

**T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BAZI KONVEKS STOKASTİK SÜREÇLER İÇİN
KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Adı SOYADI : Nazan OCAK

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 13/08/2021

Enstitü Anabilim Dalı : Matematik

Tez Danışmanı : Nurgül OKUR

**Temmuz 2021
GİRESUN**

T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BAZI KONVEKS STOKASTİK SÜREÇLER İÇİN
KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nazan OCAK

Enstitü Anabilim Dalı

:

Matematik

Bu tez .././20.. tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

**Prof. Dr.
Selahattin MADEN
Jüri Başkanı**

**Doç. Dr.
Nurgül OKUR
Üye**

**Prof. Dr.
İmdat İŞCAN
Üye**

**Doç. Dr.
Bahadır KOZ
Enstitü Müdürü**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Nazan OCAK

28/07/2021

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum bu çalışma Giresun Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Yüksek lisans eğitimim boyunca beni sabırla dinleyen ve her türlü bilgiye ulaşmada bana yardımcı olan, yol gösteren, kıymetli hocam Doç. Dr. Nurgül OKUR'a sonsuz teşekkür ediyorum.

Bugünlere gelmemde önemli yeri olan sevgili aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	I
İÇİNDEKİLER	II
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	IV
ŞEKİLLER LİSTESİ	V
ÖZET	VI
SUMMARY	VII

BÖLÜM 1. GİRİŞ.....	1
---------------------	---

BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	16
-----------------------------------	----

2.1. Stokastik Süreçler İle İlgili Temel Kavramlar.....	16
---	----

2.2. Kesirli Analiz İle İlgili Temel Kavramlar.....	18
---	----

BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM	28
-----------------------------------	----

3.1. Materyal ve Yöntem.....	28
------------------------------	----

BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI	31
------------------------------------	----

4.1. Bir Stokastik Sürecin Kuadratik Orta Anlamda Kesirli İntegrali ve Türevi...	31
--	----

4.2. Konveks Stokastik Süreçler İçin Hermite-Hadamard Tipli Kesirli İntegral Eşitsizliği.....	35
---	----

4.3 Preinveks Stokastik Süreçler İçin Hermite-Hadamard Tipli Kesirliİntegral Eşitsizliği.....	39
---	----

4.4. φ -Konveks Stokastik Süreçler için Hermite-Hadamard Tipli Kesirli İntegral Eşitsizliği.....	44
--	----

4.5. Harmonik Konveks Stokastik Süreçler için Hermite-Hadamard Tipli Kesirli İntegral Eşitsizliği.....	48
--	----

4.6. p -Konveks Stokastik Süreçler için Kesirli Hermite-Hadamard Tipli Kesirli İntegral Eşitsizliği.....	53
--	----

4.7 İkinci anlamda s -Konveks Stokastik Süreçler için Hermite-Hadamard Tipli Kesirli İntegral Eşitsizliği.....	58
BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ	60
KAYNAKLAR	61
ÖZGEÇMİŞ	65



SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

f^m	: m . mertebeden türev
I	: $\mathbb{R}$ 'de Bir Aralık
I^α	: α . mertebeden Kesirli İntegral
D^α	: α . mertebeden Kesirli Türev
${}_aD_qf$	: f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden q -Türevi
β	: Beta Fonksiyonu
Γ	: Gamma Fonksiyonu
RL	: Riemann-Liouville Kesirli Türev
P	: Olasılık Fonksiyonu
$E(X), m_x$	: X Rastgele Değişkeninin Beklenen Değer
$Var(X)$	: X Rastgele Değişkeninin Varyansı
$l. i. m.$	: Ortalama Anlamda Limit
$\mathfrak{S}$	: X 'in Alt Kümeleri Üzerinde İnşa Edilen Sigma Cebir
$\mathbb{R}_+$	: Pozitif Reel Sayılar
a.e	: Hemen Hemen Her Yerde

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1.	10
Şekil 1.2.	10
Şekil 1.3.	12
Şekil 1.4.	13
Şekil 1.5.	14
Şekil 1.6.	14



BAZI KONVEKS STOKASTİK SÜREÇLER İÇİN KESİRLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

ÖZET

Bu tezin amacı, bazı konveks stokastik süreçler için kesirli integral eşitsizlikleri elde etmektir. Bu tezin giriş bölümünde, kısaca konvekslik ve kesirli analiz ile ilgili bilgilere yer verilmiştir. İkinci bölümde, tezin konusu ile ilgili temel kavramlar sunulmuştur. Materyal ve yöntem kısmında ise stokastik süreçler için kuadratik orta anlamda yakınsama, süreklilik, türevlenebilme ve integrallenebilme kavramları verilmiştir. Araştırma bulguları bölümünde ise stokastik süreçler için kuadratik orta anlamda kesirli türevlenebilme, kesirli integrallenebilme kavramları tanımlanmış ve konveks, preinveks, harmonik konveks, p -konveks, ikinci anlamda s -konveks stokastik süreçlerin her birisine ait ayrı ayrı Hermite-Hadamard tipli kesirli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir.

Anahtar kelimeler: Konveks, Preinveks, Harmonik Konveks, p -Konveks, İkinci anlamda s -konveks, Stokastik Süreçler, Hermite-Hadamard Eşitsizliği, Kuadratik Orta Anlamda İntegral.

FRACTIONAL INTEGRAL INEQUALITIES FOR SOME CONVEX STOCHASTIC PROCESSES

SUMMARY

The aim of this study is to obtain fractional integrable inequalities for these stochastic processes. In the introduction part of this thesis, information about convexity and fractional analysis is given briefly. In the second part, the basic concepts related to the subject of the thesis are presented. In the material and method part, the concepts of quadratic convergence, continuity, differentiability and integrability are given for stochastic processes. In the research findings section, the concepts of quadratic intermediate fractional differentiation and fractional integrability were defined for stochastic processes and Hermite-Hadamard type fractional integral inequalities were obtained for each of the convex, preinvex, harmonic convex, p -convex, and second meaning s -convex stochastic processes.

Keywords: Convex, Preinvex, Harmonically Convex, p -Convex, s -Convex in the Second Sense, s -Convex, Stochastic Processes, Hermite-Hadamard Inequality, Mean-square Integrable.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Konveksliğin ilk temelleri Yunan filozoflar tarafından atılmıştır. Yunanlıların matematiğe en önemli katkılarından biri de Euclid'in [1] "Elements" adlı kitabıdır. Konveksliğin ilk tanım ve gösterimleri bu kitapta bulunmaktadır. Bu konudaki daha kesin bir tanımı ise Archimedes'in [2] "On The Sphere and Cylinder" adlı eserinde de bulmak mümkündür.

Eşitsizlik teorisi Gauss, Cauchy ve Chebyshev ile gelişmeye başlamıştır. Eşitsizlik teorisiyle yakından ilişkili olan konvekslik kavramı göz önünde bulundurularak birçok çalışma yapılmıştır. Bunun en önemli örneklerinden biri Ekim 1881 yılında Hermite'in (1822-1901) Journal Mathesis adlı dergiye gönderdiği konveks fonksiyon için Hermite-Hadamard eşitsizliğidir. $[a, b]$ aralığında tanımlı her reel konveks fonksiyon için meşhur Hermite-Hadamard eşitsizliği aşağıdaki gibidir [3]:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

19. ve 20. yüzyılda bulunan eşitsizliklerin bir kısmı konveks fonksiyonlarla ilişkilendirilerek temel eşitsizlikler haline gelmiştir. Bu tür eşitsizlikleri konu alan ilk temel çalışma 1934'te Hardy, Littlewood ve Pólya [4] tarafından yazılan "Inequalities" adlı kitaptır. İkinci çalışma ise Beckenbach ve Bellman [5] tarafından 1961'de yazılan, 1934-1960 yılları arasında elde edilen yeni eşitsizliklerin sonuçlarını içeren, "Inequalities" adlı eserdir. Bunu Mitrinović'in [6] 1970 yılında yayınladığı ve ilk iki kitapta bulunmayan farklı konulara da yer verdiği "Analytic Inequalities" isimli kitabı takip eder. Konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler içeren ilk kaynak ise "Convex Functions: Inequalities" başlığıyla 1987 yılında Pečarić [7] tarafından yazılmıştır. Bu temel kaynakların yanı sıra Mitrinović [8,9] "Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives" ve "Classical and New Inequalities in Analysis", Pachpatte [10] "Mathematical Inequalities" ve Niculescu and Perssons [11] "Convex Functions and Their Applications" literatürde mevcut olan diğer kaynaklardır.

Hermite-Hadamard eşitsizlikleri konusu Dragomir ve Pearce [12] tarafından yazılan "Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications" adlı eserde detaylı olarak yer almaktadır.

Son yıllarda, konvekslik ve eşitsizlik kavramları, optimizasyon ve matematiksel programlama problemlerinin incelenmesinde daha geniş bir çalışma imkanı sağladığı için, Olasılık ve İstatistik Teorisi dahil olmak üzere birçok uygulama sahasında literatürde önemli bir yere sahip olmuştur. Bilhassa, stokastik süreçler için stokastik monotonluk ve konveksliği tanımlamak optimizasyonda özellikle optimal tasarımlarda, olasılıksal nicelikler mevcut olduğunda sayısal yaklaşımlar elde edebilmek için büyük önem taşımaktadır.

1980’de Nikodem [13], konveks stokastik süreçleri tanımlamış ve konveks stokastik süreçler için bilinen bazı özellikleri vermiştir. Jensen-konveks, λ -konveks stokastik süreçler 1992’de Skowronski [14] tarafından tanımlanmıştır. Ayrıca, Kotrys’in [15], her reel konveks X stokastik süreci için elde ettiği Hermite-Hadamard eşitsizliği aşağıdaki gibidir:

$$X\left(\frac{u+v}{2}, \cdot\right) \leq \frac{1}{v-u} \int_u^v X(t, \cdot) dt \leq \frac{X(u, \cdot) + X(v, \cdot)}{2}.$$

Ayrıca, Okur ve ark. [16-21] Sarıkaya ve ark. [16,22,23], Set ve ark. [24] farklı konveks stokastik süreçlere ait sınıflar için bazı eşitsizlikleri genişletmeye ve genelleştirmeye çalışmıştır.

Kesirli analizin doğuşundan kısaca bahsedelim[25]. L’Hospital, Leibniz’e 30 Eylül 1965’te yazdığı bir mektuptaki n –inci dereceden türevi için kullandığı $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ notasyonunda $n = 1/2$ için sonucun ne olacağını sorar. Leibniz’in cevabı “ileride bir gün çok güzel sonuçlara yol açacak ancak şimdilik bir paradoks” olmuştur. Bu sözler kesirli analizin doğuşu olmuştur.



Şekil 1.1. (G. Leibniz 1646-1716) (L'Hospital 1661- 1704)

n 'nin hangi tür sayı olduğu düşünülmüştür.



Şekil 1.2. (P.S. Laplace 1749-1827)

1812'de, P.S. Laplace keyfi mertebeden bir kesirli türev almıştır ve bu Lacroix'in (1812) eserlerinde yer almıştır. Tamsayıli mertebe durumunu genişletmiştir. m bir tam sayı olmak üzere $y = x^m$ ile Lacroix, n –inci türevi kolaylıkla elde etmiştir:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \quad m \geq n.$$

Faktoriyel (tam Gamma fonksyonu) için Legendre'nin sembolünü kullanan Lacroix, şu sonucu elde etmiştir:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}$$

Daha sonra $y = x$ ve $n = 1/2$ için şu örneği vermiştir:

$$\frac{d^{1/2} y}{dx^{1/2}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}.$$

Lacroix'in kesirli türev tanımındaki adımlar Riemann-Liouville tanımı ile aynı şekilde verilmiştir. Lacroix 'in bu ifadesi Euler'in formülü (1730) olarak da bilinir.

Kesirli analiz, tamsayı mertebeli analizin bir genellemesidir: n bir tam sayı olsun ve x 'i n kez kendisiyle çarptığımızı düşünelim. Sonuç olarak x^n elde edilir. n bir tam sayı olmasa da bir sonucumuz var, ancak gözümüzde canlandırmakta zorlanıyoruz.

Tıpkı tam sayıların aralarında reel sayılar mevcut olduğu gibi tam mertebeden türevlerin ve n –katlı integrallerin arasında da kesirli diferansiyeller vardır. Sayı doğrusunda aşağıdaki genelleştirmeleri kullanarak tam sayılardan reel sayılara geçebiliriz.

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \dots x}_{n \text{ tane}}$$

n tamsayıdır.

$$x^n = e^{n \ln(x)}$$

n reel sayıdır.

$$n! = 1.2.3 \dots (n-1).n$$

n tamsayıdır.

$$n! = \Gamma(n+1)$$

n reel sayıdır.

$\Gamma(x)$, Gamma fonksiyonudur.

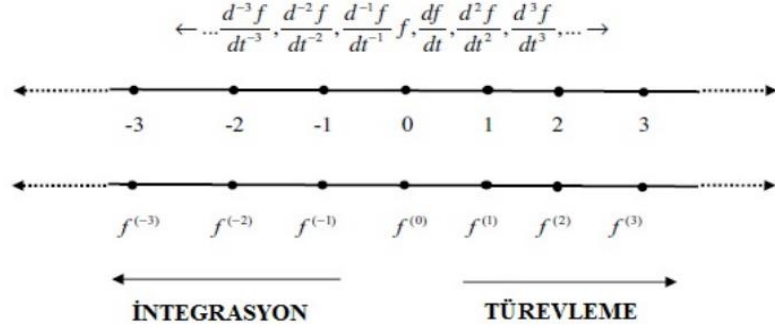
$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \text{ dir.}$$

Üstteki genelleme ile tamsayılardan tamsayı olmayan sayılara geçiş, sayı doğrusunu genel hale getirir. Aşağıdaki Şekil 1.3 sayı doğrusunu ve herhangi bir diferansiyeli hesaplamak için nasıl genişletildiğini göstermektedir. Negatif taraf integrasyonu gösterirken pozitif taraf diferansiyellemeyi gösterir.

$$f, \frac{df}{dt}, \frac{d^2f}{dt^2}, \frac{d^3f}{dt^3}, \dots \rightarrow$$

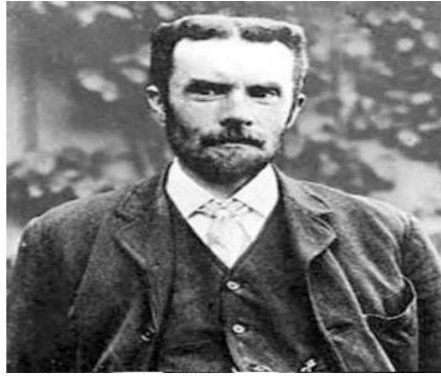
$$\leftarrow \dots, \int dt \int dt \int f dt, \int dt \int f dt, \int f dt, f$$

Aynı şeyi sayı doğrusunda gösterildiği gibi differintegral notasyonda yazarsak şunu elde ederiz:



Şekil 1.3. Sayı doğrusu ve kesirli hesabın differintegrallere benzer interpolasyonu

Heaviside (1871) tam türev alma ve integrasyon ile kesirli operatörler arasında bir matematik evreni olduğunu, kesirli operatörlerin kendilerin bazen ileri doğru ittiğini ve diğerleri kadar gerçek olduğunu ifade etmiştir. Kesirli analiz keyfi mertebeden integrasyonların ve türev almaların bir teorisidir. Tam sayılı mertebeden türev almayı **ve n** –katlı integrasyonu birleştirir ve genelleştirir.



Şekil 1.4. (O. Heaviside 1850 – 1925)

Riemann-Liouville sağ kesirli türevi ise aşağıdaki gibidir:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad n-1 \leq \alpha < n.$$

Burada n bir tam sayı ve α bir reel sayıdır. Bu ileri doğru (sağ taraflı) bir türevdir. Riemann-Liouville kesirli integrasyonunu ise şu şekilde kısaca açıklamak mümkündür: n bir tam sayı ve α bir reel sayısı için tekrarlayan $n - \alpha$ katlı integrasyon faktoriyel ifadesi için Gamma fonksiyonu yardımıyla,

$$D^{-n}f(t) = I^n f(t) = f_n(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau$$

$$D^{-\alpha}f(t) = I^\alpha f(t) = f_\alpha(t) = \frac{1}{(\alpha-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

şeklinde ifade edilir. Burada

$$\Phi_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

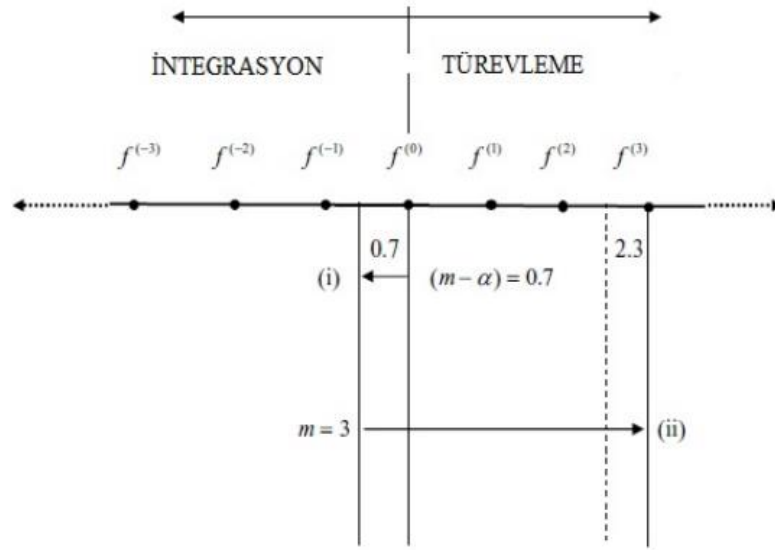
kuvvet fonksiyonu tanımlanarak f ile bu kuvvet fonksiyonunun konvolüsyonunu,

$$D^{-\alpha}f(t) = \Phi_\alpha(t) * f(t) = \int_0^t \Phi_\alpha(t)f(t-\tau)d\tau$$

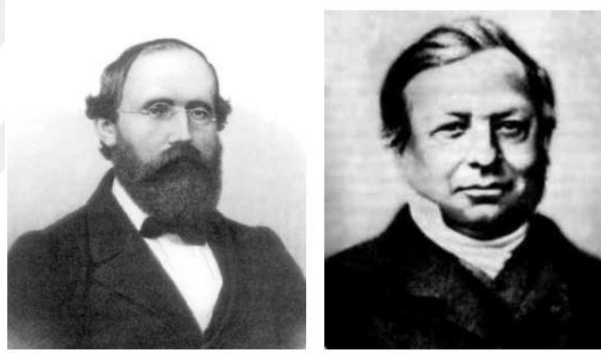
şeklinde tanımlarız. Kesirli integral kuvvet fonksiyonu ile $f(t)$ fonksiyonunun konvolüsyonu olarak aşağıdaki gibi temsil eder:

$${}_a D_t^{-\alpha} f(t) = \left(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) * f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

İntegralin alt sınır olan $\alpha = 0$ Riemann sisteminde ilgili konvolüsyon tanımı ‘Laplace Konvolüsyon’dur.



Şekil 1.5. Kesirli integralin sol tarafında 2.3 mertebeden kesirli türevleme



Şekil 1.6. B. Riemann (1826-1866) ve J. Liouville (1809-1882)

Kesirli mertebeden sistemleri veya kesirli türevleri ve integralları içeren sistemler pek çok fen ve mühendislik alanlarında çalışılmıştır. Bunlar ve özel ilgi alanları; Heaviside 1922, Bush 1929, Goldman 1949, Holbrook 1996, Starkey 1954, Carslaw ve Jeager 1948, Scott 1955 v Mikuniski 1959, Oldham ve Spanier 1974, Miller ve Ross 1993 yıllarında konuyla bağlantılı oldukça önemli tartışmalar ortaya koymuşlardır. Elektrik mühendislerinin uzun elektrik devreleri (Heaviside 1922), elektrokimyasal süreç (Ichise, Nagayanagi ve Kojima 1971; Sun, Onaral ve Tsao 1984) dielektrik polarizasyonu (Sun, Abdelwehab ve Onaral 1984) renkli gürültü (Manderbolt 1967), viskoelastik malzemeler (Bagley ve Calico 1991; Koeller 1986; Skaar, Michel ve Miller 1988) ve kaoslar (Hartley, Lorenzo and Qammar 1995), elektromanyetik kesirli

kutuplar (Engheta 1999) bunlardan bazılarıdır. Son üç yüz yılda uygulamalı teori de kesirli hesabın gelişimi boyunca N. Ya. Sonnin (1869), A.V. Letnikov (1872), H. Laurent (1884), N. Nekrasov (1888), K.Nishimoto (1987), Kolwankar and Gangal (1994), Oustaloup (1994), L.Debnath (1992), Igor Podlubny (2003), Carl Lorenzo (1998), Tom Hartley (1998), R.K. Saxena (2002), Mariandi (1991), R.K. Bera and S. Saha Ray (2005) ve daha birçok bilim insanının kayda değer katkıları olmuştur.

Günümüzde, literatürde kesirli türevler ve integraller kullanılarak yapılmış birçok çalışma mevcut olup Z. Dahmani[26], S.S. Dragomir[27], M.Z. Sarıkaya'in [28] , Miller ve Ross [29], Katugampola[30,31] gibi önemli isimler bu konulara katkıları olmuştur.

BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

2.1. Stokastik Süreçler İle İlgili Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. $\mathfrak{F}$, $\Omega \neq \emptyset$ örnek uzayı üzerinde tanımlanmış bir σ -cebiri olmak üzere, $P: \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahip ise, P fonksiyonuna $\mathfrak{F}$ üzerinde bir “olasılık ölçüsü” denir. $P(A)$ ’ya ise, “ A olayının olasılık ölçüsü” veya “ A olayının olasılığı” denir [32]:

- 1) $\forall A \in \mathfrak{F}$ için $P(A) \geq 0$,
- 2) $P(\Omega) = 1$,
- 3) İkişer ikişer ayrık kümelerin oluşturduğu $\forall (A_n) \in \mathfrak{F}$ olaylar dizisi için aşağıdaki eşitlik doğrudur:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Tanım 2.1.2. $\Omega \neq \emptyset$ bir örnek uzay, Ω ’da tanımlanmış bir σ -cebiri ve P , $\mathfrak{F}$ üzerinde tanımlanmış bir olasılık ölçüsü olmak üzere, $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ üçlüsüne bir “olasılık uzayı” denir [32].

Tanım 2.1.3. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ bir olasılık uzayı ve $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x \in \mathbb{R}$ sayısı için $\{\omega: \xi(\omega) \leq x\} \in \mathfrak{F}$ yani $\mathfrak{F}$ -ölçülebilir ise, ξ fonksiyonuna bir “rastgele değişken” denir [32].

Tanım 2.1.4. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ bir olasılık uzayı ve $\emptyset \neq T \subseteq \mathbb{R}$ bir küme olsun. Reel değerli $X(t, \omega)$ fonksiyonu, her $t \in T$ için Ω kümesinde tanımlanmış bir rastgele değişken ise, bu fonksiyona bir “rastgele fonksiyon” denir. $X(t, \omega)$, $Y(t, \omega)$ sembolleri ile gösterilebilir. Eğer burada $T = \mathbb{R}^+$ ise ve t parametresi zamanı ifade ediyorsa, bu durumda $X(t, \omega)$ rastgele fonksiyonuna bir “stokastik süreç” denir[32].

Tanım 2.1.5. $X(t, \omega)$ bir stokastik süreç, $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ olsun. Bu durumda

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P\{\omega: X(t_1, \omega) \leq x_1, \dots, X(t_n, \omega) \leq x_n\}, x_i \in \mathbb{R}$$

funksiyonuna “ $X(t, \omega)$ stokastik sürecinin n boyutlu dağılım fonksiyonu” denir. Her $t_1, t_2, \dots, t_n$ için n boyutlu $F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$ fonksiyonlarının $\{F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)\}$,

$n \geq 1$ ailesine “stokastik sürecin sonlu boyutlu dağılım fonksiyonları” denir ve bu fonksiyon aşağıdaki özelliklere sahiptir [32]:

- (1) $F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \infty)$,
- (2) $F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_n}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$.

Teorem 2.1.1. $\{F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)\}$, $t_i \in T$, $t_1 < \dots < t_n$, $n \geq 1$ ailesi, yukarıdaki 1. ve 2. özelliklerine sahip olsun. Bu durumda aşağıdaki gibi yazılır:

$$P\{\omega: X(t_1, \omega) \leq x_1, \dots, X(t_n, \omega) \leq x_n\} = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$$

Bu teoreme göre, stokastik süreç ile onun sonlu boyutlu dağılımları birbirlerini birebir tanımlamaktadır. T ve D kümesinin her biri hem kesikli hem de sürekli olabilir [32].

Tanım 2.1.6. $T \subseteq \mathbb{N}$ ise $X(t, \omega)$ 'e kesikli zamanlı stokastik süreç, T aralık ise $X(t, \omega)$ 'e sürekli zamanlı stokastik süreç denir. Eğer $X(t, \omega)$ stokastik sürecinin D durum (değerler) kümesi kesikli ise bu takdirde sürecin sonlu boyutlu dağılımları

$$P_{t_1, \dots, t_n}(k_1, \dots, k_n) = P\{\omega: X_{t_1}(\omega) = k_1, \dots, X_{t_n}(\omega) = k_n\}, t_n \in T, n = 1, 2, \dots,$$

olasılıkları ile tanımlanmaktadır[32].

Eğer $X(t, \omega)$ stokastik sürecinin D durum kümesi sayılamayan sonsuz elemana sahip ise bu takdirde stokastik sürecin sonlu boyutlu dağılım fonksiyonu:

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} P_{t_1, \dots, t_n}(u_1, \dots, u_n) du_1 \dots du_n$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada $P_{t_1, \dots, t_n}(u_1, \dots, u_n)$, sürecin n boyutlu olasılık yoğunluk fonksiyonudur [32].

Tanım 2.1.7. $X(t, \omega)$ bir stokastik süreç, $F_t(x)$ bu stokastik sürecin bir boyutlu dağılım fonksiyonu olsun. Eğer her t için

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| dF_t(x) < +\infty \text{ ise } E(X(t, \omega)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_t(x)$$

integraline “ $X(t, \omega)$ stokastik sürecinin beklenen değeri” denir. Stokastik sürecinin beklenen değeri $m_X(t)$ sembolü ile de gösterilmektedir [32].

2.2. Kesirli Analiz İle İlgili Temel Kavramlar

Türev, bir fonksiyonda bağımlı bir değişkenin (y) bağımsız değişkenine (x) göre ani bir andaki değişme nispetidir. Türev hesaplama metodu, 1666 yılında Newton tarafından geliştirilip türev hesabı için kullanılan $(d^n y)/(dx^n)$ ifadesi ise ilk kez

Leibniz tarafından kullanılmıştır. Bir fonksiyonun birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü gibi tamsayı mertebeden türevlerinin nasıl alındığı biliniyorken kesir mertebeden türevi alınması sonraları bilinmiştir[33].

Riemann, Grünwald, Letkinov, Liouville, Caputo, Euler, Abel, Fourier, Kobel, Erdelyi, Hadamard, Riesz ve Laplace kesirli türeve katkı sağlayan başlıca matematikçilerdir.

Kesirli türev; elektrokimya, biyoloji, biyomühendislik, biyofizik, fizik, mekanik-mekatronik gibi mühendisliğin ve matematiğin birçok alanında uygulanmaktadır. Bu alanlardaki problemleri çözmek için yararlı olmaktadır.

Kesirli türev, 300 yıldan fazla süredir, matematiğin ilgi çekici konularından biri olmuştur ve bu ilgi her geçen gün artmaktadır. Bilim adamları bu konuyla ilgili çalışmalarda bulunmuşlardır. Bu nedenle, farklı kesirli türev tanımları mevcuttur[33].

Tamsayı mertebeden türevlerin, çeşitli fen alanlarında uygulanan problemler çözmek için kullanımlarını önemli ölçüde basitleştiren fiziksel ve geometrik yorumlara sahip oldukları bilinmektedir. Ancak, 300 yıldan fazla süredir, hem teoride hem de gerçek dünya sorunlarına uygulamalarda hızla büyüyen bir alanı temsil eden kesirli mertebeden türevin kabul edilebilir geometrik ve fiziksel yorumu yoktu[33].

Podlubny 2002’de sol taraflı ve sağ taraflı Riemann-Liouville kesirli integralleri için kesirli integral ve türevin geometrik ve fiziksel yorumlama problemini önermiştir[34].

Bununla birlikte, Tavossali 2013 yılında yapış olduğu çalışmasında [35], bir polinomun grafiğindeki teğet doğrusunun özellikleri için yeni bir geometrik yorumu, bir üçgenin alanı olarak tanımlamakta ve daha sonra bu alan arasındaki ilişki bir türev mertebesine göre incelenmektedir. Sonuç olarak, kesirli mertebeden türevin özel bir noktadaki teğet doğrusu ile bu noktadan geçen dik doğruyla ve yukarıdan x eksenine çevrelenen üçgenin alanındaki değişimini verdiği belirtilmektedir. Alandaki değişim fiziksel bir özellik olduğundan kesirli türevlerin; ısıda, basınçta, gradiyet, diverjans vs. gibi miktardaki değişimi ölçmek için kullanıldığını belirtmektedir. Kesirli türevin geometrik yorumuyla ilgili açıkçası, tamsayı mertebeden türevlere göre karşılaştırılabilecek geometrik ve fiziki yorumlama eksikliği hala vardır.

Tanım 2.2.1. (Gamma Fonksiyonu)

Gamma fonksiyonu, pozitif n reel sayı değerleri için aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx.$$

Pozitif n reel sayı değerleri için aşağıdaki özellikler mevcuttur:

$$\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n),$$

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n + 1)}{n}.$$

Pozitif n reel sayı değerleri için aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$\Gamma(n) = (n - 1)!.$$

Tanım 2.2.2 (Euler Kesirli Türev)

Euler (2.2.1)'deki formülü, Gamma fonksiyonun (2.2.2) özelliğini kullanarak (2.2.3)'deki gibi genelleştirmiştir.

$$\frac{d^n x^k}{dx^n} = k.(k-1) \dots (k-n+1)x^{(k-n)}, \quad (2.2.1)$$

$$\Gamma(k+1) = k.(k-1) \dots (k-n+1)\Gamma(k-n+1), \quad (2.2.2)$$

$$\frac{d^n x^k}{dx^n} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-n+1)} x^{(k-n)}. \quad (2.2.3)$$

Buradaki gamma fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Tanım 2.2.3 (Riemann- Liouville Kesirli Türev)

Kesirli türev tanımları arasında oldukça popülerdir ve $n-1 \leq \alpha < n$ için aşağıda belirtildiği gibidir:

$${}^{RL}_0 D_t^\alpha = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n$$

Riemann- Liouville kesirli türevi sıkça kullanılan bu tanım Cauchy formülünden yararlanılarak elde edilmiştir. İlk olarak; F, f' nin tersi olsun ve aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad (2.2.4)$$

(2.2.4)'deki ifadenin her iki tarafının a 'dan x 'e kadar integrali alınırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\int_a^x f(t) dt = F(t)|_a^x,$$

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

(2.2.4)'deki ifadenin her iki tarafının x 'e göre türevi alınırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = \frac{dF(x)}{dx}. \quad (2.2.5)$$

$$I = \int_{U(x)}^{V(x)} f(t)dt, \quad (2.2.6)$$

(2.2.6)'daki integrali ele alalım. (2.2.6) denkleminde I fonksiyonu $V(x)$ ve $U(x)$ 'e bağlıdır. (2.2.6) denkleminin kısmi türevi ise aşağıdaki gibidir:

$$\frac{dI}{dx} = \frac{\partial I}{\partial V(x)} \frac{\partial V(x)}{\partial x} + \frac{\partial I}{\partial U(x)} \frac{\partial U(x)}{\partial x}$$

Bu ifade (2.2.5) denkleminde yerine yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{U(x)}^{V(x)} f(t)dt &= \frac{\partial}{\partial V(x)} \int_{U(x)}^{V(x)} f(t)dt \frac{\partial V(x)}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial}{\partial U(x)} \int_{U(x)}^{V(x)} f(t)dt \frac{\partial U(x)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

(2.2.7) eşitliğinin sağ tarafı, (2.2.5) özdeşliği dikkate alınarak düzenleme yapılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir. Bu eşitlikteki '-' işareti (2.2.7) denkleminin sağ tarındaki son integral teriminin sınırlarının yer değiştirilmesiyle elde edilmiştir.

$$\frac{d}{dx} \int_{U(x)}^{V(x)} f(t)dt = f(V) \frac{dV}{dx} - f(U) \frac{dU}{dx}. \quad (2.2.8)$$

a, b sabit sayılar olmak üzere, integral alma işleminin aşağıdaki (2.2.9) özelliğinden yararlanarak (2.2.10) integrali için $I = (x, V(x), U(x))$ olduğuna göre (2.2.7) ve

(2.2.8) denklemlerinin daha kapalı şekli (2.2.3.11) şeklini alır ve bu ifade Leibniz kuralı olarak isimlendirilir.

$$\frac{d}{dx} \int_a^b f(x, t) dt = \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt, \quad (2.2.9)$$

$$I = \int_{U(x)}^{V(x)} f(x, t) dt, \quad (2.2.10)$$

$$\frac{d}{dx} \int_{U(x)}^{V(x)} f(x, t) dt = f(x, V) \frac{dV}{dx} - f(x, U) \frac{dU}{dx} + \int_{U(x)}^{V(x)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt. \quad (2.2.11)$$

$n > 0$ olmak üzere bir tam sayı , a sabit sayılar olmak üzere aşağıdaki integral verilmiş olsun.

$$I_n(x) = \int_a^x (x - t)^{n-1} f(t) dt.$$

Bu integralin Leibniz'in (2.2.11) denklemi kullanılacak olursa burada

$F(x, t) = (x - t)^{n-1} f(t)$ olduğu görülmektedir, $I_n(x)$ türevi için aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\frac{dI_n(x)}{dx} = (n - 1) \int_a^x (x - t)^{n-2} f(t) dt + [(x - t)^{n-1} f(t)]_{t=x}. \quad (2.2.12)$$

(2.2.12) eşitliğinin sağındaki ikinci ifadenin $n > 1$ için sıfıra gittiği açıktır ve bu nedenle $n > 1$ için (2.2.13) ve $n = 1$ değeri için ise (2.2.14) eşitlikleri elde edilir.

$$\frac{dI_n(x)}{dx} = (n - 1) I_{n-1}(x) \quad (2.2.13)$$

$$\frac{dI_1(x)}{dx} = f(x) \quad (2.2.14)$$

(2.2.12) denkleminin k defa türevi alınırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\frac{d^k I_n}{dx^k} = (n-1)(n-2) \dots (n-k) I_{n-k}$$

$k = n-1$ değeri için daha kullanışlı olarak aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\frac{d^{n-1} I_n}{dx^{n-1}} = (n-1)! I_1(x) \quad (2.2.15)$$

(2.2.14) ifadesi göz önüne alınırsa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\frac{d^n I_n}{dx^n} = (n-1)! f(x) \quad (2.2.16)$$

Burada, $n > 1$ değerleri için (2.2.15) ve (2.2.16) denklemleri kullanarak aşağıdaki ifade elde edilir:

$$I_1(x) = \int_a^x f(x_1) dx_1$$

$$I_2(x) = \int_a^x I_1(x_1) dx_2 = \int_a^x \int_a^{x_2} f(x_1) dx_1 dx_2$$

...

...

$$I_n(x) = (n-1)! \int_a^x \int_a^{x_n} \dots \int_a^{x_3} \int_a^{x_2} f(x_1) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

$$\int_a^x \int_a^{x_n} \dots \int_a^{x_3} \int_a^{x_2} f(x_1) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \quad (2.2.17)$$

Cauchy integrali olarak bilinen (2.2.17) denkleminin sağ tarafı bir operatör ile temsil edilirse ve n yerine her değeri alabilen bir α değeri yazılırsa, bu durumda ifade aşağıdaki ifadeye dönüşür:

$$\frac{d^\alpha f}{d(x-a)^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha-1} f(t) dt; \quad \alpha < 0$$

Yukarıdaki ifade Riemann-Liouville kesirli integrali olarak isimlendirilir. Basit bir matematiksel işlem $n > \alpha$ olmak şartıyla negatif olmayan α değerleri için aşağıdaki gibidir:

$$\frac{d^\alpha f}{d(x-a)^\alpha} = \frac{d^n}{dx^n} \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-(\alpha-n)-1} f(t) dt \right]$$

Burada $x = t$ ve integral içindeki t değeri yerine $t = \tau$ değişken dönüşümü yapılır ve düzenlenirse aşağıdaki denklem elde edilir ve bu denklem ise Riemann-Liouville kesirli türevi olarak isimlendirilir:

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}$$

Tanım 2.2.4 (Kesirli Türevler için Leibniz Kuralı)

İki fonksiyonun çarpımının türev değerini bulmak için kolaylık sağlayan Leibniz kuralı, özellikle kesirli türevi bilinen bir fonksiyon ile bir polinomun çarpımının kesirli türevini hesaplamak için çok kullanışlıdır. Eğer $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonlarının türevleri $[a, t]$ aralığında süreklirse Leibniz kuralı eşitlik (2.2.18) ile ifade edilir. [34,36]

$$D^\alpha (g(t)f(t)) = \sum_0^\infty g^k(t) D^{\alpha-k} f(t) \quad (2.2.18)$$

Tanım 2.2.5 (Birleşik Fonksiyonların Kesirli Türevleri)

Birleşik fonksiyonların kesirli mertebeden türevleri için kullanılan bağlantı, çarpım halindeki fonksiyonların kesirli mertebeden türevlerini almak için geliştirilmiş olan Leibniz kuralının bir sonucu olarak elde edilir. Burada $g(t)$ fonksiyonu,

$$g(t) = F(h(t))$$

şeklinde diferansiyellenebilir $h(t)$ fonksiyonu cinsinden verilen bir bileşik fonksiyon ise $g(t)$ fonksiyonunun α kesirli mertebesinden türevi, aşağıda verilen Bruno zincir kuralı olarak adlandırılan ifade yardımıyla hesaplanır.

$$\begin{aligned} {}_aD_t^\alpha F(h(t)) &= \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} g(t) \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k! (t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \sum_{m=1}^k F^m h(t) \sum_{r=1}^k \frac{1}{a_r!} \left(\frac{h^{(r)}(t)}{r!} \right)^{a_r} \end{aligned}$$

Burada toplam, $\sum_{r=1}^k r a_r = k$ ve $\sum_{r=1}^k a_r = m$ olmak üzere $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ nın pozitif tam sayı değerleri üzerinden alınır.[34]

Örnek 2.2.1 $f(t) = t^2$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$ inci mertebeden türevini Riemann-Liouville kesirli türev tanımıyla hesaplayalım.

Riemann- Liouville kesirli türevi aşağıdaki gibidir:

$$\frac{1}{\Gamma(m-p)} \frac{d^m}{dt^m} \int_{\alpha}^t (t-\tau)^{m-p-1} f(\tau) d\tau.$$

Burada, $m = 1$, $p = \frac{1}{2}$ ve özel olarak $\alpha = 0$ alınırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\tau^2 d\tau}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}$$

Son denklemde $(t-\tau) = u^2$, $-d\tau = 2udu$ değişken dönüşüm yapılırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_{\sqrt{t}}^0 \frac{-(t-u^2)^2 2udu}{(u^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Gerekli matematiksel işlemler yapıldığında $f(t) = t^2$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$ inci mertebeden türevi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$D^{\frac{1}{2}}f(t) = \frac{8t\sqrt{t}}{3\sqrt{\pi}}$$

Şimdi elde edilen $\frac{8t\sqrt{t}}{3\sqrt{\pi}}$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$ inci mertebeden türevini hesaplayalım.

$$D^{\frac{1}{2}}f(t) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{d}{dt} \int_0^t (1-u)^{-\frac{1}{2}} \frac{8t\sqrt{t}}{3\sqrt{\pi}} d\tau$$

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ alınırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$D^{\frac{1}{2}}f(t) = \frac{8}{3\pi} \cdot \frac{d}{dt} \int_0^1 (1-u)^{-\frac{1}{2}} \tau^{\frac{3}{2}} d\tau$$

$\tau = t \cdot u$ ve $d\tau = t \cdot du$ değişken dönüştürmesi yapılırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$D^{\frac{1}{2}}f(t) = \frac{8}{3\pi} \cdot \frac{d}{dt} \int_0^1 t^2 (1-u)^{-\frac{1}{2}} u^{\frac{3}{2}} du$$

Buradan aşağıdaki eşitlik olduğu görülür:

$$\int_0^1 (1-u)^{-\frac{1}{2}} u^{\frac{3}{2}} du = \beta\left(-\frac{1}{2} + 1, \frac{3}{2} + 1\right).$$

Aşağıdaki eşitliği kullanılırsa,

$$\beta(k, n) = \frac{\Gamma(k) \cdot \Gamma(n)}{\Gamma(k+n)}$$

$$\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi} \frac{1.3\sqrt{\pi}}{2^2}}{2!} = \frac{3\pi}{8}$$

elde edilir. Sonuç olarak aşağıdaki ifade elde edilir:

$$D^{\frac{1}{2}}f(t) = \frac{8}{3\pi} \cdot \frac{d}{dt} \left(t^2 \frac{3\pi}{8} \right) = \frac{8}{3\pi} \cdot \frac{3\pi}{8} \cdot 2t = 2t$$

Burada, $f(t) = t^2$ fonksiyonunun ard arda 2 kez $\frac{1}{2}$ inci mertebeden türevi alındığında klasik türevdeki 1 inci mertebeden türevle aynı sonuca eşit olduğu görülmektedir.



BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Materyal ve Yöntem

Bu çalışmada, kuadratik orta anlamda yakınsama, süreklilik, türevlenebilme ve integrallenebilme kavramları kullanılmaktadır.

Tanım 3.1.1 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında $\{X_n\}$, $n \geq 1$ rastgele değişkenler dizisi ve X rastgele değişkeni verilsin. Bunun yanı sıra $E|X_n| < \infty$ ve $E|X| < \infty$ olsun. Eğer $0 < r < \infty$ ve $n \rightarrow \infty$ iken aşağıdaki gibi yazılıyorsa bu takdirde $\{X_n\}$ dizisi X 'ye r . mertebeden orta anlamda yakınsıyor denir.

$$E|X_n - X|^r = \int |X_n(\omega) - X(\omega)|^r dP(\omega) \rightarrow 0$$

Bu yakınsama $n \rightarrow \infty$ iken $X_n \xrightarrow{L_r} X$ şeklinde yazılır. Bu yakınsama çeşidine analizde L_r anlamında yakınsama denir. Özel olarak $r = 2$ olduğunda bu yakınsamaya kuadratik orta yakınsama denir. Bu yakınsama $l.i.m_{n \rightarrow \infty} X_n = X$ şeklinde yazılır. Burada l.i.m. “limit in mean” kelimelerinin kısaltmasıdır[32].

Tanım 3.1.2 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında $t \in T \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $\{X_n(t, \cdot)\}$, $n \geq 1$ stokastik süreçler dizisi ve $X(t, \cdot)$ stokastik süreci verilsin. Bunun yanı sıra

$E|X_n(t, \cdot)| < \infty$ ve $E|X(t, \cdot)| < \infty$ olsun. Eğer $\forall t \in T$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E (X_n(t, \cdot) - X(t, \cdot))^2 = 0$$

ise $\{X_n(t, \cdot)\}$, $n \geq 1$ stokastik süreçler dizisi, $X(t, \cdot)$ stokastik sürecine kuadratik orta anlamda yakınsaktır denir ve aşağıdaki gibi gösterilir[32]:

$$l.i.m_{n \rightarrow \infty} X_n(t, \cdot) = X(t, \cdot), \quad (a.e.).$$

Tanım 3.1.3 $X(t, \omega)$ stokastik süreci verilsin. Eğer

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} E(X(t + \Delta, \cdot) - X(t, \cdot))^2 = 0$$

ise, bu durumda $X(t, \cdot)$ stokastik sürecine t noktasında kuadratik orta anlamda süreklidir denir ve bu durum aşağıdaki gibi gösterilir[32]:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} l.i.m X(t + \Delta, \cdot) = X(t, \cdot), \quad (a.e.).$$

Teorem 3.1.1 Bir $X(t, \cdot)$ stokastik sürecinin kuadratik orta anlamda sürekli olması için yeterli koşul, $K(t_1, t_2)$ kovaryans fonksiyonunun $\forall t_1, t_2 \in T$ için $t_1 = t_2 = t$ noktasında sürekli olmasıdır[32].

Tanım 3.1.5 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında $t \in T \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $X(t, \cdot)$ stokastik süreci verilsin. Eğer mevcut ise, aşağıdaki limite $X(t, \cdot)$ stokastik sürecinin kuadratik orta anlamda türevi denir.

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} E \left[\frac{X(t + \Delta, \cdot) - X(t, \cdot)}{\Delta} - X'(t, \cdot) \right]^2 = 0.$$

Bu tanımı aşağıdaki gibi yazmak mümkündür:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} l.i.m \frac{X(t + \Delta, \cdot) - X(t, \cdot)}{\Delta} = X'(t, \cdot), \quad (a.e.).$$

Yukarıdaki limitin varlığı ve tekliği için bir koşulun sağlanması gereklidir. Bu limitin varlığı için gerekli koşul ise $X(t, \cdot)$ stokastik sürecinin kuadratik orta anlamda sürekli olmasıdır ve yeterli koşul ise, $K(t_1, t_2)$ kovaryans fonksiyonunun $\forall t_1, t_2 \in T$ için $t_1 = t_2 = t$ noktasında 2. mertebeden karışık türevinin mevcut olmasıdır[32].

Tanım 3.1.6 Olasılık uzayında $t \in T \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $X(t, \cdot)$ stokastik fonksiyonu verilsin. Ayrıca $[u, v]$ aralığının parçalanışı $u = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = v$, $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{k \leq n} |\Delta t_k| = 0$ olsun. Bu durumda $X(t, \omega)$ stokastik fonksiyonunun $[u, v]$ aralığındaki integrali aşağıdaki gibi tanımlanır[32]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l.i.m \sum_{k=1}^n X(t_k, \cdot) \Delta t_k = \int_u^v X(t, \cdot) dt, \quad (a.e.).$$

Bu tanımı aşağıdaki gibi yazmak mümkündür:

$$\int_u^v X(t, \cdot) dt \leq \int_u^v Y(t, \cdot) dt, \quad (a. e.).$$

Bu limitin varlığı için gerekli koşul ise $X(t, \cdot)$ stokastik sürecinin kuadratik orta anlamda sürekli olmasıdır ve yeterli koşul ise, $K(t_1, t_2)$ kovaryans fonksiyonunun $\forall t_1, t_2 \in T$ için $t_1 = t_2 = t$ noktasında 2. katlı karışık integralinin mevcut olmasıdır. Ayrıca $X(t, \cdot) \leq Y(t, \cdot)$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir[32]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\left(\sum_{k=1}^n X(t_k, \cdot) \Delta t_k - \int_u^v X(t, \cdot) dt \right)^2 \right] = 0.$$

BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu kısımda, kuadratik orta anlamda kesirli türevlenebilme ve kesirli integrallenebilme kavramları verildikten sonra, bazı konveks stokastik süreçler için kesirli integraller kullanılarak Hermit-Hadamard eşitsizliği elde edilmiştir.

Bilinmelidir ki, kovaryans fonksiyonun özelliklerinden $\varphi(t)$ rastgele olmayan bir fonksiyon olmak üzere $Y(t, \cdot) = X(t, \cdot) + \varphi(t)$ stokastik sürecinin kovaryans fonksiyonu $\forall t_1, t_2 \in T$ için $K_Y(t_1, t_2) = K_X(t_1, t_2)$ 'dir. Bu nedenle, $X^\circ(t, \cdot) = X(t, \cdot) - E(X(t, \cdot))$ merkezleşmiş sürecinin kovaryans fonksiyonu ile $X(t, \cdot)$ sürecinin kovaryans fonksiyonu aynıdır. Yani $\forall t_1, t_2 \in T$ için $K_{X^\circ}(t_1, t_2) = K_X(t_1, t_2)$ 'dir.

Buna göre, bazı teoremlerin ispatında genelliği bozmadan $\forall t \in T$ için $E(X(t, \cdot)) = 0$ olduğu varsayılabilir. Bu durumda, $K_X(t_1, t_2)$ aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} K_X(t_1, t_2) &= E(X(\omega, t_1)X(\omega, t_2)) - E(X(\omega, t_1))E(X(\omega, t_2)) \\ &= E(X(\omega, t_1)X(\omega, t_2)). \end{aligned}$$

4.1. Bir Stokastik Sürecin Kuadratik Orta Anlamda Kesirli İntegrali ve Türevi

Yukarıdaki bölümde verilen tanım kullanarak, bir stokastik sürecin kuadratik orta anlamda kesirli integrali ve türevi aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

Tanım 4.1.1. $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}(t, \cdot)$ stokastik fonksiyonu verilsin. Ayrıca $[u, v]$ aralığının parçalanışı $u = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = v$, $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{k \leq n} |\Delta t_k| = 0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^n (t - t_k)^{\alpha-1} X(t_k, \cdot) \Delta t_k - I_{u+}^{\alpha} X(t, \cdot) \right)^2 \right] &= 0, \quad u < t, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^n (t_k - t)^{\alpha-1} X(t_k, \cdot) \Delta t_k - I_{v-}^{\alpha} X(t, \cdot) \right)^2 \right] &= 0, \quad t < v \end{aligned}$$

eşitliklerine sırasıyla $X(t, \cdot)$ stokastik sürecinin $[u, v]$ aralığındaki kuadratik orta anlamda sağ ve sol kesirli integrali denir ve $\alpha \in \mathbb{R}^+$ için aşağıdaki gibi gösterilir:

$$I_{u+}^{\alpha} X(t, \cdot) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_u^t (t-s)^{\alpha-1} X(s, \cdot) ds, \quad u < t, \quad (a.e.),$$

$$I_{v-}^{\alpha} X(t, \cdot) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^v (s-t)^{\alpha-1} X(s, \cdot) ds, \quad t < v, \quad (a.e.)$$

ile tanımlanır ve $\Gamma(\alpha)$ Gamma fonksiyonu ve $I_{u+}^0 X(t, \cdot) = I_{v-}^0 X(t, \cdot) = X(t, \cdot)$ 'dir.

Benzer şekilde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_u^t \frac{X(s, \cdot) ds}{(t-s)^{\alpha}} - D_{u+}^{\alpha} X(t, \cdot) \right)^2 \right] = 0, \quad u < t, \quad (a.e.),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_t^v \frac{X(s, \cdot) ds}{(s-t)^{\alpha}} - D_{v-}^{\alpha} X(t, \cdot) \right)^2 \right] = 0, \quad t < v, \quad (a.e.)$$

eşitliklerine sırasıyla $X(t, \cdot)$ stokastik sürecinin $[u, v]$ aralığındaki kuadratik orta anlamda sağ ve sol kesirli türevi denir ve $\alpha \in \mathbb{R}^+$ için aşağıdaki gibi gösterilir:

$$D_{u+}^{\alpha} X(t, \cdot) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_u^t \frac{X(s, \cdot) ds}{(t-s)^{\alpha}}, \quad u < t, \quad (a.e.),$$

$$D_{v-}^{\alpha} X(t, \cdot) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_t^v \frac{X(s, \cdot) ds}{(s-t)^{\alpha}}, \quad t < v, \quad (a.e.).$$

Uyarı 4.1.1.

i) Yukarıdaki limitlerin varlığı için gerekli koşul, $X(t, \cdot)$ stokastik sürecinin kuadratik orta anlamda sürekli olması ve yeterli koşul ise, $K(t_1, t_2)$ kovaryans fonksiyonunun $\forall t_1, t_2 \in T$ için $t_1 = t_2 = t$ noktasında iki katlı sağ ve sol kesirli integrallerinin ve türevlerinin mevcut olmasıdır.

ii) Ayrıca $X(t, \cdot) \leq Y(t, \cdot)$ için $I_{u^+}^\alpha X(t, \cdot) \leq I_{u^+}^\alpha Y(t, \cdot)$, $I_{v^-}^\alpha X(t, \cdot) \leq I_{v^-}^\alpha Y(t, \cdot)$ ve $D_{u^+}^\alpha X(t, \cdot) \leq D_{u^+}^\alpha Y(t, \cdot)$, $D_{v^-}^\alpha X(t, \cdot) \leq D_{v^-}^\alpha Y(t, \cdot)$, (a. e.)'dir

Teorem 4.1.1. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlı $X: T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik sürecinin kuadratik orta anlamda sağ ve sol kesirli integrallerinin varlığı için yeterli koşul, $\forall t_1, t_2 \in T$ için $K(t_1, t_2)$ kovaryans fonksiyonunun $t_1 = t_2 = t$ noktasında iki katlı sağ ve sol kesirli integrallerinin mevcut olmasıdır.

İspat. Genelliği bozmadan $\forall t \in T$ için $E(X(t, \cdot)) = 0$ olsun. Bu durumda $X(t, \cdot)$ stokastik sürecinin kuadratik orta anlamda sağ kesirli integralinin mevcudiyeti aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\begin{aligned}
& E \left[\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^n (t_1 - t_k)^{\alpha-1} X(t_k, \cdot) \Delta t_k - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{m=1}^n (t_2 - t_m)^{\alpha-1} X(t_m, \cdot) \Delta t_m \right]^2 \right] \\
&= \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^2 \sum_{k=1}^n \sum_{k=1}^n (t_1 - t_k)^{2(\alpha-1)} (\Delta t_k)^2 E[X(t_k, \cdot) X(t_k, \cdot)] \\
&\quad - 2 \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^2 \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n (t_1 - t_k)^{\alpha-1} (t_2 - t_m)^{\alpha-1} \Delta t_k \Delta t_m E[X(t_k, \cdot) X(t_m, \cdot)] \\
&\quad + \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^2 \sum_{m=1}^n \sum_{m=1}^n (t_2 - t_m)^{2(\alpha-1)} (\Delta t_m)^2 E[X(t_m, \cdot) X(t_m, \cdot)] \\
&= \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^2 \sum_{k=1}^n \sum_{k=1}^n (t_1 - t_k)^{2(\alpha-1)} (\Delta t_k)^2 K(t_k, t_k) \\
&\quad - 2 \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^2 \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n (t_1 - t_k)^{\alpha-1} (t_2 - t_m)^{\alpha-1} \Delta t_k \Delta t_m K(t_k, t_m) \\
&\quad + \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^2 \sum_{m=1}^n \sum_{m=1}^n (t_2 - t_m)^{2(\alpha-1)} (\Delta t_m)^2 K(t_m, t_m) \\
&= I_{u^+}^\alpha (I_{u^+}^\alpha K)(t_1, t_1) - 2I_{u^+}^\alpha (I_{u^+}^\alpha K)(t_1, t_2) + I_{u^+}^\alpha (I_{u^+}^\alpha K)(t_2, t_2) \quad (4.1.1)
\end{aligned}$$

(4.1.1)'de $t_1 = t_2 = t$ için $n \rightarrow \infty$ ve $m \rightarrow \infty$ iken limiti alınır, $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{k \leq n} |\Delta t_k| = 0$ ve $\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{m \leq n} |\Delta t_m| = 0$ aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} E \left[\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^n (t - t_{1k})^{\alpha-1} X(t_{1k}, \cdot) \Delta t_{1k} \\ & - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{m=1}^n (t - t_{2m})^{\alpha-1} X(t_{2m}, \cdot) \Delta t_{2k} \end{aligned} \right]^2 = 0.$$

Buradan, $X(t, \cdot)$ stokastik sürecinin kuadratik orta anlamda sağ kesirli integralinin mevcut ve tek türlü olduğu görülür. Benzer şekilde, $X(t, \cdot)$ stokastik sürecinin kuadratik orta anlamda sol kesirli integralinin mevcudiyeti gösterilebilir.

Teorem 4.1.2. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlı $X: T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik sürecinin kuadratik orta anlamda sağ ve sol kesirli türevlerinin varlığı için yeterli koşul, $\forall t_1, t_2 \in T$ için $K(t_1, t_2)$ kovaryans fonksiyonunun $t_1 = t_2 = t$ noktasında iki katlı sağ ve sol kesirli türevlerinin mevcut olmasıdır.

İspat. Teorem 4.1.1'e benzer şekilde ispat edilir.

Örnek 4.1.1. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlı $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kuadratik orta anlamda kesirli integrali mevcut bir stokastik süreç ve $A: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ birer rasgele değişken olsun. $E[A^2] < \infty$ için $X(t, \cdot) = A(\cdot)t$ stokastik sürecinin sağ ve sol kesirli integralleri sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$I_{u^+}^\alpha X(t, \cdot) = A(\cdot) \frac{(t - u)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \left(t - \frac{\alpha(t - u)}{\alpha + 1} \right), \quad (a.e.). \quad (4.1,2)$$

$$I_{v^-}^\alpha X(t, \cdot) = A(\cdot) \frac{(v - t)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \left(t + \frac{\alpha(v - t)}{\alpha + 1} \right), \quad (a.e.). \quad (4.1.3)$$

Gerçekten, $X(t, \cdot) = A(\cdot)t$ için $I_{u^+}^\alpha X(t, \cdot)$ 'nin değeri (4.2.4)'deki gibidir:

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^n (t - t_k)^{\alpha-1} X(t_k, \cdot) \Delta t_k \right)^2 \right] \\
&= E \left[\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^n (t - t_k)^{\alpha-1} [A(\cdot)t_k + B(\cdot)] \Delta t_k \right)^2 \right] = 0.
\end{aligned}$$

Burada $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^n (t - t_k)^{\alpha-1} A(\cdot)t_k \Delta t_k$ Rieman integrali olup aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned}
I_{u^+}^\alpha X(t, \cdot) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_u^t (t - s)^{\alpha-1} X(s, \cdot) ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_u^t (t - s)^{\alpha-1} A(\cdot) s ds \\
&= A(\cdot) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t-u} (t - z) z^{\alpha-1} dz = A(\cdot) \left(\frac{t}{\Gamma(\alpha)} \frac{z^\alpha}{\alpha} \Big|_0^{t-u} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{z^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_0^{t-u} \right) \\
&= A(\cdot) \frac{(t - u)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \left(t - \frac{\alpha(t - u)}{\alpha + 1} \right).
\end{aligned}$$

Benzer şekilde, $X(t, \cdot) = A(\cdot)t$ için $I_{u^+}^\alpha X(t, \cdot)$ 'nin değeri (4.1.3)'teki gibi olduğu gösterilir.

4.2. Konveks Stokastik Süreçler için Hermite-Hadamard Tipli Kesirli İntegral Eşitsizliği

Bu kısımda, konveks stokastik süreçler için Hermite-Hadamard tipli kesirli integral eşitsizliği elde edilmiştir.

Tanım 4.2.1. $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bir stokastik süreç olsun. Bu takdirde, $\lambda \in [0, 1]$ ve $t, s \in I$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan stokastik sürece konvektir denir [37]:

$$X((1 - \lambda)t + \lambda s, \cdot) \leq (1 - \lambda)X(t, \cdot) + \lambda X(s, \cdot), \quad (a. e.).$$

Eğer eşitsizlikte $\lambda = \frac{1}{2}$ alınırsa bu sürece Jensen-convex stokastik süreç denir.

Lemma 4.2.1. $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kuadratik orta anlamda integrallenebilir bir stokastik süreç ve $\lambda \in (0,1)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitlik mevcuttur [38]:

$$\int_0^1 X((1 - \lambda)u + \lambda v, \cdot) d\lambda = \int_0^1 X((1 - \lambda)v + \lambda u, \cdot) d\lambda = \frac{1}{v - u} \int_u^v X(t, \cdot) dt, \quad (a. e.).$$

Lemma 4.2.2. $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kuadratik orta anlamda kesirli integrali mevcut bir stokastik süreç, $\lambda \in (0,1)$ ve $\alpha > 0$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitlikler mevcuttur:

$$\int_0^1 \lambda^{\alpha-1} X(\lambda u + (1 - \lambda)v, \cdot) d\lambda = \frac{\Gamma(\alpha)}{(v - u)^\alpha} I_{u+}^\alpha X(v, \cdot), \quad (a. e.),$$

$$\int_0^1 \lambda^{\alpha-1} X(\lambda v + (1 - \lambda)u, \cdot) d\lambda = \frac{\Gamma(\alpha)}{(v - u)^\alpha} I_{v-}^\alpha X(u, \cdot), \quad (a. e.).$$

İspat. 1. integralde $t = \lambda u + (1 - \lambda)v$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$\frac{1}{(v - u)^\alpha} \int_u^v (v - t)^{\alpha-1} X(t, \cdot) dt = \frac{\Gamma(\alpha)}{(v - u)^\alpha} I_{u+}^\alpha X(v, \cdot)$$

eşitliği kolayca elde edilir. 2. integral de uygun değişken dönüşümü ile benzer şekilde elde edilir.

Sonuç 4.2.1. Lemma 4.2.2’de $\alpha = 1$ alınırsa, Lemma 4.2.1’deki konveks stokastik süreçler için klasik integral eşitlikleri elde edilir.

Lemma 4.2.3. $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kuadratik orta anlamda kesirli integrali mevcut konveks bir stokastik süreç ve $A, B: \Omega \rightarrow R$ birer rasgele değişken olsun. $E[A^2] < \infty$, $E[B^2] < \infty$ için $X(t, \cdot) = A(\cdot)t + B(\cdot)$ stokastik sürecinin sağ ve sol kesirli integralleri sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$I_{u+}^{\alpha} X(t, \cdot) = \frac{(t-u)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \left[A(\cdot) \left(t - \frac{\alpha(t-u)}{\alpha+1} \right) + B(\cdot) \right], \quad (a.e.). \quad (4.2.1)$$

$$I_{v-}^{\alpha} X(t, \cdot) = \frac{(v-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \left[A(\cdot) \left(t + \frac{\alpha(v-t)}{\alpha+1} \right) + B(\cdot) \right], \quad (a.e.), \quad (4.2.2)$$

İspat. $X(t, \cdot) = A(\cdot)t + B(\cdot)$ süreci için $I_{u+}^{\alpha} X(t, \cdot)$ değerinin (4.2.1)'deki gibi olduğu aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^n (t-t_k)^{\alpha-1} X(t_k, \cdot) \Delta t_k - \frac{(t-u)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \left[A(\cdot) \left(t - \frac{\alpha(t-u)}{\alpha+1} \right) + B(\cdot) \right] \right)^2 \right] \\ &= E \left[\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^n (t-t_k)^{\alpha-1} [A(\cdot)t_k + B(\cdot)] \Delta t_k - \frac{(t-u)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \left[A(\cdot) \left(t - \frac{\alpha(t-u)}{\alpha+1} \right) + B(\cdot) \right] \right)^2 \right] = 0. \end{aligned}$$

Burada $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^n (t-t_k)^{\alpha-1} [A(\cdot)t_k + B(\cdot)] \Delta t_k$ Riemann integrali olup $s \in (t, u)$ için Örnek 4.1.1'deki gibi hesaplanır. Benzer şekilde, $I_{v-}^{\alpha} X(t, \cdot)$ değerinin (4.2.2)'deki gibi olduğu gibi gösterilir.

Önerme 4.2.1. $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, (u, v) aralığı üzerinde kuadratik orta anlamda türevlenebilir konveks bir stokastik süreç olsun. Bu takdirde, her $t \in (u, v)$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan en az bir $A: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bir rasgele değişkeni mevcuttur:

$$X(t, \cdot) \geq A(\cdot) \left(t - \frac{u+v}{2} \right) + X\left(\frac{u+v}{2}, \cdot\right), \quad (a.e.).$$

İspat: $X(t, \cdot)$, $[u, v]$ aralığında konveks ve $t_0 \in (u, v)$ noktasında kuadratik orta anlamda diferensiyellenebilir bir stokastik süreç olduğundan aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$X(t, \cdot) - X(t_0, \cdot) \geq X'(t_0, \cdot)(t - t_0), \quad (a.e.).$$

Eğer $t_0 = \frac{u+v}{2}$ ve $X' \left(\frac{u+v}{2}, \cdot \right) = A(\cdot)$ alınırsa ispat biter.

Teorem 4.2.1. $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ konveks stokastik süreci kuadratik orta anlamda integralenebilirse aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [37]:

$$X \left(\frac{u+v}{2}, \cdot \right) \leq \frac{1}{v-u} \int_u^v X(t, \cdot) dt \leq \frac{X(u, \cdot) + X(v, \cdot)}{2}, \quad (a. e.).$$

Teorem 4.2.2. $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, (u, v) aralığı üzerinde kuadratik orta anlamda türevlenebilir konveks bir stokastik süreç ve $\alpha > 0$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur:

$$X \left(\frac{u+v}{2}, \cdot \right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(v-u)^\alpha} [I_{u^+}^\alpha X(v, \cdot) + I_{v^-}^\alpha X(u, \cdot)] \leq \frac{X(u, \cdot) + X(v, \cdot)}{2}. \quad (a. e.) \quad (4.2.3)$$

İspat. Önerme 4.2.1 yardımıyla

$$X(t, \cdot) \geq A(\cdot) \left(t - \frac{u+v}{2} \right) + X \left(\frac{u+v}{2}, \cdot \right)$$

dır. Bu durumda, Lemma 4.2.3'den sırasıyla $t = v$ ve $t = u$ yazılırsa

$$I_{u^+}^\alpha X(v, \cdot) \geq \frac{(v-u)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left[A(\cdot) \left(u - \frac{\alpha(v-u)}{\alpha+1} - \frac{u+v}{2} \right) + X \left(\frac{u+v}{2}, \cdot \right) \right],$$

$$I_{v^-}^\alpha X(u, \cdot) \geq \frac{(v-u)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left[A(\cdot) \left(v + \frac{\alpha(v-u)}{\alpha+1} - \frac{u+v}{2} \right) + X \left(\frac{u+v}{2}, \cdot \right) \right]$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa (4.2.3) eşitsizliğinin sol tarafı elde edilir. Diğer yandan, $X(t, \cdot)$ stokastik süreci konveks olduğundan $\lambda \in [0, 1]$ için aşağıdaki eşitsizlikler mevcuttur:

$$X((1-\lambda)u + \lambda v, \cdot) \leq \lambda X(v, \cdot) + (1-\lambda)X(u, \cdot)$$

$$X(\lambda u + (1-\lambda)v, \cdot) \leq \lambda X(u, \cdot) + (1-\lambda)X(v, \cdot),$$

eşitsizlikleri yazılabilir ve bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$X((1-\lambda)u + \lambda v, \cdot) + X(\lambda u + (1-\lambda)v, \cdot) \leq X(u, \cdot) + X(v, \cdot)$$

elde edilir. Son eşitsizlikte $\lambda^{\alpha-1}$ ile çarpılıp, $\lambda \in [0,1]$ için integral alınıp Lemma 4.2.2 kullanılırsa, (4.2.3) eşitsizliğinin sağ tarafı elde edilir. Böylelikle eşitsizliğin her iki tarafı da ispatlanmış olur.

Sonuç 4.2.2. Teorem 4.2.2’de $\alpha = 1$ alınırsa, Teorem 4.2.1’deki konveks stokastik süreçler için klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir.

4.3. Preinveks Stokastik Süreçler için Hermite-Hadamard Tipli Kesirli İntegral Eşitsizliği

Bu kısımda, preinveks stokastik süreçler için Hermite-Hadamard tipli kesirli integral eşitsizliği elde edilmiştir.

Tanım 4.3.1. $I \subset \mathbb{R}^n$ ve $\eta : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon olsun. Eğer $\forall u, v \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için $v + \lambda\eta(u, v) \in I$ ise I ya η ’ya göre inveks bir küme denir. Her konveks kümenin $\eta(u, v) = u - v$ fonksiyonuna göre invex olduğu açıktır. Fakat bunun tersi genelde doğru değildir, yani konveks olmayan inveks kümeler mevcuttur [39].

Her konveks fonksiyon $\eta(u, v) = u - v$ fonksiyonuna göre preinveks fonksiyondur, ancak bunun tersi genelde doğru değildir. η fonksiyonu üzerine aşağıdaki koşul Mohan ve Neogy tarafından konulmuştur [39].

C Koşulu: $I \subset \mathbb{R}^n$, $\eta : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ ‘ya göre inveks bir küme olsun. $\forall v, u \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$\eta(u, u + \lambda\eta(v, u)) = -\lambda\eta(v, u)$$

$$\eta(v, u + \lambda\eta(v, u)) = (1 - \lambda)\eta(v, u)$$

C koşulundan her $v, u \in I$ ve $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\eta(u + \lambda_2 \eta(v, u), u + \lambda_1 \eta(v, u)) = (\lambda_2 - \lambda_1)\eta(v, u).$$

Tanım 4.3.2. Aşağıdaki eşitsizliği sağlayan $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik sürecine $\forall v, u \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için η 'ya göre preinveksdir denir

$$X(u + \lambda\eta(v, u), \cdot) \leq (1 - \lambda)X(u, \cdot) + \lambda X(v, \cdot), \quad (a. e.).$$

Eğer λ sayısı $(0,1)$ arasında sabit bir sayı ise süreç λ -preinvex stokastik süreç ve $\lambda = 1/2$ ise, süreç Jensen-prinvex stokastik süreç olarak adlandırılır. Eğer $\eta(v, u) = v - u$ seçersek, $X(t, \cdot)$ bir konveks stokastik süreç olur[40].

Lemma 4.3.1. $X: [u, u + \eta(v, u)] \times \Omega \rightarrow (0, \infty)$ kuadratik orta anlamda integrallenebilir preinveks bir stokastik süreç ve $\lambda \in (0,1)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitlik mevcuttur[41].

$$\begin{aligned} \int_0^1 X(u + \lambda\eta(v, u), \cdot) d\lambda &= \int_0^1 X(u + (1 - \lambda)\eta(v, u), \cdot) d\lambda \\ &= \frac{1}{\eta(v, u)} \int_u^{u+\eta(v, u)} X(t, \cdot) dt, \quad (a. e.). \end{aligned}$$

Lemma 4.3.2. $X: [u, u + \eta(v, u)] \times \Omega \rightarrow (0, \infty)$ kuadratik orta anlamda kesirli integrali mevcut preinveks bir stokastik süreç, $\lambda \in (0,1)$ ve $\alpha > 0$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitlikler mevcuttur:

$$\int_0^1 \lambda^{\alpha-1} X(u + (1 - \lambda)\eta(v, u), \cdot) d\lambda = \frac{\Gamma(\alpha)}{\eta^\alpha(v, u)} I_{u^+}^\alpha X(u + \eta(v, u), \cdot), \quad (a. e.),$$

$$\int_0^1 \lambda^{\alpha-1} X(u + \lambda\eta(v, u), \cdot) d\lambda = \frac{\Gamma(\alpha)}{\eta^\alpha(v, u)} I_{[u+\eta(v, u)]^-}^\alpha X(u, \cdot), \quad (a. e.).$$

İspat. 1. integralde $t = u + (1 - \lambda)\eta(v, u)$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$\frac{1}{\eta^\alpha(v, u)} \int_u^{u+\eta(v, u)} (u + \eta(v, u) - t)^{\alpha-1} X(t, \cdot) dt = \frac{\Gamma(\alpha)}{\eta^\alpha(v, u)} I_{u^+}^\alpha X(u + \eta(v, u), \cdot)$$

eşitliği kolayca elde edilir. 2. integral de uygun değişken dönüşümü ile benzer şekilde elde edilir.

Sonuç 4.3.1. Lemma 4.3.2’de $\alpha = 1$ alınırsa, Lemma 4.3.1’deki preinveks stokastik süreçler için klasik integral eşitlikleri elde edilir.

Lemma 4.3.3. $X: [u, u + \eta(v, u)] \times \Omega \rightarrow (0, \infty)$ kuadratik orta anlamda kesirli integrali mevcut preinveks bir stokastik süreç ve $A, B: \Omega \rightarrow R$ birer rasgele değişken olsun. Eğer $E[A^2] < \infty$, $E[B^2] < \infty$ için $X(t, \cdot) = A(\cdot)t + B(\cdot)$ stokastik sürecinin sağ ve sol kesirli integralleri sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$I_{u^+}^\alpha X(t, \cdot) = \frac{(t - u)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \left[A(\cdot) \left(t - \frac{\alpha(t - u)}{\alpha + 1} \right) + B(\cdot) \right], \quad (a. e.), \quad (4.3.1)$$

$$I_{[u+\eta(v,u)]^-}^\alpha X(t, \cdot) = \frac{(u + \eta(v, u) - t)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \left[A(\cdot) \left(t + \frac{\alpha(u + \eta(v, u) - t)}{\alpha + 1} \right) + B(\cdot) \right]. \quad (4.3.2)$$

İspat. $X(t, \cdot) = A(\cdot)t + B(\cdot)$ süreci için $I_{u^+}^\alpha X(t, \cdot)$ değerinin (4.3.1)’deki gibi olduğu aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^n (t - t_k)^{\alpha-1} X(t_k, \cdot) \Delta t_k - \frac{(t - u)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \left[A(\cdot) \left(t - \frac{\alpha(t - u)}{\alpha + 1} \right) + B(\cdot) \right] \right)^2 \right] \\ &= E \left[\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^n (t - t_k)^{\alpha-1} [A(\cdot)t_k + B(\cdot)] \Delta t_k - \frac{(t - u)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \left[A(\cdot) \left(t - \frac{\alpha(t - u)}{\alpha + 1} \right) + B(\cdot) \right] \right)^2 \right] = 0. \end{aligned}$$

Burada $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^n (t - t_k)^{\alpha-1} [A(\cdot)t_k + B(\cdot)] \Delta t_k$ Riemann integrali olup $s \in (t, u)$ için Örnek 4.1.1’deki gibi hesaplanır. Benzer şekilde, $I_{[u+\eta(v,u)]^-}^\alpha X(t, \cdot)$ değerinin (4.3.2)’deki gibi olduğu gibi gösterilir.

Önerme 4.3.1. $X: [u, u + \eta(v, u)] \times \Omega \rightarrow (0, \infty)$ stokastik süreci preinveks ve $(u, u + \eta(v, u))$ aralığı üzerinde kuadratik orta anlamda diferensiyellenebilir olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizliği sağlayan en az bir $A: \Omega \rightarrow R$ bir rasgele değişkeni mevcuttur:

$$X(t, \cdot) \geq A(\cdot) \left(t - \frac{2u + \eta(v, u)}{2} \right) + X\left(\frac{2u + \eta(v, u)}{2}, \cdot\right), (a. e.).$$

İspat: $X(t, \cdot)$, $[u, u + \eta(v, u)]$ aralığında preinveks ve $t_0 \in (u, u + \eta(v, u))$ noktasında kuadratik orta anlamda diferensiyellenebilir bir stokastik süreç olduğundan aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$X(t, \cdot) - X(t_0, \cdot) \geq X'(t_0, \cdot)(t - t_0), (a. e.).$$

Eğer $t_0 = \frac{2u + \eta(v, u)}{2}$ ve $X'\left(\frac{2u + \eta(v, u)}{2}, \cdot\right) = A(\cdot)$ alınırsa ispat biter.

Teorem 4.3.1. $X: [u, u + \eta(v, u)] \times \Omega \rightarrow (0, \infty)$ preinveks stokastik süreci kuadratik orta anlamda integralenebilirse aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [40]:

$$X\left(\frac{2u + \eta(v, u)}{2}, \cdot\right) \leq \frac{1}{\eta(v, u)} \int_u^{u + \eta(v, u)} X(t, \cdot) dt \leq \frac{X(u, \cdot) + X(v, \cdot)}{2}, (a. e.).$$

Teorem 4.3.2. $X: [u, u + \eta(v, u)] \times \Omega \rightarrow (0, \infty)$, $(u, u + \eta(v, u))$ aralığı üzerinde kuadratik orta anlamda diferensiyellenebilir preinveks bir stokastik süreç ve $q \in (0, 1)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur:

$$\begin{aligned} X\left(\frac{u + \eta(v, u)}{2}, \cdot\right) &\leq \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2\eta^\alpha(v, u)} [I_{u^+}^\alpha X(u + \eta(v, u), \cdot) + I_{[u + \eta(v, u)]^-}^\alpha X(u, \cdot)] \\ &\leq \frac{X(u, \cdot) + X(v, \cdot)}{2}, (a. e.). \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

İspat. Önerme 4.3.1'den

$$X(t, \cdot) \geq A(\cdot) \left(t - \frac{2u + \eta(v, u)}{2} \right) + X\left(\frac{2u + \eta(v, u)}{2}, \cdot\right)$$

dır. Bu durumda, Lemma 4.3.3 yardımıyla sırasıyla $t = u + \eta(v, u)$ ve $t = u$ yazılırsa

$$I_{u+}^{\alpha} X(u + \eta(v, u), \cdot) \geq \frac{\eta^{\alpha}(v, u)}{\Gamma(\alpha + 1)} \left[A(\cdot) \left(u + \eta(v, u) - \frac{\alpha \eta(v, u)}{\alpha + 1} - \frac{2u + \eta(v, u)}{2} \right) + X\left(\frac{2u + \eta(v, u)}{2}, \cdot\right) \right],$$

$$I_{[u+\eta(v, u)]-}^{\alpha} X(u, \cdot) \geq \frac{\eta^{\alpha}(v, u)}{\Gamma(\alpha + 1)} \left[A(\cdot) \left(u + \frac{\alpha \eta(v, u)}{\alpha + 1} - \frac{2u + \eta(v, u)}{2} \right) + X\left(\frac{2u + \eta(v, u)}{2}, \cdot\right) \right]$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa, (4.3.3) eşitsizliğinin sol tarafı elde edilir. Diğer yandan, $X(t, \cdot)$ stokastik süreci preinveks olduğundan $\lambda \in [0, 1]$ için aşağıdaki eşitsizlikler mevcuttur:

$$X(u + (1 - \lambda)\eta(v, u), \cdot) \leq \lambda X(v, \cdot) + (1 - \lambda)X(u, \cdot),$$

$$X(u + \lambda\eta(v, u), \cdot) \leq (1 - \lambda)X(u, \cdot) + \lambda X(v, \cdot)$$

eşitsizlikleri yazılabilir ve bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$X(u + (1 - \lambda)\eta(v, u), \cdot) + X(u + \lambda\eta(v, u), \cdot) \leq X(u, \cdot) + X(v, \cdot)$$

elde edilir. Son eşitsizlik $\lambda^{\alpha-1}$ ile çarpılıp, $\lambda \in [0, 1]$ için integral alınıp Lemma 4.3.2 kullanılırsa, (4.3.3) eşitsizliğinin sağ tarafı elde edilir. Böylelikle eşitsizliğin her iki tarafı da ispatlanmış olur.

Sonuç 4.3.2. Teorem 4.3.2’de $\alpha = 1$ alınırsa, Teorem 4.3.1’deki preinveks stokastik süreçler için klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir.

4.4. φ -Konveks Stokastik Süreçler için Hermite-Hadamard Tipli Kesirli İntegral Eşitsizliği

Bu kısımda, φ -konveks stokastik süreçler için Hermite-Hadamard tipli kesirli integral eşitsizliği elde edilmiştir.

Tanım 4.4.1. $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bir stokastik süreç ve $\varphi: I \rightarrow I$ sürekli ve monoton artan bir fonksiyon olsun. Eğer her $t, s \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan X 'e φ -konvektir denir:

$$X((1-\lambda)\varphi(t) + \lambda\varphi(s), \cdot) \leq (1-\lambda)X(\varphi(t), \cdot) + \lambda X(\varphi(s), \cdot), \quad (a. e.).$$

Yukarıdaki eşitsizlik yön değiştirdiğinde X 'e φ -konkavdır denir. Ayrıca yukarıdaki eşitsizlikte $\varphi(t) = t$ ise konveks stokastik süreç elde edilir[23].

Lemma 4.4.1. $\varphi: [u, v] \rightarrow [u, v]$ sürekli ve monoton artan bir fonksiyon ver $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kuadratik orta anlamda integrali mevcut φ -konveks bir stokastik süreç ve $\lambda \in (0,1)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitlik mevcuttur [42].

$$\begin{aligned} \int_0^1 X((1-\lambda)\varphi(u) + \lambda\varphi(v), \cdot) d\lambda &= \int_0^1 X((1-\lambda)\varphi(v) + \lambda\varphi(u), \cdot) d\lambda \\ &= \frac{1}{\varphi(v) - \varphi(u)} \int_{\varphi(u)}^{\varphi(v)} X(t, \cdot) dt, \quad (a. e.). \end{aligned}$$

Lemma 4.4.2. $\varphi: [u, v] \rightarrow [u, v]$ sürekli ve monoton artan bir fonksiyon ver $X: [\varphi(u), \varphi(v)] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kuadratik orta anlamda kesirli integrali mevcut φ -konveks bir stokastik süreç, $\lambda \in (0,1)$ ve $\alpha > 0$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitlikler mevcuttur:

$$\int_0^1 \lambda^{\alpha-1} X(\lambda\varphi(u) + (1-\lambda)\varphi(v), \cdot) d\lambda = \frac{\Gamma(\alpha)}{(\varphi(v) - \varphi(u))^\alpha} I_{\varphi(u)^+}^\alpha X(\varphi(v), \cdot), \quad (a. e.),$$

$$\int_0^1 \lambda^{\alpha-1} X(\lambda\varphi(v) + (1-\lambda)\varphi(u), \cdot) d\lambda = \frac{\Gamma(\alpha)}{(\varphi(v) - \varphi(u))^\alpha} I_{\varphi(v)^-}^\alpha X(\varphi(u), \cdot), \quad (a. e.).$$

İspat. 1. integralde $t = \lambda\varphi(u) + (1-\lambda)\varphi(v)$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$\frac{1}{(\varphi(v) - \varphi(u))^\alpha} \int_{\varphi(u)}^{\varphi(v)} (\varphi(v) - t)^{\alpha-1} X(t, \cdot) dt = \frac{\Gamma(\alpha)}{(\varphi(v) - \varphi(u))^\alpha} I_{\varphi(u)^+}^\alpha X(\varphi(v), \cdot)$$

eşitliği kolayca elde edilir. 2. integral de uygun değişken dönüşümü ile benzer şekilde elde edilir.

Sonuç 4.4.1. Lemma 4.4.2’de $\alpha = 1$ alınırsa, Lemma 4.4.1’deki konveks stokastik süreçler için klasik integral eşitlikleri elde edilir.

Lemma 4.4.3. $X: [\varphi(u), \varphi(v)] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kuadratik orta anlamda kesirli integrali mevcut φ -konveks bir stokastik süreç ve $\varphi: [u, v] \rightarrow [u, v]$ sürekli ve monoton artan bir fonksiyon ve $A, B: \Omega \rightarrow R$ birer rasgele değişken olsun. $E[A^2] < \infty$, $E[B^2] < \infty$ için $X(t, \cdot) = A(\cdot)t + B(\cdot)$ stokastik sürecinin sağ ve sol kesirli integralleri sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$I_{\varphi(u)+}^{\alpha} X(t, \cdot) = \frac{(t - \varphi(u))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} \left[A(\cdot) \left(t - \frac{\alpha(t - \varphi(u))}{\alpha + 1} \right) + B(\cdot) \right], \quad (a. e.), \quad (4.4.1)$$

$$I_{\varphi(v)-}^{\alpha} X(t, \cdot) = \frac{(\varphi(v) - t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} \left[A(\cdot) \left(t + \frac{\alpha(\varphi(v) - t)}{\alpha + 1} \right) + B(\cdot) \right], \quad (a. e.). \quad (4.4.2)$$

İspat. $X(t, \cdot) = A(\cdot)t + B(\cdot)$ süreci için $I_{\varphi(u)+}^{\alpha} X(t, \cdot)$ değerinin (4.3.1)’deki gibi olduğu aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^n (t - t_k)^{\alpha-1} X(t_k, \cdot) \Delta \square_k \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{(t - \varphi(u))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} \left[A(\cdot) \left(t - \frac{\alpha(t - \varphi(u))}{\alpha + 1} \right) + B(\cdot) \right] \right)^2 \right] \\ &= E \left[\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^n (t - t_k)^{\alpha-1} [A(\cdot)t_k + B(\cdot)] \Delta t_k \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{(t - \varphi(u))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} \left[A(\cdot) \left(t - \frac{\alpha(t - \varphi(u))}{\alpha + 1} \right) + B(\cdot) \right] \right)^2 \right] = 0. \end{aligned}$$

Burada $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^n (t - t_k)^{\alpha-1} [A(\cdot)t_k + B(\cdot)] \Delta t_k$ Riemann integrali olup $s \in (t, \varphi(u))$ için Örnek 4.1.1’deki gibi hesaplanır. Benzer şekilde, $I_{\varphi(v)-}^{\alpha} X(t, \cdot)$ değerinin (4.4.2)’deki gibi olduğu gibi gösterilir.

Önerme 4.4.1. $X: [\varphi(u), \varphi(v)] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik süreci φ -konveks ve $(\varphi(u), \varphi(v))$ aralığı üzerinde kuadratik orta anlamda diferensiyellenebilir olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizliği sağlayan en az bir $A: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bir rasgele değişkeni mevcuttur:

$$X(t, \cdot) \geq A(\cdot) \left(t - \frac{\varphi(u) + \varphi(v)}{2} \right) + X \left(\frac{\varphi(u) + \varphi(v)}{2}, \cdot \right), \quad (a.e.).$$

İspat: $X(t, \cdot)$, $[\varphi(u), \varphi(v)]$ aralığında φ -konveks ve $t_0 \in (\varphi(u), \varphi(v))$ noktasında kuadratik orta anlamda diferensiyellenebilir bir stokastik süreç olduğundan aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$X(t, \cdot) - X(t_0, \cdot) \geq X'(t_0, \cdot)(t - t_0), \quad (a.e.).$$

Eğer $t_0 = \frac{\varphi(u) + \varphi(v)}{2}$ ve $X' \left(\frac{\varphi(u) + \varphi(v)}{2}, \cdot \right) = A(\cdot)$ alınırsa ispat biter.

Teorem 4.4.1. $X: [\varphi(u), \varphi(v)] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $(\varphi(u), \varphi(v))$ aralığı üzerinde kuadratik orta anlamda diferensiyellenebilir φ -konveks bir stokastik süreç olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur[23]:

$$\begin{aligned} X \left(\frac{\varphi(u) + \varphi(v)}{2}, \cdot \right) &\leq \frac{1}{\varphi(v) - \varphi(u)} \int_{\varphi(u)}^{\varphi(v)} X(t, \cdot) dt \\ &\leq \frac{X(\varphi(u), \cdot) + X(\varphi(v), \cdot)}{2}, \quad (a.e.). \end{aligned}$$

Teorem 4.4.2. $X: [\varphi(u), \varphi(v)] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $(\varphi(u), \varphi(v))$ aralığı üzerinde kuadratik orta anlamda diferensiyellenebilir φ -konveks bir stokastik süreç ve $\alpha > 0$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur:

$$\begin{aligned} X \left(\frac{\varphi(u) + \varphi(v)}{2}, \cdot \right) &\leq \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2(\varphi(v) - \varphi(u))^\alpha} \left[I_{\varphi(u)^+}^\alpha X(\varphi(v), \cdot) + I_{\varphi(v)^-}^\alpha X(\varphi(u), \cdot) \right] \\ &\leq \frac{X(\varphi(u), \cdot) + X(\varphi(v), \cdot)}{2}, \quad (a.e.). \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

İspat. Önerme 4.4.1'den

$$X(t, \cdot) \geq A(\cdot) \left(t - \frac{\varphi(u) + \varphi(v)}{2} \right) + X \left(\frac{\varphi(u) + \varphi(v)}{2}, \cdot \right)$$

dır. Bu durumda, Lemma 4.4.3'den sırasıyla $t = \varphi(v)$ ve $t = \varphi(u)$ yazılırsa

$$I_{\varphi(u)+}^{\alpha} X(\varphi(v), \cdot) \geq \frac{(\varphi(v) - \varphi(u))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} \left[A(\cdot) \left(\varphi(v) - \frac{\alpha(\varphi(v) - \varphi(u))}{\alpha + 1} - \frac{\varphi(u) + \varphi(v)}{2} \right) + X \left(\frac{\varphi(u) + \varphi(v)}{2}, \cdot \right) \right],$$

$$I_{\varphi(v)-}^{\alpha} X(\varphi(u), \cdot) \geq \frac{(\varphi(v) - \varphi(u))^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} \left[A(\cdot) \left(\varphi(u) + \frac{\alpha(\varphi(v) - \varphi(u))}{\alpha + 1} - \frac{\varphi(u) + \varphi(v)}{2} \right) + X \left(\frac{\varphi(u) + \varphi(v)}{2}, \cdot \right) \right]$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa (4.4.3) eşitsizliğinin sol tarafı elde edilir. Diğer yandan, $X(t, \cdot)$ stokastik süreci φ -konveks olduğundan $\lambda \in [0, 1]$ için aşağıdaki eşitsizlikler mevcuttur:

$$X((1 - \lambda)\varphi(u) + \lambda\varphi(v), \cdot) \leq \lambda X(\varphi(v), \cdot) + (1 - \lambda)X(\varphi(u), \cdot),$$

$$X(\lambda\varphi(u) + (1 - \lambda)\varphi(v), \cdot) \leq \lambda X(\varphi(u), \cdot) + (1 - \lambda)X(\varphi(v), \cdot)$$

eşitsizlikleri yazılabilir ve bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$X((1 - \lambda)\varphi(u) + \lambda\varphi(v), \cdot) + X(\lambda\varphi(u) + (1 - \lambda)\varphi(v), \cdot) \leq X(\varphi(u), \cdot) + X(\varphi(v), \cdot)$$

elde edilir. Son eşitsizlik $\lambda^{\alpha-1}$ ile çarpılıp, $\lambda \in [0, 1]$ için integral alınıp Lemma 4.4.2 kullanılırsa, (4.4.3) eşitsizliğinin sağ tarafı elde edilir. Böylelikle eşitsizliğin her iki tarafı da ispatlanmış olur.

Sonuç 4.4.2. Teorem 4.4.2'de $\alpha = 1$ alınırsa, Teorem 4.4.1'deki φ -konveks stokastik süreçler için klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir.

4.5. Harmonik Konveks Stokastik Süreçler için Hermite-Hadamard Tipli Kesirli İntegral Eşitsizliği

Bu kısımda, harmonik konveks stokastik süreçler için Hermite-Hadamard tipli kesirli integral eşitsizliği elde edilmiştir.

Tanım 4.5.1. $I \subset (0, \infty)$, $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bir stokastik süreç olsun. Bu takdirde her $t, s \in I \subset (0, \infty)$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan $X(t, \cdot)$ 'e harmonik konveks stokastik süreç denir [42]:

$$X\left(\frac{ts}{\lambda t + (1-\lambda)s}, \cdot\right) \leq \lambda X(s, \cdot) + (1-\lambda)X(t, \cdot), \quad (a. e.). \quad (4.5.1)$$

Yukarıdaki eşitsizlik yön değiştirdiğinde harmonik konkav stokastik süreç elde edilir.

Lemma 4.5.1. $[u, v] \subset (0, \infty)$, $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kuadratik orta anlamda integrallenebilir harmonik konveks bir stokastik süreçtir ancak ve ancak

$$Y(t, \cdot) = X\left(\frac{1}{t}, \cdot\right), \quad (a. e.).$$

stokastik süreci konvektir.

İspat. (4.5.1) eşitsizliğinde sırasıyla t ve s yerine $a = \frac{1}{t}$ ve $b = \frac{1}{s}$ yazılırsa

$$\begin{aligned} X\left(\frac{\frac{1}{t} \frac{1}{s}}{\lambda \frac{1}{t} + (1-\lambda) \frac{1}{s}}, \cdot\right) &= X\left(\frac{1}{(1-\lambda)t + \lambda s}, \cdot\right) = Y((1-\lambda)t + \lambda s, \cdot) \\ &\leq \lambda X\left(\frac{1}{s}, \cdot\right) + (1-\lambda)X\left(\frac{1}{t}, \cdot\right) = \lambda Y(s, \cdot) + (1-\lambda)Y(t, \cdot) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $Y(t, \cdot) = X\left(\frac{1}{t}, \cdot\right)$ stokastik sürecinin konveks olduğu görülür.

Diğer yandan, $Y(t, \cdot) = X\left(\frac{1}{t}, \cdot\right)$ stokastik sürecinin konveks olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur:

$$Y((1-\lambda)t + \lambda s, \cdot) \leq \lambda Y(s, \cdot) + (1-\lambda)Y(t, \cdot).$$

Yukarıdaki eşitsizlikte sırasıyla t ve s yerine $a = \frac{1}{t}$ ve $b = \frac{1}{s}$ yazılırsa

$$\begin{aligned} Y\left((1-\lambda)\frac{1}{t} + \lambda\frac{1}{s}, \cdot\right) &= X\left(\frac{1}{(1-\lambda)\frac{1}{t} + \lambda\frac{1}{s}}, \cdot\right) = X\left(\frac{ts}{(1-\lambda)t + \lambda s}, \cdot\right) \\ &\leq \lambda Y\left(\frac{1}{s}, \cdot\right) + (1-\lambda)Y\left(\frac{1}{t}, \cdot\right) = \lambda X(s, \cdot) + (1-\lambda)X(t, \cdot) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $X(t, \cdot)$ stokastik sürecinin harmonik konveks olduğu görülür

Lemma 4.5.2. $[u, v] \subset (0, \infty)$, $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kuadratik orta anlamda integrallenebilir bir stokastik süreç olsun. Bu takdirde, $\lambda \in (0, 1)$ için aşağıdaki eşitlikler mevcuttur [31]:

$$\int_0^1 X\left(\frac{uv}{\lambda u + (1-\lambda)v}, \cdot\right) d\lambda = \int_0^1 X\left(\frac{uv}{\lambda v + (1-\lambda)u}, \cdot\right) d\lambda = \frac{uv}{v-u} \int_u^v \frac{X(t, \cdot)}{t^2} dt, (a. e.)$$

Lemma 4.5.3. $[u, v] \subset (0, \infty)$, $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kuadratik orta anlamda kesirli integrali mevcut harmonik konveks bir stokastik süreç ve $\alpha > 0$ olsun. Bu takdirde $Y(t, \cdot) = \frac{1}{t}$ olmak üzere $t \in \left[\frac{1}{u}, \frac{1}{v}\right]$ için aşağıdaki eşitlikler mevcuttur:

$$\int_0^1 \lambda^{\alpha-1} X\left(\frac{uv}{\lambda u + (1-\lambda)v}, \cdot\right) d\lambda = \Gamma(\alpha) \left(\frac{uv}{v-u}\right)^\alpha I_{1/v^+}^\alpha (X \circ Y)(1/u, \cdot), (a. e.),$$

$$\int_0^1 \lambda^{\alpha-1} X\left(\frac{uv}{\lambda v + (1-\lambda)u}, \cdot\right) d\lambda = \Gamma(\alpha) \left(\frac{uv}{v-u}\right)^\alpha I_{1/u^-}^\alpha (X \circ Y)(1/v, \cdot), (a. e.).$$

İspat. 1. integralde $\frac{1}{t} = \frac{uv}{\lambda u + (1-\lambda)v}$ değişken dönüşümü yapılırsa, $Y(t, \cdot) = \frac{1}{t}$ olduğundan

$$\left(\frac{uv}{v-u}\right)^\alpha \int_{1/v}^{1/u} \left(\frac{1}{u} - t\right)^{\alpha-1} X\left(\frac{1}{t}, \cdot\right) dt = \Gamma(\alpha) \left(\frac{uv}{v-u}\right)^\alpha I_{1/v^+}^\alpha (X \circ Y)(1/u, \cdot)$$

dır. 2. integral de uygun değişken dönüşümü ile benzer şekilde elde edilir.

Sonuç 4.5.1. Lemma 4.5.3’de $\alpha = 1$ alınırsa, Lemma 4.5.2’de verilen harmonik konveks stokastik süreçler için klasik integral eşitlikleri elde edilir.

Lemma 4.5.4. $[u, v] \subset (0, \infty)$, $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kuadratik orta anlamda kesirli integrali mevcut harmonik konveks bir stokastik süreç ve $A, B: \Omega \rightarrow R$ birer rasgele değişken olsun. $Y(t, \cdot) = \frac{1}{t}$ olmak üzere, $E[A^2] < \infty$, $E[B^2] < \infty$ için $(X \circ Y)(t, \cdot) = A(\cdot)t + B(\cdot)$ stokastik sürecinin sağ ve sol kesirli integralleri $t \in [\frac{1}{u}, \frac{1}{v}]$ için sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$I_{1/v}^{\alpha+} (X \circ Y)(t, \cdot) = \frac{(t - 1/v)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} \left[A(\cdot) \left(t - \frac{\alpha(t - 1/v)}{\alpha + 1} \right) + B(\cdot) \right], \quad (a.e.), \quad (4.5.2)$$

$$I_{1/u}^{\alpha-} (X \circ Y)(t, \cdot) = \frac{(1/u - t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} \left[A(\cdot) \left(t + \frac{\alpha(1/u - t)}{\alpha + 1} \right) + B(\cdot) \right], \quad (a.e.). \quad (4.5.3)$$

İspat. $(X \circ Y)(t, \cdot) = A(\cdot)t + B(\cdot)$ süreci için $I_{1/v}^{\alpha+} (X \circ Y)(t, \cdot)$ değerinin $Y(t, \cdot) = \frac{1}{t}$ olmak üzere $t \in [\frac{1}{u}, \frac{1}{v}]$ için (4.5.2)’deki gibi olduğu aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^n (t - t_k)^{\alpha-1} (X \circ Y)(t_k, \cdot) \Delta t_k - \frac{(t - 1/v)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} \left[A(\cdot) \left(t - \frac{\alpha(t - 1/v)}{\alpha + 1} \right) + B(\cdot) \right] \right)^2 \right] \\ &= E \left[\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (t - t_k)^{\alpha-1} [A(\cdot)t_k + B(\cdot)] \Delta t_k - \frac{(t - 1/v)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} \left[A(\cdot) \left(t - \frac{\alpha(t - 1/v)}{\alpha + 1} \right) + B(\cdot) \right] \right)^2 \right] = 0. \end{aligned}$$

Burada $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^n (t - t_k)^{\alpha-1} [A(\cdot)t_k + B(\cdot)] \Delta t_k$ Riemann integrali olup $s \in (t, 1/v)$ için Örnek 4.1.1’deki gibi hesaplanır. Benzer şekilde, $I_{1/u}^{\alpha-} (X \circ Y)(t, \cdot)$ değerinin (4.5.3)’deki gibi olduğu gibi gösterilir.

Önerme 4.5.1. $[u, v] \subset (0, \infty)$, $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik süreci harmonik konveks ve (u, v) aralığı üzerinde kuadratik orta anlamda diferensiyellenebilir olsun.

Bu takdirde $Y(t, \cdot) = \frac{1}{t}$ olmak üzere, aşağıdaki eşitsizliği sağlayan $t \in \left[\frac{1}{u}, \frac{1}{v}\right]$ için en az bir $A: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bir rasgele değişkeni mevcuttur:

$$(X \circ Y)(t, \cdot) \geq A(\cdot) \left(t - \frac{u+v}{2uv} \right) + X\left(\frac{2uv}{u+v}, \cdot\right), \quad (a. e.).$$

İspat: $X(t, \cdot)$, (u, v) aralığında harmonik konveks olduğundan, $Y(t, \cdot) = \frac{1}{t}$ olmak üzere, $(X \circ Y)(t, \cdot)$ konvektir. O halde $(X \circ Y)(t, \cdot)$, $t_0 \in \left(\frac{1}{u}, \frac{1}{v}\right)$ noktasında kuadratik orta anlamda diferensiyellenebilir bir stokastik süreç olduğundan aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$(X \circ Y)(t, \cdot) - (X \circ Y)(t_0, \cdot) \geq (X \circ Y)'(t_0, \cdot)(t - t_0), \quad (a. e.).$$

Buradan $t_0 = \frac{u+v}{2uv}$ ile $(X \circ Y)\left(\frac{u+v}{2uv}, \cdot\right) = X\left(\frac{2uv}{u+v}, \cdot\right)$ elde edilir. Ayrıca $(X \circ Y)'(\frac{u+v}{2uv}, \cdot) = A(\cdot)$ alınırsa ispat biter.

Teorem 4.5.1. $[u, v] \subset (0, \infty)$, $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ harmonik kuadratik orta anlamda q -integrallenebilir bir stokastik süreç olsun. Bu takdirde, aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [42]:

$$X\left(\frac{2uv}{u+v}, \cdot\right) \leq \frac{uv}{v-u} \int_u^v \frac{X(t, \cdot)}{t^2} dt \leq \frac{X(u, \cdot) + X(v, \cdot)}{2}, \quad (a. e.).$$

Teorem 4.5.2. $[u, v] \subset (0, \infty)$, $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kuadratik orta anlamda kesirli integrali mevcut harmonik konveks bir stokastik süreç ve $\alpha > 0$ olsun. Bu takdirde $Y(t, \cdot) = \frac{1}{t}$ olmak üzere, aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur:

$$\begin{aligned} X\left(\frac{2uv}{u+v}, \cdot\right) &\leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2} \left(\frac{uv}{v-u}\right)^\alpha \left[I_{1/v^+}^\alpha (X \circ Y)(1/u, \cdot) + I_{1/u^-}^\alpha (X \circ Y)(1/v, \cdot) \right] \\ &\leq \frac{X(u, \cdot) + X(v, \cdot)}{2}, \quad (a. e.). \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

İspat. Önerme 4.5.1'den

$$(X \circ Y)(t, \cdot) \geq A(\cdot) \left(t - \frac{u+v}{2uv} \right) + X \left(\frac{2uv}{u+v}, \cdot \right)$$

dır. Bu durumda, Lemma 4.5.4'den sırasıyla $t = 1/u$ ve $t = 1/v$ yazılırsa

$$I_{1/v}^{\alpha+} (X \circ Y)(1/u, \cdot) \geq \frac{(1/u - 1/v)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} \left[A(\cdot) \left(\frac{1}{u} - \frac{\alpha(1/u - 1/v)}{\alpha + 1} - \frac{u+v}{2uv} \right) + X \left(\frac{2uv}{u+v}, \cdot \right) \right]$$

$$I_{1/u}^{\alpha-} (X \circ Y)(1/v, \cdot) \geq \frac{(1/u - 1/v)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} \left[A(\cdot) \left(\frac{1}{v} + \frac{\alpha(1/u - 1/v)}{\alpha + 1} - \frac{u+v}{2uv} \right) + X \left(\frac{2uv}{u+v}, \cdot \right) \right]$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikler taraf tarafa toplanıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa (4.5.4) eşitsizliğinin sol tarafı elde edilir: Diğer yandan, $X(t, \cdot)$ stokastik süreci konveks olduğundan $\lambda \in [0, 1]$ için aşağıdaki eşitsizlikler mevcuttur:

$$X((1-\lambda)u + \lambda v, \cdot) \leq \lambda X(v, \cdot) + (1-\lambda)X(u, \cdot)$$

$$X(\lambda u + (1-\lambda)v, \cdot) \leq \lambda X(u, \cdot) + (1-\lambda)X(v, \cdot),$$

eşitsizlikleri yazılabilir ve bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$X((1-\lambda)u + \lambda v, \cdot) + X(\lambda u + (1-\lambda)v, \cdot) \leq X(u, \cdot) + X(v, \cdot)$$

elde edilir. Son eşitsizlikte $\lambda^{\alpha-1}$ ile çarpılıp, $\lambda \in [0, 1]$ için integral alınıp Lemma 4.5.4 kullanılırsa, (4.5.4) eşitsizliğinin sağ tarafı elde edilir. Böylelikle eşitsizliğin her iki tarafı da ispatlanmış olur.

Sonuç 4.5.2. Teorem 4.5.2'de $\alpha = 1$ alınırsa, Teorem 4.5.1'de verilen konveks stokastik süreçler için klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir.

4.6. p -Konveks Stokastik Süreçler için Kesirli Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda p -konveks stokastik süreçler için kesirli Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir.

Tanım 4.6.1. $I \subseteq (0, \infty)$ reel birer aralık olsun. Bu durumda $p \in \mathbb{R}/\{0\}$ ve $\lambda \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan negatif olmayan $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik sürecine p -konvektir denir:

$$X((\lambda t^p + (1 - \lambda)s^p)^{1/p}, \cdot) \leq \lambda X(t, \cdot) + (1 - \lambda)X(s, \cdot), \quad (a.e.). \quad (4.6.1)$$

Ayrıca yukarıdaki eşitsizlikte $p = 1$ için konvektir ve eşitsizlik ters çevrilirse bu sürece p -konkavdır denir[38].

Lemma 4.6.1. $[u, v] \subset (0, \infty)$, $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kuadratik orta anlamda integrallenebilir p -konveks bir stokastik süreçtir ancak ve ancak

$$Y(t, \cdot) = X(t^{1/p}, \cdot), p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (a.e.).$$

stokastik süreci konvektir.

İspat. (4.6.1) eşitsizliğinde sırasıyla t ve s yerine $a = t^{1/p}$ ve $b = s^{1/p}$ yazılırsa

$$\begin{aligned} X\left([\lambda(t^{1/p})^p + (1 - \lambda)(s^{1/p})^p]^{1/p}, \cdot\right) &= X([\lambda t + (1 - \lambda)s]^{1/p}, \cdot) \\ &= Y((1 - \lambda)t + \lambda s, \cdot) \\ &\leq \lambda X(s^{1/p}, \cdot) + (1 - \lambda)X(t^{1/p}, \cdot) = \lambda Y(s, \cdot) + (1 - \lambda)Y(t, \cdot) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $Y(t, \cdot) = X(t^{1/p}, \cdot)$ stokastik sürecinin konveks olduğu görülür.

Diğer yandan, $Y(t, \cdot) = X(t^{1/p}, \cdot)$ stokastik sürecinin konveks olsun. Bu taktirde aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur:

$$Y((1 - \lambda)t + \lambda s, \cdot) \leq \lambda Y(s, \cdot) + (1 - \lambda)Y(t, \cdot).$$

Yukarıdaki eşitsizlikte sırasıyla t ve s yerine $a = t^p$ ve $b = s^p$ yazılırsa

$$\begin{aligned} Y((1 - \lambda)t^p + \lambda s^p, \cdot) &= X([(1 - \lambda)t^p + \lambda s^p]^{1/p}, \cdot) \\ &\leq \lambda Y(s^p, \cdot) + (1 - \lambda)Y(t^p, \cdot) = \lambda X(s, \cdot) + (1 - \lambda)X(t, \cdot) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $X(t, \cdot)$ stokastik sürecinin p -konveks olduğu görülür

Lemma 4.6.2. $[u, v] \subset (0, \infty)$, $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow (0, \infty)$ kuadratik orta anlamda integrallenebilir bir stokastik süreç olsun. Bu taktirde $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \lambda \in (0,1)$ için aşağıdaki eşitlikler mevcuttur[38]:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 X([\lambda u^p + (1-\lambda)v^p]^{1/p}, \cdot) d\lambda &= \int_0^1 X([\lambda v^p + (1-\lambda)u^p]^{1/p}, \cdot) d\lambda \\
&= \frac{p}{v^p - u^p} \int_u^v \frac{X(t, \cdot)}{t^{1-p}} dt.
\end{aligned}$$

Lemma 4.6.3. $[u, v] \subset (0, \infty)$, $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow (0, \infty)$ kuadratik orta anlamda kesirli integrali mevcut bir stokastik süreç ve $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\alpha > 0$ olsun. Bu takdirde

i) $p > 0$, $Y(t, \cdot) = t^{1/p}$ için $t \in [u^p, v^p]$ alınırsa, aşağıdaki eşitlikler mevcuttur:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{1/2} \lambda^{\alpha-1} X([\lambda u^p + (1-\lambda)v^p]^{1/p}, \cdot) d\lambda \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)}{(u^p - v^p)^\alpha} I_{\left(\frac{u^p+v^p}{2}\right)^+}^\alpha (X \circ Y)(v^p, \cdot), \quad (a. e.), \\
&\int_0^{1/2} \lambda^{\alpha-1} X([\lambda v^p + (1-\lambda)u^p]^{1/p}, \cdot) d\lambda \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)}{(u^p - v^p)^\alpha} I_{\left(\frac{u^p+v^p}{2}\right)^-}^\alpha (X \circ Y)(u^p, \cdot), \quad (a. e.).
\end{aligned}$$

ii) $p < 0$, $Y(t, \cdot) = t^{1/p}$ için $t \in [v^p, u^p]$ alınırsa, aşağıdaki eşitlikler mevcuttur:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{1/2} \lambda^{\alpha-1} X([\lambda u^p + (1-\lambda)v^p]^{1/p}, \cdot) d\lambda \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)}{(v^p - u^p)^\alpha} I_{\left(\frac{u^p+v^p}{2}\right)^+}^\alpha (X \circ Y)(u^p, \cdot), \quad (a. e.), \\
&\int_0^{1/2} \lambda^{\alpha-1} X([\lambda v^p + (1-\lambda)u^p]^{1/p}, \cdot) d\lambda \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)}{(v^p - u^p)^\alpha} I_{\left(\frac{u^p+v^p}{2}\right)^-}^\alpha (X \circ Y)(v^p, \cdot), \quad (a. e.).
\end{aligned}$$

İspat. i) $p > 0$, $Y(t, \cdot) = t^{1/p}$ için $t \in [u^p, v^p]$ alınırsa, 1. integralde $t^p = \lambda u^p + (1-\lambda)v^p$ değişken dönüşümü yapılırsa, $\lambda \in [0, 1/2]$ aralığında

$$\frac{1}{(u^p - v^p)^\alpha} \int_{\frac{u^p + v^p}{2}}^{v^p} (v^p - t)^{\alpha-1} (X \circ Y)(t, \cdot) dt = \frac{\Gamma(\alpha)}{(u^p - v^p)^\alpha} I_{\left(\frac{u^p + v^p}{2}\right)^+}^\alpha (X \circ Y)(v^p, \cdot)$$

dır. 2. integral de uygun değişken dönüşümü ile benzer şekilde elde edilir.

ii) i)'ye benzer şekilde ispat edilir.

Sonuç 4.6.1. Lemma 4.6.3'de $\alpha = 1$ alınırsa, Lemma 4.6.2'de verilen p -konveks stokastik süreçler için klasik integral eşitlikleri elde edilir.

Lemma 4.6.4. $[u, v] \subset (0, \infty)$, $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow (0, \infty)$, (u, v) aralığı üzerinde kuadratik orta anlamda diferensiyellenebilir p -konveks bir stokastik süreç ve $p > 0$ olsun. Bu taktirde $Y(t, \cdot) = t^{1/p}$ üzere, $E[A^2] < \infty$, $E[B^2] < \infty$ için $(X \circ Y)(t, \cdot) = A(\cdot)t + B(\cdot)$ stokastik sürecinin sağ ve sol kesirli integralleri her $t \in [u^p, v^p]$ için sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$I_{\left(\frac{u^p + v^p}{2}\right)^+}^\alpha (X \circ Y)(t, \cdot) = \frac{2^{1-\alpha}(t - u^p)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \left[A(\cdot) \left(t - \frac{\alpha(t - u^p)}{\alpha + 1} \right) + B(\cdot) \right], \quad (4.6.2)$$

$$I_{\left(\frac{u^p + v^p}{2}\right)^-}^\alpha (X \circ Y)(t, \cdot) = \frac{2^{1-\alpha}(v^p - t)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \left[A(\cdot) \left(t + \frac{\alpha(v^p - t)}{\alpha + 1} \right) + B(\cdot) \right]. \quad (4.6.3)$$

İspat. $(X \circ Y)(t, \cdot) = A(\cdot)t + B(\cdot)$ süreci için $I_{\left(\frac{u^p + v^p}{2}\right)^+}^\alpha (X \circ Y)(t, \cdot)$

değerinin $Y(t, \cdot) = t^{1/p}$ olmak üzere $t \in [u^p, v^p]$ için (4.6.2)'deki gibi olduğu aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^n (t - t_k)^{\alpha-1} (X \circ Y)(t_k, \cdot) \Delta t_k \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{2^{1-\alpha}(t - u^p)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \left[A(\cdot) \left(t - \frac{\alpha(t - u^p)}{\alpha + 1} \right) + B(\cdot) \right] \right)^2 \right] \\ &= E \left[\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (t - t_k)^{\alpha-1} [A(\cdot)t_k + B(\cdot)] \Delta t_k \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{2^{1-\alpha}(t - u^p)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \left[A(\cdot) \left(t - \frac{\alpha(t - u^p)}{\alpha + 1} \right) + B(\cdot) \right] \right)^2 \right] = 0. \end{aligned}$$

Burada $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^n (t - t_k)^{\alpha-1} [A(\cdot)t_k + B(\cdot)] \Delta t_k$, $(X \circ Y)(t, \cdot) = A(\cdot)t + B(\cdot)$ 'nin sağ kesirli integrali olup, $s \in (t, u^p)$ için Örnek 4.1.1'deki gibi hesaplanır. Benzer şekilde, $I_{\left(\frac{u^p+v^p}{2}\right)}^\alpha (X \circ Y)(t, \cdot)$ değerinin (4.6.3)'teki gibi olduğu gibi gösterilir.

Önerme 4.6.1. $[u, v] \subset (0, \infty)$, $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow (0, \infty)$, (u, v) aralığı üzerinde kuadratik orta anlamda diferensiyellenebilir p -konveks bir stokastik süreç ve $p > 0$ olsun. Bu takdirde $Y(t, \cdot) = t^{1/p}$ olmak üzere, aşağıdaki eşitsizliği sağlayan her $t \in [u^p, v^p]$ için en az bir $A: \Omega \rightarrow R$ bir rasgele değişkeni mevcuttur:

$$(X \circ Y)(t, \cdot) \geq A(\cdot) \left(t - \frac{u^p + v^p}{2} \right) + X \left(\left[\frac{u^p + v^p}{2} \right]^{1/p}, \cdot \right), \quad (a. e.).$$

İspat: $X(t, \cdot)$, (u, v) aralığında p -konveks olduğundan, $p > 0$, $Y(t, \cdot) = t^{1/p}$ olmak üzere, $(X \circ Y)(t, \cdot)$ (u^p, v^p) aralığında konvektir. O halde $(X \circ Y)(t, \cdot)$, $t_0 \in (u^p, v^p)$ noktasında kuadratik orta anlamda diferensiyellenebilir bir stokastik süreç olduğundan aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$(X \circ Y)(t, \cdot) - (X \circ Y)(t_0, \cdot) \geq (X \circ Y)'(t_0, \cdot)(t - t_0), \quad (a. e.).$$

Buradan $t_0 = \frac{u^p+v^p}{2}$ ile $(X \circ Y) \left(\frac{u^p+v^p}{2}, \cdot \right) = X \left(\left[\frac{u^p+v^p}{2} \right]^{1/p}, \cdot \right)$ elde edilir. Ayrıca $(X \circ Y)' \left(\frac{u^p+v^p}{2}, \cdot \right) = A(\cdot)$ alınırsa ispat biter.

Teorem 4.6.1. $[u, v] \subset (0, \infty)$, $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow (0, \infty)$ negatif olmayan p -konveks stokastik süreci kuadratik orta anlamda integralenebilir ise, bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur[38]:

$$X \left(\left[\frac{u^p + v^p}{2} \right]^{1/p}, \cdot \right) \leq \frac{p}{v^p - u^p} \int_u^v \frac{X(t, \cdot)}{t^{1-p}} dt \leq \frac{X(u, \cdot) + X(v, \cdot)}{2}, \quad (a. e.).$$

Teorem 4.6.2. $[u, v] \subset (0, \infty)$, $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow (0, \infty)$, (u, v) aralığı üzerinde kuadratik orta anlamda diferensiyellenebilir p -konveks bir stokastik süreç ve $\alpha > 0$ olsun. Bu takdirde

i) $p > 0$, $Y(x, \cdot) = x^{1/p}$ için $x \in [u^p, v^p]$ alınırsa, aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur:

$$\begin{aligned} & X\left(\left[\frac{u^p + v^p}{2}\right]^{1/p}, \cdot\right) \\ & \leq \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2^{1-\alpha}(u^p - v^p)^\alpha} \left[I_{\left(\frac{u^p + v^p}{2}\right)^+}^\alpha (X \circ Y)(v^p, \cdot) + I_{\left(\frac{u^p + v^p}{2}\right)^-}^\alpha (X \circ Y)(u^p, \cdot) \right] \\ & \leq \frac{X(u^p, \cdot) + X(v^p, \cdot)}{2}, \end{aligned} \quad (4.6.4)$$

ii) $p < 0$, $Y(x, \cdot) = x^{1/p}$ için $x \in [v^p, u^p]$ alınırsa, aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur:

$$\begin{aligned} & X\left(\left[\frac{u^p + v^p}{2}\right]^{1/p}, \cdot\right) \\ & \leq \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2^{1-\alpha}(v^p - u^p)^\alpha} \left[I_{\left(\frac{u^p + v^p}{2}\right)^+}^\alpha (X \circ Y)(u^p, \cdot) + I_{\left(\frac{u^p + v^p}{2}\right)^-}^\alpha (X \circ Y)(v^p, \cdot) \right] \\ & \leq \frac{X(u^p, \cdot) + X(v^p, \cdot)}{2}. \end{aligned} \quad (4.6.5)$$

İspat. i) $p > 0$ olsun. Önerme 4.6.1'den

$$(X \circ Y)(t, \cdot) \geq A(\cdot) \left(t - \frac{u^p + v^p}{2} \right) + X\left(\left[\frac{u^p + v^p}{2}\right]^{1/p}, \cdot\right), \quad (a. e.).$$

dır. Bu durumda, Lemma 4.6.4'den i)'de sırasıyla $t = v^p$ ve $t = u^p$ yazılırsa

$$\begin{aligned} I_{\left(\frac{u^p + v^p}{2}\right)^+}^\alpha (X \circ Y)(v^p, \cdot) & \geq \frac{2^{1-\alpha}(v^p - u^p)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \left[A(\cdot) \left(v^p - \frac{\alpha(v^p - u^p)}{\alpha + 1} - \frac{u^p + v^p}{2} \right) \right. \\ & \quad \left. + X\left(\left[\frac{u^p + v^p}{2}\right]^{1/p}, \cdot\right) \right], \\ I_{\left(\frac{u^p + v^p}{2}\right)^-}^\alpha (X \circ Y)(u^p, \cdot) & \geq \frac{2^{1-\alpha}(v^p - u^p)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \left[A(\cdot) \left(u^p + \frac{\alpha(v^p - u^p)}{\alpha + 1} - \frac{u^p + v^p}{2} \right) \right. \\ & \quad \left. + X\left(\left[\frac{u^p + v^p}{2}\right]^{1/p}, \cdot\right) \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikler taraf tarafa toplanıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa (4.6.4) eşitsizliğinin sol tarafı elde edilir. Diğer yandan, $X(t, \cdot)$ p -konveks bir stokastik süreç olduğundan (4.6.1) eşitsizliğinden her $\lambda \in [0, 1]$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\frac{X([\lambda u^p + (1 - \lambda)v^p]^{1/p}, \cdot) + X([\lambda v^p + (1 - \lambda)u^p]^{1/p}, \cdot)}{2} \leq \frac{X(u^p, \cdot) + X(v^p, \cdot)}{2}$$

Böylece yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafı $2\lambda^{\alpha-1}$ ile çarpılır ve $\lambda \in [0, 1/2]$ için integrali alınır, Lemma 4.6.3 yardımıyla (4.6.4) eşitsizliğinin sağ tarafı elde edilir. Böylelikle eşitsizliğin her iki tarafı da ispatlanmış olur.

ii) i)'ye benzer şekilde ispat edilir.

Sonuç 4.6.2. Teorem 4.6.2'de $q \rightarrow 1^-$ iken limit alınır, p -konveks stokastik süreçler için Teorem 4.6.1'de verilen klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir.

4.7. İkinci anlamda s -Konveks Stokastik Süreçler için Hermite-Hadamard Tipli Kesirli İntegral Eşitsizliği

Bu kısımda, ikinci anlamda s -konveks süreçler için Hermite-Hadamard tipli kesirli integral eşitsizliği verilmiştir.

Tanım 4.7.1. s reel sayı olmak üzere $s \in (0,1]$ ve $X: [0, \infty) \times \Omega \rightarrow [0, \infty)$ bir stokastik süreç olsun. Bu durumda her $u, v \in [0, \infty)$ ve $\lambda \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan X stokastik sürecine ikinci anlamda s -konvektir denir:

$$X((1-\lambda)u + \lambda v, \cdot) \leq \lambda^s X(v, \cdot) + (1-\lambda)^s X(u, \cdot),$$

Yukarıdaki eşitsizlik yön değiştirdiğinde X stokastik sürecine ikinci anlamda s -konkavdır denir. Yukarıdaki eşitsizlikte $s = 1$ için yazılırsa konveks stokastik süreç tanımını elde edilir [18].

Teorem 4.7.1. $X: [0, \infty) \times \Omega \rightarrow [0, \infty)$ ikinci anlamda s -konveks bir stokastik süreç ve $s \in (0,1]$ olsun. Eğer X stokastik süreci kuadratik orta anlamda integralenebilirse, bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [18]:

$$2^{s-1} X\left(\frac{u+v}{2}, \cdot\right) \leq \frac{1}{v-u} \int_u^v X(t, \cdot) dt \leq \frac{X(u, \cdot) + X(v, \cdot)}{s+1}, \quad (a. e.).$$

Teorem 4.7.2. $X: [0, \infty) \times \Omega \rightarrow [0, \infty)$, $(0, \infty)$ aralığı üzerinde kuadratik orta anlamda diferensiyellenebilir s -konveks bir stokastik süreç ve $q \in (0,1)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur:

$$\begin{aligned}
2^{s-1}X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right) &\leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(v-u)^\alpha} [I_{u+}^\alpha X(v,\cdot) + I_{v-}^\alpha X(u,\cdot)] \\
&\leq \left[\frac{1}{\alpha+s} + \frac{2}{\alpha+s}\left(1 - \frac{1}{2^{\alpha+s}}\right)\right] \frac{X(u,\cdot) + X(v,\cdot)}{2}, \quad (a.e.). \quad (4.7.1)
\end{aligned}$$

İspat. $X(t,\cdot)$ stokastik süreci s -konveks olduğundan $\lambda = 1/2$ için aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur:

$$X\left(\frac{t+s}{2},\cdot\right) \leq \frac{X(t,\cdot) + X(s,\cdot)}{2^s}$$

Burada $t = (1 - \lambda)u + \lambda v$ ve $s = \lambda u + (1 - \lambda)v$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$2^s X\left(\frac{u+v}{2},\cdot\right) \leq X(tu + (1-t)v,\cdot) + X(tv + (1-t)u,\cdot)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlik $\lambda^{\alpha-1}$ ile çarpılıp, $\lambda \in [0,1]$ için integral alınıp Lemma 4.1.3 kullanılırsa, (4.7.1) eşitsizliğinin sol tarafı elde edilir. Diğer yandan, $X(t,\cdot)$ stokastik süreci s -konveks olduğundan $\lambda \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur:

$$X((1-\lambda)u + \lambda v,\cdot) \leq \lambda^s X(v,\cdot) + (1-\lambda)^s X(u,\cdot),$$

$$X(\lambda u + (1-\lambda)v,\cdot) \leq \lambda^s X(u,\cdot) + (1-\lambda)^s X(v,\cdot)$$

eşitsizlikleri yazılabilir ve bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$X((1-\lambda)u + \lambda v,\cdot) + X(\lambda u + (1-\lambda)v,\cdot) \leq [\lambda^s + (1-\lambda)^s][X(u,\cdot) + X(v,\cdot)]$$

elde edilir. Son eşitsizlik $\lambda^{\alpha-1}$ ile çarpılıp, $\lambda \in [0,1]$ için integral alınıp Lemma 4.1.3 kullanılırsa, (4.7.1) eşitsizliğinin sağ tarafı kolayca elde edilir. Böylelikle eşitsizliğin her iki tarafı da ispatlanmış olur.

Sonuç 4.7.2. Teorem 4.7.2’de $\alpha = 1$ alınırsa, Teorem 4.7.1’de verilen konveks stokastik süreçler için klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir.

BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde, öncelikle stokastik süreçler için kuadratik orta anlamda kesirli integral ve türev kavramları tanımlanmıştır. Bunun yanısıra konveks, preinveks, φ -konveks, harmonik konveks, p -konveks ve ikinci anlamda s -konveks stokastik süreçler için Hermite-Hadamard tipi kesirli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir.

Stokastik süreçlerin diğer sınıfları için de benzer çalışmaların yapılabileceği aşıkardır.



KAYNAKLAR

- [1] Euclid, The Thirteen Books of Elements III, (Trans: Thomas L. Heath), 2nd Ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1908. www.google.com., Eriřim Tarihi: 05.10.2017.
- [2] Berggren, J.L., A lacuna in book i of archimedes sphere and cylinder. *Historia Mathematica*, 4, 1-5, 1977.
- [3] Hadamard, J., Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considerée par Riemann. *Journal de Mathématiques Pures Appliquées*, 58, 171-215, 1893.
- [4] Hardy, G.H., Littlewood, J.E., & Polya, G. *Inequalities* (2nd ed.). Cambridge U.P., Cambridge, 1877-1947, 1988.
- [5] Beckenbach, E.F., & Bellman R., *Inequalities*, Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, ([Hungarian Language Ignored]) 276 Seiten, Preis 1 r. 9 k, 1961.
- [6] Mitrinović, D.S., *Analytic Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin, 404, New York, 1970.
- [7] Pecaric, J., *Konveksne Funkcije: Nejednakosti*, Naucna Knjiga, Beograd, 243, 1987.
- [8] Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. & Fink, A.M., *Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives*. Kluwer Academic Publishers, 587, Dordrecht/Boston/London, 1991.
- [9] Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. & Fink, A.M., *Classical and New Inequalities in Analysis*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1993.
- [10] Pachpatte, B.G., *Mathematical Inequalities*, Elsevier B.V., Amsterdam, The Netherlands, 2005.
- [11] Niculescu, C. & Persson, L.E., *Convex Functions and Their Applications, A Contemporary Approach*, Springer Science Business Media, Inc, 2006.
- [12] Dragomir, S.S. & Pearce, C.E.M., *Selected topics on Hermite-Hadamard inequality and applications*, Victoria University, Melbourne, 2000.

- [13] Nikodem, K., On convex stochastic processes. *Aequat. Math.* 20, 184-197, 1980.
- [14] Skowronski, A., On some properties of J-convex stochastic processes. *Aequat. Math.*, 44, 249-258, 1992.
- [15] Kotrys, D., Hermite–Hadamard inequality for convex stochastic processes. *Aequationes Mathematicae*, 83, 143-151, 2012.
- [16] Tomar, M., Set, E., & Okur B., N., On Hermite-Hadamard type inequalities for strongly-log convex stochastic processes. *The Journal of Global Engineering Studies*, 1(2), 53-61, 2014.
- [17] Okur, N., İşcan, İ., & Yüksek Dizdar, E., Hermite-Hadamard type inequalities for p-convex stochastic processes. *An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications*, 9(2), 148-153, 2019.
- [18] Okur N., & Karahan, V., Some integral inequalities of the Hermite-Hadamard type for s-convex stochastic processes on n-coordinates, *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1*, 68(2), 1-16, 2019.
- [19] Akdemir, G.H., Okur B., N. & İşcan, İ., On preinvexity for stochastic processes, statistics. *Journal of the Turkish Statistical Association*, 7(1), 15-22, 2014.
- [20] Okur, B., N., Akdemir, G.H. & İşcan, İ., Some Extensions of Preinvexity for Stochastic Processes. *Comp. Analysis, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, Springer, New York, 155, 259-270, 2016.
- [21] Karahan V., Okur, N., New Integral Inequalities of Hadamard's for Harmonically Convex Stochastic Processes on n-coordinates, Prof. Dr. M. Bayram, Assoc. Prof. Dr. A. Sezer (eds.), 8th International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM-2019), 10-13 March 2019, Book of Proceedings, p.154-158, Istanbul Gelisim University, Istanbul, Turkey.
- [22] Sarikaya, M.Z., Yaldiz H., & Budak H., Some integral inequalities for convex stochastic processes, *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, LXXXV:155-164, 2016.
- [23] Sarikaya, M.Z., Kiriş, M.E. & Çelik, N., Hermite-Hadamard type inequality for φ_h -convex stochastic processes. *AIP Conference Proceedings*, 1726(1), 020076, 2016.
- [24] Set E., Tomar M., & Maden S., Hermite-Hadamard type inequalities for s-convex stochastic processes in the second sense. *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, 2(6), 202-207, 2014.

- [25] Akkurt, A., Genelleştirilmiş Kesirli İntegraller için Bazı İntegral Eşitsizlikleri, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi, 2014.
- [26] Dahmani, Z., New inequalities in fractional integrals. International Journal of Nonlinear Sciences, 9: 493–497, 2010.
- [27] Dragomir, S.S., On Hadamard's inequality for convex functions on the co-ordinates in a rectangle from the plane. Taiwanese Journal of Mathematics, 5:775-788, 2001.
- [28] Sarıkaya, M.Z., Ogünmez, H., On new inequalities via Riemann-Liouville fractional integration, Abstract and Applied Analysis, Article ID 428983, 10 pages (2012).
- [29] Miller, K.S., Ross, B., An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, Wiley, New York (1993).
- [30] Katugampola, U.N., New approach to a generalized fractional integral, Applied Mathematics and Computation, doi:10.1016/j.amc.2011.03.062 (2011).
- [31] Katugampola, U.N., New Approach to a generalized fractional integral, Applied Mathematics and Computation, 218(3): 860-865 (2011).
- [32] Aliyev, R., Stokastik Süreçler Teorisi, KTÜ Matbaası, Trabzon, 2010.
- [33] Değerli, K., Kesirli Mertebelerden Türeve Uygulamalarla Genel Bakış, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yıldız Teknik Üniversitesi, 2018.
- [34] Podlubny, I., “Geometric and Physical Interpretation of Fractional Integration and Fractional Differentiation, Fractional Calculus and Applied Analysis”, 5(4):367-386, (2002).
- [35] Tavassoli M.H., Tavassoli A., ve Rahimi M.R., “The geometric and physical interpretation of fractional order derivatives of polynomial functions, Differential Geometry- Dynamical Systems”, 15: 93-104, (2013).
- [36] Podlubny, I., Fractional Differential Equations, 198, Academic Press, San Diego, (1999).
- [37] Kotrys, D., Hermite–Hadamard inequality for convex stochastic processes. Aequationes Mathematicae, 83, 143-151, 2012.
- [38] Yüksek Dizdar, E., Bazı Konveks Stokastik Süreçler için Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler, Fen Bilimleri Enstitüsü, Giresun Üniversitesi, 2018.

- [39] Noor, M.A., On Hadamard integral inequalities involving two log-preinvex functions. *Journal Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 8(3), 1-6, 2007.
- [40] Okur, N., Yalçın, F.B., & Karahan, V., Some Hermite Hadamard type integral inequalities for multidimensional preinvex functions. *Turkish Journal of Equalities* 3(1), 54-63, 2019.
- [41] Okur, N., & Yalçın, F. B., Two-dimensional operator harmonically convex functions and related generalized inequalities. *Turkish Journal of Science*, 4(1), 30-28, 2019.
- [42] Okur, N., İşcan, İ., & Yüksek Dizdar, E., Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex stochastic processes. *International Journal of Economics and Administrative Studies*, 11, 281-292, 2018.
- [43] Hernandez, E. J., & Gomez, J. F., Hermite-Hadamard type inequalities for convex stochastic processes and Katugampola fractional integral. *Revista Integracion Temas de Matematicas*, No.2, 133-149, (36) 2018.

ÖZGEÇMİŞ

Nazan Ocak İlk, orta ve lise eğitimini Giresun' da tamamladı. 2011 yılında Bulancak Anadolu Lisesi'nden mezun oldu. 2012 yılında başladığı Ondokuz Mayıs Üniversitesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'nü 2017 yılında bitirdi. 2018 yılında Giresun Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı. 2021 yılında Erzurum Horasan Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi'nde matematik öğretmeni olarak çalışmaya başladı

