



GİRESUN
ÜNİVERSİTESİ



FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BAZI KONVEKS STOKASTİK SÜREÇLER İÇİN
GENELLEŞTİRİLMİŞ HERMİTE-HADAMARD
TIPLI EŞİTSİZLİKLER**

**MATEMATİK
ANA BİLİM DALI**

Yüksek Lisans Tezi

Ramazan USTA

20152110018

Temmuz 2019

GİRESUN

**T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BAZI KONVEKS STOKASTİK SÜREÇLER İÇİN
GENELLEŞTİRİLMİŞ HERMİTE-HADAMARD
TİPLİ EŞİTSİZLİKLER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ramazan USTA

Enstitü Anabilim Dalı : Matematik

Tez Danışmanı : Dr.Öğr. Üyesi Nurgül OKUR BEKAR

Temmuz 2019

T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BAZI KONVEKS STOKASTİK SÜREÇLER İÇİN
GENELLEŞTİRİLMİŞ HERMİTE-HADAMARD
TİPLİ EŞİTSİZLİKLER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ramazan USTA

Enstitü Anabilim Dalı

:

Matematik

Bu tez .././20.. tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

**Doç.Dr.
İmdat İŞCAN
Jüri Başkanı**

**Dr.Öğr.Üyesi
Nurgül OKUR BEKAR
Üye**

**Dr.Öğr.Üyesi
Erdal ÜNLÜYOL
Üye**

**Doç.Dr.
Bahadır BOZ
Enstitü Müdürü**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Ramazan USTA

14/06/2019

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca, her türlü bilimsel ve manevi desteği sağlayan değerli hocam Dr.Öğr.Üyesi Nurgöl OKUR BEKAR'a, Matematik bölüm başkanı Doç.Dr. İmdat İŞCAN'a, Ordu Üniversitesi'nden Dr.Öğr.Üyesi Erdal ÜNLÜYOL'a, emeği geçen tüm hocalarıma, Yüksek Lisans eğitimim boyunca desteklerini esirgemeyen ailem ve sevgili eğim Tuęçe USTA'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	I
İÇİNDEKİLER	II
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	IV
ŞEKİLLER LİSTESİ	V
ÖZET	VI
SUMMARY	VII
BÖLÜM 1. GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI.....	6
2.1. Konveks Fonksiyonlar.....	6
2.2. Stokastik Süreçler.....	7
BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM	12
3.1. Materyal	12
3.1.1. Konveks Fonksiyonlar için Hermite Hadamard Eşitsizliği.....	12
3.1.2. Harmonik Konveks Fonksiyonlar için Hermite Hadamard Eşitsizliği.....	12
3.1.3. p -Konveks Fonksiyonlar için Hermite Hadamard Eşitsizliği.....	13
3.1.4. h -Konveks Fonksiyonlar için Hermite Hadamard Eşitsizliği.....	14
3.1.5. (p, h) -Konveks Fonksiyonlar için Hermite Hadamard Eşitsizliği.....	15
3.1.6. İkinci Anlamda s -Konveks Fonksiyonlar için Hermite Hadamard Eşitsizliği.....	16
3.1.7. m -Konveks Fonksiyonlar için Hermite Hadamard Eşitsizliği.....	17
3.1.8. r -Konveks Fonksiyonlar için Hermite Hadamard Eşitsizliği.....	17
3.1.9. φ -Konveks Fonksiyonlar için Hermite Hadamard Eşitsizliği.....	18
3.1.10. Preinveks Fonksiyonlar için Hermite Hadamard Eşitsizliği.....	19

3.2. Yöntem.....	20
 BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI	22
4.1. Konveks Stokastik Süreçler için Genelleştirilmiş Hermite Hadamard Eşitsizliği.....	22
4.2. Harmonik Konveks Stokastik Süreçler için Genelleştirilmiş Hermite Hadamard Eşitsizliği.....	25
4.3. p -Konveks Stokastik Süreçler için Genelleştirilmiş Hermite Hadamard Eşitsizliği.....	27
4.4. h -Konveks Stokastik Süreçler için Genelleştirilmiş Hermite Hadamard Eşitsizliği.....	31
4.5. (p, h) -Konveks Stokastik Süreçler için Genelleştirilmiş Hermite Hadamard Eşitsizliği.....	33
4.6. İkinci Anlamda s -Konveks Stokastik Süreçler için Genelleştirilmiş Hermite Hadamard Eşitsizliği.....	37
4.7. m -Konveks Stokastik Süreçler için Genelleştirilmiş Hermite Hadamard Eşitsizliği.....	39
4.8. r -Konveks Stokastik Süreçler için Genelleştirilmiş Hermite Hadamard Eşitsizliği.....	43
4.9. φ -Konveks Stokastik Süreçler için Genelleştirilmiş Hermite Hadamard Eşitsizliği.....	45
4.10. Preinveks Stokastik Süreçler için Genelleştirilmiş Hermite Hadamard Eşitsizliği.....	48
 BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ	52
 KAYNAKLAR.....	53
ÖZGEÇMİŞ.....	60

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\forall$	: Her
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$\emptyset$	: Boş küme
$f \in L[a, b]$	: $\int_a^b f(x) dx < \infty$
I^0	: I 'nin içi
$E(X), m_x$	: X rastgele değişkeninin beklenen değeri
$Var(X)$	: X rastgele değişkeninin varyansı
$l. i. m.$	: Limit in Mean
Δ	: Üçgen
$\mathcal{C}_{st}$	: Reel Konveks Stokastik Süreçler Kümesi
$\leq_{st}$	: Stokastik Sıralama
$\subseteq$	: Alt Küme
$\mathfrak{S}$	: X 'in alt kümeleri üzerinde inşa edilen sigma cebir
P	: Olasılık fonksiyonu
$A \times B$	: A ve B kümelerinin kartezyen çarpımı
f'	: f fonksiyonun türevi
max	: Maksimum
$\mathbb{R}_+$	: Pozitif reel sayılar
A	: Küme
A^c	: Kümenin Tümlenyeni
$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$	: Bileşim

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1.1.	4
Şekil 2.1.1.	6
Şekil 2.1.2.	6
Şekil 2.1.3.....	7



BAZI KONVEKS STOKASTİK SÜREÇLER İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ HERMİTE-HADAMARD TIPLI EŞİTSİZLİKLER

ÖZET

Bu tezde literatürde mevcut olan konveks, harmonik konveks, p -konveks, h -konveks, (p, h) -konveks, ikinci anlamda s -konveks, m -konveks, r -konveks, φ -konveks ve preinvex fonksiyon ve bu fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği kısaca sunulmuştur. Bu çalışmanın özgün kısmı olan araştırma bulgularında ise, yukarıda bahsi geçen konvekslik çeşitleri için stokastik süreçler verilmiştir. Ayrıca bu süreçler için genelleştirilmiş Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

Anahtar kelimeler: Konveks, Harmonik konveks, p -konveks, h -konveks, (p, h) -konveks, İkinci anlamda s -konveks, m -konveks, r -konveks, φ -konveks, Preinvex, Stokastik Süreçler, Hermite-Hadamard Eşitsizliği,

GENERALIZED HERMITE-HADAMARD TYPICAL INEQUALITIES FOR SOME CONVEX STOCHASTIC PROCESSES

SUMMARY

In this thesis, convex, harmonically convex, p -convex, h -convex, (p, h) -convex, s -convex in the second sense, m -convex, r -convex, φ -convex and preinvex stochastic processes are introduced in the literature and Hermite-Hadamard type inequalities for these processes are briefly presented. In the research findings which are the original part of this study, the stochastic processes are defined for the above mentioned convexity and Hermite-Hadamard type inequalities are obtained for these processes.

Keywords: Convex, Harmonically convex, p -convex, h -convex, (p, h) -convex, s -convex in the second sense, m -convex, r -convex, φ -convex, Preinvex, Stochastic processes, Hermite-Hadamard inequality.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Konvekslik geometrik temel bir kavram olmasının yanı sıra diğer alanlarda genişçe kullanılmaktadır. Fonksiyonel analiz, grafik teorisi, olasılık teorisi ve daha birçok alanda önemli rol oynamaktadır. Konveksliğin ilk temelleri Yunan filozoflar tarafından atılmıştır. Yunanlıların matematiğe en önemli katkılarından biri de Euclid'in [1] "Elements" adlı kitabıdır. Konveksliğin ilk tanım ve gösterimler bu kitapta bulunmaktadır. Bu konudaki daha kesin bir tanımı ise Archimedes'in [2] "On The Sphere and Cylinder" adlı eserinde de bulmak mümkündür.

Eşitsizlik teorisi Gauss, Cauchy ve Chebyshev ile gelişmeye başlamıştır. Eşitsizlik teorisiyle yakından ilişkili olan konvekslik kavramı göz önünde bulundurularak birçok çalışma yapılmıştır. Bunun en önemli örneklerinden biri Ekim 1881 yılında Hermite'in (1822-1901) Journal Mathesis adlı dergiye gönderdiği konveks fonksiyon için Hermite-Hadamard eşitsizliğidir. $[a, b]$ aralığında tanımlı her reel konveks fonksiyon için, meşhur Hermite-Hadamard eşitsizliği aşağıdaki gibidir [3]:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Hermite'in 1893 yılındaki çalışmasında konveksliğe rastlansa da konveks fonksiyonların sistematik olarak çalışılması, 1905-1906 yıllarında ünlü Danimarkalı mühendis ve matematikçi Jensen ile başlar ve kendisi şunları öngörmüştür: "Bana göre, konveks fonksiyon kavramı temel olarak pozitif ve artan fonksiyonlarla alakalıdır. Bu konuda yanılmıyorsam, konveks fonksiyonlar teorisinin önemi zamanla anlaşılacaktır."

Son yıllarda modern matematikte araştırma makaleleri ve kitaplarda geniş bir şekilde yer alan konveks fonksiyon kavramının önemi gerçekten anlaşılmıştır. Bu bağlamda temel matematikte ilgi çeken/çekmekte olan Hermite-Hadamard eşitsizliğinin birçok uygulamasıyla konveks fonksiyonun ilk temel sonucu olduğunu söyleyebiliriz. Çoğu matematikçi farklı konveks fonksiyon sınıfları (quasi-konveks fonksiyonlar,

fonksiyonların Godunova-Levin sınıfı, log-konveks ve r -konveks fonksiyonlar, p -konveks fonksiyonlar, vb.) ve özel ortalamalar (p -logaritmik ortalamalar, identik ortalama, Stolarsky ortalamalar, vb.) için bu eşitsizlikleri uygulamaya, genişletmeye ve genelleştirmeye çalışmaktadır.

19. ve 20. yüzyılda bulunan eşitsizliklerin bir kısmı konveks fonksiyonlarla ilişkilendirilerek temel eşitsizlikler haline gelmiştir. Bu tür eşitsizlikleri konu alan ilk temel çalışma 1934'te Hardy, Littlewood ve Pólya [4] tarafından yazılan "Inequalities" adlı kitaptır. İkinci çalışma ise Beckenbach ve Bellman [5] tarafından 1961'de yazılan, 1934-1960 yılları arasında elde edilen yeni eşitsizliklerin sonuçlarını içeren, "Inequalities" adlı eserdir. Bunu Mitrinović'in [6] 1970 yılında yayınladığı ve ilk iki kitapta bulunmayan farklı konulara da yer verdiği "Analytic Inequalities" isimli kitabı takip eder. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler içeren ilk kaynak ise "Convex Functions: Inequalities" başlığıyla 1987 yılında Pečarić [7] tarafından yazılmıştır. Bu temel kaynakların yanı sıra Mitrinović [8,9] "Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives" ve "Classical and New Inequalities in Analysis", Pachpatte [10] "Mathematical Inequalities" ve Niculescu and Perssons [11] "Convex Functions and Their Applications" literatürde mevcut olan diğer kaynaklardır.

Hermite-Hadamard eşitsizlikleri konusu Dragomir ve Pearce [12] tarafından yazılan "Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications" adlı eserde detaylı olarak yer almaktadır. Bu alanda çalışan diğer matematikçiler Josip [13], Toader [14], İşcan [15, 17], Varošanec [18], Fang ve ekibi [19], Hudzik ve ekibi [20], Ngoc ve ekibi [22], Antczak [23] Youness [24], Cristescu [25], Set ve ekibi [26], Yalçın [27] Mohan ve Neogy [28], Weir ve Mond [29], Yng ve Li [30], Noor [31], Mishra ve Giorgi [33]'dir. Alomari [34] ise çalışmamıza yol gösteren çalışması ile konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğini genelleştirmiştir.

Konvekslik kavramı Fizik, Termodinamik, Ekonometri, Olasılık ve İstatistik Teorisi dahil olmak üzere birçok uygulama sahasında büyük öneme sahiptir.

Olasılık teorisinde stokastik kavramı, ilk kez bu teorinin kurucularından olan

Bernoulli (1654-1705) tarafından kullanılmaya başlanmıştır. Sonra bu kavram bir süre unutulmuş olmasına rağmen ünlü olasılıkçı Bortkiyeviç'in (1868-1913) büyük katkısıyla yirminci asrın başlarında yeniden önem kazanmıştır.

Stokastik süreçler, esasen zaman içinde gelişen olasılıksal modelleri inceleyen olasılık teorisinin önemli bir dalıdır. 1900 yılında Fransız matematikçi Bachalier ilk kez Brown hareketinin matematiksel modelini kurmuştur. 1905 yılında Einstein ve Smoluhovski bazı fizik problemlerinin incelenmesinde olasılık teorisini kullanmak zorunda kalmışlar ve Bachalier'in kurmuş olduğu sürece benzer bir süreçle karşılaşmışlardır. 1914 yılında Planck ve Fokker, olasılık teorisini kullanarak difüzyon olayını incelemeye çalışmışlardır. Tüm bunlar matematikte yeni bir kavram olan stokastik süreç kavramının meydana çıkmasına yol açmıştır.

Stokastik süreçler teorisinin matematiksel temelleri 20. yüzyılda Markov, Slutski, Wiener, Hincin, Kolmogorov, Wald, Doob, Ito, Dynkin, gibi ünlü matematikçiler tarafından verilmiştir. Stokastik süreçler teorisinin sonraki gelişmesi Feller [35,36], Levy, [37, 38], Skorohod ve Gihman [39,40], Ross [41, 42], Shirayayev [43], Smith [44-47], Spitzer [48], Çınlar [49-51], Takac [52], Khaniyev [53, 54], Aliyev [55], Okur [57-60] ve bazı bilim adamlarının çalışmaları ile devam etmektedir.

Son yıllarda, konvekslik ve eşitsizlik kavramları, optimizasyon ve matematiksel programlama problemlerinin incelenmesinde daha geniş bir çalışma imkanı sağladığı için, literatürde önemli bir yere sahip olmuştur. Bilhassa, stokastik süreçler için stokastik monotonluk ve konveksliği tanımlamak optimizasyonda özellikle optimal tasarımlarda, olasılıksal nicelikler mevcut olduğunda sayısal yaklaşımlar elde edebilmek için büyük önem taşımaktadır.

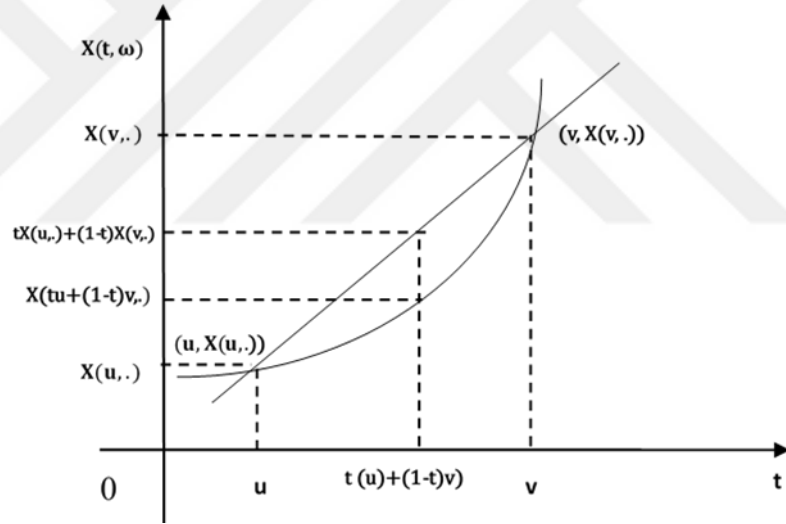
$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ bir olasılık uzayı ve $T \subseteq \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ olsun. Reel değerli $X(t, \omega)$ fonksiyonu her $t \in T$ için Ω 'da tanımlanmış rastgele değişken ise ona rastgele fonksiyon denir. Eğer $T = \mathbb{R}^+$ ise t parametresi zamanı ifade ediyorsa bu durumda $X(t, \omega)$ rastgele fonksiyonuna stokastik süreç denir. Bu tanımdan görüldüğü gibi, rastgele değişkenden farklı olarak, stokastik süreç ω 'nın yanı sıra zamana da bağlı

bir fonksiyondur. Eğer $X(t, \omega)$ stokastik sürecinin ω parametresi sabit tutulursa bu durumda yalnız t 'ye bağlı olan bir fonksiyon elde edilir [55].

1980'de Nikodem [61], konveks stokastik süreçleri tanımlamış ve konveks stokastik süreçler için bilinen bazı özellikleri vermiştir. Jensen-konveks, λ -konveks stokastik süreçler 1992'de Skowronski [62] tarafından tanımlanmıştır. Ayrıca, Kotrys [63], her reel konveks X stokastik süreci için elde edilen Hermite-Hadamard eşitsizliği aşağıdaki gibidir:

$$X\left(\frac{u+v}{2}, \cdot\right) \leq \frac{1}{v-u} \int_u^v X(t, \cdot) dt \leq \frac{X(u, \cdot) + X(v, \cdot)}{2}$$

Bilinmelidir ki, $X(t, \omega)$ konveks stokastik sürecinde ω parametresini sabit tutularak yukarıdaki eşitsizlik elde edilir. ω parametresi sabit tutulursa, bu durumda aşağıdaki şekil 1.1.1 elde edilir:



Şekil 1.1.1. Konveks Stokastik Süreç

Alınan bu sonucu olasılıksal olarak aşağıdaki gibi yorumlamak mümkündür:

$$X(ET, \cdot) \leq_{st} EX(T, \cdot) \leq_{st} EX(T^*, \cdot), \quad T \in \mathcal{C}_{st}$$

Burada E beklenen değer, T (T^*) $[u, v]$ aralığında ($\{u, v\}$ kümesi üzerinde) düzgün dağılıma sahip bir rastgele değişken, $\mathcal{C}_{st} [u, v]$ üzerinde tanımlı bütün reel konveks stokastik süreçler kümesi ve $\leq_{st}$ ise rastgele değişkenlerin konveks sıralaması olarak tanımlanır [64].

Son yıllarda, Sarıkaya [65,78], Set [73], Okur ve İşcan ekibi ile birlikte [66-70, 79,80] 2014'den beri konveks stokastik süreçlerin bazı genelleştirmesi ve genişletmesi üzerinde çalışmaktadır.

Bu tezin giriş kısmında ilk olarak bu konuda literatürde yer alan araştırmalardan kısaca bahsedilmiştir. Daha sonra konu ile ilgili gerekli temel kavramlar verilmiştir. Tezin materyal ve yöntem kısmında ise, literatürde mevcut olan konveks, harmonik konveks, p -konveks, h -konveks, (p,h) -konveks, ikinci anlamda s -konveks, m -konveks, r -konveks, φ -konveks ve preinvex fonksiyonlar ve bu fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği kısaca sunulmuştur. Bu çalışmanın özgün kısmı olan araştırma bulgularında ise, yukarıda bahsi geçen konveks stokastik süreçlerin tanımı ve bu tip süreçler için mevcut Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir. Ayrıca bu tip süreçler için genelleştirilmiş Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

2.1. Konveks Fonksiyonlar

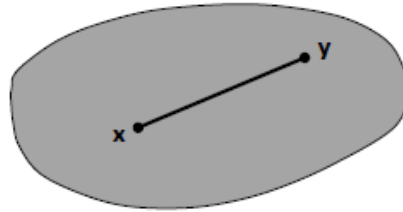
Öncelikle fonksiyonlardaki konvekslik ile ilgili kavramları verelim.

Tanım 2.1.1. L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

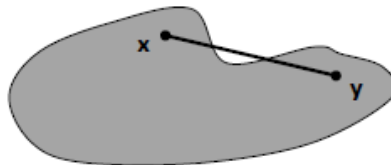
$$B = \{ z \in L : z = \alpha x + (1 - \alpha)y, 0 \leq \alpha \leq 1 \} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir.

Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$ eşitliğindeki x ve y 'nin katsayıları için $\alpha + (1 - \alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $\alpha, (1 - \alpha)$ yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayıları alınabilir. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir.



Şekil 2.1.1. Konveks küme.

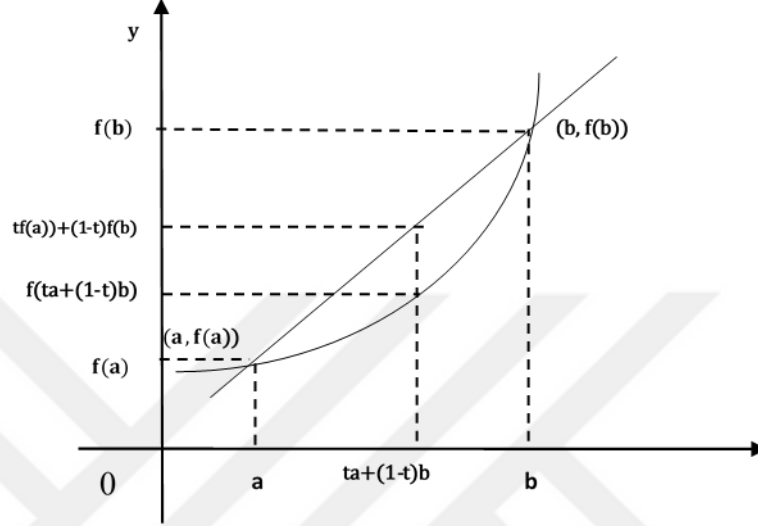


Şekil 2.1.2. Konveks olmayan küme.

Tanım 2.1.2. $I, \mathbb{R}$ 'de bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $a \in [0,1]$ için

$$f(ax + (1 - a)y) \leq af(x) + (1 - a)f(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Konveks fonksiyonun geometrik anlamı aşağıdaki gibidir:



Şekil 2.1.3. Konveks fonksiyon.

Teorem 2.1.1. f fonksiyonu (a, b) aralığında diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart f' 'nin artan olmasıdır.

Teorem 2.1.2. f fonksiyonunun I açık aralığında ikinci türevi varsa, f fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks olması için gerek ve yeterli şart $x \in I$ için $f''(x) \geq 0$ olmasıdır.

2.2. Stokastik Süreçler

Stokastik süreçleri tanımlayabilmek için öncelikle σ -cebiri, olasılık uzayı, olay, rastgele değişken gibi kavramların bilinmesi gerekmektedir. Bu bağlamda, Prof.Dr. Rovshan ALIYEV'in Stokastik Süreçler Teorisi isimli kitabında bu kavramların tanımları aşağıdaki gibi verilmektedir:

Tanım 2.2.1. $\Omega \neq \emptyset$ kümesinin alt kümelerinden oluşan bir $\mathfrak{F}$ sınıfı:

- 1) $\Omega \in \mathfrak{F}$,
- 2) $\forall A \in \mathfrak{F}$ için $A^c \in \mathfrak{F}$,
- 3) İkişer ikişer ayrık kümelerin oluşturduğu $\forall (A_n) \in \mathfrak{F}$ dizisi için

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F}$$

özelliklerine sahip olsun. Bu takdirde $\mathfrak{F}$ sınıfına Ω 'da bir “ σ -cebiri”dir denir. Bir σ -cebiri, sayılabilir birleşim, kesişim ve tümleme işlemine göre kapalıdır.

Tanım 2.2.2. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesindeki açık aralıkların sınıfını kapsayan en küçük aralıkların σ -cebirine “Borel cebiri” denir. Borel cebirinin her bir elemanına “Borel kümesi” denir.

Tanım 2.2.3. Sonuçlarının kümesi belli olan ancak gerçekleştiğinde hangi sonucun ortaya çıkacağı önceden bilinmeyen deneylere “olasılık deneyi” veya “stokastik deney” denir.

Tanım 2.2.4. Bir stokastik deneyin tüm olabilir sonuçlarının kümesine “örnek uzay” denir. Örnek uzayın her alt kümesine “olay” denir.

Tanım 2.2.5. $\mathfrak{F}, \Omega \neq \emptyset$ örnek uzayı üzerinde tanımlanmış bir σ -cebiri olmak üzere, $P: \mathfrak{F} \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu

- 1) $\forall A \in \mathfrak{F}$ için $P(A) \geq 0$,
- 2) $P(\Omega) = 1$,
- 3) İkişer ikişer ayrık kümelerin oluşturduğu $\forall (A_n) \in \mathfrak{F}$ dizisi için

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

özelliklerine sahip ise, P fonksiyonuna $\mathfrak{F}$ üzerinde bir “olasılık ölçüsü” denir. $P(A)$ değerine ise, A olayının olasılık ölçüsü veya “ A olayının olasılığı” denir.

Tanım 2.2.6. $\Omega \neq \emptyset$ bir örnek uzay, Ω 'da tanımlanmış bir σ -cebiri ve $P, \mathfrak{F}$ üzerinde tanımlanmış bir olasılık ölçüsü olmak üzere, $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ üçlüsüne bir “olasılık uzayı” denir.

Bir $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayı, bir stokastik deneyin modeli olarak kullanıldığında, $\mathfrak{F}$ σ -cebirindeki kümeler, deney ile ilgili olaylara karşılık gelir. Bir σ -cebir, sayılabilir birleşim, kesişim ve tümlleme işlemine göre kapalı olduğundan σ -cebirdeki kümeler üzerinde bu işlemler sonucu elde edilen bir küme ise bir olaya karşılık gelir.

Bir stokastik deneyin sonuçlarının kümesi olan örnek uzayın elemanları çok değişik türde olabilir. Rastgele değişkenler yardımıyla örnek uzayın elemanlarına reel sayılar eşlenmekte ve böylece olasılık ölçüleri Borel cebiri üzerindeki olasılık ölçülerine indirgenmiş olmaktadır.

Bir stokastik deney sonucunda değerler alan fonksiyona rastgele değişken denir. Rastgele değişkenler tanım kümesine göre kesikli, mutlak sürekli ve singüler olmak üzere üç kısma ayrılırlar. Örneğin, bir madeni para 10 kez atıldığında yazı gelmesi sayısı kesikli, bir elektrik cihazının bozulmadan çalışma süresi ise sürekli rastgele değişkendir. Rastgele değişken matematiksel olarak aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

Tanım 2.2.7. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ bir olasılık uzayı, $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyonu her $x \in \mathbb{R}$ sayısı için $\{\omega: \xi(\omega) \leq x\} \in \mathfrak{F}$ yani $\mathfrak{F}$ -ölçülebilir ise, ξ fonksiyonuna bir “rastgele değişken” denir. Tanımından görüldüğü gibi rastgele değişken aslında, belli özellikleri olan bir değişkenli fonksiyondur. Birçok durumda ikinci bir değişkene de ihtiyaç duyulmaktadır. Örneğin, sıvı içerisinde oluşan bir hareket sonucunda bir parçacığın zaman geçtikçe konumu veya hızı veyahut borsadaki herhangi bir hisse senedinin fiyatının zamanla değişmesi, sadece bir rastgele değişken yardımıyla tanımlanamaz. Bu durumda stokastik süreç kavramına ihtiyaç duyulmaktadır.

Tanım 2.2.8. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ bir olasılık uzayı ve $\emptyset \neq T \subseteq \mathbb{R}$ bir küme olsun. Reel değerli $X(t, \omega)$ fonksiyonu, her $t \in T$ için Ω kümesinde tanımlanmış bir rastgele değişken ise, bu fonksiyona bir “rastgele fonksiyon” denir. $X(t, \omega), Y(t, \omega)$

sembolleri ile gösterilebilir. Eğer burada $T = \mathbb{R}^+$ ise ve t parametresi zamanı ifade ediyorsa, bu durumda $X(t, \omega)$ rastgele fonksiyonuna bir “stokastik süreç” denir.

Tanım 2.2.9. $X(t, \omega)$ bir stokastik süreç, $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ olsun. Bu durumda

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P\{\omega: X(t_1, \omega) \leq x_1, \dots, X(t_n, \omega) \leq x_n\}, x_i \in \mathbb{R}$$

fonksiyonuna $X(t, \omega)$ stokastik sürecinin n-boyutlu dağılım fonksiyonu denir. Her $t_1, t_2, \dots, t_n$ için n-boyutlu $F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$ fonksiyonlarının $\{F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)\}$, $n \geq 1$ ailesine stokastik sürecin sonlu boyutlu dağılım fonksiyonları denir. Sonlu boyutlu dağılım fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1. $F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \infty)$,
2. $F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_n}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$.

Teorem 2.2.1. $\{F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)\}$, $t_i \in T$, $t_1 < \dots < t_n$, $n \geq 1$ ailesi, yukarıdaki 1. ve 2. özelliklerine sahip olsun. Bu durumda

$$P\{\omega: X(t_1, \omega) \leq x_1, \dots, X(t_n, \omega) \leq x_n\} = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$$

dır. Bu teoreme göre, stokastik süreç ile onun sonlu boyutlu dağılımları birbirlerini birebir tanımlamaktadır. T ve D kümesinin her biri hem kesikli hem de sürekli olabilir.

Tanım 2.2.10. $T \subseteq \mathbb{N}$ ise $X(t, \omega)$ ’e kesikli zamanlı stokastik süreç, T aralık ise $X(t, \omega)$ ’e sürekli zamanlı stokastik süreç denir. Eğer $X(t, \omega)$ stokastik sürecinin D durum (değerler) kümesi kesikli ise bu takdirde sürecin sonlu boyutlu dağılımları

$$P_{t_1, \dots, t_n}(k_1, \dots, k_n) = P\{\omega: X_{t_1}(\omega) = k_1, \dots, X_{t_n}(\omega) = k_n\}, t_n \in T, n = 1, 2, \dots,$$

olasılıkları ile tanımlanmaktadır.

Eğer $X(t, \omega)$ stokastik sürecinin D durum kümesi sayılamayan sonsuz elemana sahip ise bu takdirde stokastik sürecin sonlu boyutlu dağılım fonksiyonu:

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} P_{t_1, \dots, t_n}(u_1, \dots, u_n) du_1 \dots du_n$$

gibi tanımlanmaktadır. Burada $P_{t_1, \dots, t_n}(u_1, \dots, u_n)$, sürecin n -boyutlu olasılık yoğunluk fonksiyonudur. Stokastik sürecin sonlu boyutlu dağılım fonksiyonu temel kavramlardandır.

Tanım 2.2.11. $X(t, \omega)$ bir stokastik süreç, $F_t(x)$ bu stokastik sürecin bir boyutlu dağılım fonksiyonu olsun. Eğer her t için

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| dF_t(x) < +\infty \text{ ise } E(X(t, \omega)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_t(x)$$

integraline $X(t, \omega)$ stokastik sürecinin beklenen değeri denir. Stokastik sürecinin beklenen değeri $m_X(t)$ sembolü ile de gösterilmektedir.



BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Materyal

Bu kısımda literatürde mevcut olan konveks, harmonik konveks, p -konveks, h -konveks, (p, h) -konveks, s -konveks, m -konveks, r -konveks, φ -konveks ve preinvex fonksiyon ve bu fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği kısaca sunulmuştur.

3.1.1. Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda konveks fonksiyonun tanımı ve bu tip fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir.

Tanım 3.1.1.1. $I \subseteq \mathbb{R}$ reel bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $x, y \in I$ ve $t \in [0, 1]$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan f fonksiyonuna konvektir denir:

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

Yukarıdaki eşitsizlik yön değiştirdiğinde konkav fonksiyon elde edilir. Ayrıca, yukarıdaki eşitsizlikte $t = \frac{1}{2}$ alınırsa bu fonksiyona Jensen-konvektir denir [1,2].

Teorem 3.1.1.1. $[a, b] \subseteq I$ ve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Eğer her $a < b$ için $f \in L[a, b]$ ise bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [3]:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

3.1.2. Harmonik Konveks Fonksiyon için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda harmonik konveks fonksiyonun tanımı ve bu tip fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği ispatsız olarak verilmiştir.

Tanım 3.1.2.1. $I \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ reel bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan f fonksiyonuna harmonik konvektir denir [15]:

$$f\left(\frac{xy}{tx + (1-t)y}\right) \leq tf(y) + (1-t)f(x).$$

Yukarıdaki eşitsizlik yön değiştirdiğinde harmonik konkav fonksiyon elde edilir.

Teorem 3.1.2.1. $[a, b] \subseteq I$ ve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ harmonik konveks bir fonksiyon olsun. Eğer her $a < b$ için $f \in L[a, b]$ ise aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [15]:

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

3.1.3. p -Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda p -konveks fonksiyonun tanımı ve bu tip fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir.

Tanım 3.1.3.1. Her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için $[tx^p + (1-t)y^p]^{\frac{1}{p}} \in I$ ise, I aralığına p -konveks küme denir. Burada $p = 2k + 1$ veya $p = \frac{n}{m}$, $n = 2r + 1$, $m = 2t + 1$ ve $k, r, t \in \mathbb{N}$ 'dir [17].

Uyarı 3.1.3.1. Eğer $I \subset (0, \infty)$ ve $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, bu takdirde her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için $[tx^p + (1-t)y^p]^{\frac{1}{p}} \in I$ 'dir [17].

Tanım 3.1.3.2. $I \subseteq \mathbb{R}$ p -konveks bir küme ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan f fonksiyonuna p -konvektir denir [17]:

$$f([tx^p + (1-t)y^p]^{1/p}) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Uyarı 3.1.3.1 yardımıyla p -konveks fonksiyon aşağıdaki gibi de tanımlanabilir [17]:

Tanım 3.1.3.3. $I \subseteq (0, \infty)$ ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y \in I$, $t \in [0,1]$ ve $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan f fonksiyonuna p -konvektir veya f fonksiyonu $PC(I)$ sınıfına aittir denir [17]:

$$f((tx^p + (1-t)y^p)^{1/p}) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Yukarıdaki eşitsizlik yön değiştirdiğinde p -konkav fonksiyon elde edilir. Ayrıca yukarıdaki eşitsizlikten $p = 1$ için konveks fonksiyon ve $p = -1$ için harmonik konveks fonksiyon elde edilir.

Teorem 3.1.3.1. Eğer her $a < b$ için $f \in PC(I) \cap L[a, b]$ ise aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [17]:

$$f\left(\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{1/p}\right) \leq \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b x^{p-1} f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

3.1.4. h -Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda h -konveks fonksiyonun tanımı ve bu tip fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir.

Tanım 3.1.4.1. $I \subseteq \mathbb{R}$ reel bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan f fonksiyonuna Godunova–Levin fonksiyonudur veya f fonksiyonu $Q(I)$ sınıfına aittir denir [18]:

$$f(tx + (1-t)y) \leq \frac{f(x)}{t} + \frac{f(y)}{1-t}.$$

Tanım 3.1.4.2. s reel sayı olmak üzere $s \in (0,1]$ ve $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y \in [0, \infty)$ ve $t \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan f fonksiyona ikinci anlamda s -konveks fonksiyon veya f fonksiyonu K_s^2 sınıfına aittir denir:

$$f(tx + (1-t)y) \leq t^s f(x) + (1-t)^s f(y)$$

Yukarıdaki eşitsizlik yön değiştirdiğinde f fonksiyonuna ikinci anlamda s -konkav fonksiyon denir. Ayrıca yukarıdaki eşitsizlikten $s = 1$ için konveks fonksiyon elde edilir [18].

Tanım 3.1.4.3. $I \subseteq \mathbb{R}$ reel bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan negatif olmayan f fonksiyonuna P -fonksiyonudur veya f fonksiyonu $P(I)$ sınıfına aittir denir [18]:

$$f(tx + (1-t)y) \leq f(x) + f(y).$$

Tanım 3.1.4.4. $I, J \subseteq \mathbb{R}$ reel bir aralık, $(0,1) \subseteq J$ ve $h: J \rightarrow \mathbb{R}$, $h \not\equiv 0$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan negatif olmayan $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna h -konvektir veya f fonksiyonu $SX(I)$ sınıfına aittir denir:

$$f(tx + (1-t)y) \leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y).$$

Yukarıdaki eşitsizlik yön değiştirdiğinde f fonksiyonuna h -konkavdır veya f fonksiyonu $SV(I)$ sınıfına aittir denir. Ayrıca yukarıdaki eşitsizlikten $h(t) = \frac{1}{t}$ için Godunova-Levin fonksiyonu, $s \in (0,1]$ için $h(t) = t^s$ yazılırsa s -konveks fonksiyon ve $h(t) = 1$ için P -fonksiyonu elde edilir [18].

Teorem 3.1.4.1. Eğer her $a < b$ için $f \in SX(I) \cap L[a, b]$ ve $h\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$ ise, bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [18]:

$$\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq (f(a) + f(b)) \int_0^1 h(t) dt.$$

3.1.5. (p, h) -Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda (p, h) -konveks fonksiyonun tanımı ve bu tip fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir.

Tanım 3.1.5.1. $I, J \subseteq \mathbb{R}$ reel bir aralık, $(0,1) \subseteq J$ ve $h: J \rightarrow \mathbb{R}$, $h \not\equiv 0$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan negatif olmayan $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna (p, h) -konvektir veya f fonksiyonu $ghx(h, p, I)$ sınıfına aittir denir:

$$f((tx^p + (1-t)y^p)^{1/p}) \leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y).$$

Ayrıca yukarıdaki eşitsizlik ters çevrilirse bu fonksiyona (p, h) -konkavdır veya f fonksiyonu $ghv(h, p, I)$ sınıfına aittir denir [19].

Teorem 3.1.5.1. Eğer her $a < b$ için $f \in ghx(h, p, I) \cap L[a, b]$ ve $h\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$ ise, bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [19]:

$$\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{1/p}\right) \leq \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b x^{p-1} f(x) dx \leq (f(a) + f(b)) \int_0^1 h(t) dt.$$

3.1.6. İkinci anlamda s-Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

İkinci anlamda s-konveks fonksiyonun tanımı daha önce Tanım 3.1.4.2’de verilmiş olmasına rağmen konu bütünlüğü açısından bu kısımda tekrarlanmıştır ve bu tip fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir.

Tanım 3.1.6.1. s reel sayı olmak üzere $s \in (0, 1]$ ve $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y \in [0, \infty)$ ve $t \in [0, 1]$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan f fonksiyona ikinci anlamda s-konveks fonksiyon veya f fonksiyonu K_s^2 sınıfına aittir denir:

$$f(tx + (1-t)y) \leq t^s f(x) + (1-t)^s f(y)$$

Yukarıdaki eşitsizlik yön değiştirdiğinde f fonksiyonuna ikinci anlamda s-konkav fonksiyon denir. Ayrıca yukarıdaki eşitsizlikten $s = 1$ için konveks fonksiyon elde edilir [18].

Teorem 3.1.6.1. Eğer her $a < b$ ve $s \in (0, 1)$ için $f \in K_s^2 \cap L[0, \infty)$ ise, bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [20]:

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{s+1}.$$

3.1.7. m -Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda m -konveks fonksiyonun tanımı ve bu tip fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir.

Tanım 3.1.7.1. $b > 0$ olmak üzere $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $m \in (0, 1]$ olsun. Bu durumda her $x, y \in [0, b]$ ve $t \in [0, 1]$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan f fonksiyonuna m -konvektir denir [21]:

$$f(tx + m(1-t)y) \leq tf(x) + m(1-t)f(y)$$

Açıkça görülür ki, yukarıdaki eşitsizlikten $m = 1$ için konveks fonksiyon elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlik yön değiştirdiğinde ise f fonksiyonuna m -konkavdır denir.

Teorem 3.1.7.1. $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ m -konveks bir fonksiyon, $0 \leq a < b$ ve $m \in (0, 1]$ olsun. Eğer her $x, y \in [0, \infty)$ için $f \in L[a, b]$ ise, bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [21]:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{f(x) + mf\left(\frac{x}{m}\right)}{2} dx \\ &\leq \frac{m+1}{4} \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + m \frac{f\left(\frac{a}{m}\right) + f\left(\frac{b}{m}\right)}{2} \right]. \end{aligned}$$

3.1.8. r -Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda r -konveks fonksiyonun tanımı ve bu tip fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir.

Tanım 3.1.8.1. $f: [a, b] \subseteq [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y \in [a, b]$ ve $t \in [0, 1]$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan f fonksiyonuna r -konvektir denir:

$$f(tx + (1-t)y) \leq \begin{cases} (t[f(x)]^r + (1-t)[f(y)]^r)^{1/r}, & r \neq 0 \\ [f(x)]^t [f(y)]^{(1-t)}, & r = 0 \end{cases}.$$

Buradan $r = 0$ için log-konveks ve $r = 1$ için konveks fonksiyon elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlik yön değiştirdiğinde ise f fonksiyonuna r -konkavdır denir [22].

Teorem 3.1.8.1. $f: [a, b] \subseteq [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ r -konveks bir fonksiyon ve $0 < r \leq 1$ olsun. Eğer her $x, y \in [a, b]$ ve $a < b$ için $f \in L[a, b]$ ise aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [22]:

$$\frac{1}{b-a} \int_b^a f(x) dx \leq \left(\frac{r}{r+1} \right)^{\frac{1}{r}} ([f(a)]^r + [f(b)]^r)^{\frac{1}{r}}.$$

3.1.9. φ -Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda φ -konveks fonksiyonun tanımı ve bu tip fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir.

Tanım 3.1.9.1. $[a, b] \subset \mathbb{R}$ reel bir aralık, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\varphi: [a, b] \rightarrow [a, b]$ birer fonksiyon ve olsun. Bu durumda her $x, y \in [a, b]$ ve $t \in [0, 1]$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan f fonksiyonuna φ -konvektir denir:

$$f(t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)) \leq tf(\varphi(x)) + (1-t)f(\varphi(y)).$$

Yukarıdaki eşitsizlik yön değiştirdiğinde ise f fonksiyonuna φ -konkavdır denir. Ayrıca yukarıdaki eşitsizlikte $\varphi(x) = x$ ise konveks fonksiyon elde edilir [25].

Teorem 3.1.9.1. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ φ -konveks ve $\varphi: [a, b] \rightarrow [a, b]$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in [a, b]$ ve $a < b$ için $f \in L[\varphi(a), \varphi(b)]$ ise aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [25]:

$$f\left(\frac{\varphi(a) + \varphi(b)}{2}\right) \leq \frac{1}{\varphi(b) - \varphi(a)} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx \leq \frac{f(\varphi(a)) + f(\varphi(b))}{2}.$$

Teorem 3.1.9.2. J bir aralık, $a, b \in J$ için $a < b$ ve $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli artan bir fonksiyon olsun. $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $I = [a, b]$ üzerinde φ -konveks ise aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [26]:

$$f\left(\frac{\varphi(a) + \varphi(b)}{2}\right) \leq \frac{1}{\varphi(b) - \varphi(a)} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(x)) d\varphi(x) \leq \frac{f(\varphi(a)) + f(\varphi(b))}{2}.$$

3.1.10. Preinveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda preinvex fonksiyonun tanımı ve bu tip fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir.

Tanım 3.1.10.1. $I \subset \mathbb{R}^n$ ve $\eta : I \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ sürekli fonksiyon olsun. Eğer $\forall x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için $(y + t\eta(x, y)) \in I$ ise I ya η 'ya göre inveks bir küme denir. Her konveks kümenin $\eta(x, y) = x - y$ fonksiyonuna göre inveks olduğu açıktır. Fakat bunun tersi genelde doğru değildir. Mohan ve Neogy [28] tarafından konulan aşağıdaki koşulu η fonksiyonu sağlamaktadır:

C Koşulu: $I \subset \mathbb{R}^n$, $\eta : I \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ 'ya göre inveks bir küme olsun. Her $u, v \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned}\eta(u, u + \lambda\eta(v, u)) &= -\lambda\eta(v, u) \\ \eta(v, u + \lambda\eta(v, u)) &= (1 - \lambda)\eta(v, u)\end{aligned}$$

dır. C koşulundan her $u, v \in I$ ve $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\eta(u + \lambda_2 \eta(v, u), u + \lambda_1 \eta(v, u)) = (\lambda_2 - \lambda_1)\eta(v, u).$$

Tanım 3.1.10.2. $I \subset \mathbb{R}^n$, $\eta : I \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ sürekli fonksiyonuna göre inveks bir küme ve $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ bir stokastik süreç olsun. Bu durumda her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan f fonksiyonuna η 'ya göre preinveks denir:

$$f(x + t\eta(y, x)) \leq (1 - t)f(x) + tf(y).$$

Ayrıca f fonksiyonu, $t \in (0,1)$ sabit bir sayı ise t -preinvex ve $t = 1/2$ ise Jensen-preinvex olarak adlandırılır. Eğer $\eta(y, x) = y - x$ ise, f konvektir. Yukarıdaki eşitsizlik yön değiştirdiğinde ise f fonksiyonuna prekonkavdır denir [28].

Teorem 3.1.10.1. $f : [a, a + \eta(b, a)] \subseteq I \rightarrow \mathbb{R}_+$ preinveks bir fonksiyon ve $a, b \in I$ olsun. Ayrıca η fonksiyonu C koşulunu sağlasın. Eğer her $a < b$ için $f \in L[a, a + \eta(b, a)]$ ve $\eta(b, a) > 0$ ise, bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [32]:

$$f\left(\frac{2a + \eta(b, a)}{2}, \cdot\right) \leq \frac{1}{\eta(b, a)} \int_a^{a+\eta(b, a)} f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

3.2. Yöntem

Bu çalışmada yöntem olarak, fonksiyonlar için yukarıda verilen tanım ve teoremleri stokastik süreçlere uygulayabilmek için kuadratik orta anlamda yakınsama, türevlenebilme ve integrallenebilme kavramları kullanılmaktadır. Prof.Dr. Rovshan ALIYEV'in Stokastik Süreçler Teorisi isimli kitabında bu kavramların tanımları aşağıdaki gibi verilmektedir [55]:

Tanım 3.2.1. Aynı bir $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında $\{X_n\}$, $n \geq 1$ rastgele değişkenler dizisi ve X rastgele değişkeni verilsin. Bunun yanı sıra $E|X_n| < \infty$ ve $E|X| < \infty$ olsun. Eğer $0 < r < \infty$ ve $n \rightarrow \infty$ iken

$$E|X_n - X|^r = \int |X_n(\omega) - X(\omega)|^r dP(\omega) \rightarrow 0$$

ise, bu takdirde $\{X_n\}$ dizisi X 'ye r . mertebeden orta anlamda yakınsıyor denir ve bu yakınsama $n \rightarrow \infty$ iken $X_n \xrightarrow{L_r} X$ şeklinde yazılır. Bu yakınsama çeşidine analizde L_r anlamında yakınsama denir. Özel olarak $r = 2$ olduğunda bu yakınsamaya kuadratik orta yakınsama denir. Bu yakınsama

$$l.i.m_{n \rightarrow \infty} X_n = X$$

şeklinde yazılır. Burada l.i.m. "limit in mean" kelimelerinin kısaltmasıdır.

Tanım 3.2.2. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında $t \in T \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $\{X_n(t, \omega)\}$, $n \geq 1$ stokastik süreçler dizisi ve $X(t, \omega)$ stokastik süreci verilsin. Bunun yanı sıra $E|X_n(t, \omega)| < \infty$ ve $E|X(t, \omega)| < \infty$ olsun. Eğer $\forall t \in T$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E (X_n(t, \omega) - X(t, \omega))^2 = 0$$

ise $\{X_n(t, \omega)\}$, $n \geq 1$ stokastik süreçler dizisi, $X(t, \omega)$ stokastik sürecine kuadratik orta anlamda yakınsaktır denir ve

$$l.i.m_{n \rightarrow \infty} X_n(t, \omega) = X(t, \omega)$$

ile gösterilir.

Tanım 3.2.3. $X(t, \omega)$ stokastik süreci verilsin. Eğer

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} E(X(t + \Delta) - X(t))^2 = 0 \quad (3.2.1)$$

ise, bu durumda $X(t, \omega)$ stokastik sürecine t noktasında kuadratik orta anlamda süreklidır denir ve bu durum aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} l.i.m X(t + \Delta) = X(t).$$

Tanım 3.2.5. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında $t \in T \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $X(t, \omega)$ stokastik süreci verilsin. Eğer mevcut ise, aşağıdaki limite $X(t) = X(t, \omega)$ stokastik sürecinin kuadratik orta anlamda türevi denir.

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} l.i.m \frac{X(t + \Delta) - X(t)}{\Delta} = X'(t) \quad (3.2.2)$$

Bu tanımı aşağıdaki gibi yazmak mümkündür:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} E \left[\frac{X(t + \Delta) - X(t)}{\Delta} - X'(t) \right]^2 = 0. \quad (3.2.3)$$

(3.2.2) limitinin varlığı ve tekliği için bir koşulun sağlanması gereklidir. Bu limitin varlığı için gerekli koşul ise $X(t, \omega)$ stokastik sürecinin kuadratik orta anlamda sürekli olmasıdır.

Tanım 3.2.6. Olasılık uzayında $t \in T \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $X(t, \omega)$ stokastik fonksiyonu verilsin. Ayrıca $[u, v]$ aralığının parçalanışı $u = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = v$, $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{k \leq n} |\Delta t_k| = 0$$

olsun. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l.i.m \sum_{k=1}^n X(t_k, \omega) \Delta t_k = \int_u^v X(t, \omega) dt$$

eşitliğine $X(t, \omega)$ stokastik fonksiyonunun $[u, v]$ aralığındaki integrali denir.

Bu tezde çalışma boyunca bütün yakınsama, süreklilik, türev ve integral işlemleri kuadratik orta anlamda kullanılmıştır.

BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölüm özgün çalışmamızı içermekte olup, öncelikle Bölüm 3'in ikinci kısmındaki bilgiler ışığında, Bölüm 3'in birinci kısmında verilen fonksiyonlara benzer şekilde literatürde tanımlanmış olan stakoastik süreçlerin tanımı ve bu süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliği kısaca sunulmuştur. Ayrıca çalışmamızın özgün kısmını oluşturan ve söz konusu süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin reel eksen üzerinde genelleştirmesi verilmiştir.

4.1. Konveks Stokastik Süreçler için Genelleştirilmiş Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda, öncelikle bir konveks stokastik sürecin tanımı ve bu tip süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliği kısaca verilmiştir. Ayrıca bu tip süreçler için genelleştirilmiş Hermite-Hadamard eşitsizliği ise özgün olarak Teorem 4.1.2'de elde edilmiştir.

Tanım 4.1.1. $I \subseteq \mathbb{R}$ reel değerli bir aralık, $t, s \in I$ ve $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bir stokastik süreç olsun. Bu takdirde her $\lambda \in [0, 1]$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan stokastik sürece konvektir denir [61]:

$$X(\lambda t + (1 - \lambda)s, \cdot) \leq \lambda X(t, \cdot) + (1 - \lambda)X(s, \cdot).$$

Yukarıdaki eşitsizlik yön değiştirdiğinde konkav stokastik süreç elde edilir.. Eğer yukarıdaki eşitsizlikte $\lambda = \frac{1}{2}$ yazılırsa, bu sürece Jensen-konveks stokastik süreç denir [62].

Lemma 4.1.1. $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $[u, v]$ aralığı üzerinde kuadratik orta anlamda integrallenebilir konveks bir stokastik süreç ve $u < v$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki integral eşitlikleri mevcuttur [63]:

$$\int_0^1 X(\lambda u + (1 - \lambda)v, \cdot) d\lambda = \int_0^1 X(\lambda v + (1 - \lambda)u, \cdot) d\lambda = \frac{1}{v - u} \int_u^v X(t, \cdot) dt.$$

Teorem 4.1.1. $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir stokastik süreç ve $u < v$ olsun. Eğer X stokastik süreci, $[u, v]$ aralığı üzerinde kuadratik orta anlamda integralenebilirse, bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [63]:

$$X\left(\frac{u+v}{2}, \cdot\right) \leq \frac{1}{v-u} \int_u^v X(t, \cdot) dt \leq \frac{X(u, \cdot) + X(v, \cdot)}{2}.$$

Teorem 4.1.2. $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir stokastik süreç ve $u < v$ olsun. Eğer X stokastik süreci $[u, v]$ üzerinde kuadratik orta anlamda integralenebilirse, bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X\left(\left(\frac{t_{k-1} + t_k}{2}\right), \cdot\right) &\leq \frac{1}{v-u} \int_u^v X(t, \cdot) dt \\ &\leq \frac{1}{2n} \left[X(u, \cdot) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} X(t_k, \cdot) + X(v, \cdot) \right]. \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

Burada $t_k = u + k \frac{v-u}{n}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$; $n \in \mathbb{N}$ 'dir.

İspat. X stokastik süreci $[u, v]$ aralığı üzerinde konveks olduğundan, $[t_{k-1}, t_k] \subseteq [u, v]$, $k = 1, 2, \dots, n$ alt aralıklarında da konvektir. Bu nedenle her $\lambda \in [0, 1]$ için aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$X(\lambda t_{k-1} + (1-\lambda)t_k, \cdot) \leq \lambda X(t_{k-1}, \cdot) + (1-\lambda)X(t_k, \cdot). \quad (4.1.2)$$

X stokastik süreci $[u, v]$ üzerinde kuadratik orta anlamda integralenebilir olduğundan, (4.1.2) eşitsizliğini $[0, 1]$ aralığı üzerinde λ parametresine göre integrali alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\int_0^1 X(\lambda t_{k-1} + (1-\lambda)t_k, \cdot) d\lambda \leq \frac{X((t_{k-1}), \cdot) + X(t_k, \cdot)}{2}. \quad (4.1.3)$$

(4.1.3) eşitsizliğinde $t = \lambda t_{k-1} + (1-\lambda)t_k$ değişken dönüşümü yapılırsa, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} X(t, \cdot) dt \leq \frac{t_k - t_{k-1}}{2} (X(t_{k-1}, \cdot) + X(t_k, \cdot)).$$

Bu durumda (4.1.1) eşitsizliğinin sağ tarafı, yukarıdaki eşitsizliğin k 'ya göre 1'den n 'e kadar toplamı alınarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} X(t, \cdot) dt &= \int_u^v X(t, \cdot) dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{t_k - t_{k-1}}{2} (X(t_{k-1}, \cdot) + X(t_k, \cdot)) \\ &\leq \frac{1}{2} \max_k \{t_k - t_{k-1}\} \sum_{k=1}^n (X(t_{k-1}, \cdot) + X(t_k, \cdot)) \\ &= \frac{v-u}{2n} \left[X(t_0, \cdot) + X(t_1, \cdot) + \sum_{k=2}^{n-1} (X(t_{k-1}, \cdot) + X(t_k, \cdot)) + X(t_{n-1}, \cdot) + X(t_n, \cdot) \right] \\ &= \frac{v-u}{2n} \left[X(u, \cdot) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} X(t_k, \cdot) + X(v, \cdot) \right]. \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

X stokastik süreci $[t_{k-1}, t_k]$ aralığı üzerinde konveks olduğundan, $\lambda \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$\begin{aligned} X\left(\frac{t_{k-1} + t_k}{2}, \cdot\right) &= X\left(\frac{\lambda t_k + (1-\lambda)t_{k-1}}{2} + \frac{(1-\lambda)t_k + \lambda t_{k-1}}{2}, \cdot\right) \\ &\leq \frac{1}{2} [X(\lambda t_k + (1-\lambda)t_{k-1}, \cdot) + X((1-\lambda)t_k + \lambda t_{k-1}, \cdot)]. \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Son olarak, (4.1.2) ile (4.1.4) eşitsizlikleri arasında yapılan işlemler (4.1.5) eşitsizliğine uygulanırsa (4.1.1) eşitsizliğinin sol tarafı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{v-u}{n} \sum_{k=1}^n X\left(\left(\frac{t_{k-1} + t_k}{2}\right), \cdot\right) \leq \int_u^v X(t, \cdot) dt.$$

Uyarı 4.1.1. Teorem 4.1.2'de $n = 1$ yazılırsa, konveks stokastik süreçler için klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir.

4.2. Harmonik Konveks Stokastik Süreçler için Genelleştirilmiş Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda, öncelikle bir harmonik konveks stokastik sürecin tanımı ve bu tip süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliği kısaca verilmiştir. Ayrıca bu tip süreçler için genelleştirilmiş Hermite-Hadamard eşitsizliği ise özgün olarak Teorem 4.2.2’de elde edilmiştir.

Tanım 4.2.1. $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ reel bir aralık, $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bir stokastik süreç olsun. Bu takdirde her $t, s \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan X ’e harmonik konveks stokastik süreç denir [68]:

$$X\left(\frac{ts}{\lambda t + (1-\lambda)s}, \cdot\right) \leq \lambda X(s, \cdot) + (1-\lambda)X(t, \cdot).$$

Yukarıdaki eşitsizlik yön değiştirdiğinde harmonik konkav stokastik süreç elde edilir.

Lemma 4.2.1. $[u, v] \subseteq I$, $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $[u, v]$ aralığı üzerinde kuadratik orta anlamda integrallenebilir ve harmonik konveks bir stokastik süreç olsun. Bu takdirde her $u < v$ aşağıdaki integral eşitlikleri mevcuttur [68]:

$$\int_0^1 X\left(\frac{uv}{\lambda u + (1-\lambda)v}, \cdot\right) d\lambda = \int_0^1 X\left(\frac{uv}{\lambda v + (1-\lambda)u}, \cdot\right) d\lambda = \frac{uv}{v-u} \int_u^v \frac{X(t, \cdot)}{t^2} dt.$$

Teorem 4.2.1. $[u, v] \subseteq I$, $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $[u, v]$ aralığı üzerinde kuadratik orta anlamda integrallenebilir ve harmonik konveks bir stokastik süreç olsun. Bu takdirde her $u < v$ için aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [68]:

$$X\left(\frac{2uv}{u+v}, \cdot\right) \leq \frac{uv}{v-u} \int_u^v \frac{X(t, \cdot)}{t^2} dt \leq \frac{X(u, \cdot) + X(v, \cdot)}{2}.$$

Teorem 4.2.2. $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ harmonik konveks bir stokastik süreç olsun. Eğer X stokastik süreci, $[u, v]$ üzerinde kuadratik orta anlamda integrallenebilirse, bu takdirde her $u < v$ için aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X\left(\left(\frac{2t_{k-1}t_k}{t_{k-1}+t_k}\right), \cdot\right) &\leq \frac{uv}{v-u} \int_u^v \frac{X(t, \cdot)}{t^2} dt \\
&\leq \frac{1}{2n} \left[X(u, \cdot) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} X(t_k, \cdot) + X(v, \cdot) \right].
\end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Burada $t_k = u_1 + k \frac{v-u}{n}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$; $n \in \mathbb{N}$ 'dır.

İspat. X stokastik süreci $[u, v]$ aralığı üzerinde harmonik konveks olduğundan, $[t_{k-1}, t_k] \subseteq [u, v]$, $k = 1, 2, \dots, n$ alt aralıklarında da harmonik konvektir. Bu nedenle her $\lambda \in [0, 1]$ için aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$X\left(\frac{t_{k-1}t_k}{\lambda t_{k-1} + (1-\lambda)t_k}, \cdot\right) \leq \lambda X(t_k, \cdot) + (1-\lambda)X(t_{k-1}, \cdot). \tag{4.2.2}$$

X stokastik süreci $[u, v]$ üzerinde kuadratik orta anlamda integralenebilir olduğundan, (4.2.2) eşitsizliğini $[0, 1]$ aralığı üzerinde λ parametresine göre integrali alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\int_0^1 X\left(\frac{t_{k-1}t_k}{\lambda t_{k-1} + (1-\lambda)t_k}, \cdot\right) d\lambda \leq \frac{X(t_{k-1}, \cdot) + X(t_k, \cdot)}{2}. \tag{4.2.3}$$

(4.2.3) eşitsizliğinde $t = \frac{t_{k-1}t_k}{\lambda t_{k-1} + (1-\lambda)t_k}$ değişken dönüşümü yapılırsa, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{X(t, \cdot)}{t^2} dt \leq \frac{t_k - t_{k-1}}{2t_{k-1}t_k} (X(t_{k-1}, \cdot) + X(t_k, \cdot)).$$

Bu durumda (4.2.1) eşitsizliğinin sağ tarafı, yukarıdaki eşitsizliğin k 'ya göre 1'den n 'e kadar toplamı alınarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{X(t, \cdot)}{t^2} dt &= \int_u^v \frac{X(t, \cdot)}{t^2} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{t_k - t_{k-1}}{2t_{k-1}t_k} (X(t_{k-1}, \cdot) + X(t_k, \cdot)). \\
&\leq \frac{1}{2} \max_k \left\{ \frac{t_k - t_{k-1}}{t_{k-1}t_k} \right\} \sum_{k=1}^n (X(t_{k-1}, \cdot) + X(t_k, \cdot))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{v-u}{2nuv} \left[X(t_0, \cdot) + X(t_1, \cdot) + \sum_{k=2}^{n-1} (X(t_{k-1}, \cdot) + X(t_k, \cdot)) + X(t_{n-1}, \cdot) + X(t_n, \cdot) \right] \\
&= \frac{v-u}{2nuv} \left[X(u, \cdot) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} X(t_k, \cdot) + X(v, \cdot) \right]. \tag{4.2.4}
\end{aligned}$$

X stokastik süreci $[t_{k-1}, t_k]$ aralığı üzerinde harmonik konveks olduğundan, $\lambda \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$\begin{aligned}
X\left(\frac{2t_{k-1}t_k}{t_{k-1}+t_k}, \cdot\right) &\leq \frac{1}{2} \left[X\left(\frac{t_{k-1}t_k}{\lambda t_{k-1} + (1-\lambda)t_k}, \cdot\right) + X\left(\frac{t_{k-1}t_k}{\lambda t_{k-1} + (1-\lambda)t_k}, \cdot\right) \right] \\
&\leq \frac{1}{2} [X(\lambda t_k + (1-\lambda)t_{k-1}, \cdot) + X((1-\lambda)t_k + \lambda t_{k-1}, \cdot)]. \tag{4.2.5}
\end{aligned}$$

Son olarak, (4.2.2) ile (4.2.4) eşitsizlikleri arasında yapılan işlemler (4.2.5) eşitsizliğine uygulanırsa (4.2.1) eşitsizliğinin sol tarafı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{v-u}{nuv} \sum_{k=1}^n X\left(\frac{2t_{k-1}t_k}{t_{k-1}+t_k}, \cdot\right) \leq \int_u^v \frac{X(t, \cdot)}{t^2} dt.$$

Uyarı 4.2.1. Teorem 4.2.2’de $n = 1$ yazılırsa, harmonik konveks stokastik süreçler için klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir.

4.3. p -Konveks Stokastik Süreçler için Genelleştirilmiş Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda, p -konveks bir stokastik sürecin tanımı ve bu tip süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliği kısaca verilmiştir. Ayrıca bu tip süreçler için genelleştirilmiş Hermite-Hadamard eşitsizliği ise özgün olarak Teorem 4.3.2’de elde edilmiştir.

Tanım 4.3.1. $I \subseteq (0, \infty)$, $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bir stokastik süreç olsun. Eğer her $t, s \in I$, $\lambda \in (0,1)$ ve $p \in \mathbb{R}/\{0\}$ için

$$X((\lambda t^p + (1-\lambda)s^p)^{1/p}, \cdot) \leq \lambda X(t, \cdot) + (1-\lambda)X(s, \cdot)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu sürece p -konvektir denir. Yukarıdaki eşitsizlik yön değiştirdiğinde p -konkav stokastik süreç elde edilir. Ayrıca yukarıdaki eşitsizlikten

$p = 1$ için konveks stokastik süreç ve $p = -1$ için harmonik konveks stokastik süreç elde edilir [70].

Lemma 4.3.1. $I \subseteq (0, \infty)$, $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $[u, v]$ üzerinde kuadratik orta anlamda integrallenebilir bir p -konveks stokastik süreç olsun. Bu takdirde her $u < v$ için aşağıdaki eşitlik mevcuttur [70]:

$$\frac{p}{v^p - u^p} \int_u^v t^{p-1} X(t, \cdot) dt = \frac{1}{v - u} \int_u^v X \left(\left(\frac{y - u}{v - u} v^p + \frac{v - y}{v - u} u^p \right)^{1/p}, \cdot \right) dy.$$

Teorem 4.3.1. $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ p -konveks bir stokastik süreç olsun. Eğer X stokastik süreci, $[u, v]$ üzerinde kuadratik orta anlamda integralenebilirse, bu takdirde her $u < v$ için aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [70]:

$$X \left(\left(\frac{u^p + v^p}{2} \right)^{1/p}, \cdot \right) \leq \frac{p}{v^p - u^p} \int_u^v t^{p-1} X(t, \cdot) dt \leq \frac{X(u, \cdot) + X(v, \cdot)}{2}.$$

Teorem 4.3.2. $X: [u, v] \subseteq I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ p -konveks bir stokastik süreç ve $u < v$ olsun. Eğer X stokastik süreci, $[u, v]$ üzerinde kuadratik orta anlamda integralenebilirse, bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X \left(\left(\frac{t_{k-1}^p + t_k^p}{2} \right)^{1/p}, \cdot \right) &\leq \frac{p}{v^p - u^p} \int_u^v t^{p-1} X(t, \cdot) dt \\ &\leq \frac{1}{2n} \left[X(u, \cdot) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} X(t_k, \cdot) + X(v, \cdot) \right]. \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

Burada $t_k = u + k \frac{v-u}{n}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$; $n \in \mathbb{N}$ 'dir.

İspat. X stokastik süreci $[u, v]$ aralığı üzerinde p -konveks olduğundan, $[t_{k-1}, t_k] \subseteq [u, v]$, $k = 1, 2, \dots, n$ alt aralıklarında da p -konvektir. Bu nedenle her $\lambda \in [0, 1]$ için aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$X \left((\lambda t_{k-1}^p + (1 - \lambda) t_k^p)^{1/p}, \cdot \right) \leq \lambda X(t_{k-1}, \cdot) + (1 - \lambda) X(t_k, \cdot). \quad (4.3.2)$$

X stokastik süreci $[u, v]$ üzerinde kuadratik orta anlamda integralenebilir olduğundan, (4.3.2) eşitsizliğini $[0, 1]$ aralığı üzerinde λ parametresine göre integrali alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\int_0^1 X(\lambda t_{k-1}^p + (1 - \lambda)t_k^p)^{1/p} d\lambda \leq \frac{X((t_{k-1}), \cdot) + X(t_k, \cdot)}{2}. \quad (4.3.3)$$

(4.3.3) eşitsizliğinde $t = \lambda t_{k-1}^p + (1 - \lambda)t_k^p$ değişken dönüşümü yapılırsa, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} t^{p-1} X(t, \cdot) dt \leq \frac{t_k^p - t_{k-1}^p}{p} \cdot \frac{X((t_{k-1}), \cdot) + X(t_k, \cdot)}{2}.$$

Bu durumda (4.3.1) eşitsizliğinin sağ tarafı, yukarıdaki eşitsizliğin k 'ya göre 1'den n 'e kadar toplamı alınarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} t^{p-1} X(t, \cdot) dt &= \int_u^v t^{p-1} X(t, \cdot) dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{t_k^p - t_{k-1}^p}{2p} (X(t_{k-1}, \cdot) + X(t_k, \cdot)) \\ &\leq \frac{1}{2} \max_k \left\{ \frac{t_k^p - t_{k-1}^p}{p} \right\} \sum_{k=1}^n (X(t_{k-1}, \cdot) + X(t_k, \cdot)) \\ &= \frac{v^p - u^p}{2np} \left[X(t_0, \cdot) + X(t_1, \cdot) + \sum_{k=2}^{n-1} (X(t_{k-1}, \cdot) + X(t_k, \cdot)) + X(t_{n-1}, \cdot) + X(t_n, \cdot) \right] \\ &= \frac{v^p - u^p}{2np} \left[X(u, \cdot) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} X(t_k, \cdot) + X(v, \cdot) \right]. \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

X stokastik süreci $[t_{k-1}, t_k]$ aralığı üzerinde p -konveks olduğundan, Lemma 4.3.1 ile $y \in [t_{k-1}, t_k]$ için aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$\begin{aligned} &\frac{p}{t_k^p - t_{k-1}^p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} t^{p-1} X(t, \cdot) dt \\ &= \frac{1}{t_k - t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} X \left(\left[\frac{y - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} t_k^p + \frac{t_k - y}{t_k - t_{k-1}} t_{k-1}^p \right]^{1/p}, \cdot \right) dy. \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

(4.3.5) eşitliğinde $y = \frac{1}{2}(t_{k-1} + t_k) + t$ değişken dönüşümü yapılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \frac{p}{t_k^p - t_{k-1}^p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} t^{p-1} X(t, \cdot) dt \\
&= \frac{1}{t_k - t_{k-1}} \int_{-\frac{1}{2}(t_k - t_{k-1})}^{\frac{1}{2}(t_k - t_{k-1})} X \left(\left(\frac{1}{2}(t_{k-1}^p + t_k^p) + \frac{t_k^p - t_{k-1}^p}{t_k - t_{k-1}} t \right)^{\frac{1}{p}}, \cdot \right) dt \\
&= \frac{1}{t_k - t_{k-1}} \int_0^{\frac{1}{2}(t_k - t_{k-1})} X \left(\left(\frac{1}{2}(t_{k-1}^p + t_k^p) + \frac{t_k^p - t_{k-1}^p}{t_k - t_{k-1}} t \right)^{\frac{1}{p}}, \cdot \right) dt \\
&\quad + \frac{1}{t_k - t_{k-1}} \int_0^{\frac{1}{2}(t_k - t_{k-1})} X \left(\left(\frac{1}{2}(t_{k-1}^p + t_k^p) + \frac{t_k^p - t_{k-1}^p}{t_k - t_{k-1}} t \right)^{\frac{1}{p}}, \cdot \right) dt \\
&\geq \frac{2}{t_k - t_{k-1}} \int_0^{\frac{1}{2}(t_k - t_{k-1})} X \left(\left[\frac{1}{2}(t_{k-1}^p + t_k^p) \right]^{\frac{1}{p}}, \cdot \right) dt = X \left(\left(\frac{1}{2}(t_{k-1}^p + t_k^p) \right)^{1/p}, \cdot \right)
\end{aligned}$$

Bu durumda

$$X \left(\left(\frac{1}{2}(t_{k-1}^p + t_k^p) \right)^{1/p}, \cdot \right) \leq \frac{p}{t_k^p - t_{k-1}^p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} t^{p-1} X(t, \cdot) dt$$

dır. Bu durumda (4.3.1) eşitsizliğinin sol tarafı, yukarıdaki eşitsizliğin k 'ya 1'den n 'e kadar toplamı alınarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{v^p - u^p}{np} \sum_{k=1}^n X \left(\left(\frac{t_{k-1}^p + t_k^p}{2} \right)^{1/p}, \cdot \right) \leq \int_u^v t^{p-1} X(t, \cdot) dt.$$

Uyarı 4.3.1. Teorem 4.3.2'de $n = 1$ yazılırsa, p -konveks stokastik süreçler için klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir.

4.4. h -Konveks Stokastik Süreçler için Genelleştirilmiş Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda h -konveks bir stokastik sürecin tanımı ve bu tip süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir. Ayrıca bu tip süreçler için genelleştirilmiş Hermite-Hadamard eşitsizliği ise özgün olarak Teoreö 4.4.2’de elde edilmiştir.

Tanım 4.4.1. $I, J \subseteq \mathbb{R}$ reel bir aralık, $(0,1) \subseteq J$ ve $h: J \rightarrow \mathbb{R}$, $h \not\equiv 0$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan negatif olmayan $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik sürecine h -konvektir denir:

$$X(\lambda t + (1 - \lambda)s, \cdot) \leq h(\lambda)X(t, \cdot) + h(1 - \lambda)X(s, \cdot).$$

Yukarıdaki eşitsizlik yön değiştirdiğinde h -konkav stokastik süreci elde edilir [71].

Teorem 4.4.1. $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ h -konveks negatif olmayan bir stokastik süreç, $h: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Eğer X stokastik süreci, $[u, v]$ üzerinde kuadratik orta anlamda integralenebilir ve $h\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$ ise, bu takdirde her $u < v$ için aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [71]:

$$\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)} X\left(\frac{u+v}{2}, \cdot\right) \leq \frac{1}{v-u} \int_u^v X(t, \cdot) dt \leq (X(u, \cdot) + X(v, \cdot)) \int_0^1 h(\lambda) d\lambda.$$

Teorem 4.4.2. $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ h -konveks negatif olmayan bir stokastik süreç, $h: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Eğer X stokastik süreci, $[u, v]$ üzerinde kuadratik orta anlamda integralenebilir ve $h\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$ ise, bu takdirde her $u < v$ için aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur

$$\begin{aligned} \frac{1}{2nh\left(\frac{1}{2}\right)} \sum_{k=1}^n X\left(\left(\frac{t_{k-1} + t_k}{2}\right), \cdot\right) &\leq \frac{1}{v-u} \int_u^v X(t, \cdot) dt \\ &\leq \frac{1}{n} \left[X(u, \cdot) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} X(t_k, \cdot) + X(v, \cdot) \right] \int_0^1 h(\lambda) d\lambda. \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

Burada $t_k = u + k \frac{v-u}{n}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$; $n \in \mathbb{N}$ ’dir.

İspat. X stokastik süreci $[u, v]$ aralığı üzerinde h -konveks olduğundan, $[t_{k-1}, t_k] \subseteq [u, v]$, $k = 1, 2, \dots, n$ alt aralıklarında da h -konvektir. Bu nedenle her $\lambda \in [0, 1]$ için aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$X(\lambda t_{k-1} + (1 - \lambda)t_k, \cdot) \leq h(\lambda)X(t_{k-1}, \cdot) + h(1 - \lambda)X(t_k, \cdot). \quad (4.4.2)$$

X stokastik süreci $[u, v]$ üzerinde kuadratik orta anlamda integralenebilir olduğundan, (4.4.2) eşitsizliğini $[0, 1]$ aralığı üzerinde λ parametresine göre integrali alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} \int_0^1 X(\lambda t_{k-1} + (1 - \lambda)t_k, \cdot) d\lambda &\leq X(t_{k-1}, \cdot) \int_0^1 h(\lambda) d\lambda + X(t_k, \cdot) \int_0^1 h(1 - \lambda) d\lambda \\ &= (X(t_{k-1}, \cdot) + X(t_k, \cdot)) \int_0^1 h(\lambda) d\lambda. \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

(4.4.3) eşitsizliğinde $t = \lambda t_{k-1} + (1 - \lambda)t_k$ değişken dönüşümü yapılırsa, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} X(t, \cdot) dt \leq (t_k - t_{k-1})(X(t_{k-1}, \cdot) + X(t_k, \cdot)) \int_0^1 h(\lambda) d\lambda.$$

Bu durumda (4.4.1) eşitsizliğinin sağ tarafı, yukarıdaki eşitsizliğin k 'ya göre 1'den n 'e kadar toplamı alınarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} X(t, \cdot) dt &= \int_u^v X(t, \cdot) dt \leq \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1})(X(t_{k-1}, \cdot) + X(t_k, \cdot)) \int_0^1 h(\lambda) d\lambda \\ &\leq \max_k \{t_k - t_{k-1}\} \sum_{k=1}^n (X(t_{k-1}, \cdot) + X(t_k, \cdot)) \int_0^1 h(\lambda) d\lambda \\ &= \frac{v - u}{n} \left[X(t_0, \cdot) + X(t_1, \cdot) + \sum_{k=2}^{n-1} (X(t_{k-1}, \cdot) + X(t_k, \cdot)) + X(t_{n-1}, \cdot) + X(t_n, \cdot) \right] \int_0^1 h(\lambda) d\lambda \\ &= \frac{v - u}{n} \left[X(u, \cdot) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} X(t_k, \cdot) + X(v, \cdot) \right] \int_0^1 h(\lambda) d\lambda. \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

X stokastik süreci $[t_{k-1}, t_k]$ aralığı üzerinde h -konveks olduğundan, $\lambda \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$X\left(\frac{t_{k-1} + t_k}{2}, \cdot\right) \leq h\left(\frac{1}{2}\right) [X(\lambda t_k + (1-\lambda)t_{k-1}, \cdot) + X((1-\lambda)t_k + \lambda t_{k-1}, \cdot)]. \quad (4.4.5)$$

Son olarak, (4.4.2) ile 4.4.4) eşitsizlikleri arasında yapılan işlemler (4.4.5) eşitsizliğine uygulanırsa (4.4.1) eşitsizliğinin sol tarafı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{v-u}{n} \sum_{k=1}^n X\left(\left(\frac{t_{k-1} + t_k}{2}\right), \cdot\right) \leq 2h\left(\frac{1}{2}\right) \int_u^v X(t, \cdot) dt.$$

Uyarı 4.4.1. Teorem 4.4.2’de $n = 1$ yazılırsa, h -konveks stokastik süreçler için klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir.

4.5. (p, h) -Konveks Stokastik Süreçler için Genelleştirilmiş Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda (p, h) -konveks bir stokastik sürecin tanımı ve bu tip süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir. Ayrıca bu tip süreçler için genelleştirilmiş Hermite-Hadamard eşitsizliği ise özgün olarak Teorem 4.5.2’de elde edilmiştir.

Tanım 4.5.1. $I, J \subseteq \mathbb{R}$ reel bir aralık, $(0,1) \subseteq J$ ve $h: J \rightarrow \mathbb{R}$, $h \not\equiv 0$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $t, s \in I$ ve $t \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan negatif olmayan $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik sürecine (p, h) -konvektir denir:

$$X\left((\lambda t^p + (1-\lambda)s^p)^{\frac{1}{p}}, \cdot\right) \leq h(\lambda)X(t, \cdot) + h(1-\lambda)X(s, \cdot).$$

Ayrıca yukarıdaki eşitsizlikte $p = 1$ için h -konveks, $h(\lambda) = 1$ için p -konvektir ve eşitsizlik ters çevrilirse bu sürece (p, h) -konkavdır denir [72].

Lemma 4.5.1. $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (p, h) -konveks bir stokastik süreç ve $h: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$, $h\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Eğer X stokastik süreci, $[u, v] \subseteq I$ üzerinde kuadratik orta anlamda integralenebilirse, bu takdirde her $u < v$ aşağıdaki eşitlik mevcuttur [72]:

$$\frac{p}{v^p - u^p} \int_u^v t^{p-1} X(t, \cdot) dt = \frac{1}{v - u} \int_u^v X \left(\left[\frac{y - u}{v - u} v^p + \frac{v - y}{v - u} u^p \right]^{1/p}, \cdot \right) dy$$

Teorem 4.5.1. $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (p, h) -konveks bir stokastik süreç ve $h: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $h\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Eğer X stokastik süreci, $[u, v] \subseteq I$ üzerinde kuadratik orta anlamda integralenebilirse, bu takdirde her $u < v$ aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [72]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)} X \left(\left(\frac{u^p + v^p}{2} \right)^{\frac{1}{p}}, \cdot \right) &\leq \frac{p}{v^p - u^p} \int_u^v t^{p-1} X(t, \cdot) dt \\ &\leq (X(u, \cdot) + X(v, \cdot)) \int_0^1 h(\lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

Teorem 4.5.2. $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (p, h) -konveks bir stokastik süreç ve $h: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $h\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Eğer X stokastik süreci, $[u, v] \subseteq I$ üzerinde kuadratik orta anlamda integralenebilirse, bu takdirde her $u < v$ aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2nh\left(\frac{1}{2}\right)} \sum_{k=1}^n X \left(\left(\frac{t_{k-1}^p + t_k^p}{2} \right)^{1/p}, \cdot \right) &\leq \frac{p}{v^p - u^p} \int_u^v t^{p-1} X(t, \cdot) dt \\ &\leq \frac{1}{n} \left[X(u, \cdot) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} X(t_k, \cdot) + X(v, \cdot) \right] \int_0^1 h(\lambda) d\lambda. \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

Burada $t_k = u + k \frac{v-u}{n}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$; $n \in \mathbb{N}$ 'dir.

İspat. X stokastik süreci $[u, v]$ aralığı üzerinde (p, h) -konveks olduğundan, $[t_{k-1}, t_k] \subseteq [u, v]$, $k = 1, 2, \dots, n$ alt aralıklarında da (p, h) -konvektir. Bu nedenle her $\lambda \in [0, 1]$ için aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$X \left((\lambda t_{k-1}^p + (1 - \lambda) t_k^p)^{1/p}, \cdot \right) \leq h(\lambda) X(t_{k-1}, \cdot) + h(1 - \lambda) X(t_k, \cdot). \quad (4.5.2)$$

X stokastik süreci $[u, v]$ üzerinde kuadratik orta anlamda integralenebilir olduğundan, (4.5.2) eşitsizliğini $[0, 1]$ aralığı üzerinde λ parametresine göre integrali alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} \int_0^1 X(\lambda t_{k-1}^p + (1-\lambda)t_k^p)^{\frac{1}{p}} d\lambda &\leq X(t_{k-1}, \cdot) \int_0^1 h(\lambda) d\lambda + X(t_k, \cdot) \int_0^1 h(1-\lambda) d\lambda \\ &= \left(X((t_{k-1}), \cdot) + X(t_k, \cdot) \right) \int_0^1 h(\lambda) d\lambda. \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

(4.5.3) eşitsizliğinde $t = \lambda t_{k-1}^p + (1-\lambda)t_k^p$ değişken dönüşümü yapılırsa, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} t^{p-1} X(t, \cdot) dt \leq \frac{t_k^p - t_{k-1}^p}{p} \cdot \left(X((t_{k-1}), \cdot) + X(t_k, \cdot) \right) \int_0^1 h(\lambda) d\lambda.$$

Bu durumda (4.5.1) eşitsizliğinin sağ tarafı, yukarıdaki eşitsizliğin k 'ya göre 1'den n 'e kadar toplamı alınarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} t^{p-1} X(t, \cdot) dt &= \int_u^v t^{p-1} X(t, \cdot) dt \\ &\leq \sum_{k=1}^n \frac{t_k^p - t_{k-1}^p}{p} \left(X((t_{k-1}), \cdot) + X(t_k, \cdot) \right) \int_0^1 h(\lambda) d\lambda \\ &\leq \max_k \left\{ \frac{t_k^p - t_{k-1}^p}{p} \right\} \sum_{k=1}^n \left(X((t_{k-1}), \cdot) + X(t_k, \cdot) \right) \int_0^1 h(\lambda) d\lambda \\ &= \frac{v^p - u^p}{np} \left[X(t_0, \cdot) + X(t_1, \cdot) + \sum_{k=2}^{n-1} (X(t_{k-1}, \cdot) + X(t_k, \cdot)) + X(t_{n-1}, \cdot) + X(t_n, \cdot) \right] \int_0^1 h(\lambda) d\lambda \\ &= \frac{v^p - u^p}{np} \left[X(u, \cdot) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} X(t_k, \cdot) + X(v, \cdot) \right] \int_0^1 h(\lambda) d\lambda. \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

X stokastik süreci $[t_{k-1}, t_k]$ aralığı üzerinde (p, h) -konveks olduğundan, Lemma 4.5.1 ile $y \in [t_{k-1}, t_k]$ için aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$\begin{aligned}
& \frac{p}{t_k^p - t_{k-1}^p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} t^{p-1} X(t, \cdot) dt \\
&= \frac{1}{t_k - t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} X \left(\left[\frac{y - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} t_k^p + \frac{t_k - y}{t_k - t_{k-1}} t_{k-1}^p \right]^{1/p}, \cdot \right) dy. \quad (4.5.5)
\end{aligned}$$

(4.5.5) eşitliğinde $y = \frac{1}{2}(t_{k-1} + t_k) + t$ değişken dönüşümü yapılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \frac{p}{t_k^p - t_{k-1}^p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} t^{p-1} X(t, \cdot) dt \\
&= \frac{1}{t_k - t_{k-1}} \int_{-\frac{1}{2}(t_k - t_{k-1})}^{\frac{1}{2}(t_k - t_{k-1})} X \left(\left(\frac{1}{2}(t_{k-1}^p + t_k^p) + \frac{t_k^p - t_{k-1}^p}{t_k - t_{k-1}} t \right)^{\frac{1}{p}}, \cdot \right) dt \\
&= \frac{1}{t_k - t_{k-1}} \int_0^{\frac{1}{2}(t_k - t_{k-1})} X \left(\left(\frac{1}{2}(t_{k-1}^p + t_k^p) + \frac{t_k^p - t_{k-1}^p}{t_k - t_{k-1}} t \right)^{\frac{1}{p}}, \cdot \right) dt \\
&+ \frac{1}{t_k - t_{k-1}} \int_0^{\frac{1}{2}(t_k - t_{k-1})} X \left(\left(\frac{1}{2}(t_{k-1}^p + t_k^p) + \frac{t_k^p - t_{k-1}^p}{t_k - t_{k-1}} t \right)^{\frac{1}{p}}, \cdot \right) dt \\
&\geq \frac{1}{(t_k - t_{k-1})h(\frac{1}{2})} \int_0^{\frac{1}{2}(t_k - t_{k-1})} X \left(\left[\frac{1}{2}(t_{k-1}^p + t_k^p) \right]^{\frac{1}{p}}, \cdot \right) dt \\
&= \frac{1}{2h(\frac{1}{2})} X \left(\left(\frac{1}{2}(t_{k-1}^p + t_k^p) \right)^{1/p}, \cdot \right)
\end{aligned}$$

Bu durumda

$$\frac{1}{2h(\frac{1}{2})} X \left(\left(\frac{1}{2}(t_{k-1}^p + t_k^p) \right)^{1/p}, \cdot \right) \leq \frac{p}{t_k^p - t_{k-1}^p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} t^{p-1} X(t, \cdot) dt$$

dır. Bu durumda (4.5.1) eşitsizliğinin sol tarafı, yukarıdaki eşitsizliğin k 'ya göre 1'den n 'e kadar toplamı alınarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{1}{2nh(\frac{1}{2})} \sum_{k=1}^n X \left(\left(\left(\frac{t_{k-1}^p + t_k^p}{2} \right)^{1/p} \right), \cdot \right) \leq \frac{p}{v^p - u^p} \int_u^v t^{p-1} X(t, \cdot) dt.$$

Uyarı 4.5.1. Teorem 4.5.2’de $n = 1$ yazılırsa, (p, h) -konveks stokastik süreçler için klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir.

4.6. İkinci anlamda s -Konveks Stokastik Süreçler için Genelleştirilmiş Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda ikinci anlamda s -konveks bir stokastik sürecin tanımı ve bu tip süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir. Ayrıca bu tip süreçler için genelleştirilmiş Hermite-Hadamard eşitsizliği ise özgün olarak Teorem 4.6.2’de elde edilmiştir.

Tanım 4.6.1. s reel sayı olmak üzere $s \in (0,1]$ ve $X: [0, \infty) \times \Omega \rightarrow [0, \infty)$ bir stokastik süreç olsun. Bu durumda her $u, v \in [0, \infty)$ ve $\lambda \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan X stokastik sürecine ikinci anlamda s -konvektir denir:

$$X(\lambda u + (1 - \lambda)v, \cdot) \leq \lambda^s X(u, \cdot) + (1 - \lambda)^s X(v, \cdot)$$

Yukarıdaki eşitsizlik yön değiştirdiğinde X stokastik sürecine ikinci anlamda s -konkavdır denir. Yukarıdaki eşitsizlikte $s = 1$ için yazılırsa konveks stokastik süreç tanımı elde edilir [73].

Teorem 4.6.1. $X: [0, \infty) \times \Omega \rightarrow [0, \infty)$ ikinci anlamda s -konveks bir stokastik süreç ve $s \in (0,1)$ olsun. Eğer X stokastik süreci, $[u, v] \subseteq [0, \infty)$ üzerinde kuadratik orta anlamda integralenebilirse, bu takdirde her $u, v \geq 0$ için aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [73]:

$$2^{s-1} X\left(\frac{u+v}{2}, \cdot\right) \leq \frac{1}{v-u} \int_u^v X(t, \cdot) dt \leq \frac{X(u, \cdot) + X(v, \cdot)}{s+1}.$$

Teorem 4.6.2. $X: [0, \infty) \times \Omega \rightarrow [0, \infty)$ ikinci anlamda s -konveks bir stokastik süreç ve $s \in (0,1)$ olsun. Eğer X stokastik süreci, $[u, v] \subseteq [0, \infty)$ üzerinde kuadratik orta anlamda integralenebilirse, bu takdirde her $u, v \geq 0$ için aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur:

$$\frac{2^{s-1}}{n} \sum_{k=1}^n X\left(\left(\frac{t_{k-1} + t_k}{2}\right), \cdot\right) \leq \frac{1}{v-u} \int_u^v X(t, \cdot) dt$$

$$\leq \frac{1}{n(s+1)} \left[X(u, \cdot) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} X(t_k, \cdot) + X(v, \cdot) \right]. \quad (4.6.1)$$

Burada $t_k = u + k \frac{v-u}{n}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$; $n \in \mathbb{N}$ 'dir.

İspat. X stokastik süreci $[u, v] \subseteq [0, \infty)$ aralığı üzerinde ikinci anlamda s -konveks olduğundan, $[t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$ alt aralıklarında da konvektir. Bu nedenle her $\lambda \geq 0$, $s \in (0, 1)$ ve $u, v \geq 0$ için aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$X(\lambda t_{k-1} + (1 - \lambda)t_k, \cdot) \leq \lambda^s X(t_{k-1}, \cdot) + (1 - \lambda)^s X(t_k, \cdot). \quad (4.6.2)$$

X stokastik süreci $[u, v] \subseteq [0, \infty)$ üzerinde kuadratik orta anlamda integralenebilir olduğundan, (4.6.2) eşitsizliğini $[0, 1]$ aralığı üzerinde α parametresine göre integrali alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 X(\lambda t_{k-1} + (1 - \lambda)t_k, \cdot) d\lambda \\ & \leq X(t_{k-1}, \cdot) \int_0^1 \lambda^s d\lambda + X(t_k, \cdot) \int_0^1 (1 - \lambda)^s d\lambda = \frac{X(t_{k-1}, \cdot) + X(t_k, \cdot)}{s + 1}. \end{aligned} \quad (4.6.3)$$

(4.6.3) eşitsizliğinde $t = \lambda t_{k-1} + (1 - \lambda)t_k$ değişken dönüşümü yapılırsa, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} X(t, \cdot) dt \leq \frac{t_k - t_{k-1}}{2} \frac{X(t_{k-1}, \cdot) + X(t_k, \cdot)}{s + 1}.$$

Bu durumda (4.6.1) eşitsizliğinin sağ tarafı, yukarıdaki eşitsizliğin k 'ya göre 1'den n 'e kadar toplamı alınarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} X(t, \cdot) dt &= \int_u^v X(t, \cdot) dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{t_k - t_{k-1}}{2} \left(\frac{X(t_{k-1}, \cdot) + X(t_k, \cdot)}{s + 1} \right) \\ &\leq \frac{1}{2(s + 1)} \max_k \{t_k - t_{k-1}\} \sum_{k=1}^n (X(t_{k-1}, \cdot) + X(t_k, \cdot)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{v-u}{2n(s+1)} \left[X(t_0, \cdot) + X(t_1, \cdot) + \sum_{k=2}^{n-1} (X(t_{k-1}, \cdot) + X(t_k, \cdot)) + X(t_{n-1}, \cdot) + X(t_n, \cdot) \right] \\
&= \frac{v-u}{2n(s+1)} \left[X(u, \cdot) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} X(t_k, \cdot) + X(v, \cdot) \right]. \tag{4.6.4}
\end{aligned}$$

X stokastik süreci $[t_{k-1}, t_k]$ aralığı üzerinde s -konveks olduğundan aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$X\left(\frac{u_{k-1} + u_k}{2}, \cdot\right) \leq \frac{X(u_{k-1}, \cdot) + X(u_k, \cdot)}{2^s}.$$

Yukarıdaki eşitsizlikte $u_{k-1} = \lambda t_{k-1} + (1-\lambda)t_k$ ve $u_k = \lambda t_k + (1-\lambda)t_{k-1}$ değişken dönüşümü yapılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$X\left(\frac{t_{k-1} + t_k}{2}, \cdot\right) \leq \frac{X(\lambda t_{k-1} + (1-\lambda)t_k, \cdot) + X(\lambda t_k + (1-\lambda)t_{k-1}, \cdot)}{2^s}. \tag{4.6.5}$$

Son olarak, (4.6.2) ile (4.6.4) eşitsizlikleri arasında yapılan işlemler (4.6.5) eşitsizliğine uygulanırsa (4.6.1) eşitsizliğinin sol tarafı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{2^{s-1}}{n} \sum_{k=1}^n X\left(\frac{t_{k-1} + t_k}{2}, \cdot\right) \leq \frac{1}{v-u} \int_u^v X(t, \cdot) dt.$$

Uyarı 4.6.1. Teorem 4.6.2’de $n = 1$ yazılırsa, s -konveks stokastik süreçler için klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir.

4.7. m -Konveks Stokastik Süreçler için Genelleştirilmiş Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda m -konveks bir stokastik sürecin tanımı ve bu tip süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir. Ayrıca bu tip süreçler için genelleştirilmiş Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilmiştir.

Tanım 4.7.1. $v > 0$ olmak üzere $X: [0, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bir stokastik süreç ve $m \in (0,1]$ olsun. Eğer her $t, s \in [0, v]$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$X(\lambda t + m(1-\lambda)s, \cdot) \leq \lambda X(t, \cdot) + m(1-\lambda)X(s, \cdot)$$

şartını sağlanıyorsa bu sürece m -konvektir denir. Yukarıdaki eşitsizlikten $m = 1$ için konveks stokastik süreç ve $\lambda = 1/2$ için Jensen m -konveks stokastik süreç elde edilir [72].

Lemma 4.7.1. $v > 0$ olmak üzere $X: [0, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ m -konveks bir stokastik süreç olsun. Eğer X stokastik süreci, $[u, v] \subset [0, v]$ üzerinde kuadratik orta anlamda integralenebilirse, bu takdirde aşağıdaki eşitlik mevcuttur [72]:

$$\int_0^1 X\left(\lambda \frac{u}{m} + (1-\lambda) \frac{v}{m}, \cdot\right) d\lambda = \frac{m}{v-u} \int_{\frac{u}{m}}^{\frac{v}{m}} X(t, \cdot) dt = \frac{1}{v-u} \int_u^v X\left(\frac{t}{m}, \cdot\right) dt.$$

Teorem 4.7.1. $v > 0$ olmak üzere $X: [0, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ m -konveks bir stokastik süreç olsun. Eğer X stokastik süreci, $[u, v] \subset [0, v]$ üzerinde kuadratik orta anlamda integralenebilirse, bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [72]:

$$\begin{aligned} X\left(\frac{u+v}{2}, \cdot\right) &\leq \frac{1}{v-u} \int_u^v \frac{X(t, \cdot) + mX\left(\frac{t}{m}, \cdot\right)}{2} dt \\ &\leq \frac{m+1}{4} \left[\frac{X(u, \cdot) + X(v, \cdot)}{2} + m \frac{X\left(\frac{u}{m}, \cdot\right) + X\left(\frac{v}{m}, \cdot\right)}{2} \right]. \end{aligned}$$

Teorem 4.7.2. $v > 0$ olmak üzere $X: [0, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ m -konveks bir stokastik süreç olsun. Eğer X stokastik süreci, $[u, v] \subset [0, v]$ üzerinde kuadratik orta anlamda integralenebilirse, bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X\left(\left(\frac{t_{k-1} + t_k}{2}\right), \cdot\right) &\leq \frac{1}{v-u} \int_u^v \frac{X(t, \cdot) + mX\left(\frac{t}{m}, \cdot\right)}{2} dt \\ &\leq \frac{m+1}{8n} \left[\begin{aligned} &X(u, \cdot) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} X(t_k, \cdot) + X(v, \cdot) \\ &+ m \left(X\left(\frac{u}{m}, \cdot\right) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} X\left(\frac{t_k}{m}, \cdot\right) + X\left(\frac{v}{m}, \cdot\right) \right) \end{aligned} \right]. \end{aligned} \quad (4.7.1)$$

burada $t_k = u + k \frac{v-u}{n}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$; $n \in \mathbb{N}$ 'dir.

İspat. X stokastik süreci $[0, v]$ aralığı üzerinde m -konveks olduğundan, $[t_{k-1}, t_k] \subseteq [0, v]$, $k = 1, 2, \dots, n$ alt aralıklarında da m -konvektir. Bu nedenle her $\lambda \in [0, 1]$ için aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$X\left(\frac{u_{k-1} + u_k}{2}, \cdot\right) \leq \frac{1}{2} \left[X(u_{k-1}, \cdot) + mX\left(\frac{u_k}{m}, \cdot\right) \right].$$

Yukarıdaki eşitsizlikte $u_{k-1} = \lambda t_{k-1} + (1 - \lambda)t_k$ ve $u_k = (1 - \lambda)t_{k-1} + \lambda t_k$ değişken dönüşümü yapılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & X\left(\frac{t_{k-1} + t_k}{2}, \cdot\right) \\ & \leq \frac{1}{2} \left[X(\lambda t_{k-1} + (1 - \lambda)t_k, \cdot) + mX\left((1 - \lambda)\frac{t_{k-1}}{m} + \lambda\frac{t_k}{m}, \cdot\right) \right]. \quad (4.7.2) \end{aligned}$$

X stokastik süreci $[u, v] \subset [0, v]$ üzerinde kuadratik orta anlamda integralenebilir olduğundan, (4.7.2) eşitsizliğini $[0, 1]$ aralığı üzerinde λ parametresine göre integrali alınır aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & X\left(\frac{t_{k-1} + t_k}{2}, \cdot\right) \\ & \leq \frac{1}{2} \left[\int_0^1 X(\lambda t_{k-1} + (1 - \lambda)t_k, \cdot) d\lambda + m \int_0^1 X\left((1 - \lambda)\frac{t_{k-1}}{m} + \lambda\frac{t_k}{m}, \cdot\right) d\lambda \right]. \end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitsizlikte birinci integralde $t = \lambda t_{k-1} + (1 - \lambda)t_k$ ve ikinci integralde $t = (1 - \lambda)\frac{t_{k-1}}{m} + \lambda\frac{t_k}{m}$ değişken dönüşümü yapılarak, Lemma 4.1.1 ve Lemma 4.7.1 yardımıyla aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$(t_k - t_{k-1})X\left(\frac{t_{k-1} + t_k}{2}, \cdot\right) \leq \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{X(t, \cdot) + mX\left(\frac{t}{m}, \cdot\right)}{2} dt.$$

Bu durumda (4.7.1) eşitsizliğinin sol tarafı, yukarıdaki eşitsizliğin k 'ya göre 1'den n 'e kadar toplamı alınarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{X(t, \cdot) + mX\left(\frac{t}{m}, \cdot\right)}{2} dt = \int_u^v \frac{X(t, \cdot) + mX\left(\frac{t}{m}, \cdot\right)}{2} dt$$

$$\begin{aligned}
&\geq \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) X\left(\frac{t_{k-1} + t_k}{2}, \cdot\right) \geq \max_k \{t_k - t_{k-1}\} \sum_{k=1}^n X\left(\frac{t_{k-1} + t_k}{2}, \cdot\right) \\
&= \frac{v - u}{n} \sum_{k=1}^n X\left(\frac{t_{k-1} + t_k}{2}, \cdot\right). \tag{4.7.3}
\end{aligned}$$

X stokastik süreci $[t_{k-1}, t_k]$ aralığı üzerinde m -konveks olduğundan, $\lambda \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \left[X(\lambda t_{k-1} + (1 - \lambda)t_k, \cdot) + mX\left((1 - \lambda)\frac{t_{k-1}}{m} + \lambda\frac{t_k}{m}, \cdot\right) \right] \\
&\leq \frac{1}{2} \left[\lambda X(t_{k-1}, \cdot) + m(1 - \lambda)X\left(\frac{t_k}{m}, \cdot\right) + m(1 - \lambda)X\left(\frac{t_{k-1}}{m}, \cdot\right) + m^2 \lambda X\left(\frac{t_k}{m^2}, \cdot\right) \right].
\end{aligned}$$

Son olarak, (4.7.2) ile (4.7.3) eşitsizlikleri arasında yapılan işlemler yukarıdaki eşitsizliğe uygulanırsa (4.7.1) eşitsizliğinin sol tarafı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{t_k - t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{X(t, \cdot) + mX\left(\frac{t}{m}, \cdot\right)}{2} dt \\
&\leq \frac{1}{2} \left[\frac{X(t_{k-1}, \cdot) + mX\left(\frac{t_k}{m}, \cdot\right)}{2} + \frac{mX\left(\frac{t_{k-1}}{m}, \cdot\right) + m^2 X\left(\frac{t_k}{m^2}, \cdot\right)}{2} \right]. \tag{4.7.4}
\end{aligned}$$

Benzer şekilde

$$X\left(\frac{u_{k-1} + u_k}{2}, \cdot\right) \leq \frac{1}{2} \left[X(u_{k-1}, \cdot) + mX\left(\frac{u_k}{m}, \cdot\right) \right]$$

eşitsizliğinde $u_{k-1} = \lambda t_k + (1 - \lambda)t_{k-1}$, $u_k = (1 - \lambda)t_k + \lambda t_{k-1}$ değerleri yazılır ve Lemma 4.1.1 ve Lemma 4.7.1 kullanılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{t_k - t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{X(t, \cdot) + mX\left(\frac{t}{m}, \cdot\right)}{2} dt \\
&\leq \frac{1}{2} \left[\frac{X(t_k, \cdot) + mX\left(\frac{t_{k-1}}{m}, \cdot\right)}{2} + \frac{mX\left(\frac{t_k}{m}, \cdot\right) + m^2 X\left(\frac{t_{k-1}}{m^2}, \cdot\right)}{2} \right]. \tag{4.7.5}
\end{aligned}$$

(4.7.4) ve (4.7.5) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\frac{1}{t_{k-1} - t_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{X(t, \cdot) + mX\left(\frac{t}{m}, \cdot\right)}{2} dt$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{8} \left[X(t_{k-1}, \cdot) + X(t_k, \cdot) + 2m \left(X\left(\frac{t_{k-1}}{m}, \cdot\right) + X\left(\frac{t_k}{m}, \cdot\right) \right) \right. \\
&\quad \left. + m^2 \left(X\left(\frac{t_{k-1}}{m^2}, \cdot\right) + X\left(\frac{t_k}{m^2}, \cdot\right) \right) \right] \\
&\leq \frac{m+1}{4} \left[\frac{X(t_{k-1}, \cdot) + X(t_k, \cdot)}{2} + m \frac{X\left(\frac{t_{k-1}}{m}, \cdot\right) + X\left(\frac{t_k}{m}, \cdot\right)}{2} \right].
\end{aligned}$$

Bu durumda (4.7.1) eşitsizliğinin sağ tarafı, yukarıdaki eşitsizliğin k 'ya 1'den n 'e kadar toplamı alınarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{v-u} \int_u^v \frac{X(t, \cdot) + mX\left(\frac{t}{m}, \cdot\right)}{2} dt \\
&\leq \frac{m+1}{8n} \left[X(u, \cdot) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} X(t_k, \cdot) + X(v, \cdot) \right. \\
&\quad \left. + m \left(X\left(\frac{u}{m}, \cdot\right) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} X\left(\frac{t_k}{m}, \cdot\right) + X\left(\frac{v}{m}, \cdot\right) \right) \right].
\end{aligned}$$

Uyarı 4.7.1. Teorem 4.7.2'de $n = 1$ yazılırsa m -konveks stokastik süreçler için klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir.

4.8. r -Konveks Stokastik Süreçler için Genelleştirilmiş Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda r -konveks bir stokastik sürecin tanımı ve bu tip süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir. Ayrıca bu tip süreçler için genelleştirilmiş Hermite-Hadamard eşitsizliği ise özgün olarak Teorem 4.8.2'de elde edilmiştir.

Tanım 4.8.1. $[u, v] \subseteq I$, $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow (0, \infty)$ pozitif bir stokastik süreç olsun. Eğer her $t, s \in [u, v]$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

$$X(\lambda t + (1-\lambda)s, \cdot) \leq \begin{cases} (\lambda[X(t, \cdot)]^r + (1-\lambda)[X(s, \cdot)]^r)^{1/r}, & r \neq 0 \\ [X(t, \cdot)]^\lambda [X(s, \cdot)]^{(1-\lambda)}, & r = 0 \end{cases} \quad (4.8.1)$$

şartı sağlanıyorsa bu sürece r -konvektir denir. Açıkça görülmektedir ki, (4.8.1) eşitsizliği ile $r = 0$ için log-konveks stokastik süreç ve $r = 1$ için konveks stokastik süreç elde edilir [76].

Teorem 4.8.1. $[u, v] \subseteq I$, $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow (0, \infty)$ r -konveks pozitif bir stokastik süreç olsun. Eğer X stokastik süreci, $[u, v]$ üzerinde kuadratik orta anlamda integralenebilirse, bu takdirde, her $u < v$ için aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [76]:

$$\frac{1}{v-u} \int_u^v X(t, \cdot) dt \leq \left(\frac{r}{r+1} \right)^{\frac{1}{r}} ([X(u, \cdot)]^r + [X(v, \cdot)]^r)^{\frac{1}{r}}.$$

Teorem 4.8.2. $[u, v] \subseteq I$, $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow (0, \infty)$ r -konveks pozitif bir stokastik süreç olsun. Eğer X stokastik süreci, $[u, v]$ üzerinde kuadratik orta anlamda integralenebilirse, bu takdirde, her $u < v$ için aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur:

$$\frac{1}{v-u} \int_u^v X(t, \cdot) dt \leq \left(\frac{r}{r+1} \right)^{1/r} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n ([X(t_{k-1}, \cdot)]^r + [X(t_k, \cdot)]^r)^{1/r}. \quad (4.8.1)$$

Burada $t_k = u + k \frac{v-u}{n}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$; $n \in \mathbb{N}$ 'dir.

İspat. X stokastik süreci $[u, v]$ aralığı üzerinde r -konveks olduğundan, $[t_{k-1}, t_k] \subseteq [u, v]$, $k = 1, 2, \dots, n$ alt aralıklarında da r -konvektir. Bu nedenle her $\lambda \in [0, 1]$ için aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$X(\lambda t_{k-1} + (1-\lambda)t_k, \cdot) \leq (\lambda [X(t_{k-1}, \cdot)]^r + (1-\lambda) [X(t_k, \cdot)]^r)^{\frac{1}{r}}. \quad (4.8.2)$$

X stokastik süreci $[u, v]$ üzerinde kuadratik orta anlamda integralenebilir olduğundan, (4.8.2) eşitsizliğini $[0, 1]$ aralığı üzerinde λ parametresine göre integrali alınıp Minkowski eşitsizliğini kullanarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\int_0^1 X(\lambda t_{k-1} + (1-\lambda)t_k, \cdot) d\lambda \leq \int_0^1 (\lambda [X(t_{k-1}, \cdot)]^r + (1-\lambda) [X(t_k, \cdot)]^r)^{\frac{1}{r}} d\lambda$$

$$\leq \left[\left(\int_0^1 \lambda^{\frac{1}{r}} X(t_{k-1}, \cdot) d\lambda \right)^r + \left(\int_0^1 (1-\lambda)^{\frac{1}{r}} X(t_k, \cdot) d\lambda \right)^r \right]^{\frac{1}{r}}. \quad (4.8.3)$$

(4.8.3) eşitsizliğinde $t = \lambda t_{k-1} + (1-\lambda)t_k$ değişken dönüşümü yapılırsa, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} X(t, \cdot) dt \leq (t_k - t_{k-1}) \left(\frac{r}{r+1} \right)^{1/r} ([X(t_{k-1}, \cdot)]^r + [X(t_k, \cdot)]^r)^{1/r}.$$

Bu durumda (4.8.1) eşitsizliği, yukarıdaki eşitsizliğin k 'ya göre 1'den n 'e kadar toplamı alınarak Lemma 4.1.1 yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} X(t, \cdot) dt &= \int_u^v X(t, \cdot) dt \\ &\leq \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) \left(\frac{r}{r+1} \right)^{1/r} ([X(t_{k-1}, \cdot)]^r + [X(t_k, \cdot)]^r)^{1/r} \\ &\leq \max_k \{t_k - t_{k-1}\} \left(\frac{r}{r+1} \right)^{1/r} \sum_{k=1}^n ([X(t_{k-1}, \cdot)]^r + [X(t_k, \cdot)]^r)^{1/r} \\ &= \frac{v-u}{n} \left(\frac{r}{r+1} \right)^{1/r} \sum_{k=1}^n ([X(t_{k-1}, \cdot)]^r + [X(t_k, \cdot)]^r)^{1/r}. \end{aligned}$$

Uyarı 4.8.1. Teorem 4.8.2'de $n = 1$ yazılırsa, r -konveks stokastik süreçler için klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir.

4.9. φ -Konveks Stokastik Süreçler için Genelleştirilmiş Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda φ -konveks bir stokastik sürecin tanımı ve bu tip süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir. Ayrıca bu tip süreçler için genelleştirilmiş Hermite-Hadamard eşitsizliği ise özgün olarak Teorem 4.9.2'de elde edilmiştir.

Tanım 4.9.1. $[u, v] \subset \mathbb{R}$ reel bir aralık, $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bir stokastik süreç ve $\varphi: [u, v] \rightarrow [u, v]$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $t, s \in [u, v]$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan X 'e φ -konvektir denir:

$$X(\lambda\varphi(t) + (1 - \lambda)\varphi(s), \cdot) \leq \lambda X(\varphi(t), \cdot) + (1 - \lambda)X(\varphi(s), \cdot).$$

Yukarıdaki eşitsizlik yön değiştirdiğinde X 'e φ -konkavdır denir. Ayrıca yukarıdaki eşitsizlikte $\varphi(t) = t$ ise konveks stokastik süreç elde edilir [77]:

Lemma 4.9.1. $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ φ -konveks bir stokastik süreç ve $\varphi: [u, v] \rightarrow [u, v]$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer her $\varphi(u) < \varphi(v)$ için X stokastik süreci, $[u, v]$ üzerinde kuadratik orta anlamda integralenebilirse, bu takdirde aşağıdaki eşitlik mevcuttur [77]:

$$\frac{1}{\varphi(v) - \varphi(u)} \int_{\varphi(u)}^{\varphi(v)} X(\varphi(t), \cdot) d\varphi(t) = \int_0^1 X(\lambda\varphi(u) + (1 - \lambda)\varphi(v), \cdot) d\lambda.$$

Teorem 4.9.1. $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ φ -konveks bir stokastik süreç ve $\varphi: [u, v] \rightarrow [u, v]$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer her $\varphi(u) < \varphi(v)$ için X stokastik süreci, $[u, v]$ üzerinde kuadratik orta anlamda integralenebilirse, bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [77]:

$$X\left(\frac{\varphi(u) + \varphi(v)}{2}, \cdot\right) \leq \frac{1}{\varphi(v) - \varphi(u)} \int_{\varphi(u)}^{\varphi(v)} X(\varphi(t), \cdot) d\varphi(t) \leq \frac{X(\varphi(u), \cdot) + X(\varphi(v), \cdot)}{2}.$$

Teorem 4.9.2. $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ φ -konveks bir stokastik süreç ve $\varphi: [u, v] \rightarrow [u, v]$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer her $\varphi(u) < \varphi(v)$ için X stokastik süreci, $[u, v]$ üzerinde kuadratik orta anlamda integralenebilirse, bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X\left(\left(\frac{\varphi(t_{k-1}) + \varphi(t_k)}{2}\right), \cdot\right) &\leq \frac{1}{\varphi(v) - \varphi(u)} \int_{\varphi(u)}^{\varphi(v)} X(\varphi(t), \cdot) d\varphi(t) \\ &\leq \frac{1}{2n} \left[X(\varphi(u), \cdot) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} X(\varphi(t_k), \cdot) + X(\varphi(v), \cdot) \right]. \end{aligned} \quad (4.9.1)$$

Burada $\varphi(t_k) = \varphi(u) + k \frac{\varphi(v) - \varphi(u)}{n}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$; $n \in \mathbb{N}$ 'dir.

İspat. X stokastik süreci $[u, v]$ aralığı üzerinde φ -konveks ve φ sürekli bir fonksiyon olduğundan, $[\varphi(u), \varphi(v)]$ aralığı üzerinde de φ -konvektir. O halde $[\varphi(t_{k-1}), \varphi(t_k)] \subseteq [\varphi(u), \varphi(v)]$, $k = 1, 2, \dots, n$ alt aralıklarında da φ -konvektir. Bu nedenle her $\lambda \in [0, 1]$ için aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$X(\lambda\varphi(t_{k-1}) + (1 - \lambda)\varphi(t_k), \cdot) \leq \lambda X(\varphi(t_{k-1}), \cdot) + (1 - \lambda)X(\varphi(t_k), \cdot). \quad (4.9.2)$$

X stokastik süreci kuadratik orta anlamda integralenebilir olduğundan, (4.9.2) eşitsizliğini $[0, 1]$ aralığı üzerinde λ parametresine göre integrali alınıp Minkowski eşitsizliğini kullanarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\int_0^1 X(\lambda\varphi(t_{k-1}) + (1 - \lambda)\varphi(t_k), \cdot) d\lambda \leq \frac{X(\varphi(t_{k-1}), \cdot) + X(\varphi(t_k), \cdot)}{2}. \quad (4.9.3)$$

(4.9.3) eşitsizliğinde $\varphi(t) = \lambda\varphi(t_{k-1}) + (1 - \lambda)\varphi(t_k)$ değişken dönüşümü yapılırsa, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\int_{\varphi(t_{k-1})}^{\varphi(t_k)} X(\varphi(t), \cdot) d\varphi(t) \leq \frac{\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})}{2} (X(\varphi(t_{k-1}), \cdot) + X(\varphi(t_k), \cdot)).$$

Bu durumda (4.9.1) eşitsizliğinin sağ tarafı, yukarıdaki eşitsizliğin k 'ya göre 1'den n 'e kadar toplamı alınarak Lemma 4.9.1 yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \int_{\varphi(t_{k-1})}^{\varphi(t_k)} X(\varphi(t), \cdot) d\varphi(t) = \int_{\varphi(u_1)}^{\varphi(u_2)} X(\varphi(t), \cdot) d\varphi(t) \\ & \leq \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})}{2} (X(\varphi(t_{k-1}), \cdot) + X(\varphi(t_k), \cdot)) \\ & \leq \frac{1}{2} \max_k \{\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})\} \sum_{k=1}^n (X(\varphi(t_{k-1}), \cdot) + X(\varphi(t_k), \cdot)) \\ & = \frac{\varphi(v) - \varphi(u)}{2n} \left[X(\varphi(t_0), \cdot) + X(\varphi(t_1), \cdot) + \sum_{k=2}^{n-1} (X(\varphi(t_{k-1}), \cdot) + X(\varphi(t_k), \cdot)) + X(\varphi(t_{n-1}), \cdot) + X(\varphi(t_n), \cdot) \right] \\ & = \frac{\varphi(v) - \varphi(u)}{2n} \left[X(\varphi(u), \cdot) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} X(\varphi(t_k), \cdot) + X(\varphi(v), \cdot) \right]. \quad (4.9.4) \end{aligned}$$

X stokastik süreci $[\varphi(t_{k-1}), \varphi(t_k)] \subseteq [\varphi(u), \varphi(v)]$, $k = 1, 2, \dots, n$ alt aralıklarında φ -konveks olduğundan, her $\lambda \in [0, 1]$ için aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$\begin{aligned} X\left(\frac{\varphi(t_{k-1}) + \varphi(t_k)}{2}, \cdot\right) &= X\left(\frac{\lambda\varphi(t_k) + (1-\lambda)\varphi(t_{k-1})}{2} + \frac{(1-\lambda)\varphi(t_k) + \lambda\varphi(t_{k-1})}{2}, \cdot\right) \\ &\leq \frac{1}{2} [X(\lambda\varphi(t_k) + (1-\lambda)\varphi(t_{k-1}), \cdot) + X((1-\lambda)\varphi(t_k) + \lambda\varphi(t_{k-1}), \cdot)]. \end{aligned} \quad (4.9.5)$$

Son olarak, (4.9.2) ile (4.9.4) eşitsizlikleri arasında yapılan işlemler (4.9.5) eşitsizliğine uygulanırsa (4.9.1) eşitsizliğinin sol tarafı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{\varphi(u_2) - \varphi(u_1)}{n} \sum_{k=1}^n X\left(\left(\frac{\varphi(t_{k-1}) + \varphi(t_k)}{2}\right), \cdot\right) \leq \int_{\varphi(u_1)}^{\varphi(u_2)} X(t, \cdot) dt.$$

Uyarı 4.9.1. Teorem 4.9.2’de $n = 1$ yazılırsa, φ -konveks stokastik süreçler için klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir.

4.10. Preinveks Stokastik Süreçler için Genelleştirilmiş Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda preinvex bir stokastik sürecin tanımı ve bu tip süreçler için Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir. Ayrıca bu tip süreçler için genelleştirilmiş Hermite-Hadamard eşitsizliği ise özgün olarak Teorem 4.10.2’de elde edilmiştir.

Tanım 4.10.1. $I \subset \mathbb{R}^n$, Tanım 3.1.10’deki C koşulunu sağlayan $\eta : I \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ sürekli fonksiyonuna göre invex bir küme ve $X : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bir stokastik süreç olsun. Eğer her $t, s \in I$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan X ’e η ’ya göre preinvektir denir:

$$X(t + \lambda\eta(s, t), \cdot) \leq (1 - \lambda)X(t, \cdot) + \lambda X(s, \cdot). \quad (4.10.1)$$

Eğer λ sayısı $(0, 1)$ arasında sabit bir sayı ise süreç λ -preinvex stokastik süreç ve $\lambda = 1/2$ ise, süreç Jensen-preinvex stokastik süreç olarak adlandırılır. Eğer $\eta(s, t) = s - t$ ise $X(t, \cdot)$ bir konveks stokastik süreçtir [79].

Lemma 4.9.1. $X: [u, u + \eta(v, u)] \times \Omega \rightarrow (0, \infty)$ preinveks bir stokastik süreç ve $\eta(v, u) > 0$ fonksiyonu C koşulunu sağlasın. Eğer X stokastik süreci, $[u, u + \eta(v, u)]$ üzerinde kuadratik orta anlamda integralenebilirse, bu takdirde aşağıdaki eşitlik mevcuttur [79]:

$$\frac{1}{\eta(v, u)} \int_u^{u+\eta(v, u)} X(t, \cdot) dt = \int_0^1 X(u + \lambda\eta(v, u), \cdot) d\lambda = \int_0^1 X(v + \lambda\eta(u, v), \cdot) d\lambda.$$

Teorem 4.10.1. $X: [u, u + \eta(v, u)] \times \Omega \rightarrow (0, \infty)$ preinveks bir stokastik süreç ve $\eta(v, u) > 0$ fonksiyonu C koşulunu sağlasın. Eğer X stokastik süreci, $[u, u + \eta(v, u)]$ üzerinde kuadratik orta anlamda integralenebilirse, bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [79]:

$$X\left(\frac{2u + \eta(v, u)}{2}, \cdot\right) \leq \frac{1}{\eta(v, u)} \int_u^{u+\eta(v, u)} X(t, \cdot) dt \leq \frac{X(u, \cdot) + X(v, \cdot)}{2}.$$

Teorem 4.10.2. $X: [u, u + \eta(v, u)] \times \Omega \rightarrow (0, \infty)$ preinveks bir stokastik süreç ve $\eta(v, u) > 0$ fonksiyonu C koşulunu sağlasın. Eğer X stokastik süreci, $[u, u + \eta(v, u)]$ üzerinde kuadratik orta anlamda integralenebilirse, bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur:

$$\begin{aligned} \frac{\eta(v, u)}{n} \sum_{k=1}^n X\left(\left(\frac{2t_{k-1} + \eta(t_k, t_{k-1})}{2}\right), \cdot\right) &\leq \int_u^{u+\eta(v, u)} X(t, \cdot) dt \\ &\leq \frac{\eta(v, u)}{2n} \left[X(u, \cdot) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} X(t_k, \cdot) + X(v, \cdot) \right]. \end{aligned} \quad (4.10.1)$$

Burada $t_k = u + k \frac{\eta(v, u)}{n}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$; $u < v$, $n \in \mathbb{N}$ 'dir.

İspat. X stokastik süreci $[u, u + \eta(v, u)]$ aralığı üzerinde preinveks olduğundan, $[t_{k-1}, t_{k-1} + \eta(t_k, t_{k-1})] \subseteq [u, u + \eta(v, u)]$, $k = 1, 2, \dots, n$ alt aralıklarında da preinvektir. Bu nedenle her $\lambda \in [0, 1]$ için aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$X(t_{k-1} + \lambda\eta(t_k, t_{k-1}), \cdot) \leq \lambda X(t_k, \cdot) + (1 - \lambda) X(t_{k-1}, \cdot). \quad (4.10.2)$$

X stokastik süreci kuadratik orta anlamda integralenebilir olduğundan, (4.10.2) eşitsizliğini $[0,1]$ aralığı üzerinde λ parametresine göre integrali alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\int_0^1 X(t_{k-1} + \lambda\eta(t_k, t_{k-1}), \cdot) d\lambda \leq \frac{X(t_{k-1}, \cdot) + X(t_k, \cdot)}{2}. \quad (4.10.3)$$

(4.10.3) eşitsizliğinde $t = t_{k-1} + \lambda\eta(t_k, t_{k-1})$ değişken dönüşümü yapılırsa, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\int_{t_{k-1}}^{t_{k-1} + \eta(t_k, t_{k-1})} X(t, \cdot) dt \leq \frac{\eta(t_k, t_{k-1})}{2} (X(t_{k-1}, \cdot) + X(t_k, \cdot)). \quad (4.10.4)$$

Bu durumda (4.10.1) eşitsizliğinin sağ tarafı, yukarıdaki eşitsizliğin k 'ya göre 1'den n 'e kadar toplamı alınarak Lemma 4.10.1 yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_{k-1} + \eta(t_k, t_{k-1})} X(t, \cdot) dt &= \int_u^{u + \eta(v, u)} X(t, \cdot) dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{\eta(t_k, t_{k-1})}{2} (X(t_{k-1}, \cdot) + X(t_k, \cdot)) \\ &\leq \frac{1}{2} \max_k \{\eta(t_k, t_{k-1})\} \sum_{k=1}^n (X(t_{k-1}, \cdot) + X(t_k, \cdot)) \\ &= \frac{\eta(v, u)}{2n} \left[X(t_0, \cdot) + X(t_1, \cdot) + \sum_{k=2}^{n-1} (X(t_{k-1}, \cdot) + X(t_k, \cdot)) + X(t_{n-1}, \cdot) + X(t_n, \cdot) \right] \\ &= \frac{\eta(v, u)}{2n} \left[X(u, \cdot) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} X(t_k, \cdot) + X(v, \cdot) \right]. \end{aligned} \quad (4.10.5)$$

X stokastik süreci $[t_{k-1}, t_{k-1} + \eta(t_k, t_{k-1})]$, $k = 1, 2, \dots, n$ alt aralıklarında preinveks olduğundan, her $\lambda \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$\begin{aligned} X\left(\frac{2t_{k-1} + \eta(t_k, t_{k-1})}{2}, \cdot\right) &= X\left(\frac{t_{k-1} + \lambda\eta(t_k, t_{k-1})}{2} + \frac{t_{k-1} + \lambda\eta(t_k, t_{k-1})}{2}, \cdot\right) \\ &\leq \frac{1}{2} [X(t_{k-1} + \lambda\eta(t_k, t_{k-1}), \cdot) + X(t_{k-1} + \lambda\eta(t_k, t_{k-1}), \cdot)]. \end{aligned} \quad (4.10.6)$$

Son olarak, (4.10.2) ile (4.10.4) eşitsizlikleri arasında yapılan işlemler (4.10.6) eşitsizliğine uygulanırsa (4.10.1) eşitsizliğinin sol tarafı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{\eta(v, u)}{n} \sum_{k=1}^n X \left(\left(\frac{2t_{k-1} + \eta(t_k, t_{k-1})}{2} \right); \right) \leq \int_u^{u+\eta(v, u)} X(t;) dt.$$

Uyarı 4.10.1. Teorem 4.10.2’de $n = 1$ yazılırsa, preinveks stokastik süreçler için klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir.



BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde literatürde mevcut olan konveks, harmonik konveks, p -konveks, h -konveks, (p, h) -konveks, s -konveks, m -konveks, r -konveks, φ -konveks ve preinvex fonksiyon ve bu fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği kısaca sunulmuştur. Bu çalışmanın özgün kısmı olan araştırma bulgularında ise, yukarıda bahsi geçen konvekslik çeşitleri için stokastik süreçler verilmiştir. Ayrıca bu süreçler için genelleştirilmiş Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Euclid, The Thirteen Books of Elements III, (Trans: Thomas L. Heath), 2nd Ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1908. www.google.com., Erişim Tarihi: 05.10.2017.
- [2] Berggren, J.L., A lacuna in book i of archimedes sphere and cylinder. *Historia Mathematica*, 4, 1-5, 1977.
- [3] Hadamard, J., Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann. *J. Math Pures Appl.*, 58, 171-215, 1893.
- [4] Hardy, G.H., Littlewood, J.E., & Polya, G. *Inequalities* (2nd ed.). Cambridge U.P., Cambridge, 1877-1947, 1988.
- [5] Beckenbach, E.F., & Bellman R., *Inequalities*, Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, ([Hungarian Language Ignored]) 276 Seiten, Preis 1 r. 9 k, 1961.
- [6] Mitrinović, D. S., *Analytic Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin, 404, New York, 1970.
- [7] Pecaric, J., *Konveksne funkcije: nejednakosti*, Naucna knjiga, Beograd, 243, 1987.
- [8] Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. & Fink, A.M., *Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives*. Kluwer Academic Publishers, 587, Dordrecht/Boston/London, 1991.
- [9] Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. & Fink, A.M., *Classical and New Inequalities in Analysis*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1993.
- [10] Pachpatte, B.G., *Mathematical Inequalities*, Elsevier B.V., Amsterdam, The Netherlands, 2005.
- [11] Niculescu, C. & Persson, L.E., *Convex Functions and Their Applications, A Contemporary Approach*, Springer Science Business Media, Inc, 2006.
- [12] Dragomir, S.S. & Pearce, C.E.M., *Selected topics on Hermite-Hadamard inequality and applications*, Victoria University, Melbourne, 2000.

- [13] Josip E., Pecaric J.E, Proschan, F. & Thong, Y.L., Convex Functions, Parital Orderings, and Statistical Applications Mathematics in Science and Engineering Series, Academic Press, 1992.
- [14] Toader, G. Some generalizations of the convexity. Proceedings of the Colloquium on Approximation and Optimization Cluj-Napoca: University of Cluj-Napoca, 329-338, 1985.
- [15] İşcan, İ., Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions, Hacettepe Journal of Mathematics and statistics, 43(6), 935-942, 2014.
- [16] Okur, N., & Yalçın, F. B., Two-dimensional operator harmonically convex functions and related generalized inequalities. Turkish Journal of Science, 4(1), 30-28, 2019.
- [17] İşcan, İ., Hermite-Hadamard inequalities for p -convex functions. International Journal of Analysis and Applications, 11(2), 137-145, 2016.
- [18] Varošanec, S., On h -convexity. J. Math. Anal. Appl., 326(1), 303-311, 2007.
- [19] Fang, Z.B., & Shi, R., On the (p, h) -convex function and some integral inequalities. J. Inequal. Appl., 45, 16, 2014.
- [20] Hudzik, H., & Maligranda, L., Some remarks on s -convex functions. Aequ. Math., 48, 100-111, 1994.
- [21] Dragomir, S., On some new inequalities of Hermite-Hadamard type for m -convex functions. Tamkang Journal of Mathematics, 33(1), 45–55, 2002.
- [22] Ngoc, N.P.N, Vinh, N.V., & Hien, P.T.T. , Integral inequalities of Hadamard type for r -convex functions. International Mathematical Forum, 4(35), 1723-1728, 2009.
- [23] Antczak T., A new method of solving nonlinear mathematical programming problems involving r -invex functions. J. Math. Anal. Appl., 311, 313-323, 2005.
- [24] Youness E.A., E-convex sets, E-convex functions and E-convex programming. Journal of Optimization Theory and Applications, 102(2): 23, 439-450, 1999.

- [25] Cristescu, G., Hadamard Type Inequalities for φ -Convex Functions. Annals of the University of Oradea, Fascicle of Management and Technological Engineering, C-Rom Edition, III (XIII), 2004.
- [26] Set, E., Sarikaya, M.Z., & Akdemir, A.O., Hadamard type inequalities for φ -convex functions on the co-ordinates. Tbilisi Mathematical Journal, 7(2), 51-60, 2014.
- [27] Yalçın, F.B., On some generalized inequalities for two-dimensional φ -convex functions. Journal of Contemporary Applied Mathematics, 9(1), 88-102, 2019.
- [28] Mohan S.R., & Neogy, S.K., On invex sets and preinvex functions. J. Math. Anal. Appl., 189, 901-908, 1995.
- [29] Weir, T., & Mond, B., Preinvex functions in multiple bijective optimizations. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 136, 29-38, 1998.
- [30] Yang, X.M., & Li, D., On properties of preinvex functions. J. Math. Anal. Appl., 256, 229-241, 2001.
- [31] Noor, M.A., On Hadamard integral inequalities involving two log-preinvex functions. J. Inequal. Pure Appl. Math., 8(3), 1-6, 2007.
- [32] Mishra, S.K., & Giorgi, G., Invexity and Optimization. Vol. 88 of Nonconvex optimization and Its Applications, Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [33] Okur, N., Yalçın, F.B., & Karahan, V., Some Hermite Hadamard type integral inequalities for multidimensional preinvex functions. Turkish Journal of Equalities 3(1), 54-63, 2019.
- [34] Alomari M.W.: A generalization of Hermite–Hadamard’s inequality. Kragujevac J. Math., 41(2), 313-328 (2017)
- [35] Feller, W., On semi-Markov processes, Proceeding of National Academy of Sciences, USA, 51(4), 130-145, 1964.
- [36] Feller, W., An Introduction to Probability and Its Applications II, J. Willey, New York, 1971.
- [37] Levy, J.B., & Taqqu, M.S, On renewal processes having stable inter-renewal intervals and stable rewards. Ann. Sci. Math. Que., 11, 95-110, 1987.
- [38] Levy, J.B., & Taqqu, M.S, Renewal reward processes with heavy-tailed inter-renewal times and heavy-tailed rewards, Bernoulli 6(1), 23-44, 2000..

- [39] Skohorod, A.V., Random processes with independent increments, Nauka, Moskow, 1967.
- [40] Gihman, I.I. & Skorohod, AV., Theory of Stochastic Processes II, Springer-Verlag, New York, 1975.
- [41] Ross, S.M. Stochastic Processes, New York, John Wiley & Sons, 1996.
- [42] Ross, S.M., Introduction to Probability Models, Academic Press, New York, 1993.
- [43] Shiriyayev, A.N., Probability, Statistics, Random Processes I-II, Moscow State University Press, 1973-1974.
- [44] Smith, W.L., Asymptotic renewal theorems. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section A (Mathematical and Physical Sciences), 64: (1954) 9–48.
- [45] Smith, W. L., Renewal theorem and its ramifications, Journal Roy. Statist. Soc., 20 (1958) 243-302.
- [46] Smith, W. L., On the cumulants of renewal processes, Biometrika, 46, 1 (1959) 1-29.
- [47] Smith, W. L., Some peculiar semi- Markov processes, Proc. 5-Th. Berkelly Symp. Mathematical Statistic and Probability, 2, 2 (1965-1966) 255-263.
- [48] Spitzer, F., A combinatorial lemma and its applications to probability theory, Trans. Amer. Math. Soc., 82, (1956) 323-339.
- [49] Çınlar, E., Some joint distribution for Markov renewal processes, Australian Journal of Statistics, 10, 1 (1968).
- [50] Çınlar, E., Markov renewal theory, Advances in Applied Probability, 1 (1975) 123-187.
- [51] Çınlar, E., Introduction to stochastic processes, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
- [52] Takacs, L., Combinatorial methods in the theory of stochastic processes, 2nd ed, Huntington, New York, Robert E. Krieger Publishing Co. XI, 1977.
- [53] Khaniyev, T.A., Aliyev, R.T., Kucuk, Z., Okur Bekar, N., On the distributions of a renewal reward process and it's additive functional, Mathematical and Computational Applications, 13, 1, (2008) 41-50.

- [54] Khaniyev T.A., Küçük Z., Okur B., N., On the distributions of a renewal reward process and its additive functional, *Mathematical and Computational and Applications*, 13 (1), 41-50, 2008.
- [55] Aliyev, R., *Stokastik Süreçler Teorisi*, KTÜ Matbaası, Trabzon, 2010.
- [56] Aliyev R., Khaniyev T.A., Okur B., N., Weak convergence theorem for the ergodic distribution of the renewal-reward process with a gamma distributed interference of chance”, *Theory of Stochastic Processes*, 15 (31) 2, 42-53, 2009.
- [57] Okur B., N., *Üstel Müdahaleli Ödüllü Yenileme Sürecinin Analitik ve Asimptotik Yöntemlerle İncelenmesi*, Yüksel Lisans Tezi, KTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2006.
- [58] Okur B., N., *Ödüllü Yenileme Sürecinin Asimptotik Yöntemlerle İncelenmesi*, Doktora Tezi, KTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2012.
- [59] Okur B., N., Aliyev R.T., Khaniyev T., Asymptotic Expansions for a Renewal-reward Process with Weibull Distributed Interference of Chance, *Contemporary Analysis and Applied Mathematics*, 1(2), 200-2011, 2013.
- [60] Okur B., N., Aliyev R., Khaniyev T.A., Three-term asymptotic expansion for the moments of the ergodic distribution of a renewal-reward process with gamma distributed interference of chance. In: A. Ashyralyev, A. Lukashov (eds.), *First International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2012)*, AIP Conference Proceedings Book, 1470, p. 207-210, 2012.
- [61] Nikodem, K., On convex stochastic processes. *Aequat. Math.* 20, 184-197, 1980.
- [62] Skowronski, A., On some properties of J-convex stochastic processes. *Aequat. Math.*, 44, 249-258, 1992.
- [63] Kotrys, D., Hermite–Hadamard inequality for convex stochastic processes. *Aequationes Mathematicae*, 83, 143-151, 2012.
- [64] De la Cal, J., Carcamo, J., Multidimensional Hermite-Hadamard inequalities and the convex order, *J. Math. Anal. Appl.*, 324, 248-261, 2006.
- [65] Sarikaya, M.Z, Yaldiz H., & Budak H., Some integral inequalities for convex stochastic processes, *Acta Math Univ Comenianae*, LXXXV:155-164, 2016.
- [66] Tomar, M., Set, E., & Okur B., N., On Hermite-Hadamard type inequalities for strongly-log convex stochastic processes. *The Journal of Global Engineering Studies*, 1(2), 53-61, 2014.

- [67] Karahan, V., & Okur, N., Hermite-Hadamard type inequalities for convex stochastic processes on n-coordinates, Turkish Journal Mathematics and Computer Science, 10, 256-262, 2018.
- [68] Okur, N., İşcan, İ., & Yüksek Dizdar, E., Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex stochastic processes. International Journal of Economics and Administrative Studies, 11, 281-292, 2018.
- [69] Okur, N., İşcan, İ., & Usta, Y., Some integral inequalities for harmonically convex stochastic processes on the coordinates. Advanced Math. Models & Applications, 3(1), 63-75, 2018.
- [70] Okur, N., İşcan, İ., & Yüksek Dizdar, E., Hermite-Hadamard type inequalities for p-convex stochastic processes. An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications, 9(2), 148-153, 2019.
- [71] Barraez, D., Gonzalez, L., Merentes, N., & Moros, A.M., On h-convex stochastic process. Mathematica Aeterna, 5(4), 571-581, 2015.
- [72] Yüksek Dizdar, E., Bazı Konveks Stokastik Süreçler için Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler, Fen Bilimleri Enstitüsü, Giresun Üniversitesi, 2018.
- [73] Set E., Tomar M., & Maden S., Hermite-Hadamard type inequalities for s-convex stochastic processes in the second sense. Turkish Journal of Analysis and Number Theory, 2(6), 202-207, 2014.
- [74] Okur N., & Karahan, V., Some integral inequalities of the Hermite-Hadamard type for s-convex stochastic processes on n-coordinates, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1, 68(2), 1-16, 2019.
- [75] Hernández Hernández. J.E., & Gomez J.F., Hermite Hadamard type inequalities for stochastic processes whose second derivatives are (m, h_1, h_2) -convex using Riemann-Liouville fractional integral. Revista Matua, Universidad del Atl'antico,, 5(1), 13-28, 2018.
- [76] Ul-Haq, W. Rehman, N. & Al-Hussain, Z.A., Hermite-Hadamard type inequalities for r-convex positive stochastic processes. Journal of Taibah University for Science, 13:1, 87-90, 2019.
- [77] Bodur, B., Stokastik Süreçlerde Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler Ve φ -Konveks Fonksiyonlar, Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı, Afyon Kocatepe Üniversitesi, 2016.
- [78] Sarikaya, M.Z., Kiriş, M.E. & Çelik, N., Hermite-Hadamard type inequality for φ_h -convex stochastic processes. AIP Conference Proceedings, 1726(1), 020076, 2016.

- [79] Akdemir, G.H., Okur B., N. & İşcan, İ., On preinvexity for stochastic processes, statistics. Journal of the Turkish Statistical Association, 7(1), 15-22, 2014.
- [80] Okur, B., N., Akdemir, G.H. & İşcan, İ., Some Extensions of Preinvexity for Stochastic Processes. Comp. Analysis, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Springer, New York, 155, 259-270, 2016.



ÖZGEÇMİŞ

Ramazan USTA 1990 yılında Giresun’da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Giresun’da tamamladı. 2008 yılında Giresun Lisesinden mezun oldu. 2009 yılında başladığı Aydın Adnan Menderes Üniversitesi Matematik Bölümünden 2013 yılında mezun oldu. 2010–2011 yılında formasyon aldı. 2015 yılında Giresun Üniversitesi Matematik Anabilim dalında yüksek lisans eğitimine başladı. Aktif çalışma hayatı var.

