



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**BAZI KONVEKS ÇOK YÜZLÜLERLE ELDE EDİLEN ÖKLİDYEN
OLMAYAN GEOMETRİLERDE EVRİTİMİN İNCELENMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Emine ÇİÇEK

DANIŞMAN

Dr. Öğr. Üyesi Zeynep CAN

AKSARAY, 2023

Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 202342008 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi **Emine ÇİÇEK** tarafından hazırlanan **BAZI KONVEKS ÇOK YÜZLÜLERLE ELDE EDİLEN ÖKLİDYEN OLMAYAN GEOMETRİLERDE EVRİTİMİN İNCELENMESİ** adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Zeynep CAN

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Pelin TEKİN

Trakya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Gülsüm YÜCA

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

TezSavunma Tarihi: 19/01/2023

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Mehmet Ali HİNİS
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmada kullandığım verilerin orijinalliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Emine ÇİÇEK

TEŞEKKÜR

Bu tezi büyük bir sabır ve titizlikle yöneten çalışmalarında desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen saygıdeğer ve kıymetli danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Zeynep CAN 'a sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Çalışmamı, beni bugünlere getiren her anlamda destekleyen sevgili babam İbrahim ÇİÇEK'e, sevgili annem Aysel ÇİÇEK'e, değerli kardeşlerime ve her zaman yanımda olan biricik dostum Şeyma Firdevs KORKMAZ'a ithaf ediyorum.

Emine ÇİÇEK

AKSARAY, 2023

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
SİMGELER VE KISALTMALAR	vi
1. GİRİŞ	1
1.1 Konveks Çokyüzlüler	1
1.2 Minkowski Geometrisi ve Konveks Çokyüzlüler ile İlişkileri.....	3
1.3 Evritim.....	3
2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER.....	5
2.1 Metrik Geometri	5
2.2 Evritim.....	6
2.3 Çapraz Oran ve Harmonik Eşlenik.....	7
3. $\mathbb{R}_{CO}^2(\mathbb{R}_M^2)$ VE $\mathbb{R}_{DD}^2$ DE ÇEMBERE GÖRE EVRİTİM VE ÖZELLİKLERİ... 9	9
3.1 $\mathbb{R}_{CO}^2(\mathbb{R}_M^2)$ de Çembere Göre Evritim ve Özellikleri.....	9
3.1.1 Cuboctahedron (Maksimum) düzlemi($\mathbb{R}_{CO}^2(\mathbb{R}_M^2)$)	9
3.1.2 $\mathbb{R}_{CO}^2(\mathbb{R}_M^2)$ de çembere göre evritim	10
3.1.3 $\mathbb{R}_{CO}^2(\mathbb{R}_M^2)$ de çapraz oran ve harmonik eşlenik.....	13
3.2 $\mathbb{R}_{DD}^2$ de Çembere Göre Evritim ve Özellikleri	14
3.2.1 Disdyakis dodecahedron düzlemi ($\mathbb{R}_{DD}^2$)	14
3.2.2 $\mathbb{R}_{DD}^2$ de çembere göre evritim	21
3.2.3 $\mathbb{R}_{DD}^2$ de çapraz oran ve harmonik eşlenik	26
4. $\mathbb{R}_{CO}^3$ VE $\mathbb{R}_{DD}^3$ DE KÜREYE GÖRE EVRİTİM VE ÖZELLİKLERİ	31
4.1 $\mathbb{R}_{CO}^3$ da Küreye Göre Evritim ve Özellikleri	31
4.1.1 Cuboctahedron uzayı ($\mathbb{R}_{CO}^3$)	31
4.1.2 $\mathbb{R}_{CO}^3$ da küreye göre evritim	33
4.1.3 $\mathbb{R}_{CO}^3$ da doğruların, düzlemlerin ve cuboctahedron kürelerinin evrikleri.....	40
4.1.4 $\mathbb{R}_{CO}^3$ da çapraz oran ve harmonik eşlenik.....	41
4.2 $\mathbb{R}_{DD}^3$ de Küreye Göre Evritim ve Özellikleri	45
4.2.1 Disdyakis dodecahedron uzayı ($\mathbb{R}_{DD}^3$).....	45
4.2.2 $\mathbb{R}_{DD}^3$ de küreye göre evritim.....	48
4.2.3 $\mathbb{R}_{DD}^3$ de doğruların, düzlemlerin ve disdyakis dodecahedron kürelerinin evrikleri	55
4.2.4 $\mathbb{R}_{DD}^3$ de çapraz oran ve harmonik eşlenik	56
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	61
KAYNAKLAR	62
ÖZGEÇMİŞ.....	65

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI KONVEKS ÇOK YÜZLÜLERLE ELDE EDİLEN ÖKLİDYEN OLMAYAN GEOMETRİLERDE EVRİTİMİN İNCELENMESİ

Emine ÇİÇEK

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Zeynep CAN

ÖZET

Bu tezde bir katalan cisim olan Disdyakis Dodecahedron ve bir arşimed cisim olan Cuboctahedron cisimlerini küre kabul eden Minkowski tipi geometrilerde evritim üzerine çalışılmıştır. Bu geometrilerde öncelikle metrikler izdüşüm yöntemiyle düzleme indirgenerek çembere göre, daha sonrasında ise uzayda kürelere göre evritim tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir.

Bu çalışmanın birinci bölümünde, konveks çokyüzlülerle Minkowski geometrisi arasındaki ilişki incelenmiş ve evritimden kısaca bahsedilmiştir.

İkinci bölümde metrik geometri, evritim, çapraz oran ve harmonik eşlenik kavramlarının tanımları verilmiştir.

Üçüncü bölümde sırasıyla maksimum düzlemde çembere göre evritim ve Disdyakis Dodecahedron düzlemde çembere göre evritim, alt başlıklarıyla birlikte teorem ve ispatlarıyla verilmiştir.

Son olarak dördüncü bölümde Cuboctahedron ve Disdyakis Dodecahedron uzaylarında küreye göre evritim üzerinde çalışılmış ve bu uzaylardaki çapraz oran ve harmonik eşlenikler araştırılmıştır.

Anahtar Kelimer: Evritim, Disdyakis Dodecahedron Düzlem, Disdyakis Dodecahedron Uzayı, Cuboctahedron Uzayı, Çapraz Oran, Harmonik Eşlenik, Maksimum Düzlem, Metrik Geometri, Minkowski Geometrisi, Çokyüzlüler

Ocak, 2023;63 sayfa

M.Sc. THESIS

**INVESTIGATION OF INVERSION IN SOME NON-EUCLIDEAN
GEOMETRIES INDUCED BY SOME CONVEX POLYHEDRA**

Emine ÇİÇEK

**Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Zeynep CAN

ABSTRACT

In this thesis inversions have been studied in two Minkowski type geometries whose spheres are disdyakis dodecahedron which is a Catalan solid and cuboctahedron which is an Archimedean solid. In that geometries inversions have been defined and investigated firstly with respect to a circle by reducing metrics with the projection method in the plane, after that inversions defined and investigated with respect to a sphere in the space.

In the first chapter of this study, convex polyhedra, relations between convex polyhedra and Minkowski Geometries and inversions are briefly mentioned.

In the second chapter definition of metric, inversions, crossratio and harmonic conjugates have been given.

In the third chapter inversion with respect to a circle in the maximum plane and inversion with respect to a circle in the disdyakis dodecahedron plane, respectively, have been given with subsections, theorems and proofs.

Finally in the fourth chapter inversions with respect to a sphere in the Cuboctahedron and the Disdyakis Dodecahedron spaces are studied and crossratio and harmonic conjugates in these spaces are investigated.

Keywords: Inversion, Disdyakis Dodecahedron Plane, Disdyakis Dodecahedron Space, Cuboctahedron Space, Cross Ratio, Harmonic Conjugate, Maximum Plane, Metric Geometry, Minkowski Geometry, Polyhedra

January, 2023; 63 pages

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. Düzgün çokyüzlüler	1
Şekil 1.2. Arşimed cisimlerden bazıları	2
Şekil 1.3. Katalan cisimlerden bazıları	2
Şekil 2.1. Harmonik küme	8
Şekil 3.1. Maksimum çemberi	11
Şekil 3.2. O dan geçmeyen bir doğru O merkezli bir maksimum çembere eşlenmez.....	13
Şekil 3.3. O merkezli bir maksimum çember O merkezli bir maksimum çembere eşlenir	13
Şekil 3.4. Düzlemde DD -metriğine göre O merkezli r yarıçaplı çember.....	19
Şekil 3.5. O merkezli bir disdyakis dodecahedron çember O merkezli bir Disdyakis dodecahedron çembere eşlenir	26
Şekil 4.1. Cuboctahedron.....	31
Şekil 4.2. Cuboctahedron'un koordinat sisteme yerleştirilmesi	32
Şekil 4.3. Disdyakis dodecahedron.....	45
Şekil 4.4. Disdyakis dodecahedron'un koordinat sistemine yerleştirilmesi	46

SİMGELER VE KISALTMALAR

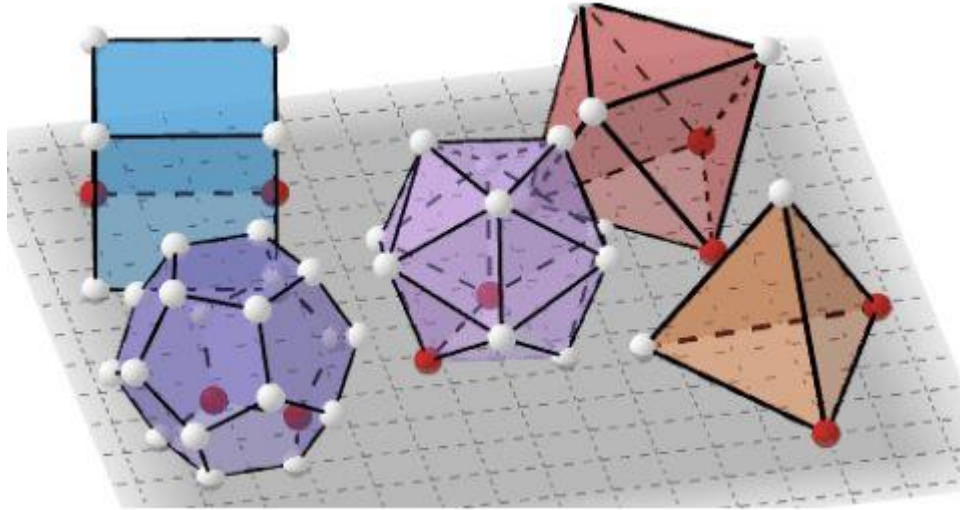
$\mathbb{R}^2$	Öklidyen Düzlem
$\mathbb{R}^3$	Öklidyen Uzay
$\mathbb{R}_M^2$	Maksimum Düzlemi
$\mathbb{R}_M^3$	Maksimum Uzayı
$\mathbb{R}_{DD}^2$	Disdyakis Dodecahedron Düzlemi
$\mathbb{R}_{CO}^2$	Cuboctahedron Düzlemi
$\mathbb{R}_{DD}^3$	Disdyakis Dodecahedron Uzayı
$\mathbb{R}_{CO}^3$	Cuboctahedron Uzayı
d_E	Öklidyen Uzaklık
d_M	Maksimum Uzaklık
d_{DD}	Disdyakis Dodecahedron Uzaklığı
d_{CO}	Cuboctahedron Uzaklığı
$I_M(\mathbf{0}, r)$	Maksimum Çembersel Evritim
$I_{DD}(\mathbf{0}, r)$	Disdyakis Dodecahedron Çembersel Evritim
$I_S(\mathbf{0}, r)$	Cuboctahedron Küresel Evritim
$I_D(\mathbf{0}, r)$	Disdyakis Dodecahedron Küresel Evritim

1. GİRİŞ

1.1 Konveks Çokyüzlüler

Yüzleri birer çokgensel bölge, ayrıt ve köşeleri ise bu çokgensel bölgelerin kenar ve köşeleri olan cisimlere çok yüzlü (polyhedra) denir. Çokyüzlünün herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası yine bu çokyüzlünün içinde kalıyorsa, bu çok yüzlüye konveks (dışbükey) çokyüzlü denir. [1] Simetrik, konveks çokyüzlüler, platonik cisimler, Arşimed cisimleri ve Katalan cisimleri olmak üzere temel olarak üç grupta incelenebilir.

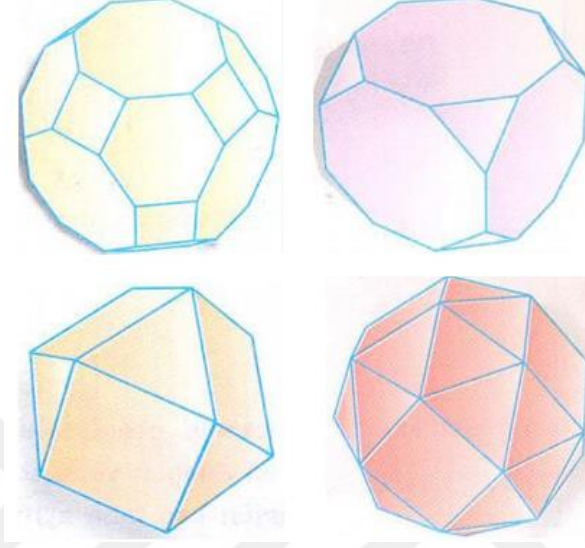
M.Ö. 360 yıllarında Yunan filozof Platon (Eflatun) Timaus adlı eserinde, düzgün dört yüzlü (tetrahedron) ile ateşi, düzgün sekiz yüzlü (octahedron) ile havayı, düzgün yirmi yüzlü (icosahedron) ile suyu, düzgün altı yüzlü (dodecahedron) ile evreni ilişkilendirerek doğanın anlaşılabilirliğinden bahsetmiştir. Platonun isminden esinlenerek bu düzgün çokyüzlülere Platonik cisimler denilmektedir. Öklid tarafından düzgün çokyüzlülerin sadece beş tane oldukları ispatlanmıştır. [2] Platonik cisimlerin tüm yüzleri tek tip düzgün çokgenken yüzleri iki veya daha çok düzgün çokgenden oluşan simetrik, konveks çokyüzlülere Arşimed cisimleri adı verilmektedir. Arşimed cisimleri tam olarak on üç tanedir.



Şekil 1.1. Düzgün çokyüzlüler.

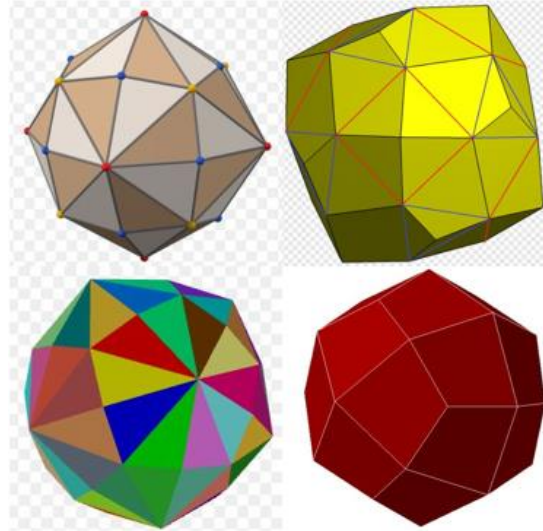
Ayrıt ve yüzleri eş olmayan konveks çokyüzlülere düzgün olmayan çokyüzlüler denilmektedir. Bunlar Arşimed cisimlerinin duali olan Katalan cisimlerdir. Katalan cisimleri de Arşimed cisimleri gibi tam olarak on üç tanedirler. Katalan cisimler

1865 yılında Belçikalı matematikçi Eugene Catalan tarafından tanımlanmıştır.[3] Eugène Charles Catalan (30 Mayıs 1814-14 Şubat 1894, Liège, Belçika) sürekli kesirler, betimleyici geometri, sayılar teorisi ve kombinatorik üzerinde çalışmış bir bilim adamıdır. 1855'te keşfettiği bir benzersiz yüzeye kendi adını vermiş, bunun öncesinde de ünlü Catalan varsayımını açıklamıştır.



Şekil 1.2. Arşimed cisimlerden bazıları.

Katalan cisimleri, Platonik cisimler ve Arşimed cisimlerden ayıran en önemli özellik, düzgün olmayan konveks yapılar olmalarıdır. Katalan cisimlerin yüzlerindeki çokgenler düzgün olmayan çokgenlerdir. Örneğin Rhombic Triacanthedron 30 tane eşkenar dörtgen yüze veya Triakis Octahedron 24 tane çeşit kenar üçgen yüze sahiptir.



Şekil 1.3. Katalan cisimlerden bazıları.

1.2 Minkowski Geometri ve Konveks Çokyüzlüler ile İlişkileri

Minkowski geometri, eliptik ve hiperbolik geometriden farklı sonlu boyutlu bir Öklidyen olmayan geometridir. Ayrıca space-time Minkowskian geometrisinden de farklıdır. Minkowski geometrisindeki lineer yapı Öklidyen geometrisindeki ile hemen hemen aynıdır. Noktalar, doğrular ve düzlemler Öklidyen geometrinin noktaları, doğruları ve düzlemleri iken, açı ölçümü Öklidyen geometrideki ile aynı yolla yapılmaktadır. [4] Minkowski geometrisinin Öklidyen geometriden tek farkı kullanılan uzaklık fonksiyonudur. Bu uzaklık fonksiyonuna göre uzaklık her yönde aynı değildir. Bu farklılıkla birlikte uzaklığa bağlı yapılar tamamen değişmektedir. Örneğin birim küre belli, simetrik, konveks bir cisimdir. Literatürde bazı matematikçiler tarafından çalışılmış farklı uzaklık fonksiyonları ile birlikte elde edilmiş birçok Minkowski tipi geometri bulunmaktadır. Bu geometrilerin birim kürelerinin bazı konveks cisimler olduğu görülmüş ve tersine bazı konveks cisimleri küre kabul eden geometriler oluşturulmuştur. Bu çalışmalardan bazıları [5,6-13] dir.

1.3 Evritim

Evritim geometrik şekillerin çemberin veya kürenin merkezine göre yansımasıdır. İlk olarak klasik dönem Japon yasında Japon tapınaklarının duvarlarında görülen iç içe çoklu çember sorularının çözüm yolları araştırılırken kullanılmıştır. Evritim aslında Öklid teoreminin bir sonucu olup ama daha çok Öklid dışı uygulamalara ışık tutar. Evritim tam olarak Öklid geometrisi içerisinde yer almaz çünkü Öklid geometrisi dönüşümlerinde doğru doğruya dönüşürken evritim de doğru eğriye çember ise doğruya dönüşmektedir. Bu konuda ilklerden olan J.L. Coolidge “A treatise on the Circle and the Sphere” (Coolidge, 1916) adlı çalışmasında evritim üzerine çalışmıştır. E.J. Dijksterhuis da “Archimedes” (Dijksterhuis, 1956) adlı çalışmasında evritim üzerine çalışmalarını yayınlamıştır. Zvezdelina Stankova-Frenkel ise “Inversiyon in plane” (Stankova-Frenkel, 1998) adlı çalışmasında evritim uygulamalarıyla ilgili çalışmalar yapmıştır. Son yıllarda F.J. Garciya Capitan “Aplication De la Inversion A la Resolucion Problema” (Garciya Capitan, 2005) adlı çalışmasında evritimin bazı uygulamalarından söz etmiştir. Ülkemizde ise Cem Tezer, evritim üzerine bazı çalışmalar yapmıştır. Cem Tezer’in 1992-I ve 1992-II Matematik Dünyası dergisindeki Evritim I-II yazısında Öklid geometrisinden kaynağını alıp Öklid dışı geometri olarak gelişen, Evritim (evritim, inversiyon) kısaca şekillerin çembere göre

yansıması olarak tanımlamıştır. Daha sonra Mustafa Yağcı 2006 da Matematik Dünyası Dergisinde “Evritim” adlı yazısında evritimin uygulamalarını göstermiştir. Evritim karmaşık birçok şekli daha basit hale getirmede oldukça kullanışlıdır. Kullanım alanı oldukça geniş olan evritimin geçmişte uygulanan alanlar dışında geometride birçok uygulama alanı vardır. [14]

Evritim birçok zor soruları beraberinde getirdiği ve uğraştırıcı problemler ortaya koyduğu için hâlâ düzlemdeki en ilgi çekici dönüşümlerden birisidir. Dolayısıyla son dönemde de evritim ile ilgili, literatürde pek çok çalışma vardır. Bir evritim söz konusu olduğunda akla ilk olarak bir çembere göre bir evritim gelmektedir, ancak bazı matematikçiler bazı diğer objelere göre de evritim dönüşümlerini tanımlayıp incelemişlerdir. Bu çalışmalara örnek olarak [15-19] kaynakları gösterilebilir. Ayrıca diğer bazı matematikçiler de evritim dönüşümlerini farklı uzaklık fonksiyonları kullanarak araştırmışlardır, bu çalışmalar için [20,21,22-24] incelenebilir. Dahası evritim üç boyutlu Öklidyen ve Öklidyen olmayan uzaylarda da çalışılmıştır, bu çalışmalardan bazıları [25,26,27-29] tür.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde metrik geometri, evritim, çapraz oran ve harmonik eşlenik tanımları yapılmıştır. Sonrasında Öklid düzleminde bu kavramlarla ilgili elde edilmiş bazı teoremler verilmiştir.

2.1 Metrik Geometri

Bu bölümde [30] den faydalanılarak metrik geometri ile ilgili bazı tanımlar verilmiştir.

Tanım 2.1.1 Elemanları noktalar olarak adlandırılan bir küme $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}$ nin doğru olarak adlandırılan bazı alt kümelerinin topluluğu $\mathcal{L}$, I , da nokta ve doğrular arasında üzerinde olma (*incidence*) bağıntısı olmak üzere $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ sistemi aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyorsa bu sistem bir *soyut geometri* olarak adlandırılır.

- i. $\forall A, B \in \mathcal{P}$ için $A \in I$ ve $B \in I$ olacak şekilde bir tek $I \in \mathcal{L}$ doğrusu vardır.
- ii. Her doğru en az iki noktayı kapsar.

$(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ soyut geometrisi $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.2 $S = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ soyut geometrisi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa *incidence geometridir* denir.

- i. $\mathcal{L}$ de farklı iki noktayı üzerinde bulunduran bir tek doğru vardır.
- ii. Doğrudan olmayan üç $A, B, C \in \mathcal{P}$ noktaları vardır.

Tanım 2.1.3 Bir $d: \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, aşağıdaki özellikleri sağlarsa, bir *metriktir* denir.

M1: Her $A, B \in \mathcal{P}$ için $d(A, B) \geq 0$,

M2: Her $A, B \in \mathcal{P}$ için $d(A, B) = 0 \iff A = B$,

M3: Her $A, B \in \mathcal{P}$ için $d(A, B) = d(B, A)$,

M4: Her $A, B \in \mathcal{P}$ için $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$.

Tanım 2.1.4 $I, \mathcal{G} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ incidence geometrisinin bir doğrusu olsun. $d, \mathcal{G}$ üzerinde uzaklık fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu l için bir *cetveldir* denir:

- i. f fonksiyonu bire-bir ve örtendir.
- ii. l üzerindeki her $\mathcal{P}, Q$ nokta çifti için

$$|f(P) - f(Q)| = d(P, Q)$$

dir. Bu denkleme *cetvel denklemi* denir.

Tanım 2.1.5 $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ incidence geometrisi d uzaklık fonksiyonuyla birlikte $\forall l \in \mathcal{L}$ doğrusu için bir *cetvele* sahip ise, *cetvel postülatını* sağlıyor denir. Bu durumda $\mathcal{M} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I, d)$ ye bir *metrik geometri* denir.

Metrik geometride çalışmamızın temel sebebi $\mathcal{L}$ deki l doğrusuna ilişkin soruları f cetvelini kullanarak, $\mathbb{R}$ ye dönüşüm yaparak cevaplandırabiliriz. Bu düzlemin elemanları $\mathbb{R}$ de “*arada olma*” gibi kavramlar kullanılarak l ye transfer edilebilir. Bu da metrik yaklaşımın bize sağladığı kolaylıktır.

2.2 Evritim

Bu bölümde [31] ve [32] den yararlanılarak evritim ile ilgili bazı tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.2.1 $\mathcal{C} = (O, r)$ çemberine göre evritim, $I_{(O,r)}$ ile gösterilsin. Her $P \neq O$ için, $d(O, P)d(O, P') = r^2$ koşulunu sağlayan OP ışını üzerindeki P' noktasına P nin evriği denir (Şekil 2.1.) ve $I_{(O,r)}(P) = P'$ şeklinde gösterilir. O noktasına evritim merkezi, $\mathcal{C}$ ye evritim çemberi, r ye evritim çemberinin yarıçapı ve r^2 ye de evritim çemberinin kuvveti denir.

$\mathcal{C} = \mathcal{C}(O, r)$ çemberine göre evritim, $\mathcal{C}$ çemberine göre yansıma olarak da düşünülebilir. Evritimler açıları ve çifte oranı koruduğu gibi çemberi çembere, çemberi doğruya ya da doğruyu çembere dönüştürebilen dönüşümlerdir. Bir P noktasının evriği P' olduğunda, P' noktasının evriğinin de P olması gerektiği $d(O, P)d(O, P') = r^2$ koşulundan kolayca görülebilir. Bu da yarı dönme ve simetrilere benzer olarak evritim dönüşümünün involusyonlu olduğunu gösterir.

Evritim O noktasında tanımlı değildir. Dolayısıyla tanım kümesi düzlemin tamamını içermez. Ayrıca evritim örten de değildir. Çünkü $I_{(O,r)}(P) = O$ olacak şekilde bir P noktası yoktur. Bu tür eksiklikleri gidermek için düzleme ∞ noktası (sonsuzdaki bir nokta) ilave edilerek düzlem genişletilmektedir. $I_{(O,r)}(O) = \infty$ ve $I_{(O,r)}(\infty) = O$ şeklinde tanımlandığında O ve ∞ noktaları birbirine karşılık gelmektedir. Dolayısıyla evritim genişletilmiş düzlemin bir dönüşümü olur.

Teorem 2.2.1

- a. Evritim merkezinden geçen bir doğrunun evriği, doğrunun kendisidir.
- b. Evritim merkezinden geçmeyen bir doğrunun evriği, evritim merkezinden geçen bir çemberdir.
- c. Evritim merkezinden geçen bir çemberin evriği, evritim merkezinden geçmeyen bir doğrudur.
- d. Evritim merkezinden geçmeyen bir çemberin evriği, evritim merkezinden geçmeyen bir çemberdir.

2.3 Çapraz Oran ve Harmonik Eşlenik

Bu bölümde [31] den yararlanılarak çapraz oran ve harmonik eşlenik ile ilgili bazı tanım ve teoremler verilmiştir.

$\overrightarrow{AB}$, A dan B ye bir l doğrusu boyunca yönlendirilmiş uzaklığı gösterebilir; yani l üzerinde pozitif yön veya yönlendirme belirlensin ve B yi içeren A başlangıç noktasına sahip ışın yönlendirmenin pozitif yönüne sahipse $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}$ ve ışının ters yönüne sahipse $\overrightarrow{AB} = -\overline{AB}$ dir. Açıkça $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ dir.

Yardımcı Teorem 2.3.1 A, B, C doğrudan ise $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$ dir.

Yardımcı Teorem 2.3.2 AB , l doğrusunun bir parçası O , l nin herhangi bir noktası olsun. Bu durumda $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ dir.

Şimdi A, B, C ve D nin yönlü bir l doğrusu üzerindeki dört farklı nokta olduklarını varsayalım, bu noktaların (AB, CD) çapraz oranı

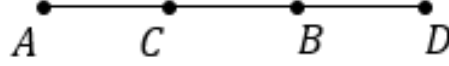
$$(AB, CD) = \frac{\overline{AC}/\overline{CB}}{\overline{AD}/\overline{DB}} \quad (2.1)$$

biçiminde tanımlanır. Dikkat edilirse çapraz oran ya C ve D nin her ikisi de A ve B nin arasında ya da C ve D nin hiçbiri A ve B nin arasında değilse pozitif, $\{A, B\}$ ve $\{C, D\}$ çiftleri birbirini ayırıyorsa negatiftir.

Bir doğru üzerindeki A, B, C ve D dört noktası için

$$(AB, CD) = -1$$

ise bu noktalar bir *harmonik küme* oluşturur denir.



Şekil 2.1. Harmonik küme.

Noktaların bir harmonik kümesi $H(AB, CD)$ ile gösterilir ve C ve D , A ve B ye göre harmonik eşlenikdirler denir.

Teorem 2.3.1 C, O merkezli bir çember ve C ve D , C ye göre evrik bir nokta çifti olsun. A ve B , C ve D den geçen çapın uç noktaları olsun. Bu durumda $(AB, CD) = -1$ dir. Tersine, A ve B bir çapın uç noktaları ve $(AB, CD) = -1$ ise, C ve D evrik noktalaradır.

Yardımcı Teorem 2.3.3 C, O merkezli ve r yarıçaplı bir evritim çemberi olsun. P, P' ve Q, Q' evrik nokta çiftleriyse,

$$\overline{P'Q'} = r^2 \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP} \cdot \overline{OQ}} \quad (2.2)$$

dir.

Teorem 2.3.2 A, B, C ve D, O evritim merkeziyle aynı doğru üzerindeki dört nokta olsun. A', B', C' ve D' bu noktaların karşılık gelenevrik noktaları olsun. Bu durumda $(AB, CD) = (A'B', C'D')$ dir.

3. $\mathbb{R}_{CO}^2(\mathbb{R}_M^2)$ VE $\mathbb{R}_{DD}^2$ DE ÇEMBERE GÖRE EVRİTİM VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde öncelikle bu tezin çalışılmasında temel oluşturan [21] ve [33] kaynaklarında uzayda tanımlanmış olan Cuboctahedron (CO) ve Disdyakis Dodecahedron (DD) metriklerinin izdüşüm yöntemi ile düzleme indirgenmiş halleri olan sırasıyla maksimum ve Disdyakis Dodecahedron metrikleri tanımlanmıştır. Daha sonra bu metrikler için evritim, ilgili düzlemin çemberine göre incelenmişlerdir. Bu düzlemlerdeki evritimler birer izometri değildir. Bu nedenle uzaklık maksimum ve Disdyakis Dodecahedron çembersel evritimler altında korunmaz. Bununla birlikte uzaklık kavramıyla ilgili olarak çapraz oranın bu evritimler altında korundukları gösterebilir. Bu nedenle son olarak maksimum metriği ile döşenmiş düzlem olan $\mathbb{R}_M^2$ ve disdyakis dodecahedron metriği ile döşenmiş düzlem olan $\mathbb{R}_{DD}^2$ deki çapraz oran ve harmonik eşlenikler incelenmiştir.

3.1 $\mathbb{R}_{CO}^2(\mathbb{R}_M^2)$ de Çembere Göre Evritim ve Özellikleri

Bu bölümde öncelikle [21] ve [33] kaynaklarında uzayda tanımlanmış olan Cuboctahedron metriği düzleme izdüşüm yöntemi ile indirgenmiş olup bu metriğin düzlemde bilinen maksimum metriği ile aynı olduğu görülmüştür. Sonrasında maksimum düzlem ile ilgili temel özellikler verilmiş çembere göre evritim ile çapraz oran ve harmonik eşlenik incelenmiştir.

3.1.1 Cuboctahedron (maksimum) düzlemi ($\mathbb{R}_{CO}^2(\mathbb{R}_M^2)$)

Bu bölümde Maksimum düzlem geometrisi ile ilgili temel kavram ve özellikler [34] den özetlenerek verilecektir.

Tanım 3.1.1.1 $X = (x_1, y_1)$ ve $Y = (x_2, y_2)$ kartezyen düzlemde iki nokta olmak üzere maksimum uzaklık

$$d_M = (X, Y) = \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\} \quad (3.1)$$

biçiminde tanımlanır.

Aşağıdaki teorem [34] den faydalanılarak ispatsız olarak verilmiştir.

Teorem 3.1.1.1 d_M uzaklık fonksiyonu bir metriktir.

Önerme 3.1.1.1 Her Öklidyen öteleme maksimum düzlemde uzaklığı korur. Böylece ötelemeler $\mathbb{R}_M^2$ de bir izometridir.

Önerme 3.1.1.2 d_E Öklid uzaklık fonksiyonu ve analitik düzlemde P_1 ve P_2 noktalarından geçen doğru ℓ olsun. ℓ nin eğimi m ise

$$d_M(P_1, P_2) = \frac{\max\{1, |m|\}}{\sqrt{1+m^2}} d_E(P_1, P_2) \quad (3.2)$$

dir.

Önerme 3.1.1.2 d_M uzaklığının aynı doğru boyunca Öklid uzaklığının pozitif sabit bir katı olduğunu belirtir.

Sonuç 3.1.1.1 P_1, P_2 ve $X, \mathbb{R}^2$ de üç doğrusal nokta olmak üzere

$$d_E(P_1, X) = d_E(P_2, X) \Leftrightarrow d_M(P_1, X) = d_M(P_2, X) \quad (3.3)$$

dir.

Sonuç 3.1.1.2 P_1, P_2 ve $X, \mathbb{R}^2$ de üç ayrı doğrusal nokta olmak üzere

$$\frac{d_E(P_1, X)}{d_E(P_2, X)} = \frac{d_M(P_1, X)}{d_M(P_2, X)} \quad (3.4)$$

dir.

3.1.2 $\mathbb{R}_{CO}^2(\mathbb{R}_M^2)$ de çembere göre evritim

Bu bölümde Maksimum düzlemde çembere göre evritim ile ilgili tanım ve teoremler [12] den özetlenerek verilmiştir. M -çemberi ile Maksimum düzlemdeki bir çember kastedilmektedir. Maksimum düzlem ise kısaca $\mathbb{R}_M^2$ biçiminde gösterilecektir.

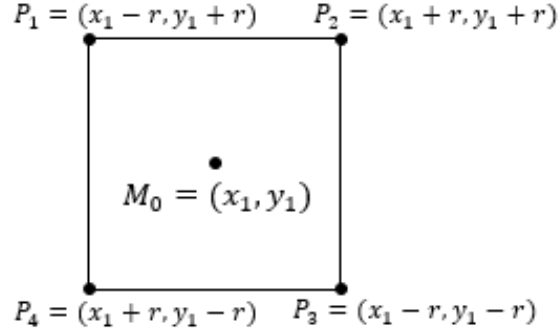
$\mathbb{R}_M^2$ der yarıçaplı $M_O = (x_1, y_1)$ merkezli çember

$$\max\{|x - x_1|, |y - y_1|\} = r$$

denklemini sağlayan (x, y) noktalarının kümesidir. $\mathbb{R}_M^2$ de böyle bir çember köşeleri

$P_1 = (x_1 - r, y_1 + r), P_2 = (x_1 + r, y_1 + r), P_3 = (x_1 - r, y_1 - r)$ ve

$P_4 = (x_1 + r, y_1 - r)$ noktaları olan bir karedir.



Şekil 3.1. Maksimum çemberi

Tanım 3.1.2.1 $\mathcal{C}$, $\mathbb{R}_M^2$ de r yarıçaplı O merkezli bir M -çemberi olsun ve P_∞ maksimum düzleme eklenmiş ideal nokta olsun. $\mathbb{R}_M^2$ de $\mathcal{C}$ ye göre maksimum çembersel evritim $I_M(O, r)(O) = P_\infty$, $I_M(O, r)(P_\infty) = O$, $I_M(O, r)(P) = P'$ için $P \neq O$ ve P' , $\overrightarrow{OP}$ ışını üzerinde olmak üzere

$$d_M(O, P) \cdot d_M(O, P') = r^2 \quad (3.5)$$

biçiminde verilen

$$I_M(O, r): \mathbb{R}_M^2 \cup \{P_\infty\} \rightarrow \mathbb{R}_M^2 \cup \{P_\infty\} \quad (3.6)$$

dönüşümüdür.

Önerme 3.1.2.1 $\mathcal{C}$ merkezi orijinde ve yarıçapı r olan bir M -çemberi olsun. P noktası $\mathcal{C}$ nin içindeyse P' noktası $\mathcal{C}$ nin dışındadır ve bunun tersi de geçerlidir.

Önerme 3.1.2.2 $I_M(O, r)$ orijin merkezli r yarıçaplı bir $\mathcal{CM}$ -çemberine göre maksimum çembersel evritim olsun. Böylece $P = (x, y)$ noktasının maksimum çembersel evriği koordinatları

$$x' = \frac{r^2 x}{(\max\{|x|, |y|\})^2}, y' = \frac{r^2 y}{(\max\{|x|, |y|\})^2}$$

olan $P' = (x', y')$ noktasıdır.

Sonuç 3.1.2.1 $I_M(O', r)$, $O' = (a, b)$ merkezli r yarıçaplı $\mathbb{R}_M^2$ de M -çemberine göre maksimum çembersel evritim olsun. Böylece $P = (x, y)$ noktasının maksimum çembersel evriği koordinatları

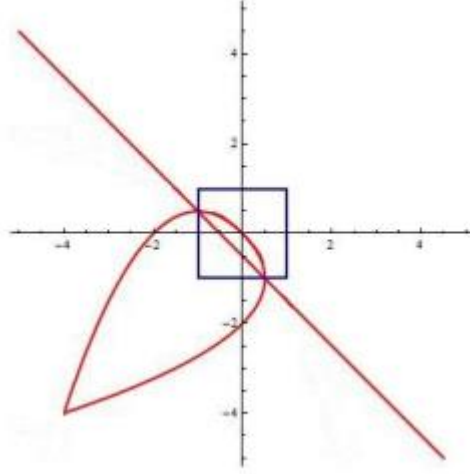
$$x' = a + \frac{r^2(x - a)}{(\max\{|x - a|, |y - b|\})^2}, y' = \frac{r^2(y - b)}{(\max\{|x - a|, |y - b|\})^2}$$

olan $P' = (x', y')$ noktasıdır.

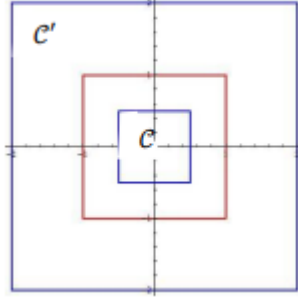
Açıkça maksimum çembersel evritim altında O merkezi hariç $\mathcal{C}_M$ nin iç bölgesi dış bölgesine ve dış bölgesi iç bölgesine eşlenir.

Teorem 3.1.2.1

- i. O merkezinden geçen doğrular $I_M(O, r)$ maksimum çembersel evritim altında kendilerine eşlenirler.
- ii. Maksimum çembersel evritim çemberinin merkezinden geçmeyen doğrular $I_M(O, r)$ maksimum çembersel evritim altında O merkezli maksimum çemberlerine eşlenmezler.
- iii. O merkezli maksimum çemberler $I_M(O, r)$ maksimum çembersel evritim altında O merkezli maksimum çemberlerine eşlenirler.
- iv. O merkezinden geçmeyen maksimum çemberler $I_M(O, r)$ maksimum çembersel evritim altında hiçbir maksimum çembere eşlenmezler.
- v. Evritim çemberinin merkezinden geçen maksimum çemberler $I_M(O, r)$ maksimum çembersel evritim altında O merkezinden geçmeyen düz doğrulara eşlenmezler.



Şekil 3.2. O dan geçmeyen bir doğru O merkezli bir maksimum çembere eşlenmez.



Şekil 3.3. O merkezli bir maksimum çember O merkezli bir maksimum çembere eşlenir.

3.1.3 $\mathbb{R}_{CO}^2(\mathbb{R}_M^2)$ de çapraz oran ve harmonik eşlenik

Bu bölümdeki önerme ve teoremler [21] kaynağından ispatsız olarak özetlenmiştir.

Önerme 3.1.3.1 P, Q ve $O \in \mathbb{R}_M^2$ de doğrudan üç farklı nokta olsun. P' ve Q' sırasıyla P ve Q nun $I_M(O, r)$ maksimum çembersel evritimine göre evrikleri ise

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) \cdot d_M(O, Q)} \quad (3.7)$$

elde edilir.

Önerme 3.1.3.2 C , merkezi orijin de bulunan r yarıçaplı maksimum evritim çemberi olsun. P, Q ve $O \in \mathbb{R}_M^2$ de doğrudan olmayan herhangi üç nokta olsun. P' ve Q'

sırasıyla P ve Q nun evrikleri ve P ve Q orijinden geçen $\{0, \infty\}$ veya $\{1, -1\}$ eğimli doğrular üzerindelerse

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) \cdot d_M(O, Q)} \quad (3.8)$$

elde edilir.

Önerme 3.1.3.3 $\mathcal{C}$, orijin merkezli ve r yarıçaplı maksimum evritim çemberi ve P, Q ve $O \in \mathbb{R}_M^2$ de doğrudan olmayan herhangi üç nokta olsun. $P = (x_P, y_P)$ ve $Q = (x_Q, y_Q)$ olmak üzere P ve Q dan geçen doğrunun eğimi 1 ve $x_P y_Q + y_P x_Q = 0$ ise

$$d_M(P', Q') = \frac{r^2 d_M(P, Q)}{d_M(O, P) \cdot d_M(O, Q)} \quad (3.9)$$

dir.

Teorem 3.1.3.1 Maksimum çembersel evritim, maksimum çapraz oranı korur.

Teorem 3.1.3.2 $\mathcal{C}$, O merkezli bir maksimum çember olsun ve doğru parçası $[PQ] \subset \mathbb{R}_M^2$ de $\mathcal{C}$ nin bir çapı olsun. R ve $\overrightarrow{SOP}$ ışını üzerinde $[PQ]$ doğru parçasını içinden ve dışardan bölen farklı noktalar olsunlar. Bu durumda R ve S nin P ve Q ya göre maksimum harmonik eşlenik olmaları için gerek ve yeter koşul R ve S nin $I_M(O, r)$ maksimum çembersel evritimine göre evrik noktalar olmalarıdır.

3.2 $\mathbb{R}_{DD}^2$ de Çembere Göre Evritim ve Özellikleri

Bu bölümde öncelikle [5] ve [35] kaynaklarında uzayda tanımlanmış olan Disdyakis Dodecahedron metriği düzleme izdüşüm yöntemiyle indirgenmiş ve bu metrikle döşenmiş düzlemin özellikleri verilmiştir. Sonrasında Disdyakis Dodecahedron düzleminde çembere göre evritim, çapraz oran ve harmonik eşlenik incelenmiştir.

3.2.1 Disdyakis dodecahedron düzlemi $\mathbb{R}_{DD}^2$

Bu bölümde [35] de uzayda tanımlanmış DD - metriği düzleme izdüşüm yöntemiyle indirgenerek bu metriğin düzlemdeki bazı özelliklerini verilmektedir.

Tanım 3.2.1.1 $X = (x_1, y_1)$ ve $Y = (x_2, y_2)$ kartezyen düzlemde iki nokta olsun.

$$d_{DD}(X, Y) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + (\sqrt{3} - 1)\min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

Bişiminde tanımlanan $d_{DD}: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ uzaklık fonksiyonuna düzlemde Disdyakis Dodecahedron uzaklığı denir.

Önerme 3.2.1.1 $\mathbb{R}^2$ de d_{DD} uzaklık fonksiyonu bir metriktir.

İspat: $\mathbb{R}^2$ de d_{DD} uzaklık fonksiyonunun bir metrik olduğunu göstermek için $X = (x_1, y_1), Y = (x_2, y_2), Z = (x_3, y_3)$ $\mathbb{R}^2$ de üç farklı nokta olmak üzere

M1) $d_{DD}(X, Y) \geq 0$ ve $d_{DD}(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$

M2) $d_{DD}(X, Y) = d_{DD}(Y, X)$

M3) $d_{DD}(X, Y) \leq d_{DD}(X, Z) + d_{DD}(Z, Y)$

aksiyomlarının sağlandığı gösterilmelidir.

M1) $d_{DD}(X, Y) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + (\sqrt{3} - 1)\min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$ olup mutlak değer tanımından $d_{DD}(X, Y) \geq 0$ elde edilir.

$d_{DD}(X, Y) = 0$ olsun. Bu durumda

$$\max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + (\sqrt{3} - 1)\min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} = 0$$

olup $|x_1 - x_2| = 0$ ve $|y_1 - y_2| = 0$, dolayısıyla $x_1 = x_2$ ve $y_1 = y_2$ elde edilir. Böylece $X = Y$ dir. Tersine $X = Y$ olsun. Bu durumda $d_{DD}(X, Y) = 0$ olduğu açıktır.

M2) Mutlak değer tanımından

$$\begin{aligned} d_{DD}(X, Y) &= \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + (\sqrt{3} - 1)\min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} \\ &= \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\} + (\sqrt{3} - 1)\min\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\} = d_{DD}(Y, X) \end{aligned}$$

elde edilir.

M3) $X = (x_1, y_1), Y = (x_2, y_2), Z = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ olsun.

$d_{DD}(X, Y) \leq d_{DD}(X, Z) + d_{DD}(Z, Y)$ olduğu gösterilmelidir.

$$d_{DD}(X, Y) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + (\sqrt{3} - 1)\min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

$$d_{DD}(X, Z) = \max\{|x_1 - x_3|, |y_1 - y_3|\} + (\sqrt{3} - 1)\min\{|x_1 - x_3|, |y_1 - y_3|\}$$

$$d_{DD}(Y, Z) = \max\{|x_2 - x_3|, |y_2 - y_3|\} + (\sqrt{3} - 1)\min\{|x_2 - x_3|, |y_2 - y_3|\}$$

olduğundan ispat için aşağıdaki durumlar incelenmelidir:

i) $|x_1 - x_2| > |y_1 - y_2|, |x_1 - x_3| > |y_1 - y_3|$ ve $|x_2 - x_3| > |y_2 - y_3|$ ise

$$\begin{aligned} d_{DD}(X, Y) &= |x_1 - x_2| + (\sqrt{3} - 1)|y_1 - y_2| \\ &= |x_1 - x_3 - x_2 + x_3| + (\sqrt{3} - 1)|y_1 - y_3 - y_2 + y_3| \\ &\leq [|x_1 - x_3| + (\sqrt{3} - 1)|y_1 - y_3|] + [|x_3 - x_2| + (\sqrt{3} - 1)|y_3 - y_2|] \\ &= d_{DD}(X, Z) + d_{DD}(Y, Z) \end{aligned}$$

dir.

ii) $|x_1 - x_2| > |y_1 - y_2|, |x_1 - x_3| > |y_1 - y_3|$ ve $|x_2 - x_3| < |y_2 - y_3|$ ise

$$\begin{aligned} d_{DD}(X, Y) &= |x_1 - x_2| + (\sqrt{3} - 1)|y_1 - y_2| \\ &= |x_1 - x_3 - x_2 + x_3| + (\sqrt{3} - 1)|y_1 - y_3 - y_2 + y_3| \\ &\leq [|x_1 - x_3| + (\sqrt{3} - 1)|y_1 - y_3|] + [|x_3 - x_2| + (\sqrt{3} - 1)|y_3 - y_2|] \\ &\leq |x_1 - x_3| + (\sqrt{3} - 1)|y_1 - y_3| + |y_2 - y_3| + (\sqrt{3} - 1)|x_2 - x_3| \\ &= d_{DD}(X, Z) + d_{DD}(Y, Z) \end{aligned}$$

dir.

iii) $|x_1 - x_2| > |y_1 - y_2|$, $|x_1 - x_3| < |y_1 - y_3|$ ve $|x_2 - x_3| > |y_2 - y_3|$ ise

$$\begin{aligned}
d_{DD}(X, Y) &= |x_1 - x_2| + (\sqrt{3} - 1)|y_1 - y_2| \\
&= |x_1 - x_3 - x_2 + x_3| + (\sqrt{3} - 1)|y_1 - y_3 - y_2 + y_3| \\
&\leq [|x_1 - x_3| + (\sqrt{3} - 1)|y_1 - y_3|] + [|x_3 - x_2| + (\sqrt{3} - 1)|y_3 - y_2|] \\
&\leq |y_1 - y_3| + (\sqrt{3} - 1)|x_1 - x_3| + |x_2 - x_3| + (\sqrt{3} - 1)|y_2 - y_3| \\
&= d_{DD}(X, Z) + d_{DD}(Y, Z)
\end{aligned}$$

dir.

iv) $|x_1 - x_2| > |y_1 - y_2|$, $|x_1 - x_3| < |y_1 - y_3|$ ve $|x_2 - x_3| < |y_2 - y_3|$ ise

$$\begin{aligned}
d_{DD}(X, Y) &= |x_1 - x_2| + (\sqrt{3} - 1)|y_1 - y_2| \\
&= |x_1 - x_3 - x_2 + x_3| + (\sqrt{3} - 1)|y_1 - y_3 - y_2 + y_3| \\
&\leq [|x_1 - x_3| + (\sqrt{3} - 1)|y_1 - y_3|] + [|x_3 - x_2| + (\sqrt{3} - 1)|y_3 - y_2|] \\
&\leq |y_1 - y_3| + (\sqrt{3} - 1)|x_1 - x_3| + |y_2 - y_3| + (\sqrt{3} - 1)|x_2 - x_3| \\
&= d_{DD}(X, Z) + d_{DD}(Y, Z)
\end{aligned}$$

dir.

v) $|x_1 - x_2| < |y_1 - y_2|$, $|x_1 - x_3| > |y_1 - y_3|$ ve $|x_2 - x_3| > |y_2 - y_3|$ ise

$$\begin{aligned}
d_{DD}(X, Y) &= |y_1 - y_2| + (\sqrt{3} - 1)|x_1 - x_2| \\
&= |y_1 - y_3 - y_2 + y_3| + (\sqrt{3} - 1)|x_1 - x_3 + x_3 - x_2| \\
&\leq [|y_1 - y_3| + (\sqrt{3} - 1)|x_1 - x_3|] + [|y_3 - y_2| + (\sqrt{3} - 1)|x_3 - x_2|] \\
&\leq |x_1 - x_3| + (\sqrt{3} - 1)|y_1 - y_3| + |x_2 - x_3| + (\sqrt{3} - 1)|y_2 - y_3|
\end{aligned}$$

$$= d_{DD}(X, Z) + d_{DD}(Y, Z)$$

dir.

vi) $|x_1 - x_2| < |y_1 - y_2|$, $|x_1 - x_3| > |y_1 - y_3|$ ve $|x_2 - x_3| < |y_2 - y_3|$ ise

$$\begin{aligned} d_{DD}(X, Y) &= |y_1 - y_2| + (\sqrt{3} - 1)|x_1 - x_2| \\ &= |y_1 - y_3 - y_2 + y_3| + (\sqrt{3} - 1)|x_1 - x_3 + x_3 - x_2| \\ &\leq [|y_1 - y_3| + (\sqrt{3} - 1)|x_1 - x_3|] + [|y_3 - y_2| + (\sqrt{3} - 1)|x_3 - x_2|] \\ &\leq |x_1 - x_3| + (\sqrt{3} - 1)|y_1 - y_3| + |y_2 - y_3| + (\sqrt{3} - 1)|x_2 - x_3| \\ &= d_{DD}(X, Z) + d_{DD}(Y, Z) \end{aligned}$$

dir.

vii) $|x_1 - x_2| < |y_1 - y_2|$, $|x_1 - x_3| < |y_1 - y_3|$ ve $|x_2 - x_3| > |y_2 - y_3|$ ise

$$\begin{aligned} d_{DD}(X, Y) &= |y_1 - y_2| + (\sqrt{3} - 1)|x_1 - x_2| \\ &= |y_1 - y_3 - y_2 + y_3| + (\sqrt{3} - 1)|x_1 - x_3 + x_3 - x_2| \\ &\leq [|y_1 - y_3| + (\sqrt{3} - 1)|x_1 - x_3|] + [|y_3 - y_2| + (\sqrt{3} - 1)|x_3 - x_2|] \\ &\leq |y_1 - y_3| + (\sqrt{3} - 1)|x_1 - x_3| + |x_2 - x_3| + (\sqrt{3} - 1)|y_2 - y_3| \\ &= d_{DD}(X, Z) + d_{DD}(Y, Z) \end{aligned}$$

dir.

viii) $|x_1 - x_2| < |y_1 - y_2|$, $|x_1 - x_3| < |y_1 - y_3|$ ve $|x_2 - x_3| < |y_2 - y_3|$ ise

$$\begin{aligned} d_{DD}(X, Y) &= |y_1 - y_2| + (\sqrt{3} - 1)|x_1 - x_2| \\ &= |y_1 - y_3 - y_2 + y_3| + (\sqrt{3} - 1)|x_1 - x_3 + x_3 - x_2| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq [|y_1 - y_3| + (\sqrt{3} - 1)|x_1 - x_3|] + [|y_3 - y_2| + (\sqrt{3} - 1)|x_3 - x_2|] \\
&\leq |y_1 - y_3| + (\sqrt{3} - 1)|x_1 - x_3| + |y_2 - y_3| + (\sqrt{3} - 1)|x_2 - x_3| \\
&= d_{DD}(X, Z) + d_{DD}(Y, Z)
\end{aligned}$$

dir.

Sonuç olarak tüm durumlarda

$$d_{DD}(X, Y) \leq d_{DD}(X, Z) + d_{DD}(Z, Y) \quad (3.10)$$

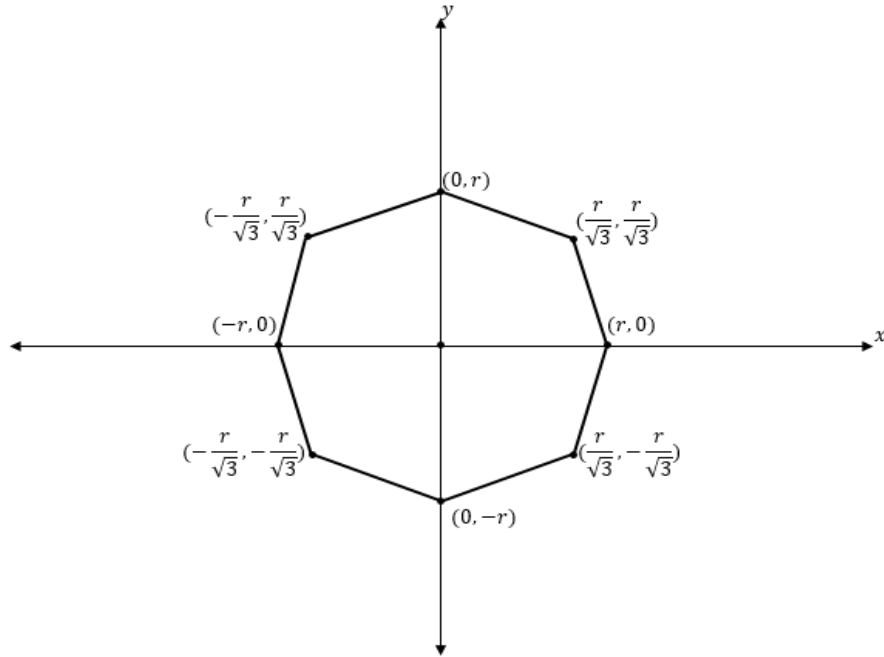
elde edilir.

d_{DD} metriği ile döşenmiş kartezyen düzlem $\mathbb{R}_{DD}^2$ ile gösterilecektir. $\mathbb{R}_{DD}^2$ de

$O = (0, 0)$ merkezli r yarıçaplı çember

$$\max\{|x|, |y|\} + (\sqrt{3} - 1) \min\{|x|, |y|\} = r \quad (3.11)$$

denklemini sağlayan $(x, y) \in \mathbb{R}_{DD}^2$ noktalarının kümesidir.



Şekil 3.4. Düzlemde DD -metriğine göre O merkezli r yarıçaplı çember

Önerme 3.2.1.2 Her Öklidyen öteleme $\mathbb{R}_{DD}^2$ de bir izometridir.

İspat: $A = (a_1, a_2)$, $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere $T_A: \mathbb{R}_{DD}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{DD}^2$, $T_A(X) = A + X$ olacak şekilde düzlemde bir öteleme olsun. $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$\begin{aligned} & d_{DD}(T_A(P_1), T_A(P_2)) \\ &= \max\{|x_1 + a_1 - x_2 - a_1|, |y_1 + a_2 - y_2 - a_2|\} \\ &+ (\sqrt{3} - 1) \min\{|x_1 + a_1 - x_2 - a_1|, |y_1 + a_2 - y_2 - a_2|\} \\ &= \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + (\sqrt{3} - 1) \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} \\ &= d_{DD}(P_1, P_2) \end{aligned}$$

olup T_A bir izometridir.

Önerme 3.2.1.3 d_E Öklidyen uzaklık fonksiyonu, ℓ ise analitik düzlemde P_1 ve P_2 noktalarından geçen doğru olsun. ℓ nin eğimi m ise

$$d_{DD}(P_1, P_2) = \frac{\max\{1, |m|\} + (\sqrt{3} - 1) \min\{1, |m|\}}{\sqrt{1 + m^2}} d_E(P_1, P_2)$$

dir.

İspat: $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ verilsin. Bu durumda P_1 ve P_2 den geçen doğru ℓ ise ℓ nin eğimi $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d_{DD}(P_1, P_2) &= \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + (\sqrt{3} - 1) \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} \\ &= |x_1 - x_2| [\max\{1, |m|\} + (\sqrt{3} - 1) \min\{1, |m|\}] \text{ ve} \end{aligned}$$

$$d_E(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = |x_1 - x_2| \sqrt{1 + m^2}$$

bulunur. Böylece

$$\frac{d_{DD}(P_1, P_2)}{d_E(P_1, P_2)} = \frac{\max\{1, |m|\} + (\sqrt{3} - 1) \min\{1, |m|\}}{\sqrt{1 + m^2}} \quad (3.12)$$

elde edilir.

Sonuç 3.2.1.1 P_1, P_2 ve $X, \mathbb{R}^2$ de doğrudan üç nokta olsun. Bu durumda

$$d_E(P_1, X) = d_E(P_2, X) \Leftrightarrow d_{DD}(P_1, X) = d_{DD}(P_2, X) \quad (3.13)$$

dir.

Sonuç 3.2.1.2 P_1, P_2 ve $X, \mathbb{R}^2$ de üç ayrı doğrudan nokta olsun. Bu durumda

$$\frac{d_E(P_1, X)}{d_E(P_2, X)} = \frac{d_{DD}(P_1, X)}{d_{DD}(P_2, X)} \quad (3.14)$$

dir. Yani bir doğru boyunca Öklidyen d_{DD} uzaklık oranları eşittir.

3.2.2 $\mathbb{R}_{DD}^2$ de çembere göre evritim

Bu bölümde $\mathbb{R}_{DD}^2$ de çembere göre evritim incelenmektedir. DD -çemberi ile $\mathbb{R}_{DD}^2$ deki bir çember kastedilmektedir.

Tanım 3.2.2.1 $\mathcal{C}, \mathbb{R}_{DD}^2$ de r yarıçaplı O merkezli bir DD -çemberi ve P_∞, DD düzlemine eklenmiş ideal nokta olsun. $\mathbb{R}_{DD}^2$ de $\mathcal{C}$ ye göre DD çembersel evritim

$I_{DD}(O, r)(O) = P_\infty, I_{DD}(O, r)(P_\infty) = 0, I_{DD}(O, r)(P) = P'$ için $P \neq O$ ve $P', \overrightarrow{OP}$ ışını üzerinde olmak üzere

$$d_{DD}(O, P) \cdot d_{DD}(O, P') = r^2 \quad (3.15)$$

biçiminde verilen $I_{DD}(O, r): \mathbb{R}_{DD}^2 \cup \{P_\infty\} \rightarrow \mathbb{R}_{DD}^2 \cup \{P_\infty\}$ dönüşümüdür.

Önerme 3.2.2.1 Merkezi orijinde olan ve yarıçapı r olan DD -çemberi $\mathcal{C}$ olsun. P noktası $\mathcal{C}$ nin içindeyse, P' noktası $\mathcal{C}$ nin dışındadır ve bunun terside geçerlidir.

İspat: P noktasının $\mathcal{C}$ nin iç kısmında olduğu varsayalım. Böylece $d_{DD}(O, P) < r$ dır. $d_{DD}(O, P) \cdot d_{DD}(O, P') = r^2$ denkleminde $I_{DD}(O, r)(P) = P'$ olup $r^2 = d_{DD}(O, P) \cdot d_{DD}(O, P') < r \cdot d_{DD}(O, P')$ ve dolayısıyla $d_{DD}(O, P') > r$ elde edilir. Böylece P' noktası $\mathcal{C}$ nin dışındadır.

Önerme 3.2.2.2 $I_{DD}(O, r)$ orijin merkezli r yarıçaplı bir CDD -çemberine göre disdyakis dodecahedron çembersel evritim olsun. Böylece $P = (x, y)$ noktasının disdyakis dodecahedron çembersel evriği koordinatları;

$$x' = \frac{r^2 x}{(\max\{|x|, |y|\} + (\sqrt{3} - 1)\min\{|x|, |y|\})^2}$$

$$y' = \frac{r^2 y}{(\max\{|x|, |y|\} + (\sqrt{3} - 1)\min\{|x|, |y|\})^2}$$

olan $P' = (x', y')$ noktasıdır.

İspat: $\mathcal{C}$, merkezi orijinde olan ve yarıçapı r olan DD -çemberi, $P = (x, y)$ ve $P' = (x', y')$ $\mathcal{C}$ ye göre evrik noktalar olsunlar. O , P ve P' noktaları doğrudan olduklarından $\overrightarrow{OP}$ ve $\overrightarrow{OP'}$ ışınları aynı yöne sahip olup $k \in R^+$ için

$\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}$ ve $(x', y') = (kx, ky)$ dir. Bununla birlikte $d_{DD}(O, P) \cdot d_{DD}(O, P') = r^2$ olduğu kullanılırsa

$$k = \frac{r^2}{(\max\{|x|, |y|\} + (\sqrt{3} - 1)\min\{|x|, |y|\})^2}$$

elde edilir. Elde edilen k değeri $(x', y') = (kx, ky)$ ifadesinde yerine yazılırsa

$$x' = \frac{r^2 x}{(\max\{|x|, |y|\} + (\sqrt{3} - 1)\min\{|x|, |y|\})^2}$$

$$y' = \frac{r^2 y}{(\max\{|x|, |y|\} + (\sqrt{3} - 1)\min\{|x|, |y|\})^2}$$

elde edilir.

Dikkat edilirse P' noktası P nin evriği ise, P nin P' noktasının evriği olduğu açıktır. Bunun sonucunda $P = (x, y)$ ve $P' = (x', y')$ olmak üzere açıkça

$$x = \frac{r^2 x'}{(\max\{|x'|, |y'|\} + (\sqrt{3} - 1)\min\{|x'|, |y'|\})^2}$$

$$y = \frac{r^2 y'}{(\max\{|x'|, |y'|\} + (\sqrt{3} - 1)\min\{|x'|, |y'|\})^2}$$
(3.16)

dir.

Sonuç 3.2.2.1 $I_{DD}(O', r)$ $\mathbb{R}_{DD}^2$ de $O' = (a, b)$ merkezli r yarıçaplı DD -çemberine göre disdyakis dodecahedron çembersel evritim olsun. Böylece $P = (x, y)$ noktasının disdyakis dodecahedron çembersel evriği, koordinatları

$$x' = a + \frac{r^2(x - a)}{(\max\{|x - a|, |y - b|\} + (\sqrt{3} - 1)\min\{|x - a|, |y - b|\})^2}$$

$$y' = b + \frac{r^2(y - b)}{(\max\{|x - a|, |y - b|\} + (\sqrt{3} - 1)\min\{|x - a|, |y - b|\})^2}$$

olan $P' = (x', y')$ noktasıdır.

İspat: İspat tüm ötelemelerin $\mathbb{R}_{DD}^2$ nin izometrilere olduğu gerçeğinden dolayı açıktır.

Açıkça DD çembersel evritim altında O merkezi hariç $\mathcal{C}_{DD}$ nin iç bölgesi dış bölgesine ve dış bölgesi iç bölgesine eşlenir.

Teorem 3.2.2.1 de verilen özelliklerinin hiçbirisi $\mathbb{R}_{DD}^2$ de geçerli değildir. Şimdi bu özelliklerin DD düzlemindeki karşılıklarını gösteren teoremi verelim.

Teorem 3.2.2.1

- i. O merkezinden geçen doğrular $I_{DD}(O, r)$ disdyakis dodecahedron çembersel evritim altında kendilerine eşlenirler.
- ii. Disdyakis dodecahedron çembersel evritim çemberinin merkezinden geçmeyen doğrular $I_{DD}(O, r)$ disdyakis dodecahedron çembersel evritim altında O merkezli disdyakis dodecahedron çemberlerine eşlenmezler.

- iii. O merkezli disdyakis dodecahedron çemberler $I_{DD}(O, r)$ disdyakis dodecahedron çembersel evritim altında O merkezli disdyakis dodecahedron çemberlere eşlenirler.
- iv. O merkezinden geçmeyen disdyakis dodecahedron çemberler $I_{DD}(O, r)$ disdyakis dodecahedron çembersel evritim altında hiçbir disdyakis dodecahedron çembere eşlenmezler.
- v. Evritim çemberinin merkezinden geçen disdyakis dodecahedron çemberler $I_{DD}(O, r)$ disdyakis dodecahedron çembersel evritim altında O merkezinden geçmeyen düz doğrulara eşlenmezler.

İspat: Tüm olası durumları inceleyerek Teorem 3.2.2.1'deki özellikler elde edilir.

i. ve ii. durumları için $\mathbb{R}_{DD}^2$ de $ax + by + c = 0$ doğrusu göz önüne alınsın. Denklem (3.16) kullanılarak;

$$\frac{ar^2x'}{(\max\{|x'|, |y'|\} + (\sqrt{3} - 1) \min\{|x'|, |y'|\})^2} + \frac{br^2y'}{(\max\{|x'|, |y'|\} + (\sqrt{3} - 1) \min\{|x'|, |y'|\})^2} + c = 0$$

ve burada $ax'r^2 + by'r^2 + c(\max\{|x'|, |y'|\} + (\sqrt{3} - 1) \min\{|x'|, |y'|\})^2 = 0$

dır.

Şimdi denklem (3.16) aşağıda verilen durumlar altında ele alınacaktır.

Durum 1: $|x'| \geq |y'|$ ise bu durumda (3.16) denklemi

$$ar^2x' + br^2y' + (|x'| + (\sqrt{3} - 1)|y'|)^2c = 0$$

biçimindedir.

1.1 $c = 0$ ise $ax + by = 0$ doğrusunun evriği $ax' + by' = 0$ olup doğru sabit kalır.

1.2 $c \neq 0$, $a = 0$, $b \neq 0$ ise $by + c = 0$ doğrusunun evriği $br^2y' + (|x'| + (\sqrt{3} - 1)|y'|)^2c = 0$ elips veya hiperbolüdür.

1.3 $c \neq 0, b = 0, a \neq 0$ ise $ax + c = 0$ doğrusunun evriği $ar^2x' + (|x'| + (\sqrt{3} - 1)|y'|)^2c = 0$ elips veya hiperbolüdür.

1.4 $c \neq 0, a \neq 0, b \neq 0$ ise $ax + by + c = 0$ doğrusunun evriği

$ax'r^2 + by'r^2 + (\max\{|x'|, |y'|\} + (\sqrt{3} - 1)\min\{|x'|, |y'|\})^2c = 0$ elips veya hiperbolüdür.

Durum 2: $|y'| \geq |x'|$ ise bu durumda (3.16) denklemi

$$ar^2x' + br^2y' + (|y'| + (\sqrt{3} - 1)|x'|)^2c = 0$$

biçimindedir.

2.1 $c = 0$ ise $ax + by = 0$ doğrusunun evriği $ax' + by' = 0$ olup doğru sabit kalır.

2.2 $c \neq 0, a = 0, b \neq 0$ ise $by + c = 0$ doğrusunun evriği

$br^2y' + (|y'| + (\sqrt{3} - 1)|x'|)^2c = 0$ elips veya hiperbolüdür.

2.3 $c \neq 0, b = 0, a \neq 0$ ise $ax + c = 0$ doğrusunun evriği

$ar^2x' + (|y'| + (\sqrt{3} - 1)|x'|)^2c = 0$ elips veya hiperbolüdür.

2.4 Eğer $c \neq 0, a \neq 0, b \neq 0$ ise $ax + by + c = 0$ doğrusunun evriği

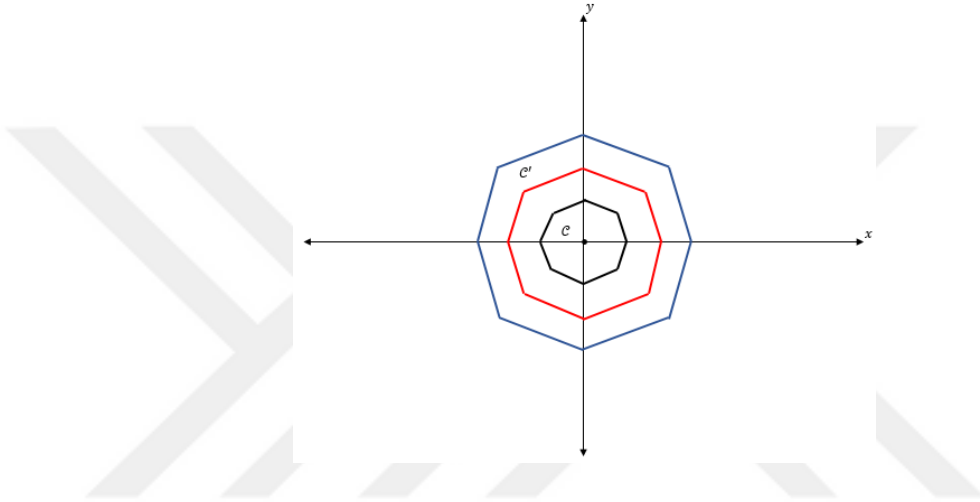
$ar^2x' + br^2y' + (\max\{|x'|, |y'|\} + (\sqrt{3} - 1)\min\{|x'|, |y'|\})^2c = 0$ elips veya hiperbolüdür.

iii. için O merkezli r yarıçaplı evritim çemberi $\mathcal{C}$ olsun. $\mathcal{C}$ ile aynı merkezli, r_1 yarıçaplı DD -çemberi $\max\{|x|, |y|\} + (\sqrt{3} - 1)\min\{|x|, |y|\} = r_1$ olup bu çemberin $\mathcal{C}$ ye göre evriği

$$\max \left\{ \left| \frac{|x'|r^2}{(\max\{|x'|, |y'|\} + (\sqrt{3} - 1) \min\{|x'|, |y'|\})^2} \right|, \left| \frac{|y'|r^2}{(\max\{|x'|, |y'|\} + (\sqrt{3} - 1) \min\{|x'|, |y'|\})^2} \right| \right\} = r_1$$

ve dolayısıyla

$$\max\{|x'|, |y'|\} + (\sqrt{3} - 1) \min\{|x'|, |y'|\} = \frac{r^2}{r_1} = r_2 \text{ dir.}$$



Şekil 3.5. O merkezli bir disdyakis dodecahedron çember O merkezli bir disdyakis dodecahedron çembere eşlenir.

Diğer özellikler disdyakis dodecahedron çembersel evritim tanımı ve önerme 3.2.2.2 kullanılarak benzer şekilde elde edilir.

3.2.3 $\mathbb{R}_{DD}^2$ de çapraz oran ve harmonik eşlenik

Bu bölümde, $\mathbb{R}_{DD}^2$ deki çapraz oran ve harmonik eşlenikler incelenmiştir.

Önerme 3.2.3.1 P , Q ve O nun $\mathbb{R}_{DD}^2$ de üç farklı doğrudan nokta olsun. Eğer P' ve $Q', I_{DD}(O, r)$ disdyakis dodecahedron çembersel evritimine göre sırasıyla P ve Q nun evrikleriyse

$$d_{DD}(P', Q') = \frac{r^2 d_{DD}(P, Q)}{d_{DD}(O, P) \cdot d_{DD}(O, Q)} \quad (3.17)$$

dir.

İspat: P , Q ve O üç farklı doğrudan nokta olsun. Tanım 3.1.2.1 den

$$d_{DD}(P', Q') = |d_{DD}(O, P') - d_{DD}(O, Q')| = \left| \frac{r^2}{d_{DD}(O, P)} - \frac{r^2}{d_{DD}(O, Q)} \right|$$

$$\frac{r^2 d_{DD}(P, Q)}{d_{DD}(O, P) \cdot d_{DD}(O, Q)} \quad (3.17)$$

elde edilir.

Önerme 3.2.3.2 $\mathcal{C}$, merkezi orijinde olan ve yarıçapı r olan DD evritim çemberi olsun. P , Q ve O , $\mathbb{R}_{DD}^2$ de ki doğrudan olmayan herhangi üç farklı nokta olsun. P' ve Q' sırasıyla P ve Q nün evrikleri ve P ve Q orijinden geçen $\{0, \infty\}$ veya $\{1, -1\}$ eğimli doğrular üzerinde bulunuyorsa;

$$d_{DD}(P', Q') = \frac{r^2 d_{DD}(P, Q)}{d_{DD}(O, P) \cdot d_{DD}(O, Q)} \quad (3.18)$$

dur.

İspat: $P = (p, 0)$ ve $Q = (0, q)$ ise, $P' = \left(\frac{r^2}{p}, 0\right)$, $Q' = \left(0, \frac{r^2}{q}\right)$,

$$d_{DD}(P', Q') = \max\left\{\frac{r^2}{|p|}, \frac{r^2}{|q|}\right\} + (\sqrt{3} - 1) \min\left\{\frac{r^2}{|p|}, \frac{r^2}{|q|}\right\}, \quad d_{DD}(O, P) = |p|,$$

$$d_{DD}(O, Q) = |q|, \quad d_{DD}(P, Q) = \max\{|p|, |q|\} + (\sqrt{3} - 1) \min\{|p|, |q|\} \text{ olup}$$

$$d_{DD}(P', Q') = \frac{r^2 d_{DD}(P, Q)}{d_{DD}(O, P) d_{DD}(O, Q)}$$

eşitliği sağlanır.

$d_{DD}[PQ]$ $\mathbb{R}_{DD}^2$ de bir doğru boyunca P den Q ya yönlendirilmiş disdyakis dodecahedron uzaklığı gösterebilir. Başlangıç noktası P olan ve Q yu içeren ışın pozitif yöne sahipse $d_{DD}[PQ] = d_{DD}(P, Q)$ dur. Işın negatif yöne sahipse

$$d_{DD}[PQ] = -d_{DD}(P, Q) \text{ dur.}$$

Şimdi P, Q, R ve S nin $\mathbb{R}_{DD}^2$ de yönlendirilmiş bir doğru üzerinde dört farklı nokta olsun. Buradan bu noktaların disdyakis dodecahedron çapraz oranları $(PQ, RS)_{DD}$

$$(PQ, RS)_{DD} = \frac{d_{DD}[RS]d_{DD}[QS]}{d_{DD}[PS]d_{DD}[QR]} \quad (3.19)$$

biçiminde tanımlanır.

Disdyakis dodecahedron çapraz oran hem R hemde S nin P ve Q arasında olması veya ne R ne de S nin P ve Q nun arasında olmaması durumlarında pozitiftir. $\{P, Q\}$ ve $\{R, S\}$ çiftleri birbirini ayırıyorsa çapraz olan negatiftir. Ayrıca P, Q, R ve S den farklı orijin merkezine sahip $\mathcal{C}$ ye göre disdyakis dodecahedron çembersel evritim, disdyakis dodecahedron çapraz oranı korur.

Teorem 3.2.3.1 Disdyakis dodecahedron çembersel evritim, disdyakis dodecahedron çapraz oranı korur.

İspat: P, Q, R ve S $\mathbb{R}_{DD}^2$ de dört doğruduş nokta olsun. Disdyakis dodecahedron çembersel evritimi $I_{DD}(O, r)$ göre P', Q', R' ve S' sırasıyla P, Q, R ve S nin evrikleri olsun. Disdyakis dodecahedron çembersel evritiminin $\{P, Q\}$ ve $\{R, S\}$ çiftlerinin ayrılmasını veya ayrılmamasını koruduğuna ve ayrıca bir ℓ doğrusu boyunca P noktasından O noktasına DD yönlü uzaklığı Q' noktasından P' noktasına DD yönlü uzaklığa çevirdiğine dikkat edilsin. Önerme 3.2.3.1 kullanılırsa

$$(P'Q', R'S')_{DD} = \frac{d_{DD}(P', R')d_{DD}(Q', S')}{d_{DD}(P', S')d_{DD}(Q', R')} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{r^2 d_{DD}(P, R)}{d_{DD}(O, P)d_{DD}(O, R)} \cdot \frac{r^2 d_{DD}(Q, S)}{d_{DD}(O, Q)d_{DD}(O, S)}}{\frac{r^2 d_{DD}(P, S)}{d_{DD}(O, P)d_{DD}(O, S)} \cdot \frac{r^2 d_{DD}(Q, R)}{d_{DD}(O, Q)d_{DD}(O, R)}} \\ &= \frac{d_{DD}(P, R)d_{DD}(Q, S)}{d_{DD}(P, S)d_{DD}(Q, R)} = (PQ, RS)_{DD} \end{aligned}$$

elde edilir.

ℓ , $\mathbb{R}_{DD}^2$ de bir doğru olsun. P, Q, R ve S , ℓ nin üzerinde dört nokta olduğunu varsayalım.

$(PQ, RS)_{DD} = -1$ ile P, Q, R ve S bir harmonik küme oluşturur denir ve $H(PQ, RS)_{DD}$ ile gösterilir.

Yani

$$\frac{d_{DD}[PR]d_{DD}[QS]}{d_{DD}[PS]d_{DD}[QR]} = -1 \quad (3.21)$$

olacak şekilde ℓ üzerindeki herhangi R ve S çifti P ve Q ya harmonik olarak böler denir. R ve S ye, P ve Q ya göre disdyakis dodecahedron harmonik eşlenikler denir.

Teorem 3.2.3.2 $\mathcal{C}, \mathbb{R}_{DD}^2$ de O merkezli bir DD -çemberi ve $[PQ]$ doğru parçası $\mathcal{C}$ nin bir çapı olsun. R ve $\overrightarrow{SOP}$ ışınının $[PQ]$ doğru parçasını içten ve dıştan bölen noktaları olsunlar. Bu durumda R ve S nin P ve Q ya göre disdyakis dodecahedron harmonik eşlenikler olmaları için gerek ve yeter koşul R ve S nin $I_{DD}(O, r)$ disdyakis dodecahedron çembersel evritimine göre evrik noktalar olmalarıdır.

İspat: R ve S, P ve Q ya göre disdyakis dodecahedron harmonik eşlenikler olsun.

Bu durumda

$$(PQ, RS)_{DD} = -1 \Rightarrow \frac{d_{DD}[PR]d_{DD}[QS]}{d_{DD}[PS]d_{DD}[QR]} = -1 \quad (3.22)$$

dir.

$R, [PQ]$ doğru parçasını içten böldüğü ve $R, \overrightarrow{OQ}$ ışını üzerinde olduğu için,

$$d_{DD}(R, Q) = r - d_{DD}(O, R) \text{ ve } d_{DD} = r + d_{DD}(O, R)$$

dir.

$S, [PQ]$ doğru parçasını dışarıdan böldüğü ve $S, \overrightarrow{OQ}$ ışını üzerinde olduğu için

$$d_{DD}(P, S) = r + d_{DD}(O, S) \text{ ve } d_{DD}(Q, S) = d_{DD}(O, S) - r$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{(r + d_{DD}(O, r)) \cdot (d_{DD}(O, S) - r)}{(r + d_{DD}(O, S)) \cdot (r - d_{DD}(O, R))} = -1$$

$$\Rightarrow (r + d_{DD}(O, R))(d_{DD}(O, S) - r) = (r + d_{DD}(O, S))(d_{DD}(O, R) - r)$$

dir. Son eşitliği sadeleştirerek $d_{DD}(O, R)d_{DD}(O, S) = r^2$ elde edilir. Bu durumda R ve $SI_{DD}(O, r)$ disdyakis dodecahedron çembersel evritimine göre disdyakis dodecahedron evrik noktalarıdır. Diğer koşul için (S ve $R, \overrightarrow{OP}$ ışıını üzerinde ise) benzer hesaplamalarla aynı sonuç elde edilir. Tersine R ve SDD çembersel evritim $I_{DD}(O, r)$ ye göre DD evrik noktalarsa istenilen ifade benzer yöntemle ispatlanabilir.



4. $\mathbb{R}_{CO}^3$ VE $\mathbb{R}_{DD}^3$ DE KÜREYE GÖRE EVRİTİM VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölüm iki ana alt bölümden oluşmaktadır. Bu bölümlerde $\mathbb{R}_{CO}^3$ da bir cuboctahedron küresine göre ve $\mathbb{R}_{DD}^3$ de bir disdyakis dodecahedron küresine göre evritimler ve özellikleri incelenmektedir.

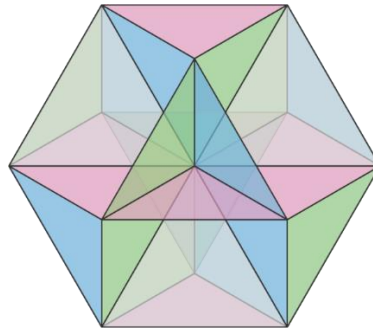
4.1 $\mathbb{R}_{CO}^3$ da Küreye Göre Evritim ve Özellikleri

Bu bölümde ilk olarak [5] ve [33] kaynaklarında verilen Cuboctahedron uzayı tanıtılmıştır. Daha sonrasında bu uzaydaki bir küreye göre evritim tanımlanmış ve bu dönüşümle birlikte elde edilen bazı özellikler verilmiştir.

4.1.1 Cuboctahedron uzayı ($\mathbb{R}_{CO}^3$)

Bu bölümde Cuboctahedron uzayı ile ilgili temel bilgi ve teoremler [5] ve [33] kaynaklarından özetlenerek verilecektir. Cuboctahedron metriği ile döşenmiş analitik 3 – uzay $\mathbb{R}_{CO}^3$ ile gösterilecektir.

Cuboctahedron 8 i eşkenar üçgen, 6 sı kare olmak üzere 14 yüzü, 12 eş köşesi (her birinde 2 üçgen ve 2 karenin bulunduğu köşelerdir) ve 24 eş kenarı (her kenar bir üçgenle bir kareyi ayırmaktadır) bulunan bir Arşimed cismi yani bir yarı-düzgün çokyüzlüdür.



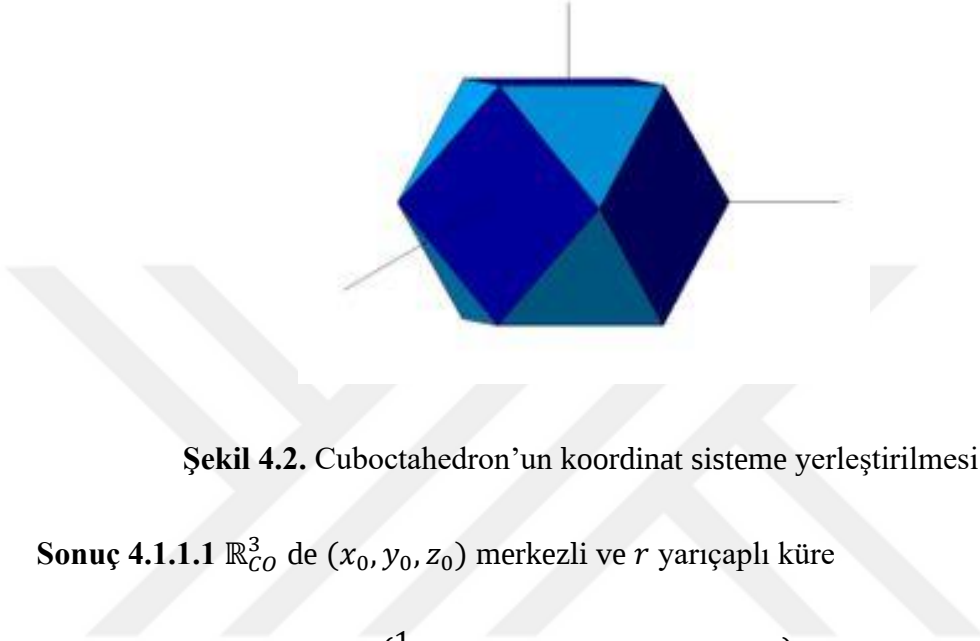
Şekil 4.1. Cuboctahedron.

Tanım 4.1.1.1 $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ $\mathbb{R}^3$ te iki farklı nokta olsun.

$$d_{CO}(P_1, P_2) = \max\left\{\frac{1}{2}(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|), |x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\right\}$$

biçiminde tanımlanan $d_{CO}: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, \infty)$ uzaklık fonksiyonuna cuboctahedron uzaklık fonksiyonu denir.

Teorem 4.1.1.1 $\mathbb{R}^3$ te d_{CO} uzaklık fonksiyonu metriktir ve bu metrikle donatılmış uzayın birim küresi cuboctahedrondur.



Şekil 4.2. Cuboctahedron'un koordinat sisteme yerleştirilmesi.

Sonuç 4.1.1.1 $\mathbb{R}_{CO}^3$ de (x_0, y_0, z_0) merkezli ve r yarıçaplı küre

$$\max \left\{ \frac{1}{2} (|x| + |y| + |z|), |x|, |y|, |z| \right\} = r$$

denklemleri ile ifade edilen, köşe noktaları $(r, r, 0)$ noktalarının her bir bileşeninin tüm muhtemel $+/-$ işaret değişiklikleri ve üç bileşenin tüm muhtemel permütasyonlarının (x_0, y_0, z_0) kadar ötelenmişinden oluşan 14-yüzlü bir çokyüzlü olan cuboctahedrondur.

Yardımcı Teorem 4.1.1.1 $P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ verilsin. P_1 ve P_2 noktalarından geçen doğru l ve l nin doğrultu vektörü (p, q, r) ve

$$\mu_{P_1 P_2} = \frac{\max \left\{ \frac{1}{2} (|p| + |q| + |r|), |p|, |q|, |r| \right\}}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

ise $d_{CO}(P_1, P_2) = \mu_{P_1 P_2} d_E(P_1, P_2)$ dir.

Sonuç 4.1.1.2 $\mathbb{R}^3$ de P_1, P_2, X doğrudan, üç farklı nokta ise

$$d_E(P_1, X) = d_E(P_2, X) \Leftrightarrow d_{CO}(P_1, X) = d_{CO}(P_2, X) \text{ dir.}$$

Sonuç 4.1.1.3 3 boyutlu uzayda P_1, P_2, X doğrudan, üç farklı nokta ise

$$\frac{d_E(X, P_1)}{d_E(X, P_2)} = \frac{d_{CO}(X, P_1)}{d_{CO}(X, P_2)} \quad (4.1)$$

olur. Yani bir doğru boyunca olan d_E, d_{CO} uzaklıklarının oranı aynıdır.

Önerme 4.1.1.1 $\mathbb{R}^3$ de her Öklidyen öteleme $\mathbb{R}_{CO}^3$ un bir izometrisidir.

Ayrıca [5] da d_{CO} metriği ile donatılmış analitik 3-uzayın yani $\mathbb{R}_{CO}^3$ nun izometri grubu araştırılmış ve $\mathbb{R}_{CO}^3$ nun tüm izometrilere $T(3).G(CO)$ olduğu gösterilmiştir. Bunun için öncelikle $G(CO)$ ile gösterilen cuboctahedron grubunun cuboctahedronun Öklidyen simetri grubu olan O_h (octahedral grup) grubuna izomorf olduğu belirlenmiştir. Burada $T(3)$, 3-boyutlu analitik uzayın tüm ötelemelerinin grubudur.

4.1.2 $\mathbb{R}_{CO}^3$ da küreye göre evritim

Bu bölümde $\mathbb{R}_{CO}^3$ da bir küreye göre evritim incelenecektir. CO -küre ile $\mathbb{R}_{CO}^3$ daki bir küre kastedilmektedir.

Tanım 4.1.2.1 $\mathcal{S}$, $\mathbb{R}_{CO}^3$ da r yarıçaplı O merkezli bir CO - küre ve P_∞ , $\mathbb{R}_{CO}^3$ ya eklenmiş ideal nokta olsun. $\mathbb{R}_{CO}^3$ da $\mathcal{S}$ ye göre cuboctahedron küresel evritim $I_{\mathcal{S}}(O, r)(O) = P_\infty$, $I_{\mathcal{S}}(O, r)(P_\infty) = O$, $P \neq O$ için $I_{\mathcal{S}}(O, r)(P) = P'$ ve $P', \overrightarrow{OP}$ ışını üzerinde olmak üzere

$$d_{CO}(O, P).d_{CO}(O, P') = r^2 \quad (4.2)$$

biçiminde verilen

$$I_{\mathcal{S}}(O, r): \mathbb{R}_{CO}^3 \cup \{P_\infty\} \rightarrow \mathbb{R}_{CO}^3 \cup \{P_\infty\} \quad (4.3)$$

dönüşümüdür.

$\mathcal{S}$ evritim küresi, O evritim merkezi ve P' noktası $\mathcal{S}$ küresine göre P noktasının evriği olarak adlandırılır. Öklidyen uzayda evritim küresinin içindeki noktalar evritim altında kürenin dışındaki noktalara ve kürenin dışındaki noktalar kürenin içindeki noktalara eşlenirler. Şimdi aşağıdaki teorem, bu özelliğin $\mathbb{R}_{CO}^3$ da da geçerli olduğunu belirtmektedir.

Yardımcı Teorem 4.1.2.1 $\mathcal{S}$, O merkezli r yarıçaplı bir CO -küre olsun. P noktası $\mathcal{S}$ nin içindeyse P' noktası $\mathcal{S}$ nin dışındadır ve bu ifadenin tersi de geçerlidir.

İspat: r yarıçaplı O merkezli $\mathcal{S}$ küresine göre $I_{\mathcal{S}}(O, r)$ evritimini ve $\mathcal{S}$ nin iç bölgesindeki P noktasını ele alalım. Böylece $d_{CO}(O, P) < r$ dir.

$$P' = I_{\mathcal{S}}(O, r)(P) \text{ ve } d_{CO}(O, P).d_{CO}(O, P') = r^2 \text{ olup}$$

$d_{CO}(O, P).d_{CO}(O, P') < r.d_{CO}(O, P')$ ve böylece $d_{CO}(O, P') > r$ elde edilir. Dolayısıyla P' noktası $\mathcal{S}$ nin dışındadır.

Sonuç 4.1.2.1 $\mathbb{R}_{CO}^3$ daki $I_{\mathcal{S}}(O, r)$ küresel evritimi altında $\mathcal{S}$ nin kendisi nokta nokta sabit kalır.

Teorem 4.1.2.1 P ve $P'O = (0,0,0)$ merkezli r yarıçaplı $I_{\mathcal{S}}(O, r)$ cuboctahedron küresel evritimine göre bir evrik nokta çifti olsun. Bu durumda

$$\omega = r^2 / (d_{CO}(O, P))^2 \quad (4.4)$$

olmak üzere

$$P' = \omega P \quad (4.5)$$

dir.

İspat: $P = (x, y, z)$ ve $P' = (x', y', z')$ noktaları $O = (0,0,0)$ merkezli ve r yarıçaplı $I_{\mathcal{S}}(O, r)$ cuboctahedron küresel evritimine göre evrik çift olsunlar. P ve P' noktaları O dan çıkan ışın üzerinde olduklarından

$$\overrightarrow{OP'} = \omega \overrightarrow{OP}, \omega \in \mathbb{R}^+$$

olup $(x', y', z') = (\omega x, \omega y, \omega z)$ dir. $d_{CO}(O, P).d_{CO}(O, P') = r^2$ denkleminde bu ifade kullanılırsa

$$\max \left\{ \frac{1}{2} (|x| + |y| + |z|), |x|, |y|, |z| \right\} \max \left\{ \frac{1}{2} (|x'| + |y'| + |z'|), |x'|, |y'|, |z'| \right\} = r^2$$

buradan

$$\max \left\{ \frac{1}{2} (|x| + |y| + |z|), |x|, |y|, |z| \right\} \max \left\{ \frac{1}{2} (|\omega x| + |\omega y| + |\omega z|), |\omega x|, |\omega y|, |\omega z| \right\} = r^2$$

böylece

$$\omega (d_{CO}(O, P))^2 = r^2$$

olup

$$\omega = r^2 / (d_{CO}(O, P))^2 \quad (4.6)$$

elde edilir. Sonuç olarak $\omega = r^2 / (d_{CO}(O, P))^2$ olmak üzere $\overrightarrow{OP'} = \omega \overrightarrow{OP}$ elde edilir.

Dikkat edilirse P ve $P'O = (0,0,0)$ merkezli r yarıçaplı $I_S(O, r)$ cuboctahedron küresel evritimine göre evrik nokta çifti olduklarında P nin koordinatları da P' nün koordinatları kullanılarak Teorem 4.1.2.1'deki ile aynı yöntemle bulunabilir. Böylece $\omega = r^2 / (d_{CO}(O, P))^2$ olmak üzere $P = \omega P'$ dür.

Sonuç 4.1.2.2 $P = (x, y, z)$ ve $P' = (x', y', z')$, $O = (x_0, y_0, z_0)$ merkezli r yarıçaplı $I_S(O, r)$ cuboctahedron küresel evritimine göre bir evrik çift olsunlar. Bu durumda $\omega = r^2 / (d_{CO}(O, P))^2$ olmak üzere

$$P' - O = \omega(P - O) \quad (4.7)$$

dur.

İspat: $\mathbb{R}_{CO}^3$ da öteleme uzaklıkları koruduğundan ispatı oldukça kolaydır. x', y', z' nün değerleri $\mathbb{R}_{CO}^3$ da $(0,0,0)$, (x_0, y_0, z_0) kadar öteleyerek bulunursa istenilen ifade elde edilir.

Teorem 4.1.2.2 $\mathbb{R}_{CO}^3$ da O , P ve Q herhangi doğruduş üç farklı nokta olsun. P , P' ve Q , $Q'I_S(O, r)$ cuboctahedron küresel evritimine göre evrik çiftler ise

$$d_{CO}(P', Q') = \frac{r^2 \cdot d_{CO}(O, P)}{d_{CO}(O, P) \cdot d_{CO}(O, Q)} \quad (4.8)$$

dir.

İspat: $I_S(O, r)$, $\mathbb{R}_{CO}^3$ da O merkezli ve r yarıçaplı küresel evritim, P , P' ve Q , $Q'I_S(O, r)$ ye göre evrik çiftler olsunlar. Bu durumda

$$d_{CO}(O, P) \cdot d_{CO}(O, P') = r^2 = d_{CO}(O, Q) \cdot d_{CO}(O, Q') \text{ dir.}$$

O , P ve Q doğruduş noktalar ve doğruduş noktaların Öklidyen ve cuboctahedron uzaklıkları oranı eşit olduğundan

$$\begin{aligned} d_{CO}(P', Q') &= |d_{CO}(O, P') - d_{CO}(O, Q')| = \left| \frac{r^2}{d_{CO}(O, P)} - \frac{r^2}{d_{CO}(O, Q)} \right| \\ &= \frac{r^2 \cdot d_{CO}(P, Q)}{d_{CO}(O, P) \cdot d_{CO}(O, Q)} \end{aligned}$$

elde edildi.

Teorem 4.1.2.2'nin tersinin doğru olmadığına dikkat edilmelidir. Ayrıca teoremin $\mathbb{R}_{CO}^3$ daki doğruduş olmayan herhangi üç nokta için her zaman geçerli olmadığı da açıktır. Ancak bazı özel koşullar altında (4.8) denklemi sağlanabilir. Aşağıdaki teorem ile (4.8) denkleminin sağladığı bazı koşullar verilmektedir.

Teorem 4.1.2.3 O , P ve Q $\mathbb{R}_{CO}^3$ da herhangi farklı üç nokta, P , P' ve Q , $Q'O$ merkezli r yarıçaplı $I_S(O, r)$ cuboctahedron küresel evritimine göre evrik nokta çiftleri ve d ve d' sırasıyla $\overrightarrow{OP}$ ve $\overrightarrow{OQ}$ ışınlarının doğrultu vektörleri olsunlar.

$$\Delta_1 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (-1,0,0), (0, -1,0), (0,0, -1)\}$$

$$\Delta_2 = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (1,0, -1), (1, -1,0), (0,1, -1), \\ (0, -1,1), (0, -1, -1), (-1,1,0), (-1,0,1), (-1,0, -1), (-1, -1,0)\}$$

$$\Delta_3 = \{(1,1,1), (1,1, -1), (1, -1,1), (-1,1,1), (1, -1, -1), (-1,1, -1), (-1, -1,1), (-1, -1, -1)\}$$

ve $i = 1,2,3$ olmak üzere $d \in \Delta_i$ ve $d' \in \Delta_i \setminus \{d\}$ ise

$$d_{CO}(P', Q') = \frac{r^2 \cdot d_{CO}(P, Q)}{d_{CO}(O, P) \cdot d_{CO}(O, Q)} \quad (4.8)$$

dir.

İspat: Tüm ötelemeler $\mathbb{R}_{CO}^3$ nun izometri grubunun elemanları olduğundan, O evritim merkezini orijin olarak kabul etmek uygun olacaktır.

Böylece $I_S(O, r)$ $\mathbb{R}_{CO}^3$ da O merkezli r yarıçaplı cuboctahedron küresel evritimini göz önüne alalım.

İ.Durum: $d \in \Delta_1$ ve $d' \in \Delta_1 \setminus \{d\}$ olsun. İncelenmesi gereken 30 durum söz konusudur. Örneğin $d = (1,0,0)$ ve $d' = (0,1,0)$ olsun. Bu durumda $P = (p, 0,0)$ ve $Q = (0, q, 0)$ olup P ve Q nun $I_S(O, r)$ evritimine göre evrikleri sırasıyla

$$P' = \left(0, \frac{r^2}{p}, 0\right) \text{ ve } Q' = \left(0, 0, \frac{r^2}{q}\right) \text{ dur. Ayrıca } d_{CO}(O, P) = |p|, d_{CO}(O, Q) = |q|, \\ d_{CO}(P', Q') = \max \left\{ \frac{1}{2} \left(\left| \frac{r^2}{p} \right| + \left| \frac{r^2}{q} \right| \right), \left| \frac{r^2}{p} \right|, \left| \frac{r^2}{q} \right| \right\}, d_{CO}(P, Q) = \max \left\{ \frac{1}{2} (|p| + |q|), |p|, |q| \right\} \text{ dur.}$$

Bu durumda 2 durum incelenmelidir.

i) $|q| < |p|$ ise

$$d_{CO}(P', Q') = \frac{r^2}{|q|} = \frac{r^2 |p|}{|p| \cdot |q|} = \frac{r^2 d_{CO}(P, Q)}{d_{CO}(O, P) d_{CO}(O, Q)} \quad (4.9)$$

ii) $|p| < |q|$ ise

$$d_{co}(P', Q') = \frac{r^2}{|p|} = \frac{r^2|q|}{|p||q|} = \frac{r^2 d_{co}(P, Q)}{d_{co}(O, P) d_{co}(O, Q)} \quad (4.10)$$

elde edilir.

Δ_1 deki diğer elemanlar için de benzer hesaplamalar ile (4.8) denkleminin sağladığı kolayca görülebilir.

II.Durum: $d \in \Delta_2$ ve $d' \in \Delta_2 \setminus \{d\}$ olsun. İncelenmesi gereken 132 durum söz konusudur. Örneğin $d = (1, 0, 1)$ ve $d' = (0, 1, -1)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $P = (p, 0, p)$ ve $Q = (0, q, -q)$ olup P ve Q nun $I_S(O, r)$ evritimine göre evrikleri sırasıyla $P' = (\frac{r^2}{p}, 0, \frac{r^2}{p})$ ve $Q' = (0, \frac{r^2}{q}, -\frac{r^2}{q})$ dur. Ayrıca $d_{co}(O, P) = |p|$, $d_{co}(O, Q) = |q|$,

$$d_{co}(P', Q') = \max \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{|p|} + \frac{r^2}{|q|} + \left| \frac{r^2}{p} + \frac{r^2}{q} \right| \right), \frac{r^2}{|p|}, \frac{r^2}{|q|}, \left| \frac{r^2}{p} + \frac{r^2}{q} \right| \right\}$$

ifadesi düzenlenirse

$$d_{co}(P', Q') = \frac{r^2}{|p||q|} \max \left\{ \frac{1}{2} (|p| + |q| + |p + q|), |p|, |q|, |p + q| \right\}$$

bulunur ve buradan

$$d_{co}(P', Q') = \frac{r^2 d_{co}(P, Q)}{d_{co}(O, P) d_{co}(O, Q)} \text{ elde edilir.}$$

Bu durumda 4 alt durum incelenmelidir.

i) $|q| < |p| < |p + q|$ ve $|p| < |q| < |p + q|$ ise

$$d_{co}(P', Q') = \frac{r^2(|q| + |p| + |p + q|)}{2|p||q|} = \frac{r^2 d_{co}(P, Q)}{d_{co}(O, P) \cdot d_{co}(O, Q)}$$

elde edilir.

ii) $|q| > |p| + |p + q|$ ise

$$d_{co}(P', Q') = \frac{r^2}{|p|} = \frac{r^2 d_{co}(P, Q)}{d_{co}(O, P) \cdot d_{co}(O, Q)}$$

elde edilir.

iii) $|p| > |q| + |p + q|$ ise

$$d_{co}(P', Q') = \frac{r^2}{|q|} = \frac{r^2 d_{co}(P, Q)}{d_{co}(O, P) \cdot d_{co}(O, Q)}$$

elde edilir.

iv) $|p + q| > |p| + |q|, |p + q| > |p|, |p + q| > |q|$ ise

$$d_{co}(P', Q') = \frac{r^2 |p + q|}{|p| |q|} = \frac{r^2 d_{co}(P, Q)}{d_{co}(O, P) \cdot d_{co}(O, Q)}$$

elde edilir.

III. Durum $d \in \Delta_3$ ve $d' \in \Delta_3 \setminus \{d\}$ olsun. İncelenmesi gereken 56 durum söz konusudur. $d = (1, 1, 1)$ ve $d' = (-1, 1, 1)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $P = (p, p, p)$ ve $Q = (-q, q, q)$ olup P ve Q nun $I_S(O, r)$ evritimine göre evrikleri sırasıyla $P' = \left(\frac{4r^2}{9p}, \frac{4r^2}{9p}, \frac{4r^2}{9p}\right)$ ve $Q' = \left(-\frac{4r^2}{9q}, \frac{4r^2}{9q}, \frac{4r^2}{9q}\right)$ olup $d_{co}(O, P) = \frac{3|p|}{2}$, $d_{co}(O, Q) = \frac{3|q|}{2}$, $d_{co}(P, Q) = \max\left\{\frac{1}{2}(|p + q| + 2|p - q|), |p + q|, |p - q|\right\}$ dür. Böylece

$d_{co}(P', Q') = \max\left\{\frac{1}{2}\left(\left|\frac{4r^2}{9p} + \frac{4r^2}{9p}\right| + 2\left|\frac{4r^2}{9p} - \frac{4r^2}{9p}\right|\right), \left|\frac{4r^2}{9p} + \frac{4r^2}{9q}\right|, \left|\frac{4r^2}{9p} - \frac{4r^2}{9q}\right|\right\}$ ifadesi düzenlenirse

$$d_{co}(P', Q') = \frac{4r^2}{9|p||q|} \left\{ \frac{1}{2}(|p + q| + 2|p - q|), |p + q|, |p - q| \right\}$$

bulunur ve buradan

$$d_{co}(P', Q') = \frac{r^2 d_{co}(P, Q)}{d_{co}(O, P) \cdot d_{co}(O, Q)} \quad (4.10)$$

elde edilir.

Δ_3 teki diğer elemanlar için de benzer hesaplamalar ile (4.8) denkleminin sağlandığı kolayca görülebilir.

4.1.3 $\mathbb{R}_{CO}^3$ da doğruların, düzlemlerin ve cuboctahedron kürelerinin evrikleri

Bu bölümde Öklidyen düzlemde evritim ile ilgili verilen Teorem 2.2.1 in bir benzeri $\mathbb{R}_{CO}^3$ da incelenmektedir. $\mathbb{R}_{CO}^3$ daki doğruların, düzlemlerin ve cuboctahedron kürelerinin konumlarına göre evrikleri verilmektedir.

Teorem 4.1.3.1 $I_S(O, r)$, O merkezli ve r yarıçaplı bir cuboctahedron küresel evritimi olsun. O dan geçen herhangi bir doğru veya herhangi bir düzlem, $I_S(O, r)$ altında invaryanttır.

İspat: O merkezli r yarıçaplı bir cuboctahedron küresel evritimini göz önüne alalım. Denklem (4.11) kullanılırsa O dan geçen bir doğrunun $I_S(O, r)$ altında invaryant olduğu açıktır.

O dan geçen $Ax + By + Cz = 0$ düzlemini göz önüne alalım. $I_S(O, r)$ evritimi uygulanırsa düzlemin denklemi

$$A \frac{r^2 x'}{(d_{\omega}(O, P'))^2} + B \frac{r^2 y'}{(d_{\omega}(O, P'))^2} + C \frac{r^2 z'}{(d_{\omega}(O, P'))^2} = 0 \quad (4.11)$$

ve buradan

$$Ax' + By' + Cz' = 0 \quad (4.12)$$

olup O dan geçen düzlemin invaryant kaldığı elde edilir.

Teorem 4.1.3.2 $I_S(O, r)$, O merkezli ve r yarıçaplı bir cuboctahedron küresel evritimi olsun. $I_S(O, r)$ altında O merkezli bir cuboctahedron küresinin evriği yine O merkezli bir cuboctahedron küresidir.

İspat: Ötelemeler $\mathbb{R}_{CO}^3$ da uzaklıkları koruduğundan $I_S(O, r)$ evritiminin merkezi, $O = (0,0,0)$ olarak alınabilir. Böylece O merkezli yarıçaplı cuboctahedron küresi

$$\mathcal{S} = \{P = (x, y, z): d_{CO}(O, P) = r\} \quad (4.13)$$

dir.

$\mathcal{S}_1$, O merkezli r_1 yarıçaplı cuboctahedron küresi olsun. Bu durumda

$$\mathcal{S}_1 = \{P = (x, y, z): d_{CO}(O, P) = r_1\} \quad (4.14)$$

dir. Böylece $\mathcal{S}_1$ in $I_{\mathcal{S}}(O, r)$ altındaki evriği yine O merkezli bir cuboctahedron küresi olan

$$\mathcal{S}_1' = \left\{P' = (x', y', z'): d_{CO}(O, P') = \frac{r^2}{r_1}\right\} \text{ dir.}$$

Teorem 4.1.3.3 $I_{\mathcal{S}}(O, r)$ O merkezli r yarıçaplı bir cuboctahedron küresel evritimi olsun. Böylece $\mathcal{S}$ nin tüm kenar, köşe ve yüzlerinin evrikleri kendileridir.

İspat: Sonuç 2.6'dan $\mathcal{S}$ nin kendisi $I_{\mathcal{S}}(O, r)$ altında nokta sabit kalır. Dolayısıyla $\mathcal{S}$ nin her bir kenar, köşe ve yüzü $I_{\mathcal{S}}(O, r)$ altında invaryanttır.

4.1.4 $\mathbb{R}_{CO}^3$ da çapraz oran ve harmonik eşlenik

Cuboctahedron küresel evritim altında uzaklık değişmez değildir. Bu nedenle, cuboctahedron uzayındaki evritim bir izometri değildir. Ancak ters orantı altında çapraz oranın korunuyor olması çapraz orana uzaklık üzerinden odaklanmanın gerekliliğini ortaya koymaktadır. Bu nedenle, bu bölümde, küresel evritim altında $\mathbb{R}_{CO}^3$ daki çapraz oranı ve harmonik eşlenikleri araştırıyoruz.

Tanım 4.1.4.1 Yönlendirilmiş bir doğru l üzerindeki herhangi iki nokta X ve Y için doğru parçasının yönlendirilmiş cuboctahedron uzunluğu $\overline{XY}d_{CO}[XY]$ ile gösterilir. Doğru parçası $\overline{XY}$ ve l aynı yöne sahipse $d_{CO}[XY] = d_{CO}(X, Y)$ ve ters yöne sahipse $d_{CO}[XY] = -d_{CO}(X, Y)$.

Tanım 4.1.4.2 P, Q, R ve S , $\mathbb{R}_{CO}^3$ daki yönlendirilmiş bir doğru üzerinde dört farklı nokta olsun. Cuboctahedron çapraz oranı $(PQ, RS)_{CO}$ şu şekilde tanımlanır:

$$(PQ, RS)_{CO} = \frac{d_{CO}[P, R]d_{CO}[Q, S]}{d_{CO}[P, S]d_{CO}[Q, R]} \quad (4.15)$$

Sonuç 4.1.4.1 P, Q, R ve S , $\mathbb{R}_{CO}^3$ daki yönlendirilmiş bir doğru üzerinde dört farklı nokta olsun. Cuboctahedron çapraz oranı $(PQ, RS)_{CO}$, hem R hem de S, P ile Q arasındaysa veya R ve S, P ile Q arasında değilse pozitifdir.

İspat: Hem R hem de S noktaları P ve Q noktaları arasında olsun. Yönlendirilmiş doğru PQ için cuboctahedron çapraz oranı

$$(PQ, RS)_{CO} = \frac{d_{CO}[PR]d_{CO}[QS]}{d_{CO}[PS]d_{CO}[QR]}$$

$$(PQ, RS)_{CO} = \frac{d_{CO}(P, R) \cdot (-d_{CO}(Q, S))}{d_{CO}(P, S) \cdot (-d_{CO}(Q, R))} = \frac{d_{CO}(P, R) \cdot d_{CO}(Q, S)}{d_{CO}(P, S) \cdot d_{CO}(Q, R)}$$

ve dolayısıyla $(PQ, RS)_{CO}$ pozitifdir. Ne R ne de SP ve Q arasında değilse, R ve S için altı dizi vardır. Tüm olası kombinasyonların ispatı benzer olduğu için $R - P - Q - S$ yöneliminin ispatını veriyoruz. Böylece cuboctahedron çapraz oranı

$$(PQ, RS)_{CO} = \frac{d_{CO}[PR]d_{CO}[QS]}{d_{CO}[PS]d_{CO}[QR]}$$

$$= \frac{(-d_{CO}(P, R)) \cdot d_{CO}(Q, S)}{d_{CO}(P, S) \cdot (-d_{CO}(Q, R))} = \frac{d_{CO}(P, R) \cdot d_{CO}(Q, S)}{d_{CO}(P, S) \cdot d_{CO}(Q, R)}$$

ve dolayısıyla $(PQ, RS)_{CO}$ pozitifdir.

Sonuç 4.1.4.2 P, Q, R ve S $\mathbb{R}_{CO}^3$ daki yönlendirilmiş bir doğru üzerinde dört farklı nokta olsun. $\{P, Q\}$ ve $\{R, S\}$ çiftleri birbirini ayırırsa, cuboctahedron çapraz oranı $(PQ, RS)_{CO}$ negatiftir.

İspat: $\{P, Q\}$ ve $\{R, S\}$ çiftleri birbirini ayırırsa, R ve S için dört dizi vardır. $R - P - S - Q$ oryantasyonu için cuboctahedron çapraz oranı

$$(PQ, RS)_{CO} = \frac{d_{CO}[PR]d_{CO}[QS]}{d_{CO}[PS]d_{CO}[QR]}$$

$$= \frac{(-d_{CO}(P, R)) \cdot (-d_{CO}(Q, S))}{d_{CO}(P, S) \cdot (-d_{CO}(Q, R))} = -\frac{d_{CO}(P, R) \cdot d_{CO}(Q, S)}{d_{CO}(P, S) \cdot d_{CO}(Q, R)}$$

diğer olası diziler için de benzer hesaplamalarla aynı sonuçlar elde edildiğinden $(PQ, RS)_{CO}$ negatiftir.

Teorem 4.1.4.1 Cuboctahedron çapraz oranı, $\mathbb{R}_{CO}^3$ da cuboctahedron küresel evritim altında değişmezdir.

İspat: $I_S(O, r)$, merkezi O ve yarıçapı r olan bir cuboctahedron küresel evritim olsun ve P, Q, R ve S, O dan geçen yönlendirilmiş bir doğru l üzerinde dört nokta olsun. P', Q', R' ve S' sırasıyla $I_S(O, r)$ altında P, Q, R ve S nin evrik noktaları olsun.

Cuboctahedron küresel evritimin, $\{P, Q\}$ ve $\{R, S\}$ çiftlerinin ayrılmasını veya ayrılmamasını koruduğunu ve ayrıca cuboctahedronu P noktasından Q noktasına bir çizgi boyunca l cuboctahedrona yönlü uzaklığı evrittiğini gözlemleyin. Q' noktasından P' noktasına yönlü uzaklık. Gerekli sonuç Teorem 4.1.2.2'den gelir;

$$\begin{aligned} (P'Q', R'S')_{CO} &= \frac{d_{CO}(P', R')d_{CO}(Q', S')}{d_{CO}(P', S')d_{CO}(Q', R')} \\ &= \frac{\frac{r^2 d_{CO}(P, R)}{d_{CO}(O, P)d_{CO}(O, R)} \cdot \frac{r^2 d_{CO}(Q, S)}{d_{CO}(O, Q)d_{CO}(O, S)}}{\frac{r^2 d_{CO}(P, S)}{d_{CO}(O, P)d_{CO}(O, S)} \cdot \frac{r^2 d_{CO}(Q, R)}{d_{CO}(O, Q)d_{CO}(O, R)}} \\ &= \frac{d_{CO}(P, R)d_{CO}(Q, S)}{d_{CO}(P, S)d_{CO}(Q, R)} = (PQ, RS)_{CO} \end{aligned}$$

Tanım 4.1.4.3 $\mathbb{R}_{CO}^3$ da l bir doğru olsun. P, Q, R ve S nin l üzerinde dört nokta olduğunu varsayalım. $(PQ, RS)_{CO} = -1$ ise P, Q, R ve S nin bir harmonik küme oluşturduğuna denir ve $H(PQ, RS)_{CO}$ ile gösterilir. Yani l üzerindeki herhangi bir R ve S çifti

$$\frac{d_{CO}[P, R]d_{CO}[Q, S]}{d_{CO}[P, S]d_{CO}[Q, R]} = -1$$

P ve Q yi harmonik olarak böldüğü söylenir. R ve S noktaları, P ve Q a göre cuboctahedron harmonik eşlenikler olarak adlandırılır.

Teorem 4.1.4.1 S , merkezi O olan bir cuboctahedron küre olsun ve $\mathbb{R}_{CO}^3$ da $[PQ]$ doğru parçasının çapı S olsun. R ve S , parçacığı $[PQ]$ içten ve dıştan ayıran ışının $\overrightarrow{OP}$ farklı noktaları olsun. O halde R ve S , P ve Q ye göre cuboctahedron harmonik eşleniklerdir, ancak ve ancak R ve S cuboctahedron küresel evritime $I_S(O, r)$ ye göre evrik noktalarlardır.

İspat: R ve S , P ve Q ya göre cuboctahedron harmonik eşleniği olsun. O zaman

$$(PQ, RS)_{CO} = -1 \Rightarrow \frac{d_{CO}[P, R] \cdot d_{CO}[Q, S]}{d_{CO}[P, S] \cdot d_{CO}[Q, R]} = -1$$

R doğru parçasını $[PQ]$ dahili olarak böldüğünden ve R ışını üzerinde olduğundan $\overrightarrow{OQ}$,

$$d_{CO}(R, Q) = r - d_{CO}(O, R) \text{ ve } d_{CO}(P, R) = r + d_{CO}(O, R)$$

S doğru parçasını $[PQ]$ harici olarak böldüğünden ve S ışını üzerinde olduğundan $\overrightarrow{OQ}$, $d_{CO}(P, S) = r + d_{CO}(O, S)$ ve $d_{CO}(Q, S) = d_{CO}(O, S) - r$.

Böylece

$$\frac{(r + d_{CO}(O, R)) \cdot (d_{CO}(O, S) - r)}{(r + d_{CO}(O, S)) \cdot (r - d_{CO}(O, R))} = -1$$

$$\Rightarrow (r + d_{CO}(O, R)) \cdot (d_{CO}(O, S) - r) = (r + d_{CO}(O, S)) \cdot (d_{CO}(O, R) - r)$$

Son eşitliği sadeleştirerek $d_{CO}(O, R) \cdot d_{CO}(O, S) = r^2$ elde edilir. Yani R ve S , cuboctahedron küresel evritime göre $I_S(O, r)$ cuboctahedron küresel evrik noktalarlardır. Diğer koşul için (S ve R ışın üzerindedir $\overrightarrow{OP}$) benzer hesaplamalarla aynı sonuç elde edilir.

Tersine, eğer R ve S , cuboctahedron küresel evritim $I_S(O, r)$ ye göre cuboctahedron küresel evrik noktalarsa, ispat benzerdir.

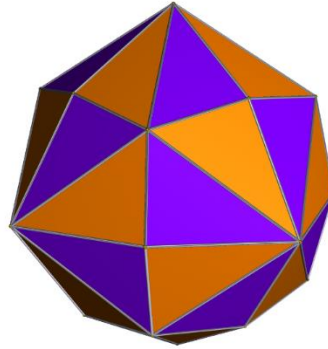
4.2 $\mathbb{R}_{DD}^3$ de Küreye Göre Evritim ve Özellikleri

Bu bölümde öncelikle [33] kaynağında verilen Disdyakis Dodecahedron uzayı tanıtılmıştır. Sonrasında bu uzaydaki bir disdyakis dodecahedron küresine göre evritim tanımlanmış ve bu dönüşümle birlikte elde edilen bazı özellikler verilmiştir.

4.2.1 Disdyakis dodecahedron uzayı ($\mathbb{R}_{DD}^3$)

Bu bölümde Disdyakis Dodecahedron uzayı ile ilgili temel tanım ve teoremler [33] kaynağından özetlenerek ispatsız verilecektir. Disdyakis Dodecahedron metriği ile döşenmiş analitik 3 – uzay $\mathbb{R}_{DD}^3$ ile gösterilecektir.

Disdyakis dodecahedron her biri tek bir çeşitkenar üçgen olan 48 yüze, 26 köşeye ve 72 ayrıta sahip olan bir Katalan cisimdir.



Şekil 4.3. Disdyakis dodecahedron.

Tanım 4.2.1.1 $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ $\mathbb{R}^3$ de iki farklı nokta olsun.

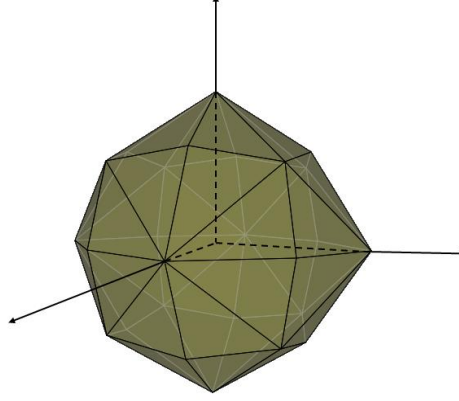
$$d_{DD}(P_1, P_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\} +$$

$$(\sqrt{2} - 1) \min\{|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|, |x_1 - x_2| + |z_1 - z_2|, |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|\} +$$

$$(\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1) \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\}$$

şeklinde tanımlanan $d_{DD}: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonuna analitik 3-uzayda P_1 ve P_2 noktaları arasındaki Disdyakis Dodecahedron uzaklık fonksiyonu denir.

Önerme 4.2.1.1 Analitik 3-uzayda d_{DD} uzaklık fonksiyonu metriktir ve bu metrikle donatılmış uzayın birim küresi disdyakis dodecahedrondur.



Şekil 4.4. Disdyakisdo decahedron'un koordinat sistemine yerleştirilmesi

Sonuç 4.2.1.1 $\mathbb{R}_{DD}^3$ de (x_0, y_0, z_0) merkezli ve r yarıçaplı küre

$$\max\{|x - x_0|, |y - y_0|, |z - z_0|\} +$$

$$(\sqrt{2} - 1) \min\{|x - x_0| + |y - y_0|, |x - x_0| + |z - z_0|, |y - y_0| + |z - z_0|\} +$$

$$(\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1) \min\{|x - x_0|, |y - y_0|, |z - z_0|\} = r$$

veya

$$\max\{|x - x_0|, |y - y_0|, |z - z_0|\} + (\sqrt{2} - 1) \min\{|x - x_0|, |y - y_0|, |z - z_0|\} +$$

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \min\{|x - x_0|, |y - y_0|, |z - z_0|\} = r$$

denklemleri ile ifade edilen köşe noktaları $(0,0,r)$, $(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}, 0)$ ve $(\frac{r}{\sqrt{3}}, \frac{r}{\sqrt{3}}, \frac{r}{\sqrt{3}})$ noktalarının her bir birleşiminin $+/-$ işaret değişiklikleri ve üç bileşenin tüm muhtemel permütasyonlarının (x_0, y_0, z_0) kadar ötelenmişlerinden oluşan 48 yüzlü bir çokyüzlü olan disdyakis dodecahedrondur.

Aşağıdaki önermede $\mathbb{R}^3$ deki noktalar arasındaki Öklidyen ve disdyakis dodecahedron uzaklıkları arasındaki geçiş bağıntısını ifade eder.

Önerme 4.2.1.2 $\mathbb{R}^3$ de P_1 ve P_2 noktalarından geçen doğru l olsun. Eğer l doğrusunun doğrultu vektörü (p, q, r) ,

$$K = \max\{|p|, |q|, |r|\} + (\sqrt{2} - 1) \min\{|p| + |q|, |p| + |r|, |q| + |r|\} +$$

$$(\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1) \min\{|p|, |q|, |r|\}$$

ve

$$\mu_{P_1 P_2} = \frac{K}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

ise

$$d_{DD}(P_1, P_2) = \mu_{P_1 P_2} d_E(P_1, P_2)$$

olur.

Sonuç 4.2.1.2 $\mathbb{R}^3$ de A, B, X doğrudan üç farklı nokta ise

$$d_E(A, X) = d_E(B, X) \Leftrightarrow d_{DD}(A, X) = d_{DD}(B, X)$$

olur.

Sonuç 4.2.1.3 3-boyutlu analitik uzayda A, B, X doğrudan üç farklı nokta ise

$$d_{DD}(A, X)/d_{DD}(B, X) = d_E(A, X)/d_E(B, X)$$

olur.

Yani bir doğru boyunca olan d_E, d_{DD} uzaklıklarının oranı aynıdır.

Önerme 4.2.1.3 $\mathbb{R}^3$ de her Öklidyen öteleme $\mathbb{R}_{DD}^3$ ün bir izometrisidir.

[33] da ayrıca $\mathbb{R}_{DD}^3$ nin tüm izometrilerinin $T(3).G(DD)$ olduğu yani disdyakis dodecahedron metriği ile donatılmış analitik 3-uzayın izometrilerinin grubunun disdyakis dodecahedronun (Öklidyen) simetri grubu olan O_h a izomorf olan $G(DD)$

disdyakis dodecahedron grubu ile 3-boyutlu analitik uzayın tüm ötelemelerinin grubu olan $T(3)$ ün yarı-direkt çarpımı olduğu gösterilmiştir.

4.2.2 $\mathbb{R}_{DD}^3$ de küreye göre evritim

Bu bölümde $\mathbb{R}_{DD}^3$ da bir küreye göre evritim incelenecektir. DD -küre ile $\mathbb{R}_{DD}^3$ daki bir küre kastedilmektedir.

Tanım 4.2.2.1 $\mathcal{D}$, $\mathbb{R}_{DD}^3$ da r yarıçaplı O merkezli bir DD - küre ve P_∞ , $\mathbb{R}_{DD}^3$ ya eklenmiş ideal nokta olsun. $\mathbb{R}_{DD}^3$ da $\mathcal{D}$ ye göre disdyakis dodecahedron küresel evritim $I_{\mathcal{D}}(O, r)(O) = P_\infty$, $I_{\mathcal{D}}(O, r)(P_\infty) = O$, $P \neq O$ için $I_{\mathcal{D}}(O, r)(P) = P'$ ve P' , $\overrightarrow{OP}$ ışını üzerinde olmak üzere

$$d_{DD}(O, P) \cdot d_{DD}(O, P') = r^2 \quad (4.16)$$

biçiminde verilen

$$I_{\mathcal{D}}(O, r): \mathbb{R}_{DD}^3 \cup \{P_\infty\} \rightarrow \mathbb{R}_{DD}^3 \cup \{P_\infty\}$$

dönüşümüdür.

$\mathcal{D}$ evritim küresi, O evritim merkezi ve P' noktası $\mathcal{D}$ küresine göre P noktasının evriği olarak adlandırılır. Öklidyen uzayda evritim küresinin içindeki noktalar evritim altında kürenin dışındaki noktalara ve kürenin dışındaki noktalar kürenin içindeki noktalara eşlenirler. Şimdi aşağıdaki teorem, bu özelliğin $\mathbb{R}_{DD}^3$ da geçerli olduğunu belirtmektedir.

Yardımcı Teorem 4.2.2.1 $\mathcal{D}$, O merkezli r yarıçaplı bir DD -küre olsun. P noktası $\mathcal{D}$ nin içindeyse P' noktası $\mathcal{D}$ nin dışındadır ve bu ifadenin tersi de geçerlidir.

İspat: r yarıçaplı O merkezli $\mathcal{D}$ küresine göre $I_{\mathcal{D}}(O, r)$ evritimini ve $\mathcal{D}$ nin iç bölgesindeki P noktasını ele alalım. Böylece $d_{DD}(O, P) < r$ dir.

$$P' = I_{\mathcal{D}}(O, r)(P) \text{ ve } d_{DD}(O, P) \cdot d_{DD}(O, P') = r^2 \text{ olup}$$

$d_{DD}(O, P) \cdot d_{DD}(O, P') < r \cdot d_{DD}(O, P')$ ve böylece $d_{DD}(O, P') > r$ elde edilir. Dolayısıyla P' noktası $\mathcal{D}$ nin dışındadır.

Sonuç 4.2.2.1 $\mathbb{R}_{DD}^3$ daki $I_{\mathcal{D}}(O, r)$ küresel evritimi altında $\mathcal{D}$ nin kendisi nokta nokta sabit kalır.

Teorem 4.2.2.1 P ve $P'O = (0,0,0)$ merkezli r yarıçaplı $I_{\mathcal{D}}(O, r)$ disdyakis dodecahedron küresel evritimine göre bir evrik nokta çifti olsun. Bu durumda

$$\rho = r^2 / (d_{DD}(O, P))^2$$

olmak üzere

$$P' = \rho P$$

dir.

İspat: $P = (x, y, z)$ ve $P' = (x', y', z')$ noktaları $O = (0,0,0)$ merkezli ve r yarıçaplı $I_{\mathcal{D}}(O, r)$ disdyakis dodecahedron küresel evritimine göre evrik çift olsunlar. P ve P' noktaları O dan çıkan ışın üzerinde olduklarından

$$\overrightarrow{OP'} = \rho \overrightarrow{OP}, \rho \in \mathbb{R}^+$$

olup $(x', y', z') = (\rho x, \rho y, \rho z)$ dir. $d_{DD}(O, P) \cdot d_{DD}(O, P') = r^2$ denkleminde bu ifade kullanılırsa

$$[\max\{|x|, |y|, |z|\} + (\sqrt{3} - 1)\min\{|x|, |y|, |z|\}] +$$

$$[\max\{|x'|, |y'|, |z'|\} + (\sqrt{3} - 1)\min\{|x'|, |y'|, |z'|\}] = r^2$$

buradan

$$[\max\{|x|, |y|, |z|\} + (\sqrt{3} - 1)\min\{|x|, |y|, |z|\}][\max\{|\rho x'|, |\rho y'|, |\rho z'|\} + (\sqrt{3} - 1)\min\{|\rho x'|, |\rho y'|, |\rho z'|\}] = r^2$$

böylece

$$\rho (d_{DD}(O, P))^2 = r^2$$

olup

$$\rho = r^2 / (d_{DD}(O, P))^2$$

elde edilir. Sonuç olarak $\overrightarrow{OP'} = \rho \overrightarrow{OP}$, $\rho = r^2 / (d_{DD}(O, P))^2$ bulunur.

Dikkat edilirse P ve $P'O = (0,0,0)$ merkezli r yarıçaplı $I_D(O, r)$ disdyakis dodecahedron küresel evritimine göre evrik nokta çifti olduklarında P nin koordinatları da P' nün koordinatları kullanılarak Teorem 4.2.2.1'deki ile aynı yöntemle bulunabilir. Böylece $\rho = r^2 / (d_{DD}(O, P))^2$ olmak üzere $P = \rho P'$ dır.

Sonuç 4.2.2.2 $P = (x, y, z)$ ve $P' = (x', y', z')$, $O = (x_0, y_0, z_0)$ merkezli r yarıçaplı $I_D(O, r)$ disdyakis dodecahedron küresel evritimine göre bir evrik çift olsunlar. Bu durumda $\rho = r^2 / (d_{DD}(O, P))^2$ olmak üzere

$$P' - O = \rho(P - O)$$

dur.

İspat: $\mathbb{R}_{DD}^3$ da öteleme uzaklıkları koruduğundan ispatı oldukça kolaydır. x', y', z' nün değerleri $\mathbb{R}_{DD}^3$ da $(0,0,0)$, (x_0, y_0, z_0) kadar öteleyerek bulunursa istenilen ifade elde edilir.

Teorem 4.2.2.2 $\mathbb{R}_{DD}^3$ da O, P ve Q herhangi doğruduş üç farklı nokta olsun. P, P' ve $Q, Q'I_D(O, r)$ disdyakis dodecahedron küresel evritimine göre evrik çiftler ise

$$d_{DD}(P', Q') = \frac{r^2 \cdot d_{DD}(O, P)}{d_{DD}(O, P) \cdot d_{DD}(O, Q)} \quad (4.17)$$

dir.

İspat: $I_D(O, r)$, $\mathbb{R}_{DD}^3$ da O merkezli ve r yarıçaplı küresel evritim, P, P' ve $Q, Q'I_D(O, r)$ ye göre evrik çiftler olsunlar. Bu durumda

$$d_{DD}(O, P) \cdot d_{DD}(O, P') = r^2 = d_{DD}(O, Q) \cdot d_{DD}(O, Q') \text{ dir.}$$

O, P ve Q doğruduş noktalar ve doğruduş noktaların Öklidyen ve disdyakis dodecahedron uzaklıkları oranı eşit olduğundan

$$d_{DD}(P', Q') = |d_{DD}(O, P') - d_{DD}(O, Q')| = \left| \frac{r^2}{d_{DD}(O, P)} - \frac{r^2}{d_{DD}(O, Q)} \right|$$

$$= \frac{r^2 \cdot d_{DD}(P, Q)}{d_{DD}(O, P) \cdot d_{DD}(O, Q)}$$

elde edildi.

Teorem 4.2.2.2'nin tersinin doğru olmadığına dikkat edilmelidir. Ayrıca teoremin $\mathbb{R}_{DD}^3$ daki doğrudan olmayan herhangi üç nokta için her zaman geçerli olmadığı da açıktır. Ancak bazı özel koşullar altında (4.17) denklemi sağlanabilir. Aşağıdaki teorem ile (4.17) denkleminin sağladığı bazı koşullar verilmektedir.

Teorem 4.2.2.3 O, P ve Q $\mathbb{R}_{DD}^3$ da herhangi farklı üç nokta, P, P' ve Q, Q', O merkezli r yarıçaplı $I_D(O, r)$ disdyakis dodecahedron küresel evritimine göre evrik nokta çiftleri ve d ve d' sırasıyla $\overrightarrow{OP}$ ve $\overrightarrow{OQ}$ ışınlarının doğrultu vektörleri olsunlar.

$$\Delta_1 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (-1,0,0), (0, -1,0), (0,0, -1)\}$$

$$\Delta_2 = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (1,0, -1), (1, -1,0), (0,1, -1),$$

$$(0, -1,1), (0, -1, -1), (-1,1,0), (-1,0,1), (-1,0, -1), (-1, -1,0)\}$$

$$\Delta_3 = \{(1,1,1), (1,1, -1), (1, -1,1), (-1,1,1), (1, -1, -1), (-1,1, -1), (-1, -1,1), (-1, -1, -1)\}$$

ve $i = 1,2,3$ olmak üzere $d \in \Delta_i$ ve $d' \in \Delta_i\{d\}$ ise

$$d_{DD}(P', Q') = \frac{r^2 \cdot d_{DD}(P, Q)}{d_{DD}(O, P) \cdot d_{DD}(O, Q)} \quad (4.18)$$

dir.

İspat: Tüm ötelemeler $\mathbb{R}_{DD}^3$ nun izometri grubunun elemanları olduğundan, O evritim merkezini orijin olarak kabul etmek uygun olacaktır.

Böylece $I_D(O, r)$ $\mathbb{R}_{DD}^3$ da O merkezli r yarıçaplı disdyakis dodecahedron küresel evritimini göz önüne alalım.

I.Durum $d \in \Delta_1$ ve $d' \in \Delta_1 \setminus \{d\}$ olsun. İncelenmesi gereken 30 durum söz konusudur. $d = (0,1,0)$ ve $d' = (0,0,-1)$ seçilsin. Bu durumda $P = (0,p,0)$ ve $Q = (0,0,-q)$ olup P ve Q nun $I_{DD}(O,r)$ evritimine göre evrikleri sırasıyla $P' = (0, \frac{r^2}{p}, 0)$ ve $Q' = (0,0,-\frac{r^2}{q})$ dur. Ayrıca $d_{DD}(O,P) = |p|$, $d_{DD}(O,Q) = |q|$, $d_{DD}(P,Q) = \max\{|p|, |q|, 0\} + (\sqrt{2} - 1)\min\{|p|, |q|, 0\} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})\min\{|p|, |q|, 0\}$ ve

$$d_{DD}(P', Q') = \max\left\{\left|\frac{r^2}{p}\right|, \left|\frac{r^2}{q}\right|, 0\right\} + (\sqrt{2} - 1)\min\left\{\left|\frac{r^2}{p}\right|, \left|\frac{r^2}{q}\right|, 0\right\} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})\min\left\{\left|\frac{r^2}{p}\right|, \left|\frac{r^2}{q}\right|, 0\right\}$$

dır. Bu durumda 2 durum incelenmelidir.

i) $|p| \geq |q|$ ise

$$d_{DD}(P', Q') = \frac{r^2(|p| + (\sqrt{2} - 1)|q|)}{|p| \cdot |q|} = \frac{r^2 d_{DD}(P, Q)}{d_{DD}(O, P) d_{DD}(O, Q)}$$

ii) $|p| < |q|$ ise

$$d_{DD}(P', Q') = \frac{r^2(|q| + (\sqrt{2} - 1)|p|)}{|p| \cdot |q|} = \frac{r^2 d_{DD}(P, Q)}{d_{DD}(O, P) d_{DD}(O, Q)}$$

elde edilir.

Δ_1 deki diğer elemanlar için de benzer hesaplamalar ile (4.18) denkleminin sağladığı kolayca görülebilir.

II. Durum $d \in \Delta_2$ ve $d' \in \Delta_2 \setminus \{d\}$ olsun. İncelenmesi gereken 132 durum söz konusudur. $d = (0,1,1)$ ve $d' = (1,-1,0)$ seçilsin. Bu durumda $P = (0,p,p)$ ve $Q = (q,-q,0)$ olup P ve Q nun $I_D(O,r)$ evritimine göre evrikleri sırasıyla

$P' = (0, \frac{r^2}{2p}, \frac{r^2}{2p})$ ve $Q' = (\frac{r^2}{2q}, -\frac{r^2}{2q}, 0)$ olur. Ayrıca

$$d_{DD}(O, P) = \sqrt{2}|p|, d_{DD}(O, Q) = \sqrt{2}|q|,$$

$$d_{DD}(P, Q) = \max\{|p|, |q|, |p + q|\} + (\sqrt{2} - 1)\text{mid}\{|p|, |q|, |p + q|\} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})\min\{|p|, |q|, |p + q|\}$$

ve

$$d_{DD}(P', Q') = \max\left\{\left|\frac{r^2}{2q}\right|, \left|\frac{r^2}{2p} + \frac{r^2}{2q}\right|, \left|\frac{r^2}{2p}\right|\right\} + (\sqrt{2} - 1)\text{mid}\left\{\left|\frac{r^2}{2q}\right|, \left|\frac{r^2}{2p} + \frac{r^2}{2q}\right|, \left|\frac{r^2}{2p}\right|\right\} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})\min\left\{\left|\frac{r^2}{2q}\right|, \left|\frac{r^2}{2p} + \frac{r^2}{2q}\right|, \left|\frac{r^2}{2p}\right|\right\}$$

olup 6 alt durum incelenmelidir.

i) $|q| > |p| > |p + q|$ ise

$$d_{DD}(P', Q') = \frac{r^2(|q| + (\sqrt{2} - 1)|p| + (\sqrt{3} - \sqrt{2})|p + q|)}{2|p| \cdot |q|} = \frac{r^2 d_{DD}(P, Q)}{d_{DD}(O, P) \cdot d_{DD}(O, Q)}$$

ii) $|q| > |p + q| > |p|$ ise

$$d_{DD}(P', Q') = \frac{r^2(|q| + (\sqrt{2} - 1)|p + q| + (\sqrt{3} - \sqrt{2})|p|)}{2|p| \cdot |q|} = \frac{r^2 d_{DD}(P, Q)}{d_{DD}(O, P) \cdot d_{DD}(O, Q)}$$

iii) $|p| > |q| > |p + q|$ ise

$$d_{DD}(P', Q') = \frac{r^2(|p| + (\sqrt{2} - 1)|q| + (\sqrt{3} - \sqrt{2})|p + q|)}{2|p| \cdot |q|} = \frac{r^2 d_{DD}(P, Q)}{d_{DD}(O, P) \cdot d_{DD}(O, Q)}$$

iv) $|p| > |p + q| > |q|$ ise

$$d_{DD}(P', Q') = \frac{r^2(|p| + (\sqrt{2} - 1)|p + q| + (\sqrt{3} - \sqrt{2})|q|)}{2|p| \cdot |q|} = \frac{r^2 d_{DD}(P, Q)}{d_{DD}(O, P) \cdot d_{DD}(O, Q)}$$

v) $|p + q| > |p| > |q|$ ise

$$d_{DD}(P', Q') = \frac{r^2(|p + q| + (\sqrt{2} - 1)|p| + (\sqrt{3} - \sqrt{2})|p|)}{2|p| \cdot |q|} = \frac{r^2 d_{DD}(P, Q)}{d_{DD}(O, P) \cdot d_{DD}(O, Q)}$$

vi) $|p + q| > |q| > |p|$ ise

$$d_{DD}(P', Q') = \frac{r^2(|p + q| + (\sqrt{2} - 1)|q| + (\sqrt{3} - \sqrt{2})|p|)}{2|p| \cdot |q|} = \frac{r^2 d_{DD}(P, Q)}{d_{DD}(O, P) \cdot d_{DD}(O, Q)}$$

elde edilir.

Δ_2 deki diğer elemanlar içinde benzer hesaplamalar ile (4.18) denkleminin sağlandığı kolaylıkla görülebilir.

III. Durum $d \in \Delta_3$ ve $d' \in \Delta_3 \setminus \{d\}$ olsun. İncelenmesi gereken 56 durum söz konusudur. $d = (1, 1, 1)$ ve $d' = (1, -1, 1)$ seçilsin. Bu durumda $P = (p, p, p)$ ve $Q = (q, -q, q)$ olup P ve Q nun $I_D(O, r)$ evritimine göre evrikleri sırasıyla

$$P' = \left(\frac{r^2}{3p}, \frac{r^2}{3p}, \frac{r^2}{3p}\right) \text{ ve } Q' = \left(\frac{r^2}{3q}, -\frac{r^2}{3q}, \frac{r^2}{3q}\right) \text{ dır. Ayrıca}$$

$$d_{DD}(O, P) = \sqrt{3}|p|, d_{DD}(O, Q) = \sqrt{3}|q|,$$

$$d_{DD}(P, Q) = \max\{|p - q|, |p + q|, |p - q|\} + (\sqrt{2} - 1)\min\{|p - q|, |p + q|, |p - q|\} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})\min\{|p - q|, |p + q|, |p - q|\} \text{ ve}$$

$$\begin{aligned} d_{DD}(P', Q') = \max & \left\{ \left| \frac{r^2}{3p} - \frac{r^2}{3q} \right|, \left| \frac{r^2}{3p} + \frac{r^2}{3q} \right|, \left| \frac{r^2}{3p} - \frac{r^2}{3q} \right| \right\} \\ & + (\sqrt{2} - 1)\min \left\{ \left| \frac{r^2}{3p} - \frac{r^2}{3q} \right|, \left| \frac{r^2}{3p} + \frac{r^2}{3q} \right|, \left| \frac{r^2}{3p} - \frac{r^2}{3q} \right| \right\} \\ & + (\sqrt{3} - \sqrt{2})\min \left\{ \left| \frac{r^2}{3p} - \frac{r^2}{3q} \right|, \left| \frac{r^2}{3p} + \frac{r^2}{3q} \right|, \left| \frac{r^2}{3p} - \frac{r^2}{3q} \right| \right\} \end{aligned}$$

olup 2 durum incelenmelidir.

i) $|p - q| > |p + q|$ ise

$$d_{DD}(P', Q') = \frac{r^2(\sqrt{2}|p - q| + (\sqrt{3} - \sqrt{2})|p + q|)}{3|p| \cdot |q|} = \frac{r^2 d_{DD}(P, Q)}{d_{DD}(O, P) \cdot d_{DD}(O, Q)}$$

ii) $|p + q| > |p - q|$ ise

$$d_{DD}(P', Q') = \frac{r^2(\sqrt{2}|p+q| + (\sqrt{3}-\sqrt{2})|p-q|)}{3|p| \cdot |q|} = \frac{r^2 d_{DD}(P, Q)}{d_{DD}(O, P) \cdot d_{DD}(O, Q)}$$

elde edilir.

Δ_3 teki diğer elemanlar için de benzer hesaplamalar ile (4.18) denkleminin sağlandığı kolayca görülebilir.

4.2.3 $\mathbb{R}_{DD}^3$ da doğruların, düzlemlerin ve disdyakis dodecahedron kürelerinin evrikleri

Bu bölümde Öklidyen düzlemde evritim ile ilgili verilen Teorem 2.2.1 in bir benzeri $\mathbb{R}_{DD}^3$ da incelenmektedir. $\mathbb{R}_{DD}^3$ daki doğruların, düzlemlerin ve disdyakis dodecahedron kürelerinin konumlarına göre evrikleri verilmektedir.

Teorem 4.2.3.1 $I_D(O, r)$, O merkezli ve r yarıçaplı bir disdyakis dodecahedron küresel evritimi olsun. O dan geçen herhangi bir doğru veya herhangi bir düzlem, $I_D(O, r)$ altında invaryanttır.

İspat: O merkezli r yarıçaplı bir disdyakis dodecahedron küresel evritimini göz önüne alalım. Denklem (4.11) kullanılırsa O dan geçen bir doğrunun $I_D(O, r)$ altında invaryant olduğu açıktır.

O dan geçen $Ax + By + Cz = 0$ düzlemini göz önüne alalım. $I_D(O, r)$ evritimi uygulanırsa düzlemin denklemi

$$A \frac{r^2 x'}{(d_p(O, P'))^2} + B \frac{r^2 y'}{(d_p(O, P'))^2} + C \frac{r^2 z'}{(d_p(O, P'))^2} = 0$$

ve buradan

$$Ax' + By' + Cz' = 0$$

olup O dan geçen düzlemin invaryant kaldığı elde edilir.

Teorem 4.2.3.2 $I_D(O, r)$, O merkezli ve r yarıçaplı bir disdyakis dodecahedron küresel evritimi olsun. $I_D(O, r)$ altında O merkezli bir disdyakis dodecahedron küresinin evriği yine O merkezli bir disdyakis dodecahedron küresidir.

İspat: Ötelemeler $\mathbb{R}_{DD}^3$ da uzaklıkları koruduğundan $I_D(O, r)$ evritiminin merkezi, $O = (0,0,0)$ olarak alınabilir. Böylece O merkezli r yarıçaplı disdyakis dodecahedron küresi

$$\mathcal{D} = \{P = (x, y, z): d_{DD}(O, P) = r\}$$

dir.

$\mathcal{D}_1$, O merkezli r_1 yarıçaplı disdyakis dodecahedron küresi olsun. Bu durumda

$$\mathcal{D}_1 = \{P = (x, y, z): d_{DD}(O, P) = r_1\}$$

dir. Böylece $\mathcal{D}_1$ in $I_D(O, r)$ altındaki evriği yine O merkezli bir disdyakis dodecahedron küresi olan

$$\mathcal{D}_1' = \{P' = (x', y', z'): d_{DD}(O, P') = \frac{r^2}{r_1}\} \text{ dir.}$$

Teorem 4.2.3.3 $I_D(O, r)$ O merkezli r yarıçaplı bir disdyakis dodecahedron küresel evritimi olsun. Böylece $\mathcal{D}$ nin tüm kenar, köşe ve yüzlerinin evrikleri kendileridir.

İspat: Sonuç 2.6'dan $\mathcal{D}$ nin kendisi $I_D(O, r)$ altında nokta sabit kalır. Dolayısıyla $\mathcal{D}$ nin her bir kenar, köşe ve yüzü $I_D(O, r)$ altında invaryanttır.

4.2.4 $\mathbb{R}_{DD}^3$ de çapraz oran ve harmonik eşlenik

Disdyakis dodecahedron küresel evritim altında uzaklık değişmez değildir. Bu nedenle, disdyakis dodecahedron uzayındaki evritim bir izometri değildir. Ancak ters orantı altında çapraz oranın korunuyor olması çapraz orana uzaklık üzerinden odaklanmanın gerekliliğini ortaya koymaktadır. Bu nedenle, bu bölümde, küresel evritim altında $\mathbb{R}_{DD}^3$ daki çapraz oranı ve harmonik eşlenikleri araştırıyoruz.

Tanım 4.2.4.1 Yönlendirilmiş bir doğru l üzerindeki herhangi iki nokta X ve Y için doğru parçasının yönlendirilmiş disdyakis dodecahedron uzunluğu $\overline{XY}d_{DD}[XY]$ ile gösterilir. Doğru parçası $\overline{XY}$ ve l aynı yöne sahipse $d_{DD}[XY] = d_{DD}(X, Y)$ ve ters yöne sahipse $d_{DD}[XY] = -d_{DD}(X, Y)$.

Tanım 4.2.4.2 P, Q, R ve S , $\mathbb{R}_{DD}^3$ daki yönlendirilmiş bir doğru üzerinde dört farklı nokta olsun. Disdyakis dodecahedron çapraz oranı $(PQ, RS)_{DD}$ şu şekilde tanımlanır:

$$(PQ, RS)_{DD} = \frac{d_{DD}[P, R]d_{DD}[Q, S]}{d_{DD}[P, S]d_{DD}[Q, R]}$$

Sonuç 4.2.4.1 P, Q, R ve S , $\mathbb{R}_{DD}^3$ daki yönlendirilmiş bir doğru üzerinde dört farklı nokta olsun. Disdyakis dodecahedron çapraz oranı $(PQ, RS)_{DD}$, hem R hem de S, P ile Q arasındaysa veya R ve S, P ile Q arasında değilse pozitiftir.

İspat: Hem R hem de S noktaları P ve Q noktaları arasında olsun. Yönlendirilmiş doğru PQ için disdyakis dodecahedron çapraz oranı

$$(PQ, RS)_{DD} = \frac{d_{DD}[PR]d_{DD}[QS]}{d_{DD}[PS]d_{DD}[QR]}$$

$$(PQ, RS)_{DD} = \frac{d_{DD}(P, R) \cdot (-d_{DD}(Q, S))}{d_{DD}(P, S) \cdot (-d_{DD}(Q, R))} = \frac{d_{DD}(P, R) \cdot d_{DD}(Q, S)}{d_{DD}(P, S) \cdot d_{DD}(Q, R)}$$

ve dolayısıyla $(PQ, RS)_{DD}$ pozitiftir. Ne R ne de SP ve Q arasında değilse, R ve S için altı dizi vardır. Tüm olası kombinasyonların ispatı benzer olduğu için $R - P - Q - S$ yöneliminin ispatını veriyoruz. Böylece cuboctahedron çapraz oranı

$$(PQ, RS)_{DD} = \frac{d_{DD}[PR]d_{DD}[QS]}{d_{DD}[PS]d_{DD}[QR]}$$

$$= \frac{(-d_{DD}(P, R)) \cdot d_{DD}(Q, S)}{d_{DD}(P, S) \cdot (-d_{DD}(Q, R))} = \frac{d_{DD}(P, R) \cdot d_{DD}(Q, S)}{d_{DD}(P, S) \cdot d_{DD}(Q, R)}$$

ve dolayısıyla $(PQ, RS)_{DD}$ pozitiftir.

Sonuç 4.2.4.2 P, Q, R ve S $\mathbb{R}_{DD}^3$ daki yönlendirilmiş bir doğru üzerinde dört farklı nokta olsun. $\{P, Q\}$ ve $\{R, S\}$ çiftleri birbirini ayırırsa, disdyakis dodecahedron çapraz oranı $(PQ, RS)_{DD}$ negatiftir.

İspat: $\{P, Q\}$ ve $\{R, S\}$ çiftleri birbirini ayırırsa, R ve S için dört dizi vardır. $R - P - S - Q$ oryantasyonu için disdyakis dodecahedron çapraz oranı

$$\begin{aligned}
(PQ, RS)_{DD} &= \frac{d_{DD}[PR]d_{DD}[QS]}{d_{DD}[PS]d_{DD}[QR]} \\
&= \frac{(-d_{DD}(P, R)) \cdot (-d_{DD}(Q, S))}{d_{DD}(P, S) \cdot (-d_{DD}(Q, R))} = -\frac{d_{DD}(P, R) \cdot d_{DD}(Q, S)}{d_{DD}(P, S) \cdot d_{DD}(Q, R)}
\end{aligned}$$

diğer olası diziler için de benzer hesaplamalarla aynı sonuçlar elde edildiğinden $(PQ, RS)_{DD}$ negatiftir.

Teorem 4.2.4.1 Disdyakis dodecahedron çapraz oranı, $\mathbb{R}_{DD}^3$ dedisdyakis dodecahedron küresel evritim altında değişmezdir.

İspat: $I_D(O, r)$, merkezi O ve yarıçapı r olan bir disdyakis dodecahedron küresel evritim olsun ve P, Q, R ve S, O dan geçen yönlendirilmiş bir doğru l üzerinde dört nokta olsun. P', Q', R' ve S' sırasıyla $I_D(O, r)$ altında P, Q, R ve S nin evrik noktaları olsun.

Disdyakis dodecahedron küresel evritimin, $\{P, Q\}$ ve $\{R, S\}$ çiftlerinin ayrılmasını veya ayrılmamasını koruduğunu ve ayrıca disdyakis dodecahedronu P noktasından Q noktasına bir çizgi boyunca l disdyakis dodecahedrona yönlü uzaklığı evrittiğini gözlemleyin. Q' noktasından P' noktasına yönlü uzaklık. Gerekli sonuç Teorem 4.2.2.2'den gelir;

$$\begin{aligned}
(P'Q', R'S')_{DD} &= \frac{d_{DD}(P', R')d_{DD}(Q', S')}{d_{DD}(P', S')d_{DD}(Q', R')} \\
&= \frac{\frac{r^2 d_{DD}(P, R)}{d_{DD}(O, P)d_{DD}(O, R)} \cdot \frac{r^2 d_{DD}(Q, S)}{d_{DD}(O, Q)d_{DD}(O, S)}}{\frac{r^2 d_{DD}(P, S)}{d_{DD}(O, P)d_{DD}(O, S)} \cdot \frac{r^2 d_{DD}(Q, R)}{d_{DD}(O, Q)d_{DD}(O, R)}} \\
&= \frac{d_{DD}(P, R)d_{DD}(Q, S)}{d_{DD}(P, S)d_{DD}(Q, R)} = (PQ, RS)_{DD}
\end{aligned}$$

Tanım 4.2.4.3 $\mathbb{R}_{DD}^3$ da l bir doğru olsun. P, Q, R ve S nin l üzerinde dört nokta olduğunu varsayalım. $(PQ, RS)_{DD} = -1$ ise P, Q, R ve S nin bir harmonik küme oluşturduğuna denir ve $H(PQ, RS)_{DD}$ ile gösterilir. Yani l üzerindeki herhangi bir R ve S çifti

$$\frac{d_{DD}[P, R]d_{DD}[Q, S]}{d_{DD}[P, S]d_{DD}[Q, R]} = -1$$

P ve Q yi harmonik olarak böldüğü söylenir. R ve S noktaları, P ve Q a göre cuboctahedron harmonik eşlenikler olarak adlandırılır.

Teorem 4.2.4.1 $\mathcal{D}$, merkezi O olan bir disdyakis dodecahedron küre olsun ve $\mathbb{R}_{DD}^3$ da $[PQ]$ doğru parçasının çapı $\mathcal{D}$ olsun. R ve S , parçacığı $[PQ]$ içten ve dıştan ayıran ışının $\overrightarrow{OP}$ farklı noktaları olsun. O halde R ve S , P ve Q ye göre disdyakis dodecahedron harmonik eşleniklerdir, ancak ve ancak R ve S disdyakis dodecahedron küresel evritime $I_{\mathcal{D}}(O, r)$ ye göre evrik noktalarıdır.

İspat: R ve S , P ve Q ya göre disdyakis dodecahedron harmonik eşleniği olsun. O zaman

$$(PQ, RS)_{DD} = -1 \Rightarrow \frac{d_{DD}[P, R] \cdot d_{DD}[Q, S]}{d_{DD}[P, S] \cdot d_{DD}[Q, R]} = -1$$

R doğru parçasını $[PQ]$ dahili olarak böldüğünden ve R ışını üzerinde olduğundan $\overrightarrow{OQ}$,

$$d_{DD}(R, Q) = r - d_{DD}(O, R) \text{ ve } d_{DD}(P, R) = r + d_{DD}(O, R)$$

S doğru parçasını $[PQ]$ harici olarak böldüğünden ve S ışını üzerinde olduğundan $\overrightarrow{OQ}$,

$$d_{DD}(P, S) = r + d_{DD}(O, S) \text{ ve } d_{DD}(Q, S) = d_{DD}(O, S) - r$$

Böylece

$$\frac{(r + d_{DD}(O, R)) \cdot (d_{DD}(O, S) - r)}{(r + d_{DD}(O, S)) \cdot (r - d_{DD}(O, R))} = -1$$

$$\Rightarrow (r + d_{DD}(O, R)) \cdot (d_{DD}(O, S) - r) = (r + d_{DD}(O, S)) \cdot (d_{DD}(O, R) - r)$$

Son eşitliği sadeleştirerek $d_{DD}(O, R) \cdot d_{DD}(O, S) = r^2$ elde edilir. Yani R ve S , disdyakis dodecahedron küresel evritime göre $I_{\mathcal{D}}(O, r)$ disdyakis dodecahedron

küresel evrik noktalardır. Diğer koşul için (S ve R ışın üzerindedir $\overrightarrow{OP}$) benzer hesaplamalarla aynı sonuç elde edilir.

Tersine, eğer R ve S , disdyakis dodecahedron küresel evritim $I_D(O,r)$ ye göre disdyakis dodecahedron küresel evrik noktalarsa, ispat benzerdir.



5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde ilk bölümde konveks çokyüzlülerden, Minkowski geometriler ve konveks çokyüzlüler arasındaki ilişkilerden ve evritimden bahsedildi. İkinci bölümde metrik geometri, evritim, çapraz oran ve harmonik eşlenik kavramları ile ilgili temel tanım ve teoremler incelendi.

Daha önceki çalışmalarda birim küreleri bir Arşimed cismi olan Cuboctahedron ve bir Katalan cismi olan Disdyakis Dodecahedron şeklindeki metrikler belirlenmiş ve bu metriklerle döşeli uzaylar incelenmiştir. Bu çalışmada bu metrikler izdüşüm yöntemi ile düzleme taşınmış ve üçüncü bölümde bu metriklerle döşenmiş düzlemde evritim ve özellikleri çembere göre incelenmiştir. Cuboctahedron uzayının düzlemeiz düşürülmesiyle maksimum düzleminin elde edildiği görülmüş ve maksimum düzleminde daha önceden çalışılmış olan çembere göre evritim ve özelliklerine tezin bütünlüğünü sağlamak amacıyla özetlenerek tezde yer verilmiştir. Bunun yanında ilk olarak bu tezde, disdyakis dodecahedron düzleminde bir çembere göre evritim ve özellikleri incelenmiştir.

Son bölümde ise yine ilk kez olarak Cuboctahedron ve Disdyakis Dodecahedron uzaylarında küreye göre evritimler tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir. Ayrıca bahsedilen düzlem ve uzaylarda evritim ve özellikleri incelenirken Öklidyen düzlem ve uzayında evritim ile ilgili bilinen temel teorem ve özelliklerle de karşılaştırmalar yapılmıştır.

Yapılan bu çalışmayla Minkowski tipi geometrilerde düzlem ve uzayda çember ve küreye göre evritimle ilgili yapılabilecek daha ileri çalışmalara ışık tutulmuştur.

KAYNAKLAR

1. Ermiş, T., 2014. Düzgün Çokyüzlülerin Metrik Geometrilere İlişkileri Üzerine, Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
2. Yüksel, S., 2012. Taksit Uzayda Bazı Düzgün Çokgenler ve Çokyüzlüler Üzerine, Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
3. Catalan, E., 1865. Memorie sur la Theorie des Polyedres. J. l'Ecole, Polytechnique, Paris, 41,1-71.
4. Thompson, A. C., 1996. Minkowski Geometry, Cambridge University Press, 346p
5. Gelişgen, Ö., ve Can, Z., 2015. On the Family of Metrics for Some Platonic and Archimedean Polyhedra, ESOGU preprint, 1-9.
6. Gelişgen, Ö., ve Çolak, Z., 2015. A Family of Metrics for Some Polyhedra, Automation Computers Applied Mathematics Scientific Journal, 24,1, 3-15.
7. Gelişgen, Ö., Ermiş, T., ve Gunaltılı, I., 2017. A Note About The Metrics Induced by Truncated Dodecahedron and Truncated Icosahedron, International Journal of Geometry, 6,2,5-16.
8. Gelişgen, Ö., ve Kaya, R., 2015. The Isometry Group of Chinese Checker Space, International Electronic Journal Geometry, 8,2, 82-96.
9. Ermiş, T., Savcı, Ü.Z., ve Gelişgen, Ö., 2019. A Note About Truncated Rhombicuboctahedron ve Truncated Rhombicuboctahedron Space, Scientific Studies and Research Series Mathematics and Informatics, 29,1, 73-88.
10. Savcı, Ü.Z., 2019. Truncated Dodecahedron ve Truncated Icosahedron Spaces, Cumhuriyet Science Journal, 40,2, 457-470.
11. Can, Z., Gelişgen, Ö., ve Kaya, R., 2015. On the Metrics Induced by Icosidodecahedron and Rhombic Triacanthedron, Scientific and Professional Journal of the Croatian Society for Geometry and Graphics (KoG), 19,17-23.
12. Can, Z., Çolak, Z., ve Gelişgen, Ö., 2015. A Note On The Metrics Induced By Triakis Icosahedron And Disdyakis Triacanthedron, Eurasian Academy of Sciences Eurasian Life Sciences / Avrasya Fen Bilimleri Dergisi, 1,1-11.
13. Çolak, Z., ve Gelişgen, Ö., 2015. New Metrics for Deltoidal Hexacanthedron ve Pentakis Dodecahedron, SAU Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 19,3,353-360.
14. Bozan, E., 2019. Çember ve Kürede Evritimin Uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kars.

15. Childress, N., 1964. Inversion with respect to the central conics, *Mathematics Magazine*, 38,3, 147-149.
16. Nickel, J. A., 1995. A Budget of inversion, *Mathematical and Computer Modelling*, 21, 87-93.
17. Ramirez, J.L., 2014. Inversions in an ellipse, *Forum Geometry*, 14, 107-115.
18. Gdawiec, K., 2014. Star-shaped Set Inversion Fractals, *Fractals*, 22,4, 1-7.
19. Ramirez, J.L., ve Rubiano, G.N., 2014. A Geometrical Construction of Inverse Points with Respect to an Ellipse, *International Journal of Mathematical Education in Science ve Technology*, 45,8, 1254-1259.
20. Pekzorlu, A., 2019. On Inversions in Non-Euclidean Geometries, *Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir*.
21. Yüca, G., ve Can, Z., 2020. On the Circular Inversion in Maximum Plane, 2, 2, pp
22. Ramirez, J.L., ve Rubiano, G.N., 2014. Elliptic Inversion of Two Dimensional Objects, *International Journal of Geometry*, 3,1, 12-27.
23. Bayar, A. ve Ekmekçi, S., 2014. On circular versions in taxicab plane, *Journal of Advanced Research in Pure Mathematics*, 6,4, 33-39.
24. Gelişgen, Ö., ve Ermiş, T., 2019. Some Properties of Inversions in Alpha Plane, *Forum Geometricorum*, 19, 1-9.
25. Can, Z., 2022. On Spherical Inversions in Three Dimensional Tetrakis Hexahedron Space, *Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 38,1,100-108.
26. Cırık, Y., ve Ekmekçi, S., 2022. On The Maximum Spherical Inversions, *Erzincan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 15,1,360-371
27. Ramirez, J.L., ve Rubiano, G.N., 2016. A Generalization of the Spherical Inversion, *International Journal of Mathematical Education in Science ve Technology*, 48,1, 132-149.
28. Pekzorlu, A., ve Bayar, A., 2020. On the Chinese Checkers Spherical Inversions Three Dimensional Chinese Checkers Space, *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1: Mathematics and Statistics* 69,2, 1498-1507.
29. Pekzorlu, A., ve Bayar, A., 2020. Taxicab Spherical Inversions in Taxicab Space, *Journal of Mahani Mathematic Research Center*, 9, 1 pp , 2, 45-54.
30. Millman, R.S., ve Parker, G.D., 1991. *Geometry a Metric Approach with Models*, Springer, 370p

31. Blair, D.E., 2000. Inversion Theory ve Conformal Mapping, Student Mathematic Library, 9
32. Yağcı, M., 2006. Evritim, Matematik Dünyası Dergisi, 1, 74-80.
33. Can, Z., 2016. $\mathbb{R}^3$ de Bazı Konveks Çokyüzlülerle İlgili Metrikler ve Geometrilere Üzerine, Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
34. Salihova, S., 2006. On the Geometry of Maximum Metric, Doktora Tezi, Department of Mathematic, Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir.
35. Çolak, Z., 2016. Katalan Cisimler ve Minkowski Tipi Geometrilere İlgisi Üzerine, Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.



ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Emine ÇİÇEK

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Gazi Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2015-2019.

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, 2019-2022.

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLERİ

1. Ankara Spor TVF Spor Lisesi, 2018-2019.

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Kongrelerde Sunulan Makaleler

1. Çiçek, E., Can, Z., On Inversions in Cuboctahedron Space, TURK-COSE 2022: IV. Uluslararası Türk Dünyası Fen Bilimleri ve Mühendislik Kongresi, Türkiye, 23-24 Haziran 2022.
2. Çiçek, E., Can Z., On Spherical Inversions in Three Dimensional DD-Space, IFSCOM 2022- 8th IFS ve Contemporary Mathematics Conference, Türkiye, 16-19 Haziran 2022. (Tam Metin)