



T.C.

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BAZI KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN HOMOTOPI
PERTURBASYON VE HOMOTOPI ANALİZ METODUNUN
KARŞILAŞTIRILMASI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERVE CİN

EYLÜL

**BAZI KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN HOMOTOPİ
PERTURBASYON VE HOMOTOPİ ANALİZ METODUNUN
KARŞILAŞTIRILMASI**

Merve CİN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Serpil ŞAHİN

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

EYLÜL 2024

Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Merve CİN tarafından hazırlanan “Bazı Kısmi Diferansiyel Denklemler İçin Homotopi Perturbasyon Ve Homotopi Analiz Metodunun Karşılaştırılması” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Serpil ŞAHİN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Başkan: Doç.Dr.Orhan ÖZDEMİR

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Dr.Öğr.Üyesi Tahir COŞGUN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 26/09/2024

Juri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç.Dr.Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Merve CİN

26/09/2024

BAZI KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN HOMOTOPİ PERTURBASYON
VE HOMOTOPİ ANALİZ METODUNUN KARŞILAŞTIRILMASI
(Yüksek Lisans Tezi)

Merve CİN

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Eyül 2024

ÖZET

Bu çalışma da bazı kısmi diferansiyel denklemlere Homotopi perturbasyon ve Homotopi analiz metotları uygulandı. Ayrıca elde edilen çözümler analitik çözümlerle karşılaştırıldı. Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, Homotopi perturbasyon ve Homotopi analiz metotları hakkında geniş bir literatür özeti verildi. İkinci bölümde, kullanacağımız temel tanımlardan bahsedildi. Üçüncü bölümde, bazı kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için kullandığımız Homotopi perturbasyon ve Homotopi analiz metotları verildi. Ayrıca bu metotlar Fisher ve Helmholtz denklemleri ve bazı kısmi diferansiyel denklem sistemlerine uygulandı. Dördüncü bölümde ise bazı kısmi diferansiyel denklemler bu iki metotla çözülmüş ve karşılaştırmaları yapıldı. Son olarak beşinci bölümde de bu denklemlerle ilgili gelecekteki çalışmalar için önerilerde bulunuldu.

Sayfa Adedi
Anahtar Kelimeler

Danışman

: 28
: Homotopi analiz metodu, Homotopi perturbasyon metodu, Kısmi diferansiyel denklem, Fisher denklemi, Helmholtz denklemi
: Dr. Öğr. Üyesi Serpil ŞAHİN

COMPARISON OF HOMOTOPY PERTURBATION AND HOMOTOPY ANALYSIS
METHOD FOR SOME PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

(M. Sc. Thesis)

Merve CİN

AMASYA UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

September 2024

ABSTRACT

In this study, Homotopy perturbation and Homotopy analysis methods are applied to some partial differential equations and the obtained solutions are compared with analytical solutions. This paper consists of five chapters. In the first section we give a broad overview of the literature on homotopy perturbation and homotopy analysis methods. In the second section, the basic definitions that we will use are mentioned. In the third chapter, some Homotopy perturbation and Homotopy master perturbation, which we use to solve partial differential equations. lysis methods are given. These methods are also applied to Fisher and Helmholtz equations and some partial differential systems of equations. In the fourth part, some partial differential equations are analyzed with these two method and comparisons were made. Finally, in the fifth section, we present the results related to these equations. Suggestions were made for future work.

Page Number : 28
Keywords : Homotopy perturbation method, Homotopy analysis method, Partial differential equation, Fisher equation, Parabolic equation
Supervisor : Asst.Prof.Dr Serpil ŞAHİN

ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında, her aşamasında değerli bilgilerini benimle paylaşarak ve değerli zamanını benden esirgemeyerek her fırsat ve koşulda bana yardımcı olan, çalışmaktan zevk aldığım ve öğrencisi olmaktan gurur duyduğum saygıdeğer danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Serpil ŞAHİN'e teşekkür ederim.

Son olarak tüm hayatım boyunca kararlarımı destekleyen, her zaman yanımda olan beni cesaretlendiren, moral veren, bilgi ve tecrübeleriyle hayatıma ışık tutan ve bu hayattaki en büyük şansım olan aileme başta babam Hasan CİN annem Emine CİN ve çok sevgili ağabeyim İrfan OLGUN ve ailemin her bir ferdine teşekkürü bir borç bilir, şükranlarımı sunarım.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	4
2.1. Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Genel Bir Sınıflandırılması	4
2.2. Homotopi Dönüşümü	5
3. MATERYAL VE METOT	6
3.1. Homotopi Perturbasyon Metodu	6
3.2. Homotopi Analiz Metodu	10
3.2.1. Sıfırıncı derece deformasyon denklemi	12
3.2.2. Yüksek derece deformasyon denklemi	14
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	18
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	25
ÖZGEÇMİŞ	28

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 3.1. Genelleştirilmiş Fisher denklemi için sayısal sonuçlar.	8



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
N	Lineer olmayan operatör
L	Lineer operatör
p	Gömme parametresi
H	Homotopi
α	Yakınsaklık parametresi
L^{-1}	L lineer operatörün ters operatörü
Kısaltmalar	Açıklama
HAM	Homotopi analiz metodu
HPM	Homotopi perturbasyon metodu

1. GİRİŞ

Homotopi Perturbasyon Metodu (HPM), diferansiyel denklemler ve diğer lineer olmayan problemleri çözmek için kullanılan yenilikçi ve etkili bir analitik yöntemdir. Bu yöntem, homotopi kavramını perturbasyon teknikleri ile birleştirerek, çözüm sürecinde esneklik ve doğruluk sağlar. Homotopi, iki fonksiyon arasında sürekli bir dönüşüm tanımlar. HPM’de, çözülmesi gereken lineer olmayan problem ile bu problemin daha basit ve çözümü bilinen bir lineer problem arasında bir homotopi oluşturulur. Perturbasyon yöntemleri, küçük bir parametreye bağlı olarak problemin çözümünü seri genişletmeleri ile bulmayı amaçlar. Ancak, geleneksel perturbasyon yöntemleri, problemin doğal olarak küçük bir parametre içerdiği varsayımına dayanır. HPM, bu kısıtlamayı aşar. HPM, geleneksel perturbasyon yöntemlerinin aksine, problemi küçük bir parametreye bağlama zorunluluğunu ortadan kaldırır. Bu, geniş bir yelpazedeki problemlere uygulanabilirlik sağlar. HPM, lineer ve lineer olmayan bileşenlerin uygun şekilde harmanlanmasıyla, analitik çözümler sunmada oldukça etkilidir. Uygulama süreci genellikle basittir ve birçok probleme kolayca adapte edilebilir (Wazwaz and Gorguis, 2004; Biazar and Ghazvini, 2008). HPM ilk olarak Ji-Huan He tarafından ortaya konmuştur (He, 1999). He, bu yöntemi geliştirirken homotopi tekniğini perturbasyon metodu ile birleştirerek, lineer olmayan problemler için çözümler üretmiştir (He, 2000). Daha sonra, homotopi analiz metodu (HAM) ile HPM arasındaki farkları gözlemlemiştir (He, 2004). Son yıllarda, kesirli türevli kısmi diferansiyel denklemler için lineer olmayan başlangıç değer problemlerinde HPM’in etkinliği gösterilmiştir. Bu bağlamda, Biazar ve Ghazvini, hiperbolik denklemler için HPM’in uygulanışını incelemiştir (Biazar and Ghazvini, 2008). Ayrıca, HPM’in farklı türden denklemlere uygulanışını gösteren çok sayıda makale yayınlanmıştır.

Homotopi Analiz Yöntemi (HAM), diferansiyel denklemler ve diğer matematiksel problemlerin çözümünde kullanılan güçlü ve esnek bir analitik tekniktir. 1992 yılında S.J. Liao tarafından geliştirilen bu yöntem, özellikle lineer olmayan problemler için etkili çözümler sunar. HAM, klasik perturbasyon yöntemlerinin sınırlamalarını aşmak için homotopi kavramını kullanır. Homotopi, iki fonksiyon arasında sürekli bir dönüşüm tanımlayan bir matematiksel kavramdır. HAM’de bu kavram, problemin çözüm sürecinde kullanılır. HAM, bir yardımcı lineer operatör kullanarak, problemi bilinen bir başlangıç çözümünden hedeflenen tam çözüme götüren bir yol tanımlar. Bu operatör, problemin lineer olmayan kısmını kontrol etmek için kullanılır. HAM, çözümlerin yakınsaklık bölgesini kontrol etmek için küçük bir parametre kullanır. Bu parametre sayesinde, serinin yakınsaklığı ayarlanabilir ve daha doğru sonuçlar elde edilebilir. Akışkan dinamiği, ısı transferi, mekanik sistemler ve elektromanyetik problemler gibi alanlarda HAM yaygın olarak kullanılır. Popülasyon dinamikleri, epidemiyoloji ve ekonomik modeller gibi biyolojik ve ekonomik problemlerde de HAM’in uygulanabilirliği gösterilmiştir. Sonuç olarak, geniş bir uygulama yelpazesi ile

HAM, modern bilim ve mühendislik problemlerinin çözümünde önemli bir rol oynamaktadır (Abbasbandy, 2006; Abbasbandy, 2007; Abbasbandy, 2008; Liao, 2003; Liao, 2004; Liao, 2005). Kısmi diferansiyel denklem sistemleri; fizik, mühendislik ve uygulamalı bilim-ler gibi çeşitli fiziksel problemlerde ortaya çıkmaktadır (Abbasbandy, 2010). Lineer olmayan bilimlerin hızlı gelişimi ile başa çıkmak için bilim adamları tarafından çok çeşitli analitik ve sayısal yöntemler ele alınmıştır (Gurtin and Maccamy, 1977; Gurney and Nisbet, 1975; Lu, 2000; Tan and Abbasbandy, 2008; Hayat and Khan, 2005). Karmaşık fiziksel problemlerin lineer olmamasının üstesinden gelmek için bilim adamları tarafından çeşitli analitik ve sayısal teknikler geliştirilmiştir. Geliştirilen şemaların çoğunun , sınırlı yakınsama, ıraksak sonuçlar, lineerleştirme , ayırıklaştırma , gerçekçi olmayan varsayımlar ve fiziksel problemlerin çok yönlülüğü ile uyumsuzluk gibi sınırlamaları vardır (Abbasbandy, 2006; Abbasbandy, 2007; Abbasbandy, 2008; Abbasbandy, 2010; Liao, 2003; Liao, 2004; Liao, 2005; Gurtin and Maccamy, 1977; Gurney and Nisbet, 1975). Bu nedenle, Liao lineer olmayan doğal fiziksel problemlerin çoğuna uygulanan Homotopi analiz yöntemini geliştirmiştir (Liao, 2003; Liao, 2004; Liao, 2005). Bu çalışmanın temel amacı kısmi diferansiyel denklemler için Homotopi analiz yöntemini geliştirmektir. Bu tür denklemler için verilen bu tekniğin oldukça etkili olduğu gözlemlenmiştir. Ayrıca bu yöntem çok kullanışlıdır ve başlangıç seçimindeki karmaşık durumların üstesinden gelir.

”K(2,2)” denklemi genellikle diferansiyel denklemler teorisinde ”Korteweg-de Vries (KdV)” denkleminin belirli bir çözümü veya formunu ifade eder. KdV denklemi, sıg su dalgaları, plazma dalgaları ve diğer fiziksel olayları modellemek için kullanılır. ”K(2,2)” ifadesi, KdV denkleminin çok özel bir sınıfına veya çözümüne atıfta bulunabilir. Bu genellikle iki soliton çözümüdür. KdV denklemi, soliton çözümleri olarak bilinen ve belirli koşullar altında hareket eden yalnız dalgaları destekler. İki soliton çözümü, iki bağımsız solitonun etkileşimini ve zamanla hareketini tanımlar. Bu kapsamda, Lu ve Liu makalelerinde, değişken katsayıya sahip KdV Burgers denklemini sayısal olarak çözmek için Homotopi analiz metodunu kullanmıştır (Lu and Liu, 2014). Aslanov da çalışmasında lineer olmayan dalga benzeri (wave-like) denklemlerin çözümlerini de Homotopi analiz metodunu kullanarak elde etmiştir (Aslanov, 2015). Odibat ve Bataineh , lineer olmayan problemler için yeni bir Homotopi analiz metodu yaklaşımı sunmuştur (Odibat and Bataineh, 2015). Bu önerilen yaklaşımla, karmaşık integralleri hesaplamanın zorluğunun üstesinden kolayca gelinebilir. Buna ek olarak, problemin lineer olmayan kısmını bir dizi polinoma ayrışımını sağlayan homotopi polinomları önerilmiş ve bu polinomlar için bir hesaplama algoritması geliştirilmiştir. Bu tür polinomlar çözüm prosedürünü daha basit ve etkili hale getirir. Türkyılmazoğlu, HAM’ın yakınsama bölgesi analizinde kullanılan optimum yakınsama kontrol parametrelerinin belirlenmesi için etkili bir yaklaşım geliştirmiştir (Türkyılmazoğlu, 2016).

”Burger” denklemi akışkanlar dinamiğindeki yayılan dalgalar için en basit linner olmayan kısmi diferansiyel denklem modelidir. İlk olarak Burgers tarafından bir boyutlu türbülans tanımlamak için kullanılmıştır. Sayısal çözümleri için çok çeşitli metotlar kullanılmaktadır. Bu iki metot karşılaştırıldığında, HAM yüksek derecede esneklik sağlar. HAM, başlangıç tahminine ve homotopi parametresine bağlı olarak çözümün yakınsamasını kontrol etme yeteneği sunar. Bu, özellikle zor ve karmaşık problemlerde büyük avantaj sağlar. HPM ise genellikle daha basit ve hızlıdır, ancak çözümün doğruluğu ve yakınsaması üzerinde daha az kontrol imkanı sunar. HPM, pertürbasyon yöntemlerinin avantajlarını kullanarak homotopi konseptini uygular. Ayrıca HAM, çözümün yakınsama hızını ve doğruluğunu optimize etmek için homotopi parametresi (α) ve diğer kontrol parametrelerini kullanır. Bu, yakınsamada yüksek hassasiyet gerektiren problemler için ideal bir araçtır. HPM ise, genellikle hızlı ve yeterli yakınsama sağlar ancak bu yakınsama bazen başlangıç tahmini ve problem doğasına bağlı olarak değişebilir. HAM, geniş bir uygulama yelpazesine sahiptir ve birçok fiziksel ve mühendislik problemlerine uygulanabilir. Lineer olmayan ve kompleks problemlerde daha etkili sonuçlar verebilir. HPM, nispeten daha basit yapısıyla temel matematiksel problemler ve mühendislik uygulamalarında yaygın olarak kullanılır. Özellikle küçük parametrelili problemler için uygundur.

Bu çalışmada da bazı kısmi diferansiyel denklemlere Homotopi analiz ve Homotopi pertürbasyon metodu uygulanmış ve yaklaşık çözümleri elde edilmiştir. Ayrıca bu iki yöntemin, ele aldığımız birkaç problemde karşılaştırılması yapılmıştır. Sonuç olarak bu yöntemler, başlangıç seçiminin karmaşıklığının üstesinden gelir ve yüksek verimlilikte bir sayısal çözüm sağlar.

2. GENEL BİLGİLER

2.1 Tanım Bir veya daha fazla bağımlı parametrenin, bir veya daha fazla bağımsız parametreye göre birinci veya daha fazla mertebeden türevlerini içeren denklemlere Diferansiyel denklem denir.

2.2 Tanım Bir bağımsız ve en az bir bağımlı parametre ve bağımlı parametrenin türevlerini içeren denklemlere adi diferansiyel denklemler denir. n. mertebeden bir adi diferansiyel denklem;

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Bağımsız parametremiz birden fazlaysa bu durumda bağımlı parametrelerin kısmi türevlerini içeren denklemlere kısmi diferansiyel denklemler denir. Bu denklemler;

$$F(t, x, z, z_t, z_x, z_{tt}, z_{xx}, z_{tx}, \dots) = 0 \quad (2)$$

genel formla verilebilir.

2.1. Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Genel Bir Sınıflandırılması

2.3 Tanım Birden fazla bağımsız parametre (örneğin t ve x) ve bir bağımlı parametre (örneğin z) için 1. ve 2. mertebeden lineer kısmi diferansiyel denklemlerin genel formları;

$$D(t, x)z_t + E(t, x)z_x + F(t, x)z = H(t, x) \quad (3)$$

$$P(t, x)z_{tt} + Q(t, x)z_{tx} + R(t, x)z_{xx} + T(t, x)z_t + U(t, x)z_x + V(t, x)z = Y(t, x) \quad (4)$$

şeklinde verilebilir.

2.4 Tanım Bir kısmi diferansiyel denklemde bulunan en yüksek mertebeden kısmi türevlere göre denklem lineer ise bu denkleme Yarı lineer (Kuasi Lineer) denir.

Birden fazla bağımsız parametre (örneğin t ve x) ve bir bağımlı parametre (örneğin z) için 1. ve 2. mertebeden yarı lineer kısmi diferansiyel denklemlerin genel formları;

$$D(t, x, z)z_t + E(t, x, z)z_x = F(t, x, z) \quad (5)$$

$$P(t, x, z, z_t, z_x)z_{tt} + Q(t, x, z, z_t, z_x)z_{tx} + R(t, x, z, z_t, z_x)z_{xx} + T(t, x, z, z_t, z_x) = 0 \quad (6)$$

şeklindedir.

2.5 Tanım Bir kısmi diferansiyel denklem kuasi-lineer ve en büyük mertebeden türevlerin katsayıları sadece bağımsız parametrelerin fonksiyonları ise bu denkleme Hemen-Hemen Lineer denklem denir.

İki bağımsız ve bir bağımlı parametreye sahip ikinci mertebeden hemen-hemen lineer bir denklemin genel hali;

$$P(t, x)z_{tt} + Q(t, x)z_{tx} + R(t, x)z_{xx} + T(t, x, z, z_t, z_x) = 0 \quad (7)$$

şeklindedir.

2.2. Homotopi Dönüşümü

2.6 Tanım A ve B iki topolojik uzay, $g, h : A \rightarrow B$ sürekli iki dönüşüm ve $I = [0, 1]$ olsun. Her $x \in A$ için $H(x, 0) = g(x)$ ve $H(x, 1) = h(x)$ olacak şekilde $H : A \times I \rightarrow B$ sürekli dönüşümü varsa g dönüşümüne h 'ye homotoptur denir ve H ye'de Homotopi dönüşümü adı verilir.

Örnek:

$$\begin{aligned} g : [0, 2] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow g(x) = 1 + x^4(x - 2)^4 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} h : [0, 2] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow h(x) = 1 \end{aligned} \quad (9)$$

fonksiyonu verilsin.

$$\begin{aligned} H : [0, 2] \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\rightarrow H(x, t) = 1 + (1 - t)x^4(x - 2)^4 \end{aligned} \quad (10)$$

olsun. H , polinom fonksiyon olduğundan süreklidir ve $H(x, 0) = g(x)$ ve $H(x, 1) = 1 = h(x)$ dir. Böylece H , g ve h arasında bir homotopi fonksiyonudur.

3. MATERYAL VE METOT

Bu kısımda bazı kısmi türevli denklemleri çözmek için kullandığımız Homotopi perturbasyon ve Homotopi analiz metotları verilmiştir.

3.1. Homotopi Perturbasyon Metodu

$$B(u) - g(r) = 0 \quad r \in \Delta \quad (11)$$

$$D\left(u, \frac{\partial u}{\partial n}\right) = 0, \quad r \in \Theta \quad (12)$$

lineer olmayan denklemi göz önünde bulunduralım. Burada D sınır operatörü, B genel diferansiyel operatör, Θ, Δ tanım kümesinin sınırı ve $g(r)$ de bilinen bir analitik fonksiyondur. B operatörü çoğu zaman L lineer ve N lineer olmayan operatörler olarak ikiye ayrılır.

O halde (11) ifadesi,

$$L(u) + N(u) = g(r) \quad (13)$$

biçiminde yeniden düzenlenebilir. Homotopi tekniğinin kullanılmasıyla,

$$H(w, p) = (1 - p)[L(w) - L(u_0)] + p[B(w) - g(r)] = 0 \quad p \in [0, 1] \quad (14)$$

yada

$$H(w, p) = L(w) - L(u_0) + pL(u_0) + p[N(w) - g(r)] \quad (15)$$

ifadesini sağlayan

$$v(r, p) : \Delta \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad (16)$$

biçiminde bir homotopi yazılabilir. Burada $p \in [0, 1]$ bir gömme parametresi, u_0 da sınır koşullarını sağlayan (13) denkleminin başlangıç yaklaşımı ve $r \in \Delta$ 'dır. Dolayısıyla,

$$H(w, 0) = L(w) - L(u_0) = 0 \quad (17)$$

$$H(w, 1) = B(w) - g(r) = 0 \quad (18)$$

ifadeleri yazılabilir. p gömme parametresinin 0'dan 1'e değişmesiyle $H(w, p)$ 'nin $L(w) - L(u_0)$ 'dan $B(w) - g(r)$ 'ye değişmesi eşdeğerdir. Topolojide böyle bir değişime deformasyon denir. $L(w) - L(u)$ ve $B(w) - g(r)$ fonksiyonları da birbirine homotopiktir diye söylenir. Eğer p gömme parametresi, "ufak bir parametre" şeklinde ele alınırsa, bilinen perturbasyon yönteminin kullanılmasıyla (13) denkleminin çözümü p gömme parametresinin bir kuvvet serisi şeklinde bulunabilir. Yani,

$$w = w_0 + pw_1 + p^2w_2 + \dots \quad (19)$$

olarak yazılabilir. Ayrıca $p = 1$ olması halinde (13) ifadesinin yaklaşık çözümü,

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} w = w_0 + w_1 + w_2 + \dots \quad (20)$$

şeklinde elde edilir. Burada şöyle bir şey söylemek gerekirse; HPM'nin en büyük faydası topolojideki homotopi kavramıyla, pek çok durumda özgürce perturbasyon ifadesinin oluşturulması ve başlangıç yaklaşımının da kısıtlanmadan belirlenmesidir. Şimdi burada, Homotopi perturbasyon metodunu farklı kısmi diferansiyel denklemlere uygulayalım.

Örnek :

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + u(1 - u^6) \\ u(x, 0) &= \frac{1}{\left(1 + e^{\frac{3x}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}} \end{aligned} \quad (21)$$

şeklinde verilen Fisher denklemini ele alalım. Bu denklem, integral denklemi olarak da ifade edilebilir. Yani,

$$u(x, t) = \frac{1}{\left(1 + e^{\frac{3x}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}} - p \int_0^t (u_{xx} + u(1 - u^6)) dt \quad (22)$$

şeklinde yazılabilir. Konveks homotopi metodunu uygularsak,

$$\begin{aligned} u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots &= \frac{1}{\left(1 + e^{\frac{3x}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}} - p \int_0^t \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + p \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + p^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \dots \right) \\ &\quad + (u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)(1 - (u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \dots)^6) dt \end{aligned} \quad (23)$$

eşitliği elde edilir. Şimdi p gömme parametresinin kuvvetlerinin katsayılarını birbirine eşitlersek,

$$\begin{aligned}
 p^{(0)} : u_0(x,t) &= \frac{1}{\left(1 + e^{\frac{3x}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}} \\
 p^{(1)} : u_1(x,t) &= \frac{4 + e^{3x}(4 + 3t) + e^{\frac{3x}{2}}(8 + 11t)}{4(1 + e^{\frac{3x}{2}})^{\frac{7}{3}}} \\
 p^{(2)} : u_2(x,t) &= \frac{1}{131072(1 + e^{\frac{3x}{2}})^{\frac{49}{3}}} \left[4096e^{\frac{3x}{2}}(1 + e^{\frac{3x}{2}})^{12}(-363 + 403e^{\frac{3x}{2}} - 9e^{3x} + 9e^{\frac{9x}{2}})t^2 \right. \\
 &\quad - 57344e^{3x}(1 + e^{\frac{3x}{2}})^{10}(11 + 3e^{\frac{3x}{2}})^2t^3 \\
 &\quad - 17920e^{\frac{9x}{2}}(1 + e^{\frac{3x}{2}})^8(11 + 3e^{\frac{3x}{2}})^3t^4 \\
 &\quad - 3584e^{6x}(1 + e^{\frac{3x}{2}})^6(11 + 3e^{\frac{3x}{2}})^4t^5 \\
 &\quad - 448e^{\frac{15x}{2}}(1 + e^{\frac{3x}{2}})^4(11 + 3e^{\frac{3x}{2}})^5t^6 \\
 &\quad - 32e^{9x}(1 + e^{\frac{3x}{2}})^2(11 + 3e^{\frac{3x}{2}})^6t^7 \\
 &\quad \left. - e^{\frac{21x}{2}}(11 + 3e^{\frac{3x}{2}})^7t^8 + 32768(1 + e^{\frac{3x}{2}})^{14}(4 + e^{3x}(4 + 3t) + e^{\frac{3x}{2}}(8 + 11t)) \right] \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{24}$$

bileşenleri bulunur.

O halde,

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} u = u_0 + u_1 + u_2 + \dots \tag{25}$$

eşitliğinde bulduklarımızı yerine yazarsak ,

$$u(x,t) = ((1/2)\tanh[-3/4(x - 5/2t)] + 1/2)^{\frac{1}{3}} \tag{26}$$

bulunur.

x	t=0,2		t=0,4	
0	5.24926E-02	4.54137E-02	1.21845E-01	1.97465E-01
0.2	7.79547E-02	4.1746E-02	2.17494E-01	8.39974E-02
0.4	1.10805E-01	3.23276E-02	3.4171E-01	9.22231E-04
0.6	1.51375E-01	1.91936E-02	4.94354E-01	4.10631E-02
0.8	1.99601E-01	5.03821E-03	6.74017E-01	4.10631E-02
1	2.55137E-01	7.85833E-03	8.78892E-01	1.46625E-02

Çizelge 3.1. Genelleştirilmiş Fisher denklemi için sayısal sonuçlar.

Örnek:

$$\begin{cases} u_t + v_x w_y - v_y w_x = -u \\ v_t + w_x u_y + w_y u_x = v \\ w_t + u_x v_y + u_y v_x = -w \\ u(x, y, 0) = e^{x+y} \\ v(x, y, 0) = e^{x-y} \\ w(x, y, 0) = e^{-x+y} \end{cases} \quad (27)$$

lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem sistemini göz önünde bulunduralım. Bu sistemi Homotopi perturbasyon metodu ile çözelim. her bir denklem için konveks homotopi metodunu uygularsak;

$$u_o + pu_1 + p^2 u_2 + \dots = e^{x+y} - p \int_0^t \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} + p \frac{\partial v_1}{\partial x} + p^2 \frac{\partial v_2}{\partial x} + \dots \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + p \frac{\partial w_1}{\partial y} + p^2 \frac{\partial w_2}{\partial y} + \dots \right) dt + \\ p \int_0^t \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + p \frac{\partial v_1}{\partial y} + p^2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + \dots \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + p \frac{\partial w_1}{\partial x} + p^2 \frac{\partial w_2}{\partial x} + \dots \right) dt - p \int_0^t (u_0 + pu_1 + p^2 u_2 + \dots) dt \quad (28)$$

$$v_o + pv_1 + p^2 v_2 + \dots = e^{x-y} - p \int_0^t \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + p \frac{\partial u_1}{\partial y} + p^2 \frac{\partial u_2}{\partial y} + \dots \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + p \frac{\partial w_1}{\partial x} + p^2 \frac{\partial w_2}{\partial x} + \dots \right) dt - \\ p \int_0^t \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + p \frac{\partial u_1}{\partial x} + p^2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \dots \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + p \frac{\partial w_1}{\partial y} + p^2 \frac{\partial w_2}{\partial y} + \dots \right) dt + p \int_0^t (v_0 + pv_1 + p^2 v_2 + \dots) dt \quad (29)$$

$$w_o + pw_1 + p^2 w_2 + \dots = e^{-x+y} - p \int_0^t \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + p \frac{\partial u_1}{\partial x} + p^2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \dots \right) \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} + p \frac{\partial v_1}{\partial y} + p^2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + \dots \right) dt - \\ p \int_0^t \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + p \frac{\partial u_1}{\partial y} + p^2 \frac{\partial u_2}{\partial y} + \dots \right) \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} + p \frac{\partial v_1}{\partial x} + p^2 \frac{\partial v_2}{\partial x} + \dots \right) dt - p \int_0^t (w_0 + pw_1 + p^2 w_2 + \dots) dt \quad (30)$$

elde edilir. Şimdi p'nin kuvvetlerinin katsayılarını karşılıklı olarak eşitlersek;

$$\begin{aligned} p^{(0)} : u_0(x, y, t) &= e^{x+y}, \quad v_0(x, y, t) = e^{x-y}, \quad w_0(x, y, t) = e^{-x+y} \\ p^{(1)} : u_1(x, y, t) &= -te^{x+y}, \quad v_1(x, y, t) = te^{x-y}, \quad w_1(x, y, t) = te^{-x+y} \\ p^{(2)} : u_2(x, y, t) &= \frac{\partial^2 t^2}{2!} e^{x+y}, \quad v_2(x, y, t) = \frac{t^2}{2!} e^{x-y}, \quad w_2(x, y, t) = te^{-x+y} \\ p^{(3)} : u_3(x, y, t) &= \frac{t^3}{3!} e^{x+y}, \quad v_3(x, y, t) = \frac{t^3}{3!} e^{x-y} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (31)$$

bileşenleri bulunur. O halde, kapalı form seri çözümü;

$$(u, v, w) = (e^{x+y-t}, e^{x-y+t}, e^{-x+y+t}) \quad (32)$$

şeklinde elde edilir.

3.2. Homotopi Analiz Metodu

Aşağıdaki lineer olmayan diferansiyel denklemi göz önünde bulunduralım.

$$N[u(\tau)] = 0 \quad (33)$$

Burada τ bağımsız değişken, $u(\tau)$ bilinmeyen fonksiyonları ve N lineer olmayan bir operatörü belirtir. u_0 , u 'nun başlangıç yaklaşımı ve $p \in [0, 1]$ homotopi parametresi olmak üzere aşağıdaki homotopiyi inşa edelim.

$$H[\phi(\tau, p); u_0(\tau), H(\tau), \alpha, p] \equiv (1 - p)L[\phi(\tau, p) - N_0(\tau)] - p\alpha H(\tau)N[\phi(\tau, p)] \quad (34)$$

burada $\alpha \neq 0$ yakınsklık kontrol parametresi, $H(\tau)$ yardımcı fonksiyon, $p \in [0, 1]$ homotopi parametresi, $u_0(\tau)$ başlangıç koşulu, N lineer olmayan bir operatör ve L lineer bir operatördür. Ayrıca

$$(1 - p)L[\phi(\tau, p) - u_0(\tau)] = p\alpha H(\tau)N[\phi(\tau, p)] \quad (35)$$

denklemine sıfırcı dereceden deformasyon denklemi adı verilir. Burada $p = 0$ alınarak denklemin bir tarafı sıfır yapılmaya çalışılır. Yani,

$$L[\phi(\tau, 0) - u_0(\tau)] = 0 \quad (36)$$

bulunur. Dolayısıyla $\phi(\tau, 0)$ başlangıç şartı $u_0(\tau)$ 'ya eşittir. O halde,

$$\phi(\tau, 0) = u_0(\tau) \quad (37)$$

yazılabilir. $p = 1$ alınırsa (33) denklemi

$$N[\phi(\tau, 1)] = 0 \quad (38)$$

olarak bulunur. O halde $\phi(\tau, 1)$, $u(\tau)$ 'ya eşittir. Yani,

$$\phi(\tau, 1) = u(\tau) \quad (39)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan da görüleceği üzere p ; 0 ve 1 arasında değer aldıkça, $\phi(\tau, p)$ 'nin de $u_0(\tau)$ dan denklemin çözümü olan $u(\tau)$ 'ye gider. Ayrıca p 'ye göre Taylor seri açılımı yapılırsa,

$$\phi(\tau, p) = \phi(\tau, 0) + \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \phi(\tau; p)}{\partial p^m} \Big|_{p=0} \quad (40)$$

bulunur. Burada,

$$u_m(\tau) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \phi(\tau; p)}{\partial p^m} \Big|_{p=0} \quad (41)$$

şeklindedir. Eğer yardımcı lineer operatör, başlangıç yaklaşımı ve α yardımcı parametresi uygun seçilirse yukarıdaki seri $p = 1$ 'de yakınsak olur. O halde,

$$u(\tau) = u_0(\tau) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(\tau) \quad (42)$$

ifadesi bulunur. Şimdi (35) denkleminin p ' ye göre türevi alınır,

$$(1-p)L\left(\frac{\partial \phi(\tau; p)}{\partial p}\right) - L(\phi(\tau, p) - u_0(\tau)) = \alpha H(\tau)N[\phi(\tau; p)] + p\alpha H(\tau) \frac{\partial N[\phi(\tau; p)]}{\partial p} \quad (43)$$

eşitliği bulunur (Abbasbandy et al., 2011). (44) denkleminde $p = 0$ alırsak (37)' ün sonucu olarak (40) denklemi elde edilir. O halde,

$$L[u_1(\tau)] = \alpha H(\tau)N[u_0(\tau)] \quad (44)$$

olur. Burada (35) denkleminin $m \geq 2$ için m ' yinci mertebeden türevi alınır aşağıdaki denklem yazılabilir .

$$(1-p)L\left(\frac{\partial^m \phi(\tau; p)}{\partial p^m}\right) - mL\left(\frac{\partial^{m-1} \phi(\tau; p)}{\partial p^{m-1}}\right) = m\alpha H(\tau) \frac{\partial^{m-1} N[\phi(\tau; p)]}{\partial p^{m-1}} + p\alpha H(\tau) \frac{\partial^m N[\phi(\tau; p)]}{\partial p^m} \quad (45)$$

(41) denkleminde $p = 0$ alınır ve her iki taraf $m!$ ile bölünürse,

$$(1-p)L\left[\frac{1}{m!} \frac{\partial^m \phi(\tau; p)}{\partial p^m} - \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} \phi(\tau; p)}{\partial p^{m-1}}\right] \Big|_{p=0} = \alpha H(\tau) \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[\phi(\tau; p)]}{\partial p^{m-1}} \Big|_{p=0} \quad (46)$$

ifadesi elde edilir. $m \geq 2$ olmak üzere (40) eşitliği yukarıdaki denklemde kullanılırsa,

$$L[u_m(\tau) - u_{m-1}(\tau)] = \alpha H(\tau) \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[\phi(\tau; p)]}{\partial p^{m-1}} \Big|_{p=0} \quad (47)$$

denklemi bulunur. Ayrıca

$$\chi = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases} \quad (48)$$

fonksiyonu bu şekilde tanımlanırsa m. mertebeden deformasyon denklemi,

$$L[u_m(\tau) - \chi_m u_{m-1}(\tau)] = \alpha H(\tau) \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[\phi(\tau; p)]}{\partial p^{m-1}} \Big|_{p=0} \quad (49)$$

şeklinde elde edilir. Bu denklemin sağ tarafının $u(\tau)$ ' ya bağlı olduğu görülür. m' nin kuvvetlerine göre $u_m(\tau)$ çözümleri m. mertebeden deformasyon denkleminin çözümüne eşittir. Yani,

$$u_m(\tau) = \chi_m u_{m-1}(\tau) + L^{-1} \left(\alpha H(\tau) \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[\phi(\tau; p)]}{\partial p^{m-1}} \Big|_{p=0} \right) \quad (50)$$

bulunur. Burada, L^{-1} , L lineer operatörün ters operatörüdür. O halde,

$$u_m(\tau) = \sum_{k=0}^m u_k(\tau) \quad (51)$$

olmak üzere verilen denklemin çözümü,

$$u(\tau) = \phi(\tau; 1) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(\tau) = \lim_{m \rightarrow \infty} u_m(\tau) \quad (52)$$

şeklinde elde edilir.

3.2.1. Sıfırncı derece deformasyon denklemi

$$N[\omega(x, \tau)] = 0 \quad (53)$$

şeklinde verilen bir eşitliği inceleyelim. $\omega_0(x, \tau)$, $\omega_0(x, \tau)$ 'nin bir başlangıç tahmini, α sıfır olmayan yardımcı parametre, $H(x, \tau)$ yardımcı fonksiyon ve L de, $f(x, \tau) = 0$ iken

$$L[f(x, \tau)] = 0 \quad (54)$$

olacak şekilde bir lineer operatör olsun. Bu şartlara bağlı olarak;

$$H[\phi(c, \tau; p); \omega_0(x, \tau), H(x, \tau), \alpha, p] = (1-p)L[\phi(x, \tau; p) - \omega_0(x, \tau)] - p\alpha H(x, \tau)N[\phi(x, \tau; p)] \quad (55)$$

şeklinde bir homotopi inşa edilebilir. Burada, $p \in [0, 1]$ gömme parametresidir. $H(x, \tau)$ fonk-

siyonu ve α parametresi bu yöntem için önemlidir. En büyük katkılarından birisi de $\omega_0(x, \tau)$ başlangıç yaklaşımı, L lineer operatör ve α yakınsaklık parametresi probleme uygun olarak seçilebilir . Ayrıca

$$H[\phi(x, \tau; p); \omega_0(x, \tau), H(x, \tau), \alpha, p] = 0 \quad (56)$$

alınmasıyla sıfırncı derece deformasyon ifadesi,

$$(1 - p)L[\phi(x, \tau; p) - \omega_0(x, \tau)] = p\alpha H(x, \tau)N[\phi(x, \tau; p)] \quad (57)$$

şeklinde bulunur. Eğer yukarıdaki denklemde $p = 0$ yazılırsa;

$$L[\phi(x, \tau; 0) - \omega_0(x, \tau)] = 0 \quad (58)$$

ifadesi elde edilir. Operatörün lineerlik özelliği kullanılırsa,

$$\phi(x, \tau; p) = \omega_0(x, \tau) \quad (59)$$

elde edilir. Sıfırncı derece deformasyon ifadesinde $p = 1$ alınır ve $\alpha \neq 0$, $H(x, \tau) \neq 0$ olduğu kullanılırsa, $N[\phi(x, \tau; 1)] = 0$ yazılabilir. O halde, $\phi(x, \tau; 1) = \omega(x, \tau)$ bulunur. Dolayısıyla, p parametresi sıfırdan bire artarken, $\phi(x, \tau; p)$ da ilk yaklaşımdan tam çözüme gider. Bu şekilde bir dönüşüme yapısal bozulma(deformasyon) denir (Liao, 2003). Ayrıca ,

$$\omega_0^{[m]}(x, \tau) = \left. \frac{\partial^m \phi(x, \tau; p)}{\partial p^m} \right|_{p=0} \quad (60)$$

ile gösterilen denkleme m-yinci derece deformasyon adı verilir. Taylor teoremi ile $\phi(x, \tau; p)$ fonksiyonu, p parametresinin kuvvet serisine açılabilir. Yani,

$$\phi(x, \tau; p) = \phi(x, \tau; 0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\omega_0^{[m]}(x, \tau)}{m!} p^m \quad (61)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada,

$$\omega_m(x, \tau) = \left. \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \phi(x, \tau; p)}{\partial p^m} \right|_{p=0} = D_m(\phi) \quad (62)$$

özelliği kullanılırsa, ϕ fonksiyonun Taylor serisi,

$$\phi(x, \tau; p) = \omega_0(x, \tau) + \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m(x, \tau) p^m \quad (63)$$

şeklinde elde edilir. $D_m(\phi)$ ifadesine ϕ 'nin m-yinci dereceden homotopi türevi ve nihayetinde bulunan seriye de homotopi serisi adı verilir.

Homotopi analiz yöntemi uygulandıktan sonra bulunacak çözüm,

$$\omega(x, \tau) = \omega_0(x, \tau) + \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m(x, \tau) \quad (64)$$

şeklinde yazılabilir.

3.2.2. Yüksek derece deformasyon denklemi

$\vec{v}_n$ vektörü, $\vec{v}_n = \{v_0(x, \tau), v_1(x, \tau), v_2(x, \tau) \dots, v_n(x, \tau)\}$ şeklinde tanımlansın.

Sıfırıncı- derece deformasyon denkleminde p 'ye göre m kere türev aldıktan sonra elde edilen denklem $m!$ ile bölünüp ve ardından $p = 0$ alınırsa, m-yinci dereceden deformasyon ifadesi,

$$L[v_m(x, \tau) - \chi_m v_{m-1}(x, \tau)] = \alpha H(x, \tau) R_m(\vec{v}_{m-1}) \quad (65)$$

şeklinde elde edilir.

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases} \quad (66)$$

olmak üzere $R_m(\vec{v}_{m-1})$ ifadesi,

$$R_m(\vec{v}_{m-1}) = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{\partial^{m-1} N[\phi(x, \tau; p)]}{\partial p^{m-1}} \right|_{p=0} \quad (67)$$

şeklinde yazılabilir. $\phi(x, \tau; p)$ fonksiyonunun m-yinci mertebe homotopi türevi tanımından,

$$R_m(\vec{v}_{m-1}) = D_{m-1}(N[\phi]) \quad (68)$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlik, m-yinci dereceden deformasyon ifadesinde yerine yazılırsa;

$$L[v_m(x, \tau) - \chi_m v_{m-1}(x, \tau)] = \alpha H(x, \tau) D_{m-1}(N[\phi]) \quad (69)$$

denklemini bulunur. (3.17) ifadesi $R_m(v_{m-1})$ eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$R_m(v_{m-1}, x, \tau) = \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{\partial^{m-1}}{\partial p^{m-1}} N \left[\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x, \tau) p^n \right] \right) \Big|_{p=0} \quad (70)$$

eşitliği bulunur. Buradan da,

$$R_m(v_{m-1}, x, \tau) = D_{m-1} \left(N \left[\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x, \tau) \right] \right) = D_{m-1}(N[v]) \quad (71)$$

denklemini bulunur. Bu son denklem birbiri ardına çözümlenerek $v_1(x, \tau), v_2(x, \tau), \dots$ ifadeleri elde edilir. $v(x, \tau)$ fonksiyonunun m-yinci yaklaşımı;

$$v(x, \tau) \cong \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x, \tau) \quad (72)$$

serisi ile verilir.

Örnek:

$$\begin{cases} u_t + v_x - (u - v) = 0, \\ v_t + u_x - (u + v) = 0, \\ u(x, 0) = \sinh x, \\ v(x, 0) = \cosh x, \end{cases} \quad (73)$$

başlangıç değer problemleri sistemini ele alalım. Verilen denklemi Homotopi Analiz Metodu ile çözmek için c_1 ve c_2 integral sabitleri olmak üzere $L[c_1 + tc_2] = 0$, özelliği ile aşağıdaki lineer operatörü seçelim.

$$\begin{aligned} L[\varphi_1(x, t; q_1)] &= \frac{\partial}{\partial t} (\varphi_1(x, t; q_1)) \\ L[\varphi_2(x, t; q_2)] &= \frac{\partial}{\partial t} (\varphi_2(x, t; q_2)) \end{aligned} \quad (74)$$

ayrıca L^{-1} ters operatörü

$$L^{-1} = \int_0^t dt \quad (75)$$

şeklinde verilir. Şimdi Lineer olmayan opertörü aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$\begin{aligned} N[\varphi_1(x, t; q_1)] &= \varphi_1(x, t; q_1)_t + \varphi_2(x, t; q_1)_x - (\varphi_1(x, t; q_1) + \varphi_2(x, t; q_1)) \\ N[\varphi_2(x, t; q_2)] &= \varphi_2(x, t; q_2)_t + \varphi_1(x, t; q_2)_x - (\varphi_1(x, t; q_2) + \varphi_2(x, t; q_2)) \end{aligned} \quad (76)$$

şimdi Sıfırıncı dereceden deformasyon denklemini,

$$\begin{aligned} (1 - q_1)L[\varphi_1(x, t; q_1) - u_0(x, t)] &= q_1 \alpha H(x, t; q_1) N[\varphi_1(x, t; q_1)] \\ (1 - q_2)L[\varphi_2(x, t; q_1) - u_0(x, t)] &= q_1 \alpha H(x, t; q_2) N[\varphi_2(x, t; q_2)] \end{aligned} \quad (77)$$

şeklinde oluşturalım. Ayrıca $q_1 = 0$ ve $q_1 = 1$ için $\varphi_1(x, t; 0) = u_0(x, t)$, $\varphi_1(x, t; 1) = u(x, t)$ iken $q_2 = 0$ ve $q_2 = 1$ için $\varphi_2(x, t; 0) = u_0(x, t)$, $\varphi_2(x, t; 1) = u(x, t)$ eşitlikleri elde edilir. Böylece m'yinci mertebeden deformasyon denklemlerini, $u_m(x, 0) = 0$, $v_m(x, 0) = 0$ başlangıç koşulları ile birlikte aşağıdaki gibi elde ederiz. Burada,

$$\begin{aligned} L[u_m(x, t) - \chi_m u_{m-1}(x, t)] &= \alpha H(x, t) R_m(\vec{u}_{m-1}) \\ L[v_m(x, t) - \chi_m v_{m-1}(x, t)] &= \alpha H(x, t) R_m(\vec{v}_{m-1}) \end{aligned} \quad (78)$$

şeklindedir.

Şimdi m'yinci mertebeden deformasyon denklemlerinin çözümleri

$$\begin{aligned} R_m(\vec{u}_{m-1}) &= \alpha \left[\frac{\partial}{\partial t} u_{m-1} + \frac{\partial}{\partial x} v_{m-1} - (u_{m-1} + v_{m-1}) \right] \\ R_m(\vec{v}_{m-1}) &= \alpha \left[\frac{\partial}{\partial t} v_{m-1} + \frac{\partial}{\partial x} u_{m-1} - (u_{m-1} + v_{m-1}) \right] \end{aligned} \quad (79)$$

elde edilir.

Denklemin çözümleri şöyledir;

$$\begin{aligned} u_m(x, t) &= \chi_m u_{m-1}(x, t) + L^{-1}[\alpha H(x, t) R_m(\vec{u}_{m-1})], \quad m \geq 1 \\ v_m(x, t) &= \chi_m v_{m-1}(x, t) + L^{-1}[\alpha H(x, t) R_m(\vec{v}_{m-1})], \quad m \geq 1 \end{aligned} \quad (80)$$

çözümleri şeklindedir.

ilk olarak aşağıdaki başlangıç yaklaşımları ile başlayalım.

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= \sinh x \\ v_0(x, t) &= \cosh x \end{aligned} \quad (81)$$

$\alpha = -1$, $H = 1$ seçilirse, yukarıdaki iterasyon formülünden diğer bileşenleri elde edebiliriz. Yani

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= t \cosh x \\ v_1(x,t) &= t \sinh x \\ u_2(x,t) &= \frac{t^2}{2!} \sinh x \\ v_2(x,t) &= \frac{t^2}{2!} \cosh x \\ &\vdots \end{aligned} \quad (82)$$

olur. Dolayısıyla seri çözümleri de ,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sinh x + t \cosh x + \frac{t^2}{2!} \sinh x + \dots \\ v(x,t) &= \cosh x + t \sinh x + \frac{t^2}{2!} \cosh x + \dots \end{aligned} \quad (83)$$

şeklinde bulunur. Son olarak denklemlerin tam çözümleri de

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sinh(x+t) \\ v(x,t) &= \cosh(x+t) \end{aligned} \quad (84)$$

olarak elde edilir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde Homotopi analiz ve Homotopi perturbasyon metotlarını seçtiğimiz bazı kısmi diferansiyel denklemlere uygulayacağız.

Örnek: Aşağıdaki homojen adveksiyon denklemini ele alalım ve bu denklemi Homotopi analiz metodu ile çözelim (Alomari and Noorani, 2008).

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u(x, 0) = -x \end{cases} \quad (85)$$

denklemin çözümüne başlangıç yaklaşımını $u_0(x, t) = -x$ olarak alalım. Ayrıca lineer olmayan operatör de aşağıdaki gibidir.

$$N_u = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (86)$$

Böylece,

$$R_m(u_{m-1}) = \frac{\partial u_{m-1}(x, t)}{\partial t} + \sum_{i=0}^{m-1} u_i(x, t) \frac{\partial u_{m-1-i}(x, t)}{\partial x} \quad (87)$$

şeklindedir. Bu denklemin $L = \frac{\partial}{\partial t}$ lineer operatörü altında ve $m = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere $u_m(x, 0) = 0$ başlangıç koşulu ile birlikte,

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= -x(-\alpha t) \\ u_2(x, t) &= -x((- \alpha t)^2 - \alpha t - \alpha^2 t) \\ u_3(x, t) &= -x((- \alpha t)^3 + 2\alpha^3 t^2 + 2\alpha^2 t^2 - \alpha t - 2\alpha^2 t - \alpha^3 t) \\ &\vdots \\ u_n(x, t) &= -x((- \alpha t)^n + Z_1(t, \alpha)). \end{aligned} \quad (88)$$

bileşenleri elde edilir. Burada Z_1 bir polinimdir $\alpha = -1$ alındığında $Z_1(t, \alpha) = 0$ olur. (3,19) denkleminde

$$u(x, t) = -x \sum_{n=0}^{\infty} t^n \quad (89)$$

ifadesi elde edilir. Bu Taylor serisinin yakınsadığı fonksiyon da $|t| < 1$ cosily altında

$$u(x, t) = \frac{x}{t-1} \quad (90)$$

fonksiyonudur.

şimdi aynı denklemi homotopi perturbasyon metodu ile çözelim. İlk olarak

$L(v) = \frac{\partial v}{\partial t}$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} H(v, p) &= (1-p)(L(v) - L(u_0)) + p(A(v) - f(r)) = 0 \\ H(v, p) &= (1-p) \left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) + p \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (91)$$

eşitliği elde edilir. Bu ifadenin düzenlenmesiyle,

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} = -p \frac{\partial u_0}{\partial t} - pv \frac{\partial v}{\partial x} \quad (92)$$

ifadesi bulunur. Şimdi

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots \quad (93)$$

şeklinde alalım. Bu ifadeyi yukarıdaki eşitlikte yerine yazarsak,

$$\frac{\partial}{\partial t}(v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots) - \frac{\partial u_0}{\partial t} = -p \frac{\partial u_0}{\partial t} - p(v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots) \frac{\partial}{\partial x}(v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots) \quad (94)$$

elde edilir. Burada p'nin kuvvetlerinin katsayılarını karşılıklı olarak eşitlersek ,

$$\begin{aligned} p^0 : \frac{\partial v_0}{\partial t} &= \frac{\partial u_0}{\partial t} \Rightarrow v_0 = u_0 = -x \\ p^1 : \frac{\partial v_1}{\partial t} &= -\frac{\partial u_0}{\partial t} - v_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} \Rightarrow v_1(x, t) = -xt \\ p^2 : \frac{\partial v_2}{\partial t} &= -v_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} - v_1 \frac{\partial v_0}{\partial x} \Rightarrow v_2(x, t) = -xt^2 \\ p^3 : \frac{\partial v_3}{\partial t} &= -v_0 \frac{\partial v_2}{\partial x} - v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} - v_2 \frac{\partial v_0}{\partial x} \Rightarrow v_3(x, t) = -xt^3 \\ &\vdots \\ p^n : v_n(x, t) &= -xt^n \end{aligned} \quad (95)$$

bulunur. O halde ,

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots \quad (96)$$

eşitliğinde bulduğumuz bileşenleri yerine yazarsak, $|t| < 1$ koşulu altında

$$u(x, t) = \frac{x}{t - 1} \quad (97)$$

bulunur.

Örnek:

Aşağıdaki $K(2, 2)$ denklemini ele alalım ve bu denklemi Homotopi analiz metodu ile çözelim.

$$\begin{cases} \omega_t + (\omega^2)_x + (\omega^2)_{xxx} = 0 \\ \omega(x, 0) = x \end{cases} \quad (98)$$

Çözümün tarzına ve başlangıç koşuluna göre ilk tahmin olarak $\omega_0(x, t) = x$ alabiliriz. Şimdi lineer olmayan kısmı aşağıdaki gibi alalım.

$$N[\phi(x, t; p)] = \frac{\partial \phi(x, t; p)}{\partial t} + \frac{\partial(\phi(x, t; p)^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\phi(x, t; p)^2)}{\partial x^3} \quad (99)$$

Böylece,

$$R_m(\vec{\omega}_{m-1}) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[\phi(x, t; p)]}{\partial p^{m-1}} \Big|_{p=0} \quad (100)$$

denklemini kullanırsak,

$$R_m(\vec{\omega}_{m-1}) = \frac{\partial \omega_{m-1}(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{i=0}^{m-1} \omega_i \omega_{m-1-i} \right) + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(\sum_{i=0}^{m-1} \omega_i \omega_{m-1-i} \right) \quad (101)$$

eşitliğini elde ederiz.

(3.30) m-yinci mertebeden deformasyon denklemi , elde edilen son denklem ,

$$L[\phi(x, t; p)] = \frac{\partial \phi(x, t; p)}{\partial t} \quad (102)$$

lineer operatörü altında ve $m = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere $\omega_m(x, 0) = 0$ başlangıç koşulu ile birlikte kullanılarak,

$$\begin{aligned}\omega_1(x, t) &= 2\alpha x t \\ \omega_2(x, t) &= 2\alpha x t(2\alpha t + \alpha + 1) \\ \omega_3(x, t) &= 2\alpha x t(2\alpha t + \alpha + 1)^2 \\ &\vdots \\ \omega_m(x, t) &= 2\alpha x t(2\alpha t + \alpha + 1)^{m-1}\end{aligned}\tag{103}$$

bileşenleri bulunur. Yakınsaklık parametresi $\alpha = -1$ alınır;

$$\omega(x, t) = x \sum_{m=0}^{\infty} (-2)^m t^m \tag{104}$$

ifadesi elde edilir. Bu Taylor serisinin yakınsadığı fonksiyon da $|t| < \frac{1}{2}$ koşulu altında,

$$\omega(x, t) = \frac{x}{1 + 2t} \tag{105}$$

fonksiyonudur.

Aynı problemi şimdi Homotopi perturbasyon metodu ile tekrar çözelim. İlk olarak $L(v) = \frac{\partial v}{\partial t}$ olsun.

Bu durumda,

$$\begin{aligned}H(v, p) &= (1 - p)(L(v) - L(u_0)) + p(A(v) - f(r)) = 0 \\ H(v, p) &= (1 - p)\left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial w_0}{\partial t}\right) + p\left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v^2}{\partial x} + \frac{\partial^3 v^2}{\partial x^3}\right) = 0\end{aligned}\tag{106}$$

eşitliği elde edilir. Bu ifadenin düzenlenmesiyle,

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial w_0}{\partial t} = -p \frac{\partial w_0}{\partial t} - p \frac{\partial v^2}{\partial x} - p \frac{\partial^3 v^2}{\partial x^3} \tag{107}$$

eşitliği bulunur. Şimdi

$$v = v_0 + p v_1 + p^2 v_2 + \dots \tag{108}$$

eşitliğini yukarıdaki denklemde yerine yazarsak

$$\frac{\partial}{\partial t}(v_0 + pv_1 + p^2v_2 \dots) - \frac{\partial w_0}{\partial t} = -p \frac{\partial w_0}{\partial t} - p \frac{\partial}{\partial x}(v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots)^2 - p \frac{\partial^3}{\partial x^3}(v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots)^2 \quad (109)$$

eşitliği bulunur ve burada p'nin kuvvetlerinin katsayılarını karşılıklı olarak eşitlersek,

$$\begin{aligned} p^0 : \frac{\partial v_0}{\partial t} &= \frac{\partial w_0}{\partial t} \Rightarrow v_0 = w_0 = x \\ p^1 : \frac{\partial v_1}{\partial t} &= -\frac{\partial w_0}{\partial t} - \frac{\partial v_0^2}{\partial x} - \frac{\partial^3 v_0^2}{\partial x^3} \Rightarrow v_1(x, t) = -2xt \\ p^2 : \frac{\partial v_2}{\partial t} &= -2 \frac{\partial(v_0 v_1)}{\partial x} - 2 \frac{\partial^3(v_0 v_1)}{\partial x^3} \Rightarrow v_2(x, t) = 4xt^2 \\ p^3 : \frac{\partial v_3}{\partial t} &= -\frac{\partial v_1^2}{\partial x} - 2 \frac{\partial(v_0 v_2)}{\partial x} - \frac{\partial^3 v_1^2}{\partial x^3} - 2 \frac{\partial^3(v_0 v_2)}{\partial x^3} \Rightarrow v_3(x, t) = -8xt^3 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (110)$$

bileşenlerini elde etmiş oluruz. O halde ,

$$w = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots \quad (111)$$

eşitliğinde bulduğumuz bileşenleri yerine yazarsak, $|t| < 1$ koşulu altında

$$\omega(x, t) = \frac{x}{1 + 2t} \quad (112)$$

bulunur.

Örnek:

$$\begin{cases} u_t + uu_x - vu_{xx} = 0 \\ u(x, 0) = \frac{\eta + \beta + (\beta - \eta)e^\gamma}{1 + e^\gamma}, \quad t \geq 0 \end{cases} \quad (113)$$

başlangıç yaklaşımı ile verilen Burger denklemini Homotopi analiz metodu ile çözelim. Burada η, β, v keyfi sabit parametrelerdir.(35) deformasyon denkleminen;

$$R_m(\vec{u}_{m-1}) = \frac{\partial u_{m-1}(x, t)}{\partial t} + \sum_{i=0}^{m-1} u_i \frac{\partial u_{m-1-i}(x, t)}{\partial x} - v \frac{\partial^2 u_{m-1}(x, t)}{\partial x^2} \quad (114)$$

elde edilir. Ayrıca (49) m-yinci mertebeden deformasyon denklemi , elde edilen son denklem

,

$$L[\phi(x, t; p)] = \frac{\partial \phi(x, t; p)}{\partial t} \quad (115)$$

lineer operatörü altında ve $m = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere $u_m(x, 0) = 0$ başlangıç koşulu ile birlikte kullanılarak,

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \frac{2\eta^2 \beta e^\gamma}{v[1 + e^\gamma]^2} \alpha t \\ u_2(x, y) &= \frac{\eta^3 \beta^2 e^\gamma [e^\gamma - 1]}{v^2 [1 + e^\gamma]^3} (\alpha t)^2 + M_1 \\ u_3(x, t) &= \frac{\eta^4 \beta^3 e^\gamma [1 - 4e^\gamma + e^{2\gamma}]}{3v^3 [1 + e^\gamma]^4} (\alpha t)^3 + M_2 \end{aligned} \quad (116)$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{t\eta^2 \beta e^\gamma (2\alpha^2 v e^\gamma - 2v e^\gamma \alpha - 2v - 2v\alpha)}{v^2 [1 + e^\gamma]^3} \\ M_2 &= \frac{2e^\gamma \eta^3 \beta^2 (\alpha t)^2 v (e^{2\gamma} (\alpha + 1) - 1 - h)}{3v^3 [1 + e^\gamma]^4} + \frac{2v^2 e^\gamma \eta^2 \beta \alpha t (e^{2\gamma} (-1 - 2\alpha - \alpha^2) + e^\gamma (-2\alpha^2 - 4\alpha - 2) - 2\alpha - 1 - \alpha^2)}{3v^3 [1 + e^\gamma]^4} \end{aligned} \quad (117)$$

şeklindedir. O halde (35) denkleminde $u(x, t)$ seri çözümü,

$$u(x, t) = \frac{\eta + \beta + (\beta - \eta)e^\varepsilon}{1 + e^\varepsilon} \quad (118)$$

şeklinde bulunur. Burada

$$\varepsilon = \left(\frac{\eta}{v}\right)(x - \beta t) \quad (119)$$

şeklindedir.

Aynı problemi şimdi Homotopi perturbasyon metodu ile tekrar çözelim.

$L(v) = \frac{\partial v}{\partial t}$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} H(v, p) &= (1 - p)(L(v) - L(u_0)) + p(A(v) - f(r)) = 0 \\ H(v, p) &= (1 - p)\left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t}\right) + p\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) = 0 \end{aligned} \quad (120)$$

eşitliğini elde ederiz . Bu eşitliği düzenlediğimizde ,

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} = -p \frac{\partial u_0}{\partial t} - p v \frac{\partial v}{\partial x} + p \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (121)$$

$$v = v_0 + p v_1 + p^2 v_2 + \dots \quad (122)$$

alalım.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (v_0 + p v_1 + p^2 v_2 + \dots) - \frac{\partial u_0}{\partial t} = -p \left[\frac{\partial u_0}{\partial t} + (v_0 + p v_1 + p^2 v_2 + \dots) \frac{\partial}{\partial x} (v_0 + p v_1 + p^2 v_2 + \dots) - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right. \\ \left. (v_0 + p v_1 + p^2 v_2 + \dots) \right] \end{aligned} \quad (123)$$

eşitliğini elde ederiz ve burada p'nin kuvvetlerinin katsayılarını karşılıklı olarak eşitlersek,

$$\begin{aligned} p^0 : \frac{\partial v_0}{\partial t} &= \frac{\partial u_0}{\partial t} \Rightarrow v_0 = u_0 = \frac{\eta + \beta + (\beta - \eta)e^\gamma}{1 + e^\gamma} \\ p^1 : \frac{\partial v_1}{\partial t} &= -\frac{\partial u_0}{\partial t} - v_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \Rightarrow v_1(x, t) = 0 \\ p^2 : \frac{\partial v_2}{\partial t} &= -v_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} - v_1 \frac{\partial v_0}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \Rightarrow v_2(x, t) = 0; \end{aligned} \quad (124)$$

bileşenlerini elde etmiş oluruz.

O halde ,

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots \quad (125)$$

eşitliğinde bulduğumuz bileşenleri yerine yazarsak,

$$u(x, t) = \frac{\eta + \beta + (\beta - \eta)e^\gamma}{1 + e^\gamma} \quad (126)$$

bulunur.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Homotopi analiz yöntemi (HAM) ve homotopi perturbasyon yöntemi (HPM), diferansiyel denklemler ve diğer karmaşık matematiksel problemler için etkili analitik çözümler sunar. Bu iki yöntem arasında yapılan karşılaştırma şu önemli sonuçları ortaya koymaktadır. HAM yüksek derecede esneklik sağlar. HAM, başlangıç tahminine ve homotopi parametresine bağlı olarak çözümün yakınsamasını kontrol etme yeteneği sunar. Bu, özellikle zor ve karmaşık problemlerde büyük avantaj sağlar. HPM ise genellikle daha basit ve hızlıdır, ancak çözümün doğruluğu ve yakınsaması üzerinde daha az kontrol imkanı sunar. HPM, perturbasyon yöntemlerinin avantajlarını kullanarak homotopi konseptini uygular. HAM, çözümün yakınsama hızını ve doğruluğunu optimize etmek için homotopi parametresi (α) ve diğer kontrol parametrelerini kullanır. Bu, yakınsamada yüksek hassasiyet gerektiren problemler için ideal bir araçtır. HPM ise, genellikle hızlı ve yeterli yakınsama sağlar ancak bu yakınsama bazen başlangıç tahmini ve problem doğasına bağlı olarak değişebilir. HAM, geniş bir uygulama yelpazesine sahiptir ve birçok fiziksel ve mühendislik problemlerine uygulanabilir. Lineer olmayan ve kompleks problemlerde daha etkili sonuçlar verebilir. HPM, nispeten daha basit yapısıyla temel matematiksel problemler ve mühendislik uygulamalarında yaygın olarak kullanılır. Özellikle küçük parametrelili problemler için uygundur.

Problemin karmaşıklığı ve yakınsama gereksinimlerine bağlı olarak HAM veya HPM seçilmelidir. Karmaşık ve hassas çözümler gerektiren durumlarda HAM tercih edilmelidir. Daha basit ve hızlı çözümler için, özellikle başlangıç tahminlerinin kolayca yapılabildiği durumlarda, HPM uygun bir seçenek olabilir. HAM kullanıldığında, homotopi parametresinin (α) dikkatli bir şekilde seçilmesi ve optimize edilmesi gereklidir. Bu, çözümün yakınsama hızını ve doğruluğunu önemli ölçüde artırabilir. HPM’de ise başlangıç tahminlerinin doğruluğu ve perturbasyon parametresinin uygun seçimi, çözüm kalitesini artıracaktır. Her iki yöntemin de etkin kullanımı için, kullanıcıların yöntemlerin teorik temellerini ve uygulama detaylarını iyi bilmesi gereklidir. Bu nedenle, bu yöntemlerle ilgili eğitim ve uygulamalı deneyim önemlidir. Araştırmacılar ve mühendisler, bu yöntemleri uygularken literatürdeki güncel gelişmeleri takip etmeli ve çeşitli problemler üzerinde denemeler yaparak deneyim kazanmalıdır. Bu yöntemlerin uygulanmasını kolaylaştırmak için, uygun matematiksel yazılımlar ve araçlar kullanılabilir. Özellikle HAM için, yakınsama analizini destekleyen yazılımlar (matlab, mathematica) büyük fayda sağlayabilir. HPM için, perturbasyon serilerinin hesaplanmasını kolaylaştıran otomatik araçlar kullanılabilir.

Sonuç olarak, hem HAM hem de HPM, kendi avantajları ve sınırlamaları ile güçlü analitik araçlardır. Doğru seçildiğinde ve uygulandığında, bu yöntemler birçok karmaşık problemin çözümünde büyük fayda sağlayabilir.

KAYNAKLAR

- Abbasbandy, S. (2006). The application of homotopy analysis method to nonlinear equations arising in heat transfer. *Physica Scripta*, 360:109–113.
- Abbasbandy, S. (2007). The application of homotopy analysis method to solve a generalized hirota-satsuma coupled kdv equation. *Physica Scripta*, 361:478–483.
- Abbasbandy, S. (2008). Homotopy analysis method for generalized benjamin-bona-mahony equation. *Angewandte Wissenschaften: Mathematik und Physik*, 59:51–62.
- Abbasbandy, S. (2010). Homotopy analysis method for the kawahara equation. *Nonlinear Analysis: B*, 11:307–312.
- Abbasbandy, S., Shivanian, E., and Vajravelu, K. (2011). Mathematical properties of curves in the framework of the homotopy analysis method. *Analysis Methods*, 16:4268–4275.
- Alomari, A. K. and Noorani, M. S. M. (2008). The homotopy analysis method for the exact solutions of the k (2,2), burgers and coupled burgers equations. *Applied Mathematical Sciences*, 2(40):1963–1977.
- Aslanov, A. (2015). A homotopy-analysis approach for nonlinear wave-like equations with variable coefficients. *Abstract and Applied Analysis*, 7.
- Biazar, J. and Ghazvini, H. (2008). Homotopy perturbation method for solving hyperbolic partial differential equations. *Computers and Mathematics with Applications*, 56:453–458.
- Gurney, W. and Nisbet, R. (1975). The regulation of inhomogeneous populations. *Journal of Theoretical Biology*, 52:441–457.
- Gurtin, M. E. and Maccamy, R. C. (1977). On the diffusion of biological population. *Mathematical Biosciences*, 33:35–49.
- Hayat, T. and Khan, M. (2005). Homotopy solutions for a generalized second-grade fluid past a porous plate. *Nonlinear Dynamics*, 42:395–405.
- He, J. (1999). Homotopy perturbation technique. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*.
- He, J. (2000). A review on some newly developed nonlinear analytical techniques. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*.

- He, J. (2004). Comparison of homotopy perturbation method and homotopy analysis method. *Applied Mathematics and Computation*, 169:1186–1194.
- Liao, S. (2003). *Beyond perturbation: Introduction to the homotopy analysis method*. CRC Press.
- Liao, S. (2004). On the homotopy analysis method for nonlinear problems. *Applied Mathematics and Computation*, 147:499–513.
- Liao, S. (2005). Comparison between the homotopy analysis method and homotopy perturbation method. *Applied Mathematics and Computation*, 169:1186–1194.
- Lu, D. and Liu, J. (2014). Application of the homotopy analysis method for solving the variable coefficient kdv-burgers equation. *Abstract and Applied Analysis*, 4.
- Lu, Y. (2000). Hölder estimates of solutions of biological population equations. *Applied Mathematics Letters*, 13:123–126.
- Odibat, Z. and Bataineh, A. (2015). An adaptation of the homotopy analysis method for reliable treatment of strongly nonlinear problems: Construction of homotopy polynomials. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 38:991–1000.
- Tan, Y. and Abbasbandy, S. (2008). Homotopy analysis method for quadratic riccati differential equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 13:539–546.
- Turkyilmazoglu, M. (2016). An effective approach for evaluation of the optimal convergence control parameter in the homotopy analysis method. *Filomat*, 30(6):1633–1650.
- Wazwaz, A. and Gorguis, A. (2004). Analytic study of fisher's equation using adomian decomposition method. *Applied Mathematics and Computation*.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı-Soyadı : Merve CİN
Okul/Program : Amasya Üniversitesi
Eğitim derecesi: Lisans
mezuniyet Yılı: 2021
Yabancı Dil : İngilizce

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

- 1.CİN M. ve ŞAHİN S.(2024)Bazı Kısmi diferansiyel denklemlerin Homotopi perturbasyon metodu ile çözümleri
9. Uluslararası Asya Pasifik Modern Bilimler Kongresi