



**T.C.**

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BAZI KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL  
ÇÖZÜMLERİNDE KULLANILAN YÖNTEMLERİN  
KARŞILAŞTIRILMASI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**BURAK ALPASLAN**

**HAZİRAN**

**BURAK ALPASLAN**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**HAZİRAN 2022**

**BAZI KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL  
ÇÖZÜMLERİNDE KULLANILAN YÖNTEMLERİN  
KARŞILAŞTIRILMASI**

**Burak ALPASLAN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**Danışman**

**Dr. Öğr. Üyesi. Serpil ŞAHİN**

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HAZİRAN 2022**



Canım Kızım'a

## ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Burak ALPASLAN

24/06/2022

BAZI KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİNDE  
KULLANILAN YÖNTEMLERİN KARŞILAŞTIRILMASI  
(Yüksek Lisans Tezi)

Burak ALPASLAN

AMASYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
HAZİRAN -2022

ÖZET

Bu çalışmada, bazı kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri incelenmiştir. Bunun için öncelikle ele aldığımız, Burgers ve Fisher denklemlerini uygun başlangıç ve sınır koşullarıyla birlikte homotopi perturbasyon, Adomian ayrıştırma ve kapalı üstel sonlu fark metotları ile sayısal olarak çözüp elde edilen sayısal sonuçlar tablo halinde karşılaştırılmış ve grafik üzerinde gösterilmiştir. Bu örnekler baz alındığında kapalı üstel sonlu fark metodunun homotopi perturbasyon ve Adomian ayrıştırma metoduna göre daha kararlı olduğu görülmüştür. Homotopi perturbasyon ve Adomian ayrıştırma metodunun da denklem çözümlerinde etkili yöntemler oldukları iyi bilinmektedir.

Sayfa Adedi  
Anahtar Kelimeler  
Danışman

: 57  
: Homotopi Perturbasyon Metodu, Adomian Ayrıştırma Metodu,  
Kapalı Üstel Sonlu Fark Metodu  
: Dr. Öğr. Üyesi. Serpil ŞAHİN

COMPARISON OF THE NUMERICAL METHODS THAT ARE USED IN SOLVING  
SOME OF THE PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

(M. Sc. Thesis)

Burak ALPASLAN

AMASYA UNIVERSITY  
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June-2022

ABSTRACT

In this study, numerical solutions of some partial differential equations are investigated. For this, Burgers and Fisher equations, which we have discussed first, are solved numerically by homotopy perturbation, Adomian decomposition and implicit exponential finite difference methods together with appropriate initial and boundary conditions and compared with the obtained numerical results in a tabular form and shown on the graph. Based on these examples, it has been seen that the implicit exponential finite difference method is more stable than the homotopy perturbation and Adomian decomposition methods. It is well known that Homotopy perturbation and Adomian decomposition methods are also effective methods in solving equations.

Page Number : 57  
Keywords : Homotopy Perturbation Method, Adomian Decomposition Method,  
Implicit Exponential Finite Difference Method  
Supervisor : Assist Prof. Serpil ŞAHİN

## ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardımlarıyla ve katkılarıyla beni yönlendiren, güler yüzüyle her daim beni motive eden, tez konusunun belirlenmesi, tezimin hazırlanması sürecinde bütün fedakârlık ve yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Dr. Öğr. Üyesi Serpil - ŞAHİN'e teşekkürlerimi sunarım. Aynı zamanda, bu süreçte desteğini ve yardımını esirgemeyen değerli eşim Şeyma ve tüm aileme teşekkür ederim.





## İÇİNDEKİLER

|                                                                   | Sayfa |
|-------------------------------------------------------------------|-------|
| ÖZET . . . . .                                                    | iv    |
| ABSTRACT . . . . .                                                | v     |
| ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR . . . . .                                      | vi    |
| İÇİNDEKİLER . . . . .                                             | viii  |
| ÇİZELGELER DİZİNİ . . . . .                                       | ix    |
| ŞEKİLLER DİZİNİ . . . . .                                         | xi    |
| SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ . . . . .                          | xii   |
| 1. GİRİŞ . . . . .                                                | 1     |
| 2. TEMEL TANIMLAR . . . . .                                       | 3     |
| 2.1. Diferansiyel Denklem . . . . .                               | 3     |
| 2.1.1. Adi Diferansiyel Denklemler . . . . .                      | 3     |
| 2.1.2. Kısmi Diferansiyel Denklemler . . . . .                    | 3     |
| 2.2. Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Lineerliği . . . . . | 3     |
| 2.3. Konveks Küme . . . . .                                       | 4     |
| 2.4. Homotopi Dönüşümü . . . . .                                  | 4     |
| 3. MATERYAL VE METOT . . . . .                                    | 5     |
| 3.1. Homotopi Perturbasyon Metodu . . . . .                       | 5     |
| 3.1.1. Örnek (Helmholtz Denklemi): . . . . .                      | 6     |
| 3.2. Adomian Ayırıştırma Metodu . . . . .                         | 9     |
| 3.2.1. Örnek (Helmholtz Denklemi): . . . . .                      | 12    |
| 3.3. Kapalı Üstel Sonlu Fark Metodu . . . . .                     | 14    |

|                                                 |    |
|-------------------------------------------------|----|
| 3.3.1. Örnek (Burger-Huxley Denklemi) . . . . . | 16 |
| 4. BULGULAR VE TARTIŞMA . . . . .               | 20 |
| 4.1. Örnek: . . . . .                           | 20 |
| 4.1.1. Homotopi Perturbasyon Metodu . . . . .   | 20 |
| 4.1.2. Adomian Ayrıştırma Metodu . . . . .      | 22 |
| 4.1.3. Kapalı Üstel Sonlu Fark Metodu . . . . . | 26 |
| 4.2. Örnek: . . . . .                           | 29 |
| 4.2.1. Homotopi Perturbasyon Metodu . . . . .   | 29 |
| 4.2.2. Adomian Ayrıştırma Metodu . . . . .      | 32 |
| 4.2.3. Kapalı Üstel Sonlu Fark Metodu . . . . . | 36 |
| 4.3. Örnek: . . . . .                           | 41 |
| 4.3.1. Homotopi Perturbasyon Metodu . . . . .   | 41 |
| 4.3.2. Adomian Ayrıştırma Metodu . . . . .      | 43 |
| 4.3.3. Kapalı Üstel Sonlu Fark Metodu . . . . . | 48 |
| 5. SONUÇ VE ÖNERİLER . . . . .                  | 52 |
| KAYNAKLAR . . . . .                             | 53 |
| ÖZGEÇMİŞ . . . . .                              | 57 |

## ÇİZELGELER DİZİNİ

| Çizelge                                                                                                             | Sayfa |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Çizelge 3.1. Helmholtz denkleminde elde edilen sonuçların karşılaştırılması. . . . .                                | 13    |
| Çizelge 3.2. Burger-Huxley denkleminin $x = 0,1$ değerinde KÜSFM ile çözümünden elde edilen bağıl hatalar . . . . . | 19    |
| Çizelge 3.3. Burger-Huxley denkleminin $x = 0,5$ değerinde KÜSFM ile çözümünden elde edilen bağıl hatalar . . . . . | 19    |
| Çizelge 3.4. Burger-Huxley denkleminin $x = 0,9$ değerinde KÜSFM ile çözümünden elde edilen bağıl hatalar . . . . . | 19    |
| Çizelge 4.1. Burgers denkleminde elde edilen sonuçların karşılaştırılması. . . . .                                  | 27    |
| Çizelge 4.2. Fisher denkleminde elde edilen sonuçların karşılaştırılması. . . . .                                   | 37    |
| Çizelge 4.3. Fisher denkleminde elde edilen sonuçların karşılaştırılması. . . . .                                   | 49    |

## ŞEKİLLER DİZİNİ

| Şekil                                                                                   | Sayfa |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Şekil 4.1. Burgers denkleminin sıfıncı yaklaşımı olan $v_0$ 'ın grafiği . . . . .       | 24    |
| Şekil 4.2. Burgers denkleminin birinci yaklaşımı olan $v_1$ 'in grafiği . . . . .       | 24    |
| Şekil 4.3. Burgers denkleminin ikinci yaklaşımı olan $v_2$ 'nin grafiği . . . . .       | 25    |
| Şekil 4.4. Burgers denkleminin üçüncü yaklaşımı olan $v_3$ 'ün grafiği . . . . .        | 25    |
| Şekil 4.5. $t = 0,1$ anında elde edilen sonuçların grafik üzerinde gösterimi. . . . .   | 28    |
| Şekil 4.6. $t = 0,1$ anında elde edilen sonuçların grafik üzerinde gösterimi. . . . .   | 28    |
| Şekil 4.7. Fisher denkleminin sıfıncı yaklaşımı olan $v_0$ 'ın grafiği . . . . .        | 34    |
| Şekil 4.8. Fisher denkleminin birinci yaklaşımı olan $v_1$ 'in grafiği . . . . .        | 34    |
| Şekil 4.9. Fisher denkleminin ikinci yaklaşımı olan $v_2$ 'nin grafiği . . . . .        | 35    |
| Şekil 4.10. Fisher denkleminin üçüncü yaklaşımı olan $v_3$ 'ün grafiği . . . . .        | 35    |
| Şekil 4.11. $t = 0,01$ anında elde edilen sonuçların grafik üzerinde gösterimi. . . . . | 38    |
| Şekil 4.12. $t = 0,01$ anında elde edilen sonuçların grafik üzerinde gösterimi. . . . . | 38    |
| Şekil 4.13. $t = 1$ anında elde edilen sonuçların grafik üzerinde gösterimi. . . . .    | 39    |
| Şekil 4.14. $t = 1$ anında elde edilen sonuçların grafik üzerinde gösterimi. . . . .    | 39    |
| Şekil 4.15. $t = 1$ anında elde edilen sonuçların grafik üzerinde gösterimi. . . . .    | 40    |
| Şekil 4.16. $t = 10$ anında elde edilen sonuçların grafik üzerinde gösterimi. . . . .   | 40    |
| Şekil 4.17. Fisher denkleminin sıfıncı yaklaşımı olan $v_0$ 'ın grafiği . . . . .       | 46    |
| Şekil 4.18. Fisher denkleminin birinci yaklaşımı olan $v_1$ 'in grafiği . . . . .       | 46    |
| Şekil 4.19. Fisher denkleminin ikinci yaklaşımı olan $v_2$ 'nin grafiği . . . . .       | 47    |

|                                                                                         |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Şekil 4.20. Fisher denkleminin üçüncü yaklaşımı olan $v_3$ 'ün grafiği . . . . .        | 47 |
| Şekil 4.21. $t = 0,1$ anında elde edilen sonuçların grafik üzerinde gösterimi. . . . .  | 50 |
| Şekil 4.22. $t = 0,01$ anında elde edilen sonuçların grafik üzerinde gösterimi. . . . . | 50 |
| Şekil 4.23. $t = 1$ anında elde edilen sonuçların grafik üzerinde gösterimi. . . . .    | 51 |
| Şekil 4.24. $t = 1$ anında elde edilen sonuçların grafik üzerinde gösterimi. . . . .    | 51 |



## SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

### Simgeler

### Açıklama

|            |                                |
|------------|--------------------------------|
| $A$        | Genel diferansiyel operatör    |
| $B$        | Sınır operatörü                |
| $L$        | Lineer operatör                |
| $N$        | Lineer olmayan operatör        |
| $L^{-1}$   | İntegral operatörü             |
| $\Delta t$ | Zaman Adımı                    |
| $f(r)$     | Bilinen bir analitik fonksiyon |
| $\Gamma$   | Gama                           |
| $\delta$   | Delta                          |
| $\beta$    | Beta                           |
| $\Omega$   | Omega                          |
| $\Psi$     | Psi                            |

### Kısaltmalar

### Açıklama

|       |                                |
|-------|--------------------------------|
| HPM   | Homotopi Perturbasyon Metodu   |
| AAM   | Adomian Ayrıştırma Metodu      |
| KÜSFM | Kapalı Üstel Sonlu Fark Metodu |

## 1. GİRİŞ

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin tam ve açık çözümlerinin yapısı pek çok bilim dalında çok önemlidir. Çünkü, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler esas olarak iki kısma ayrılır. Bunlar integrallenebilen ve integrallenemeyen kısmi diferansiyel denklemlerdir. İntegrellenebilen denklemler, sonsuz sayıda tam çözüme sahiptir. Bunlar arasında en iyi bilinen denklemler, Korteweg - de Vries denklemleri, Sine-Gordon denklemleri, Kawahara tipi denklemler, lineer olmayan Schrödinger denklemi, Boussinesq denklemleri ve benzer integrallenebilir denklemlerle genişletilebilir. Bazı tam çözümlü veya tam çözümsüz lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler, integrallenemeyen kısmi diferansiyel denklemler sınıfında kabul edilir. Burger-Huxley denklemi, Fisher denklemi ve Ginzburg-Landau denklemi, integrallenemeyen kısmi diferansiyel denklemlerin en iyi bilinen örnekleridir.

Son yirmi yılda lineer olmayan denklemlerin tam çözümünün elde edilmesi için metotların geliştirilmesinde önemli ilerlemeler yapılmıştır. Ayrıca her iki türdeki lineer olmayan diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini elde etmede en iyi metot tek değildir ve her yöntemin araştırmacıların deneyimine ve kullanılan metoda duyulan ilgiye bağlı olarak metodun eksiklikleri ve iyi tarafları vardır. Böylece, farklı yaklaşımlarla var olan çözümleri doğrulamak ya da muhtemel yeni tam çözümleri aramak için o metotla çözülemeyen lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler için literatürde en iyi bilinen metotları uygulamak oldukça önemlidir. Homotopi perturbasyon ve Adomian ayrıştırma metodu, lineer olmayan problemlerin en iyi çözümünü verdiği iyi bilinmektedir (Ghorbani & Saberi-Nadjafi, 2007; Ghorbani, 2009; He, 2006a, 2004, 2005).

Homotopi perturbasyon yöntemi, 1999 yılında Ji Huan He tarafından geliştirilmiştir. (Ghorbani, 2009; He, 2004, 2005, 2006b) Bu metot bir çok bilim adamı tarafından çeşitli fonksiyonel denklemleri çözmek için kullanılmıştır. Bu yöntemde çözüm, tam çözümlere hızla yaklaşan sonsuz bir serinin toplamı olarak kabul edilir. Topolojide homotopi tekniğini kullanarak  $p \in [0, 1]$  "küçük parametre" olarak kabul edilen bir gömme parametresidir Topolojide homotopi tekniği kullanılarak bu parametre ile bir homotopi oluşturulur. Son zamanlarda bu metodu lineer ve lineer olmayan denklemlerin sınıfına uygulamak için pek çok araştırma yapılmıştır. bu yöntem He tarafından dahada geliştirilmiş ve ilerletilmiştir. Lineer olmayan dalga denklemleri, sınır değer problemleri ve lineer olmayan salınım denklemleri gibi lineer olmayan pek çok denkleme uygulanmıştır. He'nin homotopi perturbasyon yönteminin evrensel bir yöntem olduğu ve çeşitli türde lineer olmayan fonksiyonel denklemleri çözebildiği bilinmektedir. Örneğin lineer olmayan Schrödinger denklemlerine, ısı transferinde ortaya çıkan lineer olmayan denklemlere kuadratik Ricatti diferansiyel denklemlere uygulanmıştır. Homotopi perturbasyon metodu ve homotopi analiz yöntemi arasında bir karşılaştırma incelenmiş ve birincinin ikinciden daha güçlü olduğunu ortaya çıkarmıştır. Li-

neer olmayan çözümün çözümüne yönelik bir yaklaşımı hesaplamak için He'nin homotopi perturbasyon metodunu kullanmıştır.

Literatürde, çok sayıda sayısal metot, Burger denkleminin sayısal çözümleri için ileri sürülmüş ve uygulanmıştır. Birçok yazar bu denklemi çözmek için sonlu fark, (Molabahrani & Khani, 2009a; Kutluay, Bahadır, & Özdeş, 1999; Gülsu & Öziş, 2005; Kadalbajoo & Awasthi, 2006; Gülsu, 2006; Liao, 2008), sonlu eleman (Bahadır & Sağlam, 2005) ve sınır eleman (Kadalbajoo, Sharma, & Awasthi, 2005) metotlarına dayanan sayısal teknikleri kullanmışlardır. Kadalbajoo ve arkadaşları zamana bağlı Burger denklemini çözmek için bir parametrelili düzgün kapalı fark şemasını kullanmıştır. Açık üstel sonlu fark metodu, Battacharya tarafından ısı denklemini çözmek için geliştirilmiştir. Ayrıca Burger denklemini çözmek için Battacharya (Bhattacharya, 1990) ve Handschuh ve Keith (Handschuh & Keith Jr, 1992) açık sonlu fark metodunu kullanmıştır. Bahadır (Bahadır, 2005) KdV denklemini açık sonlu fark tekniğini kullanarak çözmüştür. Bahadır ve İnan (Inan & Bahadır, 2013a) Burger denklemini çözmek için üstel sonlu fark metodunu geliştiren iki yeni teknik kullanmışlardır.

Literatürde, çok sayıda sayısal metot, Fisher denkleminin (Al-Humedi & Ali, 2008; A.-M. Wazwaz & Gorguis, 2004) sayısal çözümleri için ileri sürülmüş ve uygulanmıştır. İsmail ve arkadaşları, (İsmail, Raslan, & Abd Rabboh, 2004) genelleştirilmiş Burgers-Huxley ve Burgers-Fisher denklemlerini Adomian ayrıştırma yöntemini kullanarak çözmüştür. Mittal ve Tripathi, (Mittal & Tripathi, 2015) genelleştirilmiş Burgers-Fisher ve Burgers-Huxley denklemlerinin yaklaşık çözümünü elde etmek için modifiye edilmiş kübik B-spline sıralama (collocation) metodunu kullanmışlardır. Zarebnia ve Jalili, (Zarebnia & Jalili, 2013) genelleştirilmiş Burgers-Fisher ve Burgers-Huxley denklemlerini Chebyshev spektral kollokasyon yöntemi ile çözmüştür. Exp-fonksiyonu yönteminin doğadan ilham alan algoritma ile hibridizasyonuna dayalı genelleştirilmiş Burgers-Fisher denkleminin sayısal çözümü Malik ve diğerleri tarafından yapılmıştır. (Malik, Qureshi, Amir, Malik, & Haq, 2015) Nawaz, (Nawaz, Ullah, Islam, & Idrees, 2013) genelleştirilmiş Burgers-Huxley ve Burgers-Fisher denklemlerinin yaklaşık çözümlerini bulmak için optimal homotopi asimptotik yöntemini kullanmıştır.

Bu çalışmada, Burgers ve Fisher denklemini çözmek için üç farklı yöntem uygulanmıştır. Bu yöntemlerin denklemi çözme yeteneğini göstermek için bazı örnekler sunulmuştur. Her üç sayısal yöntemin de kesin çözümle makul ölçüde iyi bir uyum içinde olduğu açıkça görülmektedir.



## 2. TEMEL TANIMLAR

### 2.1. Diferansiyel Denklem

Bir veya daha fazla bağımlı değişkenin, bir veya daha fazla bağımsız değişkene göre birinci veya daha fazla mertebeden türevlerini içeren denklemlere *diferansiyel denklem* denir.

Genel olarak ikiye ayrılır.

#### 2.1.1. Adi Diferansiyel Denklemler

Bir bağımsız ve en az bir bağımlı değişken ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre birinci veya daha fazla mertebeden türevlerini içeren denklemlere *adi diferansiyel denklemler* denir.  $n$ . mertebeden adi diferansiyel denklemlerin genel formu;

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

şeklindedir.

#### 2.1.2. Kısmi Diferansiyel Denklemler

En az iki bağımsız ve en az bir bağımlı değişken ile bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre birinci veya daha fazla mertebeden türevlerini içeren denklemlere *kısmi diferansiyel denklemler* denir. Kısmi diferansiyel denklemlerin genel formu;

$$F(x, y, z, z_x, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, \dots) = 0$$

şeklindedir.

### 2.2. Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Lineerliği

Bir kısmi türevli denklemdeki bağımlı değişken (veya değişkenler) ve bunların denklemdeki bütün kısmi türevleri birinci dereceden ve denklemi, bağımlı değişken ile onun türevleri parantezinde yazdığımızda katsayılar yalnızca bağımsız değişkenlerin fonksiyonu oluyorsa bu denkleme *lineerdir* denir.

İki bağımsız bir bağımlı değişkene sahip birinci ve ikinci mertebeden lineer kısmi türevli denklemlerin genel formları sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$K(x, y)z_x + L(x, y)z_y + M(x, y)z = N(x, y)$$

$$P(x, y)z_{xx} + Q(x, y)z_{xy} + R(x, y)z_{yy} + S(x, y)z_x + T(x, y)z_y + U(x, y)z = V(x, y)$$

### 2.3. Konveks Küme

$C \subset \mathbb{R}^n$  olsun. Eğer herhangi iki  $x, y \in C$  noktası verildiğinde  $x$ 'den  $y$ 'ye çizilen doğru parçası yine  $C$  kümesinde kalıyorsa bu  $C$  kümesine konvektir denir. Diğer bir deyişle,  $\forall t \in [0, 1]$  ve  $\forall x, y \in C$  için

$$(1 - t)x + ty \in C$$

ise  $C \subset \mathbb{R}^n$  kümesine konvektir denir.

### 2.4. Homotopi Dönüşümü

$X$  ve  $Y$  iki topolojik uzay,  $f, g : X \rightarrow Y$  sürekli iki dönüşüm ve  $I = [0, 1]$  olsun.  $\forall x \in X$  için  $H(x, 0) = f(x)$  ve  $H(x, 1) = g(x)$  olacak şekilde  $H : X \times I \rightarrow Y$  sürekli dönüşümü varsa  $f$  dönüşümüne  $g$ 'ye *homotopiktir* denir ve  $H$ 'ye de *homotopi dönüşümü* adı verilir.

*Örnek:*

$$f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) = 1 + x^2(x - 2)^2$$

ve

$$g : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow g(x) = 1$$

fonksiyonu verilsin.

$$H : [0, 2] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, t) \rightarrow H(x, t) = 1 + (1 - t) x^2 (x - 2)^2$$

olsun.  $H$ , polinom fonksiyon olduğundan süreklidir ve  $H(x, 0) = f(x)$  ve  $H(x, 1) = 1 = g(x)$  dir. Böylece  $H$ ,  $f$  ve  $g$  arasında bir homotopi dönüşümüdür.

### 3. MATERİYAL VE METOT

Bu bölümde Burgers ve Fisher denklemini çözmek için kullanmış olduğumuz üç farklı metot tanıtılmış ve metotların daha iyi anlaşılması için örnekler verilmiştir. HPM ve AAM için Helmholtz denklemini uygun başlangıç koşullarıyla çözülüp, sonuçlar tablo halinde karşılaştırılmıştır. KÜSFM için ise Burger-Huxley denklemini örnek olarak verilip, elde edilen bağlı hatalar tablolar ile gösterilmiştir.

#### 3.1. Homotopi Perturbasyon Metodu

Homotopi perturbasyon yöntemi, 1999 yılında Ji Huan He tarafından geliştirilmiştir.(He, 2006a, 2004, 2005, 2006b) Bu metot bir çok bilim adamı tarafından çeşitli fonksiyonel denklemleri çözmek için kullanılmıştır. Bu yöntemde çözüm, tam çözümlere hızla yaklaşan sonsuz bir serinin toplamı olarak kabul edilir. Topolojide homotopi tekniğini kullanarak  $p \in [0, 1]$  "küçük parametre" olarak kabul edilen bir gömme parametresidir Topolojide homotopi tekniği kullanılarak bu parametre ile bir homotopi oluşturulur.

Bu yöntemin temel fikirlerini göstermek için aşağıdaki lineer olmayan diferansiyel denklemini ele alalım.

$$A(u) - f(r) = 0 \quad r \in \Omega \quad (3.1)$$

$$B\left(u, \frac{\partial u}{\partial n}\right) = 0, \quad r \in \Gamma \text{ (Sınır Koşulu)} \quad (3.2)$$

Burada  $\Gamma$ ,  $\Omega$  bölgesinin sınırı,  $f(r)$  bilinen bir analitik fonksiyon,  $B$  sınır operatörü ve  $A$  ise genel diferansiyel operatördür.

$A$  operatörünü  $L$  lineer ve  $N$  lineer olmayan olmak üzere ikiye ayırabiliriz.

Böylelikle (3.1) denklemini

$$L(u) + N(u) = f(r) \quad (3.3)$$

şeklinde tekrar yazabiliriz. Homotopi tekniğini kullanarak,

$$H(v, p) = (1 - p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - f(r)] = 0 \quad , \quad p \in [0, 1] \quad (3.4)$$

ya da

$$H(v, p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p[N(v) - f(r)] = 0 \quad (3.5)$$

ifadesini sağlayan,

$$v(r, p) : \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

biçiminde bir homotopi kurulabilir. Burada  $u_0$  sınır koşullarını sağlayan (3.3) denkleminin başlangıç yaklaşımı,  $p \in [0, 1]$  bir gömme parametresi ve  $r \in \Omega$  dır . Böylelikle açık bir şekilde,

$$H(v, 0) = L(v) - L(u_0) = 0 \quad (3.6)$$

$$H(v, 1) = A(v) - f(r) = 0 \quad (3.7)$$

eşitlikleri yazılabilir.  $p$ 'nin 0'dan 1'e değişme süreci ile  $H(v, p)$ 'nin  $L(v) - L(u_0)$ 'dan  $A(v) - f(r)$ 'ye değişmesi aynıdır. Topolojide buna *deformasyon* adı verilir.  $L(v) - L(u)$  ve  $A(v) - f(r)$ 'ye de birbirine *homotopiktir* denir.

$p$  gömme parametresini, "küçük parametre" olarak düşünecek olursak, klasik perturbasyon tekniğini kullanarak (3.3) 'ün çözümü  $p$ 'nin bir kuvvet serisi olarak verilebilir. Yani,

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots \quad (3.8)$$

şeklindedir ve  $p = 1$  durumunda (3.3) denkleminin yaklaşık çözümü,

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots \quad (3.9)$$

şeklinde elde edilir.

Bu noktada belirtmek gerekir ki HPM nin en önemli avantajı, başlangıç yaklaşımının özgürce seçilebilmesi ve topolojideki homotopi ile özgürce perturbasyon denkleminin kurulabilmesidir.

### 3.1.1. Örnek (Helmholtz Denklemi):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u = 0$$

$$u(0, y) = y, \quad u_x(0, y) = y + \cosh y$$

şeklinde verilen Helmholtz denklemini ele alalım.

Burada  $L(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$  olsun. O halde (3.4) denkleminde;

$$\begin{aligned} H(v, p) &= (1 - p)(L(v) - L(u_0)) + p(A(v) - f(r)) = 0 \\ &= (1 - p) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right) + p \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - v \right\} = 0 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu ifadenin düzenlenmesiyle,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = pv - p \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - p \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}$$

ifadesi bulunur. (3.8) denkleminin kullanılmasıyla

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + p \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + p^2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \dots - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = pv_0 + p^2 v_1 + \dots - p \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - p^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} - \dots - p \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}$$

eşitliği bulunur ve burada p'nin kuvvetlerinin katsayılarını karşılıklı olarak eşitlersek,

$$P^{(0)} : v_0(x, y) = y(1 + x) + x \cosh y,$$

$$P^{(1)} : v_1(x, y) = \frac{1}{2!} x^2 y + \frac{1}{3!} x^3 y,$$

$$P^{(2)} : v_2(x, y) = \frac{1}{4!} x^4 y + \frac{1}{5!} x^5 y,$$

$$P^{(3)} : v_3(x, y) = \frac{1}{6!} x^6 y + \frac{1}{7!} x^7 y,$$

·  
·  
·

bileşenlerini elde etmiş oluruz.

O halde ,

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots$$

eşitliğinde bulduğumuz bileşenleri yerine yazarsak,

$$u(x, y) = y(1 + x) + x \cosh y + \frac{1}{2!} x^2 y + \frac{1}{3!} x^3 y + \frac{1}{4!} x^4 y + \frac{1}{5!} x^5 y + \frac{1}{6!} x^6 y + \frac{1}{7!} x^7 y + \dots$$

$$\Rightarrow u(x, y) = ye^x + x \cosh y$$

bulunur.

### 3.2. Adomian Ayrıştırma Metodu

AAM birçok lineer veya lineer olmayan diferansiyel denklemlere başarılı bir şekilde uygulandığı ve bir seri metodu olduğu iyi bilinmektedir.

Bu metodu inceleyecek olursak;

$$Fu(x) = g(x) \quad (3.10)$$

Burada  $F$ , hem lineer hem de lineer olmayan terimleri içeren genel bir lineer olmayan adi diferansiyel operatör, olmak üzere, (3.10) denklemini yeniden yazalım.

$$L_u + R_u + N_u = g \quad (3.11)$$

Burada  $N$  lineer olmayan terim,  $R$ ; lineer operatörden kalan kısım ve  $L$  verilen diferansiyel denklemin en yüksek mertebeden türevini gösterecek şekilde ayrıştırarak yazalım.  $L$  bir lineer operatör ve tersi de mevcut olsun.

(3.11) eşitliği

$$L_u = g - R_u - N_u \quad (3.12)$$

şeklinde yeniden yazılabilir ve bu eşitliğin her iki tarafı  $L^{-1}$  operatörü ile sol taraftan (3.12) eşitliğine uygulanırsa,

$$L^{-1}L_u = L^{-1}g - L^{-1}R_u - L^{-1}N_u \quad (3.13)$$

eşitliği elde edilir.

$L$  ikinci mertebeden ve tersi mevcut olan lineer bir operatör olduğunu kabul edelim. (3.13) eşitliğinde gerekli işlemler yapıldıktan sonra

$$u = u(0) + tu'(0) - L^{-1}R_u - L^{-1}N_u \quad (3.14)$$

çözüm fonksiyonu bulunur. (3.14) ile elde edilen eşitlikteki  $N_u$  lineer olmayan terim

$$N_u = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

şeklinde ifade edilmektedir. Buradaki  $A_n$  polinomları özel polinomlardır ve (3.14) eşitliğindeki  $u$  ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonudur. Bu seri çözüm fonksiyonunun birinci terimi  $u_0$ , verilen başlangıç değeri ve denklemin sağ taraf fonksiyonun integrali olmak üzere,

$$u_0 = a + bt - L^{-1}g$$

ile bulunur. Daha sonra seri çözümün birinci terimi olan  $u_0$  terimi kullanılarak  $u_1, u_2, \dots$  terimleri elde edilerek ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonu,

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \quad (3.15)$$

şeklinde yazılabilir. Bu seri çözümü kullanılarak (3.14) eşitliği tekrar yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 - L^{-1}R \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (3.16)$$

şeklinde genel seri formu elde edilir. Benzer olarak (3.16) eşitliği açık şekilde,

$$\begin{aligned} u_1 &= -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0 \\ u_2 &= -L^{-1}Ru_1 - L^{-1}A_1 \\ u_3 &= -L^{-1}Ru_2 - L^{-1}A_2 \\ &\vdots \\ u_{n+1} &= -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n, \quad n \geq 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki  $A_n$  polinomları, her bir lineer olmayan terim için genelleştirilebilir ve bu genelleştirmede  $A_0$  sadece  $u_0$ 'a,  $A_1$  sadece  $u_0$  ve  $u_1$ 'e,  $A_2$  ise  $u_0, u_1$  ve  $u_2$ 'ye bağlı ve benzer şekilde (3.17) eşitliğindeki bütün  $A_n$  Adomian polinomları elde edilebilir.  $A_n$  Adomian polinomunun ayrıştırılmış hali ise literatürde,



$$\begin{aligned}
A_0 &= f(u_0) \\
A_1 &= u_1 \left( \frac{d}{du_0} \right) f(u_0), \\
A_2 &= u_2 \left( \frac{d}{du_0} \right) f(u_0) + \left( \frac{u_1^2}{2!} \right) \left( \frac{d^2}{du_0^2} \right) f(u_0), \\
A_3 &= u_3 \left( \frac{d}{du_0} \right) f(u_0) + u_1 u_2 \left( \frac{d^2}{du_0^2} \right) f(u_0) + \left( \frac{u_1^3}{3!} \right) \left( \frac{d^3}{du_0^3} \right) f(u_0), \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.18}$$

şeklinde verilmektedir. Adomian ayrıştırılmış polinomlarının genel hali ise,

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[ \phi \left( \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k u_k \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n \geq 0 \tag{3.19}$$

şeklinde formülize edilir.

Ayrıştırma metodu kullanılarak  $u(x, t)$  kapalı çözüm fonksiyonu ve bu fonksiyona ait sayısal çözümlerin elde edilmesi için,

$$\phi_n(x, t) = \sum_{k=1}^{n-1} u_k(x, t); \quad n \geq 0 \tag{3.20}$$

olmak üzere,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = u(x, t) \tag{3.21}$$

ifadesi (3.17) indirgeme bağlantısı göz önüne alınarak kolayca hesaplanabilir.

### 3.2.1. Örnek (Helmholtz Denklemleri):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u = 0$$

$$u(0, y) = y, \quad u_x(0, y) = y + \cosh y$$

şeklinde verilen başlangıç değer problemini ele alalım. Bu denklem,

$$L_{xx}u = -L_{yy}u + u$$

operatör formunda gösterilebilir. Burada  $L_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$  ve  $L_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  dir.  $L_{xx}^{-1}$  integral operatörü olmak üzere,

$$L_{xx}^{-1} = \int_0^x \int_0^x (.) dx dx$$

şeklinde yazılabilir. Yukarıdaki denklemin her iki tarafına bu operatör uygulanırsa:

$$u(x, y) = u(0, y) + xu_x(0, y) + L_{xx}^{-1}[u - L_{yy}u]$$

olur. Böylece,

$$u_0 = (1 + x)y + x \cosh y,$$

$$u_1 = L_{xx}^{-1}(u_0) - L_{xx}^{-1}[L_{yy}(u_0)] = \left( \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \right) y,$$

$$u_2 = L_{xx}^{-1}(u_1) - L_{xx}^{-1}[L_{yy}(u_1)] = \left( \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \right) y,$$

$$u_3 = L_{xx}^{-1}(u_2) - L_{xx}^{-1}[L_{yy}(u_2)] = \left( \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} \right) y,$$

⋮

bileşenleri elde edilir. O halde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = u(x, t)$$

eşitliğinde bulduğumuz bileşenleri yerine yazarsak,

$$u(x, y) = (1 + x)y + xcosh(y) + \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right)y + \left(\frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\right)y + \left(\frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!}\right)y + \dots$$

$$\Rightarrow u(x, y) = ye^x + xcoshy$$

bulunur.

Çizelge 3.1. Helmholtz denkleminde elde edilen sonuçların karşılaştırılması.

| $x$  | $y$  | Tam Çözüm     | HPM/AAM       | Mutlak Hata  |
|------|------|---------------|---------------|--------------|
| -1   | -1   | -1,9109600760 | -1,9097472990 | 0,0012127770 |
| -0,8 | -0,8 | -1,4294111280 | -1,491500900  | 0,0002610380 |
| -0,6 | -0,6 | -1,0405661130 | -1,0405303310 | 0,0000357820 |
| -0,4 | -0,4 | -0,7005569670 | -0,7005548150 | 0,0000021520 |
| -0,2 | -0,2 | -0,367755010  | -0,3677594840 | 0,0000000170 |
| 0,0  | -0,0 | 0,0000000000  | 0,0000000000  | 0,0000000000 |
| 0,2  | 0,2  | 0,4482939020  | 0,4482938840  | 0,0000000180 |
| 0,4  | 0,4  | 1,0291588280  | 1,0291564150  | 0,0000024130 |
| 0,6  | 0,6  | 1,8045504110  | 1,8045079310  | 0,0000424800 |
| 0,8  | 0,8  | 2,850380700   | 2,8500524900  | 0,0003282100 |
| 1    | 1    | 4,26136246300 | 4,2597472990  | 0,0016151640 |

### 3.3. Kapalı Üstel Sonlu Fark Metodu

Fizik, kimya, biyoloji, matematik ve mühendislik gibi çeşitli alanlardaki problemler modelendiğinde lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler elde edilir.

Genelleştirilmiş Burger-Fisher denklemi de önemli bir lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemdir.

Şimdi,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u^\delta \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(u) \quad a \leq x \leq b, \quad t \geq 0 \quad (3.22)$$

$$u(x, 0) = f(x)$$

$$u(a, t) = g_1(t), \quad u(b, t) = g_2(t)$$

formundaki lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemi ele alalım.  $F(u) = \beta u(1 - u^\delta)$  olduğunda (3.22) denklemi genelleştirilmiş Burger-Fisher denklemdir. Çözüm bölgesi  $x_i = a + ih$ , ( $i = 0, 1, 2, \dots, N$ ) ve  $t_n = nk$ , ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) olmak üzere  $(x_i, t_n)$  düğüm kümesiyle tanımlanan hücrelere ayrıştırılmıştır. Ayrıca  $h = \Delta x = \frac{b-a}{N}$  uzaysal ağ ebatı ve  $k = \Delta t$  de zaman adımdır.  $u(x, t)$  ve  $U_i^n$  sırasıyla tam çözümü ve tam çözüme sonlu fark yaklaşımını tanımlar. (3.22) denklemini

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha u^\delta \frac{\partial u}{\partial x} + F(u) \quad (3.23)$$

şeklinde yeniden düzenleyelim. Her iki tarafı  $u$  ile bölersek,

$$\frac{\partial \ln u}{\partial t} = \frac{1}{u} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha u^\delta \frac{\partial u}{\partial x} + F(u) \right) \quad (3.24)$$

eşitliği elde edilir.

$F(u) = \beta u(1 - u^\delta)$  alırsak ve türevler içinde sonlu fark yaklaşımını kullanırsak, genelleştirilmiş Burger-Fisher denklemi için kapalı üstel sonlu fark yaklaşımı,

$$U_i^{n+1} = U_i^n \exp \left\{ \frac{k}{U_i^n} \left[ \left( \frac{U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}}{h^2} \right) - \alpha (U_i^{n+1})^\delta \left( \frac{U_{i+1}^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}}{2h} \right) + \beta U_i^{n+1} (1 - (U_i^{n+1})^\delta) \right] \right\} \quad (3.25)$$

şeklinde verilir.

(3.25) denkleminde  $\alpha = 0$  ve  $\delta = \beta = 1$  için (3.24) denklemi Fisher denkleminin kapalı üstel sonlu fark metodunu verir.

Burada metodun doğruluğunu,

$$|u(x_i, t_n) - U(x_i, t_n)|$$

mutlak hata kullanarak elde edeceğiz. (Bilge & Appadu, 2021)

Denklemlere kapalı üstel sonlu farklar yöntemi uygulandığında, lineer olmayan bir fark denklem sistemi elde edilir. Bu lineer olmayan fark denklem sistemleri, Newton yöntemiyle çözülebilir.

### 3.3.1. Örnek (Burger-Huxley Denklemi)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u^\delta \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \beta u(1 - u^\delta)(u^\delta - \gamma), \quad 0 \leq x \leq 1, t \geq 0 \quad (3.26)$$

şeklinde verilen Burger-Huxley denklemini ele alalım.

Başlangıç koşulu

$$u(x, 0) = \left( \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} \tanh[A_1 x] \right)^{\frac{1}{\delta}}$$

ve sınır koşulları da,

$$u(0, t) = \left( \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} \tanh[-A_1 A_2 t] \right)^{\frac{1}{\delta}}$$

ve

$$u(1, t) = \left( \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} \tanh[A_1 (1 - A_2 t)] \right)^{\frac{1}{\delta}}$$

olsun. Denklemin tam çözümü

$$u(x, t) = \left( \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} \tanh[A_1 (x - A_2 t)] \right)^{\frac{1}{\delta}}$$

eşitliği ile elde edilir.

$$A_1 = \frac{-\alpha\delta + \delta\sqrt{\alpha^2 + 4\beta(1+\delta)}}{4(1+\delta)}\gamma$$

$$A_2 = \frac{\gamma\alpha}{1+\delta} - \frac{(1+\delta-\gamma)\left(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta(1+\delta)}\right)}{2(1+\delta)}$$

$\alpha, \beta, \gamma$  ve  $\delta$  parametreleri,  $\beta \geq 0, \delta > 0, \gamma \in (0, 1)$  dir.  $\alpha = 0$  ve  $\delta = 1$  olduğunda (3.26) denklemi Huxley denklemine indirgenir.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \beta u(1-u)(u-\gamma)$$

$\beta = 0$  ve  $\delta = 1$  olduğunda ise (3.26) denklemi aşağıdaki Burgers denklemini verir.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Eğer  $\delta = 1$  ve  $\alpha \neq 0$  ve  $\beta \neq 0$  olursa (3.26) denklemi aşağıdaki Burger-Huxley denklemi olur.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta u(1-u^\delta)(u^\delta - \gamma) - \alpha u^\delta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

yukarıdaki eşitliğin her iki tarafını  $u$  ya bölersek,

$$\frac{\partial \ln u}{\partial t} = \frac{1}{u} \left( \beta u(1-u^\delta)(u^\delta - \gamma) - \alpha u^\delta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

denklemi elde edilir. Türevler için sonlu fark yaklaşımını kullanırsak,

$$U_i^{n+1} = U_i^n \exp \left\{ \frac{k}{U_i^n} \left[ \beta U_i^n \left( 1 - (U_i^n)^\delta \right) \left( (U_i^n)^\delta - \gamma \right) - \alpha (U_i^n)^\delta \left( \frac{U_{i+1}^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}}{2h} \right) + \left( \frac{U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}}{h^2} \right) \right] \right\}$$

elde edilir.

Bu denklem Burgers-Huxley denkleminin çözümü için kapalı üstel sonlu farklar yöntemidir.

Burada  $x_i = ih, (i = 0, 1, 2, \dots, N)$  ve  $t_n = nk, (n = 0, 1, 2, \dots), h = \Delta x = \frac{1-0}{N}$  uzaysal ağ boyutu  $k = \Delta t$  ise zaman adıdır.

Ayrıca  $U_i^n, u(x, t)$  tam çözümüne sonlu fark yaklaşımını gösterir. Burger-Huxley denklemi lineer olmayan fark denklemleri sistemidir. Doğrusal olmayan denklem sistemini şu şekilde ele alalım.

Burada  $\mathbf{F} = [f_1, f_2, \dots, f_{N-1}]^T$  ve  $\mathbf{V} = [U_1^{n+1}, U_2^{n+1}, U_3^{n+1}, \dots, U_{N-1}^{n+1}]$  şeklindedir. Denkleme uygulanan Newton yöntemi aşağıdaki tekrarlamayla sonuçlanır.

1.  $\mathbf{V}^{(0)}$  ilk tahmin.
2.  $\mathbf{V}^{(m+1)} = \mathbf{V}^m - J(\mathbf{V}^m)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{V}^{(m)}) \quad m = 0, 1, 2, \dots$

burada  $J(\mathbf{V}^m)$  analitik olarak değerlendirilen Jacobian matrisidir. Bir önceki zaman adımındaki çözüm, ilk tahmin olarak alınır. Newton'un her zaman adımındaki tekrarlama,  $\|\mathbf{F}(\mathbf{V}^{(m)})\|_\infty \leq 10^{-5}$  olduğunda durdurulur. Yakınsama genellikle iki veya üç tekrarlama elde edilir. (Inan & Bahadır, 2015)



Çizelge 3.2. Burger-Huxley denkleminin  $x = 0,1$  değerinde KÜSFM ile çözümünden elde edilen bağıl hatalar

| $x = 0,1$ |              |              |              |
|-----------|--------------|--------------|--------------|
| $t$       | $\delta = 1$ | $\delta = 2$ | $\delta = 4$ |
| 0,2       | 1,561971E-13 | 3,838021E-11 | 1,277132E-9  |
| 0,5       | 1,770063E-13 | 4,349335E-11 | 1,447275E-9  |
| 0,8       | 1,780854E-13 | 4,375852E-11 | 1,456099E-9  |

Çizelge 3.3. Burger-Huxley denkleminin  $x = 0,5$  değerinde KÜSFM ile çözümünden elde edilen bağıl hatalar

| $x = 0,5$ |              |              |              |
|-----------|--------------|--------------|--------------|
| $t$       | $\delta = 1$ | $\delta = 2$ | $\delta = 4$ |
| 0,2       | 4,238227E-13 | 1,041405E-10 | 3,465347E-9  |
| 0,5       | 4,911626E-13 | 1,206870E-10 | 4,015944E-9  |
| 0,8       | 4,946546E-13 | 1,215451E-10 | 4,044498E-9  |

Çizelge 3.4. Burger-Huxley denkleminin  $x = 0,9$  değerinde KÜSFM ile çözümünden elde edilen bağıl hatalar

| $x = 0,9$ |              |              |              |
|-----------|--------------|--------------|--------------|
| $t$       | $\delta = 1$ | $\delta = 2$ | $\delta = 4$ |
| 0,2       | 1,561971E-13 | 3,838038E-11 | 1,277131E-9  |
| 0,5       | 1,770063E-13 | 4,349352E-11 | 1,447276E-9  |
| 0,8       | 1,780854E-13 | 4,375869E-11 | 1,456099E-9  |

## 4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, Burgers ve Fisher denklemlerini çözmek için materyal ve metot bölümünde tanıttığımız homotopi perturbasyon, Adomian ayrıştırma ve kapalı üstel sonlu fark metotları kullanılmış, elde edilen sayısal sonuçlar tablolar halinde karşılaştırılmış ve grafikler üzerinde gösterilmiştir.

### 4.1. Örnek:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

şeklinde verilen Burgers denklemini ele alalım.

#### 4.1.1. Homotopi Perturbasyon Metodu

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) &= \sin \pi x \end{aligned}$$

şeklinde verilen başlangıç değer problemini ele alalım. Burada  $L(v) = \frac{\partial v}{\partial t}$  olsun.

O halde (3.4) denklemden,

$$\begin{aligned} H(v, p) &= (1 - p)(L(v) - L(u_0)) + p(A(v) - f(r)) = 0 \\ &= (1 - p) \left( \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) + p \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right\} = 0 \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitliği düzenlediğimizde,

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} + p \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = 0$$

ifadesi bulunur. (3.8) denkleminin kullanılmasıyla,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots \right) - \frac{\partial u_0}{\partial t} = p \left( \frac{\partial}{\partial t} (v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots) + (v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots) \frac{\partial}{\partial x} \right. \\ \left. (v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots) \right)$$

eşitliğini elde etmiş oluruz ve burada p'nin kuvvetlerinin katsayılarını karşılıklı olarak eşitlersek,

$$P^{(0)} : v_0(x, t) = \sin \pi x,$$

$$P^{(1)} : v_1(x, t) = -\pi t (\cos(\pi x) + \pi) \sin(\pi x),$$

$$P^{(2)} : v_2(x, t) = \pi^2 t^2 (-3 \sin(\pi x)^2 + 6 \pi \cos(\pi x) + 2 + \pi^2) \sin(\pi x) / 2,$$

$$P^{(3)} : v_3(x, t) = \pi^3 t^3 (18 \pi t \sin(\pi x)^4 - 24 \pi^3 t \sin(\pi x)^2 - 21 \pi t \sin(\pi x)^2 \\ + 45 \pi^2 t \cos(\pi x)^3 - 21 \pi^2 t \cos(\pi x) + 3 \pi^4 t \cos(\pi x) + 6 \pi t + 21 \pi^3 t + 180 \pi \sin(\pi x)^2 - \\ 52 \cos(\pi x)^3 - 108 \pi^2 \cos(\pi x) + 36 \cos(\pi x) - 120 \pi - 4 \pi^3) \sin(\pi x) / 24,$$

·  
·  
·

bileşenlerini elde etmiş oluruz.

O halde ,

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots$$

eşitliğinde bulduğumuz bileşenleri yerine yazarsak,

$$u(x, t) = \sin \pi x - \pi t (\cos(\pi x) + \pi) \sin(\pi x) + \pi^2 t^2 (-3 \sin(\pi x)^2 2 + 6\pi \cos(\pi x) + 2 + \pi^2) \sin(\pi x)/2 + \pi^3 t^3 (18\pi t \sin(\pi x)^4 - 24\pi^3 t \sin(\pi x)^2 - 21\pi t \sin(\pi x)^2 + 45\pi^2 t \cos(\pi x)^3 - 21\pi^2 t \cos(\pi x) + 3\pi^4 t \cos(\pi x) + 6\pi t + 21\pi^3 t + 180\pi \sin(\pi x)^2 - 52 \cos(\pi x)^3 - 108\pi^2 \cos(\pi x) + 36 \cos(\pi x) - 120\pi - 4\pi^3) \sin(\pi x)/24 + \dots$$

bulunur.

#### 4.1.2. Adomian Ayırıştırma Metodu

Aynı problemi şimdi Adomian ayırıştırma metodu ile tekrar çözelim.

(3.17) denklemi kullanılarak,

$$u_0 = \sin \pi x,$$

$$u_1 = L_{xx}^{-1}(u_0) - L_{xx}^{-1}[L_{yy}(u_0)] = -\pi t (\cos(\pi x) + \pi) \sin(\pi x)$$

$$u_2 = L_{xx}^{-1}(u_1) - L_{xx}^{-1}[L_{yy}(u_1)] = \pi^2 t^2 (-3 \sin(\pi x)^2 2 + 6\pi \cos(\pi x) + 2 + \pi^2) \sin(\pi x)/2$$

$$u_3 = L_{xx}^{-1}(u_2) - L_{xx}^{-1}[L_{yy}(u_2)] = \pi^3 t^3 (18\pi t \sin(\pi x)^4 - 24\pi^3 t \sin(\pi x)^2 - 21\pi t \sin(\pi x)^2 + 45\pi^2 t \cos(\pi x)^3 - 21\pi^2 t \cos(\pi x) + 3\pi^4 t \cos(\pi x) + 6\pi t + 21\pi^3 t + 180\pi \sin(\pi x)^2 - 52 \cos(\pi x)^3 - 108\pi^2 \cos(\pi x) + 36 \cos(\pi x) - 120\pi - 4\pi^3) \sin(\pi x)/24,$$

⋮

bileşenleri elde edilir. O halde

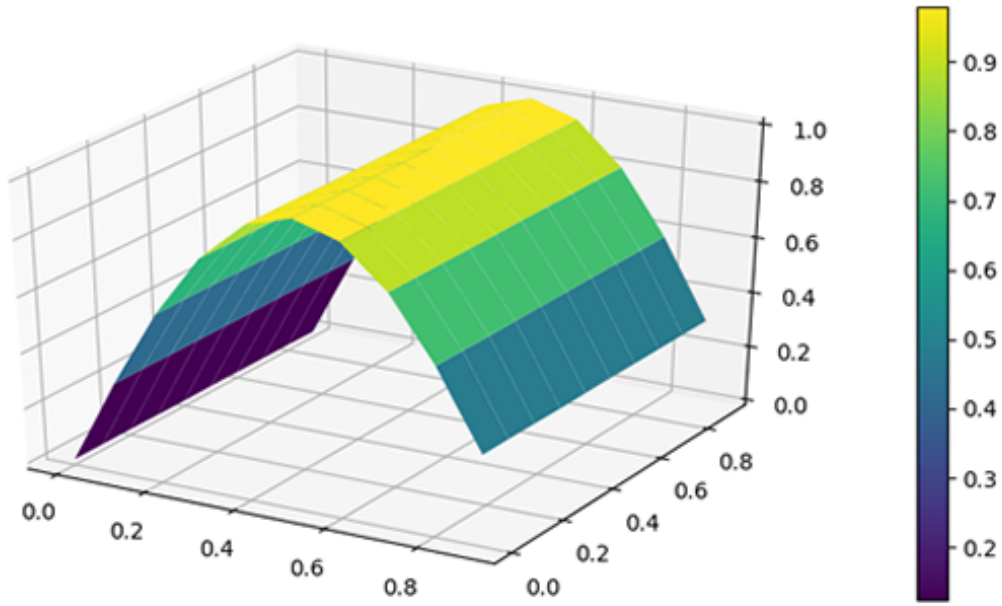
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = u(x, t)$$

eşitliğinde bulduklarımızı yerine yazarsak,

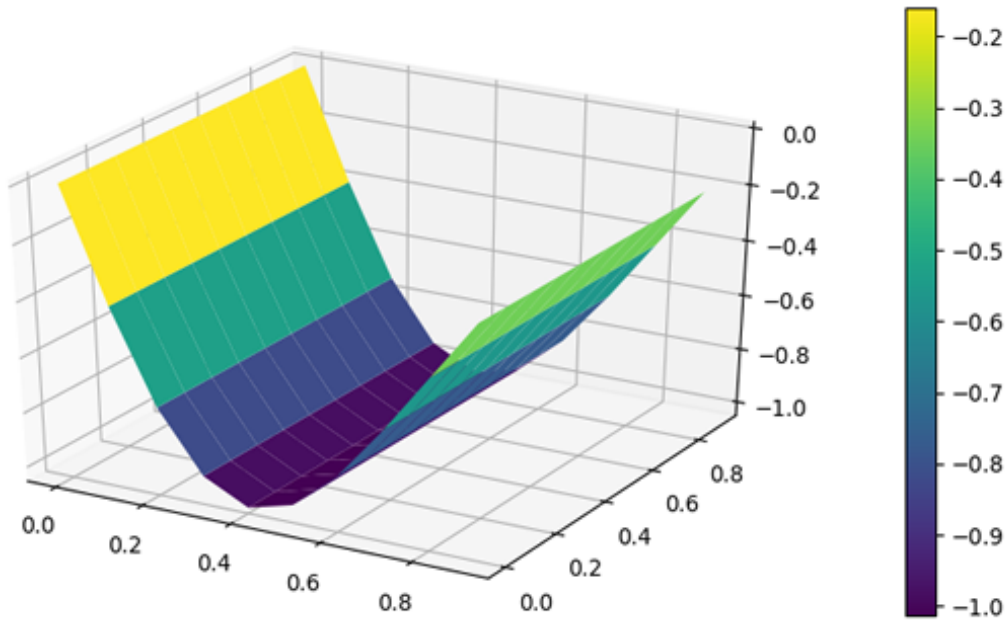
$$\begin{aligned}
u(x, t) = & \sin \pi x - \pi t (\cos(\pi x) + \pi) \sin(\pi x) + \pi^2 t^2 (-3 \sin(\pi x)^2 2 + 6 \pi \cos(\pi x) + 2 + \pi^2) \\
& \sin(\pi x) / 2 + \pi^3 t^3 (18 \pi t \sin(\pi x)^4 - 24 \pi^3 t \sin(\pi x)^2 - 21 \pi t \sin(\pi x)^2 + 45 \pi^2 t \cos(\pi x)^3 - \\
& 21 \pi^2 t \cos(\pi x) + 3 \pi^4 t \cos(\pi x) + 6 \pi t + 21 \pi^3 t + 180 \pi \sin(\pi x)^2 - 52 \cos(\pi x)^3 - 108 \pi^2 \\
& \cos(\pi x) + 36 \cos(\pi x) - 120 \pi - 4 \pi^3) \sin(\pi x) / 24 + \dots
\end{aligned}$$

bulunur.

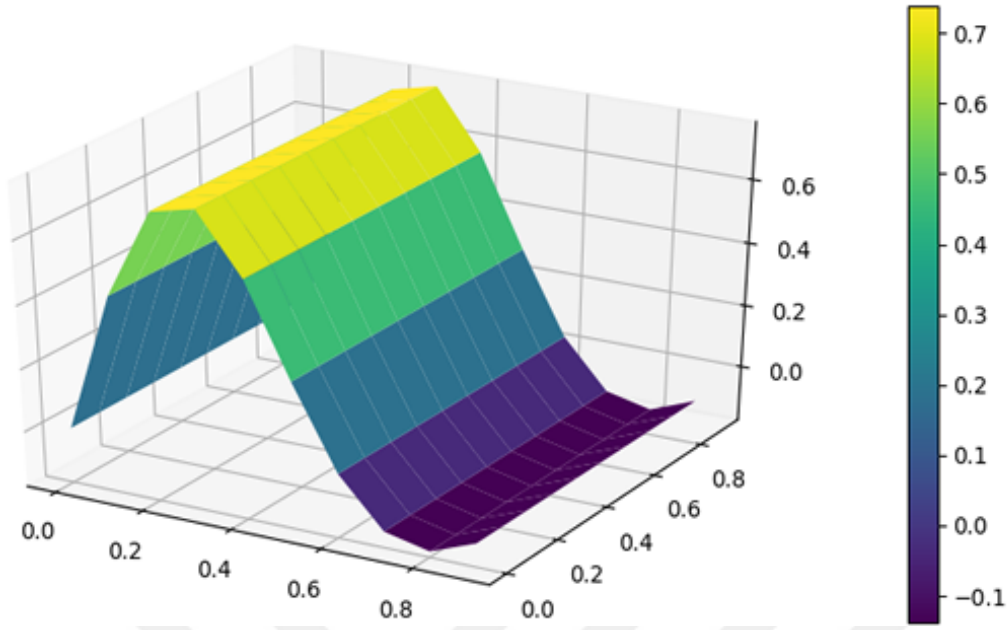




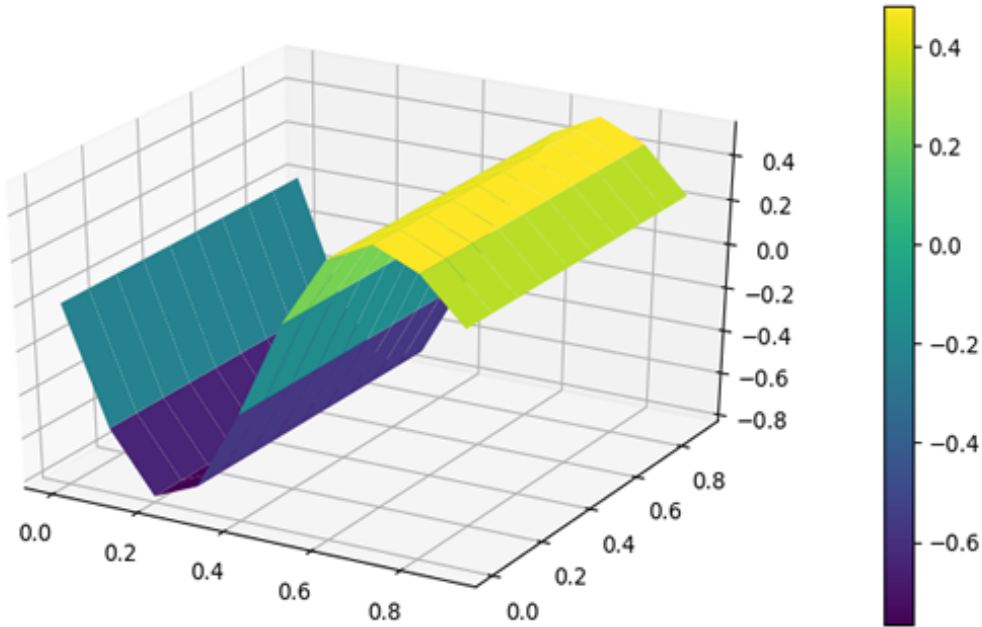
Şekil 4.1. Burgers denkleminin sıfırıncı yaklaşımı olan  $v_0$ 'ın grafiği



Şekil 4.2. Burgers denkleminin birinci yaklaşımı olan  $v_1$ 'in grafiği



Şekil 4.3. Burgers denkleminin ikinci yaklaşımı olan  $v_2$ 'nin grafiği



Şekil 4.4. Burgers denkleminin üçüncü yaklaşımı olan  $v_3$ 'ün grafiği

#### 4.1.3. Kapalı Üstel Sonlu Fark Metodu

Aynı problemi şimdi kapalı üstel sonlu fark metodu ile tekrar çözelim.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad 0 < x < 1 \quad (\text{Başlangıç koşulu})$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0 \quad (\text{Sınır koşulu})$$

problemini ele alalım.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \frac{\partial u}{\partial x}$$

dekleminin her iki tarafını  $u$ 'ya bölersek,

$$\frac{\partial \ln u}{\partial t} = \frac{1}{u} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

eşitliği elde edilir. Türevler için sonlu fark yaklaşımını kullanırsak,

$$U_i^{n+1} = U_i^n \exp \left\{ \frac{k}{U_i^n} \left[ \left( \frac{U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}}{h^2} \right) - (U_i^{n+1}) \left( \frac{U_{i+1}^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}}{2h} \right) \right] \right\}$$

denklemini kullanılarak yaklaşım çözüm elde edilir. (Inan & Bahadır, 2013b)

Denklemin tam çözümü ise,

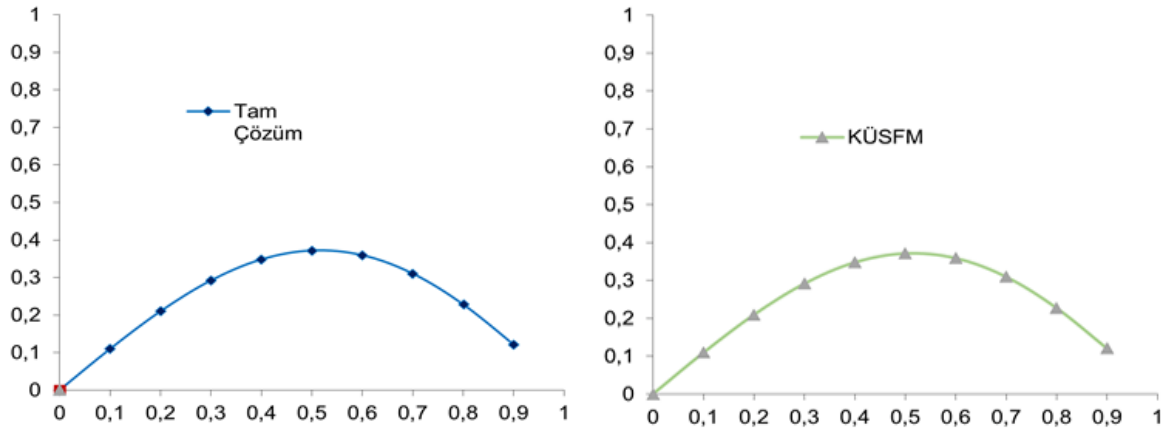
$$u(x, t) = \frac{2\pi v \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2 \pi^2 v t) n \sin(n \pi x)}{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2 \pi^2 v t) \cos(n \pi x)}$$

ile elde edilir.

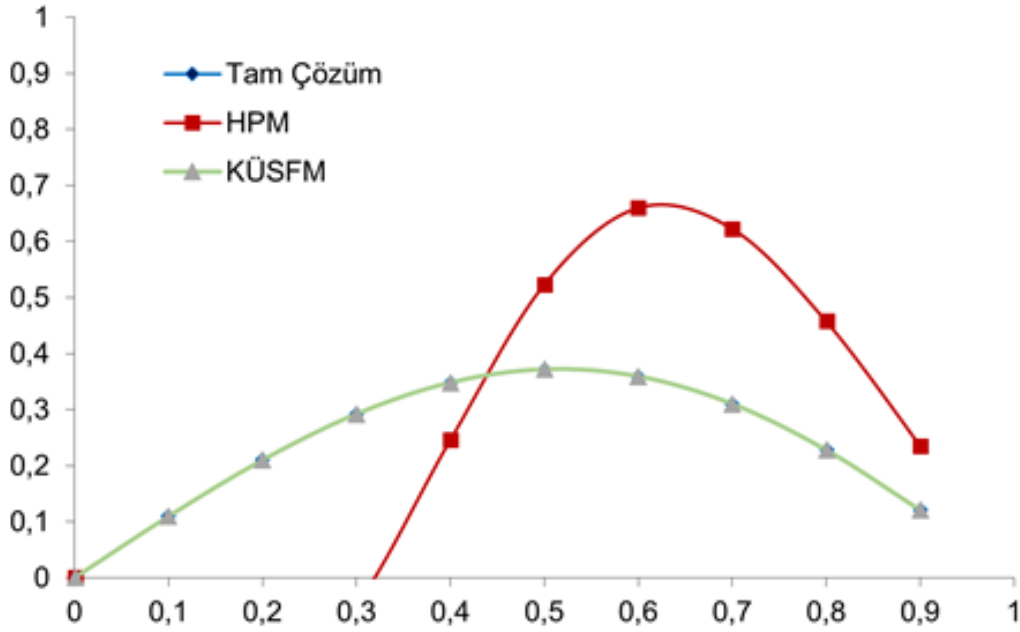


Çizelge 4.1. Burgers denkleminde elde edilen sonuçların karşılaştırılması.

| $t = 0, 1$ |                  |              |                |                                        |                                      |
|------------|------------------|--------------|----------------|----------------------------------------|--------------------------------------|
| <b>x</b>   | <b>Tam Çözüm</b> | <b>KÜSFM</b> | <b>HPM/AAM</b> | <b>Hata</b><br>$ u_{Tam} - u_{KUSFM} $ | <b>Hata</b><br>$ u_{Tam} - u_{HPM} $ |
| 0,1        | 0,109538         | 0,109556     | -0,183497      | 0,000018                               | 0,073959                             |
| 0,2        | 0,209792         | 0,209826     | -0,217694      | 0,000034                               | 0,427486                             |
| 0,3        | 0,291896         | 0,291945     | -0,049824      | 0,000049                               | 0,341720                             |
| 0,4        | 0,347924         | 0,347984     | 0,245908       | 0,00006                                | 0,102016                             |
| 0,5        | 0,371577         | 0,371644     | 0,523228       | 0,000067                               | 0,151651                             |
| 0,6        | 0,359046         | 0,359113     | 0,660008       | 0,000067                               | 0,300962                             |
| 0,7        | 0,309905         | 0,309965     | 0,622535       | 0,00006                                | 0,312630                             |
| 0,8        | 0,227817         | 0,227817     | 0,457545       | 0                                      | 0,229728                             |
| 0,9        | 0,120687         | 0,120687     | 0,235264       | 0                                      | 0,114577                             |



Şekil 4.5.  $t = 0, 1$  anında elde edilen sonuçların grafik üzerinde gösterimi.



Şekil 4.6.  $t = 0, 1$  anında elde edilen sonuçların grafik üzerinde gösterimi.

Şekil 4.6 da tam çözüm ile kapalı üstel sonlu fark metodundan elde edilen sayısal çözümler çok yakın olduğundan, tam çözüm grafiği ile kapalı üstel sonlu fark grafiği çakışmıştır. Şekil 4.5 de tam çözüm ve kapalı üstel sonlu fark çözüm grafikleri ayrı ayrı gösterilmiştir.

Örnek 4.1’de homotopi perturbasyon, Adomian ayrıştırma ve kapalı üstel sonlu fark metotları uygulandığında, kapalı üstel sonlu fark metodunun diğer iki metoda göre daha kararlı olduğu yukarıdaki tablo ve grafiklerden görülmektedir.

## 4.2. Örnek:

$$u_t = u_{xx} + u(1 - u)$$

şeklinde verilen Fisher denklemini ele alalım.

### 4.2.1. Homotopi Perturbasyon Metodu

$$u_t = u_{xx} + u(1 - u)$$

$$u(x, 0) = \frac{1}{4} \left[ 1 - \tanh \left( \frac{x}{2\sqrt{6}} \right) \right]^2$$

başlangıç değer problemini ele alalım. Burada  $L(v) = \frac{\partial v}{\partial t}$  ve  $\Psi = \tanh \left( \frac{x}{2\sqrt{6}} \right)$  olsun.

O halde (3.4) denklemden,

$$H(v, p) = (1 - p)(L(v) - L(u_0)) + p(A(v) - f(r)) = 0$$

$$= (1 - p) \left( \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) + p \left\{ -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v(1 - v) + \frac{\partial v}{\partial t} \right\} = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu ifadenin düzenlenmesiyle,

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} = p \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v(1 - v) - \frac{\partial u_0}{\partial t} \right)$$

ifadesi bulunur. (3.8) denkleminin kullanılmasıyla,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots \right) - \frac{\partial u_0}{\partial t} = p \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} (v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots) + (v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots) \right. \\ \left. (1 - v_0 - pv_1 - p^2v_2 - \dots) - \frac{\partial u_0}{\partial t} \right)$$

eşitliği bulunur ve burada p'nin kuvvetlerinin katsayılarını karşılıklı olarak eşitlersek,

$$P^{(0)} : v_0(x, t) = \frac{1}{4} (1 - \Psi)^2,$$

$$P^{(1)} : v_1(x, t) = 0,20833334t \left( \tanh\left(\frac{\sqrt{6}x}{12}\right)^3 - \tanh\left(\frac{\sqrt{6}x}{12}\right) + \cosh\left(\frac{\sqrt{6}x}{12}\right)^{-2} \right),$$

$$P^{(2)} : v_2(x, t) = t^2 \left( 2,6020852e - 18\Psi^6 - 6,9388939e - 18\Psi^5 + 0,130208 \right. \\ \left. \Psi^4 - 0,0868055\Psi^3 - 0,173611\Psi^2 + 0,0868055\Psi + 0,04340277 \right),$$

$$P^{(3)} : v_3(x, t) = t^3 \left( 1,0842e - 18\Psi^8 + 1,4456e - 19\Psi^7 - 7,2280e - 18\Psi^6 + 0,0723\Psi^5 - \right. \\ \left. 0,03616\Psi^4 - 0,12056\Psi^3 + 0,0482253\Psi^2 + 0,04822\Psi - 0,01205 \right),$$

·  
·  
·

bileşenlerini elde etmiş oluruz.

O halde ,

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots$$

eşitliğinde bulduğumuz bileşenleri yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}
u(x,t) = & \frac{1}{4} \left(1 - \Psi\right)^2 + 0,2083t \left( \tanh\left(\frac{\sqrt{6}x}{12}\right)^3 - \tanh\left(\frac{\sqrt{6}x}{12}\right) + \cosh\left(\frac{\sqrt{6}x}{12}\right)^{-2} \right) + \\
& t^2 \left( 2,6020852e - 18\Psi^6 - 6,9388939e - 18\Psi^5 + 0,13020\Psi^4 - 0,08680\Psi^3 - 0,173611 \right. \\
& \left. \Psi^2 + 0,0868055\Psi + 0,04340277 \right) + t^3 \left( 1,084202e - 18\Psi^8 + 1,44560e - 19\Psi^7 - 7,22801 - \right. \\
& \left. 18\Psi^6 + 0,0723\Psi^5 - 0,03616\Psi^4 - 0,1205\Psi^3 + 0,0482253\Psi^2 + 0,0482253\Psi - \right. \\
& \left. 0,01205632 \right) + \dots
\end{aligned}$$

bulunur.



#### 4.2.2. Adomian Ayırıştırma Metodu

Aynı problemi şimdi Adomian ayırıştırma metodu ile tekrar çözelim.

(3.17) denklemini kullanarak,

$$u_0 = \frac{1}{4}(1 - \Psi)^2,$$

$$u_1 = L_{xx}^{-1}(u_0) - L_{xx}^{-1}[L_{yy}(u_0)] = 0,20833334t \left( \tanh\left(\frac{\sqrt{6}x}{12}\right)^3 - \tanh\left(\frac{\sqrt{6}x}{12}\right) + \cosh\left(\frac{\sqrt{6}x}{12}\right)^{-2} \right)$$

$$u_2 = L_{xx}^{-1}(u_1) - L_{xx}^{-1}[L_{yy}(u_1)] = t^2 \left( 2,6020852e - 18\Psi^6 - 6,9388939e - 18\Psi^5 + 0,130208\Psi^4 - 0,0868055\Psi^3 - 0,173611\Psi^2 + 0,0868055\Psi + 0,04340277 \right)$$

$$u_3 = L_{xx}^{-1}(u_2) - L_{xx}^{-1}[L_{yy}(u_2)] = t^3 \left( 1,0842e - 18\Psi^8 + 1,4456e - 19\Psi^7 - 7,2280e - 18\Psi^6 + 0,0723\Psi^5 - 0,03616\Psi^4 - 0,12056\Psi^3 + 0,0482253\Psi^2 + 0,04822\Psi - 0,01205 \right),$$

⋮

bileşenleri elde edilir. O halde

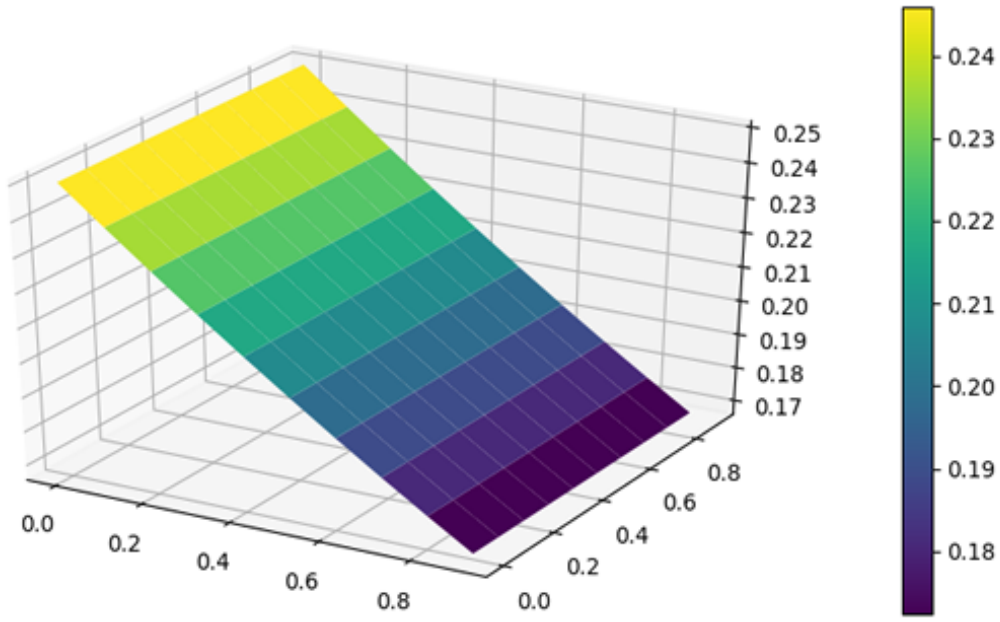
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = u(x, t)$$

eşitliğinde bulduklarımızı yerine yazarsak,

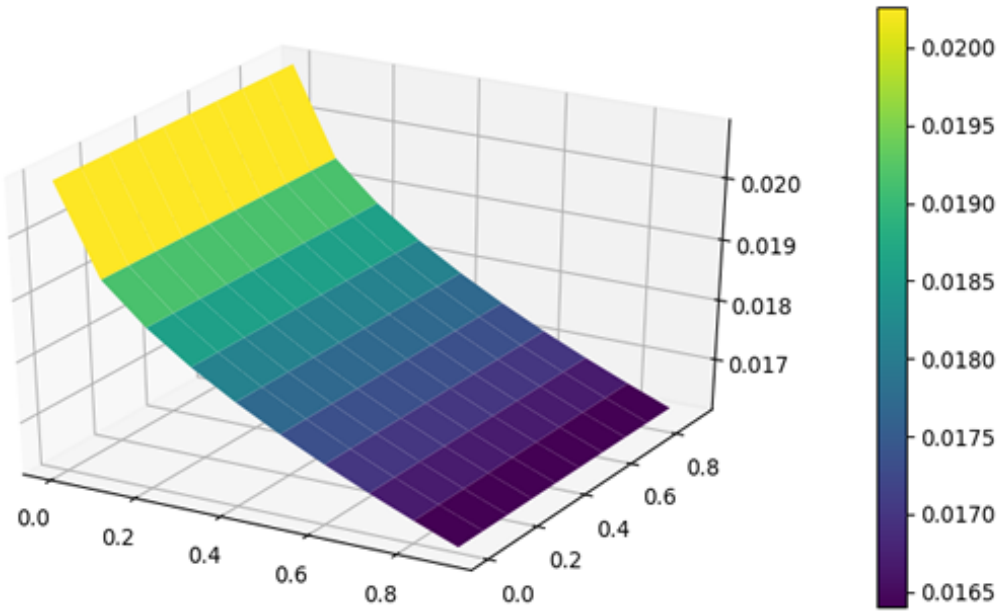
$$\begin{aligned}
u(x,t) = & \frac{1}{4} \left( 1 - \Psi \right)^2 + 0,2083t \left( \tanh \left( \frac{\sqrt{6}x}{12} \right)^3 - \tanh \left( \frac{\sqrt{6}x}{12} \right) + \cosh \left( \frac{\sqrt{6}x}{12} \right)^{-2} \right) + \\
& t^2 \left( 2,6020852e - 18\Psi^6 - 6,9388939e - 18\Psi^5 + 0,13020\Psi^4 - 0,08680\Psi^3 - 0,173611 \right. \\
& \left. \Psi^2 + 0,0868055\Psi + 0,04340277 \right) + t^3 \left( 1,084202e - 18\Psi^8 + 1,44560e - 19\Psi^7 - \right. \\
& \left. 7,22801 - 18\Psi^6 + 0,0723\Psi^5 - 0,03616\Psi^4 - 0,1205\Psi^3 + 0,0482253\Psi^2 + 0,0482253\Psi \right. \\
& \left. - 0,01205632 \right) + \dots
\end{aligned}$$

bulunur.



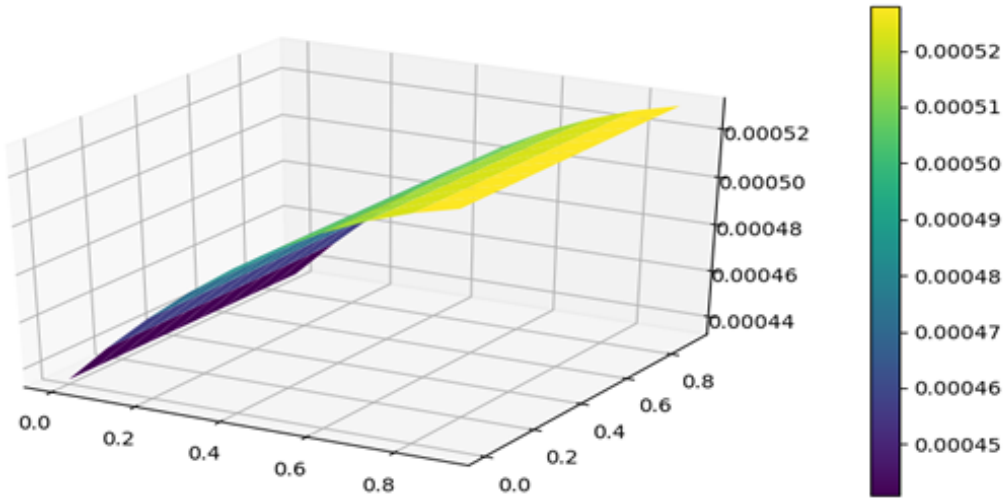


Şekil 4.7. Fisher denkleminin sıfırıncı yaklaşımı olan  $v_0$ 'ın grafiği

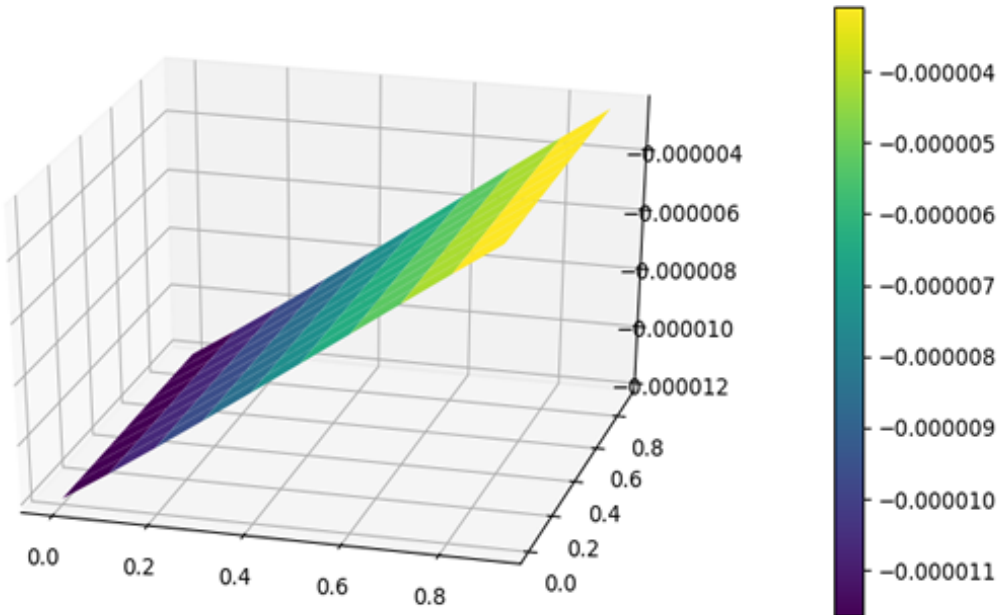


Şekil 4.8. Fisher denkleminin birinci yaklaşımı olan  $v_1$ 'in grafiği





Şekil 4.9. Fisher denkleminin ikinci yaklaşımı olan  $v_2$ 'nin grafiği



Şekil 4.10. Fisher denkleminin üçüncü yaklaşımı olan  $v_3$ 'ün grafiği

### 4.2.3. Kapalı Üstel Sonlu Fark Metodu

Aynı problemi şimdi kapalı üstel sonlu fark metodu ile tekrar çözelim.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \beta u(1-u), \quad 0 \leq x \leq 1, t \geq 0$$

başlangıç koşulu,

$$u(x, 0) = \frac{1}{4} \left[ 1 - \tanh \left( \frac{x}{2\sqrt{6}} \right) \right]^2$$

ve sınır koşulları da,

$$u(0, t) = \frac{1}{4} \left[ 1 - \tanh \left( -\frac{5}{12}t \right) \right]^2$$

ve

$$u(1, t) = \frac{1}{4} \left[ 1 - \tanh \left( -\frac{1}{2\sqrt{6}} - \frac{5}{12}t \right) \right]^2$$

şeklinde verilen problemi ele alalım.  $\beta = 1$  değerinde denklemin tam çözümü,

$$u(x, t) = \frac{1}{4} \left[ 1 - \tanh \left( \frac{1}{2\sqrt{6}} \right) \left( x - \frac{5}{\sqrt{6}t} \right) \right]^2$$

olur.(Bilge & Appadu, 2021)

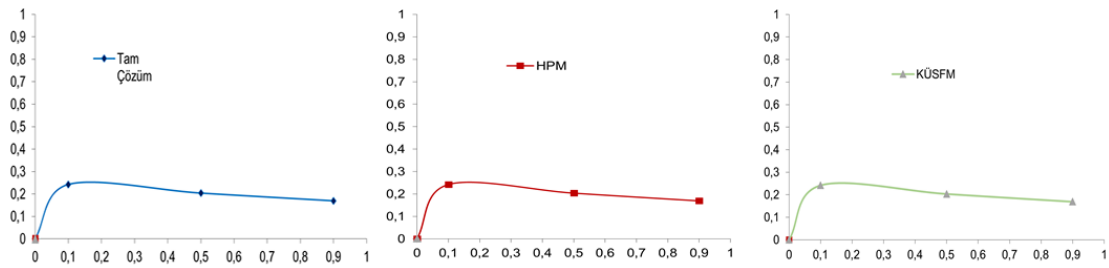
Yaklaşım çözüm ise,

$$U_i^{n+1} = U_i^n \exp \left\{ \frac{k}{U_i^n} \left[ \left( \frac{U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}}{h^2} \right) + \beta U_i^{n+1} (1 - U_i^{n+1}) \right] \right\}$$

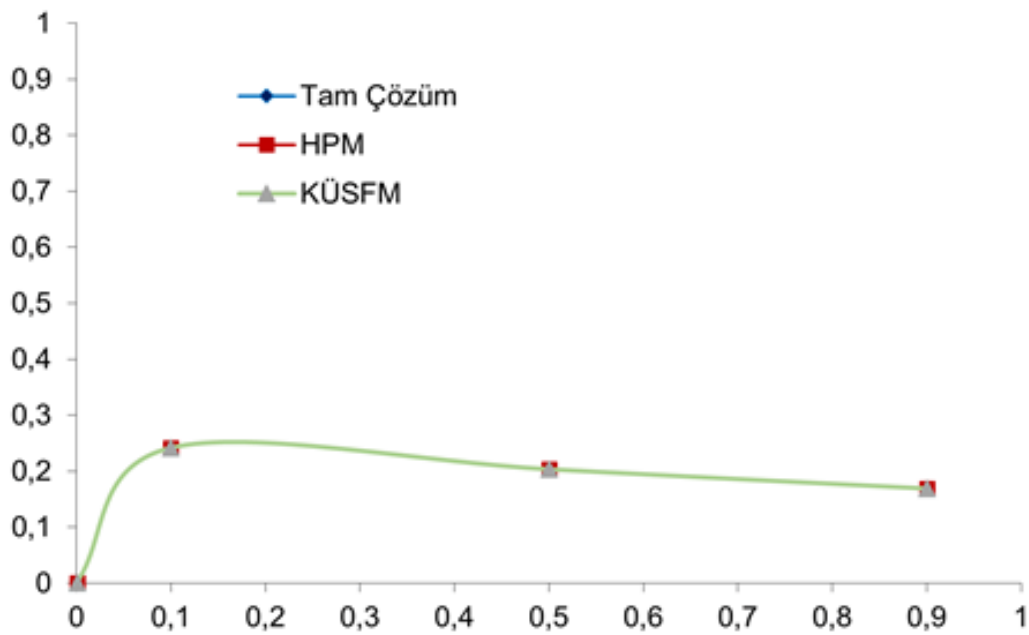
eşitliği kullanılarak bulunabilir.

Çizelge 4.2. Fisher denkleminde elde edilen sonuçların karşılaştırılması.

| <b>t</b> | <b>x</b> | <b>Tam<br/>Çözüm</b> | <b>KÜSFM</b> | <b>HPM/AAM</b> | <b>Hata</b><br>$ u_{Tam} - u_{KUSFM} $ | <b>Hata</b><br>$ u_{Tam} - u_{HPM} $ |
|----------|----------|----------------------|--------------|----------------|----------------------------------------|--------------------------------------|
| 0,01     | 0,1      | 0,24194381           | 0,24194382   | 0,24194381     | 0,00000001                             | 0                                    |
|          | 0,5      | 0,20358872           | 0,20358873   | 0,20358872     | 0,00000001                             | 0                                    |
|          | 0,9      | 0,16906886           | 0,16906887   | 0,16906886     | 0,00000001                             | 0                                    |
| 1        | 0,1      | 0,47385284           | 0,47385288   | 0,47794407     | -0,00000004                            | 0,00409123                           |
|          | 0,5      | 0,42550850           | 0,42550861   | 0,43051548     | -0,00000011                            | 0,00500698                           |
|          | 0,9      | 0,37750606           | 0,37750611   | 0,38288589     | -0,00000005                            | 0,00537983                           |
| 10       | 0,1      | 0,99949942           | 0,99949942   | 4,26300801     | 0                                      | 5,26250743                           |
|          | 0,5      | 0,99941066           | 0,99941066   | 0,30721758     | 0                                      | 0,69219308                           |
|          | 0,9      | 0,99930617           | 0,99930617   | 4,67098967     | 0                                      | -3,67168350                          |

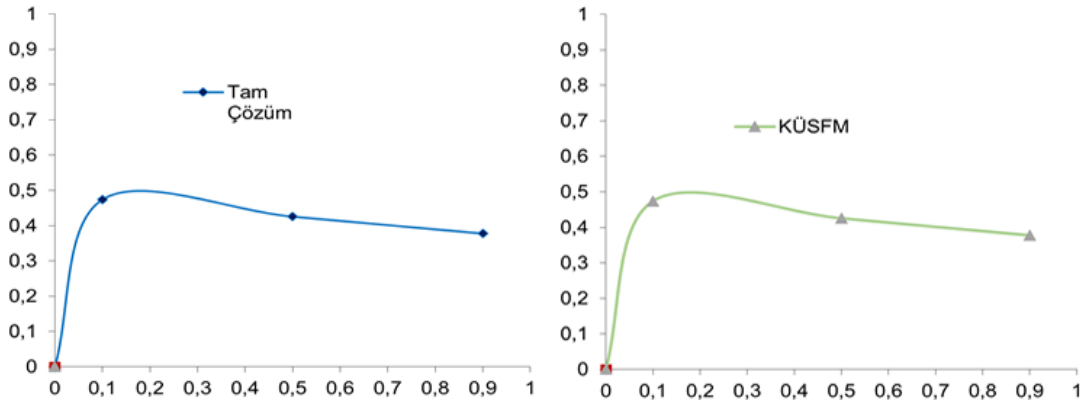


Şekil 4.11.  $t = 0,01$  anında elde edilen sonuçların grafik üzerinde gösterimi.

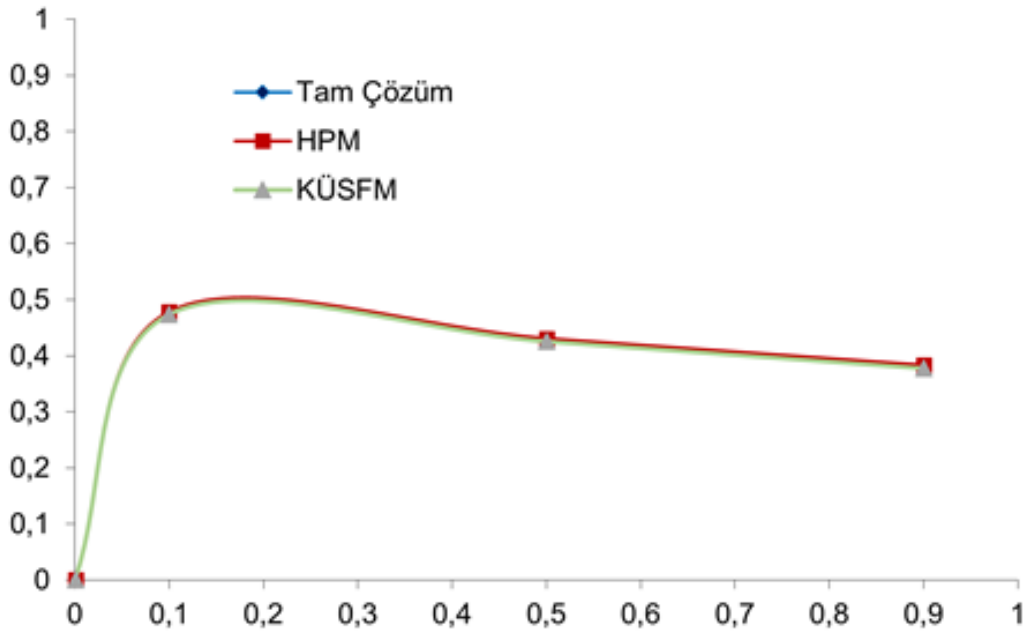


Şekil 4.12.  $t = 0,01$  anında elde edilen sonuçların grafik üzerinde gösterimi.

Şekil 4.12 de tam çözüm ve diğer metotlardan elde edilen sayısal çözümler çok yakın olduğundan, tam çözüm grafiği ile diğer metotların grafikleri çakışmıştır. Şekil 4.11 de tam çözüm ve diğer metotlardan elde edilen çözüm grafikleri ayrı ayrı gösterilmiştir.

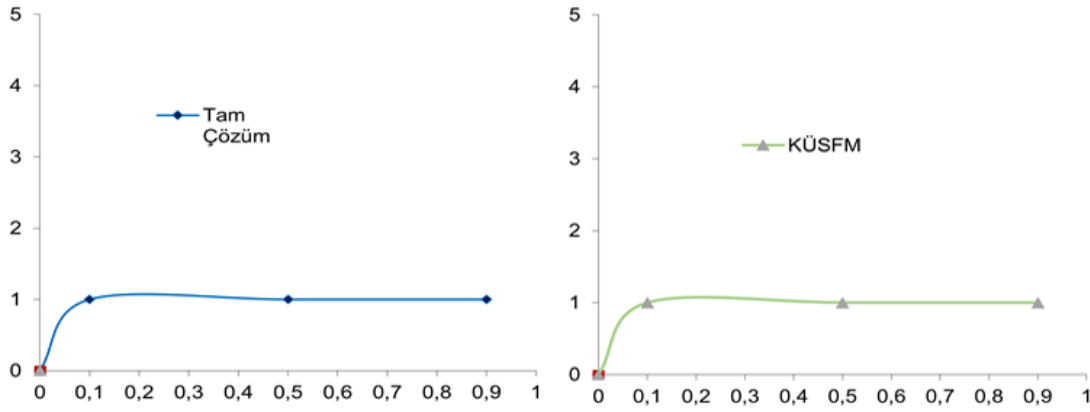


Şekil 4.13.  $t = 1$  anında elde edilen sonuçların grafik üzerinde gösterimi.

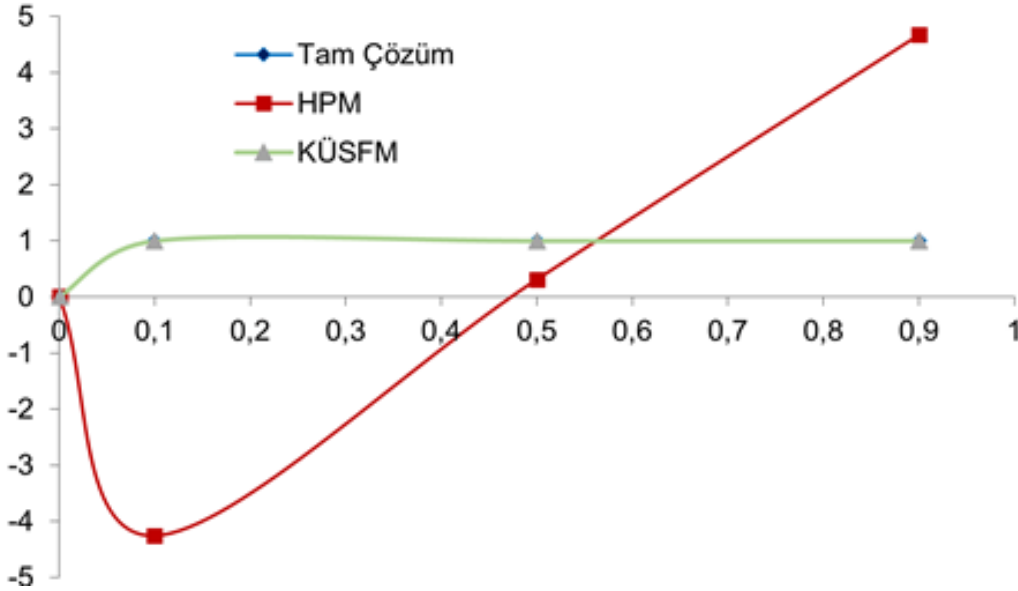


Şekil 4.14.  $t = 1$  anında elde edilen sonuçların grafik üzerinde gösterimi.

Şekil 4.14 de tam çözüm ile kapalı üstel sonlu fark metodundan elde edilen sayısal çözümler çok yakın olduğundan, tam çözüm grafiği ile kapalı üstel sonlu fark grafiği çakışmıştır. Şekil 4.13 de tam çözüm ve kapalı üstel sonlu fark çözüm grafikleri ayrı ayrı gösterilmiştir.



Şekil 4.15.  $t = 1$  anında elde edilen sonuçların grafik üzerinde gösterimi.



Şekil 4.16.  $t = 10$  anında elde edilen sonuçların grafik üzerinde gösterimi.

Şekil 4.16 da tam çözüm ile kapalı üstel sonlu fark metodundan elde edilen sayısal çözümler çok yakın olduğundan, tam çözüm grafiği ile kapalı üstel sonlu fark grafiği çakışmıştır. Şekil 4.15 de tam çözüm ve kapalı üstel sonlu fark çözüm grafikleri ayrı ayrı gösterilmiştir.

Örnek 4.2’de homotopi perturbasyon, Adomian ayrıştırma ve kapalı üstel sonlu fark metotları uygulandığında,  $t = 0,01$  anında homotopi perturbasyon ve Adomian ayrıştırma metodlarının kapalı üstel sonlu fark metodundan daha kararlı olduğu,  $t = 1$  ve  $t = 10$  anında ise kapalı üstel sonlu fark metodunun diğer iki metoda göre daha kararlı olduğu yukarıdaki tablo ve grafiklerden görülmektedir.

### 4.3. Örnek:

$$u_t = u_{xx} + u(1 - u)$$

şeklinde verilen Fisher denklemini ele alalım.

#### 4.3.1. Homotopi Perturbasyon Metodu

$$u_t = u_{xx} + u(1 - u)$$

$$u(x, 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \left[ \frac{-\alpha x}{4} \right]$$

başlangıç değer problemini ele alalım.

Burada  $L(v) = \frac{\partial v}{\partial t}$  ve  $\Psi = \tanh(0, 25\alpha x)$  olsun.

O halde (3.4) denkleminde,

$$H(v, p) = (1 - p)(L(v) - L(u_0)) + p(A(v) - f(r)) = 0$$

$$= (1 - p) \left( \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) + p \left\{ -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v(1 - v) + \frac{\partial v}{\partial t} \right\} = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu ifadenin düzenlenmesiyle,

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} = p \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v(1 - v) - \frac{\partial u_0}{\partial t} \right)$$

ifadesi bulunur. (3.8) denkleminin kullanılmasıyla,

eşitliği bulunur ve burada p'nin kuvvetlerinin katsayılarını karşılıklı olarak eşitleyerek,

$$P^{(0)} : v_0(x, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \left[ \frac{-\alpha x}{4} \right],$$

$$P^{(1)} : v_1(x, t) = t(-0,0625\alpha^2\Psi^3 + 0,0625\alpha^2\Psi + 0,25/\cosh(0,25\alpha x)^2),$$

$$P^{(2)} : v_2(x, t) = -t^2(0,0234375\alpha^4\Psi^5 - 0,0390625\alpha^4\Psi^3 + 0,015625\alpha^4\Psi - 0,03125\alpha^2(1 - \Psi)\Psi^3 + 0,03125\alpha^2(1 - \Psi)\Psi + 0,046875\alpha^2\Psi^4 + 0,03125\alpha^2\Psi^3 - 0,0625\alpha^2\Psi^2 - 0,03125\alpha^2\Psi + 0,015625\alpha^2 + 0,125(1 - \Psi)^2\Psi + 0,25\Psi^2 - 0,25\Psi),$$

$$P^{(3)} : v_3(x, t) = -(t^3(\alpha^2(\Psi^2 - 1)(0,02929\alpha^4(\Psi^2 - 1)\Psi^3 - 0,014648\alpha^4(\Psi^2 - 1)\Psi + 0,014648\alpha^4\Psi^5 - 0,014648\alpha^4\Psi^3 + 0,00195\alpha^4\Psi - 0,01171\alpha^2(1 - \Psi)(\Psi^2 - 1)\Psi - 0,0117\alpha^2(1 - \Psi)\Psi^3 + 0,0039\alpha^2(1 - \Psi)\Psi + 0,046875\alpha^2(\Psi^2 - 1)\tanh(0,25\alpha x)^2 + 0,0117\alpha^2(\Psi^2 - 1)\Psi - 0,0117\alpha^2(\Psi^2 - 1) + 0,0273\alpha^2\Psi^4 + 0,0117\alpha^2\Psi^3 - 0,0195\alpha^2\Psi^2 - 0,0039\alpha^2\Psi - 0,03125(1 - \Psi)(\Psi^2 - 1) - 0,03125(1 - \Psi)\Psi^2 + 0,015625(1 - \Psi)^2\Psi + 0,015625(\Psi^2 - 1)\Psi + 0,09375\Psi^2 - 0,03125\Psi - 0,03125) - 0,5(\Psi - 1)(0,02343\alpha^4\Psi^5 - 0,0390625\alpha^4\Psi^3 + 0,015625\alpha^4\Psi - 0,03125\alpha^2(1 - \Psi)\Psi^3 + 0,03125\alpha^2(1 - \Psi)\Psi + 0,046875\alpha^2\Psi^4 + 0,03125\alpha^2\Psi^3 - 0,0625\alpha^2\Psi^2 - 0,03125\alpha^2\Psi + 0,015625\alpha^2 + 0,125(1 - \Psi)^2\Psi + 0,25\Psi^2 - 0,25\Psi) + 0,5(\Psi + 1)(0,02343\alpha^4\Psi^5 - 0,03906\alpha^4\Psi^3 + 0,015625\alpha^4\Psi - 0,03125\alpha^2(1 - \Psi)\Psi^3 + 0,03125\alpha^2(1 - \Psi)\Psi + 0,046875\alpha^2\Psi^4 + 0,03125\alpha^2\Psi^3 - 0,0625\alpha^2\Psi^2 - 0,03125\alpha^2\Psi + 0,015625\alpha^2 + 0,125(1 - \Psi)^2\Psi + 0,25\Psi^2 - 0,25\Psi)) (0,0625\alpha^2(\Psi^2 - 1)\Psi + 0,25(1 - \Psi)^2 + 0,5\Psi - 0,5) - 0,9999(-t(0,0625\alpha^2(\Psi^2 - 1)\Psi + 0,25(1 - \Psi)^2 + 0,5\Psi - 0,5))^3)/(0,1875\alpha^2(\Psi^2 - 1)\Psi + 0,75(1 - \Psi)^2 + 1,5\Psi - 1,5),$$

.

.

.

bileşenlerini elde etmiş oluruz.

O halde ,

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots$$

eşitliğinde bulduğumuz bileşenleri yerine yazarsak,



$$\begin{aligned}
u(x, t) = & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \left( \frac{-\alpha x}{4} \right) + t(-0,0625\alpha^2\Psi^3 + 0,0625\alpha^2\Psi + 0,25/\cosh(0,25\alpha x)^2) \\
& - t^2(0,02343\alpha^4\Psi^5 - 0,0390625\alpha^4\Psi^3 + 0,015625\alpha^4\Psi - 0,03125\alpha^2(1-\Psi)\Psi^3 + \\
& 0,03125\alpha^2(1-\Psi)\Psi + 0,046875\alpha^2\Psi^4 + 0,03125\alpha^2\Psi^3 - 0,0625\alpha^2\Psi^2 - 0,03125\alpha^2\Psi + \\
& 0,015625\alpha^2 + 0,125(1-\Psi)^2\Psi + 0,25\Psi^2 - 0,25\Psi) + (t^3(\alpha^2(\Psi^2-1)(0,02929\alpha^4(\Psi^2-1) \\
& \Psi^3 - 0,014648\alpha^4(\Psi^2-1)\Psi + 0,014648\alpha^4\Psi^5 - 0,01464\alpha^4\Psi^3 + 0,00195\alpha^4\Psi - 0,01171 \\
& \alpha^2(1-\Psi)(\Psi^2-1)\Psi - 0,0117\alpha^2(1-\Psi)\Psi^3 + 0,0039\alpha^2(1-\Psi)\Psi + 0,046875\alpha^2(\Psi^2-1) \\
& \Psi^2 + 0,0117\alpha^2(\Psi^2-1)\Psi - 0,0117\alpha^2(\Psi^2-1) + 0,0273\alpha^2\Psi^4 + 0,0117\alpha^2\Psi^3 - 0,0195 \\
& \alpha^2\Psi^2 - 0,0039\alpha^2\Psi - 0,03125(1-\Psi)(\Psi^2-1) - 0,03125(1-\Psi)\Psi^2 + 0,015625(1-\Psi)^2\Psi + \\
& 0,015625(\Psi^2-1)\Psi + 0,09375\Psi^2 - 0,03125\Psi - 0,03125) - 0,5(\Psi-1)(0,0234375\alpha^4\Psi^5 - \\
& 0,0390625\alpha^4\Psi^3 + 0,015625\alpha^4\Psi - 0,03125\alpha^2(1-\Psi)\Psi^3 + 0,03125\alpha^2(1-\Psi)\Psi + 0,046875 \\
& \alpha^2\Psi^4 + 0,03125\alpha^2\Psi^3 - 0,0625\alpha^2\Psi^2 - 0,03125\alpha^2\Psi + 0,015625\alpha^2 + 0,125(1-\Psi)^2\Psi + \\
& 0,25\Psi^2 - 0,25\Psi) + 0,5(\Psi+1)(0,02343\alpha^4\Psi^5 - 0,03906\alpha^4\Psi^3 + 0,015625\alpha^4\Psi - 0,03125\alpha^2 \\
& (1-\Psi)\Psi^3 + 0,03125\alpha^2(1-\Psi)\Psi + 0,046875\alpha^2\Psi^4 + 0,03125\alpha^2\Psi^3 - 0,0625\alpha^2\Psi^2 - \\
& 0,03125\alpha^2\Psi + 0,015625\alpha^2 + 0,125(1-\Psi)^2\Psi + 0,25\Psi^2 - 0,25\Psi))(0,0625\alpha^2(\Psi^2-1)\Psi + \\
& 0,25(1-\Psi)^2 + 0,5\Psi - 0,5) - 0,9999(-t(0,0625\alpha^2(\Psi^2-1)\Psi + 0,25(1-\Psi)^2 + 0,5\Psi - \\
& 0,5))^3)/(0,1875\alpha^2(\Psi^2-1)\Psi + 0,75(1-\Psi)^2 + 1,5\Psi - 1,5) + \dots
\end{aligned}$$

bulunur.

#### 4.3.2. Adomian Ayrıştırma Metodu

Aynı problemi şimdi Adomian ayrıştırma metodu ile tekrar çözelim.

(3.17) denklemi kullanılarak,

$$u_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \left[ \frac{-\alpha x}{4} \right],$$

$$u_1 = L_{xx}^{-1}(u_0) - L_{xx}^{-1}[L_{yy}(u_0)] = t(-0,0625\alpha^2\Psi^3 + 0,0625\alpha^2\Psi + 0,25/\cosh(0,25\alpha x)^2)$$

$$\begin{aligned}
u_2 = & L_{xx}^{-1}(u_1) - L_{xx}^{-1}[L_{yy}(u_1)] = -t^2(0,0234375\alpha^4\Psi^5 - 0,0390625\alpha^4\Psi^3 + 0,015625 \\
& \alpha^4\Psi - 0,03125\alpha^2(1-\Psi)\Psi^3 + 0,03125\alpha^2(1-\Psi)\Psi + 0,046875\alpha^2\Psi^4 + 0,03125\alpha^2 \\
& \Psi^3 - 0,0625\alpha^2\Psi^2 - 0,03125\alpha^2\Psi + 0,015625\alpha^2 + 0,125(1-\Psi)^2\Psi + 0,25\Psi^2 - 0,25\Psi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_3 = L_{xx}^{-1}(u_2) - L_{xx}^{-1}[L_{yy}(u_2)] = & -(t^3(\alpha^2(\Psi^2 - 1)(0,02929\alpha^4(\Psi^2 - 1)\Psi^3 - 0,014648\alpha^4 \\
& (\Psi^2 - 1)\Psi + 0,014648\alpha^4\Psi^5 - 0,014648\alpha^4\Psi^3 + 0,00195\alpha^4\Psi - 0,01171\alpha^2(1 - \Psi) \\
& (\Psi^2 - 1)\Psi - 0,0117\alpha^2(1 - \Psi)\Psi^3 + 0,0039\alpha^2(1 - \Psi)\Psi + 0,046875\alpha^2(\Psi^2 - 1)\Psi^2 + \\
& 0,0117\alpha^2(\Psi^2 - 1)\Psi - 0,0117\alpha^2(\Psi^2 - 1) + 0,0273\alpha^2\Psi^4 + 0,0117\alpha^2\Psi^3 - 0,0195\alpha^2 \\
& \Psi^2 - 0,0039\alpha^2\Psi - 0,03125(1 - \Psi)(\Psi^2 - 1) - 0,03125(1 - \Psi)\Psi^2 + 0,015625(1 - \Psi)^2\Psi + \\
& 0,015625(\Psi^2 - 1)\Psi + 0,09375\Psi^2 - 0,03125\Psi - 0,03125) - 0,5(\Psi - 1)(0,02343\alpha^4 \\
& \Psi^5 - 0,0390625\alpha^4\Psi^3 + 0,015625\alpha^4\Psi - 0,03125\alpha^2(1 - \Psi)\Psi^3 + 0,03125\alpha^2(1 - \Psi)\Psi + \\
& 0,046875\alpha^2\Psi^4 + 0,03125\alpha^2\Psi^3 - 0,0625\alpha^2\Psi^2 - 0,03125\alpha^2\Psi + 0,015625\alpha^2 + 0,125(1 - \\
& \Psi)^2\Psi + 0,25\Psi^2 - 0,25\Psi) + 0,5(\Psi + 1)(0,02343\alpha^4\Psi^5 - 0,03906\alpha^4\Psi^3 + 0,015625\alpha^4\Psi - \\
& 0,03125\alpha^2(1 - \Psi)\Psi^3 + 0,03125\alpha^2(1 - \Psi)\Psi + 0,046875\alpha^2\Psi^4 + 0,03125\alpha^2\Psi^3 - \\
& 0,0625\alpha^2\Psi^2 - 0,03125\alpha^2\Psi + 0,015625\alpha^2 + 0,125(1 - \tanh(0,25\alpha x))^2\Psi + 0,25\Psi^2 \\
& - 0,25\Psi)(0,0625\alpha^2(\Psi^2 - 1)\Psi + 0,25(1 - \Psi)^2 + 0,5\Psi - 0,5) - 0,9999(-t(0,0625\alpha^2 \\
& (\Psi^2 - 1)\Psi + 0,25(1 - \Psi)^2 + 0,5\Psi - 0,5))^3)/(0,1875\alpha^2(\Psi^2 - 1)\Psi + 0,75(1 - \Psi)^2 + \\
& 1,5\tanh(0,25\alpha x) - 1,5),
\end{aligned}$$

⋮

bileşenleri elde edilir.

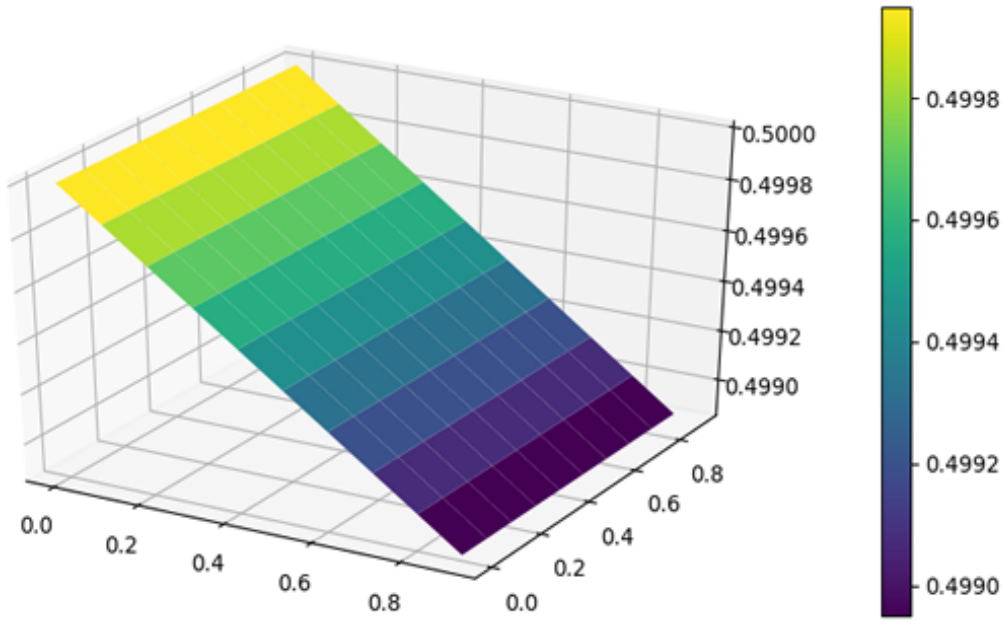
O halde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = u(x, t)$$

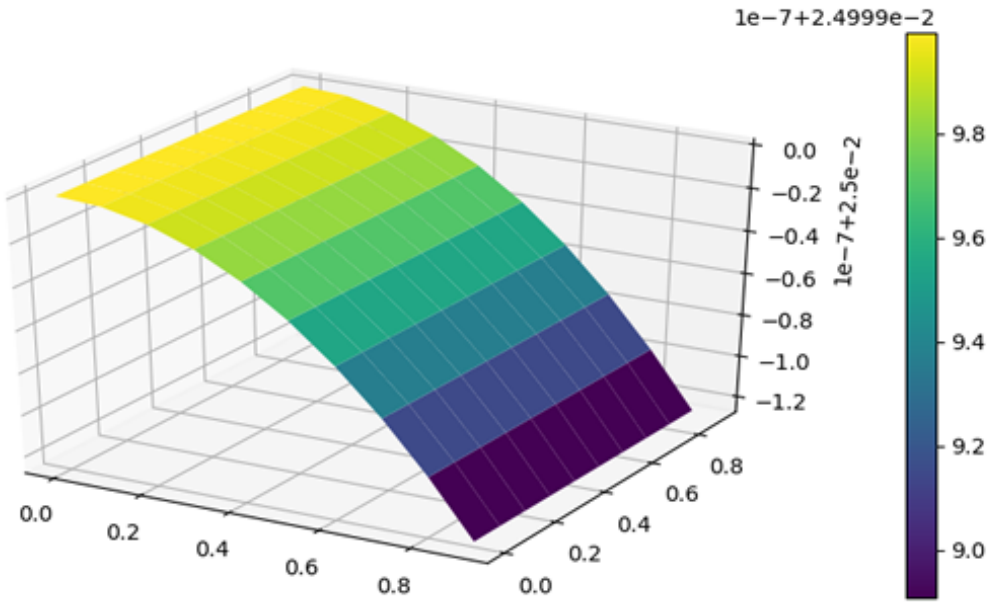
eşitliğinde bulduklarımızı yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \left( \frac{-\alpha x}{4} \right) + t(-0,0625\alpha^2\Psi^3 + 0,0625\alpha^2\Psi + 0,25/\cosh(0,25\alpha x)^2) \\
& - t^2(0,02343\alpha^4\Psi^5 - 0,0390625\alpha^4\Psi^3 + 0,015625\alpha^4\Psi - 0,03125\alpha^2(1-\Psi)\Psi^3 + \\
& 0,03125\alpha^2(1-\Psi)\Psi + 0,046875\alpha^2\Psi^4 + 0,03125\alpha^2\Psi^3 - 0,0625\alpha^2\Psi^2 - 0,03125\alpha^2\Psi \\
& + 0,015625\alpha^2 + 0,125(1-\Psi)^2\Psi + 0,25\Psi^2 - 0,25\Psi) + (t^3(\alpha^2(\Psi^2-1)(0,02929\alpha^4 \\
& (\Psi^2-1)\Psi^3 - 0,014648\alpha^4(\Psi^2-1)\Psi + 0,014648\alpha^4\Psi^5 - 0,01464\alpha^4\Psi^3 + 0,00195\alpha^4\Psi - \\
& 0,01171\alpha^2(1-\Psi)(\Psi^2-1)\Psi - 0,0117\alpha^2(1-\Psi)\Psi^3 + 0,0039\alpha^2(1-\Psi)\Psi + 0,046875\alpha^2 \\
& (\Psi^2-1)\Psi^2 + 0,0117\alpha^2(\Psi^2-1)\Psi - 0,0117\alpha^2(\Psi^2-1) + 0,0273\alpha^2\Psi^4 + 0,0117\alpha^2\Psi^3 - \\
& 0,0195\alpha^2\Psi^2 - 0,0039\alpha^2\Psi - 0,03125(1-\Psi)(\Psi^2-1) - 0,03125(1-\Psi)\Psi^2 + 0,015625(1-\Psi) \\
& \Psi^2\Psi + 0,015625(\Psi^2-1)\Psi + 0,09375\Psi^2 - 0,03125\Psi - 0,03125) - 0,5(\Psi-1) \\
& (0,02343\alpha^4\Psi^5 - 0,0390625\alpha^4\Psi^3 + 0,015625\alpha^4\Psi - 0,03125\alpha^2(1-\Psi)\Psi^3 + 0,03125\alpha^2 \\
& (1-\Psi)\Psi + 0,046875\alpha^2\Psi^4 + 0,03125\alpha^2\Psi^3 - 0,0625\alpha^2\Psi^2 - 0,03125\alpha^2\Psi + 0,015625\alpha^2 + \\
& 0,125(1-\Psi)^2\Psi + 0,25\Psi^2 - 0,25\Psi) + 0,5(\Psi+1)(0,02343\alpha^4\Psi^5 - 0,03906\alpha^4\Psi^3 + \\
& 0,015625\alpha^4\Psi - 0,03125\alpha^2(1-\Psi)\Psi^3 + 0,03125\alpha^2(1-\Psi)\Psi + 0,046875\alpha^2\Psi^4 + \\
& 0,03125\alpha^2\Psi^3 - 0,0625\alpha^2\Psi^2 - 0,03125\alpha^2\Psi + 0,015625\alpha^2 + 0,125(1-\Psi)^2\Psi + 0,25\Psi^2 - \\
& 0,25\Psi))(0,0625\alpha^2(\Psi^2-1)\Psi + 0,25(1-\Psi)^2 + 0,5\Psi - 0,5) - 0,9999(-t(0,0625\alpha^2(\Psi^2-1) \\
& \Psi + 0,25(1-\Psi)^2 + 0,5\Psi - 0,5))^3)/(0,1875\alpha^2(\Psi^2-1)\Psi + 0,75(1-\Psi)^2 + 1,5\Psi - 1,5) + \\
& \dots
\end{aligned}$$

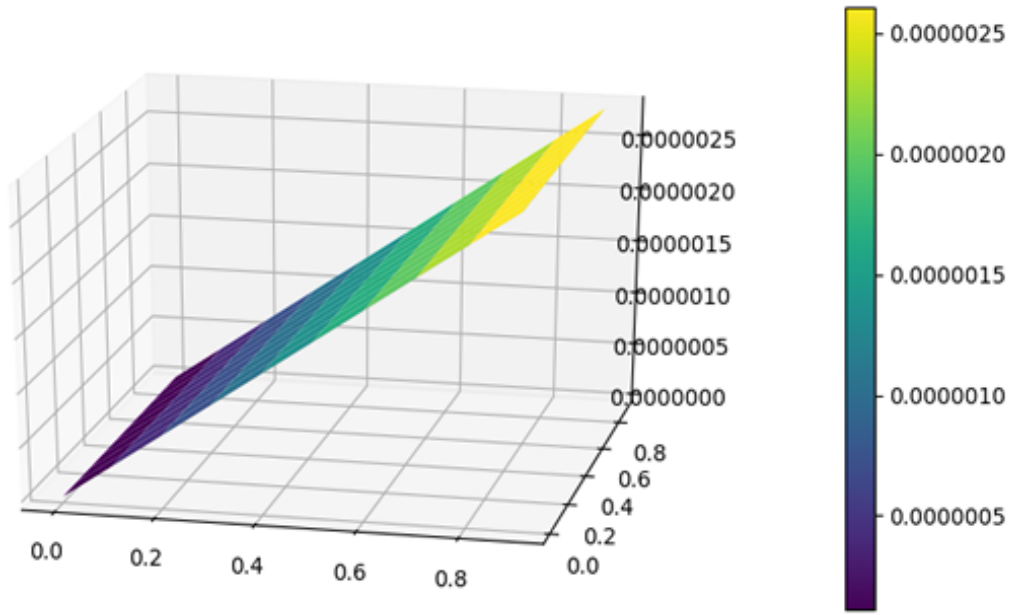
bulunur.



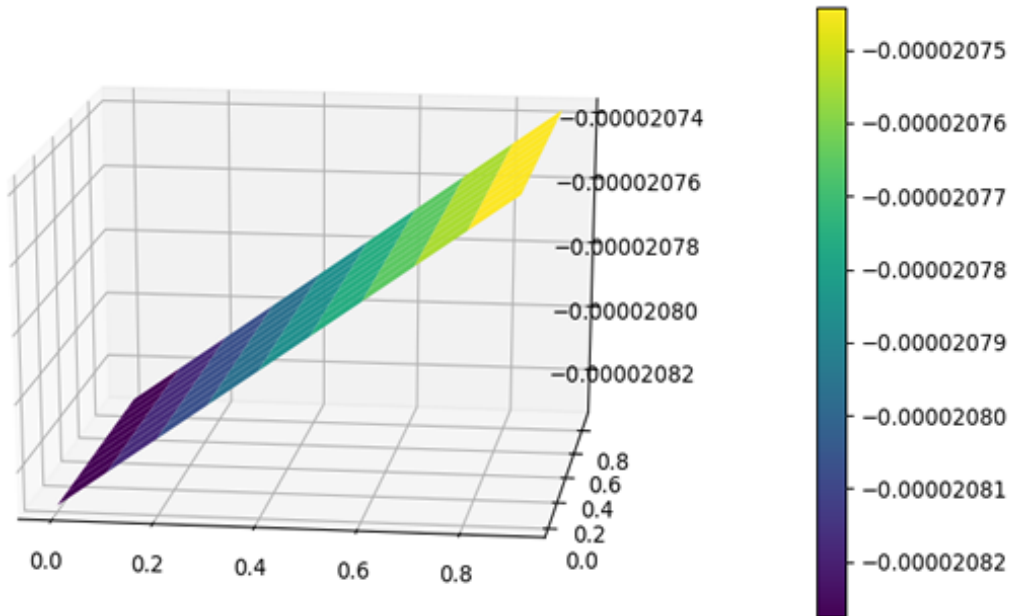
Şekil 4.17. Fisher denkleminin sıfırıncı yaklaşımı olan  $v_0$ 'ın grafiği



Şekil 4.18. Fisher denkleminin birinci yaklaşımı olan  $v_1$ 'in grafiği



Şekil 4.19. Fisher denkleminin ikinci yaklaşımı olan  $v_2$ 'nin grafiği



Şekil 4.20. Fisher denkleminin üçüncü yaklaşımı olan  $v_3$ 'ün grafiği

### 4.3.3. Kapalı Üstel Sonlu Fark Metodu

Aynı problemi şimdi Kapalı Üstel Sonlu Fark Metodu ile tekrar çözelim.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \beta u(1-u), \quad 0 \leq x \leq 1, t \geq 0$$

başlangıç koşulu,

$$u(x, 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \left[ \frac{-\alpha x}{4} \right]$$

ve sınır koşulları da,

$$u(0, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \left[ \frac{\alpha^2 + 2\beta}{8} t \right]$$

ve

$$u(1, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \left[ \frac{\alpha^2 + 2\beta}{8} t - \frac{-\alpha}{4} \right]$$

şeklinde verilen problemi ele alalım. Bu denklemin tam çözümü

$$u(x, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \left[ \frac{-\alpha}{4} \left( x - \left( \frac{\alpha^2 + 2\beta}{2\alpha} \right) t \right) \right]$$

olur.(Bilge & Appadu, 2021)

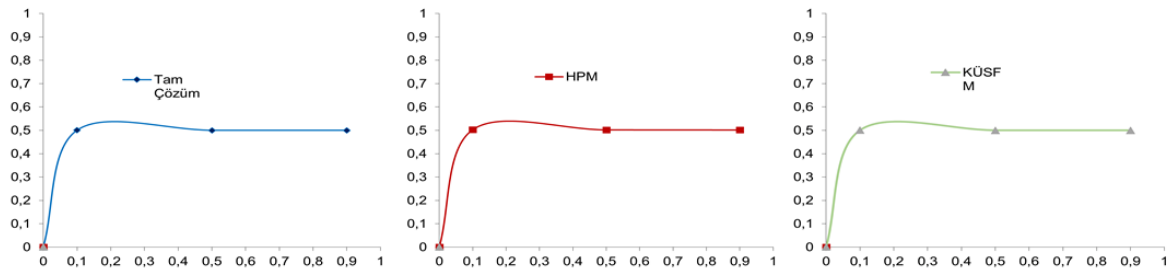
Yaklaşık çözümü de ;

$$U_i^{n+1} = U_i^n \exp \left\{ \frac{k}{U_i^n} \left[ \left( \frac{U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}}{h^2} \right) + \beta U_i^{n+1} (1 - U_i^{n+1}) \right] \right\}$$

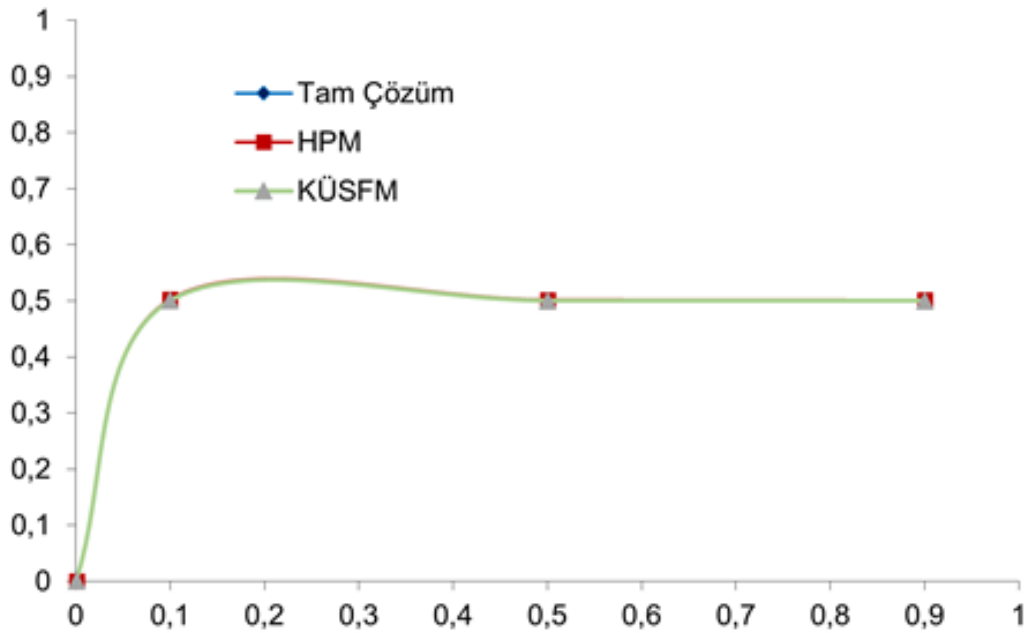
eşitliğinden elde edilebilir.

Çizelge 4.3. Fisher denkleminde elde edilen sonuçların karşılaştırılması.

| $\alpha = \beta = 0,01$ |          |                      |              |                |                                        |                                      |
|-------------------------|----------|----------------------|--------------|----------------|----------------------------------------|--------------------------------------|
| <b>t</b>                | <b>x</b> | <b>Tam<br/>Çözüm</b> | <b>KÜSFM</b> | <b>HPM/AAM</b> | <b>Hata</b><br>$ u_{Tam} - u_{KUSFM} $ | <b>Hata</b><br>$ u_{Tam} - u_{HPM} $ |
| 0,01                    | 0,1      | 0,499990             | 0,499990     | 0,50237498     | 0                                      | 0,00238498                           |
|                         | 0,5      | 0,499940             | 0,499940     | 0,50187499     | 0                                      | 0,00193499                           |
|                         | 0,9      | 0,499890             | 0,499890     | 0,50137500     | 0                                      | 0,00148500                           |
| 1                       | 0,1      | 0,500238             | 0,500238     | 0,72907134     | 0                                      | 0,22883334                           |
|                         | 0,5      | 0,500188             | 0,500188     | 0,72869610     | 0                                      | 0,22850810                           |
|                         | 0,9      | 0,500138             | 0,500138     | 0,72832052     | 0                                      | 0,22818252                           |



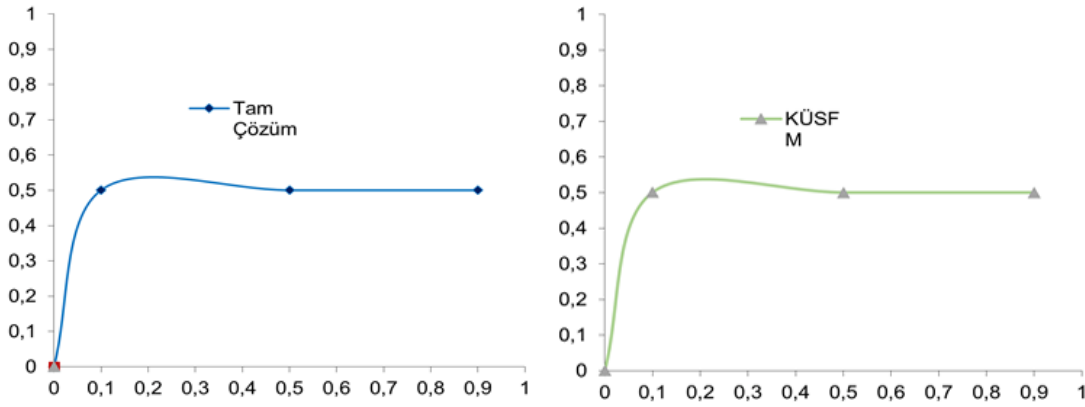
Şekil 4.21.  $t = 0,1$  anında elde edilen sonuçların grafik üzerinde gösterimi.



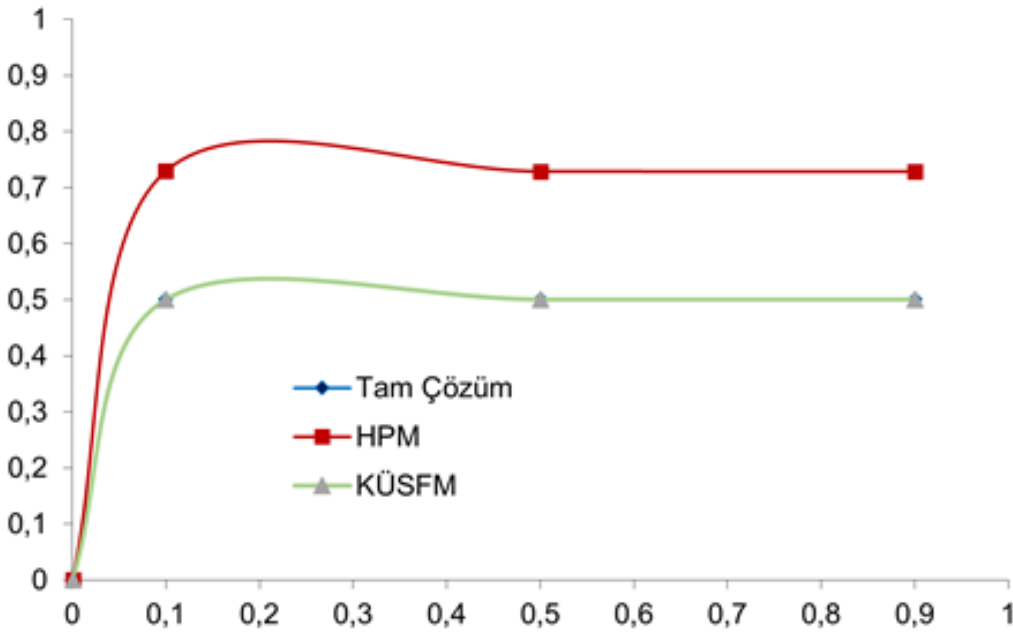
Şekil 4.22.  $t = 0,01$  anında elde edilen sonuçların grafik üzerinde gösterimi.

Şekil 4.22 de tam çözüm ve diğer metotlardan elde edilen sayısal çözümler çok yakın olduğundan, tam çözüm grafiği ile diğer metotların grafikleri çakışmıştır. Şekil 4.21 de tam çözüm ve diğer metotlardan elde edilen çözüm grafikleri ayrı ayrı gösterilmiştir.





Şekil 4.23.  $t = 1$  anında elde edilen sonuçların grafik üzerinde gösterimi.



Şekil 4.24.  $t = 1$  anında elde edilen sonuçların grafik üzerinde gösterimi.

Şekil 4.24 de tam çözüm ile kapalı üstel sonlu fark metodundan elde edilen sayısal çözümler çok yakın olduğundan, tam çözüm grafiği ile kapalı üstel sonlu fark grafiği çakışmıştır. Şekil 4.23 de tam çözüm ve kapalı üstel sonlu fark çözüm grafikleri ayrı ayrı gösterilmiştir.

Örnek 4.3’de homotopi perturbasyon, Adomian ayrıştırma ve kapalı üstel sonlu fark metotları uygulandığında, kapalı üstel sonlu fark metodunun diğer iki metoda göre daha kararlı olduğu yukarıdaki tablo ve grafiklerden görülmektedir.

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler temel olarak ikiye ayrılır. Bu denklemler integrallenebilen ve integrallenemeyen kısmi diferansiyel denklemlerdir. İntegrellenebilen denklemler, sonsuz sayıda tam çözüme sahiptir. Bunlar arasında en iyi bilinen denklemler, Korteweg - de Vries denklemleri, Sine-Gordon denklemleri, Kawahara tipi denklemler, lineer olmayan Schrödinger denklemleri, Boussinesq denklemleri ve liste diğer integrallenebilir denklemlerle genişletilebilir. Bazı tam çözümlü veya tam çözümsüz lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler, integrallenemeyen kısmi diferansiyel denklem sınıfında kabul edilir. Burger-Huxley denklemleri, Ginzburg-Landau denklemleri, ve çözümlerini yaptığımız Fisher ve Burgers denklemleri de integrallenemeyen kısmi diferansiyel denklemlerin en iyi bilinen örnekleridir.

Bu çalışmada, bazı kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri incelenmiştir. Bunun için öncelikle ele aldığımız, Burgers ve Fisher denklemleri uygun başlangıç ve sınır koşullarıyla birlikte Homotopi perturbasyon, Adomian ayrıştırma ve Kapalı üstel sonlu fark metotları ile sayısal olarak çözümlenip elde edilen sayısal sonuçlar tablo halinde karşılaştırılmış ve grafik üzerinde gösterilmiştir. Bu örnekler baz alındığında Kapalı üstel sonlu fark metodunun Homotopi perturbasyon ve Adomian ayrıştırma metoduna göre daha kararlı olduğu görülmüştür. Homotopi perturbasyon ve Adomian ayrıştırma metodunun da denklem çözümlerinde etkili yöntemler oldukları iyi bilinmektedir. Benzer çalışmalar diğer kısmi diferansiyel denklemlere de uygulanabilir.

## KAYNAKLAR

- Al-Humedi, H., & Ali, A. (2008). Application of adomian decomposition method to solve fisher's equation. *J. of Basrah Researches (sciences)*, 35, 23–32.
- Bahadır, A. (1999). Numerical solution for one-dimensional burgers' equation using a fully implicit finitedifference method. *International Journal of Applied Mathematics*, 1(8), 897–910.
- Bahadır, A. R. (2005). Exponential finite-difference method applied to korteweg–de vries equation for small times. *Applied Mathematics and Computation*, 160(3), 675–682.
- Bahadır, A. R., & Sağlam, M. (2005). A mixed finite difference and boundary element approach to one-dimensional burgers' equation. *Applied Mathematics and Computation*, 160(3), 663–673.
- Bhattacharya, M. (1985). An explicit conditionally stable finite difference equation for-heat conduction problems. *International journal for numerical methods in engineering*, 21(2), 239–265.
- Bhattacharya, M. (1990). Finite-difference solutions of partial differential equations. *Communications in applied numerical methods*, 6(3), 173–184.
- Bilge, I., & Appadu, A. R. (2021). On the implicit exponential finite difference method for the generalized burgers-fisher equation. *Fundamentals of Contemporary Mathematical Sciences*, 2(2), 83–100.
- Chandraker, V., Awasthi, A., & Jayaraj, S. (2015). A numerical treatment of fisher equation. *Procedia Engineering*, 127, 1256–1262.
- Conte, S. D. (1957). A stable implicit finite difference approximation to a fourth order parabolic equation. *Journal of the ACM (JACM)*, 4(1), 18–23.
- El-Sayed, S. M., & Kaya, D. (2004). Comparing numerical methods for helmholtz equation model problem. *Applied Mathematics and Computation*, 150(3), 763–773.
- Ghorbani, A. (2009). Beyond adomian polynomials: he polynomials. *Chaos, Solitons & Fractals*, 39(3), 1486–1492.
- Ghorbani, A., & Saberi-Nadjafi, J. (2007). He's homotopy perturbation method for calculating adomian polynomials. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 8(2), 229–232.
- Gülsu, M. (2006). A finite difference approach for solution of burgers' equation. *Applied Mathematics and Computation*, 175(2), 1245–1255.
- Gülsu, M., & Öziş, T. (2005). Numerical solution of burgers' equation with restrictive taylor approximation. *Applied mathematics and computation*, 171(2), 1192–1200.
- Handschuh, R. F., & Keith Jr, T. G. (1992). Applications of an exponential finite-difference technique. *Numerical Heat Transfer*, 22(3), 363–378.

- Hashemi, S., Daniali, H. M., & Ganji, D. (2007). Numerical simulation of the generalized huxley equation by he's homotopy perturbation method. *Applied Mathematics and Computation*, 192(1), 157–161.
- He, J.-H. (2004). Comparison of homotopy perturbation method and homotopy analysis method. *Applied Mathematics and Computation*, 156(2), 527–539.
- He, J.-H. (2005). Homotopy perturbation method for bifurcation of nonlinear problems. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 6(2), 207–208.
- He, J.-H. (2006a). Homotopy perturbation method for solving boundary value problems. *Physics letters A*, 350(1-2), 87–88.
- He, J.-H. (2006b). Some asymptotic methods for strongly nonlinear equations. *International journal of Modern physics B*, 20(10), 1141–1199.
- Inan, B., & Bahadir, A. (2015). Numerical solutions of the generalized burgers-huxley equation by implicit exponential finite difference method. *Journal of Applied Mathematics, Statistics and Informatics*, 11(2), 57–67.
- Inan, B., & Bahadir, A. R. (2013a). Numerical solution of the one-dimensional burgers' equation: Implicit and fully implicit exponential finite difference methods. *Pramana*, 81(4), 547–556.
- Inan, B., & Bahadir, A. R. (2013b). Numerical solution of the one-dimensional burgers' equation: Implicit and fully implicit exponential finite difference methods. *Pramana*, 81(4), 547–556.
- Inan, B., & Bahadir, A. R. (2014). A numerical solution of the burgers' equation using a crank-nicolson exponential finite difference method. *J. Math. Comput. Sci.*, 4(5), 849–860.
- Ismail, H. N., Raslan, K., & Abd Rabboh, A. A. (2004). Adomian decomposition method for burger's–huxley and burger's–fisher equations. *Applied mathematics and computation*, 159(1), 291–301.
- Kadalbajoo, M. K., & Awasthi, A. (2006). A numerical method based on crank-nicolson scheme for burgers' equation. *Applied mathematics and computation*, 182(2), 1430–1442.
- Kadalbajoo, M. K., Sharma, K. K., & Awasthi, A. (2005). A parameter-uniform implicit difference scheme for solving time-dependent burgers' equations. *Applied mathematics and computation*, 170(2), 1365–1393.
- Kasumo, C. (2020). The adomian decomposition method solution of the inviscid burgers equation. *J. Math. Comput. Sci.*, 10(5), 1834–1850.
- Kutluay, S., Bahadir, A., & Özdeş, A. (1999). Numerical solution of one-dimensional burgers equation: explicit and exact-explicit finite difference methods. *Journal of computational and applied mathematics*, 103(2), 251–261.
- Liao, W. (2008). An implicit fourth-order compact finite difference scheme for one-

- dimensional burgers' equation. *Applied Mathematics and Computation*, 206(2), 755–764.
- Malik, S. A., Qureshi, I. M., Amir, M., Malik, A. N., & Haq, I. (2015). Numerical solution to generalized burgers'-fisher equation using exp-function method hybridized with heuristic computation. *PloS one*, 10(3), e0121728.
- Mittal, R., & Tripathi, A. (2015). Numerical solutions of generalized burgers–fisher and generalized burgers–huxley equations using collocation of cubic b-splines. *International Journal of Computer Mathematics*, 92(5), 1053–1077.
- Molabahrami, A., & Khani, F. (2009a). The homotopy analysis method to solve the burgers–huxley equation. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 10(2), 589–600.
- Molabahrami, A., & Khani, F. (2009b). The homotopy analysis method to solve the burgers–huxley equation. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 10(2), 589–600.
- Nawaz, R., Ullah, H., Islam, S., & Idrees, M. (2013). Application of optimal homotopy asymptotic method to burger equations. *Journal of Applied Mathematics*, 2013.
- Noor, M. A., & Mohyud-Din, S. T. (2007). An iterative method for solving helmholtz equations. *Arab Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 1(1), 13–18.
- Noor, M. A., & Mohyud-Din, S. T. (2008a). Homotopy perturbation method for solving sixth-order boundary value problems. *Computers & Mathematics with Applications*, 55(12), 2953–2972.
- Noor, M. A., & Mohyud-Din, S. T. (2008b). Variational iteration method for solving higher-order nonlinear boundary value problems using he's polynomials. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 9(2), 141–156.
- Noor, M. A., & Mohyud-Din, S. T. (2009). Modified variational iteration method for solving fourth-order boundary value problems. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 29(1), 81–94.
- Noor, M. A., Mohyud-Din, S. T., & Waheed, A. (2008). Variation of parameters method for solving fifth-order boundary value problems. *Appl. Math. Inf. Sci*, 2(2), 135–141.
- Noor, M. A., Noor, K. I., Mohyud-Din, S. T., & Shabbir, A. (2006). An iterative method with cubic convergence for nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation*, 183(2), 1249–1255.
- Salkuyeh, D. K., & Sharafteh, F. S. (2009). On the numerical solution of the burgers's equation. *International Journal of Computer Mathematics*, 86(8), 1334–1344.
- Singh, B. K., Arora, G., & Singh, M. K. (2016). A numerical scheme for the generalized burgers–huxley equation. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 24(4), 629–637.
- Wazwaz, A. (2001a). A reliable algorithm for obtaining positive solutions for nonlinear boundary value problems. *Computers & Mathematics with Applications*, 41(10-11), 1237–1244.
- Wazwaz, A. (2001b). A reliable algorithm for obtaining positive solutions for nonlinear

- boundary value problems. *Computers & Mathematics with Applications*, 41(10-11), 1237–1244.
- Wazwaz, A.-M., & Gorguis, A. (2004). An analytic study of fisher's equation by using adomian decomposition method. *Applied Mathematics and Computation*, 154(3), 609–620.
- Zarebnia, M., & Jalili, S. (2013). Application of spectral collocation method to a class of nonlinear pdes. *Communications in Numerical Analysis*, 1, 14.



## ÖZGEÇMİŞ

### Kişisel Bilgiler

Adı-Soyadı : Burak ALPASLAN

| Eğitim Derecesi | Okul/Program | Mezuniyet Yılı |
|-----------------|--------------|----------------|
|-----------------|--------------|----------------|

|        |                          |      |
|--------|--------------------------|------|
| Lisans | Bakü Devlet Üniversitesi | 2010 |
|--------|--------------------------|------|

| İş Deneyimi/Yıl | Çalıştığı Yer | Görevi |
|-----------------|---------------|--------|
|-----------------|---------------|--------|

|       |                     |           |
|-------|---------------------|-----------|
| 2012- | Amasya Üniversitesi | Programcı |
|-------|---------------------|-----------|

### Yabancı Dil

İngilizce

### Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

1. ALPASLAN B. ve ŞAHİN S. (2021) Bazı Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Homotopi Perturbasyon Metodu ile Çözümleri 5. *Uluslararası Bilimsel Araştırmalar Kongresi*