

**T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BAZI KONVEKS STOKASTİK SÜREÇLER İÇİN
KUANTUM TIPLI İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Adı SOYADI	: İsmail HATİPOĞLU
Tezin Enstitüye Verildiği Tarih	: .../.../2021
Enstitü Anabilim Dalı	: İstatistik
Tez Danışmanı	: Nurgül OKUR

**Temmuz 2021
GİRESUN**

**T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BAZI KONVEKS STOKASTİK SÜREÇLER İÇİN
KUANTUM TIPLI İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İsmail HATİPOĞLU

Enstitü Anabilim Dalı : İstatistik

Bu tez .../.../2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

**Prof. Dr.
Selahattin MADEN
Jüri Başkanı**

**Prof. Dr.
İmdat İŞCAN
Üye**

**Doç. Dr.
Nurgül OKUR
Üye**

**Doç. Dr.
Bahadır KOZ
Enstitü Müdürü**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

İsmail HATİPOĞLU

28/07/2021

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca beni sabırla dinleyen ve her türlü bilgiye ulaşmada bana yardımcı olan, yol gösteren, kıymetli hocam Doç. Dr. Nurgül OKUR'a sonsuz teşekkür ediyorum.

Bu çalışmanın teorisini oluşturma aşamasındaki muhim görüşleri ve manevi desteği için Bakü Devlet Üniversitesi Öğretim Üyesi Prof. Dr. Rovshan ALİYEV'e minnettar olduğumuzu belirtmek isterim.

Ders süresince göstermiş oldukları ilgi, hoşgörü ve eğitimlerinden dolayı Giresun Üniversitesi İstatistik Bölümü akademisyenlerine de minnettarım.

Vakit en önemli hazine ve bana mesai konusunda yardımcı olan kıymeti ölçülemeyen müdürüm Hasan ÜNAL beye ve mesai arkadaşlarıma da çok çok çok teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	I
İÇİNDEKİLER	II
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	IV
ŞEKİLLER LİSTESİ	V
ÖZET	VI
SUMMARY	VII

BÖLÜM 1. GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	5
2.1. Stokastik Süreçler İle İlgili Temel Kavramlar.....	5
2.2. q -Kalkülüs İle İlgili Temel Kavramlar.....	7
BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM	15
3.1. Materyal Ve Yöntem.....	15
BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI	18
4.1. Bir Stokastik Sürecin Kuadratik Orta Anlamda q -Türevi.....	18
4.2. Bir Stokastik Sürecin Kuadratik Orta Anlamda q -İntegrali	24
4.3. Konveks Stokastik Süreçler için q -Hermite-Hadamard Eşitsizliği.....	29
4.4. Preinveks Stokastik Süreçler için q -Hermite-Hadamard Eşitsizliği	32
4.5. φ -Konveks Stokastik Süreçler için q -Hermite-Hadamard Eşitsizliği.....	37
4.6. Harmonik Konveks Stokastik Süreçler için q -Hermite-Hadamard Eşitsizliği...	41
4.7. m -Konveks Stokastik Süreçler için q -Hermite-Hadamard Eşitsizliği.....	45
4.8. r -Konveks Stokastik Süreçler için q -Hermite-Hadamard Eşitsizliği.....	49
4.9. İkinci Anlamda s -Konveks Stokastik Süreçler için q -Hermite-Hadamard Eşitsizliği.....	50
4.10. (p, h) -Konveks Stokastik Süreçler için q -Hermite-Hadamard Eşitsizliği.....	52

BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ	57
KAYNAKLAR	58
ÖZGEÇMİŞ	62



SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$f \in L[a,b]$	: $\int_a^b f(x) dx < \infty$
I	: $\mathbb{R}$ 'de Bir Aralık
I^0	: I 'nın İçi
${}_aD_q$	: q -Türev Operatörü
${}_aD_q f$	: f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden q -Türevi
$D_q f = {}_0D_q f$	: f Fonksiyonunun $a = 0$ İçin Birinci Mertebeden q -Türevi
${}_a d_q$	: q -Diferansiyel Operatörü
${}_a d_q f$	: f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden q -Diferansiyeli
$d_q f = {}_0 d_q f$	: f 'in $a = 0$ için Birinci Mertebeden q -Diferansiyeli
$\int {}_a d_q x$	: q - İntegral Operatörü
$\int f(x) {}_a d_q x$	: f Fonksiyonunun q -İntegrali
$\int f(x) d_q x = \int f(x) {}_0 d_q x$	: f Fonksiyonunun $a = 0$ İçin q -İntegrali
$E(X), m_x$	: X Rastgele Değişkeninin Beklenen Değeri
$Var(X)$	: X Rastgele Değişkeninin Varyansı
$l. i. m.$	: Ortalama Anlamda Limit
$\mathfrak{S}$	: X 'in Alt Kümeleri Üzerinde İnşa Edilen Sigma Cebir
$\mathbb{R}_+$	: Pozitif Reel Sayılar
a.e	: Hemen Hemen Her Yerde

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1. q -İntegralin Geometrik Anlamı.....	3
--	---



BAZI KONVEKS STOKASTİK SÜREÇLER İÇİN KUANTUM TIPLI İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

ÖZET

Bu tezin amacı bazı konveks stokastik süreçler için kuantum tipli yani q -Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde etmektir. Bu tezin giriş bölümünde, kuantum kalkülüse kısaca yer verilmiştir. İkinci bölümde, tezin konusu ile ilgili temel kavramlar sunulmuştur. Materyal ve yöntem kısmında ise, stokastik süreçler için kuadratik orta anlamda yakınsama, süreklilik, türevlenebilme ve integrallenebilme kavramları verilmiştir. Araştırma bulguları bölümünde, stokastik süreçler için kuadratik orta anlamda q -diferensiyel, q -türev ve q -integral operatörleri tanımlanmış ve bu operatörlere ait özellikler verilmiştir. Konveks, preinveks, φ -konveks, harmonik konveks, m -konveks, r -konveks, ikinci anlamda s -konveks ve (p, h) -konveks stokastik süreçlerin her birisine ait ayrı ayrı q -Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Konveks, Preinveks, φ -Konveks, Harmonik Konveks, m -Konveks, r -Konveks, İkinci Anlamda s -Konveks, (p, h) -Konveks, Stokastik Süreçler, q -Hermite-Hadamard Eşitsizliği, Kuadratik Orta Anlamda İntegral.

QUANTUM TYPE INTEGRAL INEQUALITIES FOR SOME CONVEX STOCHASTIC PROCESSES

SUMMARY

The aim of this study is to obtain quantum type integral inequalities, namely q -Hermite-Hadamard type, for some convex stochastic processes. In the introduction of this study, quantum calculus is briefly mentioned. In the second section, the basic concepts related to the subject of the study are presented. In the material and methods, mean-square convergence, continuity, differentiability and integrability are given for stochastic processes. In the research findings section, mean-square q -differential, q -derivative and q -integral operators are defined for stochastic processes and the properties of these operators are given. q -Hermite-Hadamard type integral inequalities are obtained for each of the convex, preinvex, φ -convex, harmonic convex, m -convex, r -convex, s -convex and (p, h) -convex stochastic processes separately.

Keywords: Convex, Preinvex, φ -Convex, Harmonically Convex, m -Conveks, r -Convex, Mean-second s -Convex, (p, h) -Convex, Stochastic Processes, q -Hermite-Hadamard Inequality, Mean-square Integrable.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Konveksliğin ilk temelleri Yunan filozoflar tarafından atılmıştır. Yunanlıların matematiğe en önemli katkılarından biri de Euclid'in [1] "Elements" adlı kitabıdır. Konveksliğin ilk tanım ve gösterimleri bu kitapta bulunmaktadır. Bu konudaki daha kesin bir tanımı ise Archimedes'in [2] "On The Sphere and Cylinder" adlı eserinde de bulmak mümkündür.

Eşitsizlik teorisi Gauss, Cauchy ve Chebyshev ile gelişmeye başlamıştır. Eşitsizlik teorisiyle yakından ilişkili olan konvekslik kavramı göz önünde bulundurularak birçok çalışma yapılmıştır. Bunun en önemli örneklerinden biri Ekim 1881 yılında Hermite'in (1822-1901) Journal Mathesis adlı dergiye gönderdiği konveks fonksiyon için Hermite-Hadamard eşitsizliğidir. $[a, b]$ aralığında tanımlı her reel konveks fonksiyon için meşhur Hermite-Hadamard eşitsizliği aşağıdaki gibidir [3]:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

19. ve 20. yüzyılda bulunan eşitsizliklerin bir kısmı konveks fonksiyonlarla ilişkilendirilerek temel eşitsizlikler haline gelmiştir. Bu tür eşitsizlikleri konu alan ilk temel çalışma 1934'te Hardy, Littlewood ve Pólya [4] tarafından yazılan "Inequalities" adlı kitaptır. İkinci çalışma ise Beckenbach ve Bellman [5] tarafından 1961'de yazılan, 1934-1960 yılları arasında elde edilen yeni eşitsizliklerin sonuçlarını içeren, "Inequalities" adlı eserdir. Konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler içeren ilk kaynak ise "Convex Functions: Inequalities" başlığıyla 1987 yılında Pečarić [6] tarafından yazılmıştır. Hermite-Hadamard eşitsizlikleri konusu Dragomir ve Pearce [7] tarafından yazılan "Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications" adlı eserde detaylı olarak yer almaktadır.

Son yıllarda, konvekslik ve eşitsizlik kavramları, optimizasyon ve matematiksel programlama problemlerinin incelenmesinde daha geniş bir çalışma imkanı sağladığı için, Olasılık ve İstatistik Teorisi dahil olmak üzere birçok uygulama sahasında literatürde önemli bir yere sahip olmuştur. Özellikle, stokastik süreçler için stokastik

monotonluk ve konveksliği tanımlamak optimizasyonda özellikle optimal tasarımlarda, olasılıksal nicelikler mevcut olduğunda sayısal yaklaşımlar elde edebilmek için büyük önem taşımaktadır.

1980’de Nikodem [8], konveks stokastik süreçleri tanımlamış ve konveks stokastik süreçler için bilinen bazı özellikleri vermiştir. Jensen-konveks, λ -konveks stokastik süreçler 1992’de Skowronski [9] tarafından tanımlanmıştır. Ayrıca, Kotrys’in [10], her reel konveks X stokastik süreci için elde ettiği Hermite-Hadamard eşitsizliği aşağıdaki gibidir:

$$X\left(\frac{u+v}{2}, \cdot\right) \leq \frac{1}{v-u} \int_u^v X(t, \cdot) dt \leq \frac{X(u, \cdot) + X(v, \cdot)}{2}.$$

Ayrıca, Okur ve ark. [11-15, 16, 17, 18, 19] Sarıkaya ve ark. [20, 21] Set ve ark. [22] farklı konveks stokastik süreçlere ait sınıflar için bazı eşitsizlikleri genişletmeye ve genelleştirmeye çalışmıştır.

Son yıllarda bilim adamları tarafından matematiksel analiz için bir başlangıç olan ve diferensiyel ve integral olmak üzere iki ana kola sahip olan kalkülüse alternatif olarak, limitsiz kalkülüs olarak da bilinen “Kuantum Kalkülüs” keşfedilmiştir. Bu mevzudan kısaca bahsetmek gerekirse, aşağıdaki oran dikkate alınmalıdır:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Eğer bu oranın x, x_0 a yaklaşırken $(x \rightarrow x_0)$ limiti varsa, bu oran $f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki $\frac{df}{dx}$ türevinin tanımı olacaktır. Ancak bu oranda $x = qx_0$ kabul edildiğinde $q \neq 1$ ve sabit bir sayı ise limit alınamaz. Bu durumda, q -kalkülüs kuralları kullanılmalıdır. Buna göre $x = qx_0$ alınırsa,

$$D_q f(x) = \frac{f(qx_0) - f(x_0)}{qx_0 - x_0}$$

elde edilir. $D_q f(x)$ ’e $f(x)$ ’in q -türevi veya $f(x)$ ’in türevinin q -benzeri denir. Dikkat edilirse, aşağıdaki eşitlikler doğrudur [23]:

$$\lim_{q \rightarrow 1} D_q f(x) = \frac{df}{dx} = f'(x)$$

On sekizinci yüzyılda, ünlü matematikçi Leonhard Euler, q -kalkülüs çalışmasını Newton'un sonsuz serideki çalışmasında q parametresini kullanmıştır. 1869 yılında Thomae $[0,1]$ aralığı üzerinde q -integrali aşağıdaki şekilde tanıtmıştır ([24],[25]):

$$\int_0^1 f(x) d_q x = (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n), 0 < q < 1.$$

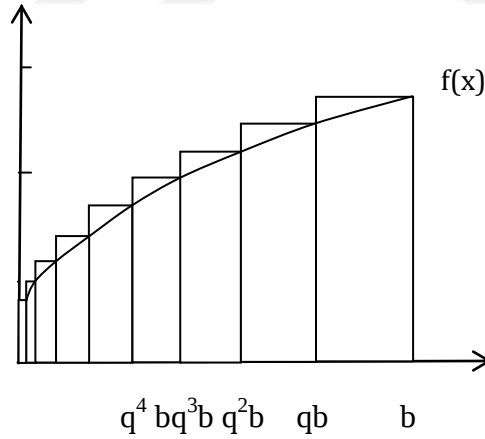
H.H. Jackson 1910 yılında $[a, b]$ üzerinde q -integral için genel bir tanım yapmıştır:

$$\int_0^a f(x) d_q x = a(1-q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(aq^n), 0 < |q| < 1$$

olmak üzere

$$\int_a^b f(x) d_q x = \int_0^b f(x) d_q x - \int_0^a f(x) d_q x$$

şeklindedir ([26],[27]). q -integralin geometrik anlamı aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi sonsuz çokluktaki dikdörtgenlerin alanlarının toplamıdır.



Şekil 1.1. q -İntegralin Geometrik Anlamı

Şekilden de görüldüğü gibi $[a, b]$ aralığı sonsuz çoklukta aralıklara bölünmüştür. Bu alanların toplamı bize q -integrali verecektir. Bu durum analizdeki belirli integralin tanımına benzemektedir. Eğer $q \rightarrow 1$ için limit alınırsa,

$$\lim_{q \rightarrow 1} (1-q)b \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n b)$$

ifadesinde dikdörtgenlerin genişliği sıfıra yaklaşıp ve bu durumda bu limit Riemann toplamına yakınsayacaktır. O halde $f(x)$, $[a, b]$ aralığında sürekli ise,

$$\lim_{q \rightarrow 1} \int_0^b f(x) d_q x = \int_0^b f(x) dx$$

olacaktır. q -integral için $[0, \infty)$ aralığında genelleştirilmiş benzersiz tek bir seçim yoktur. Jackson'un tanımına benzer

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n)$$

mutlak yakınsak olması koşulu ile Hahn, q -integrali aşağıdaki şekilde tanımlamıştır ([28]):

$$\int_0^{\infty} f(x) d_q x = (1-q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^n f(q^n), 0 < |q| < 1.$$

Literatürde q -kalkülüs kullanılarak yapılmış birçok çalışma mevcuttur. Konuyla ilgili olarak mevcut olan bazı çalışmalar “Harmonik Konveks Fonksiyonlar İçin q -Hermite Hadamard Tipli Eşitsizlikler [29]”, “Preinveks Fonksiyonlar İçin Bazı Kuantum İntegral Eşitsizlikleri [30]” örnek verilebilir. Ayrıca “Konveks Stokastik Fonksiyonlar İçin q -Hermite-Hadamard-Fejer Tipi Eşitsizlik [31]”, “Konveks ve kuasi konveks fonksiyonların orta nokta tipi eşitsizlikleri için q -Hermite Hadamard tipi eşitsizlikler [32]” örnek verilebilir.

Bu tezde ise kuadratik orta anlamda yakınsama, süreklilik, türevlenebilme ve integrallenebilme tanımlarından yola çıkılarak, kuadratik orta anlamda q - türevlenebilme ve q -integrallenebilme tanımları verilmiş olup konveks, preinveks, φ -konveks, harmonik konveks, m -konveks, r -konveks, ikinci anlamda s -konveks ve (p, h) -konveks fonksiyonların stokastik süreçleri için q -Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

2.1. Stokastik Süreçler İle İlgili Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. $\mathfrak{F}$, $\Omega \neq \emptyset$ örnek uzayı üzerinde tanımlanmış bir σ -cebiri olmak üzere, $P: \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahip ise, P fonksiyonuna $\mathfrak{F}$ üzerinde bir “olasılık ölçüsü” denir. $P(A)$ ’ya ise, “ A olayının olasılık ölçüsü” veya “ A olayının olasılığı” denir [33]:

- 1) $\forall A \in \mathfrak{F}$ için $P(A) \geq 0$,
- 2) $P(\Omega) = 1$,
- 3) İkişer ikişer ayrık kümelerin oluşturduğu $\forall (A_n) \in \mathfrak{F}$ olaylar dizisi için aşağıdaki eşitlik doğrudur:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Tanım 2.1.2. $\Omega \neq \emptyset$ bir örnek uzay, Ω ’da tanımlanmış bir σ -cebiri ve $P, \mathfrak{F}$ üzerinde tanımlanmış bir olasılık ölçüsü olmak üzere, $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ üçlüsüne bir “olasılık uzayı” denir [33].

Tanım 2.1.3. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ bir olasılık uzayı ve $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x \in \mathbb{R}$ sayısı için $\{\omega: \xi(\omega) \leq x\} \in \mathfrak{F}$ yani $\mathfrak{F}$ -ölçülebilir ise, ξ fonksiyonuna bir “rastgele değişken” denir [33].

Tanım 2.1.4. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ bir olasılık uzayı ve $\emptyset \neq T \subseteq \mathbb{R}$ bir küme olsun. Reel değerli $X(t, \omega)$ fonksiyonu, her $t \in T$ için Ω kümesinde tanımlanmış bir rastgele değişken ise, bu fonksiyona bir “rastgele fonksiyon” denir. $X(t, \omega), Y(t, \omega)$ sembolleri ile gösterilebilir. Eğer burada $T = \mathbb{R}^+$ ise ve t parametresi zamanı ifade ediyorsa, bu durumda $X(t, \omega)$ rastgele fonksiyonuna bir “stokastik süreç” denir [33].

Tanım 2.1.5. $X(t, \omega)$ bir stokastik süreç, $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ olsun. Bu durumda

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P\{\omega: X(t_1, \omega) \leq x_1, \dots, X(t_n, \omega) \leq x_n\}, x_i \in \mathbb{R}$$

fonksiyonuna “ $X(t, \omega)$ stokastik sürecinin n boyutlu dağılım fonksiyonu” denir. Her $t_1, t_2, \dots, t_n$ için n boyutlu $F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$ fonksiyonlarının $\{F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)\}$, $n \geq 1$ ailesine “stokastik sürecin sonlu boyutlu dağılım fonksiyonları” denir [33] ve bu fonksiyon aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- (1) $F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \infty)$,
- (2) $F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_n}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$.

Teorem 2.1.1. $\{F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)\}$, $t_i \in T$, $t_1 < \dots < t_n$, $n \geq 1$ ailesi, yukarıdaki 1. ve 2. özelliklerine sahip olsun. Bu durumda

$$P\{\omega: X(t_1, \omega) \leq x_1, \dots, X(t_n, \omega) \leq x_n\} = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$$

şeklindeir. Bu teoreme göre, stokastik süreç ile onun sonlu boyutlu dağılımları birbirlerini birebir tanımlamaktadır. T ve D durum kümesinin her biri hem kesikli hem de sürekli olabilir [33].

Tanım 2.1.6. $T \subseteq \mathbb{N}$ ise $X(t, \omega)$ ’e kesikli zamanlı stokastik süreç, T aralık ise $X(t, \omega)$ ’e sürekli zamanlı stokastik süreç denir. Eğer $X(t, \omega)$ stokastik sürecinin D durum (değerler) kümesi kesikli ise bu takdirde sürecin sonlu boyutlu dağılımları

$$P_{t_1, \dots, t_n}(k_1, \dots, k_n) = P\{\omega: X_{t_1}(\omega) = k_1, \dots, X_{t_n}(\omega) = k_n\}, t_n \in T, n = 1, 2, \dots$$

olasılıkları ile tanımlanmaktadır [33].

Eğer $X(t, \omega)$ stokastik sürecinin D durum kümesi sayılamayan sonsuz elemana sahip ise bu takdirde stokastik sürecin sonlu boyutlu dağılım fonksiyonu [33]:

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} P_{t_1, \dots, t_n}(u_1, \dots, u_n) du_1 \dots du_n$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada $P_{t_1, \dots, t_n}(u_1, \dots, u_n)$, sürecin n boyutlu olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

Tanım 2.1.7. $X(t, \omega)$ bir stokastik süreç, $F_t(x)$ bu stokastik sürecin bir boyutlu dağılım fonksiyonu olsun. Eğer her t için

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| dF_t(x) < +\infty \text{ ise } E(X(t, \omega)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_t(x)$$

integraline “ $X(t, \omega)$ stokastik sürecinin beklenen değeri” denir. $X(t, \omega)$ stokastik sürecinin beklenen değeri $m_X(t)$ sembolü ile de gösterilmektedir [33].

2.2. q -Kalkülüs İle İlgili Temel Kavramlar

Burada q -analizdeki temel tanımlar olan q -sayılarının tanımlanması, q -faktöriyel ve q -Pochhammer sembolü gibi kavramlar tanımlanıp q -analizinin en önemli teoremlerinden olan Binom teoremi verilecektir.

Klasik q -teorisi negatif olmayan tamsayıların q -benzerlerini tanımlamakla başlamıştır. Bir n tamsayısının q -benzeri $0 < q < 1$ için

$$\lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{1 - q^n}{1 - q} = n$$

eşitliğinden ilham alarak tanımlanmıştır. Bu tez boyunca aksi belirtilmedikçe $0 < q < 1$ kabul edilecektir.

Tanım 2.2.1. Bir n pozitif tamsayısının q -benzeri $0 < q < 1$ için $[n]_q$ veya kısaca $[n]$ gösterimi kullanılır.

$$[n] = [n]_q = \frac{1 - q^n}{1 - q} = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$$

şeklinde tanımlanır. Bu son eşitlik, reel veya kompleks bir α sayısının q -benzerini tanımlamak için de kullanılır. Yani reel veya kompleks α sayısının q -benzeri

$$[a] = \frac{1 - q^a}{1 - q}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu son eşitlikte $a \rightarrow \infty$ için limit alınarak klasik analizdeki sonsuz kavramının q -benzeri

$$[\infty] = \frac{1}{1-q}$$

şeklinde tanımlanır [23].

Tanım 2.2.2. Doğal sayılardaki faktöriyel kavramına benzer şekilde bir n pozitif tamsayısı için $[n]! = [1][2] \dots [n]$ eşitliği ile tanımlanır. Ayrıca $[0]! = 1$ dir.

Tanım 2.2.3. Bir a kompleks ve $0 < q < 1$ için $(1-a)(1-aq) \dots (1-aq^{n-1})$ çarpımı $(a; q)_n$ sembolü ile gösterilir ve $(a; q)$ gösterime q -Pochhammer sembolü denir [34].

Bu durumda $(a; q)_n = (1-a)(1-aq) \dots (1-aq^{n-1}) = \prod_{k=0}^{n-1} (1-aq^k)$ olur. Bu eşitlikte $n \rightarrow \infty$ için limit alırsak sonsuz q -Pochhammer sembolü $(a; q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty} (1-aq^k)$ elde edilir. $a = q$ alındığında $(q; q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty} (1-qq^k)$ olduğundan q -faktöriyel, q -Pochhammer sembolü cinsinden

$$[n]! = \frac{(q; q)_n}{(1-q)^n} = \frac{(q; q)_\infty}{(1-q)^n (q^{n+1}; q)_\infty}$$

şeklinde ifade edilir. Klasik analizde n, k iki doğal sayı ve $n > k$ olmak üzere

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

şeklindedir ve $(x+y)^n$ iki terimli

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

şeklinde açılıma sahiptir. q -analizde

$$xq = qx, \quad yq = qy \quad \text{ve} \quad yx = qxy$$

değişme kuralları kabul edildiğinde Gaussian katsayıları veya Gaussian Binom katsayıları olarak da adlandırılan q -binom katsayılarının tanımına ulaşılır.

Tanım 2.2.4. Binom katsayısının q -benzeri

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[k]! [n-k]!}$$

şeklinde tanımlanır [23]. Üstelik $(x+y)^n$ iki terimlisinin q -analizdeki karşılığı

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^{n-k} y^k$$

şeklindedir. Klasik analizde binom katsayıları arasında

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

şeklinde bir ilişki vardır. Gaussian Binom katsayıları arasında ise

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^k + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + q^{k+1-k} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}$$

şeklinde iki ilişki söz konusudur. Burada

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \quad \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$$

şeklindedir [23].

q -Binom katsayılarının q -Pochhammer cinsinden ifadesi

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{(q; q)_n}{(q; q)_{n-k} (q; q)_k}$$

şeklindedir.

Teorem 2.2.1. Her $k \in \mathbb{N}$ için $c_k \geq 0$

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 - c_k) < \infty \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} c_k < \infty$$

[34].

Teorem 2.2.2. (q -Binom Teoremi) $|x| < 1, |q| < 1$ için

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a; k)_k}{(q; q)_k} x^k = \frac{(ax; q)_{\infty}}{(x; q)_{\infty}}$$

şeklindedir [23].

Sonuç 2.2.1. q -binom teoreminin sonuçları aşağıda verilmiştir [23].

- (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(q; q)_n} = \frac{1}{(x; q)_{\infty}}, |x| < 1, |q| < 1.$
- (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(q; q)_n} = \frac{1}{(x; q)_{\infty}}, |x| < 1, |q| < 1.$
- (c) $\sum_{k=0}^N \begin{bmatrix} N \\ k \end{bmatrix} (-1)^k q^{\binom{k}{2}} x^k = (x; q)_N.$
- (d) $\sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} N+k-1 \\ k \end{bmatrix} x^k = \frac{1}{(x; q)_N}, \quad |x| < 1.$

Tanım 2.2.5. Bir f fonksiyonunun q -diferensiyeli $d_q f$ ile gösterilir ve

$$d_q f(x) = f(qx) - f(x)$$

şeklinde tanımlanır [35].

Tanım 2.2.6. Bir f fonksiyonunun q -türevi $D_q f$ ile gösterilir ve $x \neq 0$ olmak üzere klasik analizdeki türev tanımına benzer olarak

$$D_q f(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x}$$

şeklinde iki diferensiyelin oranı olarak tanımlanır [6]. f fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki q -türevi ise $f'(0)$ olarak tanımlanır. Buna göre bir f fonksiyonunun q -türevi

$$D_q f(x) = \begin{cases} \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x}, & x \neq 0 \\ f'(0), & x = 0 \end{cases}$$

şeklinde de ifade edilir [36]. q -Türev ile ilgili özellikler aşağıda listelenmiştir. Bu eşitliklerin ispatı q -türev tanımı ve doğrudan hesaplamalarla elde edilebilir. Bu eşitlikler ispatı ile [4]'de bulunabilir.

$$(1) \quad D_q(f(x) \pm g(x)) = (D_q f)(x) \pm (D_q g)(x)$$

$$(2) \quad D_q(\alpha f(x)) = \alpha(D_q f)(x)$$

$$(3) \quad D_q(f(x)g(x)) = f(qx)(D_q g)(x) + g(x)(D_q f)(x)$$

$$(4) \quad D_q(f(x)g(x)) = f(x)(D_q g)(x) + g(qx)(D_q f)(x)$$

$$(5) \quad D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)D_q f(x) - f(qx)D_q g(x)}{g(qx)g(x)}, \quad g(qx)g(x) \neq 0$$

$$(6) \quad D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(qx)D_q f(x) - f(qx)D_q g(x)}{g(qx)g(x)}, \quad g(qx)g(x) \neq 0$$

Tanım 2.2.7. Thomae [1869] ve Jackson [1910] tarafından verilmiştir. Bir f fonksiyonunun $[0, a]$ aralığı üzerinden q -integrali

$$\int_0^a f(x) d_q x = \sum_{n=0}^{\infty} f(aq^n)(aq^n - aq^{n+1}) = a(1-q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(aq^n)$$

eşitliği ile tanımlanır. a ve b keyfi sayılar olmak üzere

$$\int_a^b f(x) d_q x = \int_0^b f(x) d_q x - \int_0^a f(x) d_q x$$

şeklinde tanımlanır [23]. Burada $q \rightarrow 1^-$ iken limit alınarak

$$\lim_{q \rightarrow 1^-} \int_0^a f(x) d_q x = \int_0^a f(x) dx$$

elde edilir. Klasik analizin temel teoremlerinin q -benzerleri aşağıda verilmiştir. Bu teoremler ispatlarıyla birlikte [23]'de bulunabilir.

Teorem 2.2.3. $x = a$ noktasında sürekli bir f fonksiyonunun q -anti türevi F ise yani $D_q F = f$ ise

$$\int_a^b f(x) d_q x = F(b) - F(a)$$

eşitliği mevcuttur [33].

Teorem 2.2.3. Herhangi bir f fonksiyonu için

$$D_q \int_0^x f(t) d_q t = f(x)$$

eşitliği vardır [23].

Tanım 2.2.8. Klasik analizde

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k = c_0 + c_1(x-a) + \dots + c_n(x-a)^n + \dots$$

şeklindeki sonsuz toplama kuvvet serisi denir. Buradaki c_k sayılarına serinin katsayıları adı verilir. Eğer bir f fonksiyonu a noktasının bir komşuluğunda her mertebeden türeve sahip ise f fonksiyonu bu komşuluktaki her bir x için

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

şeklinde bir kuvvet serisi olarak ifade edilebilir. Bu kuvvet serisine *Taylor Serisi* denir. Herhangi bir $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ için x^n nın q -türevi

$$D_q x^n = \frac{(qx)^n - x^n}{(q-1)x} = \frac{(q^n - 1)x^n}{(q-1)x} = \frac{1 - q^n}{1 - q} x^{n-1} = [n] x^{n-1}$$

olmasına rağmen

$$D_q (x-a)^n \neq [n](x-a)^{n-1}$$

dir. Dolayısıyla q -analizde $D_q (x-a)_q^n = [n](x-a)_q^{n-1}$ özelliğini sağlayan ve Taylor serisinde $(x-a)^n$ ifadesinin yerini tutacak bir ifadeye ihtiyaç vardır.

Tanım 2.2.9. $a, b \in \mathbb{C}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ olmak üzere $(a+b)^n$ nin q benzeri $(a+b)_q^n$ ile gösterilir ve

$$(a+b)_q^n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \prod_{j=0}^{n-1} (a + q^j b) = (a+b)(a+bq) \dots (a+bq^{n-1}), & n \geq 1 \end{cases}$$

eşitliği tanımlanır [35].

Örnek 2.2.1. Bu örnekte, $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $a \in \mathbb{C}$ olmak üzere $D_q (x+a)_q^n = [n](x+a)_q^{n-1}$ eşitliğinin sağlandığı gösterilecektir.

$$\begin{aligned}
D_q(x+a)_q^n &= \frac{(qx+a)_q^n - (x+a)_q^n}{(q-1)x} \\
&= \frac{(qx+a) \dots (qx+aq^{n-1}) - (x+a) \dots (x+aq^{n-1})}{(q-1)x} \\
&= \frac{((qx+a)q^{n-1} - (x+aq^{n-1}))(x+a)_q^{n-1}}{(q-1)x} \\
&= \frac{(q^n - 1)x(x+a)_q^{n-1}}{(q-1)x} \\
&= \frac{q^n - 1}{q - 1} (x+a)_q^{n-1} \\
&= [n](x+a)_q^{n-1}, \quad (x+a)_q^0 = 1
\end{aligned}$$

Örnek 2.2.2. $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $a \in \mathbb{C}$ olmak üzere $D_q(x+a)_q^n = [n](a+qx)_q^{n-1}$ eşitliğinin sağlandığı gösterilecektir.

$$\begin{aligned}
D_q(x+a)_q^n &= \frac{(a+qx)_q^n - (a+x)_q^n}{(q-1)x} \\
&= \frac{(a+qx) \dots (a+q^n x) - (a+x) \dots (a+q^{n-1}x)}{(q-1)x} \\
&= \frac{((a+q^n x) - (a+x))(a+qx)_q^{n-1}}{(q-1)x} \\
&= \frac{(a+q^n x - a - x)(a+qx)_q^{n-1}}{(q-1)x} \\
&= \frac{(q^n - 1)x(a+qx)_q^{n-1}}{(q-1)x} \\
&= \frac{q^n - 1}{q - 1} (a+qx)_q^{n-1} \\
&= [n](a+qx)_q^{n-1}
\end{aligned}$$

Sonuç olarak $D_q(x+a)_q^n \neq D_q(a+x)_q^n$ dir. Benzer işlemler yapılarak $D_q(x-a)_q^n = -[n](x-a)_q^{n-1}$ eşitliği benzer hesaplamalarla gösterilebilir. Böylece bir f fonksiyonunun Taylor açılımının q -benzeri aşağıdaki şekilde verilebilir.

Tanım 2.2.10. f fonksiyonu (a, b) aralığında sürekli ve $c \in [a, b]$ olsun. O halde f nin q -Taylor açılımı

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_q^n f(c)}{[n]!} (z - c)_q^n, \quad z \in (a, b)$$

formal serisi ile verilir [37]. Basit hesaplamalarla $(a - b)_q^n = a^n \left(\frac{b}{a}; q\right)_n$ eşitliği kolayca gösterilebilir. Dolayısıyla bir f fonksiyonunun q -Taylor serisi

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_q^n f(c)}{[n]!} z^n \left(\frac{c}{z}; q\right)_n$$

eşitliği ile verilir.

BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Materyal ve Yöntem

Bu tezde, kuadratik orta anlamda yakınsama, süreklilik, türevlenebilme ve integrallenebilme kavramları kullanılmaktadır.

Tanım 3.1.1. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında $\{X_n\}$, $n \geq 1$ rastgele değişkenler dizisi ve X rastgele değişkeni verilsin. Bunun yanı sıra $E|X_n| < \infty$ ve $E|X| < \infty$ olsun. Eğer $0 < r < \infty$ ve $n \rightarrow \infty$ iken

$$E|X_n - X|^r = \int |X_n(\omega) - X(\omega)|^r dP(\omega) \rightarrow 0$$

ise, bu takdirde $\{X_n\}$ dizisi X 'ye r . mertebeden orta anlamda yakınsıyor denir ve bu yakınsama $n \rightarrow \infty$ iken $X_n \xrightarrow{L_r} X$ şeklinde yazılır. Bu yakınsama çeşidine analizde L_r anlamında yakınsama denir. Özel olarak $r = 2$ olduğunda bu yakınsamaya kuadratik orta yakınsama denir. Bu yakınsama *l.i.m.* $_{n \rightarrow \infty} X_n = X$ şeklinde yazılır. Burada *l.i.m.* “limit in mean” kelimelerinin kısaltmasıdır [33].

Tanım 3.1.2. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında $t \in T \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $\{X_n(t, \cdot)\}$, $n \geq 1$ stokastik süreçler dizisi ve $X(t, \cdot)$ stokastik süreci verilsin. Bunun yanı sıra $E|X_n(t, \cdot)| < \infty$ ve $E|X(t, \cdot)| < \infty$ olsun. Eğer $\forall t \in T$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E (X_n(t, \cdot) - X(t, \cdot))^2 = 0$$

ise $\{X_n(t, \cdot)\}$, $n \geq 1$ stokastik süreçler dizisi, $X(t, \cdot)$ stokastik sürecine kuadratik orta anlamda yakınsaktır denir [33] ve aşağıdaki gibi gösterilir:

$$l.i.m._{n \rightarrow \infty} X_n(t, \cdot) = X(t, \cdot), \quad (a.e.).$$

Tanım 3.1.3. $X(t, \cdot)$ stokastik süreci verilsin. Eğer

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} E(X(t + \Delta, \cdot) - X(t, \cdot))^2 = 0 \quad (3.1.1)$$

ise, bu durumda $X(t, \cdot)$ stokastik sürecine t noktasında kuadratik orta anlamda süreklidır denir ve bu durum aşağıdaki gibi gösterilir [33]:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} l.i.m. X(t + \Delta, \cdot) = X(t, \cdot), \quad (a.e.).$$

Teorem 3.1.1. Bir $X(t, \cdot)$ stokastik sürecinin kuadratik orta anlamda sürekli olması için yeterli koşul, $K(t_1, t_2)$ kovaryans fonksiyonunun $\forall t_1, t_2 \in T$ için $t_1 = t_2 = t$ noktasında sürekli olmasıdır [33].

Tanım 3.1.4. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında $t \in T \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $X(t, \cdot)$ stokastik süreci verilsin. Eğer mevcut ise, aşağıdaki limite $X(t, \cdot)$ stokastik sürecinin kuadratik orta anlamda türevi denir [33]:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} E \left[\frac{X(t + \Delta, \cdot) - X(t, \cdot)}{\Delta} - X'(t, \cdot) \right]^2 = 0. \quad (3.1.2)$$

Bu tanımı aşağıdaki gibi yazmak mümkündür:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} l.i.m. \frac{X(t + \Delta, \cdot) - X(t, \cdot)}{\Delta} = X'(t, \cdot), \quad (a.e.). \quad (3.1.3)$$

(3.1.2) limitinin varlığı ve tekliği için bir koşulun sağlanması gereklidir. Bu limitin varlığı için gerekli koşul ise $X(t, \cdot)$ stokastik sürecinin kuadratik orta anlamda sürekli olmasıdır ve yeterli koşul ise, $K(t_1, t_2)$ kovaryans fonksiyonunun $\forall t_1, t_2 \in T$ için $t_1 = t_2 = t$ noktasında 2. mertebeden karışık türevinin mevcut olmasıdır.

Tanım 3.1.5. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında $t \in T \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $X(t, \cdot)$ stokastik fonksiyonu verilsin. Ayrıca $[u, v]$ aralığının parçalanışı $u = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = v$, $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{k \leq n} |\Delta t_k| = 0$ olsun. Bu durumda $X(t, \omega)$ stokastik fonksiyonunun $[u, v]$ aralığındaki integrali aşağıdaki gibi tanımlanır [33]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\left(\sum_{k=1}^n X(t_k, \cdot) \Delta t_k - \int_u^v X(t, \cdot) dt \right)^2 \right] = 0.$$

Bu tanımı aşağıdaki gibi yazmak mümkündür:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n X(t_k, \cdot) \Delta t_k = \int_u^v X(t, \cdot) dt, \quad (a. e.).$$

Bu limitin varlığı için gerekli koşul ise $X(t, \cdot)$ stokastik sürecinin kuadratik orta anlamda sürekli olmasıdır ve yeterli koşul ise, $K(t_1, t_2)$ kovaryans fonksiyonunun $\forall t_1, t_2 \in T$ için $t_1 = t_2 = t$ noktasında iki katlı karışık integralinin mevcut olmasıdır. Ayrıca $X(t, \cdot) \leq Y(t, \cdot)$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\int_u^v X(t, \cdot) dt \leq \int_u^v Y(t, \cdot) dt, \quad (a. e.).$$

BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu kısımda, kuadratik orta anlamda q -türevlenebilme ve q -integrallenebilme kavramları verildikten sonra, bazı konveks stokastik süreçler için q -Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilmiştir.

Bilinmelidir ki, kovaryans fonksiyonun özelliklerinden $\varphi(t)$ rastgele olmayan bir fonksiyon olmak üzere $Y(t, \cdot) = X(t, \cdot) + \varphi(t)$ stokastik sürecinin kovaryans fonksiyonu $\forall t_1, t_2 \in T$ için $K_Y(t_1, t_2) = K_X(t_1, t_2)$ 'dır. Bu nedenle, $X^\circ(t, \cdot) = X(t, \cdot) - E(X(t, \cdot))$ merkezleşmiş sürecinin kovaryans fonksiyonu ile $X(t, \cdot)$ sürecinin kovaryans fonksiyonu aynıdır. Yani $\forall t_1, t_2 \in T$ için $K_{X^\circ}(t_1, t_2) = K_X(t_1, t_2)$ 'dır. Buna göre, bazı teoremlerin ispatında genelliği bozmadan $\forall t \in T$ için $E(X(t, \cdot)) = 0$ olduğu varsayılabılır. Bu durumda, $K_X(t_1, t_2)$ aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$K_X(t_1, t_2) = E(X(t_1, \cdot)X(t_2, \cdot)) - E(X(t_1, \cdot))E(X(t_2, \cdot)) = E(X(t_1, \cdot)X(t_2, \cdot)).$$

4.1. Bir Stokastik Sürecin Kuadratik Orta Anlamda q -Türevi

Bu kısımda, stokastik süreçler için kuadratik orta anlamda q -türevi ve özellikleri verilmiştir.

Tezin bu kısmından itibaren, $u, v \in \mathbb{R}$, $u < v$ olmak üzere $T := [u, v] \subset \mathbb{R}$; $u_1, v_1 \in \mathbb{R}$, $u_1 < v_1$, $u_2, v_2 \in \mathbb{R}$, $u_2 < v_2$ olmak üzere $\Delta := [u_1, v_1] \times [u_2, v_2] \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ve $0 < q < 1$, $0 < q_1 < 1$, $0 < q_2 < 1$ olarak kabul edilmiştir.

Tanım 4.1.1. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlı herhangi bir $X: T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik süreci verilsin. Bu taktirde

$$E[(X(qt + (1 - q)u, \cdot) - X(t, \cdot)) - {}_u d_q X(t, \cdot)]^2 = 0$$

eşitliğine $X(t, \cdot)$ stokastik sürecinin kuadratik orta anlamda q -diferensiyeli denir ve kısaca aşağıdaki gibi hesaplanır:

$${}_u d_q X(t, \cdot) = X(qt + (1 - q)u, \cdot) - X(t, \cdot), \quad (a. e.). \quad (4.1.1)$$

Ayrıca, (4.1.1)'de $u = 0$ için ${}_0d_qX(t, \cdot) = d_qX(t, \cdot) = X(qt, \cdot) - X(t, \cdot)$, (a. e.)'dir.

Teorem 4.1.1. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlı herhangi iki $X, Y: T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik süreci verilsin. Bu taktirde aşağıdaki işlemler doğrudur:

- (1) ${}_ud_q(\alpha X(t, \cdot)) = \alpha {}_ud_qX(t, \cdot)$, (a. e.),
- (2) ${}_ud_q(X(t, \cdot) \pm Y(t, \cdot)) = {}_ud_qX(t, \cdot) \pm {}_ud_qY(t, \cdot)$, (a. e.),
- (3) ${}_ud_q(X(t, \cdot)Y(t, \cdot)) = X(qt + (1 - q)u, \cdot){}_ud_qY(t, \cdot) + Y(t, \cdot){}_ud_qX(t, \cdot)$, (a. e.).

İspat. Tanım 4.1.1'den (4.1.1) kullanılarak, (1) ve (2) kolayca elde edilir.

(3) $X(t, \cdot)Y(t, \cdot)$ 'nin kuadratik orta anlamda q -diferensiyeli aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
 {}_ud_q[X(t, \cdot)Y(t, \cdot)] &= X(qt + (1 - q)u, \cdot)Y(qt + (1 - q)u, \cdot) - X(t, \cdot)Y(t, \cdot) \\
 &= X(qt + (1 - q)u, \cdot)Y(qt + (1 - q)u, \cdot) - X(t, \cdot)Y(t, \cdot) \\
 &\quad + X(qt + (1 - q)u, \cdot)Y(t, \cdot) - X(qt + (1 - q)u, \cdot)Y(t, \cdot) \\
 &= X(qt + (1 - q)u, \cdot)[Y(qt + (1 - q)u, \cdot) - Y(t, \cdot)] \\
 &\quad + Y(t, \cdot)[X(qt + (1 - q)u, \cdot) - X(t, \cdot)] \\
 &= X(qt + (1 - q)u, \cdot){}_ud_qY(t, \cdot) + Y(t, \cdot){}_ud_qX(t, \cdot), \quad (a. e.).
 \end{aligned}$$

Tanım 4.1.2. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlı kuadratik orta anlamda sürekli $X: T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik süreci verilsin. Eğer mevcut ise,

$$E \left[\frac{X(qt + (1 - q)u, \cdot) - X(t, \cdot)}{(q - 1)(t - u)} - {}_uD_qX(t, \cdot) \right]^2 = 0$$

eşitliğine $X(t, \cdot)$ stokastik sürecinin kuadratik orta anlamda q -türevi denir ve kısaca aşağıdaki gibi hesaplanır:

$${}_uD_qX(t, \cdot) = \frac{{}_ud_qX(t, \cdot)}{{}_ud_qt} = \frac{X(qt + (1 - q)u, \cdot) - X(t, \cdot)}{(q - 1)(t - u)}, t \neq u, \quad (a. e.). \quad (4.1.2)$$

Ayrıca, (4.1.2)'de $u = 0$ için ${}_0D_qX(t, \cdot) = D_qX(t, \cdot)$ elde edilir. Burada $D_qX(t, \cdot)$ ile tanımlanan $X(t, \cdot)$ 'nin kuadratik orta anlamda q -türevi olup aşağıdaki gibidir:

$$D_q X(t, \cdot) = \frac{X(qt, \cdot) - X(t, \cdot)}{(q - 1)t}, t \neq 0, \quad (a. e.).$$

Burada $q \rightarrow 1$ limit alınır, kuadratik orta anlamda q -türev tanımından, bir stokastik sürecin klasik kuadratik orta anlamda türevi elde edilir.

Uyarı 4.1.1. $X(t, \cdot)$ kuadratik orta anlamda sürekli olduğundan u noktasında kuadratik orta anlamda limiti vardır. Bu nedenle

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E ({}_u D_q X(t, \cdot) - {}_u D_q X(u, \cdot))^2 = 0$$

dır. Bu durumu aşağıdaki gibi de göstermek mümkündür:

$$l.i.m. {}_u D_q X(t, \cdot) = {}_u D_q X(u, \cdot), \quad (a. e.).$$

$\forall u \in T$ için ${}_u D_q X(t, \cdot)$ mevcutsa, bu durumda $X(t, \cdot)$ stokastik sürecine kuadratik orta anlamda q -differensiyellenebilir denir.

Tanım 4.1.3. Bir q -differensiyellenebilir $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun ikinci mertebeden kuadratik orta anlamda q -türevi

$${}_u D f_q^2 = {}_u D_q ({}_u D_q f): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlanır. Benzer şekilde, böyle bir fonksiyonun yüksek mertebeden q -türevi ise

$${}_u D f_q^n: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlanır [38].

Tanım 4.1.4. Bir q -differensiyellenebilir $f: \Delta \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun sırasıyla x değişkenine göre q_1 -kısmi türevi, y değişkenine göre q_2 -kısmi türevi ve önce x sonra y değişkenine göre 2. mertebeden q_1, q_2 -kısmi türevi $\forall (x, y) \in \Delta$ için aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır [38]:

$${}_u D_{q_1} f(x, y) = \frac{{}_u \partial_{q_1} f(x, y)}{{}_u \partial_{q_1} x} = \frac{f(q_1 x + (1 - q_1)u, y) - f(x, y)}{(1 - q_1)(x - u)}, x \neq u, (a. e.);$$

$${}_v D_{q_2} f(x, y) = \frac{{}_v \partial_{q_2} (x, y)}{{}_v \partial_{q_2} y} = \frac{f(x, q_2 y + (1 - q_2)v) - f(x, y)}{(1 - q_2)(y - v)}, y \neq v, (a. e.);$$

$${}_{u,v} D_{q_1, q_2}^2 f(x, y) = \frac{\left[f(q_1 x + (1 - q_1)u, q_2 y + (1 - q_2)v) + f(x, y) \right] - f(q_1 x + (1 - q_1)u, y) - f(x, q_2 y + (1 - q_2)v)}{(1 - q_1)(x - u)(1 - q_2)(y - v)}, (a. e.).$$

Teorem 4.1.2. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlı $X: T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik sürecinin kuadratik orta anlamda q -türevinin varlığı için yeterli koşul, $\forall t_1, t_2 \in T$ için $K(t_1, t_2)$ kovaryans fonksiyonunun $t_1 = t_2 = t$ noktasına göre q_1, q_2 - kısmi türevinin mevcut olmasıdır.

İspat. $X(t, \cdot)$ stokastik sürecinin kuadratik orta anlamda q -türevinin mevcut ve tek türlü olduğu aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\begin{aligned} & E \left[\frac{X(q_1 t_1 + (1 - q_1)u_1, \cdot) - X(t_1, \cdot)}{(q_1 - 1)(t_1 - u_1)} - \frac{X(q_2 t_2 + (1 - q_2)u_2, \cdot) - X(t_2, \cdot)}{(q_2 - 1)(t_2 - u_2)} \right]^2 \\ &= \frac{\left[E(X(q_1 t_1 + (1 - q_1)u_1, \cdot))^2 + E(X(t_1, \cdot))^2 - E(X(q_1 t_1 + (1 - q_1)u_1, \cdot)X(t_1, \cdot)) - E(X(t_1, \cdot)X(q_1 t_1 + (1 - q_1)u_1, \cdot)) \right]}{(q_1 - 1)^2(t_1 - u_1)^2} \\ &\quad - 2 \frac{\left[E(X(q_1 t_1 + (1 - q_1)u_1, \cdot)X(q_2 t_2 + (1 - q_2)u_2, \cdot)) + E(X(t_1, \cdot)X(t_2, \cdot)) - E(X(q_1 t_1 + (1 - q_1)u_1, \cdot)X(t_2, \cdot)) - E(X(t_1, \cdot)X(q_2 t_2 + (1 - q_2)u_2, \cdot)) \right]}{(q_1 - 1)(t_1 - u_1)(q_2 - 1)(t_2 - u_2)} \\ &\quad + \frac{\left[E(X(q_2 t_2 + (1 - q_2)u_2, \cdot))^2 - E(X(q_2 t_2 + (1 - q_2)u_2, \cdot)X(t_2, \cdot)) - E(X(t_2, \cdot)X(q_2 t_2 + (1 - q_2)u_2, \cdot)) + E(X(t_2, \cdot))^2 \right]}{(q_2 - 1)^2(t_2 - u_2)^2}. \quad (4.1.3) \end{aligned}$$

$\forall t \in T$ için $E(X(t, \cdot)) = 0$ olduğundan

$$K(t_1, t_2) = E(X(t_1, \cdot)X(t_2, \cdot)) - E(X(t_1, \cdot))E(X(t_2, \cdot)) = E(X(t_1, \cdot)X(t_2, \cdot))$$

dır. Bu durumda (4.1.3) eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$E \left[\frac{X(q_1 t_1 + (1 - q_1)u_1, \cdot) - X(t_1, \cdot)}{(q_1 - 1)(t_1 - u_1)} - \frac{X(q_2 t_2 + (1 - q_2)u_2, \cdot) - X(t_2, \cdot)}{(q_2 - 1)(t_2 - u_2)} \right]^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left[K(q_1 t_1 + (1 - q_1)u_1, q_1 t_1 + (1 - q_1)u_1) + K(t_1, t_1) \right]}{(q_1 - 1)^2(t_1 - u_1)^2} \\
&- 2 \frac{\left[K(q_1 t_1 + (1 - q_1)u_1, q_2 t_2 + (1 - q_2)u_2) + K(t_1, t_2) \right]}{(q_1 - 1)(t_1 - u_1)(q_2 - 1)(t_2 - u_2)} \\
&+ \frac{\left[K(q_2 t_2 + (1 - q_2)u_2, q_2 t_2 + (1 - q_2)u_2) + K(t_2, t_2) \right]}{(q_2 - 1)^2(t_2 - u_2)^2} \\
&= {}_{u_1}D_{q_1}^2 K(t_1, t_2) - 2 {}_{u_1, u_2}D_{q_1, q_2}^2 K(t_1, t_2) + {}_{u_2}D_{q_2}^2 K(t_1, t_2). \tag{4.1.4}
\end{aligned}$$

Eğer $\forall t_1, t_2 \in T$ için $K(t_1, t_2)$ kovaryans fonksiyonunun $t_1 = t_2 = t$ noktasına göre kısmi q -türevi ${}_{u_1, u_2}D_{q_1, q_2} K(t_1, t_2) = {}_u D_q^2 K(t, t)$ mevcut ise, (4.1.4) eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$E \left[\frac{X(q_1 t_1 + (1 - q_1)u_1, \cdot) - X(t_1, \cdot)}{(q_1 - 1)(t_1 - u_1)} - \frac{X(q_2 t_2 + (1 - q_2)u_2, \cdot) - X(t_2, \cdot)}{(q_2 - 1)(t_2 - u_2)} \right]^2 = 0.$$

Buradan, $X(t, \cdot)$ stokastik sürecinin kuadratik orta anlamda q -türevi mevcuttur ve bu türevin (4.1.2) eşitliğindeki gibi tek türlü olduğu sonucuna varılır.

Teorem 4.1.3. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlı herhangi iki $X, Y: T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik süreci verilsin. Bu taktirde aşağıdaki işlemler doğrudur:

- (1) ${}_u D_q(\alpha X(t, \cdot)) = \alpha {}_u D_q X(t, \cdot), (a. e.),$
- (2) ${}_u D_q(X(t, \cdot) \pm Y(t, \cdot)) = {}_u D_q X(t, \cdot) \pm {}_u D_q Y(t, \cdot), (a. e.),$
- (3) ${}_u D_q(X(t, \cdot)Y(t, \cdot)) = X(qt + (1 - q)u, \cdot) {}_u D_q Y(t, \cdot) + Y(t, \cdot) {}_u D_q X(t, \cdot), (a. e.),$
- (4) ${}_u D_q(X(t, \cdot)Y(t, \cdot)) = X(t, \cdot) {}_u D_q Y(t, \cdot) + Y(qt + (1 - q)u, \cdot) {}_u D_q X(t, \cdot), (a. e.),$
- (5) ${}_u D_q \left(\frac{X(t, \cdot)}{Y(t, \cdot)} \right) = \frac{Y(t, \cdot) {}_u D_q X(t, \cdot) - X(t, \cdot) {}_u D_q Y(t, \cdot)}{Y(qt + (1 - q)u, \cdot)Y(t, \cdot)}, (a. e.),$
 $Y(qt + (1 - q)u, \cdot)Y(t, \cdot) \neq 0$
- (6) ${}_u D_q \left(\frac{X(t, \cdot)}{Y(t, \cdot)} \right) = \frac{Y(qt + (1 - q)u, \cdot) {}_u D_q X(t, \cdot) - X(qt + (1 - q)u, \cdot) {}_u D_q Y(t, \cdot)}{Y(qt + (1 - q)u, \cdot)Y(t, \cdot)},$
 $Y(qt + (1 - q)u, \cdot)Y(t, \cdot) \neq 0, (a. e.).$

İspat. (1) ve (2) Tanım 4.1.1'den (4.1.1) kullanılarak kolayca elde edilir.

(3) İki stokastik sürecin çarpımının q -türevi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} {}_u D_q [X(t, \cdot) Y(t, \cdot)] &= \frac{{}_u d_q [X(t, \cdot) Y(t, \cdot)]}{{}_u d_q t} \\ &= \frac{X(qt + (1 - q)u, \cdot) {}_u d_q Y(t, \cdot) + Y(t, \cdot) {}_u d_q X(t, \cdot)}{(q - 1)(t - u)} \\ &= X(qt + (1 - q)u, \cdot) \frac{{}_u d_q Y(t, \cdot)}{{}_u d_q t} + Y(t, \cdot) \frac{{}_u d_q X(t, \cdot)}{{}_u d_q t}. \end{aligned}$$

(4) (3)'e benzer şekilde elde edilir.

(5) İki stokastik sürecin bölümünün q -türevi aşağıdaki elde edilir:

$${}_u D_q \left(Y(t, \cdot) \frac{X(t, \cdot)}{Y(t, \cdot)} \right) = {}_u D_q X(t, \cdot), (a. e.).$$

Yukarıdaki eşitlik Teorem 4.1.3'den (3) ii) kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$Y(qt + (1 - q)u, \cdot) {}_u D_q \left(\frac{X(t, \cdot)}{Y(t, \cdot)} \right) + \frac{X(t, \cdot)}{Y(t, \cdot)} {}_u D_q Y(t, \cdot) = {}_u D_q X(t, \cdot), (a. e.).$$

Buradan gerekli matematiksel işlemler yapılarak ispat kolayca tamamlanır. Benzer şekilde ii) elde edilir.

(6) (5)'e benzer şekilde elde edilir.

Örnek 4.1.1. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlı $X: T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik süreci, $A: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bir rastgele değişken olmak üzere $X(t, \cdot) = A(\cdot)t^2$, $t \in T$ olsun. Bu sürecin $t \neq u$ için q -türevi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} {}_u D_q X(t, \cdot) &= {}_u D_q (A(\cdot)t^2) = \frac{A(\cdot)(qt + (1 - q)u)^2 - A(\cdot)t^2}{(q - 1)(t - u)} \\ &= A(\cdot) \frac{[(q - 1)(t - u)][(1 - q)u + (1 + q)t]}{(q - 1)(t - u)} \\ &= A(\cdot)[(1 + q)t + (1 - q)u], \quad (a. e.). \end{aligned}$$

Örnek 4.1.2. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlı $X: T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik süreci, $A: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bir rastgele değişken olmak üzere $X(t, \cdot) = A(\cdot)t^n, n \in \mathbb{Z}^+, t \in T$ olsun. Bu sürecin $t \neq 0$ için q -türevi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} D_q X(t, \cdot) &= D_q (A(\cdot)t^n) = \frac{A(\cdot)(qt)^n - A(\cdot)t^n}{(q-1)t} \\ &= A(\cdot) \frac{(q^n - 1)t^n}{(q-1)t} = A(\cdot)[n]t^{n-1}, (a. e.). \end{aligned}$$

Burada $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $[n] = \frac{q^n - 1}{q-1}$ dir. Ayrıca, $q \rightarrow 1$ limit alınırsa, bu sürecin klasik kuadratik orta anlamda türevi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$D_q X(t, \cdot) = X'(t, \cdot) = A(\cdot)nt^{n-1}, (a. e.).$$

4.2. Bir Stokastik Sürecin Kuadratik Orta Anlamda q -İntegrali

Bu kısımda, konveks stokastik süreçler için kuadratik orta anlamda q -integrali ve özellikleri verilmiştir.

Tanım 4.2.1. Bir q -differensiyellenebilir $f: \Delta \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun q_1, q_2 -iki katlı integrali $\forall (t, s) \in \Delta$ için aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır [38]:

$$\begin{aligned} &\int_v^s \int_u^t f(x, y) {}_u\partial_{q_1} x {}_v\partial_{q_2} y \\ &= \left[\times \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} q_1^n q_2^m f(q_1^n t + (1 - q_1^n)u, q_2^m v + (1 - q_2^m)s) \right]. \end{aligned}$$

Tanım 4.2.2. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlı kuadratik orta anlamda sürekli $X: T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik süreci verilsin. Eğer mevcut ise,

$$E \left[\left((1-q)(t-u) \sum_{n=0}^{\infty} q^n X(q^n t + (1-q^n)u, \cdot) - \int_u^t X(\theta, \cdot)_u d_q \theta \right)^2 \right] = 0$$

eşitliğine $X(t, \cdot)$ stokastik sürecinin $[u, t]$ aralığındaki kuadratik orta anlamda q -integrali denir ve kısaca aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\int_u^t X(\theta, \cdot)_u d_q \theta = (1-q)(t-u) \sum_{n=0}^{\infty} q^n X(q^n t + (1-q^n)u, \cdot), \quad (a. e.). \quad (4.2.1)$$

Uyarı 4.2.1. i) (4.2.1)'de $u = 0$ alınırsa, denklem aşağıdaki gibi kuadratik orta anlamda klasik q -belirli integraline dönüşür:

$$\int_0^t X(\theta, \cdot)_0 d_q \theta = \int_0^t X(\theta, \cdot) d_q \theta = (1-q)t \sum_{n=0}^{\infty} q^n X(q^n t, \cdot), \quad t \in [0, \infty), (a. e.).$$

Burada $q \rightarrow 1$ limit alınırsa, kuadratik orta anlamda q -integral tanımından, bir stokastik sürecin klasik kuadratik orta anlamda integrali elde edilir.

ii) (4.2.1) eşitliğinde $c \in (u, t)$ noktası için $[u, t]$ kapalı aralığındaki q -belirli integrali aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \int_c^t X(\theta, \cdot)_u d_q \theta &= \int_u^t X(\theta, \cdot)_u d_q \theta - \int_u^c X(\theta, \cdot)_u d_q \theta \\ &= (1-q)(t-u) \sum_{n=0}^{\infty} q^n X(q^n t + (1-q^n)u, \cdot) \\ &\quad - (1-q)(c-u) \sum_{n=0}^{\infty} q^n X(q^n c + (1-q^n)u, \cdot), \quad (a. e.). \end{aligned}$$

iii) $X(t, \cdot) \leq Y(t, \cdot)$ için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur:

$$\int_u^t X(\theta, \cdot)_u d_q \theta \leq \int_u^t Y(\theta, \cdot)_u d_q \theta, \quad (a. e.).$$

iv) Yukarıdaki eşitliğin varlığı için gerekli koşul, $X(t, \cdot)$ stokastik sürecinin kuadratik orta anlamda sürekli olması ve yeterli koşul ise, $K(t_1, t_2)$ kovaryans fonksiyonunun $\forall t_1, t_2 \in T$ için $t_1 = t_2 = t$ noktasında iki katlı q_1, q_2 -integralinin mevcut olmasıdır.

Teorem 4.2.1. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlı $X: T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik sürecinin kuadratik orta anlamda q -integralinin varlığı için yeterli koşul, $\forall t_1, t_2 \in T$ için $K(t_1, t_2)$ kovaryans fonksiyonunun $t_1 = t_2 = t$ noktasında iki katlı q_1, q_2 - integralinin mevcut olmasıdır.

İspat. $X(t, \cdot)$ stokastik sürecinin kuadratik orta anlamda q -integralinin mevcut ve tek türlü olduğu aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\begin{aligned}
& E \left[\begin{aligned} & (1 - q_1)(t_1 - u_1) \sum_{n=0}^{\infty} q_1^n X(q_1^n t_1 + (1 - q_1^n)u_1, \cdot) \\ & -(1 - q_2)(t_2 - u_2) \sum_{m=0}^{\infty} q_2^m X(q_2^m t_2 + (1 - q_2^m)u_2, \cdot) \end{aligned} \right]^2 \\
&= (1 - q_1)^2 (t_1 - u_1)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} q_1^{2n} E \left[\begin{aligned} & X(q_1^n t_1 + (1 - q_1^n)u_1, \cdot) \\ & \times X(q_1^n t_1 + (1 - q_1^n)u_1, \cdot) \end{aligned} \right] \\
&- 2 \left[\begin{aligned} & (1 - q_1)(t_1 - u_1)(1 - q_2)(t_2 - u_2) \\ & \times \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} q_1^n q_2^m E \left[\begin{aligned} & X(q_1^n t_1 + (1 - q_1^n)u_1, \cdot) X(q_2^m t_2 + (1 - q_2^m)u_2, \cdot) \end{aligned} \right] \end{aligned} \right] \\
&+ (1 - q_2)^2 (t_2 - u_2)^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} q_2^{2m} E \left[\begin{aligned} & X(q_2^m t_2 + (1 - q_2^m)u_2, \cdot) \\ & \times X(q_2^m t_2 + (1 - q_2^m)u_2, \cdot) \end{aligned} \right].
\end{aligned}$$

$\forall t \in T$ için $E(X(t, \cdot)) = 0$ olduğundan

$$K(t_1, t_2) = E(X(t_1, \cdot)X(t_2, \cdot)) - E(X(t_1, \cdot))E(X(t_2, \cdot)) = E(X(t_1, \cdot)X(t_2, \cdot))$$

dır. Bu durumda yukarıdaki eşitlik aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$E \left[\begin{aligned} & (1 - q_1)(t_1 - u_1) \sum_{n=0}^{\infty} q_1^n X(q_1^n t_1 + (1 - q_1^n)u_1, \cdot) \\ & -(1 - q_2)(t_2 - u_2) \sum_{m=0}^{\infty} q_2^m X(q_2^m t_2 + (1 - q_2^m)u_2, \cdot) \end{aligned} \right]^2 = \int_{u_1}^{t_1} \int_{u_1}^{t_1} K(\theta, \vartheta) {}_{u_1} \partial_{q_1} \theta {}_{u_1} \partial_{q_1} \vartheta$$

$$-2 \int_{u_1}^{t_1} \int_{u_2}^{t_2} K(\theta, \vartheta) {}_{u_1} \partial_{q_1} \theta {}_{u_2} \partial_{q_2} \vartheta + \int_{u_2}^{t_2} \int_{u_2}^{t_2} K(\theta, \vartheta) {}_{u_2} \partial_{q_2} \vartheta {}_{u_2} \partial_{q_2} \vartheta. \quad (4.2.3)$$

Eğer $\forall t_1, t_2 \in T$ için $K(t_1, t_2)$ kovaryans fonksiyonunun $t_1 = t_2 = t$ noktasında göre q_1, q_2 iki katlı -integrali mevcut ise, (4.2.3) eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$E \left[\begin{array}{l} (1 - q_1)(t_1 - u_1) \sum_{n=0}^{\infty} q_1^n X(q_1^n t_1 + (1 - q_1^n) u_1, \cdot) \\ -(1 - q_2)(t_2 - u_2) \sum_{m=0}^{\infty} q_2^m X(q_2^m t_2 + (1 - q_2^m) u_2, \cdot) \end{array} \right]^2 = 0$$

Buradan, $X(t, \cdot)$ stokastik süreci kuadratik orta anlamda q -integrali mevcut ve bu integralin (4.2.2) eşitliğindeki gibi tek türlü olduğu sonucuna varılır.

Teorem 4.2.2. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlı, $X, Y: T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kuadratik orta anlamda sürekli stokastik süreçleri verilsin. Bu taktirde aşağıdaki işlemler doğrudur:

- (1) ${}_u D_q \int_u^t X(\theta, \cdot) {}_u d_q \theta = X(t, \cdot), (a. e.),$
- (2) $\int_c^t {}_u D_q X(\theta, \cdot) {}_u d_q \theta = X(t, \cdot) - X(c, \cdot), (a. e.), c \in (u, t)$
- (3) $\int_u^t [aX(\theta, \cdot) \pm Yb(\theta, \cdot)] {}_u d_q \theta = a \int_u^t X(\theta, \cdot) {}_u d_q \theta \pm b \int_u^t Y(\theta, \cdot) {}_u d_q \theta, a, b \in \mathbb{R}$
- (4) $\int_u^t X(\theta, \cdot) {}_u d_q \theta \int_u^t Y(\theta, \cdot) {}_u d_q \theta$
 $= (X(\theta, \cdot) Y(\theta, \cdot)) \Big|_u^t - \int_u^t X(q\theta + (1 - q)u, \cdot) {}_u D_q X(\theta, \cdot) {}_u d_q \theta, (a. e.).$

İspat. Tanım 4.1.1 ve Tanım 4.2.1 ile aşikârdır.

Örnek 4.2.1. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlı $X: T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik süreci, $A: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bir rastgele değişken olmak üzere $X(t, \cdot) = A(\cdot)t, t \in T$ olsun. Bu sürecin q -integrali aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
\int_u^t X(\theta, \cdot) {}_u d_q \theta &= (1-q)(t-u) \sum_{n=0}^{\infty} q^n X(q^n t + (1-q^n)u, \cdot) \\
&= (1-q)(t-u) \sum_{n=0}^{\infty} q^n A(\cdot)(q^n t + (1-q^n)u) \\
&= (1-q)(t-u) A(\cdot) \sum_{n=0}^{\infty} (q^{2n}(t-u) + q^n u) \\
&= (1-q)(t-u) A(\cdot) \left(\frac{t-u}{1-q^2} + \frac{u}{1-q} \right) = A(\cdot) \frac{(t-u)(t+qu)}{1+q}, \quad (a.e.).
\end{aligned}$$

Burada $q \rightarrow 1$ limit alınır, bu sürecin klasik kuadratik orta anlamda integrali elde edilir:

$$\int_u^t X(\theta, \cdot) {}_u d_q \theta = \int_u^t X(\theta, \cdot) d\theta = A(\cdot) \frac{t^2 - u^2}{2}, \quad (a.e.).$$

4.3. Konveks Stokastik Süreçler için q -Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda konveks stokastik süreçler için q -Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir.

Tanım 4.3.1. $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bir stokastik süreç olsun. Bu takdirde, $\lambda \in [0, 1]$ ve $t, s \in I$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan stokastik sürece konvektir denir [10]:

$$X((1-\lambda)t + \lambda s, \cdot) \leq (1-\lambda)X(t, \cdot) + \lambda X(s, \cdot), \quad (a.e.).$$

Eğer eşitsizlikte $\lambda = 1/2$ alınır, bu sürece Jensen-convex stokastik süreç denir.

Lemma 4.3.1. $X(t, \cdot)$ kuadratik orta anlamda integrallenebilir bir stokastik süreç ve $\lambda \in (0, 1)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitlik mevcuttur [39]:

$$\int_0^1 X((1-\lambda)u + \lambda v, \cdot) d\lambda = \int_0^1 X((1-\lambda)v + \lambda u, \cdot) d\lambda = \frac{1}{v-u} \int_u^v X(t, \cdot) dt, \quad (a.e.).$$

Lemma 4.3.2. $X(t, \cdot)$ kuadratik orta anlamda q -integrallenebilir bir stokastik süreç ve $\lambda, q \in (0,1)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitlik mevcuttur [31]:

$$\begin{aligned} \int_0^1 X((1-\lambda)u + \lambda v, \cdot)_0 d_q \lambda &= \int_0^1 X((1-\lambda)v + \lambda u, \cdot)_0 d_q \lambda \\ &= \frac{1}{v-u} \int_u^v X(t, \cdot)_u d_q t, \quad (a. e.). \end{aligned}$$

İspat. 1. integralde $t = (1-\lambda)u + \lambda v$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$\int_0^1 X((1-\lambda)u + \lambda v, \cdot)_0 d_q \lambda = \frac{1}{v-u} \int_u^v X(t, \cdot)_u d_q t$$

şeklindedir. 2. integral de uygun değişken dönüşümü ile benzer şekilde elde edilir.

Sonuç 4.3.1. Lemma 4.3.2’de $q \rightarrow 1^-$ iken limit alınırsa, Lemma 4.3.1’deki konveks stokastik süreçler için klasik integral eşitliği elde edilir.

Lemma 4.3.3. $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik süreci kuadratik orta anlamda q -integrali integrallenebilir ve $A, B: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ birer rastgele değişken olsun. Eğer $E[A^2] < \infty, E[B^2] < \infty$ için $X(t, \cdot) = A(\cdot)t + B(\cdot)$ ise bu taktirde aşağıdaki eşitlik mevcuttur [31]:

$$\frac{1}{v-u} \int_u^v X(t, \cdot)_u d_q t = A(\cdot) \frac{qu + v}{q + 1} + B(\cdot), \quad (a. e.).$$

İspat. $X(t, \cdot)$ ’nin kuadratik orta anlamda q -integrali mevcut olduğundan aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$E \left[\left(\frac{1}{v-u} (1-q)(v-u) \sum_{n=0}^{\infty} q^n X((1-q^n)u + q^n v, \cdot) - \left(A(\cdot) \frac{qu + v}{q + 1} + B(\cdot) \right) \right)^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
&= E \left[\left((1-q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n [A(\cdot)((1-q^n)u + q^n v) + B(\cdot)] \right)^2 \right. \\
&\quad \left. - \left(A(\cdot) \frac{qu + v}{q+1} + B(\cdot) \right) \right] \\
&= E \left[\left((1-q) \sum_{n=0}^{\infty} [q^{2n} A(\cdot)(v-u) + q^n (uA(\cdot) + B(\cdot))] \right)^2 \right. \\
&\quad \left. - \left(A(\cdot) \frac{qu + v}{q+1} + B(\cdot) \right) \right] \\
&= E \left[\left((1-q) \left(A(\cdot) \frac{v-u}{1-q^2} + \frac{uA(\cdot) + B(\cdot)}{1-q} \right) \right)^2 \right. \\
&\quad \left. - \left(A(\cdot) \frac{qu + v}{q+1} + B(\cdot) \right) \right] = 0.
\end{aligned}$$

Önerme 4.3.1. $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik süreci konveks ve (u, v) aralığı üzerinde kuadratik orta anlamda diferensiyellenebilir olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizliği sağlayan en az bir $A: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bir rastgele değişkeni mevcuttur [31]:

$$X(t, \cdot) \geq A(\cdot) \left(t - \frac{qu + v}{q+1} \right) + X \left(\frac{qu + v}{q+1}, \cdot \right), \quad (a. e.).$$

İspat: $X(t, \cdot)$, $[u, v]$ aralığında konveks ve $t_0 \in (u, v)$ noktasında kuadratik orta anlamda diferensiyellenebilir bir stokastik süreç olduğundan aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$X(t, \cdot) - X(t_0, \cdot) \geq X'(t_0, \cdot)(t - t_0), \quad (a. e.).$$

Eğer $t_0 = \frac{qu+v}{q+1}$ ve $X' \left(\frac{qu+v}{q+1}, \cdot \right) = A(\cdot)$ alınırsa ispat biter.

Teorem 4.3.1. $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ konveks stokastik süreci kuadratik orta anlamda integralenebilirse aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [10]:

$$X \left(\frac{u+v}{2}, \cdot \right) \leq \frac{1}{v-u} \int_u^v X(t, \cdot) dt \leq \frac{X(u, \cdot) + X(v, \cdot)}{2}, \quad (a. e.).$$

Teorem 4.3.2. $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, (u, v) aralığı üzerinde kuadratik orta anlamda diferensiyellenebilir konveks bir stokastik süreç ve $q \in (0,1)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [31]:

$$X\left(\frac{qu + v}{q + 1}, \cdot\right) \leq \frac{1}{v - u} \int_u^v X(t, \cdot)_u d_q t \leq \frac{qX(u, \cdot) + X(v, \cdot)}{q + 1}, \quad (a. e.). \quad (4.3.1)$$

İspat. Önerme 4.3.1'den

$$X(t, \cdot) \geq A(\cdot) \left(t - \frac{qu + v}{q + 1}\right) + X\left(\frac{qu + v}{q + 1}, \cdot\right)$$

dır. Bu durumda, Lemma 4.3.3'den

$$\frac{1}{v - u} \int_u^v X(t, \cdot)_u d_q t \geq X\left(\frac{qu + v}{q + 1}, \cdot\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Son eşitsizlikte gerekli sadeleştirmeler yapılırsa (4.3.1) eşitsizliğinin sol tarafı elde edilir. Ayrıca, $X(t, \cdot)$ stokastik süreci konveks olduğundan $\lambda \in [0, 1]$ için aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur:

$$X((1 - \lambda)u + \lambda v, \cdot) \leq (1 - \lambda)X(u, \cdot) + \lambda X(v, \cdot).$$

Yukarıdaki eşitsizliğin λ 'ye göre $[0,1]$ kapalı aralığında q -integral alındığında Lemma 4.3.2 yardımıyla (4.3.1) eşitsizliğinin sağ tarafı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \int_0^1 X((1 - \lambda)u + \lambda v, \cdot)_0 d_q \lambda &= \frac{1}{v - u} \int_u^v X(t, \cdot)_u d_q t \\ &\leq X(u, \cdot) \int_0^1 (1 - \lambda)_0 d_q \lambda + X(v, \cdot) \int_0^1 \lambda_0 d_q \lambda \\ &= X(u, \cdot) \frac{q}{q + 1} + X(v, \cdot) \frac{1}{q + 1} = \frac{qX(u, \cdot) + X(v, \cdot)}{q + 1}. \end{aligned}$$

Sonuç 4.3.2. Teorem 4.3.2'de $q \rightarrow 1^-$ iken limit alınırsa, Teorem 4.3.1'deki konveks stokastik süreçler için klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir.

4.4. Preinveks Stokastik Süreçler için q -Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda preinvex stokastik süreçler için q -Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir.

Tanım 4.4.1. $I \subset \mathbb{R}^n$ ve $\eta : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon olsun. Eğer $\forall u, v \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için $v + \lambda\eta(u, v) \in I$ ise I ya η 'ya göre invex bir küme denir. Her konveks kümenin $\eta(u, v) = u - v$ fonksiyonuna göre invex olduğu açıktır. Fakat bunun tersi genelde doğru değildir, yani konveks olmayan invex kümeler mevcuttur [30].

Her konveks fonksiyon $\eta(u, v) = u - v$ fonksiyonuna göre preinveks fonksiyondur, ancak bunun tersi genelde doğru değildir. η fonksiyonu üzerine aşağıdaki koşul Mohan ve Neogy tarafından konulmuştur [30].

C Koşulu: $I \subset \mathbb{R}^n$, $\eta : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ 'ya göre invex bir küme olsun. $\forall v, u \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$\eta(u, u + \lambda\eta(v, u)) = -\lambda\eta(v, u)$$

$$\eta(v, u + \lambda\eta(v, u)) = (1 - \lambda)\eta(v, u)$$

C koşulundan her $v, u \in I$ ve $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\eta(u + \lambda_2 \eta(v, u), u + \lambda_1 \eta(v, u)) = (\lambda_2 - \lambda_1)\eta(v, u).$$

Tanım 4.4.2. Aşağıdaki eşitsizliği sağlayan $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik sürecine $\forall v, u \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için η 'ya göre preinvektir denir:

$$X(u + \lambda\eta(v, u), \cdot) \leq (1 - \lambda)X(u, \cdot) + \lambda X(v, \cdot), \quad (a.e.).$$

Eğer λ sayısı $(0,1)$ arasında sabit bir sayı ise süreç λ -preinvex stokastik süreç ve $\lambda = 1/2$ ise, süreç Jensen-prinvex stokastik süreç olarak adlandırılır. Eğer $\eta(v, u) = v - u$ seçersek, $X(t, \cdot)$ bir konveks stokastik süreç olur [40].

Lemma 4.4.1. $X(t, \cdot)$ kuadratik orta anlamda integrallenebilir bir stokastik süreç ve $\lambda \in (0,1)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitlik mevcuttur [40]:

$$\begin{aligned}\int_0^1 X(u + \lambda\eta(v, u), \cdot) d\lambda &= \int_0^1 X(u + (1 - \lambda)\eta(v, u), \cdot) d\lambda \\ &= \frac{1}{\eta(v, u)} \int_u^{u+\eta(v, u)} X(t, \cdot) dt, (a. e.). \end{aligned}$$

Lemma 4.4.2. $X(t, \cdot)$ kuadratik orta anlamda q -integrallenebilir bir stokastik süreç ve $\lambda, q \in (0, 1)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitlik mevcuttur:

$$\begin{aligned}\int_0^1 X(u + \lambda\eta(v, u), \cdot)_0 d_q \lambda &= \int_0^1 X(u + (1 - \lambda)\eta(v, u), \cdot)_0 d_q \lambda \\ &= \frac{1}{\eta(v, u)} \int_u^{u+\eta(v, u)} X(t, \cdot)_u d_q t, (a. e.). \end{aligned}$$

İspat. 1. integralde $t = u + \lambda\eta(v, u)$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$\int_0^1 X(u + \lambda\eta(v, u), \cdot)_0 d_q \lambda = \frac{1}{\eta(v, u)} \int_u^{u+\eta(v, u)} X(t, \cdot)_u d_q t$$

şeklindedir. 2. integral de uygun değişken dönüşümü ile benzer şekilde elde edilir.

Sonuç 4.4.1. Lemma 4.4.2'deki eşitsizliğin $q \rightarrow 1^-$ iken limit alınır, Lemma 4.4.1 elde edilir.

Lemma 4.4.3. $X: [u, u + \eta(v, u)] \times \Omega \rightarrow (0, \infty)$ preinveks stokastik süreci kuadratik orta anlamda q -integrali integrallenebilir ve $A, B: \Omega \rightarrow R$ birer rastgele değişken olsun. Eğer $E[A^2] < \infty$, $E[B^2] < \infty$ için $X(t, \cdot) = A(\cdot)t + B(\cdot)$ ise bu taktirde aşağıdaki eşitlik mevcuttur:

$$\frac{1}{\eta(v, u)} \int_u^{u+\eta(v, u)} X(t, \cdot)_u d_q t = A(\cdot) \frac{u(1 + q) + \eta(v, u)}{1 + q} + B(\cdot), (a. e.).$$

İspat. $X(t, \cdot)$ 'nin kuadratik orta anlamda q -integrali mevcut olduğundan aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$\begin{aligned}
& E \left[\left(\frac{1}{\eta(v, u)} (1 - q) (u + \eta(v, u) - u) \sum_{n=0}^{\infty} q^n X(q^n(u + \eta(v, u)) + (1 - q^n)u, \cdot) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \left(A(\cdot) \frac{u(1 + q) + \eta(v, u)}{1 + q} + B(\cdot) \right) \right)^2 \right] \\
&= E \left[\left((1 - q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n X(u + q^n \eta(v, u), \cdot) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \left(A(\cdot) \frac{u(1 + q) + \eta(v, u)}{1 + q} + B(\cdot) \right) \right)^2 \right] \\
&= E \left[\left((1 - q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n [A(\cdot)(u + q^n \eta(v, u)) + B(\cdot)] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \left(A(\cdot) \frac{u(1 + q) + \eta(v, u)}{1 + q} + B(\cdot) \right) \right)^2 \right] \\
&= E \left[\left((1 - q) \sum_{n=0}^{\infty} [q^{2n} A(\cdot) \eta(v, u) + q^n (u A(\cdot) + B(\cdot))] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \left(A(\cdot) \frac{u(1 + q) + \eta(v, u)}{1 + q} + B(\cdot) \right) \right)^2 \right] \\
&= E \left[\left((1 - q) \left(\frac{A(\cdot) \eta(v, u)}{1 - q^2} + \frac{u A(\cdot) + B(\cdot)}{1 - q} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \left(A(\cdot) \frac{u(1 + q) + \eta(v, u)}{1 + q} + B(\cdot) \right) \right)^2 \right] = 0.
\end{aligned}$$

Önerme 4.4.1. $X: [u, u + \eta(v, u)] \times \Omega \rightarrow (0, \infty)$ stokastik süreci preinveks ve $(u, u + \eta(v, u))$ aralığı üzerinde kuadratik orta anlamda diferensiyellenebilir olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizliği sağlayan en az bir $A: \Omega \rightarrow R$ bir rastgele değişkeni mevcuttur:

$$X(t, \cdot) \geq A(\cdot) \left(t - \frac{u(1 + q) + \eta(v, u)}{1 + q} \right) + X \left(\frac{u(1 + q) + \eta(v, u)}{1 + q}, \cdot \right), (a. e.).$$

İspat: $X(t, \cdot)$, $[u, u + \eta(v, u)]$ aralığında preinveks ve $t_0 \in (u, u + \eta(v, u))$ noktasında kuadratik orta anlamda diferensiyellenebilir bir stokastik süreç olduğundan aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$X(t, \cdot) - X(t_0, \cdot) \geq X'(t_0, \cdot)(t - t_0), \quad (a. e.).$$

Eğer $t_0 = \frac{u(1+q)+\eta(v,u)}{1+q}$ ve $X'\left(\frac{u(1+q)+\eta(v,u)}{1+q}, \cdot\right) = A(\cdot)$ alınırsa ispat biter.

Teorem 4.4.1. $X: [u, u + \eta(v, u)] \times \Omega \rightarrow (0, \infty)$ preinveks stokastik süreci kuadratik orta anlamda integralenebilirse aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [41]:

$$X\left(\frac{2u + \eta(v, u)}{2}, \cdot\right) \leq \frac{1}{\eta(v, u)} \int_u^{u+\eta(v,u)} X(t, \cdot) dt \leq \frac{X(u, \cdot) + X(v, \cdot)}{2}, \quad (a. e.).$$

Teorem 4.4.2. $X: [u, u + \eta(v, u)] \times \Omega \rightarrow (0, \infty)$, $(u, u + \eta(v, u))$ aralığı üzerinde kuadratik orta anlamda diferensiyellenebilir preinveks bir stokastik süreç ve $q \in (0, 1)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur:

$$\begin{aligned} & X\left(\frac{u(1+q) + \eta(v, u)}{1+q}, \cdot\right) \\ & \leq \frac{1}{\eta(v, u)} \int_u^{u+\eta(v,u)} X(t, \cdot)_u d_q t \leq \frac{qX(u, \cdot) + X(v, \cdot)}{1+q}, \quad (a. e.). \quad (4.4.1) \end{aligned}$$

İspat. Önerme 4.4.1'den

$$X(t, \cdot) \geq A(\cdot) \left(t - \frac{u(1+q) + \eta(v, u)}{1+q} \right) + X\left(\frac{u(1+q) + \eta(v, u)}{1+q}, \cdot\right)$$

dır. Bu durumda, Lemma 4.4.3 yardımıyla (4.4.1) eşitsizliğinin sol tarafı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{1}{\eta(v, u)} \int_u^{u+\eta(v,u)} X(t, \cdot)_u d_q t \geq X\left(\frac{u(1+q) + \eta(v, u)}{1+q}, \cdot\right).$$

$X(t, \cdot)$ stokastik süreci preinveks olduğundan $\lambda \in [0, 1]$ için aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur:

$$X(u + \lambda\eta(v, u), \cdot) \leq (1 - \lambda)X(u, \cdot) + \lambda X(v, \cdot)$$

Yukarıdaki eşitsizliğin λ 'ye göre $[0, 1]$ kapalı aralığında q -integral alındığında Lemma 4.4.2 yardımıyla (4.4.1) eşitsizliğinin sağ tarafı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \int_0^1 X(u + \lambda\eta(v, u), \cdot)_0 d_q \lambda &= \frac{1}{\eta(v, u)} \int_u^{u+\eta(v, u)} X(t, \cdot)_u d_q t \\ &\leq \int_0^1 [(1 - \lambda)X(u, \cdot) + \lambda X(v, \cdot)]_0 d_q \lambda \\ &= \frac{q}{1 + q} X(u, \cdot) + \frac{1}{1 + q} X(v, \cdot) = \frac{qX(u, \cdot) + X(v, \cdot)}{1 + q}. \end{aligned}$$

Sonuç 4.4.2. Teorem 4.4.2'deki eşitsizliğin $q \rightarrow 1^-$ iken limit alınırsa, Teorem 4.4.1'deki gibi preinveks stokastik süreçler için klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir.

4.5. φ -Konveks Stokastik Süreçler için q -Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda φ -konveks stokastik süreçler için q -Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir.

Tanım 4.5.1. $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bir stokastik süreç ve $\varphi: I \rightarrow I$ sürekli ve monoton artan bir fonksiyon olsun. Eğer her $t, s \in I$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan X 'e φ -konvektir denir:

$$X((1 - \lambda)\varphi(t) + \lambda\varphi(s), \cdot) \leq (1 - \lambda)X(\varphi(t), \cdot) + \lambda X(\varphi(s), \cdot), \quad (a. e.).$$

Yukarıdaki eşitsizlik yön değiştirdiğinde X 'e φ -konkavdır denir. Ayrıca yukarıdaki eşitsizlikte $\varphi(t) = t$ ise konveks stokastik süreç elde edilir [41].

Lemma 4.5.1. $\varphi: [u, v] \rightarrow [u, v]$ sürekli ve monoton artan bir fonksiyon, $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kuadratik orta anlamda integrallenebilir bir stokastik süreç ve $\lambda \in (0,1)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitlik mevcuttur [41]:

$$\begin{aligned} \int_0^1 X((1-\lambda)\varphi(u) + \lambda\varphi(v), \cdot) d\lambda &= \int_0^1 X((1-\lambda)\varphi(v) + \lambda\varphi(u), \cdot) d\lambda \\ &= \frac{1}{\varphi(v) - \varphi(u)} \int_{\varphi(u)}^{\varphi(v)} X(t, \cdot) dt, \quad (a.e.). \end{aligned}$$

Lemma 4.5.2. $\varphi: [u, v] \rightarrow [u, v]$ sürekli ve monoton artan bir fonksiyon ver $X: [\varphi(u), \varphi(v)] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kuadratik orta anlamda q -integrallenebilir bir stokastik süreç ve $\lambda, q \in (0,1)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitlik mevcuttur:

$$\begin{aligned} \int_0^1 X((1-\lambda)\varphi(u) + \lambda\varphi(v), \cdot)_0 d_q \lambda &= \int_0^1 X((1-\lambda)\varphi(v) + \lambda\varphi(u), \cdot)_0 d_q \lambda \\ &= \frac{1}{\varphi(v) - \varphi(u)} \int_{\varphi(u)}^{\varphi(v)} X(t, \cdot)_u d_q t, \quad (a.e.). \end{aligned}$$

İspat. 1. integralde $t = (1-\lambda)\varphi(u) + \lambda\varphi(v)$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$\int_0^1 X((1-\lambda)\varphi(u) + \lambda\varphi(v), \cdot)_0 d_q \lambda = \frac{1}{\varphi(v) - \varphi(u)} \int_{\varphi(u)}^{\varphi(v)} X(t, \cdot)_u d_q t$$

şeklindedir. 2. integral de uygun değişken dönüşümü ile benzer şekilde elde edilir.

Sonuç 4.5.1. Lemma 4.5.2'deki eşitsizliğin $q \rightarrow 1^-$ iken limit alınırsa, Lemma 4.5.1'deki φ -konveks stokastik süreçler için klasik eşitlik elde edilir.

Lemma 4.5.3. $X: [\varphi(u), \varphi(v)] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, φ -konveks süreci kuadratik orta anlamda q -integrali integrallenebilir, $\varphi: [u, v] \rightarrow [u, v]$ sürekli ve monoton artan bir fonksiyon

ve $A, B: \Omega \rightarrow R$ birer rastgele değişken olsun. Eğer $E[A^2] < \infty, E[B^2] < \infty$ için $X(t, \cdot) = A(\cdot)t + B(\cdot)$ ise bu taktirde aşağıdaki eşitlik mevcuttur:

$$\frac{1}{\varphi(v) - \varphi(u)} \int_{\varphi(u)}^{\varphi(v)} X(t, \cdot)_u d_q t = A(\cdot) \frac{\varphi(u)q + \varphi(v)}{1 + q} + B(\cdot), \quad (a.e.).$$

İspat. $X(t, \cdot)$ 'nin kuadratik orta anlamda q -integrali mevcut olduğundan aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$\begin{aligned} & E \left[\left(\frac{1}{\varphi(v) - \varphi(u)} (1 - q) (\varphi(v) - \varphi(u)) \sum_{n=0}^{\infty} q^n X((1 - q^n)\varphi(u) + q^n\varphi(v), \cdot) \right) - \left(A(\cdot) \frac{\varphi(u)q + \varphi(v)}{1 + q} + B(\cdot) \right) \right]^2 \\ &= E \left[\left((1 - q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n \left[A(\cdot) (q^n(\varphi(v) - \varphi(u)) + \varphi(u)) + B(\cdot) \right] \right) - \left(A(\cdot) \frac{\varphi(u)q + \varphi(v)}{1 + q} + B(\cdot) \right) \right]^2 \\ &= E \left[\left((1 - q) \sum_{n=0}^{\infty} [q^{2n} A(\cdot) (\varphi(v) - \varphi(u)) + q^n (\varphi(u) A(\cdot) + B(\cdot))] \right) - \left(A(\cdot) \frac{\varphi(u)q + \varphi(v)}{1 + q} + B(\cdot) \right) \right]^2 \\ &= E \left[\left((1 - q) \left(A(\cdot) \frac{\varphi(v) - \varphi(u)}{1 - q^2} + \frac{\varphi(u) A(\cdot) + B(\cdot)}{1 - q} \right) \right) - \left(A(\cdot) \frac{\varphi(u)q + \varphi(v)}{1 + q} + B(\cdot) \right) \right]^2 = 0. \end{aligned}$$

Önerme 4.5.1. $X: [\varphi(u), \varphi(v)] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik süreci φ -konveks ve $(\varphi(u), \varphi(v))$ aralığı üzerinde kuadratik orta anlamda diferensiyellenebilir olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizliği sağlayan en az bir $A: \Omega \rightarrow R$ bir rastgele değişkeni mevcuttur:

$$X(t, \cdot) \geq A(\cdot) \left(t - \frac{\varphi(u)q + \varphi(v)}{1+q} \right) + X \left(\frac{\varphi(u)q + \varphi(v)}{1+q}, \cdot \right), \quad (a.e.).$$

İspat: $X(t, \cdot)$, $[\varphi(u), \varphi(v)]$ aralığında φ -konveks ve $t_0 \in (\varphi(u), \varphi(v))$ noktasında kuadratik orta anlamda diferensiyellenebilir bir stokastik süreç olduğundan aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$X(t, \cdot) - X(t_0, \cdot) \geq X'(t_0, \cdot)(t - t_0), \quad (a.e.).$$

Eğer $t_0 = \frac{\varphi(u)q + \varphi(v)}{1+q}$ ve $X' \left(\frac{\varphi(u)q + \varphi(v)}{1+q}, \cdot \right) = A(\cdot)$ alınırsa ispat biter.

Teorem 4.5.1. $X: [\varphi(u), \varphi(v)] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $(\varphi(u), \varphi(v))$ aralığı üzerinde kuadratik orta anlamda diferensiyellenebilir φ -konveks bir stokastik süreç olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [41]:

$$\begin{aligned} X \left(\frac{\varphi(u) + \varphi(v)}{2}, \cdot \right) &\leq \frac{1}{\varphi(v) - \varphi(u)} \int_{\varphi(u)}^{\varphi(v)} X(t, \cdot) dt \\ &\leq \frac{X(\varphi(u), \cdot) + X(\varphi(v), \cdot)}{2}, \quad (a.e.) \end{aligned}$$

Teorem 4.5.2. $X: [\varphi(u), \varphi(v)] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $(\varphi(u), \varphi(v))$ aralığı üzerinde kuadratik orta anlamda diferensiyellenebilir φ -konveks bir stokastik süreç ve $q \in (0,1)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur:

$$\begin{aligned} X \left(\frac{\varphi(u)q + \varphi(v)}{1+q}, \cdot \right) &\leq \frac{1}{\varphi(v) - \varphi(u)} \int_{\varphi(u)}^{\varphi(v)} X(t, \cdot) d_q t \\ &\leq \frac{qX(\varphi(u), \cdot) + X(\varphi(v), \cdot)}{1+q}. \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

İspat. Önerme 4.5.1'den

$$X(t, \cdot) \geq A(\cdot) \left(t - \frac{\varphi(u)q + \varphi(v)}{1+q} \right) + X \left(\frac{\varphi(u)q + \varphi(v)}{1+q}, \cdot \right)$$

şeklindedir. Bu durumda, Lemma 4.5.1'den (4.5.1) eşitsizliğinin sol tarafı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{1}{\varphi(v) - \varphi(u)} \int_{\varphi(u)}^{\varphi(v)} X(t, \cdot)_u d_q t \geq +X\left(\frac{\varphi(u)q + \varphi(v)}{1+q}, \cdot\right).$$

$X(t, \cdot)$ stokastik süreci φ -konveks olduğundan $\lambda \in [0, 1]$ için aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur:

$$X((1-\lambda)\varphi(u) + \lambda\varphi(v), \cdot) \leq (1-\lambda)X(\varphi(u), \cdot) + \lambda X(\varphi(v), \cdot)$$

Yukarıdaki eşitsizliğin λ 'ye göre $[0, 1]$ kapalı aralığında q -integral alındığında Lemma 4.5.2 yardımıyla (4.5.1) eşitsizliğinin sağ tarafı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \int_0^1 X((1-\lambda)\varphi(u) + \lambda\varphi(v), \cdot)_0 d_q \lambda &= \frac{1}{\varphi(v) - \varphi(u)} \int_{\varphi(u)}^{\varphi(v)} X(t, \cdot)_u d_q t \\ &\leq \int_0^1 [(1-\lambda)X(\varphi(u), \cdot) + \lambda X(\varphi(v), \cdot)]_0 d_q \lambda \\ &= \frac{q}{1+q} X(\varphi(u), \cdot) + \frac{1}{1+q} X(\varphi(v), \cdot) = \frac{qX(\varphi(u), \cdot) + X(\varphi(v), \cdot)}{1+q}. \end{aligned}$$

Sonuç 4.5.1. Teorem 4.5.2'deki eşitsizliğin $q \rightarrow 1^-$ iken limiti alınırsa, Teorem 4.5.1'deki gibi φ -konveks stokastik süreçler için klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir.

4.6. Harmonik Konveks Stokastik Süreçler için q -Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda, harmonik konveks stokastik süreçler için q -Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir.

Tanım 4.6.1. $I \subseteq (0, \infty)$, $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bir stokastik süreç olsun. Bu takdirde her $t, s \in I \subseteq (0, \infty)$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan $X(t, \cdot)$ 'e harmonik konveks stokastik süreç denir [42]:

$$X\left(\frac{ts}{\lambda t + (1-\lambda)s}, \cdot\right) \leq \lambda X(s, \cdot) + (1-\lambda)X(t, \cdot), \quad (a. e.).$$

Yukarıdaki eşitsizlik yön değiştirdiğinde harmonik konkav stokastik süreç elde edilir.

Lemma 4.6.1. $[u, v] \subset (0, \infty)$, $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kuadratik orta anlamda integrallenebilir bir stokastik süreç olsun. Bu takdirde, $\lambda \in (0,1)$ için aşağıdaki eşitlik mevcuttur [42]:

$$\int_0^1 X\left(\frac{uv}{\lambda u + (1-\lambda)v}, \cdot\right) d\lambda = \int_0^1 X\left(\frac{uv}{\lambda v + (1-\lambda)u}, \cdot\right) d\lambda = \frac{uv}{v-u} \int_u^v \frac{X(t, \cdot)}{t^2} dt, \quad (a. e.)$$

Lemma 4.6.2. $[u, v] \subset (0, \infty)$, $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kuadratik orta anlamda q - integrallenebilir bir stokastik süreç olsun. Bu takdirde, $\lambda, q \in (0,1)$ için aşağıdaki eşitlik mevcuttur:

$$\begin{aligned} \int_0^1 X\left(\frac{uv}{\lambda u + (1-\lambda)v}, \cdot\right) {}_0d_q\lambda &= \int_0^1 X\left(\frac{uv}{\lambda v + (1-\lambda)u}, \cdot\right) {}_0d_q\lambda \\ &= \frac{uv}{q(v-u)} \int_u^v \frac{X(t, \cdot)}{t^2} {}_ud_qt, \quad (a. e.). \end{aligned}$$

İspat. 1. integralde $t = \frac{uv}{\lambda u + (1-\lambda)v}$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$\int_0^1 X\left(\frac{uv}{\lambda u + (1-\lambda)v}, \cdot\right) {}_0d_q\lambda = \frac{uv}{q(v-u)} \int_u^v \frac{X(t, \cdot)}{t^2} {}_ud_qt$$

dır. 2. integral de uygun değişken dönüşümü ile benzer şekilde elde edilir.

Sonuç 4.6.1. Lemma 4.6.2’de $q \rightarrow 1^-$ iken limit alınırsa Lemma 4.6.1’deki gibi harmonik konveks stokastik süreçler için klasik integral eşitliği elde edilir.

Lemma 4.6.3. $[u, v] \subset (0, \infty)$, $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik süreci kuadratik orta anlamda q -integrali integrallenebilir ve $A, B: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ birer rastgele değişken olsun.

Eğer $E[A^2] < \infty, E[B^2] < \infty$ için $X(t, \cdot) = A(\cdot)t + B(\cdot)$ ise bu takdirde aşağıdaki eşitlik mevcuttur:

$$\int_0^1 X\left(\frac{uv}{\lambda u + (1-\lambda)v}, \cdot\right) {}_0d_q\lambda \geq A(\cdot)\frac{(1+q)uv}{qv+u} + B(\cdot), \quad (a.e.).$$

İspat. $X(t, \cdot)$ stokastik sürecinin q -integrali ile ilgili eşitlik aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} & E \left[\left((1-q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n X\left(\frac{uv}{q^n u + (1-q^n)v}, \cdot\right) - \left(A(\cdot)\frac{(1+q)uv}{qv+u} + B(\cdot) \right) \right)^2 \right] \\ &= E \left[\left((1-q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n \left[A(\cdot)\frac{uv}{q^n u + (1-q^n)v} + B(\cdot) \right] - \left(A(\cdot)\frac{(1+q)uv}{qv+u} + B(\cdot) \right) \right)^2 \right] \\ &= E \left[\left((1-q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n \left[A(\cdot) \left(\frac{q^n}{v} + \frac{(1-q^n)}{u} \right)^{-1} + B(\cdot) \right] - \left(A(\cdot)\frac{(1+q)uv}{qv+u} + B(\cdot) \right) \right)^2 \right] \\ &\geq E \left[\left((1-q) \left[A(\cdot) \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n \left(\frac{q^n}{v} + \frac{(1-q^n)}{u} \right)^{-1} + B(\cdot) \sum_{n=0}^{\infty} q^n \right] - \left(A(\cdot)\frac{(1+q)uv}{qv+u} + B(\cdot) \right) \right) \right)^2 \right] \\ &= E \left[\left((1-q) \left[A(\cdot) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left[q^{2n} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{u} \right) + q^n \frac{1}{u} \right]^{-1} + B(\cdot) \sum_{n=0}^{\infty} q^n \right] - \left(A(\cdot)\frac{(1+q)uv}{qv+u} + B(\cdot) \right) \right) \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$= E \left[\left((1-q) \left[A(\cdot) \left(\frac{1}{1-q^2} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{u} \right) + \frac{1}{1-q} \frac{1}{u} \right)^{-1} + \frac{1}{1-q} B(\cdot) \right] - \left(A(\cdot) \frac{(1+q)uv}{qv+u} + B(\cdot) \right) \right)^2 \right] = 0.$$

Önerme 4.6.1. $[u, v] \subset (0, \infty)$, $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik süreci harmonik konveks ve (u, v) aralığı üzerinde kuadratik orta anlamda diferensiyellenebilir olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizliği sağlayan en az bir $A: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bir rastgele değişkeni mevcuttur:

$$X(t, \cdot) \geq A(\cdot) \left(t - \frac{(1+q)uv}{uq+v} \right) + X \left(\frac{(1+q)uv}{uq+v}, \cdot \right), \quad (a.e.).$$

İspat: $X(t, \cdot)$, $(0, \infty)$ aralığında harmonik konveks ve $t_0 \in (u, v)$ noktasında kuadratik orta anlamda diferensiyellenebilir bir stokastik süreç olduğundan aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$X(t, \cdot) - X(t_0, \cdot) \geq X'(t_0, \cdot)(t - t_0), \quad (a.e.).$$

Eğer $t_0 = \frac{(1+q)uv}{uq+v}$ ve $X' \left(\frac{(1+q)uv}{uq+v}, \cdot \right) = A(\cdot)$ alınırsa ispat biter.

Teorem 4.6.1. $I \subseteq (0, \infty)$, $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ harmonik kuadratik orta anlamda q - integrallenebilir bir stokastik süreç olsun. Bu takdirde, $[u, v] \subset (0, \infty)$ için aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [42]:

$$X \left(\frac{2uv}{u+v}, \cdot \right) \leq \frac{uv}{v-u} \int_u^v \frac{X(t, \cdot)}{t^2} dt \leq \frac{X(u, \cdot) + X(v, \cdot)}{2}, \quad (a.e.).$$

Teorem 4.6.2. $[u, v] \subset (0, \infty)$, $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ harmonik konveks stokastik süreci kuadratik orta anlamda q -integralenebilirse, bu takdirde $q \in (0, 1)$ için aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur:

$$X \left(\frac{(1+q)uv}{qu+v}, \cdot \right) \leq \frac{uv}{q(v-u)} \int_u^v \frac{X(t, \cdot)}{t^2} {}_u d_q t \leq \frac{qX(u, \cdot) + X(v, \cdot)}{q+1}. \quad (4.6.1)$$

İspat. Önerme 4.6.1'den

$$X(t, \cdot) \geq A(\cdot) \left(t - \frac{(1+q)uv}{u+qv} \right) + X \left(\frac{(1+q)uv}{u+qv}, \cdot \right)$$

dır. Bu durumda, Lemma 4.6.3'den

$$\int_0^1 X \left(\frac{uv}{\lambda v + (1-\lambda)u}, \cdot \right) {}_0d_q\lambda \geq X \left(\frac{(1+q)uv}{u+qv}, \cdot \right)$$

eşitsizliği elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte Lemma 4.6.2 kullanırsa (4.6.1) eşitsizliğinin sol tarafı kolayca elde edilir. $X(t, \cdot)$ stokastik süreci harmonik konveks olduğundan $\lambda \in [0, 1]$ için aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur:

$$X \left(\frac{uv}{\lambda u + (1-\lambda)v}, \cdot \right) \leq (1-\lambda)X(u, \cdot) + \lambda X(v, \cdot).$$

Yukarıdaki eşitsizlikte λ 'ye göre $[0, 1]$ kapalı aralığında q -integral alınıp, Lemma 4.6.2 kullanırsa (4.6.1) eşitsizliğinin sağ tarafı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \int_0^1 X \left(\frac{uv}{\lambda v + (1-\lambda)u}, \cdot \right) {}_0d_q\lambda &= \frac{uv}{q(v-u)} \int_u^v \frac{X(t, \cdot)}{t^2} {}_ud_qt \\ &\leq \int_0^1 ((1-\lambda)X(u, \cdot) + \lambda X(v, \cdot)) {}_0d_q\lambda = \frac{qX(u, \cdot) + X(v, \cdot)}{q+1}. \end{aligned}$$

Sonuç 4.6.2. Teorem 4.6.2'de $q \rightarrow 1^-$ iken limit alınır Teorem 4.6.1'deki gibi harmonik konveks stokastik süreçler için klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir.

4.7. m -Konveks Stokastik Süreçler İçin q -Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda m -konveks stokastik süreçler için q -Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir.

Tanım 4.7.1. $I \subseteq [0, \infty)$, $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bir stokastik süreç ve $m \in (0, 1]$ olsun. Eğer her $\lambda \in [0, 1]$ için aşağıdaki koşul sağlanıyorsa bu sürece m -konvektir denir.

$$X(\lambda t + (1-\lambda)ms, \cdot) \leq \lambda X(t, \cdot) + m(1-\lambda)X(s, \cdot), \quad (a. e.).$$

Yukarıdaki eşitsizlikten $m = 1$ için konveks stokastik süreç ve $\lambda = 1/2$ için Jensen m -konveks stokastik süreç elde edilir [40].

Lemma 4.7.1. $[u, v] \subseteq [0, \infty)$, $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kuadratik orta anlamda integrallenebilir bir stokastik süreç ve $m \in (0, 1]$ olsun. Bu taktirde $\lambda \in (0, 1)$ için aşağıdaki eşitlikler mevcuttur [40]:

$$\int_0^1 X(\lambda u + m(1 - \lambda)v, \cdot) d\lambda = \frac{1}{mv - u} \int_u^{mv} X(t, \cdot) dt, (a. e.).$$

Lemma 4.7.2. $[u, v] \subseteq [0, \infty)$ $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kuadratik orta anlamda q - integrallenebilir bir stokastik süreç ve $m \in (0, 1]$ olsun. Bu taktirde $q, \lambda \in (0, 1)$ için aşağıdaki eşitlik mevcuttur:

$$\int_0^1 X(\lambda u + m(1 - \lambda)v, \cdot)_0 d_q \lambda = \frac{1}{mv - u} \int_u^{mv} X(t, \cdot)_u d_q t, (a. e.).$$

İspat. 1. integralde $t = m(1 - \lambda)v + \lambda u$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$\int_0^1 X(m(1 - \lambda)v + \lambda u, \cdot)_0 d_q \lambda = \frac{1}{mv - u} \int_u^{mv} X(t, \cdot)_u d_q t$$

şeklindedir. 2. integral de uygun değişken dönüşümü ile benzer şekilde elde edilir.

Sonuç 4.7.1. Lemma 4.7.2’de $q \rightarrow 1^-$ iken limit alınırsa Lemma 4.7.2 elde edilir.

Lemma 4.7.3. $[u, v] \subseteq [0, \infty)$, $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik süreci kuadratik orta anlamda q -integrali integrallenebilir ve $A, B: \Omega \rightarrow R$ birer rastgele değişken olsun. Eğer $E[A^2] < \infty, E[B^2] < \infty$ için $X(t, \cdot) = A(\cdot)t + B(\cdot)$ ise bu taktirde aşağıdaki eşitlik mevcuttur:

$$\frac{1}{mv - u} \int_u^{mv} X(t, \cdot)_u d_q t = A(\cdot) \frac{qu + mv}{1 + q} + B(\cdot), (a. e.).$$

İspat: $X(t, \cdot)$ 'nin kuadratik orta anlamda q -integrali integrallenebilir olduğundan aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$\begin{aligned}
& E \left[\left(\frac{1}{mv - u} (1 - q)(vm - u) \sum_{n=0}^{\infty} q^n X((1 - q^n)u + q^n mv, \cdot) \right)^2 \right. \\
& \quad \left. - \left(A(\cdot) \frac{qu + mv}{1 + q} + B(\cdot) \right) \right] \\
&= E \left[\left(\frac{1}{mv - u} (1 - q)(vm - u) \sum_{n=0}^{\infty} q^n [A(\cdot)((1 - q^n)u + q^n mv) + B(\cdot)] \right)^2 \right. \\
& \quad \left. - \left(A(\cdot) \frac{qu + mv}{1 + q} + B(\cdot) \right) \right] \\
&= E \left[\left((1 - q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n [A(\cdot)((1 - q^n)u + q^n mv) + B(\cdot)] \right)^2 \right. \\
& \quad \left. - \left(A(\cdot) \frac{qu + mv}{1 + q} + B(\cdot) \right) \right] \\
&= E \left[\left((1 - q) \sum_{n=0}^{\infty} [q^{2n} A(\cdot)(mv - u) + q^n (uA(\cdot) + B(\cdot))] \right)^2 \right. \\
& \quad \left. - \left(A(\cdot) \frac{qu + mv}{1 + q} + B(\cdot) \right) \right] \\
&= E \left[\left((1 - q) \left(A(\cdot) \frac{mv - u}{1 - q^2} + \frac{uA(\cdot) + B(\cdot)}{1 - q} \right) \right)^2 \right. \\
& \quad \left. - \left(A(\cdot) \frac{qu + mv}{1 + q} + B(\cdot) \right) \right] = 0.
\end{aligned}$$

Önerme 4.7.1. $[u, v] \subseteq [0, \infty)$, $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik süreci m -konveks ve (u, v) aralığı üzerinde kuadratik orta anlamda diferensiyellenebilir olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizliği sağlayan en az bir $A: \Omega \rightarrow R$ bir rastgele değişkeni mevcuttur:

$$X(t, \cdot) \geq A(\cdot) \left(t - \frac{qu + mv}{1 + q} \right) + X \left(\frac{qu + mv}{1 + q}, \cdot \right), \quad (a.e.).$$

İspat: $X(t, \cdot)$, (u, v) aralığında m -konveks ve $t_0 \in (u, v)$ noktasında kuadratik orta anlamda diferensiyellenebilir bir stokastik süreç olduğundan aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$X(t, \cdot) - X(t_0, \cdot) \geq X'(t_0, \cdot)(t - t_0), \quad (a. e.).$$

Eğer $t_0 = \frac{qu+mv}{1+q}$ ve $X'\left(\frac{qu+mv}{1+q}, \cdot\right) = A(\cdot)$ alınırsa ispat biter.

Teorem 4.7.1. $[u, v] \subseteq [0, \infty)$ $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ m -konveks bir stokastik süreç olsun. Eğer X stokastik süreci kuadratik orta anlamda integralenebilirse, bu takdirde $m \in (0, 1]$ için aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [43]:

$$X\left(\frac{u+mv}{2}, \cdot\right) \leq \frac{1}{mv-u} \int_u^{mv} X(t, \cdot) dt \leq \frac{mX(v, \cdot) + X(u, \cdot)}{2}, \quad (a. e.).$$

Teorem $[u, v] \subseteq [0, \infty)$ $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (u, v) aralığı üzerinde kuadratik orta anlamda diferensiyellenebilir m -konveks bir stokastik süreç ve $q \in (0, 1)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur:

$$\begin{aligned} X\left(\frac{qu+mv}{1+q}, \cdot\right) &\leq \frac{1}{mv-u} \int_u^{mv} X(t, \cdot) {}_u d_q t \\ &\leq \frac{qmX(v, \cdot) + X(u, \cdot)}{1+q}, \quad (a. e.). \end{aligned} \quad (4.7.1)$$

İspat. Önerme 4.7.1'den

$$X(t, \cdot) \geq A(\cdot) \left(t - \frac{qu+mv}{1+q} \right) + X\left(\frac{qu+mv}{1+q}, \cdot\right)$$

dır. Bu durumda, Lemma 4.7.3'den (4.7.1) eşitsizliğinin sol tarafı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{1}{mv-u} \int_u^{mv} X(t, \cdot) {}_u d_q t \geq X\left(\frac{qu+mv}{1+q}, \cdot\right).$$

$X(t, \cdot)$ stokastik süreci m -konveks olduğundan $\lambda \in [0, 1]$ için aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur:

$$X(\lambda u + m(1 - \lambda)v, \cdot) \leq \lambda X(v, \cdot) + m(1 - \lambda)X(u, \cdot).$$

Yukarıdaki eşitsizliğin λ 'ye göre $[0,1]$ kapalı aralığında q -integral alınıp, Lemma 4.7.2 kullanılarak (4.7.1) eşitsizliğinin sağ tarafı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \int_0^1 X(m(1 - \lambda)v + \lambda u, \cdot)_0 d_q \lambda &\leq \int_0^1 (m(1 - \lambda)X(v, \cdot) + \lambda X(u, \cdot))_0 d_q \lambda \\ &= mX(v, \cdot) \frac{q}{1 + q} + X(u, \cdot) \frac{1}{1 + q} = \frac{qmX(v, \cdot) + X(u, \cdot)}{1 + q}. \end{aligned}$$

Sonuç 4.7.2. Teorem 4.7.2'de $q \rightarrow 1^-$ iken limit alınırsa m -konveks stokastik süreçler için Teorem 4.7.1'deki klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir.

4.8. r -Konveks Stokastik Süreçler için q -Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda r -konveks stokastik süreçler için q -Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir.

Tanım 4.8.1. $X: I \times \Omega \rightarrow (0, \infty)$ pozitif bir stokastik süreç olsun. Eğer her $t, s \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$X(\lambda t + (1 - \lambda)s, \cdot) \leq (\lambda[X(t, \cdot)]^r + (1 - \lambda)[X(s, \cdot)]^r)^{\frac{1}{r}}; \quad r > 0, \quad (a.e.).$$

şartı sağlanıyorsa, bu sürece r -konvekstir denir. Açıkça görülmektedir ki, (4.8.1) eşitsizliği ile $r = 1$ için konveks stokastik süreç elde edilir. Ayrıca $X(t, \cdot)$ r -konveks ise $X^r(t, \cdot)$ stokastik süreci konvekstir [40].

Teorem 4.8.1. $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow (0, \infty)$ r -konveks pozitif bir stokastik süreç olsun. Eğer X stokastik süreci, $[u, v]$ üzerinde kuadratik orta anlamda integralenebilirse, bu takdirde, $0 < r \leq 1$ için aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [40]:

$$\frac{1}{v - u} \int_u^v X(t, \cdot) dt \leq \frac{r}{r + 1} ([X(u, \cdot)]^r + [X(v, \cdot)]^r)^{1/r}, \quad (a.e.).$$

Teorem 4.8.2. $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow (0, \infty)$ pozitif bir r -konveks kuadratik orta anlamda q -integrallenebilir bir stokastik süreç olsun. Bu takdirde $0 < r \leq 1$ için aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur:

$$\frac{1}{v-u} \int_u^v X(t, \cdot)_u d_q t \leq \frac{1}{[1/r + 1]_q} ([X(u, \cdot)]^r + q^r [X(v, \cdot)]^r)^{1/r}, (a. e.).$$

Burada $[1/r + 1]_q = \frac{1-q^{1/r+1}}{1-q}$, dır.

İspat. $X(t, \cdot)$, r -konveks stokastik süreç olduğundan her $\lambda \in [0, 1]$ için

$$X(\lambda u + (1 - \lambda)v, \cdot) \leq (\lambda [X(u, \cdot)]^r + (1 - \lambda) [X(v, \cdot)]^r)^{1/r}$$

dır Buradan Lemma 4.3.2 ile

$$\begin{aligned} \int_0^1 X(\lambda u + (1 - \lambda)v, \cdot)_0 d_q \lambda &= \frac{1}{v-u} \int_u^v X(t, \cdot)_u d_q t \\ &\leq \int_0^1 (\lambda [X(u, \cdot)]^r + (1 - \lambda) [X(v, \cdot)]^r)^{1/r}_0 d_q \lambda \end{aligned}$$

dır. Burada Minkowski eşitsizliği ve Lemma 4.3.2 kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 (\lambda [X(u, \cdot)]^r + (1 - \lambda) [X(v, \cdot)]^r)^{\frac{1}{r}}_0 d_q \lambda \\ &\leq \left[\left(\int_0^1 \lambda^{1/r}_0 d_q \lambda \right)^r [X(u, \cdot)]^r + \left(\int_0^1 (1 - \lambda)^{1/r}_0 d_q \lambda \right)^r [X(v, \cdot)]^r \right]^{1/r} \\ &\leq \left[\left(\frac{1}{[1/r + 1]_q} \right)^r [X(u, \cdot)]^r + \left(\frac{q}{[1/r + 1]_q} \right)^r [X(v, \cdot)]^r \right]^{1/r} \\ &= \frac{1}{[1/r + 1]_q^r} ([X(u, \cdot)]^r + q^r [X(v, \cdot)]^r)^{1/r} \\ &\leq \frac{1}{[1/r + 1]_q} ([X(u, \cdot)]^r + q^r [X(v, \cdot)]^r)^{1/r}. \end{aligned}$$

Sonuç 4.8.1. Teorem 4.8.2’de $q \rightarrow 1^-$ iken limit alınırsa r -konveks stokastik süreçler için Teorem 4.8.1’deki klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir.

4.9. İkinci anlamda s -Konveks Stokastik Süreçler için q -Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda ikinci anlamda s -konveks süreçler için q -Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir.

Tanım 4.9.1. s reel sayı olmak üzere $s \in (0,1]$ ve $X: [0, \infty) \times \Omega \rightarrow [0, \infty)$ bir stokastik süreç olsun. Bu durumda her $u, v \in [0, \infty)$ ve $\lambda \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan X stokastik sürecine ikinci anlamda s -konvektir denir:

$$X((1 - \lambda)u + \lambda v, \cdot) \leq (1 - \lambda)^s X(u, \cdot) + \lambda^s X(v, \cdot), \quad (a. e.).$$

Yukarıdaki eşitsizlik yön değiştirdiğinde X stokastik sürecine ikinci anlamda s -konkavdır denir. Yukarıdaki eşitsizlikte $s = 1$ için yazılırsa konveks stokastik süreç tanımı elde edilir [44].

Teorem 4.9.1. $X: [0, \infty) \times \Omega \rightarrow [0, \infty)$ ikinci anlamda s -konveks bir stokastik süreç ve $s \in (0,1]$ olsun. Eğer X stokastik süreci kuadratik orta anlamda integralenebilirse, bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [44]:

$$2^{s-1} X\left(\frac{u+v}{2}, \cdot\right) \leq \frac{1}{v-u} \int_u^v X(t, \cdot) dt \leq \frac{X(u, \cdot) + X(v, \cdot)}{s+1}, \quad (a. e.).$$

Teorem 4.9.2. $X: [0, \infty) \times \Omega \rightarrow [0, \infty)$, $(0, \infty)$ aralığı üzerinde kuadratik orta anlamda diferensiyellenebilir s -konveks bir stokastik süreç ve $q \in (0,1)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur:

$$2^{s-1} X\left(\frac{uq+v}{1+q}, \cdot\right) \leq \frac{1}{v-u} \int_u^v X(t, \cdot)_u d_q t \leq \frac{qX(u, \cdot) + X(v, \cdot)}{[s+1]_q}, \quad (a. e.). \quad (4.9.1)$$

İspat. Önerme 4.3.1 yardımıyla

$$X(t, \cdot) \geq A(\cdot) \left(t - \frac{uq + v}{1 + q} \right) + X \left(\frac{uq + v}{1 + q}, \cdot \right)$$

dır. Bu durumda, Lemma 4.3.3'den (4.9.1) eşitsizliğinin sol tarafı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{2^{1-s}}{v-u} \int_u^v X(t, \cdot)_u d_q t \geq \frac{1}{v-u} \int_u^v X(t, \cdot)_u d_q t \geq X \left(\frac{uq + v}{1 + q}, \cdot \right).$$

$X(t, \cdot)$ stokastik süreci s -konveks olduğundan $\lambda \in [0, 1]$ için aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur:

$$X((1 - \lambda)u + \lambda v, \cdot) \leq (1 - \lambda)^s X(u, \cdot) + \lambda^s X(v, \cdot).$$

Yukarıdaki eşitsizliğin λ 'ye göre $[0, 1]$ kapalı aralığında q -integral alıp, Lemma 4.3.2 kullanılarak (4.9.1) eşitsizliğinin sağ tarafı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \int_0^1 X((1 - \lambda)u + \lambda v, \cdot)_0 d_q \lambda &= \frac{1}{v-u} \int_u^v X(t, \cdot)_u d_q t \\ &\leq \int_0^1 [(1 - \lambda)^s X(u, \cdot) + \lambda^s X(v, \cdot)]_0 d_q \lambda \\ &\leq \frac{q}{[s + 1]_q} X(u, \cdot) + \frac{1}{[s + 1]_q} X(v, \cdot) = \frac{qX(u, \cdot) + X(v, \cdot)}{[s + 1]_q}. \end{aligned}$$

Sonuç 4.9.1. Teorem 4.9.2'de $q \rightarrow 1^-$ iken limit alınırsa Teorem 4.9.1'de gibi s -konveks stokastik süreçler için klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir.

4.10. (p, h) -Konveks Stokastik Süreçler için q -Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Bu kısımda (p, h) -konveks stokastik süreçler için q -Hermite-Hadamard eşitsizliği verilmiştir.

Tanım 4.10.1. $I \subseteq (0, \infty)$ ve $J \subseteq \mathbb{R}$ reel birer aralık, $(0,1) \subseteq J$ ve $h: J \rightarrow \mathbb{R}$, $h \neq 0$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda $p \in \mathbb{R}/\{0\}$ ve $\lambda \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan negatif olmayan $X: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stokastik sürecine (p, h) -konvektir denir:

$$X((\lambda t^p + (1 - \lambda)s^p)^{1/p}, \cdot) \leq h(\lambda)X(t, \cdot) + h(1 - \lambda)X(s, \cdot), \quad (a. e.).$$

Ayrıca yukarıdaki eşitsizlikte $p = 1$ için h -konveks, $h(\lambda) = 1$ için p -konvektir ve eşitsizlik ters çevrilirse bu sürece (p, h) -konkavdır denir [40].

Lemma 4.10.1. $[u, v] \subset (0, \infty)$, $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow (0, \infty)$ kuadratik orta anlamda integrallenebilir bir stokastik süreç olsun. Bu taktirde $\lambda \in (0,1)$ için aşağıdaki eşitlik mevcuttur [40]:

$$\begin{aligned} \int_0^1 X([\lambda u^p + (1 - \lambda)v^p]^{1/p}, \cdot) d\lambda &= \int_0^1 X([\lambda v^p + (1 - \lambda)u^p]^{1/p}, \cdot) d\lambda \\ &= \frac{p}{v^p - u^p} \int_u^v \frac{X(t, \cdot)}{t^{1-p}} dt, \quad (a. e.). \end{aligned}$$

Lemma 4.10.2. $[u, v] \subset (0, \infty)$, $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow (0, \infty)$ kuadratik orta anlamda q -integrallenebilir bir stokastik süreç olsun. Bu taktirde $q, \lambda \in (0,1)$ için aşağıdaki eşitlik mevcuttur:

$$\begin{aligned} \int_0^1 X([\lambda u^p + (1 - \lambda)v^p]^{1/p}, \cdot)_0 d_q \lambda &= \int_0^1 X([\lambda v^p + (1 - \lambda)u^p]^{1/p}, \cdot)_0 d_q \lambda \\ &= \frac{[p]_q}{v^p - u^p} \int_u^v \frac{X(t, \cdot)}{t^{1-p}} u d_q t, \quad (a. e.). \end{aligned}$$

Burada $[p]_q = \frac{1-q^p}{1-q}$ dır.

İspat. 1. integralde $t = [\lambda u^p + (1 - \lambda)v^p]^{1/p}$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$\int_0^1 X([\lambda u^p + (1 - \lambda)v^p]^{1/p}, \cdot)_0 d_q \lambda = \frac{[p]_q}{v^p - u^p} \int_u^v \frac{X(t, \cdot)}{t^{1-p}} u d_q t$$

şeklindedir. 2. integral de uygun değişken dönüşümü ile benzer şekilde elde edilir.

Sonuç 4.10.1. Lemma 4.10.2’de $q \rightarrow 1^-$ iken limit alınırsa Lemma 4.10.1 elde edilir.

Lemma 4.10.3. $[u, v] \subset (0, \infty)$, $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow (0, \infty)$ stokastik süreci kuadratik orta anlamda q -integrali integrallenebilir ve $A, B: \Omega \rightarrow R$ birer rastgele değişken olsun. Eğer $E[A^2] < \infty, E[B^2] < \infty$ için $X(t, \cdot) = A(\cdot)t + B(\cdot)$ ise bu taktirde aşağıdaki eşitlik mevcuttur:

$$\int_0^1 X\left([\lambda v^p + (1 - \lambda)u^p]^{1/p}, \cdot\right) {}_0d_q\lambda \geq A(\cdot) \left(\frac{qu^p + v^p}{1 + q}\right)^{1/p} + B(\cdot), \quad (a. e.).$$

İspat. $X(t, \cdot)$ stokastik sürecinin q -integrali ile ilgili eşitlik aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\begin{aligned} & E \left[\left((1 - q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n X\left([q^n v^p + (1 - q^n)u^p]^{1/p}, \cdot\right) - \left(A(\cdot) \left(\frac{qu^p + v^p}{1 + q}\right)^{1/p} + B(\cdot) \right) \right)^2 \right] \\ &= E \left[\left((1 - q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n \left[A(\cdot) \left([q^n v^p + (1 - q^n)u^p]^{1/p}\right) + B(\cdot) \right] - \left(A(\cdot) \left(\frac{qu^p + v^p}{1 + q}\right)^{1/p} + B(\cdot) \right) \right)^2 \right] \\ &\geq E \left[\left((1 - q) \left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n A(\cdot) [q^n v^p + (1 - q^n)u^p] \right)^{1/p} + \sum_{n=0}^{\infty} q^n B(\cdot) \right] - \left(A(\cdot) \left(\frac{qu^p + v^p}{1 + q}\right)^{1/p} + B(\cdot) \right) \right)^2 \right] \\ &= E \left[\left((1 - q) \left[A(\cdot) \left(\frac{v^p - u^p}{1 - q^2} + \frac{u^p}{1 - q} \right)^{1/p} + \frac{1}{1 - q} B(\cdot) \right] - \left(A(\cdot) \frac{(1 + q)uv}{qv + u} + B(\cdot) \right) \right)^2 \right] = 0. \end{aligned}$$

Önerme 4.10.1. $[u, v] \subset (0, \infty)$, $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow (0, \infty)$ stokastik süreci p -konveks ve (u, v) aralığı üzerinde kuadratik orta anlamda diferensiyellenebilir olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizliği sağlayan en az bir $A: \Omega \rightarrow R$ bir rastgele değişkeni mevcuttur:

$$X(t, \cdot) \geq A(\cdot) \left(t - \left(\frac{qu^p + v^p}{1+q} \right)^{1/p} \right) + X \left(\left(\frac{qu^p + v^p}{1+q} \right)^{1/p}, \cdot \right), \quad (a. e.).$$

İspat: $X(t, \cdot)$, (u, v) aralığında p -konveks ve $t_0 \in (u, v)$ noktasında kuadratik orta anlamda diferensiyellenebilir bir stokastik süreç olduğundan aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$X(t, \cdot) - X(t_0, \cdot) \geq X'(t_0, \cdot)(t - t_0), \quad (a. e.).$$

Eğer $t_0 = \left(\frac{qu^p + v^p}{1+q} \right)^{1/p}$ ve $X' \left(\left(\frac{qu^p + v^p}{1+q} \right)^{1/p}, \cdot \right) = A(\cdot)$ alınırsa ispat biter.

Teorem 4.10.1. $[u, v] \subset (0, \infty)$, $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow (0, \infty)$ negatif olmayan (p, h) -konveks stokastik süreci kuadratik orta anlamda integralenebilir ve $h\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$ ise, bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur [40]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)} X \left(\left[\frac{u^p + v^p}{2} \right]^{1/p}, \cdot \right) &\leq \frac{[p]_q}{v^p - u^p} \int_u^v \frac{X(t, \cdot)}{t^{1-p}} {}_u d_q t \\ &\leq (X(u, \cdot) + X(v, \cdot)) \int_0^1 h(\lambda) d\lambda, \quad (a. e.). \end{aligned}$$

Teorem 4.10.2. $[u, v] \subset (0, \infty)$, $X: [u, v] \times \Omega \rightarrow (0, \infty)$, (u, v) aralığı üzerinde kuadratik orta anlamda diferensiyellenebilir s -konveks bir stokastik süreç ve $q \in (0, 1)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur:

$$X \left(\left(\frac{qu^p + v^p}{1+q} \right)^{1/p}, \cdot \right) \leq \frac{[p]_q}{v^p - u^p} \int_u^v \frac{X(t, \cdot)}{t^{1-p}} {}_u d_q t$$

$$\leq \frac{qX(u, \cdot) + X(v, \cdot)}{q + 1}, \quad (a. e.). \quad (4.10.1)$$

İspat. Önerme 4.9.1'den

$$X(t, \cdot) \geq A(\cdot) \left(t - \left(\frac{qu^p + v^p}{1 + q} \right)^{1/p} \right) + X \left(\left(\frac{qu^p + v^p}{1 + q} \right)^{1/p}, \cdot \right)$$

dır. Bu durumda, Lemma 4.10.3'den

$$\begin{aligned} & \int_0^1 X \left([\lambda v^p + (1 - \lambda)u^p]^{\frac{1}{p}}, \cdot \right) {}_0d_q \lambda \\ & \geq A(\cdot) \left[\left(\frac{qu^p + v^p}{1 + q} \right)^{1/p} - \left(\frac{qu^p + v^p}{1 + q} \right)^{1/p} \right] + X \left(\left(\frac{qu^p + v^p}{1 + q} \right)^{1/p}, \cdot \right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte $t = [\lambda v^p + (1 - \lambda)u^p]^{\frac{1}{p}}$ değişken dönüşümü yapılırsa (4.10.1) eşitsizliğinin sol tarafı elde edilir. $X(t, \cdot)$ stokastik süreci p -konveks olduğundan $\lambda \in [0, 1]$ için aşağıdaki eşitsizlik mevcuttur:

$$X \left([\lambda u^p + (1 - \lambda)v^p]^{\frac{1}{p}}, \cdot \right) \leq h(\lambda)X(u, \cdot) + h(1 - \lambda)X(v, \cdot).$$

Yukarıdaki eşitsizlikte λ 'ye göre $[0, 1]$ kapalı aralığında q -integral alınıp, Lemma 4.10.2 kullanılarak (4.10.1) eşitsizliğinin sağ tarafı aşağıdaki gibi kolayca elde edilir:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left([\lambda u^p + (1 - \lambda)v^p]^{\frac{1}{p}}, \cdot \right) {}_0d_q \lambda = \frac{[p]_q}{v^p - u^p} \int_u^v \frac{X(t, \cdot)}{t^{1-p}} {}_u d_q t \\ & \leq X(v, \cdot) \int_0^1 h(\lambda) {}_0d_q \lambda + X(u, \cdot) \int_0^1 h(1 - \lambda) {}_0d_q \lambda. \end{aligned}$$

Sonuç 4.10.2. Teorem 4.10.2'de $q \rightarrow 1^-$ iken limit alınırsa, (p, h) -konveks stokastik süreçler için Teorem 4.10.1'deki klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği elde edilir.

BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde literatürde konveks, preinveks, φ -konveks, harmonik konveks, m -konveks, r -konveks, ikinci anlamada s -konveks ve (p, h) -konveks fonksiyon sınıfları için stokastik süreçlere ait q -Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir.

Stokastik süreçlerin diğer sınıfları için de benzer çalışmaların yapılabileceği aşıkardır.



KAYNAKLAR

- [1] Euclid, The Thirteen Books of Elements III, (Trans: Thomas L. Heath), 2nd Ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1908.
www.google.com., Erişim Tarihi: 05.10.2017.
- [2] Berggren, J.L., A lacuna in book i of archimedes sphere and cylinder. *Historia Mathematica*, 4, 1-5, 1977.
- [3] Hadamard, J., Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann. *J. Math Pures Appl.*, 58, 171-215, 1893.
- [4] Hardy, G.H., Littlewood, J.E., & Polya, G. *Inequalities* (2nd ed.). Cambridge U.P., Cambridge, 1877-1947, 1988.
- [5] Beckenbach, E.F., & Bellman R., *Inequalities*, Springer Verlag, Berlin- Göttingen- Heidelberg, ([Hungarian Language Ignored]) 276 Seiten, Preis 1 r. 9 k, 1961.
- [6] Pecaric, J., *Konveksne funkcije: nejednakosti*, Naucna knjiga, Beograd, 243, 1987.
- [7] Dragomir, S.S., Pearce, C.E.M., *Selected topics on Hermite-Hadamard inequality and applications*, Victoria University, Melbourne, 2000.
- [8] Nikodem, K., On convex stochastic processes. *Aequat. Math.* 20, 184-197, 1980.
- [9] Skowronski, A., On some properties of J-convex stochastic processes. *Aequat. Math.*, 44, 249-258, 1992.
- [10] Kotrys, D., Hermite–Hadamard inequality for convex stochastic processes. *Aequationes Mathematicae*, 83, 143-151, 2012.
- [11] Tomar, M., Set, E., Okur B., N., On Hermite-Hadamard type inequalities for strongly-log convex stochastic processes. *The Journal of Global Engineering Studies*, 1(2), 53-61, 2014.
- [12] Karahan, V., Okur, N., Hermite-Hadamard type inequalities for convex stochastic processes on n-coordinates, *Turkish Journal Mathematics and Computer Science*, 10, 256-262, 2018.

- [13] Okur, N., İşcan, İ., Yüksek Dizdar, E., Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex stochastic processes. *International Journal of Economics and Administrative Studies*, 11, 281-292, 2018.
- [14] Okur, N., İşcan, İ., Usta, Y., Some integral inequalities for harmonically convex stochastic processes on the coordinates. *Advanced Math. Models & Applications*, 3(1), 63-75, 2018.
- [15] Okur, N., İşcan, İ., Yüksek Dizdar, E., Hermite-Hadamard type inequalities for p-convex stochastic processes. *An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications*, 9(2), 148-153, 2019.
- [16] Okur, N., Karahan, V., Some integral inequalities of the Hermite-Hadamard type for s-convex stochastic processes on n-coordinates, *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1*, 68(2), 1-16, 2019.
- [17] Akdemir, G.H., Okur B., N., İşcan, İ., On preinvexity for stochastic processes, statistics. *Journal of the Turkish Statistical Association*, 7(1), 15-22, 2014.
- [18] Okur, B., N., Akdemir, G.H., İşcan, İ., Some Extensions of Preinvexity for Stochastic Processes. *Comp. Analysis, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, Springer, New York, 155, 259-270, 2016.
- [19] Karahan V., Okur, N., New Integral Inequalities of Hadamard's for Harmonically Convex Stochastic Processes on n-coordinates, Prof. Dr. M. Bayram, Assoc. Prof. Dr. A. Sezer (eds.), 8th International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM-2019), 10-13 March 2019, Book of Proceedings, p.154-158, Istanbul Gelisim University, Istanbul, Turkey.
- [20] Sarikaya, M.Z., Yaldiz H., Budak H., Some integral inequalities for convex stochastic processes, *Acta Math Univ Comenianae*, LXXXV:155-164, 2016.
- [21] Sarikaya, M.Z., Kiriş, M.E., Çelik, N., Hermite-Hadamard type inequality for ϕ h-convex stochastic processes. *AIP Conference Proceedings*, 1726(1), 020076, 2016.
- [22] Set, E., Tomar M., Maden S., Hermite-Hadamard type inequalities for sconvex stochastic processes in the second sense. *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, 2(6), 202-207, 2014.
- [23] Kac, V.; Cheung, P. *Quantum Calculus*, Universitex, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [24] Mitrović, D.S., *Analytic Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin, 404, New York, 1970.

- [25] Pecaric, J., Konveksne funkcije: nejednakosti, Naucna knjiga, Beograd, 243, 1987.
- [26] Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E., Fink, A.M., Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives. Kluwer Academic Publishers, 587, Dordrecht/Boston/London, 1991.
- [27] Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E., Fink, A.M., Classical and New Inequalities in Analysis. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1993.
- [28] Pachpatte, B.G., Mathematical Inequalities, Elsevier B.V., Amsterdam, The Netherlands, 2005.
- [29] Bin Mohsin, B., Awan, M.U., Noor, M.A., Riahi, L., Noor, K.I., Almutairi, B., 2019. New Quantum Hermite-Hadamard Inequalities Utilizing Harmonic Convexity of the Functions, IEEE Access, Volume 7, 20479-20483.
- [30] Noor, M.A., Noor K.I., Awan M.U., 2015. Some quantum integral inequalities via preinvex functions, Applied Mathematics and Computation, 269, 242-251.
- [31] Haq W.U, 2020. Certain Inequalities of Hermite–Hadamard–Fejér Type Involving q-Stochastic Integral, Iran J Science Technol Trans 44, 487-491.
- [32] Alp N., Sarıkaya M.Z., Kunt M., İscan I., 2018. q-Hermite Hadamard inequalities and quantum estimates for midpoint type inequalities via convex and quasi-convex functions, Journal of King Saud University –Science, 30, 193-203.
- [33] Aliyev, R., Stokastik Süreçler Teorisi, KTÜ Matbaası, Trabzon, 2010.
- [34] Knopp, Konrad Theory and Application of Infinite Series (in English translation), Dover Publications, ISBN 978-0-486-66165-0, 1990.
- [35] Sole, A.; Kac, V. On integral representations of q-gamma and q-beta functions, Department of Mathematics, 2003.
- [36] Koekoek, R.; Swarttouw, R. The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue, Technical Universty Delft, 1998.
- [37] Mansour, M. Incomplete q-gamma function and tricoli expansion, World Scienti_c, 2009.
- [38] Kunt M., Latif M.A., İscan I., Dragomir S.S., 2019. Quantum Hermite-Hadamard Type Inequality And Some Estimates Of Quantum Midpoint Type

Inequalities For Double Integrals, Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 37 (1), 207-223.

- [39] Yüksek Dizdar, E., Bazı Konveks Stokastik Süreçler için Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler, Fen Bilimleri Enstitüsü, Giresun Üniversitesi, 2018.
- [40] Akdemir, G.H., Okur B., N. & İşcan, İ., On preinvexity for stochastic processes, statistics. Journal of the Turkish Statistical Association, 7(1), 15-22, 2014.
- [41] Okur, N., 2019. Multidimensional general convexity for stochastic processes and associated with Hermite-Hadamard type integral inequalities. Thermal Science, 23(Suppl. 6), 1971-1979., Doi: 10.2298/TSCI190622361O (Yayın No: 5837611).
- [42] Okur, N., İşcan, İ., & Yüksek Dizdar, E., Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex stochastic processes. International Journal of Economics and Administrative Studies, 11, 281-292, 2018.
- [43] Lara T., Mejia O., Merentes N., Lopez M.V., 2020. Some Inequalities for m-Convex Stochastic Process, Mathematica Eterna, Volume 10, 1, Number 103.
- [44] Okur N., & Karahan, V., Some integral inequalities of the Hermite-Hadamard type for s-convex stochastic processes on n-coordinates, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1, 68(2), 1-16, 2019.

ÖZGEÇMİŞ

Antalya ili Serik ilçesinde doğdu. İlk, Orta ve Lise öğrenimini Antalya’da tamamladı. 2006 yılında girdiği Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden 2013 yılında mezun oldu. 2013 yılında Adalet Bakanlığında İnfaz ve Koruma memuru olarak göreve başladı ve halen devam etmektedir. Evli ve 2 çocuk babasıdır.

