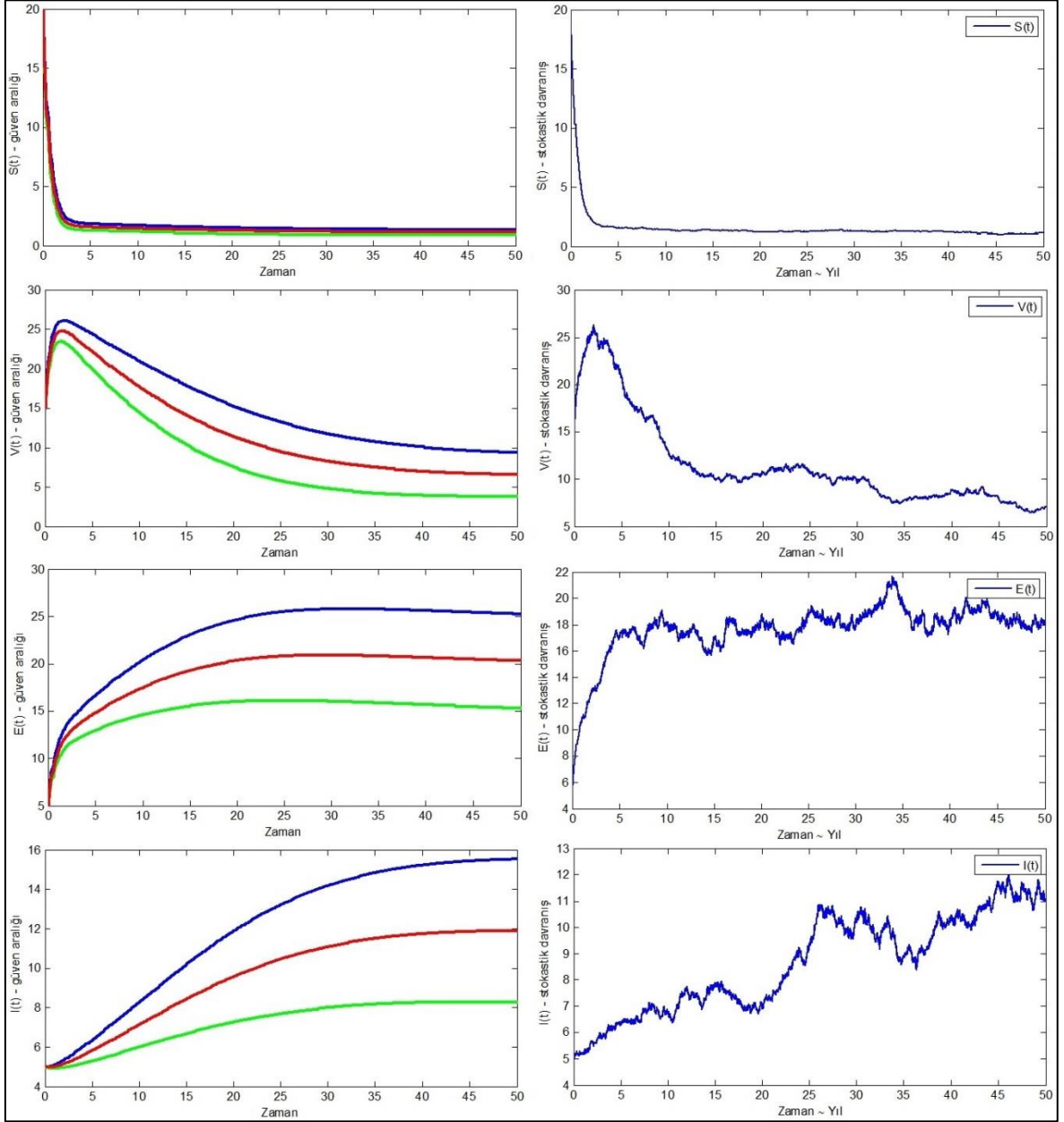
(70) ve (71) stokastik modelleri için difüzyon katsayıları $\sigma_i = 0.05, i = \overline{1,4}$ olarak kullanılmıştır. Bu da $dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t$ şeklindeki stokastik diferansiyel denklemlerin difüzyon katsayıları olan $b(t, X_t)$ fonksiyonlarının

$$\sigma_i \times X_t = 0.05 \times X_t$$

olarak belirlenmesi ve σ_i için sayısal çözümlerde 0.05 değerinin kullanılması anlamına gelmektedir. SIIR modelinde S kompartmanına eklenen stokastik gürültüde bu difüzyon katsayısı

$$\sigma_1 S(t)$$

iken diğer kompartmanlar için $\sigma_2 I_1(t)$, $\sigma_3 I_2(t)$ ve $\sigma_4 R(t)$ şeklindedirler.

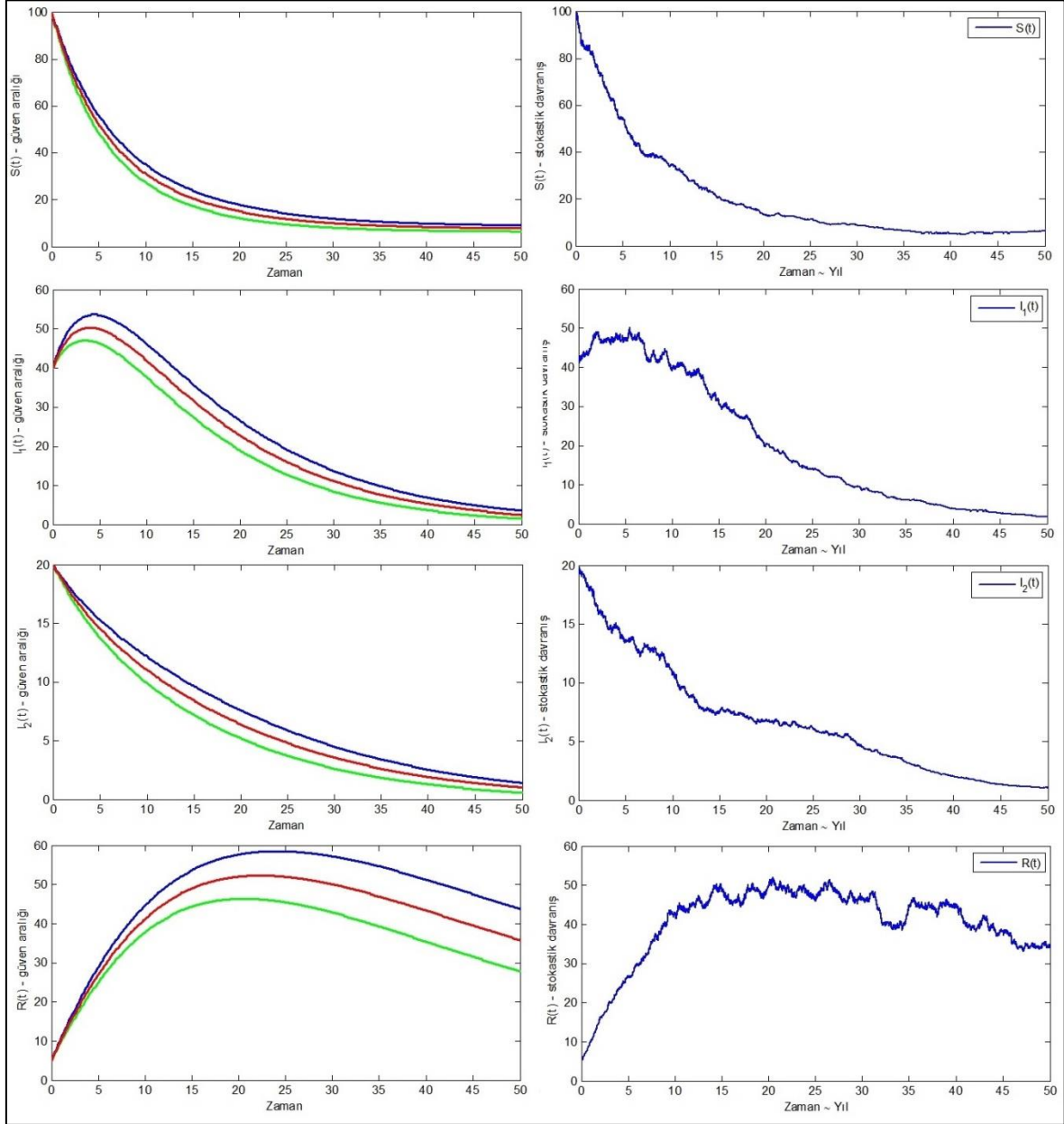


Şekil 44. SVEIR sisteminin stokastik çözümleri ve rastgele halinin güven aralıkları

SVEIR modeli için de difüzyon katsayılarının aynı şekilde belirlendiği görülmektedir. Rastgele parametrelerde de rastgele etkinin standart sapması için deterministik parametre değerinin %5'i kullanılmıştı. Örneğin SIIR modelinin S

kompartmanındaki b değişkeni rastgele hale getirilirken deterministik değerine eklenen rastgele etki şu şekildedir:

$$s_i \times b$$



Şekil 45. SIIR sisteminin stokastik çözümleri ve rastgele halinin güven aralıkları

Rastgele ve stokastik modellerin kurulumu esnasındaki bu ince detayın, aşağıdaki şekillerde de görüldüğü gibi stokastik gerçekleştirmelerin rastgele güven aralıkları içinde kalmasında etkili olduğu düşünülmektedir (Şekil 44). Şekilde görüldüğü gibi yaklaşım

stokastik çözümler, modelin rastgele halinde değişkenlerin güven aralıklarının içinde yer almaktadırlar (grafiklerin x-eksenlerinin sınırlarına dikkat edilmelidir).

Benzer şekilde (71) sisteminin stokastik çözümleri ile aynı modelin rastgele halinde değişkenlerin güven aralıkları karşılaştırılırsa, stokastik çözümlerin aynı şekilde güven aralıklarının içinde seyrettiği görülebilir (grafiklerin x-eksenlerinin sınırlarına dikkat edilmelidir). Burada stokastik çözümler için Euler-Maruyama yöntemi ile elde edilen çözümler kullanılmıştır (Şekil 45).

Stokastik etkiler altındaki çözümlerin rastgele modellerin beklenen değerleri için oluşan grafiklere benzer gerçekleştirmeler göstermesi, stokastik çözümlerin rastgele modellerin güven aralıkları içinde seyretmesi ve bu sonuçların deterministik modellerin çözümleri ve üreme katsayılarıyla uyumlu olması, rastgele etkiler ile kurulan modellerin kompartmanlı modeller ile incelenen salgın hastalık modellerinin rastgele analizinde hem basit hem de etkili bir araç olduğunu göstermektedir.

3. BULGULAR

Bu çalışmada literatürde deterministik diferansiyel denklem sistemlerinin katsayılarının “rastgele etki” terimleri aracılığıyla rastgele değişkenler haline getirilerek bu sistemlerin rastgele davranışlarının ve sayısal karakteristikleri aracılığıyla araştırılması incelenmiştir. Salgın hastalıklarla ilgili SIR, SVEIR ve SIIR tipli kompartmanlı modeller üzerinde normal ve genel Beta dağılımına sahip rastgele etkiler uygulanmış ve elde edilen rastgele modellerin incelenerek modelledikleri hastalıklar, kullanılan dağılımlar ve uygulanan yöntemlerle ilgili çıkarımlar yapılmıştır. Oluşturulan rastgele modellerin hastalıkların rastgele davranışı modelleme kabiliyetleri hakkında inceleme yapabilmek için modellere stokastik gürültü eklenmiş ve elde edilen stokastik modeller ve rastgele modellerin sonuçları karşılaştırılmıştır.

Normal ve genel Beta dağılımlarına sahip rastgele etkiler ile oluşturulan modellerin çözümleri hem kısa hem de uzun dönemde incelenmiştir. Kısa dönemli çözümlerin incelenmesi için literatürde rastgele diferansiyel denklemlere uygulanışı verilmiş olan Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi kullanılmıştır. Elde edilen yaklaşık analitik çözümlerdeki hataların azaltılması için deterministik düzeyde Diferansiyel Dönüşüm Yöntemine uygulanan Laplace-Padé yöntemi rastgele Diferansiyel Dönüşüm Yöntemine uygulanmıştır. Modifiye rastgele Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi (MRDDY) olarak adlandırılan bu yöntem ile rastgele diferansiyel denklem sistemleri için elde edilen çözümler ve rastgele Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi (RDDY) ile elde edilen çözümler karşılaştırılmıştır. Ek olarak MRDDY ve RDDY ile rastgele modeller için hem normal hem de genel Beta dağılımlarına sahip durumlar için yaklaşımlar elde edilmiş ve dağılımların elde edilen yaklaşık momentlere etkileri gösterilmiştir.

Rastgele modellerin uzun dönemdeki rastgele davranışlarını incelemek için Monte-Carlo tekniği ile simülasyonları yapılmıştır. Simülasyonlar ile elde edilen sonuçlar kullanılarak modellerin sayısal karakteristikleri incelenmiş ve ayrıca bu sayısal karakteristikler kullanılarak sonuçların denklem sistemleri ve bu sistemlerin modelledikleri hastalıklar hakkında nasıl yorumlanacağına dair örnekler verilmiştir. Normal rastgele etkiler ve genel Beta rastgele etkiler için benzer değerler kullanılarak oluşturulan rastgele modellerin simülasyonu ile bu dağılımların uzun vadede sonuçlar üzerinde ne gibi etkilerinin olduğu araştırılmıştır.

Çalışmada kullanılan hastalık modellerinin, kaynak alınan çalışmalarda verilen model parametreleri kullanılarak, deterministik çözümleri elde edilmiştir. Deterministik çözümler, normal ve genel Beta dağılımlarına sahip etkiler altında elde edilen rastgele modellerin RDDY ve MRDDY ile elde edilen yaklaşık beklenen değerleri ve Monte-Carlo simülasyonu ile elde edilen beklenen değerleri ile karşılaştırılmıştır. Bu sayede deterministik ve rastgele modeller arasındaki farklar, simülasyon ve yaklaşık çözüm yöntemlerinin rastgele davranışları doğru bir şekilde yansıtabilme kabiliyetleri ve farklı yaklaşık çözümlerin içerdikleri hatalar karşılaştırılmıştır. Son olarak stokastik modellerden elde edilen çözümler de kullanılarak rastgele modellerde kısa ve uzun dönem için yapılan incelemelerin hastalıklarla ilgili sunduğu bilgilerin çok yönlü karşılaştırma ve kıyaslamaları yapılmıştır.

4. İRDELEME

Çalışma kapsamında elde edilen sonuçlar literatürde var olan deterministik modelleme çalışmalarına uygundur ve hazırda yapılmakta olan rastgele-stokastik analizlerden farklı olarak deterministik modellerin rastgele davranışlarının kolaylıkla incelenmesi için bir yöntem sunmaktadır. Yöntem, denklemlere stokastik gürültü ekleyerek stokastik diferansiyel denklem oluşturma tekniğine benzer şekilde parametrelere gürültü görevi üstelenen rastgele etki terimleri ekleyerek rastgele diferansiyel denklem oluşturma prensibine dayanmaktadır. Kompartmanlı modellerin hemen hepsine basitçe uygulanabilecek olan bu yöntem literatürde çoğunlukla stokastik süreçler kullanılarak yapılan analizlerin çok daha basit ve hızlı şekilde yapılabilmesine imkân sağlamaktadır.

Literatürde rastgele diferansiyel denklemlerle ilgili teorik altyapısı ve örnekleri verilen rastgele Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi ilk defa salgın hastalık modelleri olarak oluşturulan kompartmanlı modellere uygulanmıştır. Belirli varsayımlar altında kısa zaman aralıklarında modellerde faydalı sonuçlar verdiği görülen bu yöntemin geliştirilmesi için deterministik Diferansiyel Denklem Yönteminin modifikasyonlarından biri rastgele modellere uyarlanmıştır. İlk defa rastgele denklemlere uygulanan Laplace-Padé modifikasyonu ile rastgele denklem sistemlerinde rastgele Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi ile elde edilen yaklaşımların iyileştirildiği gözlemlenmiştir.

SIR modeli bazında literatürde kompartmanlı modellerin rastgele incelenmesi ile ilgili birkaç örneğe rastlanmıştır olsa da “rastgele etki”, “rastgele Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi” ve “Modifiye rastgele Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi” salgın hastalık modellerine ilk defa uygulanmış ve kompartmanlı modellerin rastgele incelemeleri için faydalı sonuçlar elde edilebileceği gösterilmiştir. Literatürde Çocuk Felci ve Hepatit B hastalığı için verilmiş olan iki model üzerinde bu yöntemler ilk kez kullanılmış ve çalışmaların literatürde var olan rastgele analizlere kıyasla daha hızlı bir şekilde ve daha kolayca modellerin rastgele sonuçlarının incelenmesi için kullanılabileceği gösterilmiştir.

5. SONUÇLAR

Tez çalışmaları kapsamında deterministik kompartmanlı modellerin rastgele etkiler altında incelenmesi için yöntemler sunulmuş ve bu yöntemler bazı model örneklerine uygulanarak modellerin rastgele analizi yapılmıştır.

- Literatürde var olan rastgele Diferansiyel Dönüşüm Yönteminin (RDDY) deterministik Diferansiyel Dönüşüm Yönteminin modifikasyonlarından biri olan Laplace-Padé tekniği ile geliştirilmesinin detayları verilmiştir.
- SIR modeli için normal dağılıma sahip rastgele etkiler kullanılarak rastgele model oluşturulmuştur. RDDY yöntemi ile SIR modeli için yaklaşık beklenen değer hesaplanmıştır. RDDY ile yaklaşık varyans ve yaklaşık güven aralıklarının hesabı verilmiştir. Elde edilen yaklaşık beklenen değer MRDDY ile modifiye edilmiş ve sonuçlar deterministik sonuçlarla da karşılaştırılarak hatanın azaltıldığı gösterilmiştir.
- SIR modeli için normal dağılıma sahip rastgele etkiler altındaki Monte-Carlo simülasyonları ile beklenen değer, varyans, standart sapma, varyasyon katsayısı, güven aralığı, üçüncü ve dördüncü merkezi moment ile çarpıklık ve basıklık katsayıları hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar deterministik çözümler ve RDDY-MRDDY yaklaşımları ile kıyaslanmış ve bu sonuçlar ve sayısal karakteristiklerin modellenen olayla ilgili yorumlanması verilmiştir.
- Çocuk Felcinin modellenmesi için oluşturulmuş SVEIR tipli kompartmanlı model için normal dağılıma sahip rastgele etkiler altında bir rastgele model oluşturulmuştur. Bu rastgele modelin bir kompartmanı için RDDY ile $n = 5$ terim kullanarak yaklaşık beklenen değer hesaplanmıştır. Hesaplanan yaklaşık beklenen değer MRDDY ile modifiye edilmiş ve deterministik sonuçlar-simülasyon değerleri ile yapılan sonuçlar yaklaşık beklenen değer için hatanın azaltıldığını göstermiştir.
- SVEIR modeli için genel Beta dağılımına sahip rastgele etkiler kullanılarak rastgele model oluşturulmuştur. Genel Beta dağılımı için parametrelerin normal dağılıma sahip durumla uyumlu seçimi için uyulması gereken koşullar hesaplanmıştır. Genel Beta dağılımına sahip etkiler altındaki model için ($n = 5$ terimli) RDDY ve MRDDY ile elde edilen yaklaşık beklenen değer deterministik sonuçlarla karşılaştırılmış ve MRDDY ile hatanın azaltıldığı gösterilmiştir.

- Rastgele SVEIR modelinin Monte-Carlo simülasyonları ile normal ve genel Beta dağılımlarına sahip rastgele etkiler altındaki beklenen değerleri, varyansları, varyasyon katsayıları ve güven aralıkları hesaplanmıştır. Her iki dağılım için eşit beklenen değer ve varyasyon katsayısına sahip rastgele parametreler oluşturulduğunda, iki dağılım için de rastgele karakteristiklerin benzer olduğu gözlemlenmiştir.
- Rastgele parametreler SVEIR modeli için her iki dağılımda da %5 varyasyon katsayısına sahip rastgele parametreler oluşturulmasına rağmen S ve E kompartmanlarının %7-8, I ve R kompartmanının %10-12 ve V kompartmanının %14 varyasyon katsayısına sahip olduğu görülmüştür. Dolayısıyla V kompartmanı için deterministik modelden elde edilen sonuçlara göre hastalığın gerçek karakteristiklerine önemli derecede değişkenlik yaşanabileceği yorumu yapılmıştır.
- Hepatit B hastalığının modellenmesi için oluşturulan SIIR modeli normal dağılıma sahip rastgele etkiler kullanarak rastgele hale getirilmiştir. Oluşturulan rastgele modelin I_2 kompartmanı için RDDY ve MRDDY ile yaklaşık beklenen değer hesaplanmış ve MRDDY ile oluşturulan yaklaşımın RDDY yaklaşımına göre çok daha az hata içerdiği tablolar ve grafikler ile gösterilmiştir.
- SIIR modeli için genel Beta dağılımına sahip rastgele etkilerle oluşturulan rastgele model için de benzer yaklaşık beklenen değer hesabı yapılmış ve MRDDY ile elde edilen yaklaşımın çok daha az hata içerdiği gösterilmiştir.
- SIIR modelinin normal ve genel Beta dağılımlarına sahip rastgele etkiler altında Monte-Carlo simülasyonu yapılmış ve beklenen değer, varyans, varyasyon katsayısı ile güven aralıkları hesaplanmıştır. Normal ve genel Beta dağılımlarına sahip etkiler altında benzer sonuçlar elde edildiği gözlemlenmiştir. SIIR modeli için her iki durumda da %5 varyasyon katsayısına sahip rastgele parametreler kullanılmasına rağmen S ve R kompartmanları yaklaşık %7, I_1 ve I_2 kompartmanlarının ise yaklaşık %13 varyasyon katsayısına sahip olduğu görülmüştür.
- Bu modellerde yapılan hesaplarla, rastgele değişkenlerin tanım aralıklarının hemen hemen aynı olacak şekilde oluşturulduğu ve aynı beklenen değer-varyans olacak şekilde ayarlama yapıldığı durumda normal ve genel Beta dağılımlarına sahip rastgele etkilerin modelde neredeyse aynı sonuçları verdiği gösterilmiştir.
- Rastgele etkiler ile rastgele hale getirilen deterministik modeller çarpımsal stokastik gürültü kullanılarak stokastik hale de getirilmiştir. Oluşturulan SVEIR ve SIIR tipli

stokastik modellerin yaklaşık çözümleri stokastik Euler-Maruyama ve Milstein yöntemleri kullanılarak elde edilmiştir.

- Elde edilen stokastik çözümler deterministik çözümler ve rastgele modelin beklenen değerleri ile karşılaştırılmıştır. Böylelikle rastgele modelin hem deterministik modelin öngördüğü hem de stokastik modelin oluşturduğu farklı gerçekleştirmeleri temsil eden beklenen değerler oluşturduğu gözlemlenmiştir.
- Stokastik çözümler rastgele modellerin güven aralıkları ile karşılaştırılmış, güven aralıklarının stokastik gerçekleştirmelerin olası değişim bölgesini temsil ettiği grafikler ile gösterilmiştir.



6. ÖNERİLER

1. Rastgele modellerin gerçek hayattaki davranışları daha iyi temsil edebilmesi için rastgele hale getirilecek parametrelerin dağılımları gerçek veriler kullanılarak belirlenebilir. Bu verilere uygun oluşturulan dağılımlara sahip rastgele parametreler kullanılarak rastgele modeller kurulabilir.
2. Modifiye rastgele Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi ile kompartmanlara ait daha az hata içeren yaklaşımlar elde etmek için daha fazla terim kullanarak yaklaşık analitik çözümler üretilebilir.
3. Farklı rastgele dağılımlara sahip parametreler bir arada kullanılarak oluşturulan rastgele modeller ile olasılık dağılımlarının sonuçlara etkisi farklı bir açıdan incelenebilir.
4. Stokastik modeller için farklı yaklaşık çözüm yöntemleri kullanılabilir ve modellerin stokastik davranışlarının uç değer istatistiklerinin hesaplanmasına dair incelemelerle rastgele ve deterministik uç değerlerinin karşılaştırılması daha iyi şekilde gerçekleştirilebilir.
5. Rastgele modellerin yaklaşık beklenen değerlerinin daha da az hata içermesi için çok adımlı yaklaşım yöntemleri kullanılabilir.
6. Rastgele etki yönteminin kompartmanlı modeller dışında nüfus modelleri, yaş yapılı modeller ve benzeri farklı modelleme yaklaşımlarına da uygulanmasına yönelik çalışmalar yapılabilir.

7. KAYNAKLAR

1. Aliyev, R., Stokastik Süreçler Teorisine Giriş, Karadeniz Teknik Üniversitesi Matbaası, Trabzon, 2010.
2. Allen, L., J. ve Burgin, A., M., Comparison of Deterministic and Stochastic SIS and SIR Models in Discrete Time, Mathematical Biosciences, 163, 1 (2000) 1-33.
3. Ambegaokar, V. ve Troyer, M., Estimating Errors Reliably in Monte Carlo Simulations of the Ehrenfest Model, American Journal of Physics, 78, 2 (2010) 150-157.
4. Anaya, C., Burgos, C., Cortés, J., C. ve Villanueva, R., J., Capturing the Data Uncertainty Change in the Cocaine Consumption in Spain Using an Epidemiologically Based Model. Abstract and Applied Analysis, 2016 (2016).
5. Anderson, R., M., The Population Dynamics of Infectious Diseases: Theory and Applications, Springer, Berlin, 1982.
6. Anderson, R., M., The Role of Mathematical Models in the Study of HIV Transmission and the Epidemiology of AIDS, Journal of Acquired Immune Deficiency Syndromes, 1, 3 (1988) 241-256.
7. Arikoglu, A., ve Ozkol, I., Solution of Boundary Value Problems for Integro-Differential Equations by Using Differential Transform Method, Applied Mathematics and Computation, 168, 2 (2005) 1145-1158.
8. Arnold, L., Stochastic Differential Equations: Theory and Applications, Wiley-Interscience Publications, New York, 1974.
9. Baker, G., A., Essentials of Padé Approximants, Academic Press, London, 1975.
10. Baker, G., A. ve Graves-Morris, P., R., Pade approximants. Part 2: Extensions and applications (Encyclopedia of Mathematics and its applications), 2, Addison-Wesley, Reading, 1981.
11. Bartlett, J., Deviney, J. ve Pudlowski, E., Mathematical Modeling of the 2014/2015 Ebola Epidemic in West Africa, SIAM Undergraduate Research Online, 9 (2016) 87-102.
12. Bekiryazici, Z., Kesemen, T. ve Merdan, M., Stochastic and Random Models of Malaria Disease with Vertical Transmission, New Trends in Mathematical Sciences, 5 (2017) 269-277.
13. Bekiryazici, Z., Merdan, M., Kesemen, T. ve Khaniyev, T., Mathematical Modeling of Biochemical Reactions Under Random Effects, Turkish Journal of Mathematics and Computer Science, 5 (2016) 8-18.

14. Bekiryazici, Z., Merdan, M., Kesemen, T. ve Najmuldeen, M., Mathematical Modeling of Dengue Disease under Random Effects, Mathematical Sciences and Applications E-Notes, 4, 2 (2016) 58-70.
15. Bervillier, C., Status of the Differential Transformation Method, Applied Mathematics and Computation, 218, 20 (2012) 10158-10170.
16. Bhatnagar, S. ve Karmeshu, Monte-Carlo Estimation of Time-Dependent Statistical Characteristics of Random Dynamical Systems, Applied Mathematical Modelling, 35, 6 (2011) 3063-3079.
17. Boyd, J., P., Padé Approximant Algorithm for Solving Nonlinear Ordinary Differential Equation Boundary Value Problems on an Unbounded Domain, Computers in Physics, 11, 3 (1997) 299-303.
18. Browne, C., J., Smith, R., J. ve Bourouiba, L., From Regional Pulse Vaccination to Global Disease Eradication: Insights from a Mathematical Model of Poliomyelitis, Journal of Mathematical Biology, 71, 1 (2015) 215-253.
19. Calbo, G., Cortés, J., C. ve Jódar, L., Mean Square Power Series Solution of Random Linear Differential Equations, Computers & Mathematics with Applications, 59, 1 (2010) 559-572.
20. Calbo, G., Cortés, J. C. ve Jódar, L., Random Analytic Solution of Coupled Differential Models with Uncertain Initial Condition and Source Term, Computers & Mathematics with Applications, 56, 3 (2008) 785-798.
21. Calbo, G., Cortés, J., C. ve Jódar, L., Random Hermite Differential Equations: Mean Square Power Series Solutions and Statistical Properties, Applied Mathematics and Computation, 218, 7 (2011) 3654-3666.
22. Calbo, G., Cortés, J., C., Jódar, L. ve Villafuerte, L., Solving the Random Legendre Differential Equation: Mean Square Power Series Solution and its Statistical Functions, Computers & Mathematics with Applications, 61, 9 (2011) 2782-2792.
23. Carbonell, F., Jimenez, J., C., Biscay, R., J. ve De la Cruz, H., The Local Linearization Method for Numerical Integration of Random Differential Equations, BIT Numerical Mathematics, 45, 1 (2005) 1-14.
24. Casabán, M., C., Cortés, J., C., Navarro-Quiles, A., Romero, J., V., Roselló, M., D. ve Villanueva, R., J., A Comprehensive Probabilistic Solution of Random SIS-Type Epidemiological Models Using the Random Variable Transformation Technique, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 32 (2016) 199-210.
25. Casabán, M., C., Cortés, J., C., Navarro-Quiles, A., Romero, J., V., Roselló, M., D. ve Villanueva, R., J., Computing Probabilistic Solutions of the Bernoulli Random Differential Equation, Journal of Computational and Applied Mathematics, 309 (2017) 396-407.

26. Casabán, M., C., Cortés, J., C., Navarro-Quiles, A., Romero, J., V., Roselló, M., D. ve Villanueva, R., J., Probabilistic Solution of the Homogeneous Riccati Differential Equation: A Case-Study by Using Linearization and Transformation Techniques, Journal of Computational and Applied Mathematics, 291 (2016) 20-35.
27. Casabán, M., C., Cortés, J., C., Romero, J., V. ve Roselló, M., D., Determining the First Probability Density Function of Linear Random Initial Value Problems by the Random Variable Transformation (RVT) Technique: a Comprehensive Study, Abstract and Applied Analysis, 2014 (2014).
28. Casabán, M., C., Cortés, J., C., Romero, J., V. ve Roselló, M., D., Probabilistic Solution of Random SI-Type Epidemiological Models Using the Random Variable Transformation Technique, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 24, 1 (2015) 86-97.
29. Cauchemez, S., Carrat, F., Viboud, C., Valleron, A., J. ve Boelle, P., Y., A Bayesian MCMC Approach to Study Transmission of Influenza: Application to Household Longitudinal Data, Statistics in medicine, 23, 22 (2004) 3469-3487.
30. Centers for Disease Control and Prevention (CDC), Epidemiology and Prevention of Vaccine-Preventable Diseases, Ed.: Hamborsky J., Kroger A., Wolfe S., 13th Edition, Washington D.C. Public Health Foundation, 2015.
31. Chen-Charpentier, B., M. ve Stanescu, D., Epidemic Models with Random Coefficients, Mathematical and Computer Modelling, 52, 7 (2010) 1004-1010.
32. Clancy, D., A Stochastic SIS Infection Model Incorporating Indirect Transmission, Journal of Applied Probability, 42, 3 (2005) 726-737.
33. Cortés, J., C., Jódar, L., Camacho, F. ve Villafuerte, L., Random Airy Type Differential Equations: Mean Square Exact and Numerical Solutions, Computers & Mathematics with Applications, 60, 5 (2010) 1237-1244.
34. Cortés, J., C., Jódar, L. ve Villafuerte, L., Mathematical Modeling in Social Sciences And Engineering, Nova Science Publishers, New York, 2014.
35. Cortés, J., C., Jódar, L. ve Villafuerte, L., Numerical Solution of Random Differential Equations: a Mean Square Approach, Mathematical and Computer Modelling, 45, 7 (2007) 757-765.
36. Cortés, J., C., Jódar, L. ve Villafuerte, L., Numerical Solution of Random Differential Initial Value Problems: Multistep Methods, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 34, 1 (2011) 63-75.
37. Cortés, J., C., Jódar, L. ve Villafuerte, L., Random Linear-Quadratic Mathematical Models: Computing Explicit Solutions and Applications, Mathematics and Computers in Simulation, 79, 7 (2009) 2076-2090.

38. Cyganowski, S., Kloeden, P. ve Ombach, J., From Elementary Probability to Stochastic Differential Equations with MAPLE, Springer Science & Business Media, Berlin, 2001.
39. Dietz, K., On the Transmission Dynamics of HIV, Mathematical Biosciences, 90, 1 (1988) 397-414.
40. Dietz, K. ve Heesterbeek, J., A., P., Daniel Bernoulli's Epidemiological Model Revisited, Mathematical Biosciences, 180 (2002) 1-21.
41. Einstein, A., On the Motion of Small Particles Suspended in Liquids at Rest Required by the Molecular-Kinetic Theory of Heat, Annalen der Physik, 17 (1905) 549-560.
42. El-Tawil, M., El-Tahan, W. ve Hussein, A., A Proposed Technique of SFEM on Solving Ordinary Random Differential Equation, Applied Mathematics and Computation, 161, 1 (2005) 35-47.
43. El-Tawil, M., El-Tahan, W. ve Hussein, A., Using FEM–RVT Technique for Solving a Randomly Excited Ordinary Differential Equation with a Random Operator, Applied Mathematics and Computation, 187, 2 (2007) 856-867.
44. Fakharzadeh, J., Hesamaeddini, E. ve Soleimanivareki, M., Multi-Step Stochastic Differential Transformation Method for Solving Some Class of Random Differential Equations, Applied Mathematics in Engineering, Management and Technology, 3, 3 (2015) 115–123.
45. Feller, W., An Introduction to Probability Theory and its Applications, Volume 1, 3rd Edition, John Wiley & Sons, New York, 1968.
46. Feller, W., An Introduction to Probability Theory and its Applications, Volume 2, 2nd Edition, Wiley, New York, 1971.
47. Forbes, C., Evans, M., Hastings, N. ve Peacock, B., Statistical Distributions, 4th Edition, John Wiley & Sons, New Jersey, 2011.
48. Gilbert, J., A., Meyers, L., A., Galvani, A., P. ve Townsend, J., P., Probabilistic Uncertainty Analysis of Epidemiological Modeling to Guide Public Health Intervention Policy, Epidemics, 6 (2014) 37-45.
49. Golmankhaneh, A., K., Porghoveh, N., A. ve Baleanu, D., Mean Square Solutions of Second-Order Random Differential Equations by Using Homotopy Analysis Method, Romanian Reports in Physics, 65, 2 (2013) 350-362.
50. González-Parra, G., Arenas, A., J. ve Cogollo, M., Analytical-Numerical Solution of a Parabolic Diffusion Equation under Uncertainty Conditions Using DTM with Monte Carlo Simulations, Ingeniería y Ciencia, 11, 22 (2015) 49-72.

51. Gökdoğan, A., Merdan, M. ve Yildirim, A., The Modified Algorithm for the Differential Transform Method to Solution of Genesio Systems, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 17, 1 (2012) 45-51.
52. Grigoriu, M., Stochastic Calculus: Applications in Science and Engineering, Springer Science & Business Media, New York, 2002.
53. Grüne, L. ve Kloeden, P., E., Pathwise Approximation of Random Ordinary Differential Equations, BIT Numerical Mathematics, 41, 4 (2001) 711-721.
54. Hethcote, H., W., The Mathematics of Infectious Diseases, SIAM Review, 42, 4 (2000) 599-653.
55. Hogben, L., Mathematics for the Million, Fourth Edition, WW Norton & Company Inc., New York, 1968.
56. Huppert, A. ve Katriel, G., Mathematical Modelling and Prediction in Infectious Disease Epidemiology, Clinical Microbiology and Infection, 19, 11 (2013) 999-1005.
57. Imran, M., Hassan, M., Dur-E-Ahmad, M. ve Khan, A., A Comparison of a Deterministic and Stochastic Model for Hepatitis C with an Isolation Stage, Journal of Biological Dynamics, 7, 1 (2013) 276-301.
58. Itô, K., Stochastic Integral, Proceedings of the Imperial Academy, 20, 8 (1944) 519-524.
59. Jentzen, A. ve Neuenkirch, A., A Random Euler Scheme for Carathéodory Differential Equations, Journal of Computational and Applied Mathematics, 224, 1 (2009) 346-359.
60. Kalkowska, D., A., Tebbens, R., J., D., Pallansch, M., A., Cochi, S., L., Wassilak, S., G. ve Thompson, K., M., Modeling Undetected Live Poliovirus Circulation After Apparent Interruption of Transmission: Implications for Surveillance and Vaccination, BMC Infectious Diseases, 15, 1 (2015) 66.
61. Kamyad, A., V., Akbari, R., Heydari, A., A. ve Heydari, A., Mathematical Modeling of Transmission Dynamics and Optimal Control of Vaccination and Treatment for Hepatitis B Virus, Computational and Mathematical Methods in Medicine, 2014 (2014).
62. Karniadakis, G., E., Su, C., H., Xiu, D., Lucor, D., Schwab, C. ve Todor, R., A., Generalized Polynomial Chaos Solution for Differential Equations with Random Inputs, Seminar für Angewandte Mathematik, Ocak 2005, Eidgenössische Technische Hochschule [ETH] Zürich, 1-29.
63. Kegan, B. ve West, R., W., Modeling the Simple Epidemic with Deterministic Differential Equations and Random Initial Conditions, Mathematical Biosciences, 195, 2 (2005) 179-193.

64. Kermack, W., O. ve McKendrick, A., G., A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics, Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 115, 772 (1927) 700-721.
65. Khan, T., Zaman, G., ve Chohan, M., I., The Transmission Dynamic and Optimal Control of Acute and Chronic Hepatitis B, Journal of Biological Dynamics, 11, 1 (2017) 172-189.
66. Khudair, A., R., Haddad, S., A., M. ve Khalaf, S., L., Mean Square Solutions of Second-Order Random Differential Equations by using the Differential Transformation Method, Open Journal of Applied Sciences, 6, 4 (2016) 287.
67. Kim, Y., Lee, S., Chu, C., Choe, S., Hong, S. ve Shin, Y., The Characteristics of Middle Eastern Respiratory Syndrome Coronavirus Transmission Dynamics in South Korea, Osong Public Health and Research Perspectives, 7, 1 (2016) 49-55.
68. Kloeden, P., E. ve Platen, E., Numerical Solutions of Stochastic Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
69. Kolmogorov, A., N., Foundations of the Theory of Probability, 2nd Edition, Chelsea Publishing Co., New York, 1956.
70. Kucharski, A., J., Funk, S., Eggo, R., M., Mallet, H., P., Edmunds, W., J. ve Nilles, E., J., Transmission Dynamics of Zika Virus in Island Populations: a Modelling Analysis of the 2013–14 French Polynesia Outbreak, Plos Neglected Tropical Diseases, 10, 5 (2016).
71. Lahrouz, A., Omari, L., Settati, A. ve Belmaâti, A., Comparison of Deterministic and Stochastic SIRS Epidemic Model with Saturating Incidence and Immigration, Arabian Journal of Mathematics, 4, 2 (2015) 101-116.
72. Licea Salazar, J., A., The Polynomial Chaos Method with Applications to Random Differential Equations, Doktora Tezi, The University of Texas at Arlington, Arlington, 2013.
73. López, J., C., C., Mean Square Analytic Solutions of Random Linear Models, Doktora Tezi, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 2010.
74. Ma, Z., Zhou, Y. ve Wu, J., Modeling and Dynamics of Infectious Diseases, Volume 11, World Scientific, China, 2009.
75. Martcheva, M., An Introduction to Mathematical Epidemiology, Springer, New York, 2015.
76. May, R., M. ve Anderson, R., M., Transmission Dynamics of HIV Infection, Nature, 326 (1987) 137-142.
77. McKendrick, A., G., Applications of Mathematics to Medical Problems, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 44 (1925) 98-130.

78. Merdan, M., Bekiryazici, Z., Kesemen, T. ve Khaniyev, T., Comparison of Stochastic and Random Models for Bacterial Resistance, Advances in Difference Equations, 2017, 133 (2017).
79. Merdan, M., Bekiryazici, Z., Kesemen, T. ve Khaniyev, T., Deterministic Stability and Random Behavior of a Hepatitis C Model, Plos One, 12, 7 (2017).
80. Metropolis, N. ve Ulam, S., The Monte Carlo Method, Journal of the American Statistical Association, 44, 247 (1949) 335-341.
81. Miller, N., Z., The Polio Vaccine: a Critical Assessment of its Arcane History, Efficacy, and Long-Term Health-Related Consequences, Medical Veritas, 1, 2 (2004) 239-251.
82. Momani, S. ve Ertürk, V., S., Solutions of Non-Linear Oscillators by the Modified Differential Transform Method, Computers & Mathematics with Applications, 55, 4 (2008) 833-842.
83. Mossong, J., Hens, N., Jit, M., Beutels, P., Auranen, K., Mikolajczyk, R., v.d., Social Contacts and Mixing Patterns Relevant to the Spread of Infectious Diseases, PLoS Medicine, 5, 3 (2008).
84. Mushayabasa, S. ve Bhunu, C., P., Mathematical Analysis of Hepatitis C Model for Intravenous Drug Misusers: Impact of Antiviral Therapy, Abstinence and Relapse, Simulation, 90, 5 (2014) 487-500.
85. Nelson, N., P., Easterbrook, P., J. ve McMahon, B., J., Epidemiology of Hepatitis B Virus Infection and Impact of Vaccination on Disease, Clinics in Liver Disease, 20, 4 (2016) 607-628.
86. Ngwa, G., A. ve Teboh-Ewungkem, M., I., A Mathematical Model with Quarantine States for the Dynamics of Ebola Virus Disease in Human Populations, Computational and Mathematical Methods in Medicine, 2016 (2016).
87. Nkamba, L., N., Ntaganda, J., M., Abboubakar, H., Kamgang, J. C. ve Castelli, L., Global Stability of a SVEIR Epidemic Model: Application to Poliomyelitis Transmission Dynamics, Open Journal of Modelling and Simulation, 5 (2017), 98-112.
88. Odibat, Z., M., Differential Transform Method for Solving Volterra Integral Equation with Separable Kernels, Mathematical and Computer Modelling, 48, 7 (2008) 1144-1149.
89. Önalın, Ö., Stokastik Süreçler, Avcıol Basım Yayın, İstanbul, 2010.
90. Packer, A., Forde, J., Hews, S. ve Kuang, Y., Mathematical Models of the Interrelated Dynamics of Hepatitis D and B, Mathematical Biosciences, 247 (2014) 38-46.

91. Pang, J., Cui, J. A. ve Zhou, X., Dynamical Behavior of a Hepatitis B Virus Transmission Model with Vaccination, Journal of Theoretical Biology, 265, 4 (2010) 572-578.
92. Papoulis, A., Probability, Random Variables and Stochastic Processes, McGraw-Hill, New York, 1991.
93. Perkins, T., A., Siraj, A., S., Ruktanonchai, C., W., Kraemer, M., U. ve Tatem, A., J., (2016). Model-Based Projections of Zika Virus Infections in Childbearing Women in the Americas, Nature Microbiology, 1 (2016).
94. Platen, E. ve Bruti-Liberati, N., Numerical Solution of Stochastic Differential Equations with Jumps in Finance, Springer, Berlin, 2010.
95. Pollett, P., K., Dooley, A., H. ve Ross, J., V., Modelling Population Processes with Random Initial Conditions, Mathematical Biosciences, 223, 2 (2010) 142-150.
96. Press, W., H., Flannery, B., P., Teukolsky, S., A. ve Vetterling, W., T., Numerical Methods in C: The Art of Scientific Computing, 2nd Edition, Cambridge University Press, New York, 1992.
97. Pukhov, G., Differential Transforms and Circuit theory, Circuit Theory and Applications, 10 (1982) 265–276.
98. Rachah, A. ve Torres, D., F., Mathematical Modelling, Simulation, and Optimal Control of the 2014 Ebola Outbreak in West Africa, Discrete Dynamics in Nature and Society, 2015 (2015).
99. Rashidi, M., M., The Modified Differential Transform Method for Solving MHD Boundary-Layer Equations, Computer Physics Communications, 180, 11 (2009) 2210-2217.
100. Rashidi, M., M. ve Erfani, E., The Modified Differential Transform Method for Investigating Nano Boundary-Layers over Stretching Surfaces, International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow, 21, 7 (2011) 864-883.
101. Ross, R., An Application of the Theory of Probabilities to the Study of a priori Pathometry. Part I, Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 92, 638 (1916) 204-230.
102. Ross, R. ve Hudson, H., P., An Application of the Theory of Probabilities to the Study of a priori Pathometry. Part II, Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 93, 650 (1917) 212-225.
103. Ross, R. ve Hudson, H. P., An Application of the Theory of Probabilities to the Study of a priori Pathometry. Part III, Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 93, 650 (1917) 225-240.

104. Soong, T., T., Probabilistic Modelling and Analysis in Science and Engineering, John Wiley & Sons, New York, 1981.
105. Soong, T. T., Random Differential Equations in Science and Engineering, Academic Press, New York, 1973.
106. Stanescu, D. ve Chen-Charpentier, B., M., Random Coefficient Differential Equation Models for Bacterial Growth, Mathematical and Computer Modelling, 50, 5 (2009) 885-895.
107. Stanescu, D. ve Chen-Charpentier, B., M., Random Coefficient Differential Equation Models for Monod Kinetics, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 54 (2009) 719-728.
108. Stensby, J., Class Notes on Probability and Random Processes (EE603), www.ece.uah.edu/courses/ee385/603ch12.pdf, 16 Ekim 2017.
109. Suleiman, M., Y., Oo, W., M., H., Wahab, M., A. ve Zakaria, A., Application of Beta Distribution to Malaysian Sunshine Data, Renewable Energy, 18 (1999) 573-579.
110. Sun, T., C., A Finite Element Method for Random Differential Equations with Random Coefficients, SIAM Journal on Numerical Analysis, 16, 6 (1979) 1019-1035
111. Sun, G., Q., Xie, J., H., Huang, S., H., Jin, Z., Li, M., T. ve Liu, L., Transmission Dynamics of Cholera: Mathematical Modeling and Control Strategies, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 45 (2017) 235-244.
112. Thompson, K., M., Duintjer Tebbens, R., J. ve Pallansch, M., A., Evaluation of Response Scenarios to Potential Polio Outbreaks Using Mathematical Models, Risk Analysis, 26, 6 (2006) 1541-1556.
113. Villafuerte, L. ve Chen-Charpentier, B., M., A Random Differential Transform Method: Theory and Applications, Applied Mathematics Letters, 25, 10 (2012) 1490-1494.
114. Villafuerte, L. ve Cortés, J., C., Solving Random Differential Equations by Means of Differential Transform Methods, Advances in Dynamical Systems and Applications, 8, 2 (2013) 413-425.
115. Walpole, R., E., Myers, R., H. ve Myers, S., L., Some Discrete Probability Distributions, Probability and Statistics for Engineers and Scientists, 6th Edition, 132-134, Prentice Hall International, New Jersey, 1998.
116. Weiss, H., H., The SIR Model and the Foundations of Public Health, Materials Matematics, 2013, 7 (2013) 17.
117. Weusten, J., van Drimmelen, H., Vermeulen, M. ve Lelie, N., A Mathematical Model for Estimating Residual Transmission Risk of Occult Hepatitis B Virus Infection with Different Blood Safety Scenarios, Transfusion, 57 (2017), 841-849.

118. Wiener, N., The Homogeneous Chaos, American Journal of Mathematics, 60, 4 (1938) 897-936.
119. Wiley, J., A., Herschkorn, S., J. ve Padian, N., S., Heterogeneity in the Probability of HIV Transmission per Sexual Contact: The Case of Male-to-Female Transmission in Penile–Vaginal Intercourse, Statistics in Medicine, 8 (1989) 93–102.
120. World Health Organization (WHO), Hepatitis B, Fact Sheet, Cenevre, 2017.
121. World Health Organization (WHO), Poliomyelitis, Fact Sheet, Cenevre, 2017.
122. World Health Organization (WHO), Prevent HIV, Test And Treat All, Progress Report, Cenevre, 2016.
123. Xiu, D. ve Hesthaven, J., S., High-Order Collocation Methods for Differential Equations with Random Inputs, SIAM Journal on Scientific Computing, 27, 3 (2005) 1118-1139.
124. Yang, W., Lipsitch, M. ve Shaman, J., Inference of Seasonal and Pandemic Influenza Transmission Dynamics, Proceedings of the National Academy of Sciences, 112, 9 (2015) 2723-2728.
125. Zhang, S. ve Zhou, Y., The Analysis and Application of an HBV Model, Applied Mathematical Modelling, 36, 3 (2012) 1302-1312.
126. Zhong, X. ve Deng, F., Dynamics of a Stochastic Multigroup SEIR Epidemic Model, Journal of Applied Mathematics, 2014 (2014).
127. Zhou, J., K., Differential Transformation and its Application for Electrical Circuits (In Chinese), Huarjung University Press, Wuuhahn, China, 1986.
128. Øksendal, B., Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications, Springer, Berlin, 2003.

ÖZGEÇMİŞ

Zafer BEKİRYAZICI 1986 yılında İstanbul'da doğdu. İlköğrenimini İstanbul/Beyoğlu İhsan Şerif İlkokulu'nda orta ve lise öğrenimini Kocaeli/Gebze TEV İnanç Türkeş Özel Lisesi'nde tamamladı. 2009 yılında Marmara Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. 2012 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'ndan yüksek lisans derecesini aldı. 2013 yılında bir dönem Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim dalında eğitim gördükten sonra 2014 yılında KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Uygulamalı Matematik Anabilim dalında doktora eğitimine başladı. 2010 yılından beri Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır. Evlidir ve temel düzeyde Almanca ile ileri düzeyde İngilizce bilmektedir.

Tez Çalışmalarından Elde Edilen Yayınlar

1. Merdan, M., **Bekiryazici, Z.**, Kesemen, T. ve Khaniyev, T., Comparison of stochastic and random models for bacterial resistance, Advances in Difference Equations, 2017, 133 (2017).
2. Merdan, M., **Bekiryazici, Z.**, Kesemen, T. ve Khaniyev, T., Deterministic stability and random behavior of a Hepatitis C model, Plos One, 12, 7 (2017) e0181571.
3. **Bekiryazici, Z.**, Kesemen, T. ve Merdan, M., Stochastic and random models of Malaria Disease with vertical transmission, New Trends in Mathematical Sciences, 5 (2017) 269-277
4. **Bekiryazici, Z.**, Merdan, M., Kesemen, T. ve Khaniyev, T., Mathematical Modeling of Biochemical Reactions Under Random Effects, Turkish Journal of Mathematics and Computer Science, 5 (2016) 8-18.
5. **Bekiryazici, Z.**, Merdan, M., Kesemen, T. ve Najmuldeen, M., Mathematical Modeling of Dengue Disease under Random Effects, Mathematical Sciences and Applications E-Notes, 4, 2 (2016) 58-70.