

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**BAZI LİNEER VE LİNEER OLMAYAN KESİRLİ
MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
SAYISAL ÇÖZÜMLERİ**

Hacı Mehmet BAŞKONUŞ

**Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Hasan BULUT
NİSAN-2014**

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**BAZI LİNEER VE LİNEER OLMAYAN KESİRLİ MERTEBEDEN
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ**

**DOKTORA TEZİ
HACI MEHMET BAŞKONUŞ**

**Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik**

Danışmanı: Doç. Dr. Hasan BULUT

NİSAN – 2014

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**BAZI LİNEER VE LİNEER OLMAYAN KESİRLİ MERTEBEDEN
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ**

**DOKTORA TEZİ
HACI MEHMET BAŞKONUŞ
(101121202)**

**Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Uygulamalı Matematik**

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 21.03.2014

Tezin Savunulduğu Tarih: 14.04.2014

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Hasan BULUT (F.Ü)

Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Necdet BİLDİK (C.B.Ü)

Prof. Dr. Etibar PENAHLI (F.Ü)

Prof. Dr. Alaattin ESEN (İ.Ü)

Doç. Dr. Mustafa İNÇ (F.Ü)



NİSAN – 2014

ÖNSÖZ

Tez konumun belirlenmesi ve yürütülmesi aşamasında, maddi ve manevi her türlü desteği esirgemeyen hocam Doç.Dr. Hasan BULUT'a ayrıca Yrd.Doç.Dr. Yusuf PANDIR ve Matematik Bölümü'nde her zaman desteklerini esirgemeyen hocalarıma teşekkürü bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

Hacı Mehmet BAŞKONUŞ

Elazığ-2014

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER	III
ÖZET	IV
SUMMARY	V
ŞEKİLLER LİSTESİ	VI
TABLolar LİSTESİ	XI
SEMBOLLER LİSTESİ	XII
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	4
3. MATERYAL VE METOTLAR	22
3.1 Kesirli Adams–Bashforth–Moulton Metodu (KABMM)	22
3.2 Homotopi Analiz Metodu (HAM)	26
3.3 Modifiye Edilmiş Kudryashov Metodu (MEKM)	27
3.4 Modifiye Edilmiş Deneme Denklem Metodu (MEDDM)	29
3.5 Genişletilmiş Deneme Denklem Metodu (GDDM)	30
4. METOTLARIN UYGULANMASI	32
4.1 Kesirli Lineer Adi Diferansiyel Denkleme KABMM’nun uygulanması	32
4.2 Kesirli Lineer Olmayan Adi Diferansiyel Denkleme KABMM’nun uygulanması	41
4.3 Kesirli Rosenau–Hyman Denklemine GDDM’nun uygulanması	50
4.4 Kesirli Rosenau–Hyman Denklemine HAM’nun uygulanması	64
4.5 Kesirli Genelleştirilmiş Fisher Denklemine MEKM’nun uygulanması	71
4.6 Kesirli Genelleştirilmiş Fisher Denklemine HAM’nun uygulanması	82
4.7 Zaman-Kesirli Genelleştirilmiş Burgers Denklemine MEDDM’nun uygulanması	89
4.8 Zaman-Kesirli Genelleştirilmiş Burgers Denklemine HAM’nun uygulanması	98
5. SONUÇ	106
KAYNAKLAR	107
ÖZGEÇMİŞ	117

ÖZET

Bazı Lineer ve Lineer olmayan Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Çözümleri

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin tarihsel gelişimi ve çözüm yöntemleri hakkında bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde, bu çalışmada gerekli olan bazı temel tanım ve teoremler ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde, Kesirli Adams–Bashforth–Moulton Metodu, Genelleştirilmiş Deneme Denklem Metodu, Homotopi Analiz Metodu, Modifiye Edilmiş Kudryashov Metodu ve Modifiye Edilmiş Deneme Denklem Metodunun genel yapıları tanıtılmıştır.

Dördüncü bölümde, kesirli mertebeden lineer ve lineer olmayan adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümü elde edilmiştir. Kesirli mertebeden Genelleştirilmiş Fisher denkleminin, Zaman-kesirli Genelleştirilmiş Burgers denkleminin, kesirli mertebeden Rosenau–Hyman denkleminin analitik ve sayısal çözümleri belirlenmiştir. Her bir diferansiyel denklem için elde edilen analitik ve sayısal çözümlerin iki ve üç boyutlu grafikleri çizildi, sayısal veri tabloları oluşturulmuş ve mutlak hata değerleri hesaplanmıştır.

Beşinci bölümde ise bu çalışmada elde edilen analitik, sayısal ve yaklaşık çözümler dikkate alınarak kullanılan metotlar hakkında sonuç ifade edilmiştir.

SUMMARY

The Numerical Solutions of Some Linear and Nonlinear Fractional Differential Equations

This study consist of the five chapters.

In the first chapter, it has been given informations on the solution techniques and one the historical structures of differential equations with fractional order was given and some information on the solution techniques were alsopresented.

In chapter two, some fundamental definitions and theorems which are necessary in this study was introduced.

In chapter three, the general structures of fractional Adams–Bashforth–Moulton Method, Extended Trial Equation Method, Homotopy Analysis Method, Modified Kudryashov Method and Modified Trial Equation Method were.

In chapter four, the analytical and numerical solutions of fractional differential equations, Rosenau–Hyman equation with fractional order, Generalized Fisher equation with fractional order and Time-fractional Generalized Burgers equation with fractional order were obtained. Additionally, the numerical data tables concerning with the numerical results for every differential equations were constructed and the absolute errors related with this equation were calculated and the graphics were scathed in 2D and 3D spaces.

In chapter five, it has been given a conclusion about techniques used by taking into account analytical, numerical and approximate solutions obtained in this study.

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 4.1.1. (4.1.1) Kesirli mertebeden lineer adi diferansiyel denkleminin KABMM ile elde edilen sayısal çözümlerin $0 \leq t \leq 1, \alpha = 0.25$ için elde edilen iki boyutlu görünümü.....	34
Şekil 4.1.2. (4.1.1) Kesirli mertebeden lineer adi diferansiyel denkleminin analitik çözümlerin $0 \leq t \leq 1, \alpha = 0.25$ için elde edilen iki boyutlu görünümü.....	35
Şekil 4.1.3. $0 \leq t \leq 1$ ve $\alpha = 0.25$ için KABMM ile elde edilen mutlak hatanın iki boyutlu görünümü.....	35
Şekil 4.1.4. (4.1.1) Kesirli mertebeden lineer adi diferansiyel denkleminin KABMM ile elde edilen sayısal çözümünün $0 \leq t \leq 1, \alpha = 0.50$ için elde edilen iki boyutlu görünümü.....	37
Şekil 4.1.5. (4.1.1) Kesirli mertebeden lineer adi diferansiyel denkleminin analitik çözümünün $0 \leq t \leq 1, \alpha = 0.50$ için elde edilen iki boyutlu görünümü.....	37
Şekil 4.1.6. $0 \leq t \leq 1$ ve $\alpha = 0.50$ için KABMM ile elde edilen mutlak hatanın iki boyutlu görünümü.....	38
Şekil 4.1.7. (4.1.1) Kesirli mertebeden lineer adi diferansiyel denkleminin KABMM ile elde edilen sayısal çözümünün $0 \leq t \leq 1, \alpha = 0.75$ için elde edilen iki boyutlu görünümü.....	40
Şekil 4.1.8. (4.1.1) Kesirli mertebeden lineer adi diferansiyel denkleminin analitik çözümünün $0 \leq t \leq 1, \alpha = 0.75$ için elde edilen iki boyutlu görünümü.....	40
Şekil 4.1.9. $0 \leq t \leq 1$ ve $\alpha = 0.75$ için KABMM ile elde edilen mutlak hatanın iki boyutlu görünümü.....	41
Şekil 4.2.1. (4.2.1) Kesirli mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denkleminin KABMM ile elde edilen sayısal çözümünün $0 \leq t \leq 1, \alpha = 1.25$ için elde edilen iki boyutlu görünümü.....	43

Şekil 4.2.2. (4.2.1) Kesirli mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denkleminin analitik çözümünün $0 \leq t \leq 1, \alpha = 1.25$ için elde edilen iki boyutlu görünümü.....	44
Şekil 4.2.3. $0 \leq t \leq 1$ ve $\alpha = 1.25$ için KABMM ile elde edilen mutlak hatanın iki boyutlu görünümü.....	44
Şekil 4.2.4. (4.2.1) Kesirli mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denkleminin KABMM ile elde edilen sayısal çözümünün $0 \leq t \leq 1, \alpha = 1.5$ için elde edilen iki boyutlu görünümü.....	46
Şekil 4.2.5. (4.2.1) Kesirli mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denkleminin analitik çözümünün $0 \leq t \leq 1, \alpha = 1.5$ için elde edilen iki boyutlu görünümü..	46
Şekil 4.2.6. $0 \leq t \leq 1$ ve $\alpha = 1.50$ için KABMM ile elde edilen mutlak hatanın iki boyutlu görünümü.....	47
Şekil 4.2.7. (4.2.1) Kesirli mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denkleminin KABMM ile elde edilen sayısal çözümünün $0 \leq t \leq 1, \alpha = 1.75$ için elde edilen iki boyutlu görünümü.....	49
Şekil 4.2.8. (4.2.1) Kesirli mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denkleminin analitik çözümünün $0 \leq t \leq 1, \alpha = 1.75$ için elde edilen iki boyutlu görünümü.....	49
Şekil 4.2.9. $0 \leq t \leq 1$ ve $\alpha = 1.75$ için KABMM ile elde edilen mutlak hatanın iki boyutlu görünümü.....	50
Şekil 4.3.1. Kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denkleminin GDDM ile elde edilen (4.3.16) analitik çözümünün $\tau_1 = 0.1, a_1 = 1, \xi_1 = 0.2, \xi_2 = 0.3, 0 \leq t \leq 1, -6 \leq x \leq 6$ ve $k = 5$ için elde edilen üç boyutlu görünümü.....	54
Şekil 4.3.2. Kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denkleminin GDDM ile elde edilen (4.3.16) analitik çözümünün $\tau_1 = 0.1, a_1 = 1, k = 5, \xi_1 = 0.2, \xi_2 = 0.3, -6 \leq x \leq 6$ ve $t = 1$ için elde edilen iki boyutlu görünümü.....	55

Şekil 4.3.3. Kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denkleminin GDDM ile elde edilen (4.3.17) analitik çözümünün $\xi_1 = \xi_2 = 0.3, \zeta_0 = 0.9, \tau_0 = \tau_1 = 0.1, \alpha_1 = 1, k = 3$ $0 \leq t \leq 1$ ve $-20 \leq x \leq 20$ için elde edilen üç boyutlu görünümü.....	56
Şekil 4.3.4. Kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denkleminin GDDM ile elde edilen (4.3.17) analitik çözümünün $\xi_1 = \xi_2 = 0.3, \zeta_0 = 0.9, \tau_0 = \tau_1 = 0.1, \alpha_1 = 1, k = 3,$ $-20 \leq x \leq 20$ ve $t = 0.25$ için elde edilen iki boyutlu görünümü.....	57
Şekil 4.3.5. Kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denkleminin GDDM ile elde edilen (4.3.27) analitik çözümünün $a_1 = 1, a_2 = 0, \tau_0 = 0.1, \tau_1 = 0.2, \tau_2 = 0.3, k = 4, \zeta_0 = 9,$ $\xi_1 = \xi_2 = 0.17, 0 \leq t \leq 1$ ve $-12 \leq x \leq 12$ için elde edilen üç boyutlu görünümü.....	60
Şekil 4.3.6. Kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denkleminin (4.3.27) analitik çözümünün $a_1 = 1, a_2 = 0, \tau_0 = 0.1, \tau_1 = 0.2, \tau_2 = 0.3, k = 4, \zeta_0 = 9, \xi_1 = \xi_2 = 0.17, t = 0.25$ ve $-12 \leq x \leq 12$ için elde edilen iki boyutlu görünümü.....	61
Şekil 4.3.7. Kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denkleminin (4.3.28) analitik çözümünün $a_1 = 1, a_2 = 0, \tau_0 = 0.1, \tau_1 = 0.2, \tau_2 = 0.3, k = 4, \zeta_0 = 9, \xi_1 = \xi_2 = 0.17, 0 \leq t \leq 1$ ve $-50 \leq x \leq 50$ için elde edilen üç boyutlu görünümü.....	62
Şekil 4.3.8. Kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denkleminin (4.3.28) analitik çözümünün $a_1 = 1, a_2 = 0, \tau_0 = 0.1, \tau_1 = 0.2, \tau_2 = 0.3, k = 4, \zeta_0 = 9, \xi_1 = \xi_2 = 0.17, t = 0.25$ ve $-50 \leq x \leq 50$ için elde edilen iki boyutlu görünümü.....	63
Şekil 4.4.1. Kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denkleminin HAM ile elde edilen (4.4.20) yaklaşık çözümünün $t = x = 1, -2 \leq h \leq 0.5$ için elde edilen iki boyutlu h grafiği	68
Şekil 4.4.2. Kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denkleminin HAM ile elde edilen (4.4.20) yaklaşık çözümünün $h = -1/120, 0 \leq t \leq 1, -6 \leq x \leq 6$ için elde edilen üç boyutlu görünümü.....	69
Şekil 4.4.3. Kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denkleminin HAM ile elde edilen (4.4.20) yaklaşık çözümünün $h = -1/120, t = 1, -6 \leq x \leq 6$ için elde edilen iki boyutlu görünümü.....	70
Şekil 4.5.1. Kesirli mertebeden genelleştirilmiş Fisher denkleminin MEKM ile elde edilen (4.5.20) analitik çözümünün $0 \leq t \leq 1$ ve $-6 \leq x \leq 6$ için elde edilen üç boyutlu görünümü.....	75

Şekil 4.5.2. Kesirli mertebeden genelleştirilmiş Fisher denkleminin MEKM ile elde edilen (4.5.20) analitik çözümünün $-6 \leq x \leq 6$ için elde edilen iki boyutlu görünümü.....	76
Şekil 4.5.3. Kesirli mertebeden genelleştirilmiş Fisher denkleminin MEKM ile elde edilen (4.5.27) analitik çözümünün $0 \leq t \leq 1$ ve $-25 \leq x \leq 25$ için elde edilen üç boyutlu görünümü.....	78
Şekil 4.5.4. Kesirli mertebeden genelleştirilmiş Fisher denkleminin MEKM ile elde edilen (4.5.27) analitik çözümünün $-20 \leq x \leq 20$ için elde edilen iki boyutlu görünümü.....	79
Şekil 4.5.5. Kesirli mertebeden genelleştirilmiş Fisher denkleminin (4.5.28) analitik çözümünün $0 \leq t \leq 1$ ve $-30 \leq x \leq 0$ için elde edilen üç boyutlu görünümü.....	80
Şekil 4.5.6. Kesirli mertebeden genelleştirilmiş Fisher denkleminin (4.5.28) analitik çözümünün $-30 \leq x \leq 0$ için elde edilen iki boyutlu görünümü.....	81
Şekil 4.6.1. Kesirli mertebeden genelleştirilmiş Fisher denkleminin HAM ile elde edilen (4.6.22) yaklaşık çözümünün $t = 0.1, x = 1, -2.5 \leq h \leq 0.5$ için elde edilen iki boyutlu h grafiği.....	86
Şekil 4.6.2. Kesirli mertebeden genelleştirilmiş Fisher denkleminin HAM ile elde edilen (4.6.22) yaklaşık çözümünün $h = -6/10, -6 \leq x \leq 6, 0 \leq t \leq 1$ elde edilen üç boyutlu görünümü.....	87
Şekil 4.6.3. Kesirli mertebeden genelleştirilmiş Fisher denkleminin HAM ile elde edilen (4.6.22) yaklaşık çözümünün $t = 0.1, h = -6/10, -6 \leq x \leq 6$ için elde edilen iki boyutlu görünümü.....	88
Şekil 4.7.1. Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin MEDDM ile elde edilen (4.7.21) analitik çözümünün $b_0 = a_1 = 0.1, a_2 = 0.01, p = \beta = 1, B_4 = 0.45, \lambda_2 = 0.110326, 0 \leq t \leq 1$ ve $-10 \leq x \leq 10$ için elde edilen üç boyutlu görünümü.....	93
Şekil 4.7.2. Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin MEDDM ile elde edilen (4.7.21) analitik çözümünün $b_0 = a_1 = 0.1, a_2 = 0.01, p = \beta = 1, B_4 = 0.45, \lambda_2 = 0.110326, t = 0.45$, ve $-10 \leq x \leq 10$ için elde edilen iki boyutlu görünümü.....	94

Şekil 4.7.3. Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin MEDDM ile elde edilen (4.7.30) analitik çözümünün $\beta = 0.75, a_1 = p = b_0 = b_1 = k = 1, 0 \leq t \leq 5, -5 \leq x \leq 1$ için elde edilen üç boyutlu görünümü.....	97
Şekil 4.7.4. Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin MEDDM ile elde edilen (4.7.30) analitik çözümünün $\beta = 0.75, a_1 = p = b_0 = b_1 = k = 1, t = 0.5, -5 \leq x \leq 1$ için elde edilen iki boyutlu görünümü.....	98
Şekil 4.8.1. Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin HAM ile elde edilen (4.8.19) yaklaşık çözümünün $t = 0.45, x = -2, -2 \leq h \leq 2$ için elde edilen iki boyutlu h grafiği.....	102
Şekil 4.8.2. Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin HAM ile elde edilen (4.8.19) yaklaşık çözümünün $-10 \leq x \leq 10, 0 \leq t \leq 1$ için elde edilen üç boyutlu görünümü.....	103
Şekil 4.8.3. Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin HAM ile elde edilen (4.8.19) yaklaşık çözümünün $t = 0.45, h = -1/120, -10 \leq x \leq 10$, için elde edilen iki boyutlu görünümü	108

TABLÖLER LİSTESİ

Tablo 4.1.1. (4.1.1) Kesirli mertebeden lineer adi diferansiyel denkleminin $\alpha = 0.25$ için KABMM ile elde edilen sayısal çözümü ve hata tablosu.....	33
Tablo 4.1.2. (4.1.1) Kesirli mertebeden lineer adi diferansiyel denkleminin $\alpha = 0.50$ için KABMM ile elde edilen sayısal çözümü ve hata tablosu.....	36
Tablo 4.1.3. (4.1.1) Kesirli mertebeden lineer adi diferansiyel denkleminin $\alpha = 0.75$ için KABMM ile elde edilen sayısal çözümü ve hata tablosu.....	38
Tablo 4.2.1. (4.2.1) Kesirli mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denkleminin $\alpha = 1.25$ için KABMM ile elde edilen sayısal çözümü ve hata tablosu.....	42
Tablo 4.2.2. (4.2.1) Kesirli mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denkleminin $\alpha = 1.50$ için KABMM ile elde edilen sayısal çözümü ve hata tablosu.....	45
Tablo 4.2.3. (4.2.1) Kesirli mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denkleminin $\alpha = 1.75$ için KABMM ile elde edilen sayısal çözümü ve hata tablosu.....	47
Tablo 4.4.1. Kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denkleminin HAM ile elde edilen (4.4.20) yaklaşık çözümü ile GDDM ile elde edilen (4.4.3) analitik çözümünün $h = -1/120, t = 0.25, -6 \leq x \leq 6$ için elde edilen mutlak hata tablosu.....	71
Tablo 4.6.1. Kesirli mertebeden genelleştirilmiş Fisher denkleminin HAM ile elde edilen (4.6.22) yaklaşık çözümü ile MEKM ile elde edilen (4.6.4) analitik çözümünün $t = 0.25, h = -6/10, -6 \leq x \leq 6$ için elde edilen mutlak hata tablosu.....	89
Tablo 4.8.1. Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin HAM ile elde edilen (4.8.19) yaklaşık çözümü ile MEDDM ile elde edilen (4.8.4) analitik çözümünün $t = 0.25, h = -1/120, -8 \leq x \leq 12$ için elde edilen mutlak hata tablosu.....	105

SEMBOLLER LİSTESİ

$\Gamma(z)$	: Gama fonksiyonu
$\beta(z, w)$	: Beta fonksiyonu
$E_\alpha(z)$	: Bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu
$E_{\alpha, \beta}(z)$	: İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu
$\Gamma^*(v, t)$	: Tamamlanmamış Gama fonksiyonu
${}_a D_t^p f(t)$	: Riemann-Liouville kesirli türevi
${}_a D_t^p f(t)$	: Riemann-Liouville kesirli integrali
${}_a^C D_t^\alpha f(t)$	: Caputo kesirli türevi

KISALTMALAR

KABMM	: Kesirli Adams–Bashforth–Moulton Metodu
GDDM	: Genişletilmiş Deneme Denklem Metodu
HAM	: Homotopi Analiz Metodu
MEKM	: Modifiye Edilmiş Kudryashov Metodu
MEDDM	: Modifiye Edilmiş Deneme Denklem Metodu

1. GİRİŞ

Kesirli mertebe kavramı 1695 yılında L'Hospital'in Leibnitz'e yazmış olduğu mektupta $n = \frac{1}{2}$ olması durumunda $\frac{D^n y}{Dx^n}$ türevinin nasıl hesaplanacağı sorularak ilk defa literatüre sunulmuştur [1]. Leibnitz'in kesirli mertebe kavramı için literatüre sunmuş olduğu çalışmalardan ilham alan Riemann, Liouville, Abel, Loverro ve Miller gibi diğer bilim insanları kesirli mertebe üzerine çalışmalar yapmışlardır [2,3]. Yapılan çalışmalarda elde edilen sonuçlar kesirli mertebeden türevin ve kesirli katlı integrallerin geniş bir uygulama alanına sahip olduğunu göstermiştir.

Kesirli mertebeye sahip problemlerin oluşturulması, oluşturulan problemlerin yaklaşık çözümlerinin, analitik çözümlerinin ve sayısal çözümlerinin elde edilmesi bilim insanları arasında derin bir ilgi uyandırmıştır. Bu çözümlerin elde edilmesi için farklı metotların geliştirilmesi ve uygulanması bilim insanları arasında büyük önem kazanmıştır. Geliştirilen metotların farklı olması, yaklaşık veya sayısal çözümlerin analitik çözümden minimal düzeyde de olsa bir sapmaya neden olduğu gözlemlenmiştir.

Literatürde, tam sayı mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde etmek için Homotopi Pertürbasyon metodu (HPM) [4-16], Varyasyonel İterasyon metodu (VIM) [17], Homotopi Analiz metodu (HAM) [18-23] ve Adomian Ayrışım metodu (AAM) seri formunda çözüme dayalı kapsamlı sayıda analitik çözüme yakın yaklaşık çözümler veren yarı analitik metotlar ile ilgili çalışmalar mevcuttur [24-26].

Son yıllarda ise kesirli mertebeden türev hesaplamaları; mühendislik, fizik, kimya, uygulamalı bilimler, kontrol teorisi, kesirli dinamik gibi birçok alanda ortaya çıkan problemlerin çözümlerini elde etmek için kullanılmıştır. Kesirli mertebeden diferansiyel denklemler üzerine yapılan çalışmalardan bazıları ise aşağıdaki şekildedir.

Nikolay A. Kudryashov, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünü elde etmek için kendi ismini verdiği yeni bir yaklaşımı literatüre sunmuştur [27].

Podlubny, Laplace dönüşüm metodunu kullanarak kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde etmiştir [28].

Momani ve Odibat, Homotopi Pertürbasyon metodu ile Varyasyonel İterasyon metodunu kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlere uygulayarak elde edilen çözümler arasında bir kıyaslama yapmıştır [29].

George Adomian, lineer ve lineer olmayan adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini veren ve temelde seri çözümüne dayalı bir yaklaşım olan Adomian Ayırışım Metodunu literatüre sunmuştur [30-35]. Bu teknik ile bir diferansiyel denklemin sayısal çözümünü indismeye gerek duymadan sembolik hesaplama programları ile kodlama yaparak, hesaplamada nispeten bir kolaylık sağlanabilmektedir [36].

Seri şeklinde çözümler veren bir diğer metot ise Homotopi Analiz metodudur [37-45]. Ruyi, Homotopi Analiz metodunu matris sistemlerine başarılı bir şekilde uygulamıştır.

Shaher Momani ve Ziad Odibat, Homotopi Pertürbasyon metodunu ve Diferansiyel Dönüşüm metodunu lineer ve lineer olmayan kesirli mertebeden diferansiyel denklemlere uygulayarak matematiksel analizini yapmışlardır [46,47].

Yuri Luchko ve Rudolf Gorenflo, bir operasyonel metodu Caputo anlamında kesirli mertebeden diferansiyel denklemlere uygulayarak elde edilen çözümlerin matematiksel analizini incelemiştir [48].

Cheng-Shi Liu, kesirli mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek için Deneme Denklem metodu fikrini ileri sürmüştür [49,50]. Deneme Denklem metodu, kesirli mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin, eliptik fonksiyon çözümü, Jacobi eliptik fonksiyon çözümü, soliton çözümü ve hiperbolik fonksiyon çözümü gibi analitik çözümlerini veren analitik metottur. Elde edilen çözümlerin farklı tür özelliklere sahip olması ise metodun uygulandığı kesirli mertebeden diferansiyel denklemin yorumlanması ve elde edilen çözümlerin incelenmesi açısından büyük öneme sahiptir.

Diethelm, Galeone ve Amirali, adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerini elde etmek için Adams–Bashforth–Moulton Metodunu kullanmışlardır [51-54].

Bu çalışma da ise, tam sayı mertebeden diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerini elde etmek için kullanılan Adams–Bashforth–Moulton Metodunun modifiye edilmiş hali olan Kesirli Adams–Bashforth–Moulton Metodu (KABMM) kullanılarak lineer ve lineer olmayan kesirli mertebeden adi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri elde edilmiştir.

Kullanılan KABMM'nun doğruluğunu göstermek için L_2 ayırık normu ve L_∞ maximum nodal normu kullanılmıştır. Elde edilen sayısal çözümlerin iki boyutlu grafiği ile mutlak hata değerlerinin iki boyutlu grafiği Mathematica programı kullanılarak elde edilmiştir.

Cheng-Shi Liu tarafından literatüre sunulan Deneme Denklem metodunun modifiye edilmiş versiyonları [49,50] kesirli mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek için uygulanmıştır. Bu metotlardan GDDM, kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denkleminin analitik çözümünü elde etmek için göz önüne alınmıştır.

MEDDM ise, kesirli mertebeden zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin analitik çözümünü bulmak için ele alınmıştır.

Nikolay A. Kudryashov'un yedinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek için geliştirmiş olduğu Kudryashov metodu [27] modifiye edilerek elde edilen Modifiye Edilmiş Kudryashov metodu (MEKM) kesirli mertebeden genelleştirilmiş Fisher diferansiyel denkleminin Simetrik Hiperbolik Fibonacci fonksiyon türünden analitik çözümünü elde etmek için kullanılmıştır [55].

Deneme denklemi metodu ile elde edilen analitik çözümlerin iki ve üç boyutlu grafikleri çizilerek sayısal veri tabloları oluşturulmuştur ve bu denklemler için HAM kullanılarak sayısal çözümler elde edilmeye çalışılmıştır. Elde edilen analitik ve sayısal çözümlerin iki ve üç boyutlu uzaydaki grafikleri çizilerek mutlak hata tabloları sunulmuştur.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1.

Gama fonksiyonu, $z \in \mathbb{C}$ ve $\operatorname{Re}(z) > 0$ olmak üzere

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (2.1)$$

integrali ile ifade edilir. Gama fonksiyonunun kullanılan en yaygın özelliği ise

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad (2.2)$$

olarak bilinir [28].

Tanım 2.2.

$z, w \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(z) > 0$, $\operatorname{Re}(w) > 0$ olmak üzere iki değişkenli $\beta(z, w)$ Beta fonksiyonu

$$\beta(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt, \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlanır [28].

Tanım 2.3.

Gama fonksiyonu ile Beta fonksiyonu arasındaki önemli bir bağıntı

$$\beta(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \quad (2.4)$$

olarak ifade edilebilir [28].

Tanım 2.4.

Üstel e^z fonksiyonun bir parametrelili genelleşmiş hali,

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad (2.5)$$

Mittag-Leffler fonksiyonu olarak adlandırılır [28].

Tanım 2.5.

İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (2.6)$$

seri açılımı yardımıyla tanımlanır [28].

Tanım 2.6.

e^{at} üstel fonksiyonunun kesirli integrali için kullanılan ve $E_t(v, a)$ ile gösterilen Mellin-Ross fonksiyonu;

$$E_t(v, a) = t^v e^{at} \cdot \Gamma^*(v, at) = t^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{\Gamma(k + v + 1)} = t^v E_{1,v+1}(at), \quad (2.7)$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada verilen

$$\Gamma^*(v, t) = \frac{1}{\Gamma(v) t^v} \int_0^t e^{-x} x^{v-1} dx, \quad v > 0, \quad (2.8)$$

ifadesi Tamamlanmamış Gama Fonksiyonu olarak adlandırılır [102,103].

Tanım 2.7.

$0 < p \leq 1$, $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(t)$ fonksiyonu her (a, t) sonlu aralığında sürekli ve integrallenebilir olsun. Bu duruma Riemann-Liouville kesirli p mertebeden integrali

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t - \tau)^{p-1} f(\tau) d\tau, \quad (2.9)$$

olarak tanımlanır. $k - \alpha > 0$ olacak şekilde α sayısını ele alalım. Bu durumda Riemann-Liouville kesirli $k - \alpha > 0$ mertebeden türevi

$${}_a D_t^{k-\alpha} [f(t)] = \frac{1}{\Gamma(p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (0 < \alpha \leq 1),$$

olarak ifade edilir. Bu integralin tanımlı olması için $\alpha > 0$ olmalıdır. Burada $p = k - \alpha$ alınırsa

$${}_a D_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t [(t - \tau)^{k-p-1} f(\tau)] d\tau = \frac{d^k}{dt^k} ({}_a D_t^{-(k-p)} f(t)), \quad (k-1 \leq p < k),$$

elde edilir [28,58,106].

Tanım 2.8.

$q > 0$, $n-1 < q < n$, $n \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{R}^+$ ve $x > c$ olmak üzere bir $f(x)$ fonksiyonunun q -mertebe Riemann-Liouville anlamında kesirli integrali

$$J^q[f(x)] = {}_c D_x^{-q}[f(x)] = \frac{d^{-q}f}{dx^{-q}} = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_c^x (x-t)^{q-1} f(t) dt, \quad (2.10)$$

ile temsil edilir [28,37,59].

Tanım 2.9.

Caputo kesirli mertebeden türevi $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$${}_0^C D_t^\alpha = \frac{1}{\Gamma(\alpha-n)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\xi)}{(t-\xi)^{\alpha-n+1}} d\xi, \quad (2.11)$$

olarak gösterilir [28].

Tanım 2.10.

$m \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{R}$, $m-1 < p < m$ ve $f(t)$ fonksiyonu da m defa sürekli diferensiyellenebilir olsun. Bu takdirde $f(t)$ fonksiyonunun p -mertebeden Caputo kesirli türevi;

$${}_a^C D_t^p[f(t)] = \frac{1}{\Gamma[m-p]} \int_a^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{p-m+1}} d\tau, \quad (2.12)$$

ile tanımlanır [60-69,109].

Tanım 2.11.

Üstel $f(t) = e^{\pm \lambda t}$ ve trigonometrik $g(t) = \sin(bt)$ fonksiyonunun Riemann-Liouville kesirli mertebeden integrali

$$\begin{aligned} {}_0 I_t^\alpha[f(t)] &= {}_0 I_t^\alpha[e^{\pm \lambda t}] = \lambda^{-\alpha} e^{\pm \lambda t}, \\ {}_0 I_t^\alpha[g(t)] &= {}_0 I_t^\alpha[\sin(bt)] = b^{-\alpha} \sin\left(bt \mp \frac{\alpha\pi}{2}\right), \end{aligned} \quad (2.13)$$

ile ifade edilir. Burada $a > 0$, $n-1 \leq \alpha < n$, $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ dir [63,107].

Teorem 2.2.

$f(t)$ fonksiyonunun Grünwald-Letnikov anlamında kesirli mertebeden türevi,
 a ve t limit noktaları olmak üzere

$${}_a^{GL}D_t^p[f(t)] = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r C(p, r) f(t-rh), \quad (2.14)$$

ile ifade edilir. Burada $n-1 \leq p < n$, $n \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{R}^+$ olup $p = m$ ise m . mertebeden türev,
 $p = -m$ ise m katlı integrali temsil eder [70].

Teorem 2.3.

$f(t) = (t-a)^v$ olmak üzere $f(t)$ 'nin Riemann-Liouville anlamında kesirli türevi,

$${}_aD_t^p(t-a)^v = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-p+1)}(t-a)^{v-p},$$

eşitliğini sağlar ve burada $n-1 \leq p < n$, $n \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{R}^+$ dir [28,71-73].

İspat:

$f(t) = (t-a)^v$ için $-p$ mertebeden kesirli integrali alınır

$${}_aD_t^p(t-a)^v = \frac{1}{\Gamma(-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-p-1} (r-a)^v d\tau, \quad (2.15)$$

yazılır. Bu integralin yakınsaması için $v > -1$ ve $\tau = a + \xi(t-a)$ olduğunu kabul edelim.

Bu taktirde

$$\begin{aligned} {}_aD_t^p(t-a)^v &= \frac{1}{\Gamma(-p)} (t-a)^{v-p} \int_a^t \xi^v (t-\xi)^{-p-1} d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(-p)} B(-p, v+1) (t-a)^{v-p} \\ &= \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-p+1)} (t-a)^{v-p}, \quad (p < 0, v > -1) \end{aligned} \quad (2.16)$$

elde edilir.

Teorem 2.4.

$0 \leq m \leq p \leq m+1, 0 \leq n \leq q \leq n+1$ ve $f(t), f^{(k)}(a)=0$ olsun. Bu taktirde $k=0,1,\dots, r-1$ olmak üzere ${}_a D_t^p$ ve ${}_a D_t^q$ kesirli mertebeden türeve sahip operatörlerin birleşimi

$${}_a D_t^q \left({}_a D_t^p f(t) \right) = {}_a D_t^p \left({}_a D_t^q f(t) \right) {}_a D_t^{p+q} f(t), \quad (2.17)$$

eşitliğini sağlar [70].

Tanım 2.12.

a noktası $k=0,1,2,3,\dots,n-1$ için $f^{(k)}(a)=0$ olsun; Riemann-Liouville kesirli türevi ile Caputo kesirli türev arasındaki ilişki;

$${}^{RL}_a D_t^p [f(t)] = {}^C_a D_t^p [f(t)] + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma[k-\alpha+1]} f^{(k)}(a), \quad (2.18)$$

olarak bilinir ve burada $n-1 < \alpha < n$ dir [61,74].

Teorem 2.5.

Tamsayı mertebeden kesirli türevlerin ve integrallerin birleşimi; $k > n$ olsun $f(t)$ fonksiyonunun $(k-n)$. mertebeden türevi

$$f^{(k-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} D^k \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad (2.19)$$

dir ve burada D^k operatörü $k \leq 0$ olduğunda k katlı integrali ifade eder [70].

Tanım 2.13.

n tamsayı değerleri için Cauchy anlamında n katlı integrasyon

$$f^{-n}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau,$$

dur. Yukarıda verilen Cauchy formülünde $p > 0$ reel sayısı ile n tamsayısı yer değiştirirse;

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau$$

p – katlı kesirli integral tanımı elde edilir. Burada n tamsayısı $n \geq 1$ şartını sağlamalıdır. Bu durumda $p > 0$ olmalıdır. Eğer $t \geq a$ için $f(t)$ sürekli ise bu takdirde integrasyon

$${}_a D_t^{-p} \left({}_a D_t^{-q} f(t) \right) = {}_a D_t^{-p-q} f(t), \quad (2.20)$$

biçimindeki özelliği korur[75],

Tanım 2.14.

Jacobi eliptik fonksiyonlar, eliptik fonksiyonların standart formudur. Bu fonksiyonlar, m eliptik modül olmak üzere $cn(u, m)$, $dn(u, m)$ ve $sn(u, m)$ olacak şekilde üç temel fonksiyon ile gösterilir. Bu üç temel fonksiyon

$$u = F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{1}{\sqrt{1-m^2 \sin^2(t)}} dt, \quad 0 < m^2 < 1, \quad (2.21)$$

şeklinde verilen birinci tip eliptik integralin versiyonundan ortaya çıkar.

Burada $m = \text{mod } u$ ve $\varphi = am(u, m) = am(u)$ olmak üzere Jacobi genliktir ve ayrıca $\varphi = F^{-1}(u, m) = am(u, m)$ ile tanımlanır. Bu açıklamalardan sonra

$$\sin(\varphi) = \sin(am(u, m)) = sn(u, m), \quad (2.22)$$

$$\cos(\varphi) = \cos(am(u, m)) = cn(u, m), \quad (2.23)$$

$$\sqrt{1-m^2 sn^2(\varphi)} = \sqrt{1-m^2 \sin^2(am(u, m))} = dn(u, m), \quad (2.24)$$

eşitlikleri yazılabilir. Burada $m \rightarrow 0$ ve $m \rightarrow 1$ iken sırası ile bu fonksiyonlar

$$sn(u, 0) = \sin(u), \quad sn(u, 1) = \tanh(u), \quad (2.25)$$

$$cn(u, 0) = \cos(u), \quad cn(u, 1) = \text{sech}(u), \quad (2.26)$$

$$dn(u, 0) = 1, \quad dn(u, 1) = \text{sech}(u), \quad (2.27)$$

olarak tanımlanır. Ayrıca Jacobi eliptik fonksiyonlar üzerinde türevler

$$\frac{d}{du}(sn(u)) = cn(u) dn(u), \quad (2.28)$$

$$\frac{d}{du}(cn(u)) = -sn(u) dn(u), \quad (2.29)$$

$$\frac{d}{du}(dn(u)) = -m^2 sn(u)cn(u), \quad (2.30)$$

eşitlikleri ile gösterilebilir. Jacobi eliptik fonksiyonların bu özelliklerinin yanısıra bu fonksiyonlar arasında

$$sn^2(u) + cn^2(u) = 1, \quad (2.31)$$

$$m^2 sn(u) + dn^2(u) = 1, \quad (2.32)$$

bağıntıları vardır [23].

Tanım 2.15.

Bir bilinmeyen fonksiyon ve bu fonksiyonun muhtelif türevlerini içeren matematiksel denklemlere *diferansiyel denklemler* denir. Bir denklemde belirli bir değişkene göre türev alınıyorsa, o değişkene *bağımsız değişken*, denklemde türevi alınan değişkene ise *bağımlı değişken* denir.

Bir tek bağımsız değişken içeren diferansiyel denkleme *adi diferansiyel denklem* denir ve genel olarak *n. mertebeden adi bir diferansiyel denklem*;

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (2.33)$$

şeklinde gösterilir. İki veya daha fazla bağımsız değişken ihtiva eden diferansiyel *denkleme kısmi diferansiyel denklem* denir ve *n. mertebeden bir kısmi diferansiyel denklem*

$$F\left(x, y, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right) = 0, \quad (2.34)$$

olarak yazılır [77,78].

Tanım 2.16.

Bir diferansiyel denklem lineer ve lineer olmayan olmak üzere iki şekilde sınıflandırılır. Eğer bir diferansiyel denklemde bağımlı değişken ve türevlerinin katsayıları bağımsız değişken ihtiva ediyorsa bu diferansiyel denkleme *değişken katsayılı lineer diferansiyel denklem* denir. Eğer bir diferansiyel denklem de bağımlı değişken kendisi veya türevleri ile çarpım yada bölüm durumunda ise veya bağımlı değişken üstel, trigonometrik, yada logaritmik olarak bulunuyor ise veya bağımlı değişkenin herhangi bir türevinin

derecesi iki ve ikiden büyük ise bu tür diferansiyel denklemlere *lineer olmayan diferansiyel denklem* denir [77,78].

Tanım 2.17.

Lineer olmayan herhangi bir adi diferansiyel denklemde en yüksek mertebeden lineer olan terim $\frac{d^q}{d\xi^q}$ ve en yüksek mertebeden lineer olmayan terim $u^p \left(\frac{d^r}{d\xi^r} \right)^s$ ile verilsin. Bu durumda M dengeleme terimi olmak üzere $M + q = Mp + s(M + r)$ eşitliği yazılabilir [23].

Tanım 2.18.

Bir $a < x < b$ aralığında tanımlı bir Φ fonksiyonu $a < x < b$ aralığında bulunan her x için tanımlı ve ilk n . mertebeden türevelere sahip fonksiyonu

$$F(x, \Phi(x), \Phi'(x), \Phi''(x), \dots, \Phi^{(n)}(x)) = 0, \quad (2.35)$$

ise Φ fonksiyonuna (2.33) denkleminin *çözümüdür* denir. Bir adi diferansiyel denklem, denklemin mertebesi kadar sabit içerir. Çözüm fonksiyonundaki sabitlere verilen her bir değere karşılık bulunan çözüme de *özel çözüm* denir.

Bir adi diferansiyel denklemin çözümü eğri ailesine karşılık gelmesine karşın, bir kısmi diferansiyel denklemin çözümü yüzey ailesine karşılık gelir. Özel olarak, ikinci mertebeden bir diferansiyel denklem göz önüne alındığında bu tip denklemlerin çözümleri iki sabit içerdiğinden bu sabitleri bulmak için iki ek şart verilmelidir. Eğer şartlar; bağımlı değişken ve türevleri üzerinde bağımsız değişkenin aynı değeri için verilen şartlar ise *başlangıç şartları*, bağımsız değişkenin farklı değerleri için verilen şartlar ise *sınır şartları* ile tanımlanır [23].

Tanım 2.19.

E_x ve E_y iki lineer uzay olsun. Tanım kümesi E_x 'de, değer kümesi E_y 'de bulunan $y = Ax$ şeklinde tanımlanan A operatörü aşağıdaki şartları sağlıyorsa A operatörüne *lineerdir* denir [77,79];

$$\begin{aligned} L1) A(x + y) &= Ax + Ay, \\ L2) A(\lambda x) &= \lambda Ax. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Tanım 2.20.

Tanım ve değer kümesi vektör uzayı olan dönüşümlere operatör denir [80].

Tanım 2.21.

V boş olmayan, üzerinde vektörel bir toplama ve skalerle (gerçek sayılarla) çarpım tanımlanmış bir küme olsun. Simgesel olarak, vektörel toplama ve skalerle çarpım işlemleri,

$$x, y \in V, \text{ için } x + y \in V,$$

$$r \in \mathbb{R}, \text{ için } rx \in V,$$

biçiminde tanımlı olsun; yani, V kümesi vektörel toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre kapalı olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa V kümesine $\mathbb{R}$ (gerçek sayılar kümesi) üzerinde bir *vektör uzayı* denir [81].

V_1 : Her $x, y \in V$ için $x + y = y + x$ olmalıdır. (Toplamanın yer değiştirme özelliği)

V_2 : Her $x, y, z \in V$ için $(x + y) + z = x + (y + z)$ olmalıdır. (Toplamanın değişme özelliği)

V_3 : Her $x \in V$ için $x + 0 = 0 + x = x$ olacak şekilde bir $0 \in V$ bulunmalıdır.

(Toplama işlemine göre etkisiz eleman)

V_4 : Her $x \in V$ için $x + y = y + x = 0$ olacak şekilde bir $y \in V$ bulunmalıdır.

(Toplama işlemine göre ters eleman)

V_5 : Her $x, y \in V$ ve her $c \in \mathbb{R}$ için $c(x + y) = cx + cy$ olmalıdır.

(Skaler ile çarpmanın toplama üzerine dağılımı)

V_6 : Her $x \in V$ ve $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ için $(c_1 + c_2)x = c_1x + c_2x$ olmalıdır.

V_7 : Her $x \in V$ ve $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ için $(c_1c_2)x = c_1(c_2x)$ olmalıdır.

V_8 : Her $x \in V$ için $1.x = x$ olmalıdır.

Tanım 2.22.

Eğer bir $f(x)$ fonksiyonu $x = x_0$ noktası civarında

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)(x-x_0)^n}{n!} \quad (2.37)$$

şeklinde Taylor serisine açılabilirse ve x_0 noktasını içeren bir açık aralıkta x 'in bütün değerleri için Taylor açılımı $f(x)$ fonksiyonuna yakınsıyorsa $f(x)$ fonksiyonuna $x = x_0$ noktasında analitik fonksiyondur denir [82].

Tanım 2.23.

Matematiksel bir terim olarak *iyi tanımlı problem* kavramı ilk olarak Jacques Hadamard tarafından literatüre sunulan bir tanımla ortaya çıkmıştır. Hadamard, fiziksel olayların matematiksel modellemelerinin aşağıdaki özellikler sağlanacak şekilde iyi tanımlı olması gerektiğini savunmuştur.

- i) Çözüm vardır,
- ii) Çözüm tektir,
- iii) Çözüm kararlıdır.

Matematiksel olarak bir problemin çözümünün var olması, çözüm uzayını genişleterek sağlanır. Bir problemin çözümünün tek olması, mutlak bir fonksiyon sınıfına göre çözüm tektir anlamına gelir. Bir problemin birden fazla çözümü varsa model hakkında daha fazla bilgiye ihtiyaç vardır.

Eğer başlangıç yada sınır koşulları ve parametre değerlerinde yapılan küçük bir değişiklik çözümde küçük değişikliklere neden oluyorsa bu çözüm kararlıdır.

Matematiksel olarak iyi tanımlılık aşağıdaki şekilde ifade edilebilir. X ve Y iki normlu uzay ve $K : X \rightarrow Y$ lineer (veya lineer olmayan) bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki eşitlikler sağlanıyorsa, $Kx = y$ denklemi iyi tanımlı olarak adlandırılır.

1. Varlık: Her $y \in Y$ için $Kx = y$ olacak şekilde en az bir $x \in X$ vardır.
2. Teklik: Her $y \in Y$ için $Kx = y$ olacak şekilde en fazla bir $x \in X$ vardır.
3. Kararlılık: x çözümü daima y 'ya bağlıdır. Yani $n \rightarrow \infty$ iken $Kx_n \rightarrow Kx$ olacak şekilde her $(x_n) \subset X$ dizisi için $x_n \rightarrow x$ olmasıdır [80].

Teorem 2.6.

Sürekli $f(x, t)$ fonksiyonu $\{(x, t): a \leq x \leq b, c \leq t \leq d\}$ dikdörtgensel bir bölgede sürekli $\frac{\partial f}{\partial t}$ kısmi türevine sahip olsun. Bu takdirde $c \leq t \leq d$ için

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx, \quad (2.38)$$

dir. Eğer f fonksiyonu bu teoremin şartlarını sağlayan bir fonksiyon $a(t)$ ve $b(t)$ de $c \leq t \leq d$ aralığında sürekli türevlere sahip fonksiyonlar ise

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx + f(b(t), t)b'(t) - f(a(t), t)a'(t), \quad (2.39)$$

dir [83,84].

Tanım 2.24.

Bazı özel trigonometrik fonksiyonların Riemann-Liouville anlamında kesirli türev ve integralleri aşağıdaki şekilde elde edilir. Kesirli integral tanımında $\xi = t - \tau$ değişken değiştirmesi yapılarak $m \leq p < m+1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{-p} [\cos(at)] &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t [\xi^{p-1} \cos(a(t-\xi))] d\xi = C_t(p, a), \quad p > 0, \\ {}_0D_t^{-p} [\sin(at)] &= \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^t [\xi^{p-1} \sin(a(t-\xi))] d\xi = S_t(p, a), \quad p > 0, \end{aligned} \quad (2.40)$$

elde edilir. (2.40) denkleminde $p = \frac{1}{2}$ alınırsa

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{-\frac{1}{2}} [\cos(at)] &= C_t\left(\frac{1}{2}, a\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} [C(x)\cos(at) + S(x)\sin(at)], \\ {}_0D_t^{-\frac{1}{2}} [\sin(at)] &= S_t\left(\frac{1}{2}, a\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} [C(x)\sin(at) - S(x)\cos(at)], \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $x = \sqrt{\frac{2at}{\pi}}$ olmak üzere

$$C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt ,$$

$$S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt ,$$

dir. Benzer olarak

$${}_0D_t^p [\cos(at)] = C_t(-p, a),$$

$${}_0D_t^p [\sin(at)] = S_t(-p, a),$$

olur [106].

Tanım 2.25.

$f(t) = C$ sabit fonksiyonunun Riemann-Liouville anlamında kesirli integrali

$${}_0D_t^{-\alpha} [f(t)] = {}_0D_t^{-\alpha} [C] = C {}_0D_t^{-\alpha} [t^0] = \frac{C}{\Gamma[1+\alpha]} t^\alpha, \quad (2.41)$$

ile ifade edilir. Burada $n-1 \leq \alpha < n$, $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ dir [63].

Tanım 2.26.

$f(t) = C$ sabit fonksiyonunun Riemann-Liouville anlamında kesirli mertebeden türevi

$${}_0D_t^\alpha [f(t)] = {}_0D_t^\alpha [C] = C {}_0D_t^\alpha [t^0] = \frac{C}{\Gamma[1-\alpha]} t^{-\alpha}, \quad (2.42)$$

ile ifade edilir. Burada $n-1 \leq \alpha < n$, $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ dir [28,63].

Teorem 2.7.

$f(t) = (t-a)^v$ olmak üzere $f(t)$ 'nin Riemann-Liouville anlamında kesirli katlı integrali,

$${}_aJ_t^p [f(t)] = {}_aJ_t^p [(t-a)^v] = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v+p+1)} (t-a)^{v+p}, \quad (2.43)$$

eşitliğini sağlar ve burada $n-1 \leq p < n$, $n \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{R}^+$ dir [63].

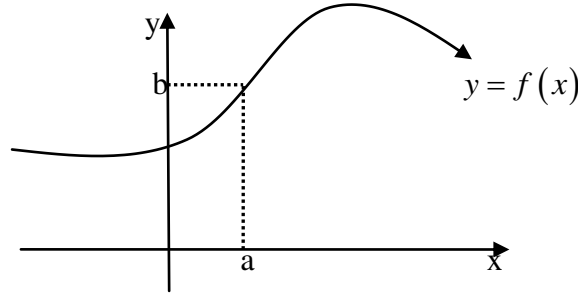
Tanım 2.27.

$m-1 < \alpha \leq m$, $m \in \mathbb{Z}^+$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve J_t^α Riemann-Liouville integral operatörü olmak üzere Caputo anlamında kesirli türeve sahip terime uygulanması aşağıdaki şekilde tanımlanır [85];

$$J_t^\alpha \left[{}^C D^\alpha f(t) \right] = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!}. \quad (2.44)$$

Tanım 2.28. (Tek Adım Metodu)

Bir diferansiyel denklemin çözümü için en basit sayısal metot Euler metodudur. Bu metot bir noktada bağımlı değişkenin değeri, bir önceki noktadan geçen bir doğru boyunca ekstrapolasyonla elde edilir.



$y(x_0) = y_0$ başlangıç koşulu ile verilmiş $y'(x) = \frac{dy}{dx} = f(x, y)$ diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Bu taktirde başlangıç koşulları kullanılarak $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ hesaplanabilir ve Taylor serisinin ilk iki teriminin kullanılmasıyla $y(x_0 + h)$ için bir yaklaşık değer bulunabilir.

$$y(x_0 + h) = y_0 + hy'(x_0), \quad (2.45)$$

$$x_1 = x_0 + h,$$

olmak üzere

$$y(x_0 + h) = y_0 + hy'(x_0),$$

ifadesinde

$$y(x_0 + h) = y(x_1) = y_1, \quad (2.46)$$

alınırsa

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx, \quad (2.47)$$

denklemini

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0), \quad (2.48)$$

şeklinde yazılır. Aynı tür işlem tekrarlanırsa ikinci adımda;

$$y(x_0 + 2h) = y(x_2) = y_2, \quad (2.49)$$

için

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1), \quad (2.50)$$

bulunur. Genel olarak x_n ve y_n cinsinden bir sonraki x_{n+1} noktasındaki y_{n+1} değeri;

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad (2.51)$$

ile tanımlanır. Bu tür metoda “tek adım metodu” denir [86].

Tanım 2.29. (Çok Adım Metodu)

$y(x_0) = y_0$ başlangıç koşulu ile verilmiş $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ diferansiyel denkleminin herhangi bir $x = x_m$, ($m \in \mathbb{N}$) noktasındaki sayısal çözümü, bu nokta civarında, yeni $x = x_{m-1}$ ve $y = y_{m-1}$ değerinin ve dolayısıyla y'_{m-1} 'in bilinmesini gerektirir. Böylece $x = x_m$ noktasındaki $y = y_m$ değerini bulabilmek için birden fazla noktalarda çözümün bilinmesi zorunludur.

Bu değerlerin bulunmasında kullanılacak metoda “çok adım metodu” adı verilir.

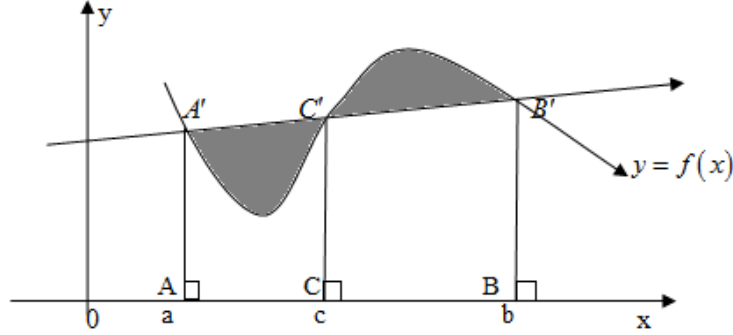
Buna göre; $y' = f(x, y)$, $y(0) = y_0$ başlangıç değer probleminin

$$\begin{aligned} y_0, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, \\ y'_0, y'_1, y'_2, \dots, y'_{m-1}, \end{aligned} \quad (2.52)$$

değerlerini önce yaklaşık olarak herhangi bir yöntemle hesaplanmış olduğu varsayılır. Sonra y_m ve y'_m değeri hesaplanmak istenir. Bu metotların bazıları Hamming, Adams-Moulton, Adams-Bashford metotlarıdır [86].

Tanım 2.30. (Yamuk Metodu)

Bu yöntemle ilgili yaklaşım bağıntısını bulmak için aşağıdaki şekli göz önüne alalım.



Burada söz konusu alan yaklaşık olarak $ACC'A'$ yamuğunun alanı ile, $CBB'C'$ yamuğunun alanları toplamına eşit olarak alınabilir. Eğer taralı alanlar birbirine ne kadar yakınsa, kullanılan yöntem o kadar doğru sonuç verir. Bu ise ya $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin doğruya yakın olması ile yada A ile B arasını olabildiği kadar çok sayıda eşit parçalara bölüp, bunlar üzerine çok sayıda yamuk kurarak sağlanabilir. Uygulamada $y = f(x)$ fonksiyonunun şeklini değiştiremeyeceğimize göre, daha çok yamuk sayısı artırılarak sayısal işlemin doğruluğu artırılır. Şimdi yamuk yönteminin yaklaşım bağıntısını çıkaralım. C noktası (A,B) aralığının orta noktası ve $|AC| = |CB| = h$ olsun. Buna göre $ACC'A'$ yamuğunun alanı

$$Alan(ACC'A') = \frac{1}{2}(|AA'| + |CC'|)h, \quad (2.53)$$

$$= \frac{1}{2}(f(a) + f(c))h, \quad (2.54)$$

ve $CBB'C'$ yamuğunun alanı

$$Alan(CBB'C') = \frac{1}{2}(|CC'| + |BB'|)h, \quad (2.55)$$

$$= \frac{1}{2}(f(c) + f(b))h, \quad (2.63)$$

yazılır. Bu iki alanın topar ve $c = \frac{a+b}{2}$ olduğunu göz önüne alacak olursak;

$$\int_a^b f(x) dx \cong \frac{h}{2} \left[f(a) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right], \quad (2.56)$$

yaklaşım bağıntısını buluruz. Buna yamuk metodunun temel bağıntısı adı verilir. Eğer (a,b) şeklindeki aralığı uzunlukları h olan n eşit parçaya bölecek olursak;

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, \quad (2.57)$$

ve y_n bölme noktalarındaki $f(x)$ fonksiyonunun değerleri olmak üzere yukarıdaki yaklaşım bağıntısı;

$$\int_a^b f(x) dx \cong \frac{h}{2} [y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n], \quad (2.58)$$

olarak yazılır [86].

Tanım 2.31. (Libschitz Şartı)

a, b ve n sabitler ve $f(x, y)$ de $a \leq x \leq b, -\infty < y < +\infty$ ile tanımlanmış D bölgesinin bütün noktalarında tanımlı ve sürekli bir fonksiyon olmak üzere $y(a) = n$ başlangıç koşulu ile verilmiş $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ diferansiyel denklemini göz önüne alalım.

Özel olarak, D bölgesindeki bütün (x, y) noktaları için y 'ye göre sürekli türevler ile işlem yapılır ve ortalama değer teoremi kullanılırsa; $y < \bar{y} < y^*$ olmak üzere

$$f(x, y) - f(x, y^*) = \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} (y - y^*), \quad (2.59)$$

yazılır. Açıkça görüleceği gibi,

$$L = (x, y) \in D \left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|, \quad (2.60)$$

olarak seçildiğinde (2.59) eşitliği aşıkarak sağlanır [86,87].

Tanım 2.32. (İntegral Denklemleri)

İntegral denklemler, yapılarına göre üç sınıfa ayrılır. Bilinmeyen fonksiyon $u(x)$ ve çekirdek fonksiyon $K(x, t)$ olmak üzere

$$\phi(x) = \int_a^b K(x, t)u(t) dt, \quad (2.61)$$

şeklindeki bir integral denkleme *I. tür integral denklemi* denir. Bilinmeyen fonksiyon sadece integral içinde mevcuttur. Burada $\phi(x)$ fonksiyonu bilinen bir fonksiyondur.

Benzer şekilde

$$\phi(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t)u(t) dt, \quad (2.62)$$

şeklindeki bir integral denklem de yine *I. tür integral denklemdir*. Burada da $\phi(x)$ ve $f(x)$ bilinen fonksiyonlardır.

$$u(x) = \int_a^b K(x, t)u(t) dt, \quad (2.63)$$

veya

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t)u(t) dt, \quad (2.64)$$

şeklindeki integral denklemler ise *II. tür integral denklemler* sınıfına girmektedir. Görüldüğü gibi, bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonu integralin hem içinde hem de dışında bulunmaktadır. Bu iki tür integral denklemden başka $\phi(x)$, $f(x)$ ve $K(x, t)$ fonksiyonları bilinen

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t)u(t) dt, \quad (2.65)$$

şeklindeki integral denklemlere ise *III. tür integral denklemler* denir.

İntegral denklemler integral sınırlarının degisken veya sabit olmasına göre de sınıflandırılırlar. Lineer ve homojen olup olmadıklarına bakmaksızın

$$\phi(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t)u(t) dt, \quad (2.66)$$

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u(t)dt, \quad (2.67)$$

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u(t)dt, \quad (2.68)$$

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u(t)dt, \quad (2.69)$$

gibi denklemlere *Volterra integral denklemleri* denilmektedir. Bu tür denklemlerde, integral işaretinin üst sınırında (veya sınırlarından birinde) x değişkeni bulunmaktadır. x değişkeninin $x = b$ gibi sabit bir değere eşit olması halinde yazılabilecek

$$\phi(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt, \quad (2.70)$$

$$u(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt, \quad (2.71)$$

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt, \quad (2.72)$$

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt, \quad (2.73)$$

şeklindeki denklemlere ise *Fredholm integral denklemleri* denilmektedir. Volterra ve Fredholm integral denklemleri arasındaki tek fark bu sınır yapısında ortaya çıkmaktadır. Ancak bu iki denklem türünün incelenmesi, zaman zaman iç içe girmiş bir görünüm verebilmektedir [76].

3. MATERYAL VE METOTLAR

3.1. Kesirli Adams–Bashforth–Moulton Metodu

Başlangıç koşulları ile birlikte verilen kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerini elde etmek için kullanılan tek adımlı kesirli Adams–Bashforth–Moulton metodunun genel yapısı aşağıdaki şekilde ele alınır;

$\alpha > 0$ olmak üzere

$$D_*^\alpha [y(t)] = f(t, y(t)), \quad (3.1.1)$$

ve başlangıç koşulları

$$y^{(k)}(0) = y_0^{(k)}, \quad (3.1.2)$$

iken burada $k = 0, 1, 2, \dots, \lceil \alpha \rceil - 1$, ve $D_*^\alpha [\cdot]$ operatörü

$$D_*^\alpha [z(t)] = J^{n-\alpha} D^n [z(t)], \quad (3.1.3)$$

şeklinde tanımlanan Caputo anlamında türev operatörü olup n , α 'dan büyük en küçük tam sayı, D tam mertebeden türev operatörü ve J operatörü ise; $\mu > 0$ olmak üzere

$$J^\mu [z(t)] = \frac{1}{\Gamma[\mu]} \int_0^t (t-u)^{\mu-1} z(u) du, \quad (3.1.4)$$

şeklinde tanımlanan Riemann-Liouville integral operatörüdür.

(3.1.1) başlangıç değer probleminin (2.44) ifadesine göre Riemann-Liouville anlamında integrali alınırsa;

$$y(t) = \sum_{v=0}^{n-1} y_0^{(v)} \frac{t^v}{v!} + \frac{1}{\Gamma[\alpha]} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} f(u, y(u)) du, \quad (3.1.5)$$

şeklinde ikinci tür Volterra integral denklemi elde edilir. Böylece (3.1.5) denkleminde bulunan integralin değerini veren yapı elde edilmelidir. Bu yapının elde edilmesine geçmeden önce tam sayı mertebeden diferansiyel denklemler için tek adımlı Adams–Bashforth–Moulton metodunun genel yapısından bahsetmek için diferansiyel denklem ele alınabilir [88-90]. Burada

$$D[y(t)] = f(t, y(t)), \quad (3.1.6)$$

başlangıç koşulu

$$y(0) = y_0, \quad (3.1.7)$$

olmak üzere (3.1.6) denkleminin $[0, T]$ aralığının N adıma bölünerek her bir noktası için

$$h = \frac{T}{N}, \quad (3.1.8)$$

$$t_j = jh, \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots, N,$$

ve

$$y_j = y(t_j), \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots, k, \quad (3.1.9)$$

iken $y(t_{k+1})$ yaklaşımı

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(z, y(z)) dz, \quad (3.1.10)$$

dır. (3.1.10) denklemindeki integral

$$\int_a^b g(z) dz \approx \frac{b-a}{2} [g(a) + g(b)], \quad (3.1.11)$$

biçiminde ele alınır ve buna iki nokta yamuk kuralı uygulanırsa (3.1.10) denklemi

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \frac{h}{2} [f(t_k, y(t_k)) + f(t_{k+1}, y(t_{k+1}))], \quad (3.1.12)$$

olarak yeniden yazılabilir [88-91]. (3.1.9) denklemindeki $y(t_k) = y_k$ ve $y(t_{k+1}) = y_{k+1}$ ifadeleri (3.1.12) denkleminde yazılırsa

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})], \quad (3.1.13)$$

elde edilir. (3.1.13) denkleminde y_{k+1} ifadesi eşitliğin her iki tarafında olduğu için doğrudan çözümü elde etmek kolay olmaz. (3.1.13) denkleminin sağ tarafında bulunan y_{k+1} ilk yaklaşım için y_{k+1}^p kestirici değeri için;

$$\int_a^b g(z) dz \approx (b-a) g(a), \quad (3.1.14)$$

yamuk kuralı uygulanırsa

$$y_{k+1}^p = y_k + hf(t_k, y_k), \quad (3.1.15)$$

biçimindeki ileri Euler veya tek adımlı Adams–Bashforth metodu olarak bilinen denklemi elde edilir.

(3.1.15) eşitliğine göre (3.1.13) ifadesi yeniden yazılırsa tam sayı mertebeden diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri için tek adımlı Adams–Bashforth–Moulton metodu

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} \left[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1}^p) \right], \quad (3.1.16)$$

bulunur. (3.1.15) ve (3.1.16) denklemleri birlikte göz önüne alınarak (3.1.1) şeklinde tanımlanan kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerini veren tek adımlı kesirli Adams–Bashforth–Moulton metodunun yapısı elde edilir. Burada (3.1.5) integral ifadesi ile (3.1.10) integral ifadesi arasındaki temel farklılık alt sınırın sıfırdan başlamasıdır. Böylece Adams metodunun kesirli mertebeden integrallere uygulanması için integral aralığının alt sınırının t_k yerine 0 dan başlayarak alınması gerekir. (3.1.5) ifadesindeki integrali değiştirmek için $(t_{k+1} - \cdot)^{\alpha-1}$ ağırlık fonksiyonuna göre *yamuk kuralı* kullanılırsa;

$$\int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1} - z)^{\alpha-1} g(z) dz \approx \int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1} - z)^{\alpha-1} \tilde{g}_{k+1}(z) dz, \quad (3.1.17)$$

yazılır. Burada $\tilde{g}_{k+1}$, $t_j = jh$ düğüm noktalarına sahip $g(z)$ için parçalı linner interpolasyondur [88]. Bu anlamda, C. Lubich [92] tarafından literatüre kazandırılan integral teorisi oldukça doğal bir yaklaşımdır. Standart quadrature tekniği gereğince, (3.1.17) ifadesindeki sağ taraflı integral aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi yeniden yazılırsa

$$\int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1} - z)^{\alpha-1} \tilde{g}_{k+1}(z) dz = \sum_{j=0}^{k+1} a_{j,k+1} g(t_j). \quad (3.1.18)$$

elde edilir [89,90]. Burada

$$a_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} \times \begin{cases} k^{\alpha+1} - (k-\alpha)(k+1)^\alpha, & j=0, \\ (k-j+2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} \\ \quad - 2(k-j+1)^{\alpha+1}, & 1 \leq j \leq k \\ 1, & j = k+1, \end{cases} \quad (3.1.19)$$

dir. (3.1.17), (3.1.18) ve (3.1.19) ifadeleri (3.1.5) denkleminde yerine yazılarak yeniden düzenlenirse düzeltici formülü tek adımlı kesirli Adams–Moulton metodu aşağıdaki şekilde elde edilir [88];

$$y_{k+1} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t_{k+1}^j}{j!} y_0^{(j)} + \frac{1}{\Gamma[\alpha]} \left[\sum_{j=0}^k a_{j,k+1} f(t_j, y_j) + a_{k+1,k+1} f(t_{k+1}, y_{k+1}^p) \right]. \quad (3.1.20)$$

(3.1.20) ifadesinde bulunan y_{k+1}^p kesitirici formülü, tek adımlı Adams-Moulton metodunda da olduğu gibi aynı şekilde tek adımlı kesirli Adams-Bashforth metodu gereğince

$$\int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1} - z)^{\alpha-1} g(z) dz \approx \sum_{j=0}^k b_{j,k+1} g(t_j), \quad (3.1.21)$$

biçiminde yazılabilir. Burada

$$b_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha} \left[(k+1-j)^\alpha - (k-j)^\alpha \right], \quad (3.1.22)$$

dir [89]. (3.1.20) ifadesinde bulunan y_{k+1}^p kesitirici formülü kesirli Adams-Bashforth metodu tarafından

$$y_{k+1}^p = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t_{k+1}^j}{j!} y_0^{(j)} + \frac{1}{\Gamma[\alpha]} \sum_{j=0}^k b_{j,k+1} f(t_j, y_j), \quad (3.1.23)$$

olarak elde edilir. Böylece (3.1.23) ve (3.1.20) eşitlikleri birlikte göz önünde alınırsa kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin belirli aralıkta sayısal çözümünü veren tek adımlı kesirli Adams-Bashforth-Moulton metodu bulunmuş olur.

3.2 Homotopi Analiz Metodu (HAM)

Bu bölümde yarı analitik metotlardan birisi olan homotopi analiz metodu ele alınacaktır [100]. Homotopi analiz metodu ilk defa Liao tarafından 1992 yılında Doktora tezi olarak literatüre sunulmuştur [18]. Liao 2003 yılındaki eserinde bu metodun Fen ve Mühendislik alanlarındaki uygulamaları ve diğer analitik yöntemler ile arasındaki ilişkileri ortaya koymuştur [19]. Taylor seri açılımına dayanan homotopi analiz metodu lineer ve lineer olmayan birçok adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin seri çözümünü bulmak için kullanılmıştır [37]. Lineer olmayan bir diferansiyel denklem

$$N[u(x, t)] = 0, \quad (3.2.1)$$

şeklinde ele alınsın. N hem lineer hem de lineer olmayan terimleri içeren genel bir lineer olmayan kısmi diferansiyel operatör, x ve t bağımsız değişkenler, $u(x, t)$ ise denklemin çözümünü ifade etmektedir.

$u_0(x, t)$ sınır şartlarını sağlayan tahmini bir başlangıç fonksiyonu ve $p \in [0, 1]$ homotopi parametresi (topolojide gömme parametresi olarak adlandırılır) olmak üzere

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Phi(x, t; p) = u_0(x, t) = u(x, 0), \quad (3.2.2)$$

şeklinde $\Phi(x, t; p)$ fonksiyonu tanımlansın. Eğer genel homotopi tekniği kullanılarak

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Phi(x, t; p) = u(x, t), \quad (3.2.3)$$

şeklinde bir eşitlik yazılırsa Liao'nun sıfırıncı mertebeden deformasyon denklemi

$$(1 - p)L[\Phi(x, t; p) - u_0(x, t)] = hpH(x, t)N[\Phi(x, t; p)], \quad (3.2.4)$$

yazılır [37]. Burada h yakınsaklık aralığını belirlemede kullanılan parametre,

$H(x, t)$ homotopi fonksiyonu ve L lineer bir operatördür. p parametresi 0'dan 1'e

artarken $\Phi(x, t; p)$ çözüm fonksiyonu $u_0(x, t)$ başlangıç koşulundan $u(x, t)$ 'a kadar

değişir. Homotopi analiz teorisi gereğince $\Phi(x, t; p)$ çözüm fonksiyonunun Taylor seri açılımı;

$$\Phi(x, t; p) = u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(x, t) p^m, \quad (3.2.5)$$

şeklindedir [37].

Burada $u_m(x, t)$ fonksiyonu;

$$u_m(x, t) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^{m-1} \Phi(x, t; p)}{\partial p^{m-1}} \Big|_{p=0} \quad (3.2.6)$$

dir. (3.2.5) denkleminde $p \rightarrow 1$ ise

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(x, t), \quad (3.2.7)$$

olur. (3.2.4) ile verilen deformasyon denklemi p 'ye göre m kez diferansiyellenir ve $m!$ ile bölünür daha sonra $p = 0$ alınırsa deformasyon denklemi;

$$L[u_m(x, t) - \chi_m u_{m-1}(x, t)] = hH(x, t) R_m[\vec{u}_{m-1}(x, t)], \quad (3.2.8)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Burada $R_m[\vec{u}_{m-1}]$ fonksiyonu;

$$R_m[\vec{u}_{m-1}] = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[\Phi(x, t; p)]}{\partial p^{m-1}} \Big|_{p=0}, \quad (3.2.9)$$

ve

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1, \\ 1, & m > 1, \end{cases} \quad (3.2.10)$$

olarak tanımlanır [37].

3.3 Modifiye Edilmiş Kudryashov Metodu (MEKM)

Nikolay A. Kudryashov'un yedinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek için literatüre sunmuş olduğu Kudryashov metodunun genişletilmiş hali olan modifiye edilmiş Kudryashov metodu aşağıdaki gibi dört adımda ele alınabilir [27,93-95].

Adım 1. u fonksiyonu x ve t gibi iki bağımsız değişkene bağlı bir bağımlı fonksiyon olmak üzere

$$P(u, D_t^\alpha u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \dots) = 0, \quad (3.3.1)$$

şeklinde zaman kesirli kısmi diferansiyel denklemini ele alalım. (3.3.1) için dalga dönüşüm denklemi [96];

$$u(x, t) = u(\eta), \quad \eta = kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]}, \quad (3.3.2)$$

şeklinde olup burada k , λ sabit ve $\lambda \neq 0$ dır. (3.3.1) denklemine (3.3.2) dönüşümü uygulanırsa (3.3.1) kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemi

$$N(x, t, u, u', u'', u''', \dots) = 0, \quad (3.3.3)$$

şeklinde lineer olmayan adi diferansiyel denklemine dönüşür.

Adım 2. (3.3.3) adi diferansiyel denklemi için deneme denklem fonksiyonu aşağıdaki gibi alınır;

$$u(\tau) = \sum_{j=0}^N a_j \Omega^j, \quad (3.3.4)$$

burada $\Omega = \frac{1}{1 \mp a^\tau}$ dur. Ω fonksiyonu ise

$$\Omega_\tau = \ln a (\Omega^2 - \Omega), \quad (3.3.5)$$

denkleminin bir çözümüdür.

Adım 3. Modifiye edilmiş Kudryashov metoduna göre (3.3.3) lineer olmayan adi diferansiyel denkleminin çözümü aşağıdaki şekilde aranır;

$$u(\tau) = a_0 + a_1 \Omega + a_2 \Omega^2 + \dots + a_N \Omega^N + \dots \quad (3.3.6)$$

Klasik Kudryashov metodunun koşulları altında

$$u'(\xi) = a_N N \Omega^{N+1} + \dots, \quad (3.3.7)$$

$$u''(\xi) = a_N N(N+1) \Omega^{N+2} + \dots, \quad (3.3.8)$$

$$u^{(s)}(\xi) = a_N N(N+1) \dots (N+s-1) \Omega^{N+s} + \dots, \quad (3.3.9)$$

dir. (3.3.7), (3.3.8) ve (3.3.9) denklemleri (3.3.3)'de yerine yazılarak ve balans prensibinin koşulları dikkate alınarak (3.3.6) denkleminin derecesi olan N değeri hesaplanır.

Adım 4. (3.3.4) denklemi (3.3.3) lineer olmayan adi diferansiyel denkleminde yazılırsa Ω 'ya bağlı $R(\Omega)$ diferansiyel denklemi elde edilir. $R(\Omega)$ 'nin katsayıları sıfıra eşitlenerek cebirsel denklem sistemi elde edilir. Elde edilen cebirsel denklem sisteminin çözülmesiyle $a_0(t), a_1(t), a_2(t), \dots, a_N(t)$ katsayıları belirlenir. Böylece (3.3.1) zaman kesirli kısmi diferansiyel denkleminin analitik çözümleri elde edilmiş olur.

3.4 Modifiye Edilmiş Deneme Denklem Metodu (MEDDM)

Modifiye edilmiş deneme denklem metodu aşağıdaki adımlarla ifade edilebilir [96].

Adım 1. u fonksiyon x ve t iki bağımsız değişkene bağlı olan bağımlı bir fonksiyon olmak üzere

$$P(u, D_t^\alpha u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \dots) = 0, \quad (3.4.1)$$

(3.4.1) kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemi için dalga dönüşüm denklemi [96];

$$u(x, t) = u(\eta), \quad \eta = kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]}, \quad (3.4.2)$$

şeklinde olup burada k , λ sabit ve $\lambda \neq 0$ dır. (3.4.1) denkleminde (3.4.2) dönüşümü uygulanırsa (3.4.1) kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemi

$$N(u, u', u'', u''', \dots) = 0, \quad (3.4.3)$$

lineer olmayan adi diferansiyel denkleminde dönüşür.

Adım 2. (3.4.3) diferansiyel denklemi için deneme denklem fonksiyonu aşağıdaki gibi alınabilir;

$$u' = \frac{F(u)}{G(u)} = \frac{a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_n u^n}{b_0 + b_1 u + b_2 u^2 + \dots + b_l u^l} = \frac{\sum_{i=0}^n a_i u^i}{\sum_{j=0}^l b_j u^j}, \quad (3.4.4)$$

ve

$$u'' = \frac{F(u)(F'(u)G(u) - F(u)G'(u))}{G^3(u)}, \quad (3.4.5)$$

olup, burada $F(u)$ ve $G(u)$ polinomdur. (3.4.4) ve (3.4.5) eşitlikleri (3.4.3) denkleminde yerine yazılırsa, bu takdirde

$$\Omega(u) = \rho_s u^s + \dots + \rho_1 u + \rho_0 = 0, \quad (3.4.6)$$

biçiminde u 'ya bağlı olan (3.4.3) lineer olmayan adi diferansiyel denklemi bulunur. Balans prensibi gereğince n ve l arasındaki matematiksel bağıntı elde edilir ve daha sonra n ve l 'nin bazı değerleri hesaplanabilir.

Adım 3. (3.4.6) denklemindeki $\Omega(u)$ ifadesinin tüm katsayıları sıfıra eşitlenirse

$$\rho_i = 0, \quad i = 0, \dots, s \quad (3.4.7)$$

biçimindeki bir denklem sistemi elde edilir. Elde edilen denklem sisteminin çözülmesiyle $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ ve $b_0, b_1, b_2, \dots, b_l$ katsayılarının değerleri belirlenir.

Adım 4. (3.4.4) denklemi integre edilerek

$$\pm(\mu - \mu_0) = \int \frac{G(u)}{F(u)} du, \quad (3.4.8)$$

şeklinde temel integral formuna indirgenebilir. Burada $F(u)$ 'nin köklerini sağlayan polinomlar için ayırma sistemi kullanılırsa ve Mathematica programı uygulanırsa (3.4.8) denkleminin integralleri elde edilir. Burada elde edilen eşitlikler (3.4.3) diferansiyel denkleminin tam çözümleridir. Böylece (3.4.1) kesirli mertebeden diferansiyel denklemin tam salınımlı dalga çözümleri bulunur.

3.5 Genişletilmiş Deneme Denklem Metodu (GDDM)

Bu bölümde, deneme denklem metodunun yeni bir versiyonu olan Genişletilmiş Deneme Denklem Metodu [97,98] verilecektir. Bu metodun genel yapısı dört adımda ele alınabilir.

Adım 1. u fonksiyonu x ve t gibi iki bağımsız değişkene bağlı olan bağımlı bir fonksiyon olmak üzere

$$P(u, D_t^\alpha u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \dots) = 0, \quad (3.5.1)$$

şeklindeki kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemini ele alalım. Bunun için dalga dönüşüm denklemi [96];

$$u(x, t) = u(\eta), \quad \eta = kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma[1 + \alpha]}, \quad (3.5.2)$$

şeklinde olup burada k, λ sabit ve $\lambda \neq 0$ dır. (3.5.1) denkleminin (3.5.2) dönüşümü uygulanırsa (3.5.1) kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denkleminin

$$N(u, u', u'', u''', \dots) = 0, \quad (3.5.3)$$

lineer olmayan adi diferansiyel denkleminin dönüşümü görülür.

Adım 2. (3.5.3) diferansiyel denklemi için deneme denklem fonksiyonu

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{\delta} \tau_i Y^i, \quad (3.5.4)$$

olmak üzere

$$(Y')^2 = \wedge(Y) = \frac{\Phi(Y)}{\Psi(Y)} = \frac{\xi_0 + \xi_1 Y + \dots + \xi_{\theta} Y^{\theta}}{\zeta_0 + \zeta_1 Y + \dots + \zeta_{\varepsilon} Y^{\varepsilon}} = \frac{\sum_{i=0}^{\theta} \xi_i Y^i}{\sum_{j=0}^{\varepsilon} \zeta_j Y^j}, \quad (3.5.5)$$

biçimindedir. Buradanda (3.5.4) ve (3.5.5) denklemlerinden aşağıdaki eşitlikler elde edilebilir.

$$(u')^2 = \frac{\Phi(Y)}{\Psi(Y)} \left(\sum_{i=0}^{\delta} i \tau_i Y^{i-1} \right)^2, \quad (3.5.6)$$

$$u'' = \frac{\Phi'(Y) \Psi(Y) - \Phi(Y) \Psi'(Y)}{2\Psi^2(Y)} \left(\sum_{i=0}^{\delta} i \tau_i Y^{i-1} \right) + \frac{\Phi(Y)}{\Psi(Y)} \left(\sum_{i=0}^{\delta} i(i-1) \tau_i Y^{i-2} \right), \quad (3.5.7)$$

burada $\Phi(Y)$ ve $\Psi(Y)$ polinomdur. (3.5.5), (3.5.6) ve (3.5.7) denklemleri (3.5.3) denkleminde yerine yazıldığında,

$$\Omega(Y) = \rho_s Y^s + \dots + \rho_1 Y + \rho_0 = 0, \quad (3.5.8)$$

şeklinde Y 'ya bağlı olan $\Omega(Y)$ polinomu elde edilir. Buradan da balans prensibi gereğince, θ, ε ve δ arasındaki matematiksel bağıntı bulunur ve böylece θ, ε ve δ 'nın bazı değerleri de buna göre hesaplanabilir.

Adım 3. (3.5.8) denklemindeki $\Omega(Y)$ ifadesinin tüm katsayıları sıfıra eşitlenerek aşağıdaki şekilde cebirsel denklem sistemi elde edilir;

$$\rho_i = 0, \quad i = 0, \dots, s. \quad (3.5.9)$$

Elde edilen cebirsel denklem sisteminin çözülmesiyle $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{\theta}$ ve $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{\varepsilon}$ katsayılarının değerleri belirlenebilir.

Adım 4. (3.5.5) denklemini integre edilerek

$$\pm(\eta - \eta_0) = \int \frac{1}{\sqrt{\wedge(Y)}} dY = \int \sqrt{\frac{\Psi(Y)}{\Phi(Y)}} dY, \quad (3.5.10)$$

şeklinde temel integral formu ifade edilebilir. Burada $\Omega(Y)$ 'nin köklerini sağlayan polinomlar için ayırma sistemi göz önüne alınır ve Mathematica programı kullanılırsa (3.5.10) denklemindeki integraller hesaplanabilir. Burada elde edilen eşitlikler (3.5.3) diferansiyel denkleminin tam çözümleridir. Böylece (3.5.1) kesirli mertebeden diferansiyel denklemin tam salınımlı dalga çözümleri bulunabilir.

4. METOTLARIN UYGULANMASI

Bu bölümde ilk olarak, kesirli mertebeden lineer ve lineer olmayan adi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerini elde etmek için KABMM kullanılmıştır. L_2 ayırık normu ve L_∞ maximum nodal normu kullanılarak KABMM'nun doğruluğu incelenmiştir.

İkinci adımda, kesirli mertebeden Rosenau–Hyman denkleminin, genelleştirilmiş Fisher denkleminin ve zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin analitik çözümlerini elde etmek için Genişletilmiş deneme denklem metodu, modifiye edilmiş Kudryashov metodu ve Modifiye edilmiş deneme denklem metodu kullanılarak analitik çözümleri elde edilmiş bunun akabinde bu denklemlerin her birisinin sayısal veri tabloları oluşturulmuş ve bunların iki ve üç boyutlu grafikleri çizilmiştir.

Daha sonra ikinci bölümdeki denklemlere Homotopi analiz metodu uygulanarak bu denklemlerin yaklaşık çözümleri elde edilmiştir. Sonuçta bu denklemlerin analitik çözümlerinden elde edilen sayısal veriler ile HAM ile elde edilen sayısal veriler mukayese edilerek hata tabloları oluşturularak çözümlerin grafikleri gösterilmiştir.

4.1 Kesirli Mertebeden Lineer Adi Diferansiyel Denkleme KABMM'nun Uygulanması

α kesirli türevi temsil eden bir parametre olmak üzere homojen olmayan kesirli mertebeden lineer diferansiyel denklem

$$D_t^\alpha u(t) + u(t) = t^{3+\alpha} + \frac{\Gamma[4+\alpha]}{6} t^3, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (4.1.1)$$

şeklinde verilsin. Bu (4.1.1) denklemin sayısal çözümü için KABMM kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir. Burada (4.1.1) homojen olmayan kesirli mertebeden lineer diferansiyel denkleminin analitik çözümü ise

$$u(t) = t^{3+\alpha}, \quad (4.1.2)$$

dır [104]. Diğer yandan (3.1.1) eşitliği burada göz önüne alınırsa (4.1.1) denkleminin

$$D_t^\alpha u(t) = f(t, u(t)) = -u(t) + t^{3+\alpha} + \frac{\Gamma[4+\alpha]}{6} t^3, \quad (4.1.3)$$

biçiminde yazıldığı görülür.

Burada (4.1.1) kesirli mertebeden diferansiyel denkleminin $0 < t \leq 1$ aralığındaki sayısal çözümü için adım sayısı $n = 300$ ve başlangıç koşulu $u(0) = 0$ olarak alınır ve (4.1.3) denkleminde KABMM'ni uygulanırsa ilk on terimi için elde edilen sayısal değerler ve hata miktarları aşağıdaki şekilde elde edilir. Burada metodun doğruluğunu test etmek için

$$L_2 = \|U^{Analitik} - U_M\|_2 \simeq \sqrt{h \sum_{j=0}^M |U_j^{Analitik} - (U_M)_j|^2}, \quad (4.1.4)$$

olarak tanımlanan L_2 ayrık normu ve

$$L_\infty = \|U^{Analitik} - U_M\|_\infty \simeq \max_j |U_j^{Analitik} - (U_M)_j|, \quad (4.1.5)$$

şeklinde tanımlanan L_∞ maximum nodal normu kullanılmıştır [105].

Tablo 4.1.1. (4.1.1) Kesirli mertebeden lineer adi diferansiyel denkleminin $\alpha = 0.25$ için KABMM ile elde edilen sayısal çözümü ve hata tablosu

n	t_n	u_{Tam}	$u_{Sayisal}$	$u_{Tam} - u_{Sayisal}$
1	0.00333333	8.8930153E-09	1.2733339E-08	-3.8340377E-09
2	0.00666667	8.4664901E-08	1.0586060E-07	-2.1195501E-08
3	0.01000000	3.1622776E-07	3.7064679E-07	-5.4419030E-08
4	0.01333333	8.0547292E-07	9.0951855E-07	-1.0404572E-07
5	0.01666667	1.6634449E-06	1.8339278E-06	-1.7048289E-07
6	0.02000000	3.0084824E-06	3.2655390E-06	-2.5407143E-07
7	0.02333333	4.9650605E-06	5.3201650E-06	-3.5510443E-07
8	0.02666667	7.6629921E-06	8.1368311E-06	-4.7383897E-07
9	0.03000000	1.1236836E-05	1.1847341E-05	-6.1050410E-07
10	0.03333333	1.5825444E-05	1.6590751E-05	-7.6530645E-07

L_2 ayrık normu kullanılarak (4.1.1) kesirli mertebeden lineer adi diferansiyel denklemin sayısal çözümünü elde etmek için kullanılan metodun doğruluğunu gösteren algoritma $n = 300$ için aşağıdaki şekildedir.

```

nsteps=300;
alfa=0.25;
exact[t_]:=t^(3+alfa);

$$\sqrt{h * \sum_{k=0}^{nsteps} (y[k] - exact[x[k]])^2}$$


```

Yukarıdaki algoritma kullanılarak metodun doğruluğunu gösteren L_2 hata miktarları toplamı

0.000440091

olarak elde edilir.

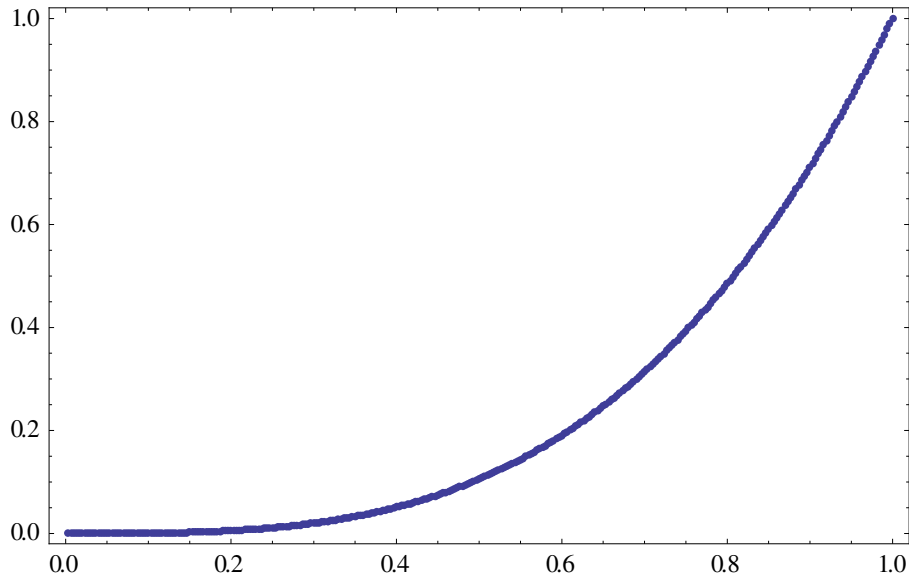
Benzer şekilde L_∞ maximum nodal normu kullanılarak (4.1.1) kesirli mertebeden lineer adi diferansiyel denklemin sayısal çözümünü elde etmek için kullanılan metodun doğruluğunu gösteren algoritma $n = 300$ için aşağıdaki şekildedir.

```
nsteps=300;  
alfa=0.25;  
exact[t_]:=t^(3+alfa);  
enb=Abs[y[0]-exact[0]];  
For[k=1,k≤nsteps,k=k+1,  
if[enb<Abs[y[k]-exact[x[k]]],enb=y[k]-exact[x[k]]]  
Print[enb]
```

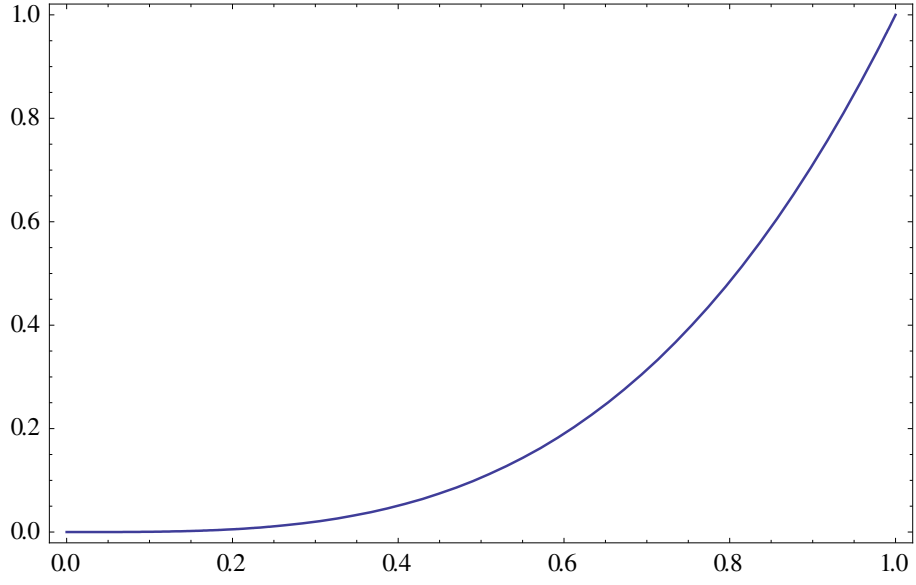
Yukarıdaki algoritma kullanılarak metodun doğruluğunu gösteren L_∞ maximum hata miktarı

0.000998594

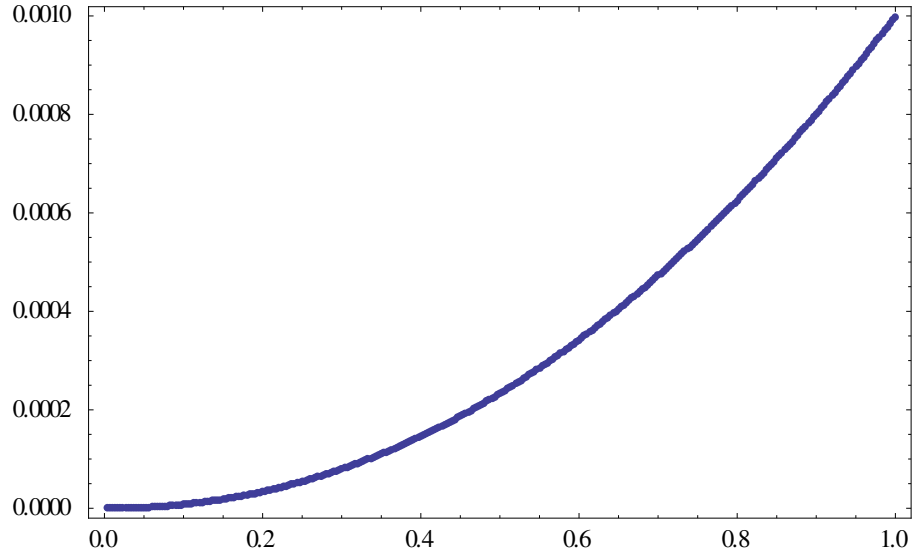
olarak bulunur.



Şekil 4.1.1. (4.1.1) Kesirli mertebeden lineer adi diferansiyel denkleminin KABMM ile elde edilen sayısal çözümlerin $0 \leq t \leq 1, \alpha = 0.25$ için elde edilen iki boyutlu görünümü



Şekil 4.1.2. (4.1.1) Kesirli mertebeden lineer adi diferansiyel denkleminin analitik çözümlerin $0 \leq t \leq 1, \alpha = 0.25$ için elde edilen iki boyutlu görünümü



Şekil 4.1.3. $0 \leq t \leq 1$ ve $\alpha = 0.25$ için KABMM ile elde edilen mutlak hatanın iki boyutlu görünümü

Tablo 4.1.2. (4.1.1) Kesirli mertebeden lineer adi diferansiyel denkleminin $\alpha = 0.50$ için KABMM ile elde edilen sayısal çözümü ve hata tablosu

n	t_n	u_{Tam}	$u_{Sayisal}$	$u_{Tam} - u_{Sayisal}$
1	0.0033333	2.1383343E-09	3.2112749E-09	-1.0729406E-09
2	0.0066667	2.4192491E-08	2.8342593E-08	-4.1501024E-09
3	0.0100000	1.0000000E-07	1.0901792E-07	-9.0179252E-09
4	0.0133333	2.7370679E-07	2.8939674E07	-1.5689950E-08
5	0.0166667	5.9768261E-07	6.2189842E-07	-2.4215811E-08
6	0.0200000	1.1313708E-06	1.1660257E-06	-3.4654934E-08
7	0.0233333	1.9405227E-06	1.9875918E-06	-4.7069013E-08
8	0.0266667	3.0966388E-06	3.1581582E-06	-6.1519328E-08
9	0.0300000	4.6765371E-06	4.7546028E-06	-7.805664E-08
10	0.0333333	6.7620068E-06	6.8587727E-06	-9.6765901E-08

L_2 ayırık normu kullanılarak (4.1.1) kesirli mertebeden lineer adi diferansiyel denklemin sayısal çözümünü elde etmek için kullanılan metodun doğruluğunu gösteren algoritma $n = 300$ için aşağıdaki şekildedir.

```

nsteps=300;
alfa=0.50;
exact[t_]:=t^(3+alfa);

$$\sqrt{h * \sum_{k=0}^{nsteps} (y[k] - exact[x[k]])^2}$$


```

Yukarıdaki algoritma kullanılarak metodun doğruluğunu gösteren L_2 hata miktarları toplamı

0.000077039

olarak bulunur.

Benzer şekilde, L_∞ maximum nodal normu kullanılarak (4.1.1) kesirli mertebeden lineer adi diferansiyel denklemin sayısal çözümünü elde etmek için kullanılan metodun doğruluğunu gösteren algoritma $n = 300$ için aşağıdaki biçimindedir.

```

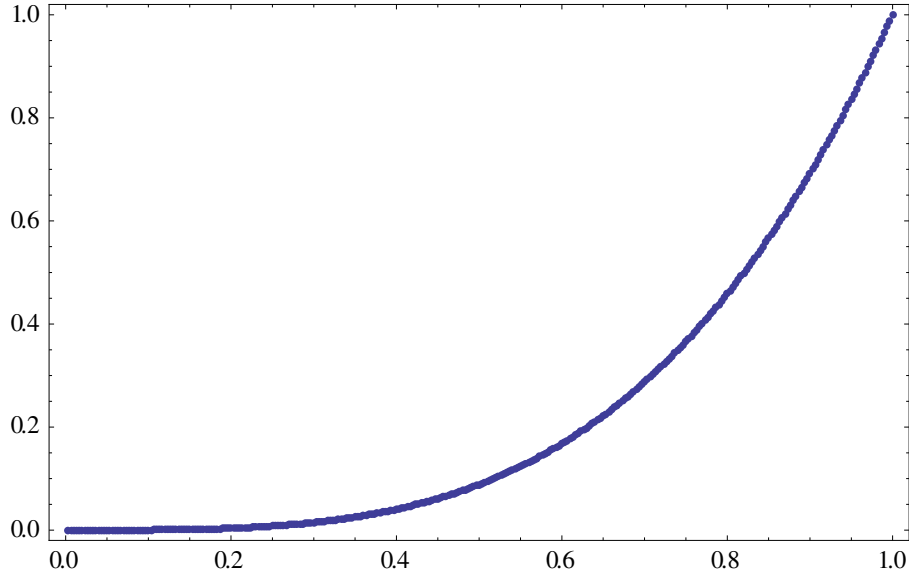
nsteps=300;
alfa=0.50;
exact[t_]:=t^(3+alfa);
enb=Abs[y[0]-exact[0]];
For[k=1,k≤nsteps, k=k+1,
if[enb<Abs[y[k]-exact[x[k]]],enb=y[k]-exact[x[k]]]]
Print[enb]

```

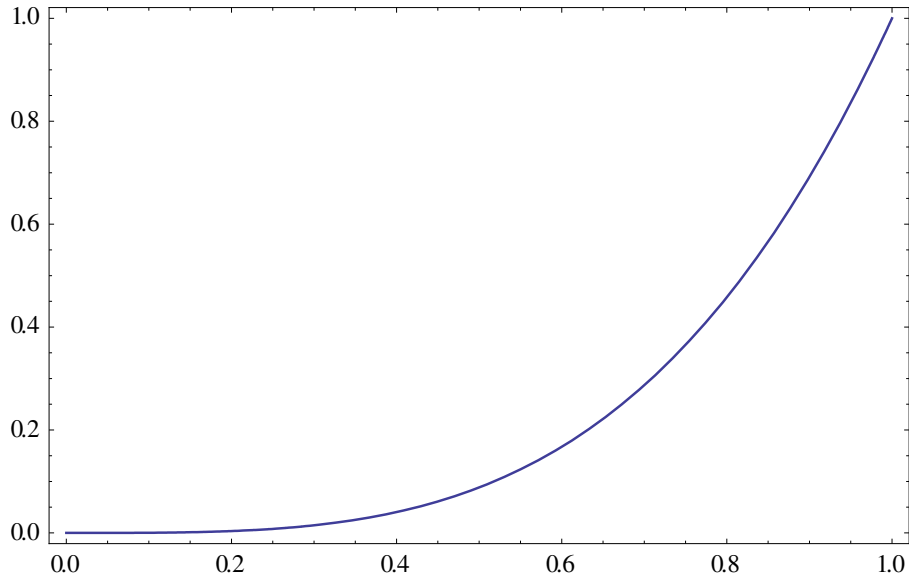
Yukarıdaki algoritma kullanılarak metodun doğruluğunu gösteren L_∞ maximum hata miktarı

0.000180598

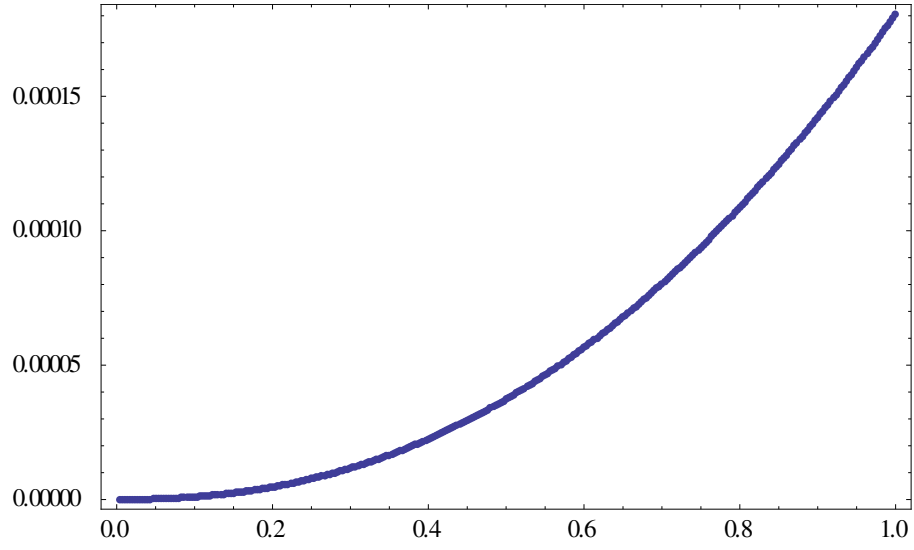
olarak bulunur.



Şekil 4.1.4. (4.1.1) Kesirli mertebeden lineer adi diferansiyel denkleminin KABMM ile elde edilen sayısal çözümünün $0 \leq t \leq 1$, $\alpha = 0.50$ için elde edilen iki boyutlu görünümü



Şekil 4.1.5. (4.1.1) Kesirli mertebeden lineer adi diferansiyel denkleminin analitik çözümünün $0 \leq t \leq 1$, $\alpha = 0.50$ için elde edilen iki boyutlu görünümü



Şekil 4.1.6. $0 \leq t \leq 1$ ve $\alpha = 0.50$ için KABMM ile elde edilen mutlak hatanın iki boyutlu görünümü

Tablo 4.1.3. (4.1.1) Kesirli mertebeden lineer adi diferansiyel denkleminin $\alpha = 0.75$ için KABMM ile elde edilen sayısal çözümü ve hata tablosu

n	t_n	u_{Tam}	$u_{Sayisal}$	$u_{Tam} - u_{Sayisal}$
1	0.0033333	5.1380141E-10	8.8752788E-10	-3.7372647E-10
2	0.0066667	6.9128602E-09	8.3108958E-09	-1.3980355E-09
3	0.0100000	3.1622776E-08	3.4595664E-08	-2.9728881E-09
4	0.0133333	9.3007990E-08	9.8076290E-08	-5.0682993E-09
5	0.0166667	2.1474982E-07	2.2242107E-07	-7.6712350E-09
6	0.0200000	4.2546367E-07	4.3624009E-07	-1.0776420E-08
7	0.0233333	7.5842553E-07	7.72808246E-07	-1.4382715E-08
8	0.0266667	1.2513613E-06	1.2698530E-06	-1.8491667E-08
9	0.0300000	1.9462772E-06	1.9693837E-06	-2.3106527E-08
10	0.0333333	2.8893176E-06	2.9175494E-06	-2.8231731E-08

L_2 ayırık normu kullanılarak (4.1.1) kesirli mertebeden lineer adi diferansiyel denklemin sayısal çözümünü elde etmek için kullanılan metodun doğruluğunu gösteren algoritma $n = 300$ için aşağıdaki şekildedir.

```
nsteps=300;
alfa=0.75;
exact[t_]:=t^(3+alfa);
```

$$\sqrt{h * \sum_{k=0}^{nsteps} (y[k] - \text{exact}[x[k]])^2}$$

Yukarıdaki algoritma kullanılarak metodun doğruluğunu gösteren L_2 hata miktarları toplamı

0.0000190654

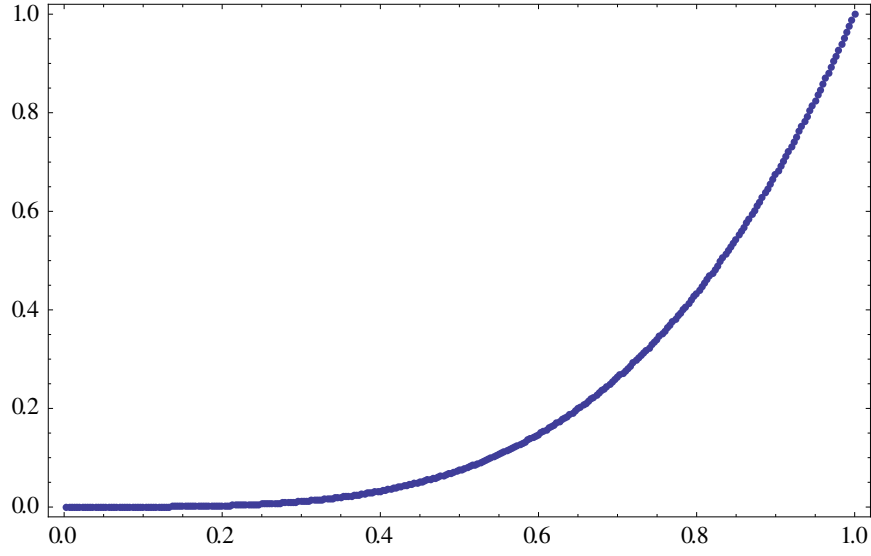
olarak elde edilir. Benzer şekilde, L_∞ maximum nodal normu kullanılarak (4.1.1) kesirli mertebeden lineer adi diferansiyel denklemin sayısal çözümünü elde etmek için kullanılan metodun doğruluğunu gösteren algoritma $n = 300$ için aşağıdaki biçimdedir.

```
nsteps=300;
alfa=0.75;
exact[t_]:=t^(3+alfa);
enb=Abs[y[0]-exact[0]];
For[k=1,k≤nsteps, k=k+1,
if[enb<Abs[y[k]-exact[x[k]]],enb=y[k]-exact[x[k]]]
Print[enb]
```

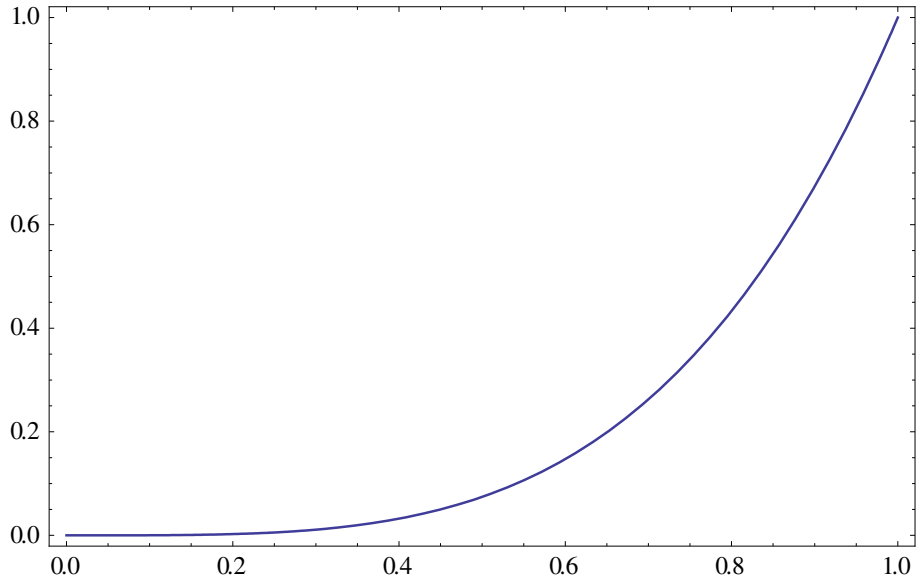
Yukarıdaki algoritma kullanılarak metodun doğruluğunu gösteren L_∞ maximum hata miktarı

0.0000455084

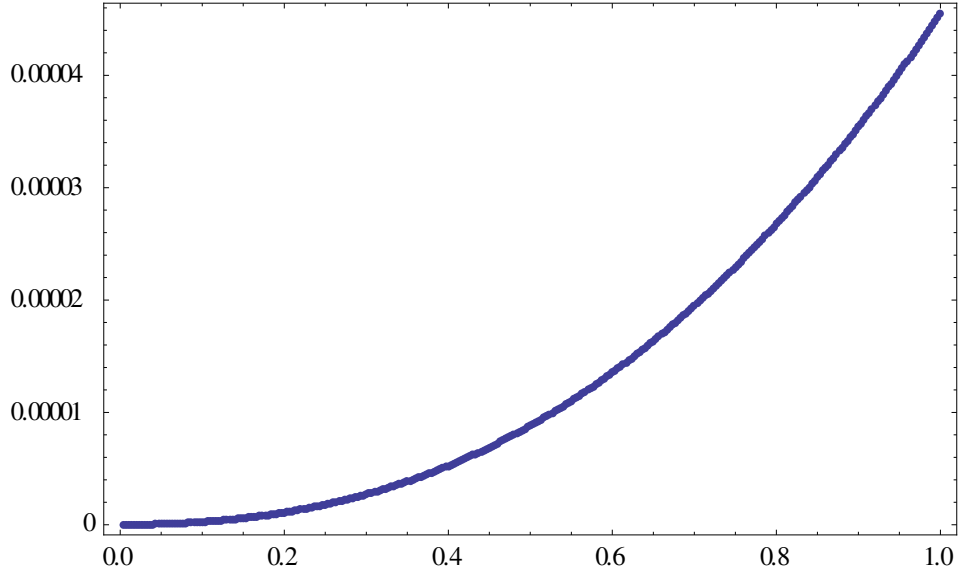
olarak elde edilir.



Şekil 4.1.7. (4.1.1) Kesirli mertebeden lineer adi diferansiyel denkleminin KABMM ile elde edilen sayısal çözümünün $0 \leq t \leq 1$, $\alpha = 0.75$ için elde edilen iki boyutlu görünümü



Şekil 4.1.8. (4.1.1) Kesirli mertebeden lineer adi diferansiyel denkleminin analitik çözümünün $0 \leq t \leq 1$, $\alpha = 0.75$ için elde edilen iki boyutlu görünümü



Şekil 4.1.9. $0 \leq t \leq 1$ ve $\alpha = 0.75$ için KABMM ile elde edilen mutlak hatanın iki boyutlu görünümü

4.2 Kesirli Mertebeden Lineer Olmayan Adi Diferansiyel Denkleme KABMM'nun Uygulanması

α kesirli türevi temsil eden bir parametre, η ve T sabitler olmak üzere kesirli mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denklem

$$D_t^\alpha u(t) + \eta u^2(t) = \frac{\Gamma[5+\alpha]}{24T^{4+\alpha}} t^4 + \eta \left(\frac{t}{T}\right)^{8+2\alpha}, \quad 1 < \alpha \leq 2, \quad (4.2.1)$$

şeklinde verilsin. Bu denkleminin analitik çözümü

$$u(t) = \left(\frac{t}{T}\right)^{4+\alpha}, \quad (4.2.2)$$

dir [104]. Şimdi (3.1.1) eşitliği ve $\eta = T = 1$ için (4.2.1) denklemini birlikte göz önüne alınırsa, bu denklem

$$D_t^\alpha u(t) = f(x, u(t)) = -u^2(t) + \frac{\Gamma[5+\alpha]}{24} t^4 + t^{8+2\alpha}, \quad (4.2.3)$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

(4.2.1) kesirli mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denkleminin $0 < t \leq 1$ aralığında sayısal çözümü için adım sayısı $n=300$ ve başlangıç değeri $u(0)=0$ olarak alınır ve (4.2.3) denkleminde KABMM’u uygulanırsa, ilk on terimi için elde edilen sayısal değerler ve bunlara ilişkin hata miktarları aşağıdaki şekilde elde edilir.

Tablo 4.2.1. (4.2.1) Kesirli mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denkleminin $\alpha = 1.25$ için KABMM ile elde edilen sayısal çözümü ve hata tablosu

n	t_n	u_{Tam}	$u_{Sayısal}$	$u_{Tam} - u_{Sayısal}$
1	0.00333333	9.8881128E-14	2.9876778E-13	-1.9988665E-13
2	0.00666667	3.7628845E-12	5.6039360E-12	-1.8410515E-12
3	0.01000000	3.1622776E-11	3.8373813E-11	-6.7510365E-12
4	0.01333333	1.4319551E-10	1.6022741E-10	-1.7032249E-11
5	0.01666667	4.6206804E-10	4.9704561E-10	-3.4977573E-11
6	0.02000000	1.2033929E-09	1.2664240E-09	-6.3031050E-11
7	0.02333333	2.7031996E-09	2.8069634E-09	-1.0376375E-10
8	0.02666667	5.4492388E-09	5.6090960E-09	-1.5985717E-10
9	0.03000000	1.0113153E-08	1.0347244E-08	-2.3409097E-10
10	0.03333333	1.7583827E-08	1.7913160E-08	-3.2933348E-10

L_2 ayırık normu kullanılarak (4.2.1) kesirli mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denklemin sayısal çözümünü elde etmek için kullanılan metodun doğruluğunu gösteren algoritma $n = 300$ için aşağıdaki şekildedir.

```

nsteps=300;
alfa=1.25;
exact[t_]:=t^(4+alfa);

$$\sqrt{h * \sum_{k=0}^{nsteps} (y[k] - exact[x[k]])^2}$$


```

Yukarıdaki algoritma kullanılarak metodun doğruluğunu gösteren L_2 hata miktarları toplamı ise

0.00000000809849

olarak bulunur.

Benzer şekilde, L_∞ maximum nodal normu kullanılarak (4.2.1) kesirli mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denklemin sayısal çözümünü elde etmek için kullanılan metodun doğruluğunu gösteren algoritma $n = 300$ için aşağıdaki şekildedir.


```

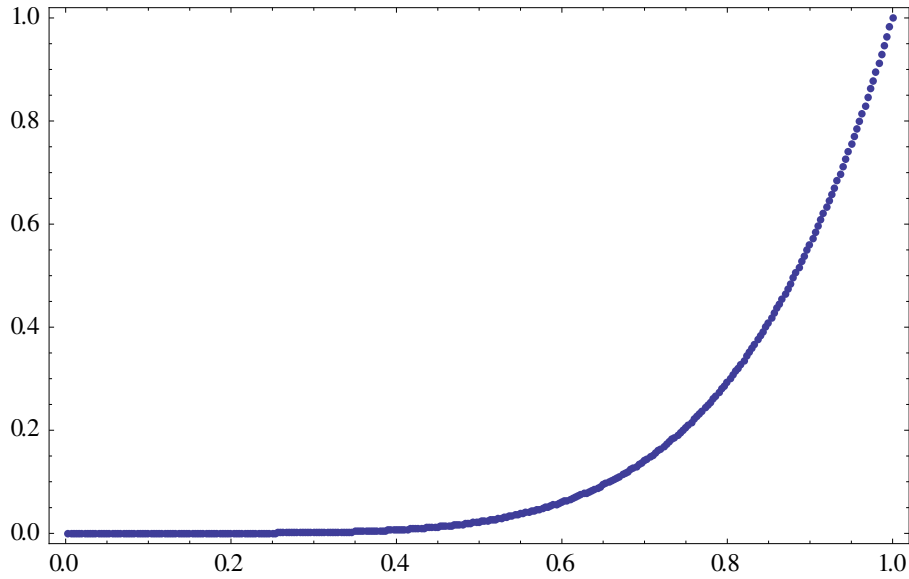
nsteps=300;
alfa=1.25;
exact[t_]:=t^(4+alfa);
enb=Abs[y[0]-exact[0]];
For[k=1,k≤nsteps,k=k+1,
if[enb<Abs[y[k]-exact[x[k]]],enb=y[k]-exact[x[k]]]]
Print[enb]

```

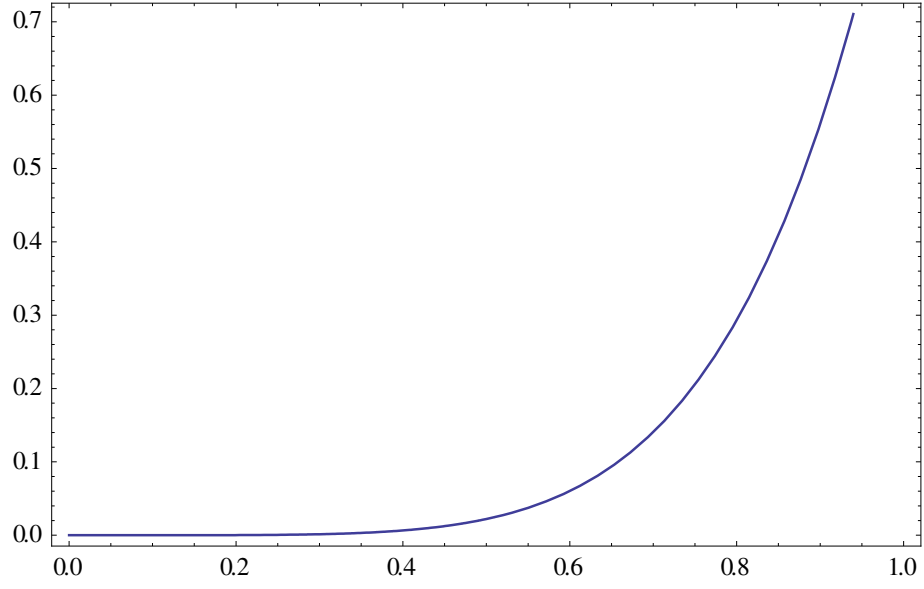
Yukarıdaki algoritma kullanılarak metodun doğruluğunu gösteren L_∞ maximum hata miktarları

0.0000225821

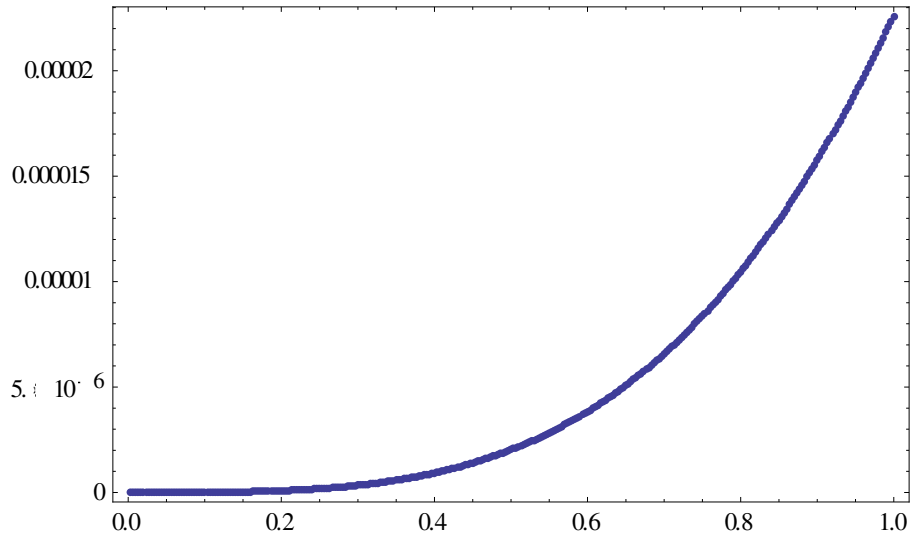
olarak elde edilir.



Şekil 4.2.1. (4.2.1) Kesirli mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denkleminin KABMM ile elde edilen sayısal çözümünün $0 \leq t \leq 1$, $\alpha = 1.25$ için elde edilen iki boyutlu görünümü



Şekil 4.2.2. (4.2.1) Kesirli mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denkleminin analitik çözümünün $0 \leq t \leq 1$, $\alpha = 1.25$ için elde edilen iki boyutlu görünümü



Şekil 4.2.3. $0 \leq t \leq 1$ ve $\alpha = 1.25$ için KABMM ile elde edilen mutlak hatanın iki boyutlu görünümü

Tablo 4.2.2. (4.2.1) Kesirli mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denkleminin $\alpha = 1.50$ için KABMM ile elde edilen sayısal çözümü ve hata tablosu

n	t_n	u_{Tam}	$u_{Sayisal}$	$u_{Tam} - u_{Sayisal}$
1	0.0033333	2.3759270E-14	8.5756116E-14	-6.1996846E-14
2	0.0066667	1.0742218E-12	1.6856954E-12	-6.1047364E-13
3	0.0100000	0.0100000E-11	1.2416149E-11	-2.4161492E-12
4	0.0133333	4.8658985E-11	5.5148138E-11	-6.4891532E-12
5	0.0166667	1.6602294E-10	1.8005170E-10	-1.4028752E-11
6	0.0200000	4.5254833E-10	4.7894494E-10	-2.6396606E-11
7	0.0233333	1.0565068E-09	1.1016059E-09	-4.5099091E-11
8	0.0266667	2.2020543E-09	2.2738287E-09	-7.1774428E-11
9	0.0300000	4.2088834E-09	4.3170662E-09	-1.0818276E-10
10	0.0333333	7.5733409E-09	7.6695392E-09	-1.5619822E-10

L_2 ayırık normu kullanılarak (4.2.1) kesirli mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denklemin sayısal çözümünü elde etmek için kullanılan metodun doğruluğunu gösteren algoritma $n = 300$ için aşağıdaki biçimdedir.

```

nsteps=300;
alfa=1.50;
exact[t_]:=t^(4+alfa);

$$\sqrt{h * \sum_{k=0}^{nsteps} (y[k] - exact[x[k]])^2}$$


```

Yukarıdaki algoritma kullanılarak metodun doğruluğunu gösteren L_2 hata miktarları toplamı ise

0.00000000809849

olarak elde edilir. Benzer şekilde, L_∞ maximum nodal normu kullanılarak (4.2.1) kesirli mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denklemin sayısal çözümünü elde etmek için kullanılan metodun doğruluğunu gösteren algoritma $n = 300$ için aşağıdaki şekildedir.

```

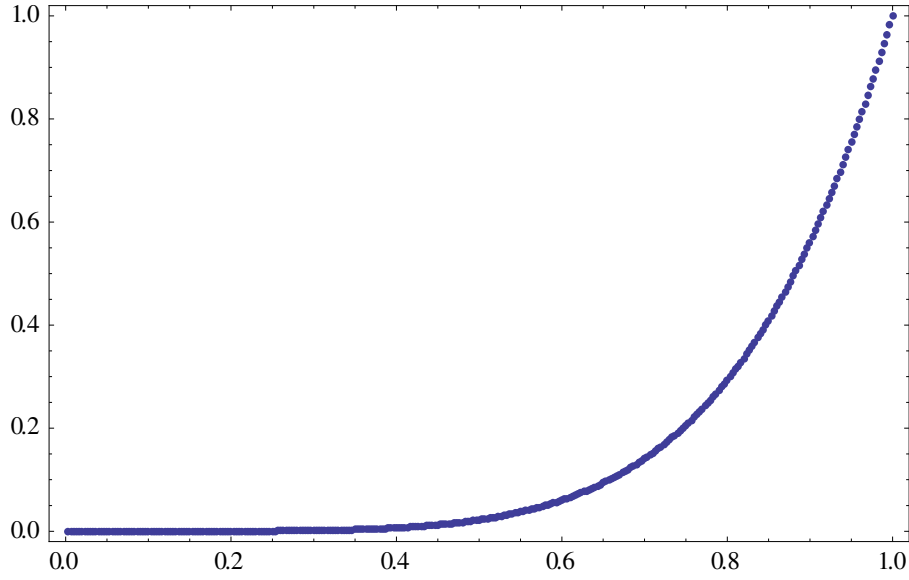
nsteps=300;
alfa=1.50;
exact[t_]:=t^(4+alfa);
enb=Abs[y[0]-exact[0]];
For[k=1,k≤nsteps,k=k+1,
if[enb<Abs[y[k]-exact[x[k]]],enb=y[k]-exact[x[k]]]]
Print[enb]

```

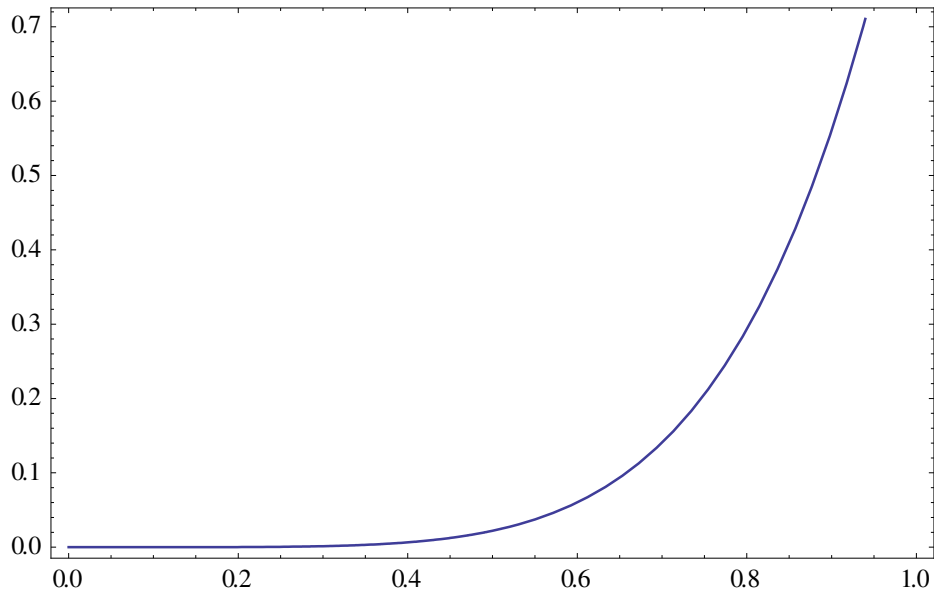
Yukarıdaki algoritma kullanılarak metodun doğruluğunu gösteren L_∞ maximum hata miktarları

0.0000225821

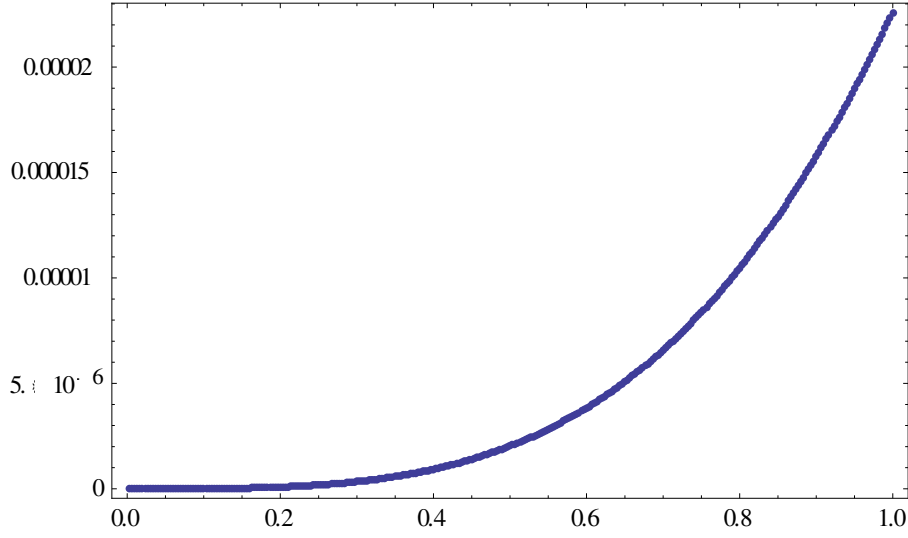
olarak bulunur.



Şekil 4.2.4. (4.2.1) Kesirli mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denkleminin KABMM ile elde edilen sayısal çözümünün $0 \leq t \leq 1$, $\alpha = 1.5$ için elde edilen iki boyutlu görünümü



Şekil 4.2.5. (4.2.1) Kesirli mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denkleminin analitik çözümünün $0 \leq t \leq 1$, $\alpha = 1.5$ için elde edilen iki boyutlu görünümü



Şekil 4.2.6. $0 \leq t \leq 1$ ve $\alpha = 1.50$ için KABMM ile elde edilen mutlak hatanın iki boyutlu görünümü

Tablo 4.2.3. (4.2.1) Kesirli mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denkleminin $\alpha = 1.75$ için KABMM ile elde edilen sayısal çözümü ve hata tablosu

n	t_n	u_{Tam}	$u_{Sayisal}$	$u_{Tam} - u_{Sayisal}$
1	0.0033333	5.7089045E-15	2.4363196E-14	-1.8654291E-14
2	0.0066667	3.0723823E-13	5.0498014E-13	-1.9774191E-13
3	0.0100000	3.1622776E-12	4.0125200E-12	-8.5024240E-13
4	0.0133333	1.6534753E-11	1.8974819E-11	-2.4400657E-12
5	0.0166667	5.9652728E-11	6.5218503E-11	-5.5657757E-12
6	0.0200000	1.7018546E-10	1.8113626E-10	-1.0950080E-11
7	0.0233333	4.1292056E-10	4.3235707E-10	-1.9436511E-11
8	0.0266667	8.8985697E-10	9.2183378E-10	-3.1976810E-11
9	0.0300000	1.7516495E-09	1.8012834E-09	-4.9633889E-11
10	0.0333333	3.2103529E-09	3.2839275E-09	-7.3574614E-11

L_2 ayırık normu kullanılarak (4.2.1) kesirli mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denklemin sayısal çözümünü elde etmek için kullanılan metodun doğruluğunu gösteren algoritma $n = 300$ için aşağıdaki biçimdedir.

```
nsteps=300;
alfa=1.75;
exact[t_]:=t^(4+alfa);

$$\sqrt{h * \sum_{k=0}^{nsteps} (y[k] - exact[x[k]])^2}$$

```

Yukarıdaki algoritma kullanılarak metodun doğruluğunu gösteren L_2 hata miktarları toplamı

0.00000000863107

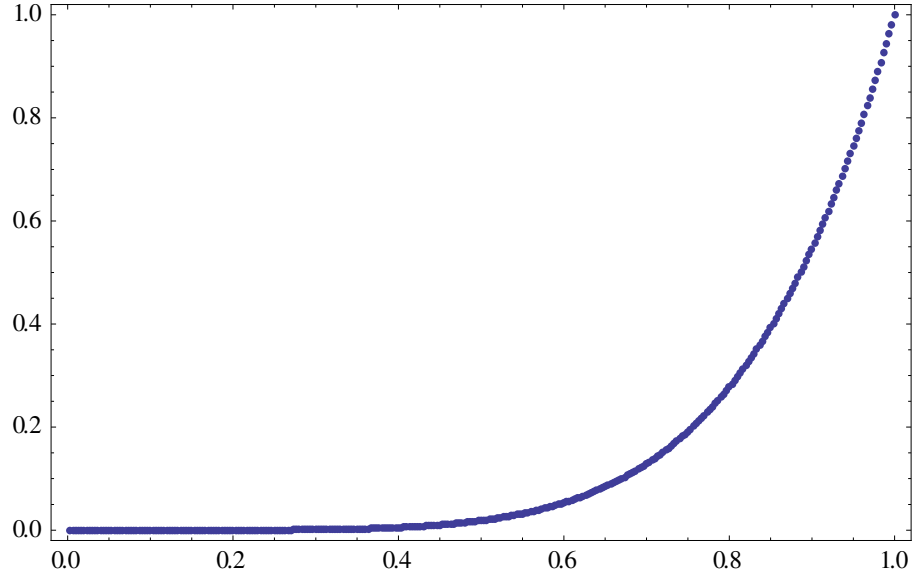
olarak hesaplanır. Benzer şekilde, L_∞ maximum nodal normu kullanılarak (4.2.1) kesirli mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denklemin sayısal çözümünü elde etmek için kullanılan metodun doğruluğunu gösteren algoritma $n = 300$ için aşağıdaki gibidir.

```
nsteps=300;
alfa=1.75;
exact[t_]:=t^(4+alfa);
enb=Abs[y[0]-exact[0]];
For[k=1,k≤nsteps, k=k+1,
if[enb<Abs[y[k]-exact[x[k]]],enb=y[k]-exact[x[k]]]]
Print[enb]
```

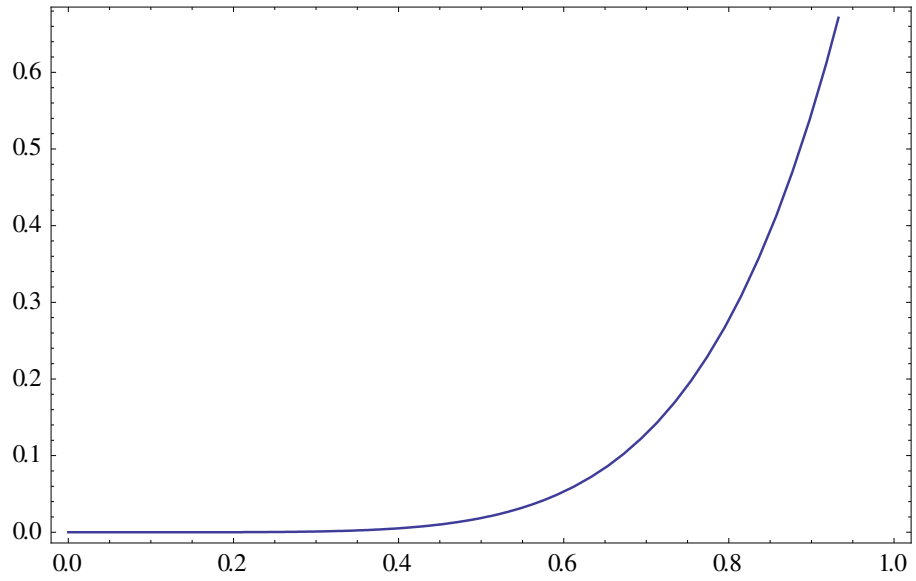
Yukarıdaki algoritma kullanılarak metodun doğruluğunu gösteren L_∞ maximum hata miktarları

0.0000247177

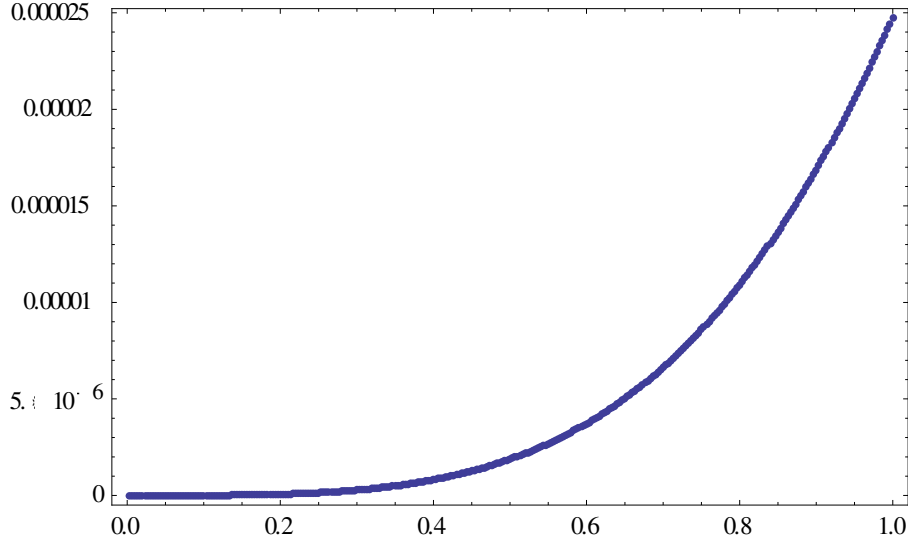
olarak bulunur.



Şekil 4.2.7. (4.2.1) Kesirli mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denkleminin KABMM ile elde edilen sayısal çözümünün $0 \leq t \leq 1$, $\alpha = 1.75$ için elde edilen iki boyutlu görünümü



Şekil 4.2.8. (4.2.1) Kesirli mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denkleminin analitik çözümünün $0 \leq t \leq 1$, $\alpha = 1.75$ için elde edilen iki boyutlu görünümü



Şekil 4.2.9. $0 \leq t \leq 1$ ve $\alpha = 1.75$ için KABMM ile elde edilen mutlak hatanın iki boyutlu görünümü

4.3 Kesirli Rosenau–Hyman Denklemine GDDM’nin Uygulanması

Kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denklemi, $\alpha = 1$ olduğunda sıvıların düşerken oluşturdukları şekilleri ifade etmektedir. Molliq ve Noorani [4], Homotopi pertürbasyon metodunu ve Varyasyonel iterasyon metodunu kullanarak kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denkleminin yaklaşık çözümünü elde etmiştir. Kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denkleminin analitik çözümleri GDDM kullanılarak aşağıdaki şekilde bulunmuştur. Rosenau-Hyman denklemi [57], $t > 0$, $0 < \alpha \leq 1$, olmak üzere

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = uu_{xxx} + uu_x + 3u_x u_{xx}, \quad (4.3.1)$$

olarak tanımlanır. (4.3.1) denklemi için (3.5.2) dönüşümü

$$u(x,t) = u(\eta), \quad \eta = kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]},$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = k \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta}, \quad (4.3.2)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = k \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = k^2 \frac{\partial^2 u(\eta)}{\partial \eta^2}, \quad (4.3.3)$$

ve σ_x fractal indeksi olmak üzere [108]

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = \sigma_x \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial^\alpha \eta}{\partial t^\alpha},$$

dir. Burada özel olarak $\sigma_x = 1$ seçildiğinde

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} &= \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \left[-\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]} \right) \right], \\ &= -\frac{\lambda}{\Gamma[1+\alpha]} \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \left[\frac{\partial^\alpha t^\alpha}{\partial t^\alpha} \right], \\ &= -\frac{\lambda}{\Gamma[1+\alpha]} \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \left[\frac{\Gamma[1+\alpha]}{\Gamma[1+\alpha-\alpha]} t^{\alpha-\alpha} \right], \\ &= -\frac{\lambda}{\Gamma[1+\alpha]} \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} [\Gamma[1+\alpha]], \\ &= -\lambda \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta}, \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

elde edilir. (3.5.2), (4.3.2), (4.3.3) ve (4.3.4) dönüşümleri (4.3.1) kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denkleminde yerine yazılırsa

$$-\lambda u - k^3 uu'' - \frac{k}{2} u^2 - k^3 (u')^2 = 0, \tag{4.3.5}$$

bulunur. (4.3.5) lineer olmayan adi diferansiyel denkleminde (3.5.6) ve (3.5.7) eşitlikleri yerine yazılarak balans prensibi uygulanırsa

$$\theta = \varepsilon + 2 \tag{4.3.6}$$

olduğu görülür. (4.3.6) denkleminde bulunan θ ve ε 'nin farklı değerleri (3.5.6) ve (3.5.7) denklemlerinde yerine yazılarak farklı analitik çözümler aşağıdaki şekilde elde edilir.

Durum 1. $\varepsilon = 0$, $\delta = 1$, ve $\theta = 2$ değerleri (3.5.6) ve (3.5.7) denklemlerinde yerine yazılırsa, $\zeta_0 \neq 0$, $\xi_2 \neq 0$ olmak üzere

$$(u')^2 = \tau_1^2 \frac{(\xi_0 + \xi_1 Y + \xi_2 Y^2)}{\zeta_0}, \tag{4.3.7}$$

$$u'' = \frac{\tau_1 (\xi_1 + 2\xi_2 Y)}{2\zeta_0}, \tag{4.3.8}$$

bulunur. (3.5.4), (4.3.7) ve (4.3.8) eşitlikleri (4.3.5) denkleminde yerine yazılırsa cebirsel denklem sistemi ortaya çıktığı görülür. Cebirsel denklem sisteminde bulunan ξ_0 , ξ_1 , ξ_2 , ζ_0 ve λ katsayılarından biri Mathematica programı kullanılarak aşağıdaki şekilde bulunur;

$$\xi_0 = \frac{\tau_0(\xi_1\tau_1 - \xi_2\tau_0)}{\tau_1^2}, \quad \xi_1 = \xi_1, \quad \xi_2 = \xi_2, \quad \zeta_0 = 4k^2\xi_2, \quad \lambda = \frac{3k(2\xi_2\tau_0 - \xi_1\tau_1)}{8\xi_2}. \quad (4.3.9)$$

(4.3.9) katsayıları (3.5.10) denkleminde yerine yazılırsa

$$\pm(\eta - \eta_0) = A \int \frac{1}{\sqrt{Y^2 + CY + B}} dY, \quad (4.3.10)$$

bulunur. Burada $A = 2k$, $B = \frac{\tau_0(\xi_1\tau_1 - \xi_2\tau_0)}{\tau_1^2\xi_2}$, $C = \frac{\xi_1}{\xi_2}$ dir. Bu denklemde integrali bulmak

için Mathematica programı kullanılırsa

$$\pm(\eta - \eta_0) = A \ln(Y - \alpha_1), \quad \alpha_1 = \alpha_2, \quad (4.3.11)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = 2A \ln(\sqrt{Y - \alpha_1} + \sqrt{Y - \alpha_2}), \quad \alpha_1 \neq \alpha_2, \quad (4.3.12)$$

olduğu görülür. Bu eşitlikteki α_1 ve α_2 'ler

$$Y^2 + CY + B = 0. \quad (4.3.13)$$

polinomunun kökleridir. Böylece (4.3.1) kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denkleminin GDDM ile elde edilen yeni analitik çözümleri;

$$u(x, t) = \tau_0 + \tau_1 \left(\alpha_1 + e^{\pm \frac{\left(kx - \frac{3k(2\tau_0\xi_2 - \xi_1\tau_1)t^\alpha}{8\xi_2\Gamma(1+\alpha)} - \eta_0 \right)}{A}} \right), \quad (4.3.14)$$

ve

$$u(x, t) = \tau_0 + \frac{\tau_1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1) + e^{\pm \frac{\left(kx - \frac{3k(2\tau_0\xi_2 - \xi_1\tau_1)t^\alpha}{8\xi_2\Gamma(1+\alpha)} - \eta_0 \right)}{A}} + \frac{\tau_1(\alpha_1 - \alpha_2)^2}{4} e^{\pm \frac{\left(kx - \frac{3k(2\tau_0\xi_2 - \xi_1\tau_1)t^\alpha}{8\xi_2\Gamma(1+\alpha)} - \eta_0 \right)}{A}}. \quad (4.3.15)$$

biçimindedir. Basitlik açısından (4.3.14) denkleminde $\eta_0 = 0$, $\tau_0 = -\tau_1\alpha_1$ alınırsa (4.3.9) denklemindeki katsayılar göre (4.3.1) kesirli mertebeden

Rosenau-Hyman denkleminin bir analitik çözümü;

$$u(x, t) = \tilde{A} e^{\tilde{B}(x - \lambda_1 t^\alpha)}, \quad (4.3.16)$$

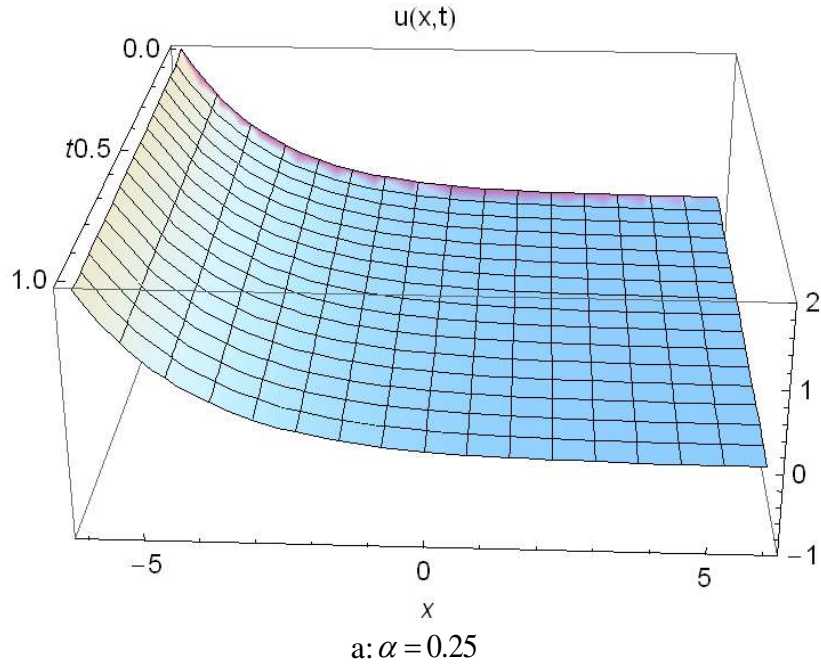
olup, burada $\tilde{A} = \tau_1$, $\tilde{B} = \pm \frac{k}{A}$, $\lambda_1 = \frac{-3\tau_1(2\alpha_1\xi_2 + \xi_1)}{8\xi_2\Gamma(1+\alpha)}$ dir. Benzer şekilde (4.3.15)

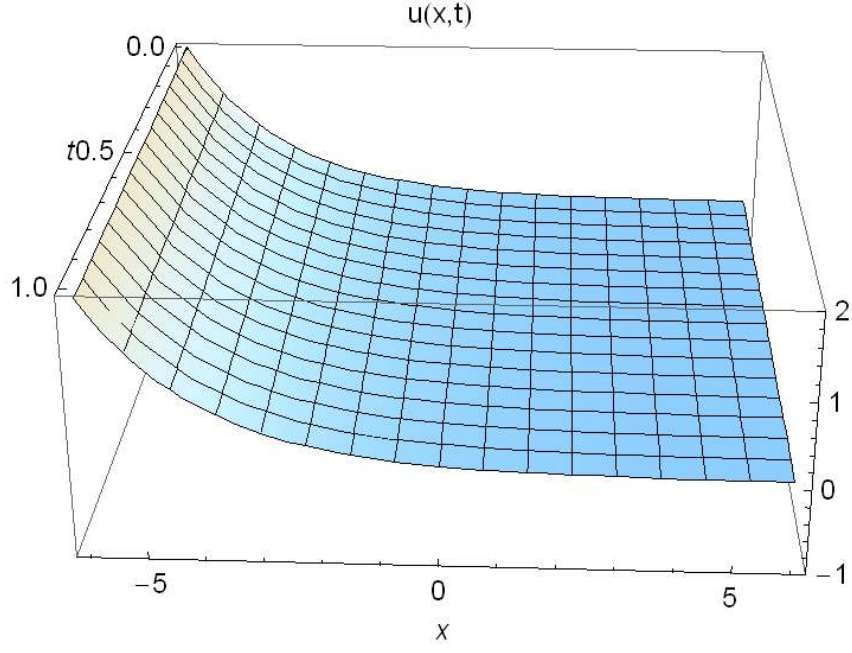
denkleminde $\eta_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$ alındığında (4.3.9) denklemindeki katsayılara göre (4.3.1) kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denkleminin hiperbolik fonksiyon çözümü ise;

$$u(x, t) = \tau_0 + \frac{\tau_1}{2} \left(1 + \cosh \left(\tilde{B} (x - \lambda_1 t^\alpha) \right) \right), \quad (4.3.17)$$

biçimindedir. Burada $\tilde{B} = \pm \frac{k}{A}$, $\lambda_1 = \frac{-3\tau_1(2\alpha_1\xi_2 + \xi_1)}{8\xi_2\Gamma(1+\alpha)}$ dir. Kesirli mertebeden Rosenau-

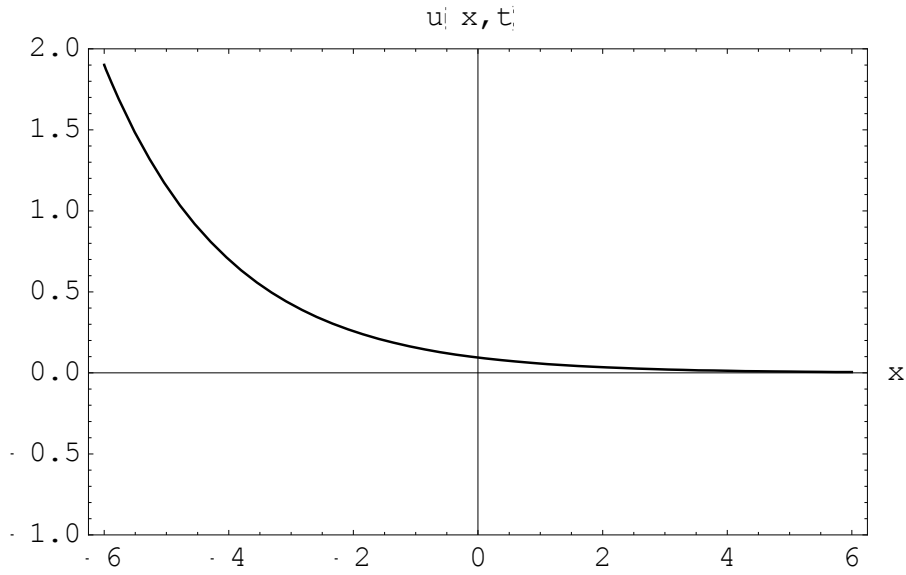
Hyman denkleminin GDDM ile elde edilen (4.3.16) analitik çözümü için iki ve üç boyutlu grafikleri ile sayısal veri tablosu Mathematica programı kullanılarak aşağıdaki şekilde oluşturulmuştur.



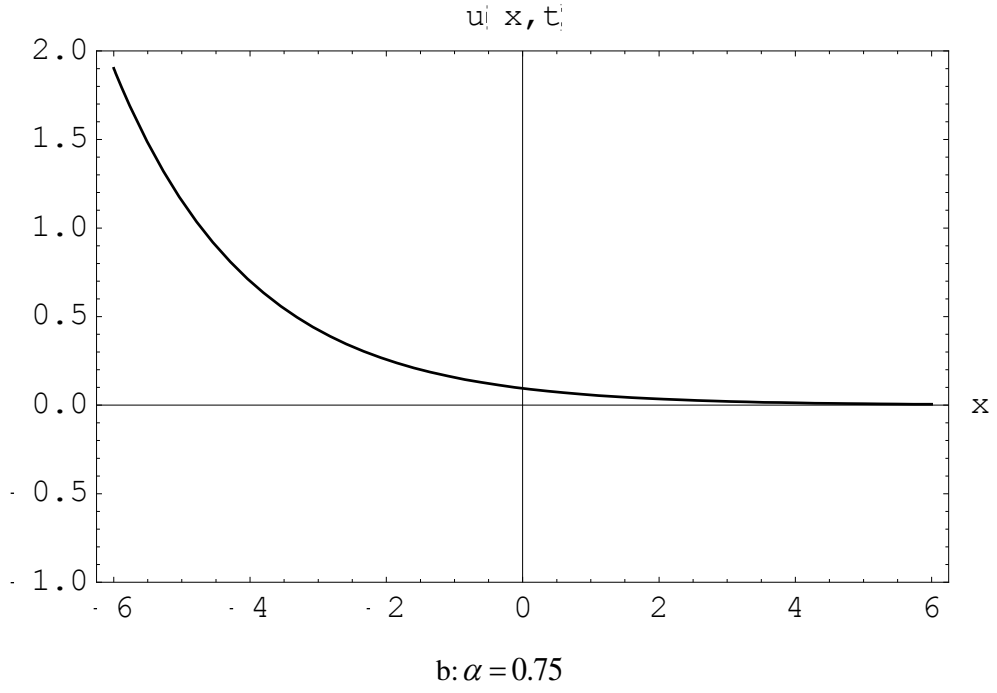


b: $\alpha = 0.75$

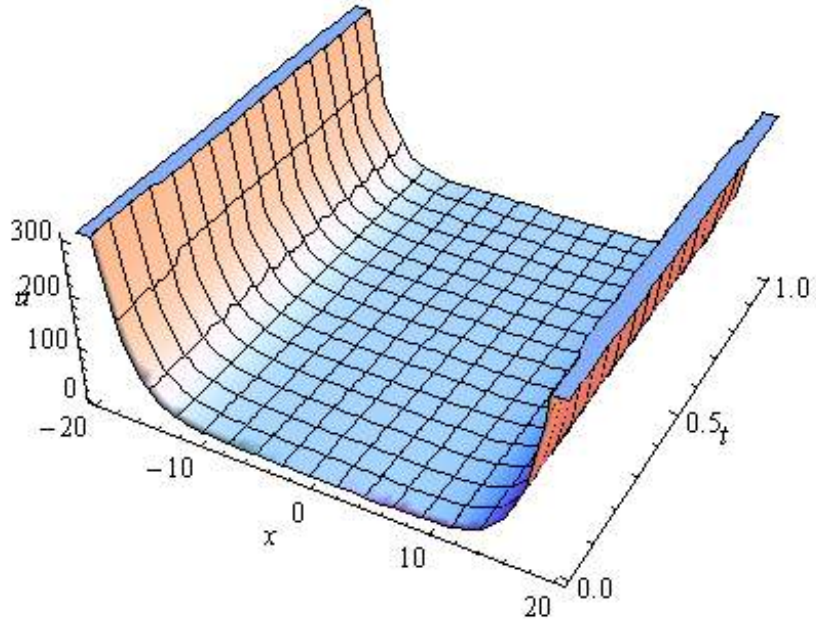
Şekil 4.3.1. Kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denkleminin GDDM ile elde edilen (4.3.16) analitik çözümünün $\tau_1 = 0.1$, $a_1 = 1$, $\xi_1 = 0.2$, $\xi_2 = 0.3$, $0 \leq t \leq 1$, $-6 \leq x \leq 6$, ve $k = 5$ için elde edilen üç boyutlu görünümü



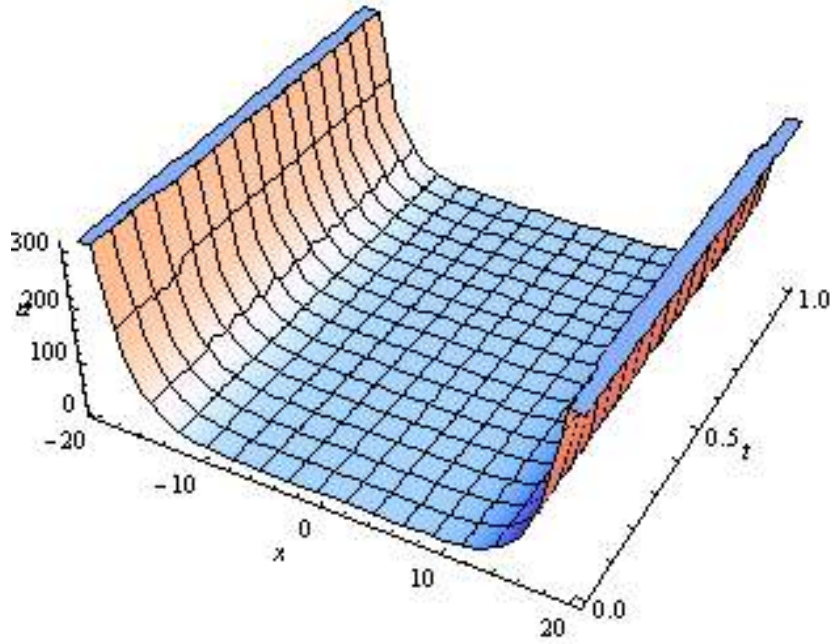
a: $\alpha = 0.25$



Şekil 4.3.2. Kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denkleminin GDDM ile elde edilen (4.3.16) analitik çözümünün $\tau_1 = 0.1$, $a_1 = 1$, $k = 5$, $\xi_1 = 0.2$, $\xi_2 = 0.3$, $-6 \leq x \leq 6$ ve $t = 1$ için elde edilen iki boyutlu görünümü

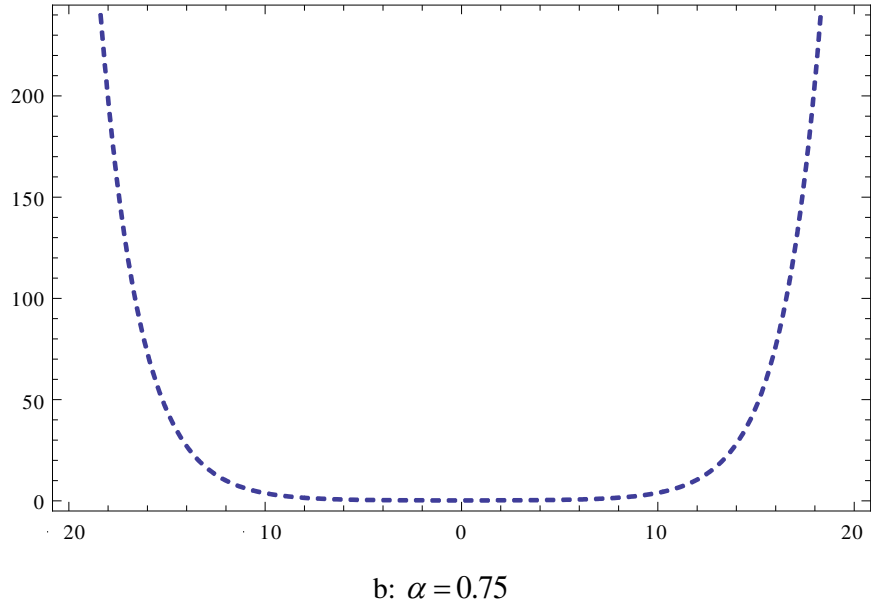
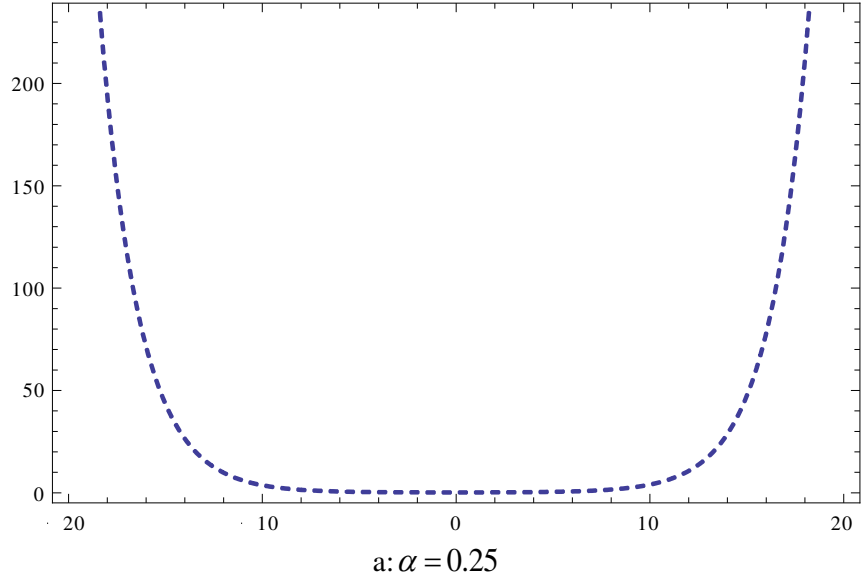


a: $\alpha = 0.25$



b: $\alpha = 0.75$

Şekil 4.3.3. Kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denkleminin GDDM ile elde edilen (4.3.17) analitik çözümünün $\xi_1 = \xi_2 = 0.3$, $\zeta_0 = 0.9$, $\tau_0 = \tau_1 = 0.1$, $\alpha_1 = 1$, $k = 3$ $0 \leq t \leq 1$ ve $-20 \leq x \leq 20$ için elde edilen üç boyutlu görünümü



Şekil 4.3.4. Kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denkleminin GDDM ile elde edilen (4.3.17), analitik çözümünün $\xi_1 = \xi_2 = 0.3$, $\zeta_0 = 0.9$, $\tau_0 = \tau_1 = 0.1$, $\alpha_1 = 1$, $k = 3$, $-20 \leq x \leq 20$ ve $t = 0.25$ için elde edilen iki boyutlu görünümü

Durum 2. $\varepsilon = 0$, $\delta = 2$ ve $\theta = 2$ değerleri (3.5.6) ve (3.5.7) denklemlerinde yerine yazılırsa, $\zeta_0 \neq 0$, $\xi_2 \neq 0$, olmak üzere

$$(u')^2 = \frac{(\xi_0 + \xi_1 Y + \xi_2 Y^2)(\tau_1 + 2\tau_2 Y)}{\zeta_0}, \quad (4.3.18)$$

$$u'' = \frac{4\tau_2 (\xi_0 + \xi_1 Y + \xi_2 Y^2) + (\xi_1 + 2\xi_2 Y)(\tau_1 + 2\tau_2 Y)}{2\zeta_0} \quad (4.3.19)$$

bulunur. (3.5.4), (4.3.18) ve (4.3.19) eşitlikleri (4.3.5) denkleminde yerine yazılırsa cebirsel denklem sistemi elde edilir. Cebirsel denklem sisteminde bulunan ξ_0 , ξ_1 , ξ_2 , ζ_0 ve λ katsayıları Mathematica programı kullanılarak aşağıdaki şekilde bulunur;

$$\xi_0 = \frac{\xi_1 \tau_0}{\tau_1}, \quad \xi_1 = \xi_1, \quad \xi_2 = \frac{\xi_1 \tau_2}{\tau_1}, \quad \zeta_0 = \frac{16k^2 \xi_1 \tau_2}{\tau_1}, \quad \lambda = \frac{3k(4\tau_0 \tau_2 - \tau_1^2)}{32\tau_2}. \quad (4.3.20)$$

(4.3.20) katsayıları (3.5.10) denkleminde yerine yazılırsa

$$\pm(\eta - \eta_0) = A_1 \int \frac{dY}{\sqrt{B_1 + C_1 Y + Y^2}}, \quad (4.3.21)$$

olduğu görülür. Burada $A_1 = 4k$, $B_1 = \frac{\tau_0}{\tau_2}$, $C_1 = \frac{\tau_1}{\tau_2}$ dir. (4.3.21) denklemindeki integrali

hesap etmek için Mathematica programı kullanılırsa

$$\pm(\eta - \eta_0) = A_1 \ln(Y - \alpha_1), \quad (4.3.22)$$

$$\pm(\eta - \eta_0) = 2A_1 \ln(\sqrt{Y - \alpha_1} + \sqrt{Y - \alpha_2}). \quad (4.3.23)$$

elde edilir. Buradaki α_1 ve α_2 'ler

$$Y^2 + B_1 + C_1 Y = 0, \quad (4.3.24)$$

denkleminin kökleridir. Böylece (4.3.1) kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denkleminin GDDM ile elde edilen yeni analitik çözümleri;

$$u(x, t) = \tau_0 + \tau_1 \alpha_1 + \tau_1 e^{\pm \frac{(kx - Kt^\alpha - \eta_0)}{A_1}} + \tau_2 \left(\alpha_1 + e^{\pm \frac{(kx - Kt^\alpha - \eta_0)}{A_1}} \right)^2, \quad (4.3.25)$$

ve

$$u(x, t) = \tau_0 + \frac{\tau_1}{2}(\alpha_2 + \alpha_1) + e^{\pm \frac{(kx - Kt^\alpha - \eta_0)}{A_1}} + \frac{\tau_1(\alpha_1 - \alpha_2)^2}{4} e^{\pm \frac{(kx - Kt^\alpha - \eta_0)}{A_1}} + \tau_2 \left((\alpha_2 + \alpha_1) + e^{\pm \frac{(kx - Kt^\alpha - \eta_0)}{A_1}} + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}{2} e^{\pm \frac{(kx - Kt^\alpha - \eta_0)}{A_1}} \right)^2, \quad (4.3.26)$$

biçimindedir. Burada $K = \frac{3k(4\tau_0\tau_2 - \tau_1^2)}{32\tau_2\Gamma(1+\alpha)}$ dir. Basitlik açısından (4.3.25) denkleminde

$\eta_0 = 0$ alınır ve (4.3.20) denklemindeki katsayılar göre denklem yeniden düzenlenirse kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denkleminin analitik çözümü;

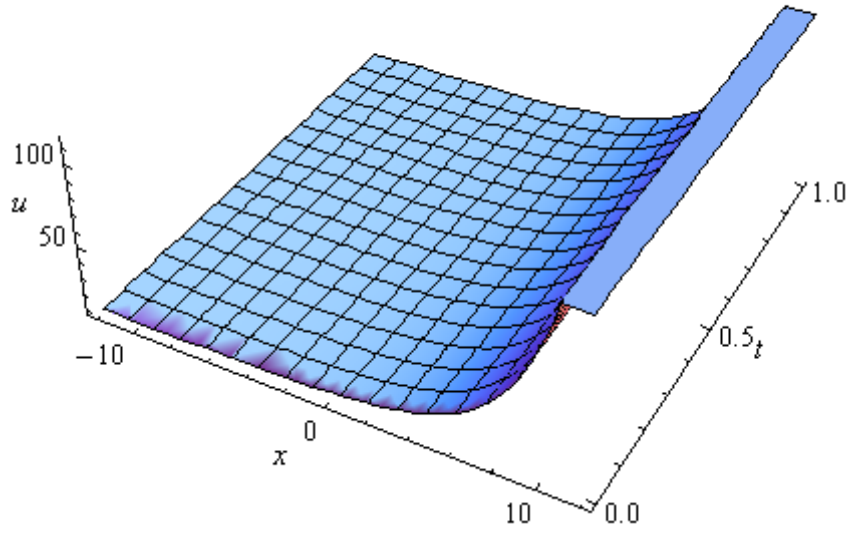
$$u(x, t) = \left[\sum_{i=0}^2 \tau_i \left(\alpha_1 + e^{\tilde{B}_1(x - \lambda_2 t^\alpha)} \right)^i \right], \quad (4.3.27)$$

olarak elde edilir ve burada $\tilde{B}_1 = \pm \frac{k}{A_1}$, $\lambda_2 = \frac{-3\tau_1(2\alpha_1\xi_2 + \xi_1)}{8\xi_2\Gamma(1+\alpha)}$ dir. Benzer şekilde (4.3.26)

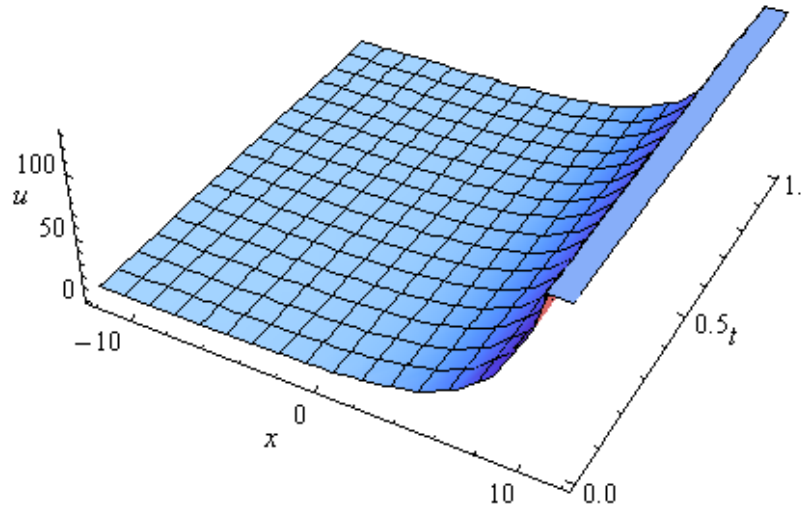
denkleminde $\eta_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$ alınır ve yine (4.3.20) denklemindeki katsayılar göre denklem yeniden düzenlenirse kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denkleminin hiperbolik fonksiyon çözümü;

$$u(x, t) = \left[\sum_{i=0}^2 \tau_i \left(\frac{(1 + \cosh(\tilde{B}_1(x - \lambda_2 t^\alpha)))}{2} \right)^i \right] \quad (4.3.28)$$

olarak bulunur. (4.3.27) denklemini ile ele alınan diferansiyel denklemin analitik çözümü için iki ve üç boyutlu grafikleri Mathematica programı kullanılarak aşağıdaki şekilde oluşturulmuştur.

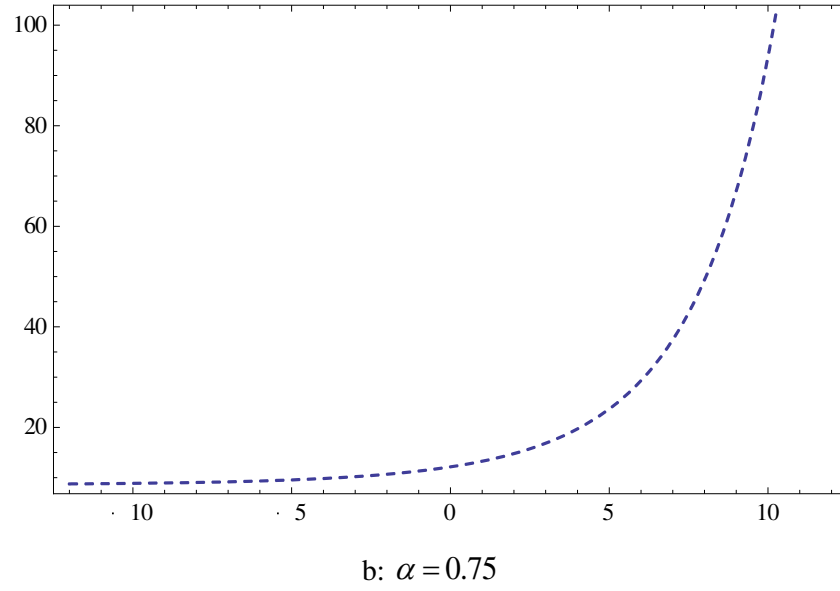
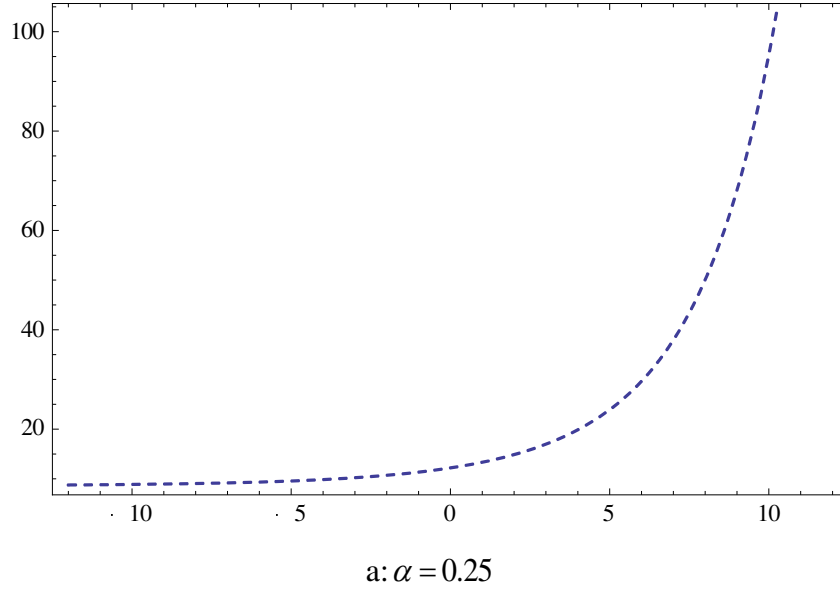


a: $\alpha = 0.25$

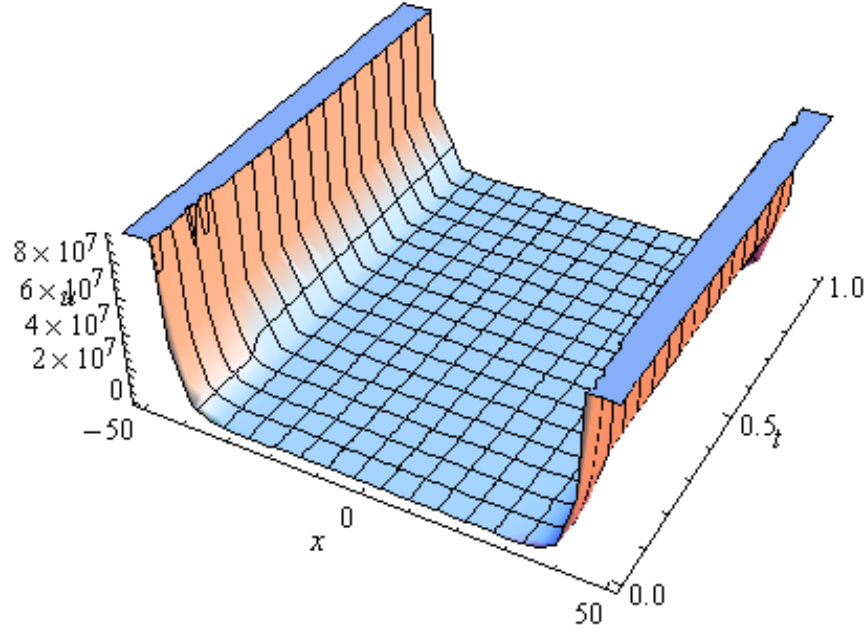


b: $\alpha = 0.75$

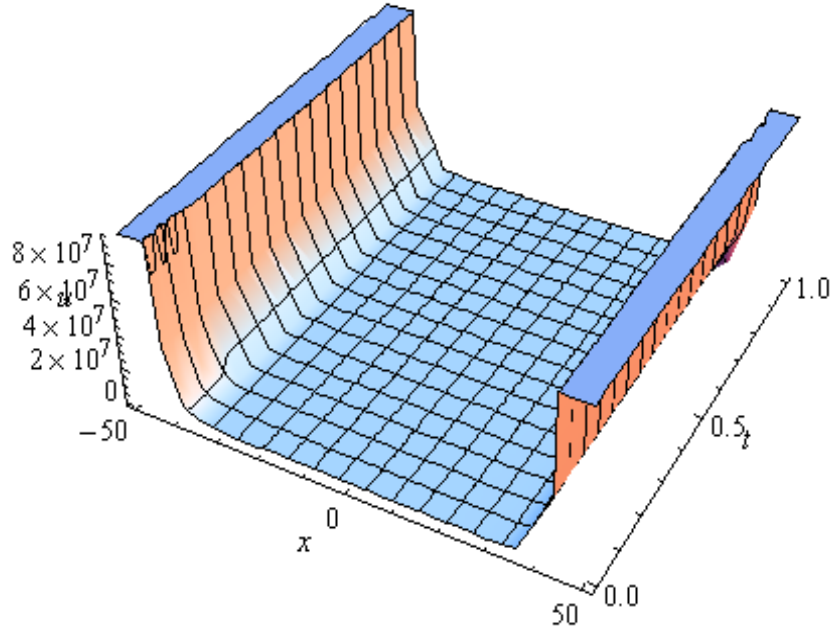
Şekil 4.3.5. Kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denkleminin GDMM ile elde edilen (4.3.27) analitik çözümünün $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $\tau_0 = 0.1$, $\tau_1 = 0.2$, $\tau_2 = 0.3$, $k = 4$, $\zeta_0 = 9$, $\xi_1 = \xi_2 = 0.17$, $0 \leq t \leq 1$ ve $-12 \leq x \leq 12$ için elde edilen üç boyutlu görünümü



Şekil 4.3.6. Kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denkleminin (4.3.27) analitik çözümünün $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $\tau_0 = 0.1$, $\tau_1 = 0.2$, $\tau_2 = 0.3$, $k = 4$, $\zeta_0 = 9$, $\xi_1 = \xi_2 = 0.17$, $t = 0.25$ ve $-12 \leq x \leq 12$ için elde edilen iki boyutlu görünümü



a: $\alpha = 0.25$

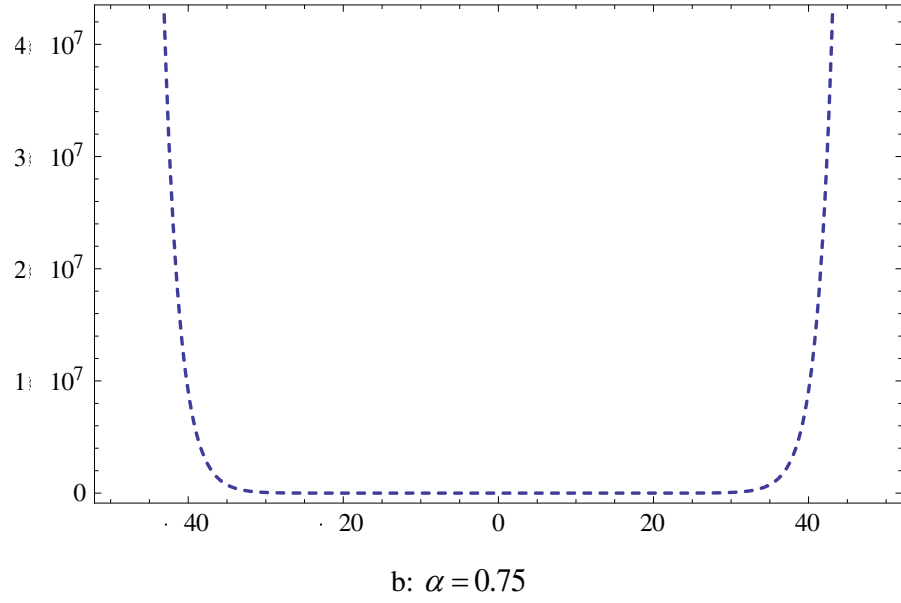
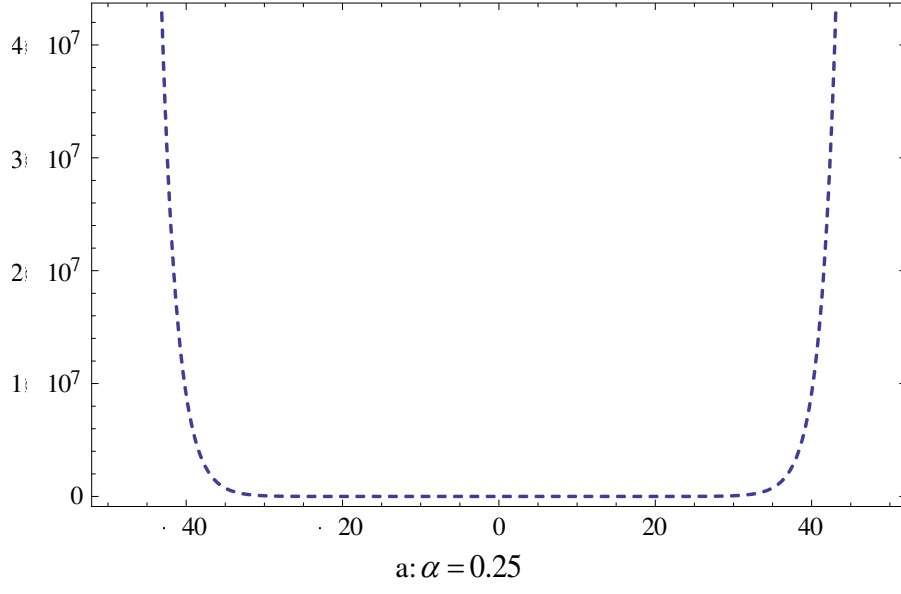


b: $\alpha = 0.75$

Şekil 4.3.7. Kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denkleminin (4.3.28) analitik çözümünün

$a_1 = 1, a_2 = 0, \tau_0 = 0.1, \tau_1 = 0.2, \tau_2 = 0.3, k = 4, \zeta_0 = 9, \xi_1 = \xi_2 = 0.17, 0 \leq t \leq 1$

ve $-50 \leq x \leq 50$ için elde edilen üç boyutlu görünümü



Şekil 4.3.8. Kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denkleminin (4.3.28) analitik çözümünün $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $\tau_0 = 0.1$, $\tau_1 = 0.2$, $\tau_2 = 0.3$, $k = 4$, $\zeta_0 = 9$, $\xi_1 = \xi_2 = 0.17$, $t = 0.25$ ve $-50 \leq x \leq 50$ için elde edilen iki boyutlu görünümü

Kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denkleminin yaklaşık çözümü Molliq ve Noorani tarafından bulunmuştur [4]. GDDM kullanılarak elde edilen (4.3.17) ve (4.3.28) ile gösterilen yeni analitik çözümler literatüre ilk defa sunulmuştur.

4.4 Kesirli Rosenau–Hyman Denklemine HAM’nun Uygulanması

Kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denklemi

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = uu_{xxx} + uu_x + 3u_x u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (4.4.1)$$

olarak tanımlanır [57]. (4.4.1) denkleminin daha önce GDDM ile elde edilen analitik çözümü;

$$u(x, t) = \tilde{A} e^{\tilde{B}(x - \lambda_1 t^\alpha)}, \quad (4.4.2)$$

olarak bulunmuş ve burada $\tilde{A} = \tau_1$, $A = 2k$, $\tilde{B} = \pm \frac{k}{A}$, $\lambda_1 = \frac{-3\tau_1(2\alpha_1\xi_2 + \xi_1)}{8\xi_2\Gamma(1+\alpha)}$ olarak ifade

edilmiştir. Eğer burada $\tilde{A} = \tau_1 = 0.1$, $k = 5$, $\xi_1 = 0.2$, $\xi_2 = 0.3$, $\alpha_1 = 1$, $\lambda_1 = -0.110326$ katsayılarına göre (4.4.2) çözümü yeniden düzenlenirse;

$$u(x, t) = 0.1 e^{\frac{-x}{2} - \frac{0.1}{2\Gamma[1+\alpha]} t^\alpha}, \quad (4.4.3)$$

elde edilir. Şimdi (4.4.3) çözümüne göre (4.4.1) kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denkleminin başlangıç koşulu

$$u(x, 0) = 0.1 e^{\frac{-x}{2}}, \quad (4.4.4)$$

olarak tanımlansın. Eğer (4.4.1) denklemine HAM uygulanırsa, burada L lineer operatörü

$$L[\Phi(x, t; p)] = D_t^\alpha [\Phi(x, t; p)], \quad (4.4.5)$$

biçiminde ve (4.4.1) denklemi için lineer olmayan bir N operatöründe aşağıdaki şekilde tanımlanabilir;

$$\begin{aligned} N[\Phi(x, t; p)] = & \frac{\partial^\alpha \Phi(x, t; p)}{\partial t^\alpha} - \Phi(x, t; p) \frac{\partial^3 \Phi(x, t; p)}{\partial x^3} \\ & - \Phi(x, t; p) \frac{\partial \Phi(x, t; p)}{\partial x} - 3 \frac{\partial \Phi(x, t; p)}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi(x, t; p)}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

Homotopi analiz teorisi gereğince sıfırıncı mertebeden deformasyon denklemi aşağıdaki şekilde oluşturulur;

$$(1 - p)L[\Phi(x, t; p) - u_0(x, t)] = phN[\Phi(x, t; p)]. \quad (4.4.7)$$

(4.4.7) denkleminde $p = 0$ alınır

$$\Phi(x, t; 0) = u_0(x, t) = u(x, 0) \quad (4.4.8)$$

ve $p = 1$ olduğunda ise

$$\Phi(x, t; 1) = u(x, t), \quad (4.4.9)$$

elde edilir. Burada p , 0'dan 1'e değiştiğinde, $\Phi(x, t; p)$ çözüm fonksiyonu

$u_0(x, t)$ başlangıç koşulundan $u(x, t)$ çözümüne deforme olmaktadır. $\Phi(x, t; p)$ çözüm fonksiyonu Taylor serisine açılırsa;

$$\Phi(x, t; p) = u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, t) p^m, \quad (4.4.10)$$

bulunur ve burada

$$u_m(x, t) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \Phi(x, t; p)}{\partial p^m} \right|_{p=0}, \quad (4.4.11)$$

dir. Liao tarafından da ifade edildiği gibi, başlangıç koşulu ve h yardımcı parametresi doğru olarak seçilirse (4.4.10) serisi $p = 1$ noktasında yakınsaktır ve bu lineer olmayan diferansiyel denklemin çözümlerinden birisini verir. Bu çözüm aşağıdaki biçimde yazılabilir;

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, t). \quad (4.4.12)$$

(4.4.7) denklemi p parametresi yönünde m kez diferansiyellenirse aşağıdaki m . mertebeden deformasyon denklemi elde edilir;

$$L[u_m(x, t) - \chi_m u_{m-1}(x, t)] = h R_m[\vec{u}_{m-1}(x, t)], \quad (4.4.13)$$

ve burada

$$\begin{aligned} R_m[\vec{u}_{m-1}(x, t)] = & \frac{\partial^\alpha u_{m-1}(x, t)}{\partial t^\alpha} - \sum_{n=0}^{m-1} u_n(x, t) \frac{\partial^3 u_{m-1-n}(x, t)}{\partial x^3} - \sum_{n=0}^{m-1} u_n(x, t) \frac{\partial u_{m-1-n}(x, t)}{\partial x} \\ & - 3 \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\partial u_n(x, t)}{\partial x} \frac{\partial^2 u_{m-1-n}(x, t)}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (4.4.14)$$

dir. (4.4.13) denkleminde

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1, \\ 1, & m > 1, \end{cases} \quad (4.4.15)$$

olup, $m \geq 1$ için (4.4.13) deformasyon denkleminin çözümü

$$u_m(x, t) = \chi_m u_{m-1}(x, t) + h J_t^\alpha \left[R_m \left[\bar{u}_{m-1}(x, t) \right] \right]. \quad (4.4.16)$$

şeklindedir. (4.4.1) denklemi (4.4.4) başlangıç koşuluyla birlikte göz önüne alındığında (4.4.12) denkleminin ilk dört terimi olan $u_0(x, t)$, $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$, $u_3(x, t), \dots$ terimleri

$$u_0(x, 0) = 0.1 e^{\frac{-x}{2}},$$

$$\begin{aligned} m=1 \text{ için } u_1(x, t) &= \chi_1 u_0(x, t) + h J_t^\alpha \left[R_1 \left[\bar{u}_0(x, t) \right] \right], \\ &= h J_t^\alpha \left[\frac{\partial^\alpha u_0(x, t)}{\partial t^\alpha} - u_0(x, t) \frac{\partial^3 u_0(x, t)}{\partial x^3} - u_0(x, t) \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial x} \right] \\ &\quad - 3 h J_t^\alpha \left[\frac{\partial u_0(x, t)}{\partial x} \frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial x^2} \right], \\ u_1(x, t) &= \frac{e^{-x} h t^\alpha}{100 \alpha \Gamma[\alpha]}, \end{aligned} \quad (4.4.17)$$

olarak, $m=2$ için $u_2(x, t) = \chi_2 u_1(x, t) + h J_t^\alpha \left[R_2 \left[\bar{u}_1(x, t) \right] \right]$,

$$\begin{aligned} &= u_1 + h J_t^\alpha \left[\frac{\partial^\alpha u_1}{\partial t^\alpha} - \sum_{n=0}^1 u_1 \frac{\partial^3 u_{1-n}}{\partial x^3} - \sum_{n=0}^1 u_1 \frac{\partial u_{1-n}}{\partial x} - 3 \sum_{n=0}^1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial^2 u_{1-n}}{\partial x^2} \right], \\ u_2(x, t) &= \frac{e^{-x} h t^\alpha}{100 \alpha \Gamma[\alpha]} + \frac{e^{-3x/2} h^2 t^\alpha \left(80 e^{x/2} + \frac{39 \sqrt{\pi} t^\alpha}{4^\alpha \Gamma[1/2 + \alpha]} \right)}{800 \alpha \Gamma[\alpha]} \end{aligned} \quad (4.4.18)$$

ve sonuçta, $m=3$ için $u_3(x, t) = \chi_3 u_2(x, t) + h J_t^\alpha \left[R_3 \left[\bar{u}_2(x, t) \right] \right]$,

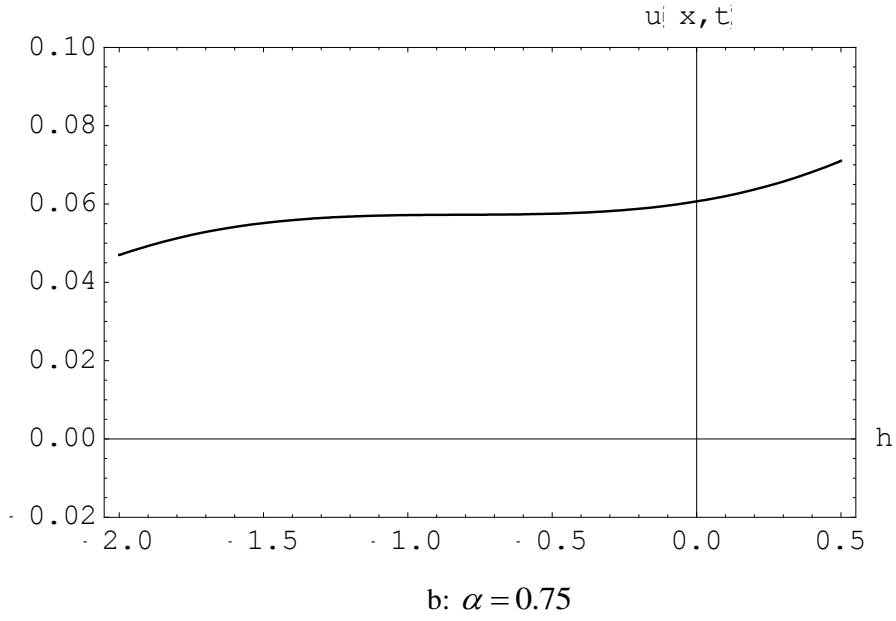
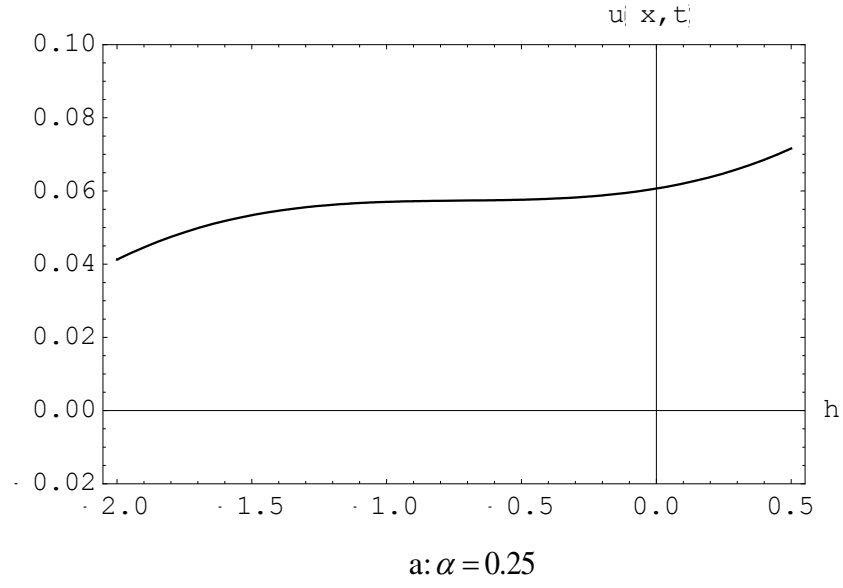
$$\begin{aligned} &= u_2 + h J_t^\alpha \left[\frac{\partial^\alpha u_2}{\partial t^\alpha} - \sum_{n=0}^2 u_2 \frac{\partial^3 u_{2-n}}{\partial x^3} - \sum_{n=0}^2 u_2 \frac{\partial u_{2-n}}{\partial x} - 3 \sum_{n=0}^2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial^2 u_{2-n}}{\partial x^2} \right], \\ u_3(x, t) &= \frac{e^{-x} h t^\alpha}{100 \alpha \Gamma[\alpha]} + \frac{e^{-3x/2} h^2 t^\alpha \left(80 e^{x/2} + \frac{39 \sqrt{\pi} t^\alpha}{4^\alpha \Gamma[1/2 + \alpha]} \right)}{800 \alpha \Gamma[\alpha]} + 4^{-3-\alpha} e^{-2x} h^2 t^\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (2^{3+2\alpha} h t^{2\alpha} \Gamma[2\alpha] \Gamma[1/2 + \alpha] \Gamma[1+2\alpha] \Gamma[1+3\alpha] + 3e^{x/2} (1+h) \\
& \times \alpha \Gamma[\alpha] \Gamma[3\alpha] (39\sqrt{\pi} t^\alpha + 4^{2+\alpha} e^{x/2} 5 \Gamma[1/2 + \alpha]) \Gamma[1+2\alpha] \\
& \times \Gamma[1+3\alpha] + 117 h t^\alpha \alpha^2 4^\alpha \Gamma^2[2\alpha] \Gamma[3\alpha] \Gamma[1/2 + \alpha] \\
& \times (t^\alpha \Gamma[1+2\alpha] + e^{x/2} \Gamma[1+3\alpha])) \\
& \times (375 \alpha^2 \Gamma^2[2\alpha] \Gamma[3\alpha] \Gamma[1/2 + \alpha] \Gamma[1+2\alpha] \Gamma[1+3\alpha])^{-1} \\
& \vdots
\end{aligned} \tag{4.4.19}$$

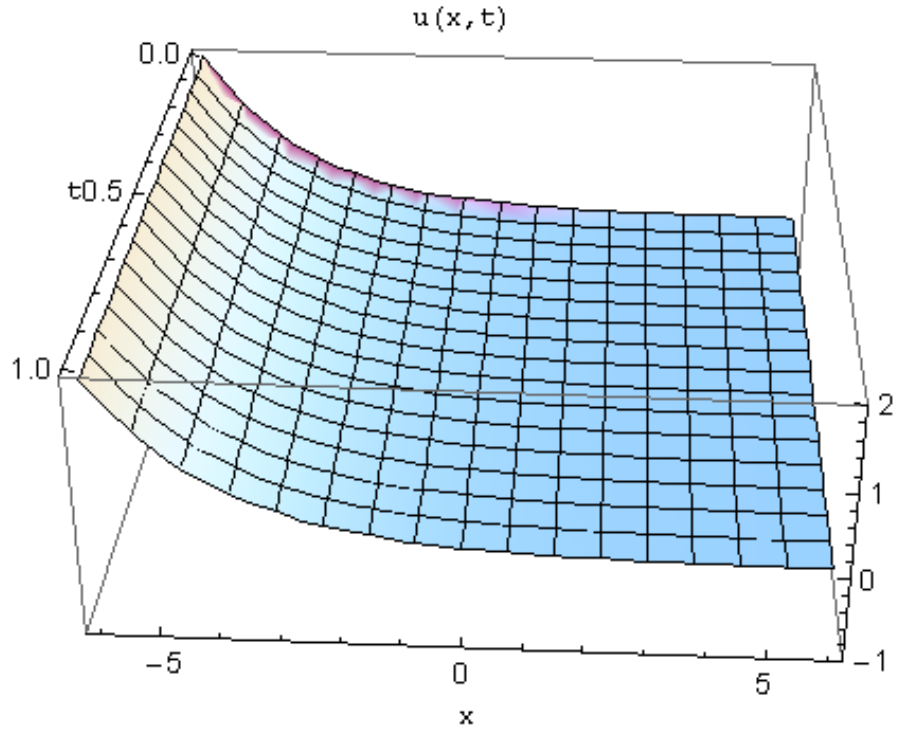
elde edilir. Böylece $u_0(x, t), u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t), \dots$ terimleri (4.4.12) eşitliğinde yerine yazılarak (4.4.1) kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denkleminin ilk dört teriminden ibaret olan yaklaşık çözümü aşağıdaki şekilde bulunur;

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) + \dots, \\
&= \frac{e^{-x} h t^\alpha}{100 \alpha \Gamma[\alpha]} + \frac{e^{-x} h t^\alpha}{100 \alpha \Gamma[\alpha]} + \frac{e^{-3x/2} h^2 t^\alpha \left(80 e^{x/2} + \frac{39 \sqrt{\pi} t^\alpha}{4^\alpha \Gamma[1/2 + \alpha]} \right)}{800 \alpha \Gamma[\alpha]} \\
&+ \frac{e^{-x} h t^\alpha}{100 \alpha \Gamma[\alpha]} + \frac{e^{-3x/2} h^2 t^\alpha \left(80 e^{x/2} + \frac{39 \sqrt{\pi} t^\alpha}{4^\alpha \Gamma[1/2 + \alpha]} \right)}{800 \alpha \Gamma[\alpha]} + 4^{-3-\alpha} e^{-2x} h^2 t^\alpha \\
&\times (2^{3+2\alpha} h t^{2\alpha} \Gamma[2\alpha] \Gamma[1/2 + \alpha] \Gamma[1+2\alpha] \Gamma[1+3\alpha] + 3e^{x/2} (1+h) \\
&\times \alpha \Gamma[\alpha] \Gamma[3\alpha] (39\sqrt{\pi} t^\alpha + 4^{2+\alpha} e^{x/2} 5 \Gamma[1/2 + \alpha]) \Gamma[1+2\alpha] \\
&\times \Gamma[1+3\alpha] + 117 h t^\alpha \alpha^2 4^\alpha \Gamma^2[2\alpha] \Gamma[3\alpha] \Gamma[1/2 + \alpha] \\
&\times (t^\alpha \Gamma[1+2\alpha] + e^{x/2} \Gamma[1+3\alpha])) \\
&\times (375 \alpha^2 \Gamma^2[2\alpha] \Gamma[3\alpha] \Gamma[1/2 + \alpha] \Gamma[1+2\alpha] \Gamma[1+3\alpha])^{-1} \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{4.4.20}$$

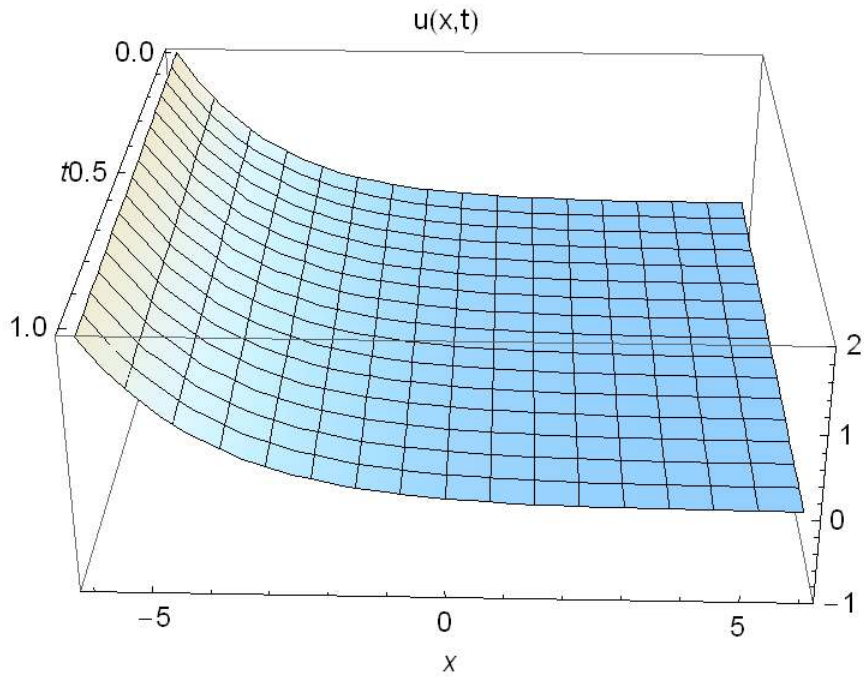
(4.4.1) kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denkleminin HAM ile elde edilen (4.4.20) yaklaşık çözümün iki boyutlu h grafiği, üç ve iki boyutlu grafikleri, analitik çözüm ile sayısal çözüm arasındaki hata miktarlarını gösteren tablo Mathematica programı kullanılarak aşağıdaki şekilde oluşturulmuştur.



Şekil 4.4.1. Kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denkleminin HAM ile elde edilen (4.4.20) yaklaşık çözümünün $t = x = 1$, $-2 \leq h \leq 0.5$ için elde edilen iki boyutlu h grafiği

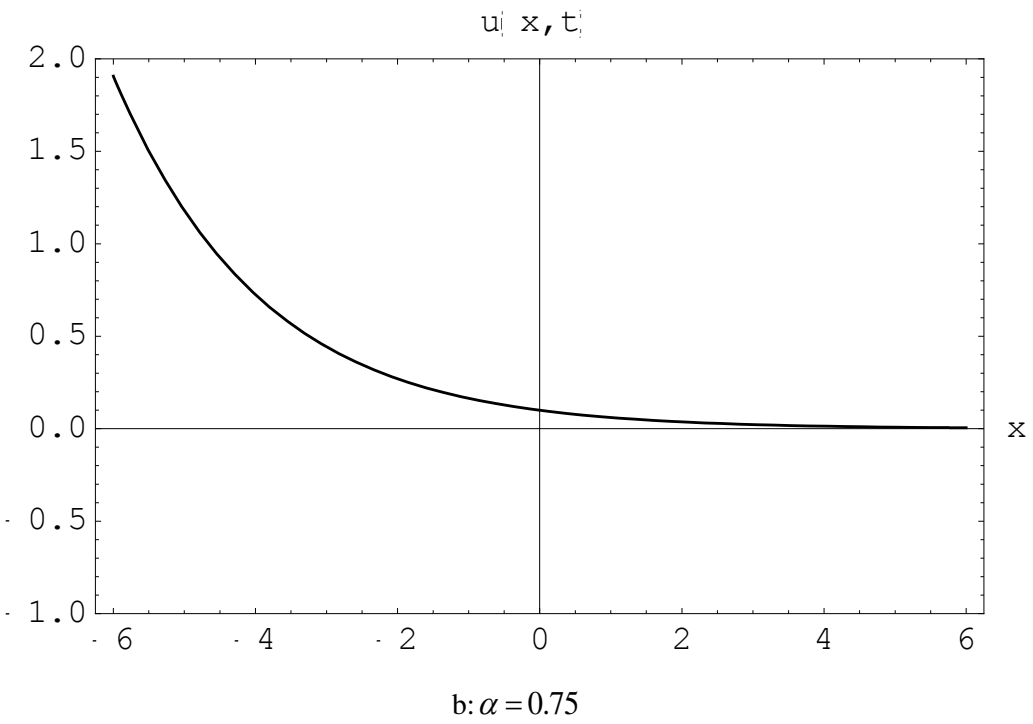
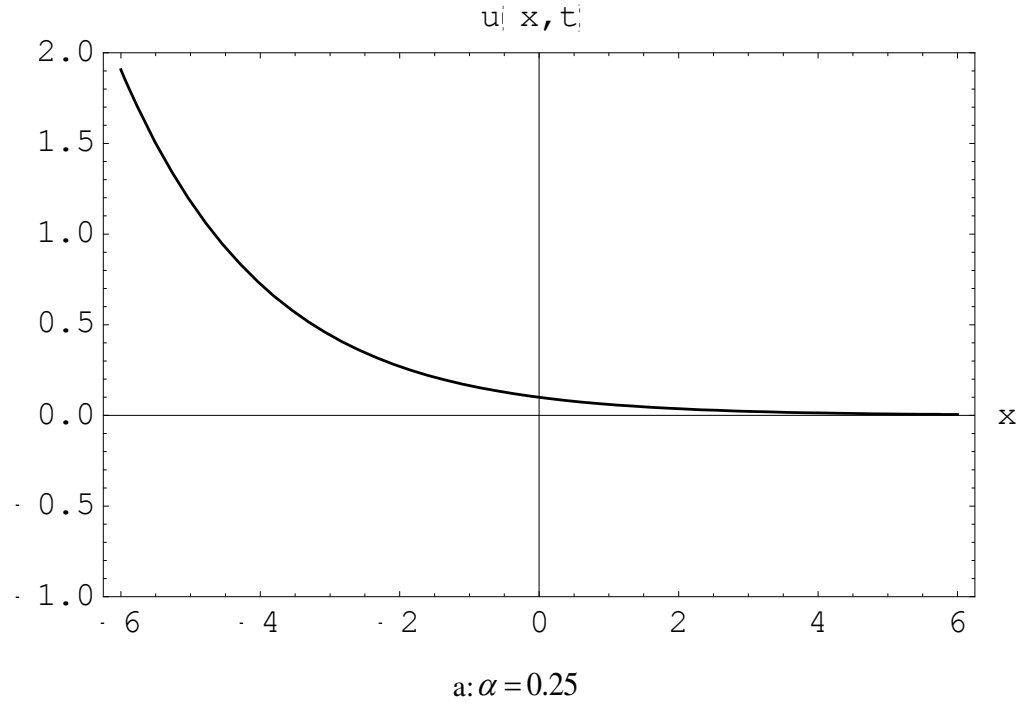


a: $\alpha = 0.25$



b: $\alpha = 0.75$

Şekil 4.4.2. Kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denkleminin HAM ile elde edilen (4.4.20) yaklaşık çözümünün $h = -1/120$, $0 \leq t \leq 1$, $-6 \leq x \leq 6$ için elde edilen üç boyutlu görünümü



Şekil 4.4.3. Kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denkleminin HAM ile elde edilen (4.4.20) yaklaşık çözümünün $h = -1/120$, $t = 1$, $-6 \leq x \leq 6$ için elde edilen iki boyutlu görünümü

Tablo 4.4.1. Kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denkleminin HAM ile elde edilen (4.4.20) yaklaşık çözümü ile GDDM ile elde edilen (4.4.3) analitik çözümünün $h = -1/120, t = 0.25, -6 \leq x \leq 6$ için elde edilen mutlak hata tablosu

x	$\alpha = 0.25$			$\alpha = 0.75$		
	$u_{Analitik}$	u_{HAM}	$u_{Analitik} - u_{HAM}$	$u_{Analitik}$	u_{HAM}	$u_{Analitik} - u_{HAM}$
-6	1.93171E-0	1.93494E-0	3.23160E-3	1.97028E-0	1.97083E-0	5.48300E-2
-3	4.31024E-1	4.44433E-1	1.33108E-2	4.39631E-1	4.46261E-1	6.63082E-3
0	9.61744E-2	9.98071E-2	3.63268E-3	9.80949E-2	9.99047E-2	1.80978E-3
3	2.14594E-2	2.23033E-2	8.43968E-4	2.18879E-2	2.23082E-2	4.20330E-4
6	4.78825E-3	4.97822E-3	1.89982E-4	4.88385E-3	4.97847E-3	9.46112E-5

4.5 Kesirli Genelleştirilmiş Fisher Denklemine MEKM'nun Uygulanması

Faiz teorisi üzerine çalışmaları olan Irving Fisher'in kendi ismini verdiği Fisher denklemi, Ekonomi'de ve Finansal Matematik'te enflasyona göre yüksek faiz oranı ile düşük faiz oranı arasındaki hareketlenmeyi tahmin ederken kullanılır.

Kesirli mertebeden genelleştirilmiş Fisher denkleminin analitik çözümü MEKM kullanılarak aşağıdaki şekilde elde edilir. Fisher denklemi, $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - u(x,t)(1 - u^\beta(x,t)) = 0, t > 0, \quad (4.5.1)$$

olarak tanımlanır [55,99]. Diğer yandan (4.5.1) denklemi için (3.3.2) dönüşümü

$$u(x,t) = u(\eta), \quad \eta = kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]}$$

olmak üzere

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = k \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \quad (4.5.2)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = k \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = k^2 \frac{\partial^2 u(\eta)}{\partial \eta^2} \quad (4.5.3)$$

ve σ_x fractal indeksi göstermek üzere [108]

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = \sigma_x \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial^\alpha \eta}{\partial t^\alpha},$$

biçiminde tanımlansın. Burada özel olarak $\sigma_x = 1$ seçildiğinde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} &= \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \left[-\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]} \right) \right] \\
&= -\frac{\lambda}{\Gamma[1+\alpha]} \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \left[\frac{\Gamma[1+\alpha]}{\Gamma[1+\alpha-\alpha]} t^{\alpha-\alpha} \right] \\
&= -\frac{\lambda}{\Gamma[1+\alpha]} \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} [\Gamma[1+\alpha]] \\
&= -\lambda \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta}
\end{aligned} \tag{4.5.4}$$

bulunur. (3.3.2), (4.5.2), (4.5.3) ve (4.5.4) eşitlikleri (4.5.1) kesirli mertebeden genelleştirilmiş Fisher denkleminde yerine yazılırsa

$$-\lambda \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} - k^2 \frac{\partial^2 u(\eta)}{\partial \eta^2} - u(\eta)(1 - u^\beta(\eta)) = 0 \tag{4.5.5}$$

elde edilir. Burada (4.5.5) lineer olmayan adi diferansiyel denklemi için

$$u(\eta) = V^{\frac{1}{\beta}}(\eta), \tag{4.5.6}$$

ve

$$u'(\eta) = \frac{1}{\beta} V^{\frac{1-\beta}{\beta}}(\eta) V'(\eta), \tag{4.5.7}$$

$$\begin{aligned}
u''(\eta) &= \frac{1}{\beta} \left(\frac{1-\beta}{\beta} V^{\frac{1-2\beta}{\beta}} V' + V^{\frac{1-\beta}{\beta}} V'' \right), \\
&= \frac{1-\beta}{\beta^2} V^{\frac{1-2\beta}{\beta}} (V')^2 + \frac{1}{\beta} V^{\frac{1-\beta}{\beta}} V'',
\end{aligned} \tag{4.5.8}$$

dönüşümleri kullanılırsa

$$-\frac{\lambda}{\beta} V^{\frac{1-\beta}{\beta}} V' - \frac{k^2(1-\beta)}{\beta^2} V^{\frac{1-2\beta}{\beta}} (V')^2 - \frac{k^2}{\beta} V^{\frac{1-\beta}{\beta}} V'' - V^{\frac{1}{\beta}} + V^{\frac{1+\beta}{\beta}} = 0, \tag{4.5.9}$$

denklemini bulunur. Bu denklemin her iki yanını $V^{\frac{2\beta-1}{\beta}}$ ile çarpılırsa, denklem

$$-\frac{\lambda}{\beta} V V' - \frac{k^2(1-\beta)}{\beta^2} (V')^2 - \frac{k^2}{\beta} V V'' - V^2 + V^3 = 0, \tag{4.5.10}$$

biçiminde ikinci mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denkleme dönüşür. (3.3.8)

denklemini ve balans prensibi gereğince en yüksek mertebeden türevli terim olan $V V''$ için

$$V V'' = (a_0 + a_1 \Omega + a_2 \Omega^2 + \dots + a_N \Omega^N) (2a_2 + \dots + a_N N(N+1) \Omega^{N+2}) \approx \Omega^{2N+2}, \tag{4.5.11}$$

ile en yüksek dereceli terim olan V^3 'in kuvvetlerinin

$$V^3 = (a_0 + a_1\Omega + a_2\Omega^2 + \dots + a_N\Omega^N)^3 \approx \Omega^{3N}, \quad (4.5.12)$$

olmak üzere birbiri ile eşitlenerek

$$3N = 2N + 2 \Rightarrow N = 2, \quad (4.5.13)$$

bulunur. (4.5.13) eşitliği (3.3.4) de yerine yazılırsa

$$V(\tau) = \sum_{j=0}^2 a_j(t) \Omega^j(\tau) = a_0(t) + a_1(t) \Omega(\tau) + a_2(t) \Omega^2(\tau), \quad (4.5.14)$$

elde edilir. (4.5.14) denkleminin τ yönünde birinci ve ikinci mertebeden türevleri (3.3.7) ve (3.3.8) denklemleri gereğince

$$V_\tau = \ln a (-a_1\Omega + a_1\Omega^2 - 2a_2\Omega^2 + 2a_2\Omega^3) \quad (4.5.15)$$

ve

$$V_{\tau\tau} = (\ln a)^2 (a_1\Omega - 3a_1\Omega^2 + 2a_1\Omega^3 + 4a_2\Omega^2 - 10a_2\Omega^3 + 6a_2\Omega^4), \quad (4.5.16)$$

olarak bulunur. (4.5.14), (4.5.15) ve (4.5.16) denklemleri (4.5.10) denkleminde yerine yazıldığında Mathematica programı kullanılarak $a_0(t)$, $a_1(t)$ ve $a_2(t)$ katsayıları aşağıdaki şekilde bulunur;

Durum 1. Mathematica programı kullanılarak a_0 , a_1 , a_2 , k ve λ katsayıları için elde edilen

$$a_0 = 1, a_1 = -2, a_2 = 1, k = \frac{\beta}{\ln a \sqrt{4+2\beta}} \text{ ve } \lambda = \frac{-\beta(4+\beta)}{2 \ln a (2+\beta)}, \quad (4.5.17)$$

değerleri (4.5.14) denkleminde yerine yazılırsa

$$V(\tau) = 1 - \frac{2}{1 \mp a^\tau} + \frac{1}{(1 \mp a^\tau)^2}, \quad (4.5.18)$$

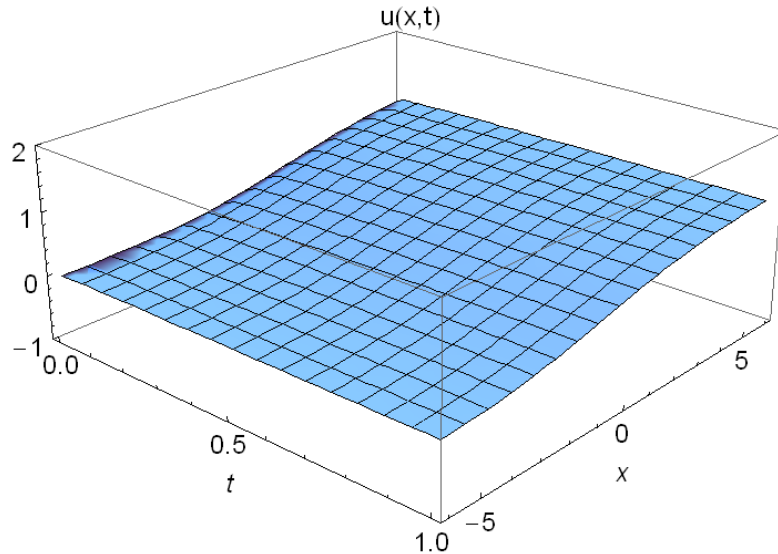
elde edilir. Bu denklemde ise $\tau = \mp \frac{\beta x}{\ln a \sqrt{4+2\beta}} + \frac{\beta(4+\beta)t^\alpha}{2 \ln a (2+\beta) \Gamma[1+\alpha]}$ biçimindedir.

(4.5.17) katsayılarına göre (4.5.1) kesirli mertebeden genelleştirilmiş Fisher denkleminin MEKM ile elde edilen analitik çözümü;

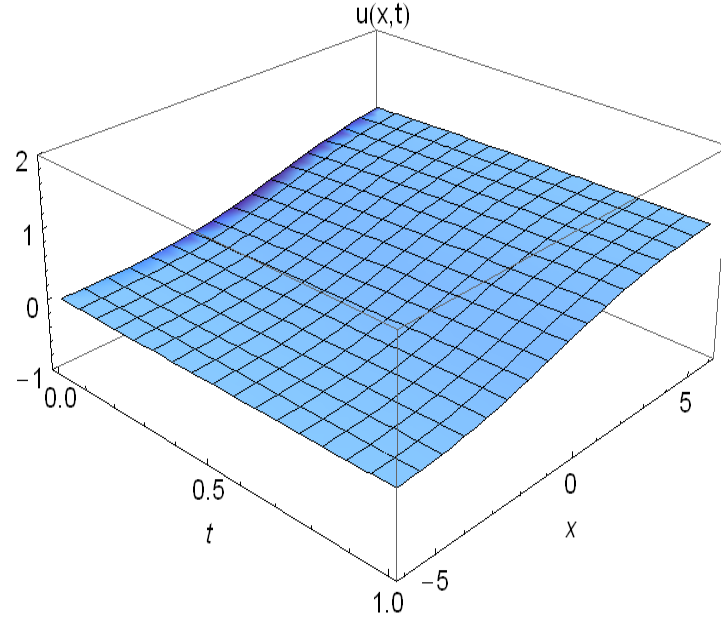
$$\begin{aligned}
u_1(x,t) &= u(\tau) = V^{\frac{1}{\beta}}(\tau) = \left[1 - \frac{2}{1 \mp a^\tau} + \frac{1}{(1 \mp a^\tau)^2} \right]^{\frac{1}{\beta}}, \\
&= \left[1 - \frac{2}{1 \mp a^\tau} + \frac{1}{(1 \mp a^\tau)^2} \right]^{\frac{1}{\beta}} = \left[\frac{-1 \mp a^\tau}{1 \mp a^\tau} + \frac{1}{(1 \mp a^\tau)^2} \right]^{\frac{1}{\beta}}, \\
&= \left[\frac{(-1 \mp a^\tau)(1 \mp a^\tau)}{(1 \mp a^\tau)^2} + \frac{1}{(1 \mp a^\tau)^2} \right]^{\frac{1}{\beta}} = \left[\frac{-1 \mp a^{2\tau}}{(1 \mp a^\tau)^2} + \frac{1}{(1 \mp a^\tau)^2} \right]^{\frac{1}{\beta}}, \\
&= \left[\frac{\mp a^{2\tau}}{(1 \mp a^\tau)^2} \right]^{\frac{1}{\beta}} = \left(\frac{\mp a^\tau}{1 \mp a^\tau} \right)^{\frac{2}{\beta}} = \left(\frac{a^\tau}{1 \mp a^\tau} \right)^{\frac{2}{\beta}}, \tag{4.5.19}
\end{aligned}$$

$$u_1(x,t) = \left[\frac{a^{\mp \frac{\beta x}{\ln a \sqrt{4+2\beta}} + \frac{\beta(4+\beta)t^\alpha}{2 \ln a(2+\beta)\Gamma[1+\alpha]}}}{1 \mp a^{\mp \frac{\beta x}{\ln a \sqrt{4+2\beta}} + \frac{\beta(4+\beta)t^\alpha}{2 \ln a(2+\beta)\Gamma[1+\alpha]}}} \right]^{\frac{2}{\beta}}, \tag{4.5.20}$$

dir. Kesirli mertebeden genelleştirilmiş Fisher denkleminin MEKM kullanılarak elde edilen (4.5.20) analitik çözümü için üç ve iki boyutlu grafikleri ile sayısal veri tablosu Mathematica programı kullanılarak aşağıdaki şekilde oluşturulmuştur.

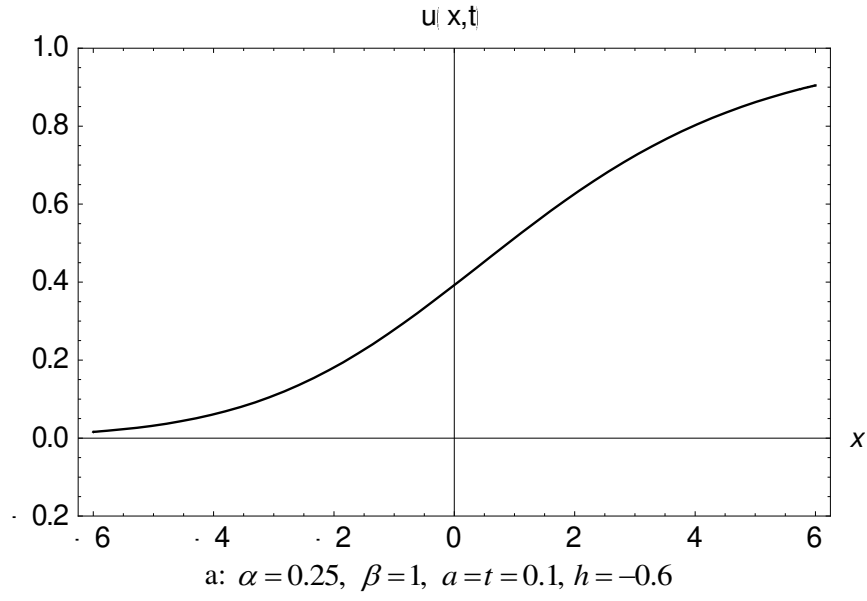


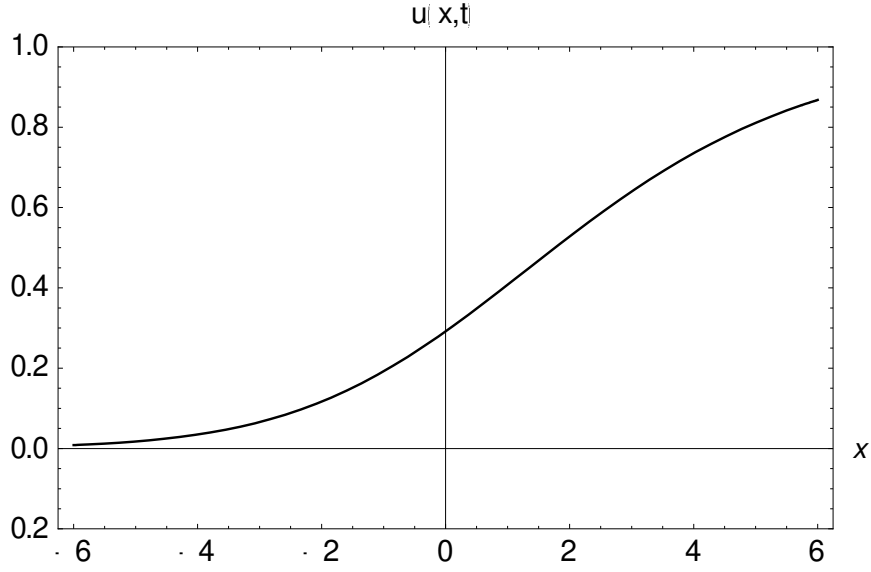
a: $\alpha = 0.25$, $\beta = 1$, $a = 0.1$,



b: $\alpha = 0.75, \beta = 1, a = 0.1,$

Şekil 4.5.1. Kesirli mertebeden genelleştirilmiş Fisher denkleminin MEKM ile elde edilen (4.5.20) analitik çözümünün $0 \leq t \leq 1$ ve $-6 \leq x \leq 6$ için elde edilen üç boyutlu görünümü





b: $\alpha = 0.75$, $\beta = 1$, $a = t = 0.1$, $h = -0.6$

Şekil 4.5.2. Kesirli mertebeden genelleştirilmiş Fisher denkleminin MEKM ile elde edilen (4.5.20) analitik çözümünün $-6 \leq x \leq 6$ için elde edilen iki boyutlu görünümü

Durum 2. Mathematica programı kullanılarak a_0 , a_1 , a_2 , k ve λ katsayıları için elde edilen

$$a_0 = a_1 = 0, a_2 = 1, k = \mp \frac{\beta}{\ln a \sqrt{4+2\beta}} \text{ ve } \lambda = \frac{\beta(4+\beta)}{2 \ln a (2+\beta)}, \quad (4.5.21)$$

değerleri (4.5.14) denkleminde yerine yazılırsa

$$V(\tau) = \frac{1}{(1 \mp a^\tau)^2} \quad (4.5.22)$$

bulunur. Burada $\tau = \mp \frac{\beta x}{\ln a \sqrt{4+2\beta}} - \frac{\beta(4+\beta)t^\alpha}{2 \ln a (2+\beta) \Gamma[1+\alpha]}$ dir. (4.5.21) denklemindeki

katsayıları göre (4.5.1) kesirli mertebeden genelleştirilmiş Fisher denkleminin MEKM ile elde edilen analitik çözümleri;

$$u(x,t) = u(\tau) = V^{\frac{1}{\beta}}(\tau) = \left[\frac{1}{(1 \mp a^\tau)^2} \right]^{\frac{1}{\beta}} = \frac{1}{(1 \mp a^\tau)^{\frac{2}{\beta}}},$$

$$u_2(x, t) = \left(\frac{1}{1 + a^{\mp \frac{\beta x}{\ln a \sqrt{4+2\beta}} + \frac{\beta(4+\beta)t^\alpha}{2 \ln a(2+\beta)\Gamma[1+\alpha]}}} \right)^{\frac{2}{\beta}}, \quad (4.5.23)$$

$$u_3(x, t) = \left(\frac{1}{1 - a^{\mp \frac{\beta x}{\ln a \sqrt{4+2\beta}} - \frac{\beta(4+\beta)t^\alpha}{2 \ln a(2+\beta)\Gamma[1+\alpha]}}} \right)^{\frac{2}{\beta}}, \quad (4.5.24)$$

dir. Simetrik Fibonacci tanjant fonksiyonu

$$\tan Fs(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}, \quad (4.5.25)$$

ve simetrik Fibonacci cotanjant fonksiyonu

$$\cot Fs(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}}, \quad (4.5.26)$$

olmak üzere (4.5.23) ve (4.5.24) analitik çözümlerinin Fibonacci tanjant ve cotanjant fonksiyon türünden ifadeleri ise;

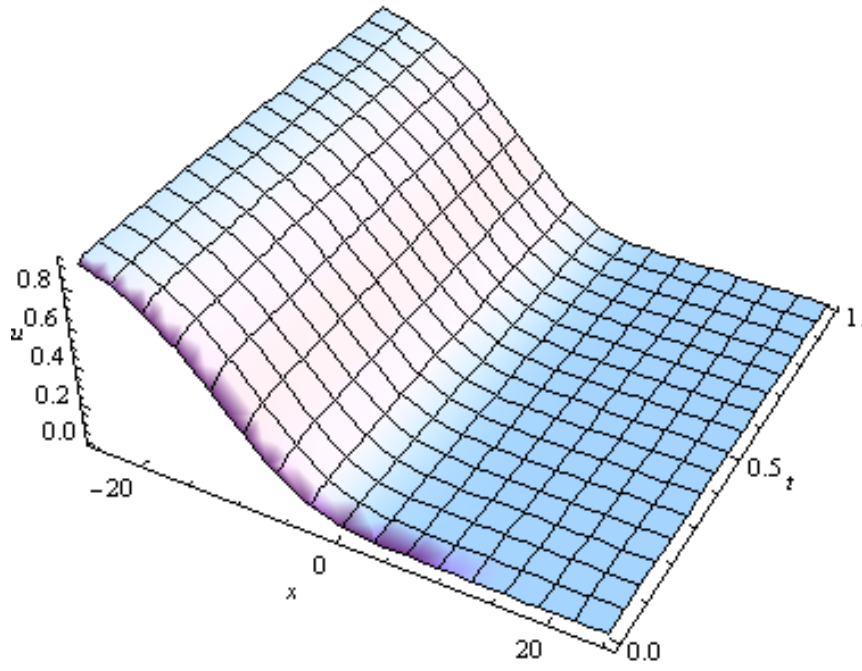
$$u_2(x, t) = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tan Fs(k_1 x - \lambda_1 t^\alpha) \right]^{\frac{2}{\beta}} \quad (4.5.27)$$

ve

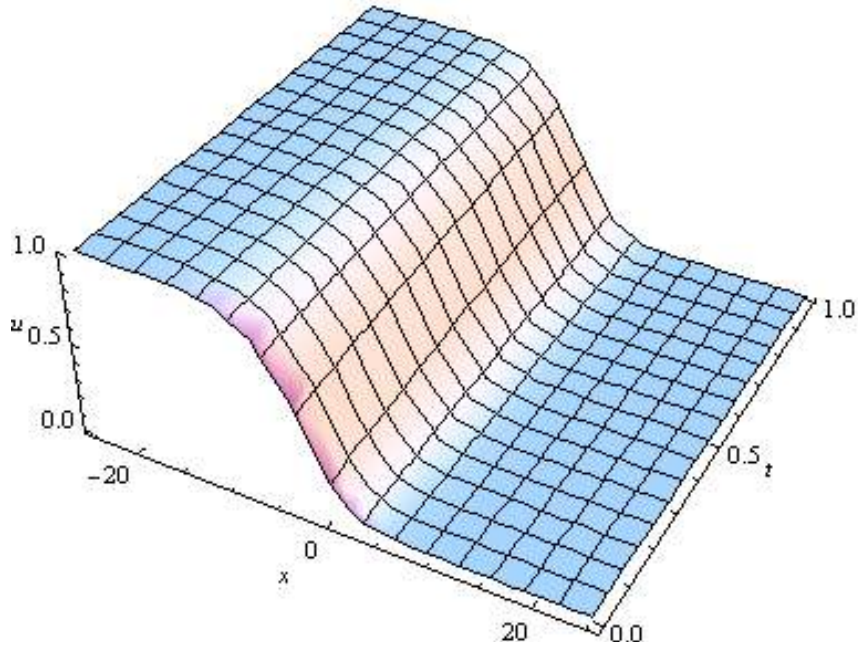
$$u_3(x, t) = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cot Fs(k_1 x - \lambda_1 t^\alpha) \right]^{\frac{2}{\beta}} \quad (4.5.28)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada $k_1 = \mp \frac{\beta}{2 \ln a \sqrt{4+2\beta}}$ ve $\lambda_1 = \mp \frac{\beta(4+\beta)}{4(2+\beta)\Gamma[1-\alpha]}$ dir.

Kesirli mertebeden genelleştirilmiş Fisher denkleminin MEKM ile elde edilen (4.5.27) ve (4.5.28) denklemleri ile gösterilen analitik çözümleri için üç ve iki boyutlu grafikleri ile sayısal veri tablosu Mathematica programı kullanılarak aşağıdaki biçimde oluşturulmuştur;

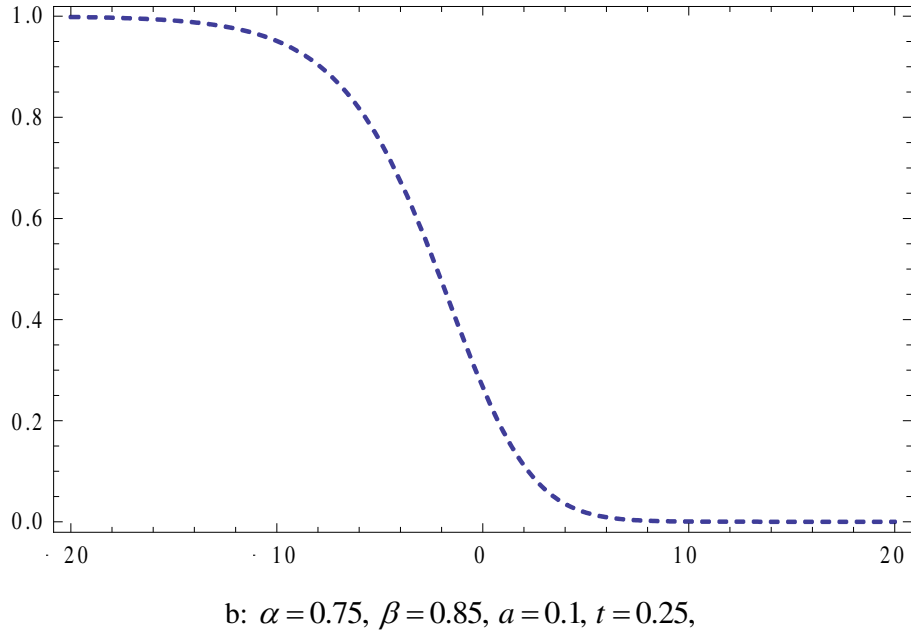
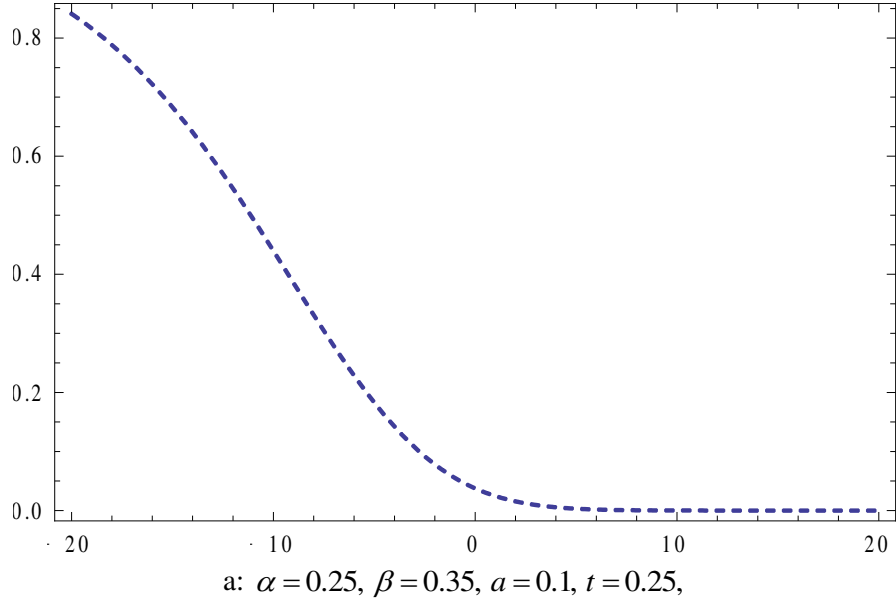


a: $\alpha = 0.25, \beta = 0.35, a = 0.1,$

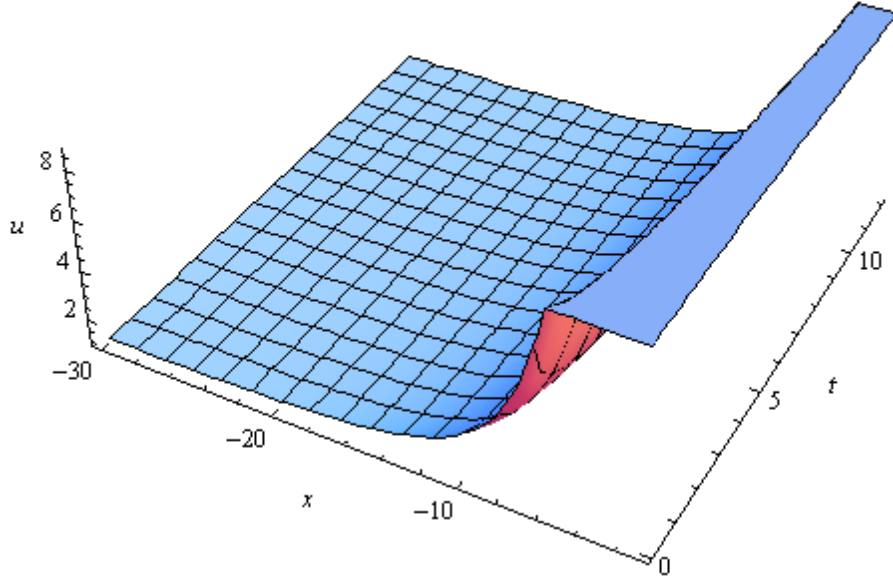


b: $\alpha = 0.75, \beta = 0.85, a = 0.1,$

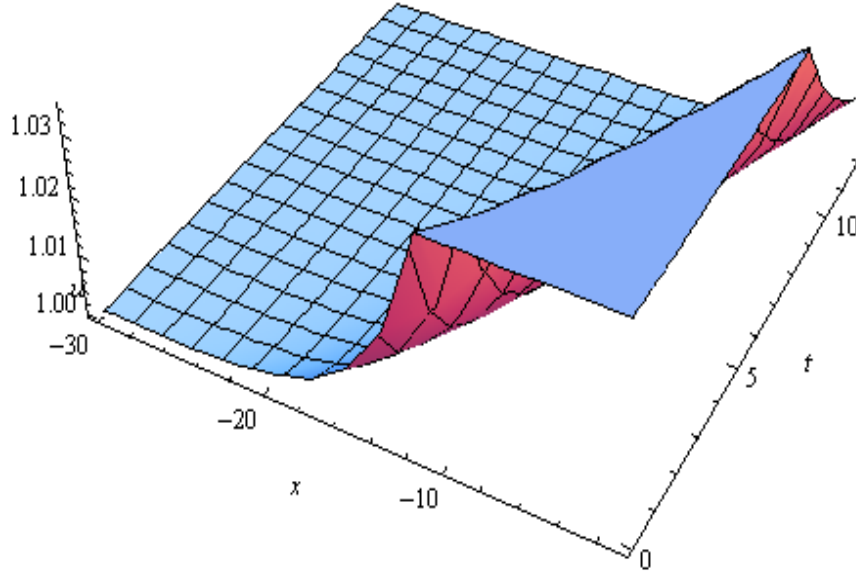
Şekil 4.5.3. Kesirli mertebeden genelleştirilmiş Fisher denkleminin MEKM ile elde edilen (4.5.27) analitik çözümünün $0 \leq t \leq 1$ ve $-25 \leq x \leq 25$ için elde edilen üç boyutlu görünümü



Şekil 4.5.4. Kesirli mertebeden genelleştirilmiş Fisher denkleminin MEKM ile elde edilen (4.5.27) analitik çözümünün $-20 \leq x \leq 20$ için elde edilen iki boyutlu görünümü

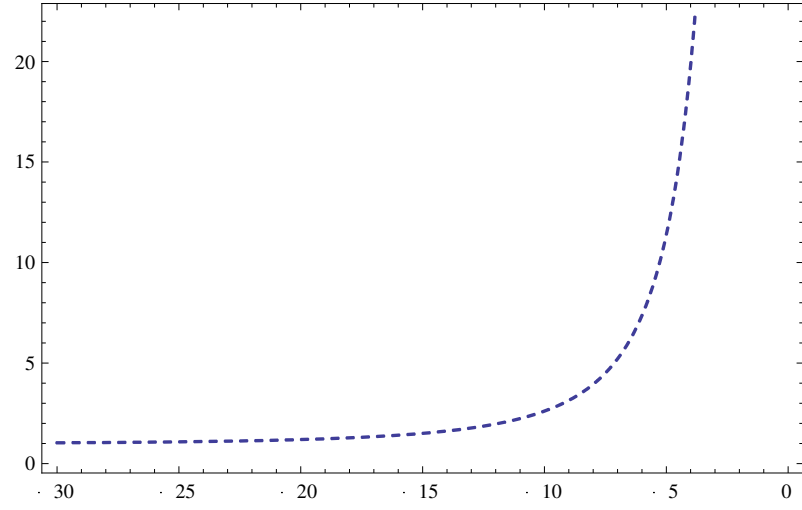


a: $\alpha = 0.25, \beta = 0.35, a = 0.1,$

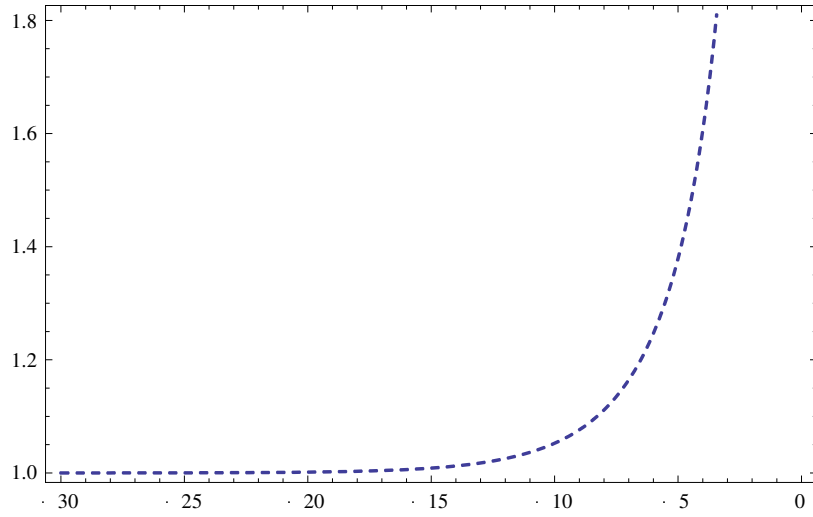


b: $\alpha = 0.75, \beta = 0.85, a = 0.1,$

Şekil 4.5.5. Kesirli mertebeden genelleştirilmiş Fisher denkleminin (4.5.28) analitik çözümünün $0 \leq t \leq 1$ ve $-30 \leq x \leq 0$ için elde edilen üç boyutlu görünümü



a: $\alpha = 0.25, \beta = 0.35, a = 0.1, t = 0.25,$



b: $\alpha = 0.75, \beta = 0.85, a = 0.1, t = 0.25,$

Şekil 4.5.6. Kesirli mertebeden genelleştirilmiş Fisher denkleminin (4.5.28) analitik çözümünün $-30 \leq x \leq 0$ için elde edilen iki boyutlu görünümü

Om Prakash Singh, kesirli mertebeden genelleştirilmiş Fisher denkleminin analitik çözümünü elde etmiştir [99]. Bu çalışmada, MEKM kullanılarak elde edilen (4.3.17) ve (4.3.28) çözümleri Fibonacci tanjant ve Fibonacci kotanjant fonksiyon türünden yeni analitik çözümler olarak bulunmuştur.

4.6 Kesirli Genelleştirilmiş Fisher Denkleminin HAM'nun Uygulanması

Kesirli mertebeden genelleştirilmiş Fisher denkleminin sayısal çözümü için HAM kullanılarak aşağıdaki şekilde elde edilir. Fisher denklemi, $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - u(x,t)(1 - u^\beta(x,t)) = 0, \quad t > 0, \quad (4.6.1)$$

olarak tanımlanır [55,99]. (4.6.1) kesirli mertebeden genelleştirilmiş Fisher denkleminin MEKM ile elde edilen bir analitik çözümü daha önceden

$$u(x,t) = \left[\frac{a^{\frac{\beta x}{\ln a \sqrt{4+2\beta}} + \frac{\beta(4+\beta)t^\alpha}{2\ln a(2+\beta)\Gamma[1+\alpha]}}}{1 \mp a^{\frac{\beta x}{\ln a \sqrt{4+2\beta}} + \frac{\beta(4+\beta)t^\alpha}{2\ln a(2+\beta)\Gamma[1+\alpha]}}} \right]^{\frac{2}{\beta}}, \quad (4.6.2)$$

biçiminde bulunmuş olup, eğer bu denklem $a = 0.1$ ve $\beta = 1$ için yeniden düzenlenirse

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - u(x,t) + u^2(x,t) = 0, \quad (4.6.3)$$

ve

$$u(x,t) = \left[\frac{10^{\frac{-x}{\ln(0.1)\sqrt{6}} - \frac{5t^\alpha}{6\ln(0.1)\Gamma[1+\alpha]}}}{1 + 10^{\frac{-x}{\ln(0.1)\sqrt{6}} - \frac{5t^\alpha}{6\ln(0.1)\Gamma[1+\alpha]}}} \right]^2, \quad (4.6.4)$$

olduğu görülür. Burada (4.6.3) denklemi için başlangıç koşulu

$$u(x,0) = 10^{\frac{-2x}{\ln(0.1)\sqrt{6}}} \left(1 + 10^{\frac{-x}{\ln(0.1)\sqrt{6}}} \right)^{-2} \quad (4.6.5)$$

ele alınır ve (4.6.3) denkleminin HAM'u uygulanırsa, burada L lineer operatörü

$$L[\Phi(x,t;p)] = D_t^\alpha [\Phi(x,t;p)],$$

biçiminde ve N lineer olmayan operatörde aşağıdaki şekilde tanımlanabilir;

$$N[\Phi(x,t;p)] = \frac{\partial^\alpha \Phi(x,t;p)}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^2 \Phi(x,t;p)}{\partial x^2} - \Phi(x,t;p) + \Phi^2(x,t;p). \quad (4.6.6)$$

Burada Homotopi analiz teorisi gereğince sıfıncı mertebeden deformasyon denklemi

$$(1-p)L[\Phi(x,t;p) - u_0(x,t)] = pHN[\Phi(x,t;p)]. \quad (4.6.7)$$

biçiminde oluşturulur. (4.6.7) denkleminde $p = 0$ alındığında

$$\Phi(x, t; 0) = u_0(x, t) = u(x, 0) \quad (4.6.8)$$

ve $p = 1$ olduğunda

$$\Phi(x, t; 1) = u(x, t), \quad (4.6.9)$$

elde edilir. Buradan p , 0'dan 1'e değıştikçe, $\Phi(x, t; p)$ çözüm fonksiyonunda $u_0(x, t)$

başlangıç koşulundan $u(x, t)$ analitik çözümüne deforme olmaktadır. Diğer yandan

$\Phi(x, t; p)$ çözüm fonksiyonu Taylor serisine açılırsa;

$$\Phi(x, t; p) = u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, t) p^m \quad (4.6.10)$$

yazılır. Burada

$$u_m(x, t) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \Phi(x, t; p)}{\partial p^m} \Big|_{p=0} \quad (4.6.11)$$

dir. Liao tarafından da ifade edildiği gibi, başlangıç koşulu ve h yardımcı parametresi doğru olarak seçilirse (4.6.10) serisi $p = 1$ noktasında yakınsar ve bu lineer olmayan diferansiyel denklemin çözümlerinden birisini verir. Bu çözüm

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, t). \quad (4.6.12)$$

biçiminde yazabilirdir. (4.6.7) denklemi p parametresi yönünde m kez diferansiyellenirse, aşağıdaki m dereceli deformasyon denklemi elde edilir;

$$L[u_m(x, t) - \chi_m u_{m-1}(x, t)] = h R_m[\bar{u}_{m-1}(x, t)], \quad (4.6.13)$$

Burada

$$R_m[\bar{u}_{m-1}(x, t)] = \frac{\partial^\alpha u_{m-1}(x, t)}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^2 u_{m-1}(x, t)}{\partial x^2} - u_{m-1}(x, t) + \sum_{n=0}^{m-1} u_n(x, t) u_{m-1-n}(x, t). \quad (4.6.14)$$

ve

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1, \\ 1, & m > 1, \end{cases} \quad (4.6.15)$$

şeklindedir. Böylece $m \geq 1$ için (4.6.13) m dereceli deformasyon denkleminin çözümü

$$u_m(x, t) = \chi_m u_{m-1}(x, t) + hJ_t^\alpha \left[R_m \left[\vec{u}_{m-1}(x, t) \right] \right], \quad (4.6.16)$$

dir. (4.6.3) denklemi (4.6.5) başlangıç koşuluyla birlikte göz önüne alındığında (4.6.12) denkleminin ilk dört terimi olan $u_0(x, t)$, $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$, $u_3(x, t)$, $\dots$ aşağıdaki şekilde elde edilir;

$$u_0(x, 0) = 10^{\frac{-2x}{\ln(0.1)\sqrt{6}}} \left(1 + 10^{\frac{-x}{\ln(0.1)\sqrt{6}}} \right)^{-2} \text{ iken}$$

$$\begin{aligned} m=1 \text{ için } u_1(x, t) &= \chi_1 u_0(x, t) + hJ_t^\alpha \left[R_1 \left[\vec{u}_0(x, t) \right] \right], \\ &= hJ_t^\alpha \left[\frac{\partial^\alpha u_0(x, t)}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial x^2} - u_0(x, t) + \sum_{n=0}^0 u_0(x, t) u_0(x, t) \right], \\ u_1(x, t) &= -\frac{5ht^\alpha}{3\alpha\Gamma[\alpha]} e^{x\sqrt{2/3}} \left(1 + e^{x/\sqrt{6}} \right)^{-3} \end{aligned} \quad (4.6.17)$$

olarak bulunur.

$$\begin{aligned} m=2 \text{ için } u_2(x, t) &= \chi_2 u_1(x, t) + hJ_t^\alpha \left[R_2 \left[\vec{u}_1(x, t) \right] \right] \\ &= hJ_t^\alpha \left[\frac{\partial^\alpha u_1(x, t)}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} - u_1(x, t) + \sum_{n=0}^1 u_1(x, t) u_1(x, t) \right] \end{aligned} \quad (4.6.18)$$

$$\begin{aligned} u_2(x, t) &= -\frac{5ht^\alpha}{3\alpha\Gamma[\alpha]} e^{x\sqrt{2/3}} \left(1 + e^{x/\sqrt{6}} \right)^{-3} - \frac{5h^2t^\alpha}{18\alpha\Gamma[\alpha]4^{-\alpha}\Gamma[1/2+\alpha]} \\ &\quad \times e^{x\sqrt{2/3}} \left(1 + e^{x/\sqrt{6}} \right)^{-4} \left(5t^\alpha \sqrt{\pi} \left(-2 + \cosh(x/\sqrt{6}) + \sinh(x/\sqrt{6}) \right) \right) \\ &\quad + \frac{30\alpha\Gamma[\alpha]h^2t^\alpha}{18\alpha\Gamma[\alpha]\Gamma[1+\alpha]} e^{x\sqrt{2/3}} \left(1 + e^{x/\sqrt{6}} \right)^{-4} \left(1 + \cosh(x/\sqrt{6}) + \sinh(x/\sqrt{6}) \right) \end{aligned} \quad (4.6.19)$$

elde edilir ve son olarak

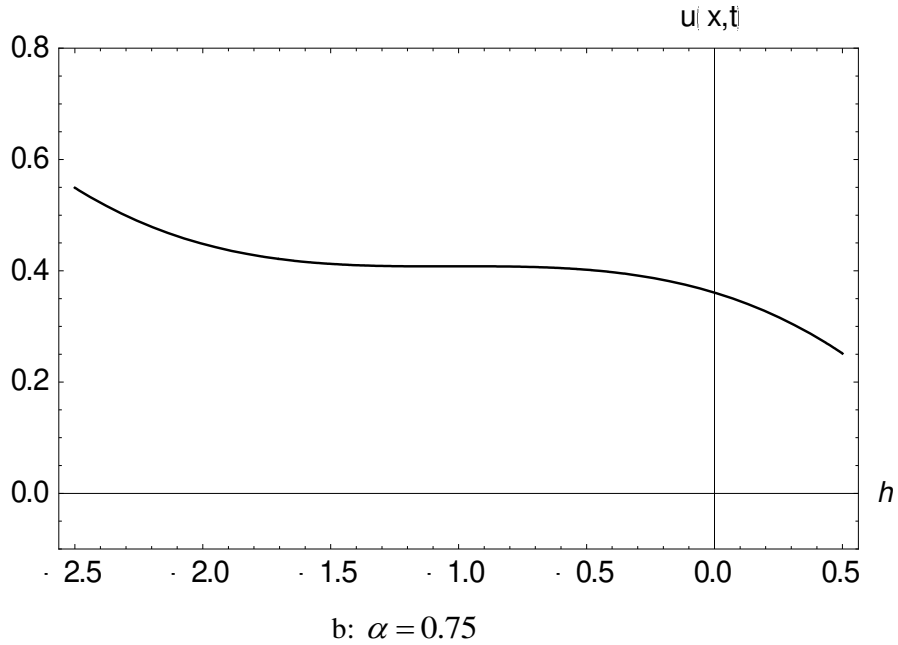
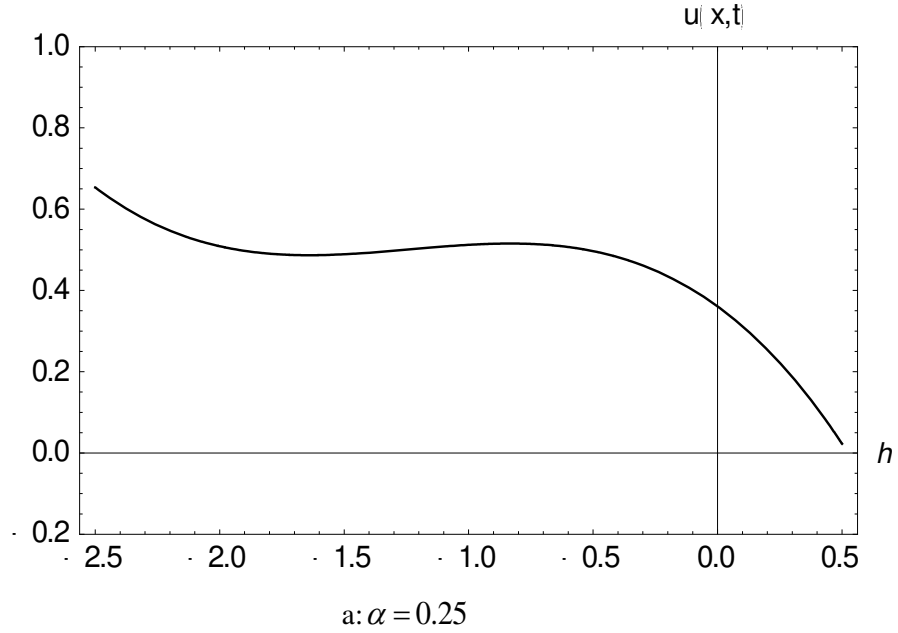
$$\begin{aligned} m=3 \text{ için } u_3(x, t) &= \chi_3 u_2(x, t) + hJ_t^\alpha \left[R_3 \left[\vec{u}_2(x, t) \right] \right], \\ &= hJ_t^\alpha \left[\frac{\partial^\alpha u_2(x, t)}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial x^2} - u_2(x, t) + \sum_{n=0}^2 u_2(x, t) u_2(x, t) \right], \end{aligned} \quad (4.6.20)$$

$$\begin{aligned}
u_3(x, t) = & -\frac{5ht^\alpha}{3\alpha\Gamma[\alpha]} e^{x\sqrt{2/3}} \left(1 + e^{x/\sqrt{6}}\right)^{-3} + \frac{5h^2 4^{-1-\alpha} t^\alpha e^{x\sqrt{2/3}}}{27\alpha^2 \sqrt{\pi}\Gamma[\alpha]\Gamma[3\alpha]\Gamma[1/2+\alpha]\Gamma[1+3\alpha]} \\
& \times \left(1 + e^{x/\sqrt{6}}\right)^{-3} \left(5\left(20 - 6e^{x\sqrt{2/3}} + 5e^{x\sqrt{3/2}} - 15e^{x\sqrt{6}}\right)4^\alpha\right) h\sqrt{\pi} t^{2\alpha} \alpha^2 \Gamma[\alpha] \\
& \times \Gamma[3\alpha]\Gamma[1/2+\alpha] + \left(5e^{x\sqrt{2/3}} 2^{1+4\alpha} h t^{2\alpha} \Gamma^2[1/2+\alpha] - 3\left(1 + e^{x/\sqrt{6}}\right)^2 \sqrt{\pi} \alpha \Gamma[3\alpha]\right) (4.6.21) \\
& \times \frac{5h^2 4^{-1-\alpha} t^\alpha e^{x\sqrt{2/3}} K\Gamma[1+3\alpha]}{27\alpha^2 \sqrt{\pi}\Gamma[\alpha]\Gamma[3\alpha]\Gamma[1/2+\alpha]\Gamma[1+3\alpha]}, \\
& \vdots
\end{aligned}$$

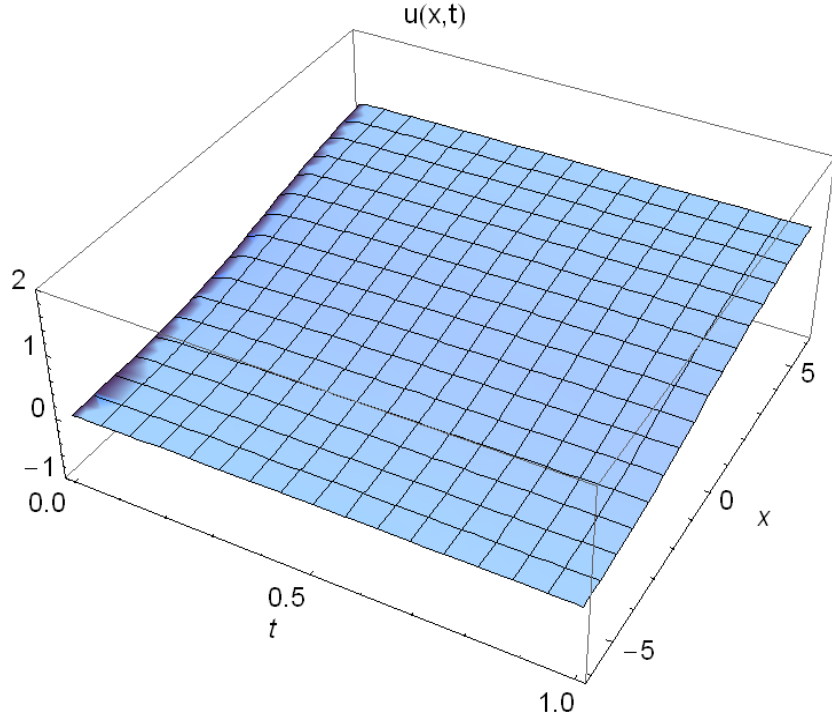
olduğu görülür. Burada $K = 5\left(-2 + e^{x/\sqrt{6}}\right)(1+2h)\sqrt{\pi}t^\alpha + 3\left(1 + e^{x/\sqrt{6}}\right)2^{1+2\alpha}(1+h)\Gamma[1/2+\alpha]$ dır. Elde edilen $u_0(x, t), u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t), \dots$ terimleri (4.6.12) eşitliğinde yerine yazılarak (4.6.3) kesirli mertebeden genelleştirilmiş Fisher denkleminin ilk dört terimli yaklaşık çözümü;

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) + \dots, \\
= & 10^{\frac{-2x}{\ln(0.1)\sqrt{6}}} \left(1 + 10^{\frac{-x}{\ln(0.1)\sqrt{6}}}\right)^{-2} - \frac{5ht^\alpha}{3\alpha\Gamma[\alpha]} e^{x\sqrt{2/3}} \left(1 + e^{x/\sqrt{6}}\right)^{-3} - \frac{5ht^\alpha}{3\alpha\Gamma[\alpha]} \\
& \times e^{x\sqrt{2/3}} \left(1 + e^{x/\sqrt{6}}\right)^{-3} - \frac{5h^2 t^\alpha}{18\alpha\Gamma[\alpha] 4^{-\alpha} \Gamma[1/2+\alpha]} \\
& \times e^{x\sqrt{2/3}} \left(5t^\alpha \sqrt{\pi} \left(-2 + \cosh(x/\sqrt{6}) + \sinh(x/\sqrt{6})\right)\right) \\
& \times \left(1 + e^{x/\sqrt{6}}\right)^{-4} + \frac{30\alpha\Gamma[\alpha] h^2 t^\alpha}{18\alpha\Gamma[\alpha]\Gamma[1+\alpha]} \left(1 + \cosh(x/\sqrt{6}) + \sinh(x/\sqrt{6})\right) \\
& \times e^{x\sqrt{2/3}} \left(1 + e^{x/\sqrt{6}}\right)^{-4} + \frac{5h^2 4^{-1-\alpha} t^\alpha e^{x\sqrt{2/3}}}{27\alpha^2 \sqrt{\pi}\Gamma[\alpha]\Gamma[3\alpha]\Gamma[1/2+\alpha]\Gamma[1+3\alpha]} \\
& - \frac{5ht^\alpha}{3\alpha\Gamma[\alpha]} e^{x\sqrt{2/3}} \left(1 + e^{x/\sqrt{6}}\right)^{-3} \times \left(1 + e^{x/\sqrt{6}}\right)^{-3} h\sqrt{\pi} t^{2\alpha} \alpha^2 \Gamma[\alpha] \\
& \times \left(5\left(20 - 6e^{x\sqrt{2/3}} + 5e^{x\sqrt{3/2}} - 15e^{x\sqrt{6}}\right)4^\alpha\right) \Gamma[3\alpha]\Gamma[1/2+\alpha] \\
& + \left(5e^{x\sqrt{2/3}} 2^{1+4\alpha} h t^{2\alpha} \Gamma^2[1/2+\alpha] - 3\left(1 + e^{x/\sqrt{6}}\right)^2 \sqrt{\pi} \alpha \Gamma[3\alpha]\right) \\
& \times \frac{5h^2 4^{-1-\alpha} t^\alpha e^{x\sqrt{2/3}} K\Gamma[1+3\alpha]}{27\alpha^2 \sqrt{\pi}\Gamma[\alpha]\Gamma[3\alpha]\Gamma[1/2+\alpha]\Gamma[1+3\alpha]}, \tag{4.6.22}
\end{aligned}$$

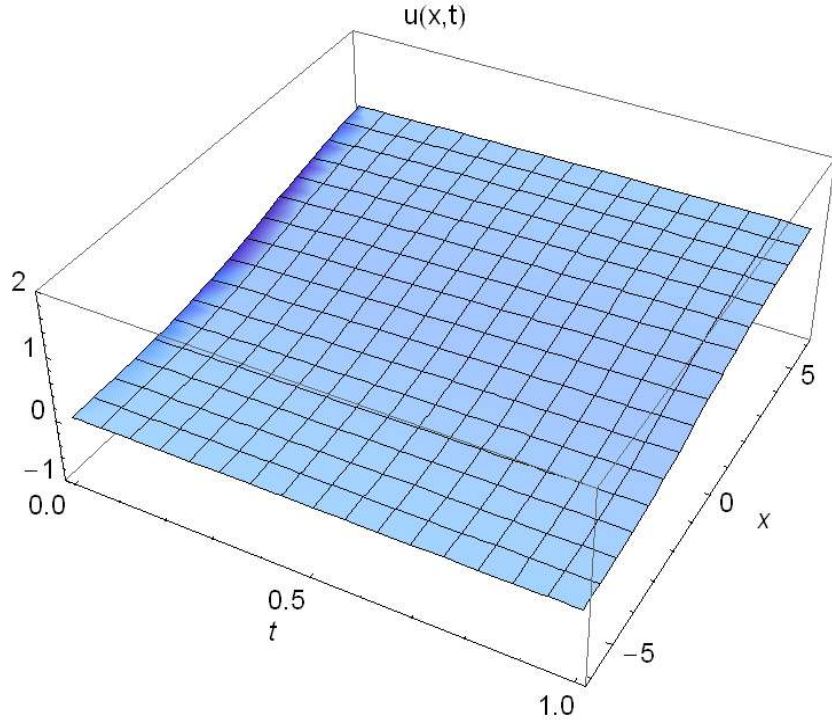
biçiminde bulunur. (4.6.3) kesirli mertebeden genelleştirilmiş Fisher denkleminin HAM ile elde edilen (4.6.22) yaklaşık çözümünün iki boyutlu h grafiği, üç ve iki boyutlu grafikleri, analitik çözüm ile sayısal çözüm arasındaki hata miktarını gösteren tablo Mathematica programı kullanılarak aşağıdaki şekilde oluşturulmuştur;



Şekil 4.6.1. Kesirli mertebeden genelleştirilmiş Fisher denkleminin HAM ile elde edilen (4.6.22) yaklaşık çözümünün $t = 0.1$, $x = 1$, $-2.5 \leq h \leq 0.5$ için edilen iki boyutlu h grafiği

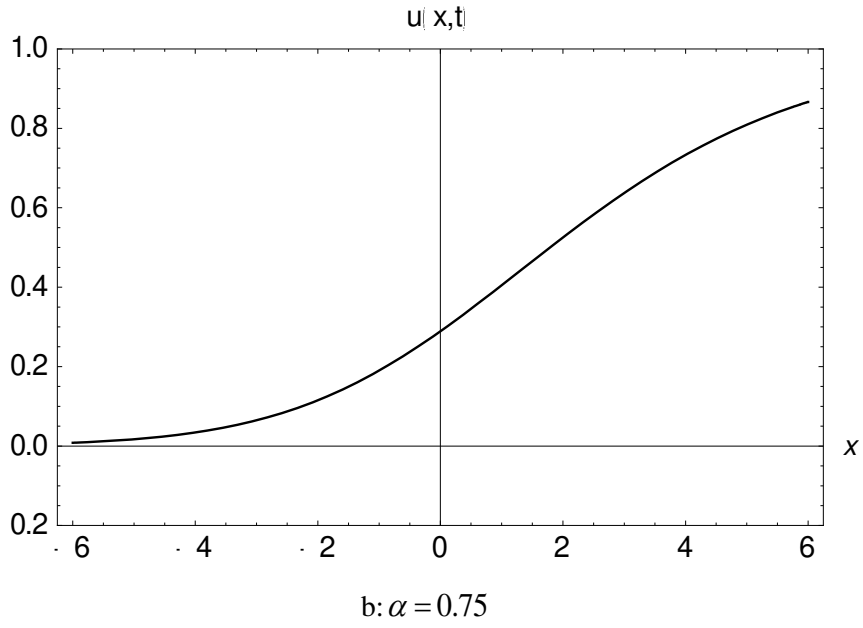
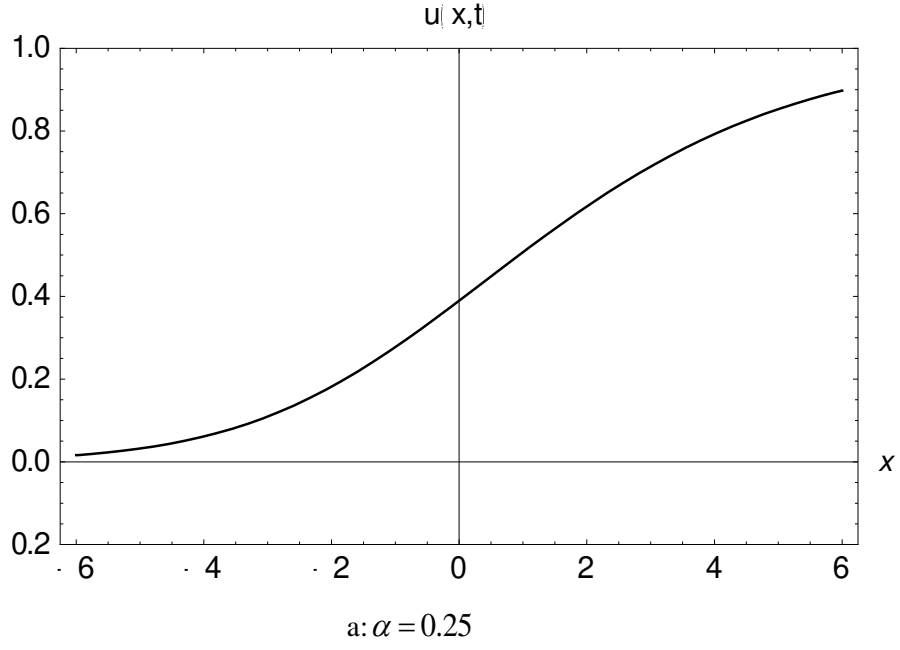


a: $\alpha = 0.25$



b: $\alpha = 0.75$

Şekil 4.6.2. Kesirli mertebeden genelleştirilmiş Fisher denkleminin HAM ile elde edilen (4.6.22) yaklaşık çözümünün $h = -6/10$, $-6 \leq x \leq 6$, $0 \leq t \leq 1$ için elde edilen üç boyutlu görünümü



Şekil 4.6.3. Kesirli mertebeden genelleştirilmiş Fisher denkleminin HAM ile elde edilen (4.6.22) yaklaşık çözümünün $t = 0.1$, $h = -6/10$, $-6 \leq x \leq 6$ için elde edilen iki boyutlu görünümü

Tablo 4.6.1. Kesirli mertebeden genelleştirilmiş Fisher denkleminin HAM ile elde edilen (4.6.22) yaklaşık çözümü ile MEKM ile elde edilen (4.6.4) analitik çözümünün $t = 0.25$, $h = -6/10$, $-6 \leq x \leq 6$ için elde edilen mutlak hata tablosu

x	$\alpha = 0.25$			$\alpha = 0.75$		
	u_{Analitik}	u_{HAM}	$u_{\text{Analitik}} - u_{\text{HAM}}$	u_{Analitik}	u_{HAM}	$u_{\text{Analitik}} - u_{\text{HAM}}$
-6	2.01429E-2	2.02130E-2	7.01130E-5	1.13035E-2	1.07453E-2	5.58161E-4
-3	1.29719E-1	1.31765E-1	2.04562E-3	8.30558E-2	8.01628E-2	2.89306E-3
0	4.31693E-1	4.31171E-1	5.21680E-4	3.35778E-1	3.30102E-1	5.67671E-3
3	7.51720E-1	7.38888E-1	1.28325E-2	6.79366E-1	6.74957E-1	4.40854E-3
6	9.15611E-1	9.06579E-1	9.03165E-3	8.85549E-1	8.83564E-1	1.98542E-3

4.7 Zaman-Kesirli Genelleştirilmiş Burgers Denkleminin MEDDM'nin Uygulanması

Trafik akışının ve gaz dinamiğinin modellenmesinde kullanılan Burgers denklemi ismini Johannes Martinus Burgers'dan alır.

Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin analitik çözümü MEDDM kullanılarak aşağıdaki şekilde elde edilir. Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin genel hali $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - u_{xx} - \beta u^p u_x = 0, p > 0, \quad (4.7.1)$$

olarak tanımlanır [56,101]. Burada β ve p keyfi sabitlerdir. Bu denkleme (3.4.2) ile ifade edilen

$$u(x, t) = u(\eta), \quad \eta = kx - \frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma[1 + \alpha]}$$

dönüşümü uygulanırsa

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = k \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \quad (4.7.2)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = k \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} = k^2 \frac{\partial^2 u(\eta)}{\partial \eta^2} \quad (4.7.3)$$

elde edilir.

Burada σ_x fractal indeksi göstermek üzere [108]

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = \sigma_x \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial^\alpha \eta}{\partial t^\alpha},$$

dir. Özel olarak $\sigma_x = 1$ seçildiğinde

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} &= \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \left[-\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma[1+\alpha]} \right) \right], \\ &= -\frac{\lambda}{\Gamma[1+\alpha]} \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} \left[\frac{\Gamma[1+\alpha]}{\Gamma[1+\alpha-\alpha]} t^{\alpha-\alpha} \right], \\ &= -\frac{\lambda}{\Gamma[1+\alpha]} \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta} [\Gamma[1+\alpha]], \\ &= -\lambda \frac{\partial u(\eta)}{\partial \eta}, \end{aligned} \quad (4.7.4)$$

bulunur. (3.4.2), (4.7.2), (4.7.3) ve (4.7.4) dönüşümleri (4.7.1) Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminde yerine yazılırsa

$$-\lambda u'(\eta) - k^2 u''(\eta) - \beta k u^p(\eta) u'(\eta) = 0, \quad (4.7.5)$$

elde edilir. Bu denklemde

$$u(\eta) = v^{\frac{1}{p}}(\eta) \quad (4.7.6)$$

ve

$$u'(\eta) = \frac{1}{p} v^{\frac{1-p}{p}}(\eta) v'(\eta), \quad (4.7.7)$$

$$u''(\eta) = \frac{1-p}{p^2} v^{\frac{1-2p}{p}}(\eta) (v')^2 + \frac{1}{p} v^{\frac{1-p}{p}}(\eta) v'', \quad (4.7.8)$$

türevleri yerine yazılarak

$$\lambda p(p+1)v - k^2(p+1)v' - \beta k v^2 = 0, \quad (4.7.9)$$

denklemini bulunur. Balans prensibini (4.7.9) lineer olmayan adi diferansiyel denkleminde uygulamak için (3.4.4) ve (3.4.5) eşitlikleri göz önüne alınır ve buradaki en yüksek mertebeden türevli terim olan v' 'nin

$$v' \approx v^{n-l} \quad (4.7.10)$$

biçimindeki ifadesi ile en yüksek dereceli terim olan v^2 in kuvvetleri eşitlenirse

$$n - l = 2 \Rightarrow n = l + 2, \quad (4.7.11)$$

olduğu görülür. (4.7.11) denkleminde bulunan n ve l 'nin farklı değerleri (3.4.4) ve (3.4.5) denklemlerinde yerine yazılarak (4.7.1) denkleminin birbirinden farklı analitik çözümleri aşağıdaki gibi elde edilir;

Durum 1. $l = 0$ ve $n = 2$ değerleri (3.4.4) ve (3.4.5) ifadesinde yazılırsa,

$b_0 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ olmak üzere

$$v' = \frac{a_0 + a_1 v + a_2 v^2}{b_0}, \quad (4.7.12)$$

olarak bulunur. (4.7.12) eşitliği (4.7.9) denkleminde yerine yazılırsa cebirsel denklem sistemi elde edilir. Cebirsel denklem sisteminde bulunan a_0 , a_1 , a_2 , b_0 ve λ katsayıları Mathematica programı kullanılarak

$$a_0 = 0, \quad a_1 = a_1, \quad a_2 = -\frac{p\beta b_0}{k + kp}, \quad b_0 = b_0, \quad \lambda = -\frac{k^2 a_1}{pb_0} \quad (4.7.13)$$

biçiminde elde edilir. (4.7.13) katsayıları (3.4.8) denkleminde yerine yazılırsa

$$\pm(\mu - \mu_0) = -\frac{k(1+p)}{p\beta} \int \frac{1}{v^2 + \frac{a_1}{a_2} v} dv, \quad (4.7.14)$$

bulunur. Bu denklemdeki integrali bulmak için Mathematica programı kullanılırsa

$$\pm(\mu - \mu_0) = -\frac{A_2}{v - \alpha_1}, \quad \alpha_1 = \alpha_2, \quad (4.7.15)$$

$$\pm(\mu - \mu_0) = \frac{A_2}{\alpha_1 - \alpha_2} \ln \left| \frac{v - \alpha_1}{v - \alpha_2} \right|, \quad \alpha_1 \neq \alpha_2, \quad (4.7.16)$$

olduğu görülür. Burada $A_2 = -\frac{k(1+p)}{p\beta}$ olup, α_1 ve α_2 ise

$$v^2 + \frac{a_1}{a_2} v = 0, \quad (4.7.17)$$

polinomunun kökleridir.

Böylece (4.7.1) Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin MEDDM uygulanarak elde edilen analitik çözümleri;

$$u(x,t) = \left[\alpha_1 + \frac{A_2}{\left(kx + \frac{k\alpha_1 t^\alpha}{pb_0\Gamma[1+\alpha]} - \eta_0 \right)} \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (4.7.18)$$

$$u(x,t) = \left[\alpha_1 \pm \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\exp \left[\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{A} \right) \left(kx + \frac{k^2 \alpha_1 t^\alpha}{pb_0\Gamma[1+\alpha]} - \eta_0 \right) \right] - 1} \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (4.7.19)$$

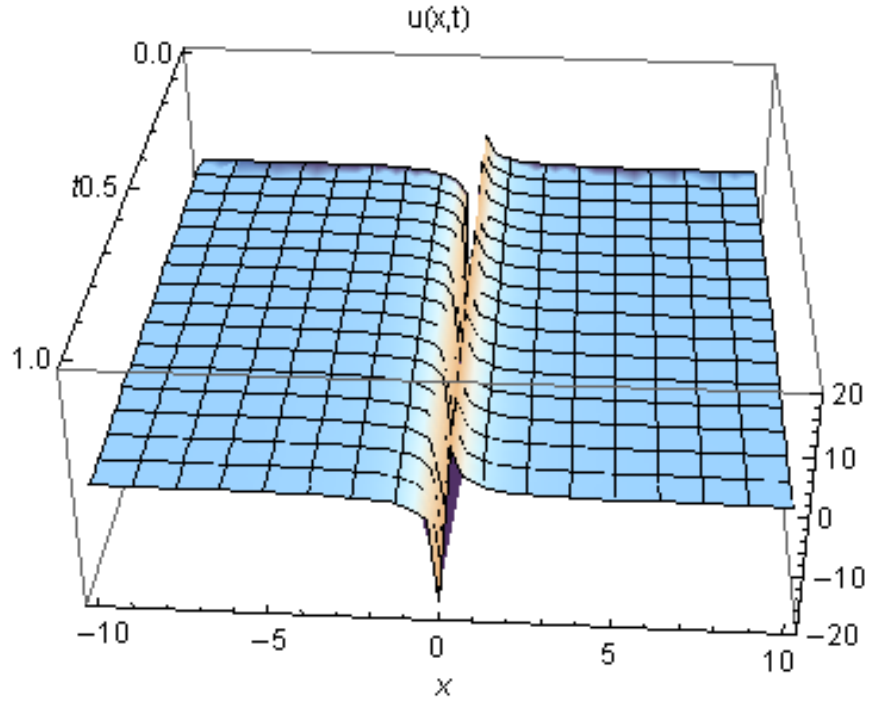
olarak elde edilir. Basitlik açısından (4.7.18) ve (4.7.19) denklemlerinde $\eta_0 = 0$ alınırsa (4.7.13) denklemindeki katsayılar göre (4.7.1) Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin rasyonel analitik çözümleri;

$$u(x,t) = \left[\alpha_1 + \frac{B_3}{x - \lambda_2 t^\alpha} \right]^{\frac{1}{p}} \quad (4.7.20)$$

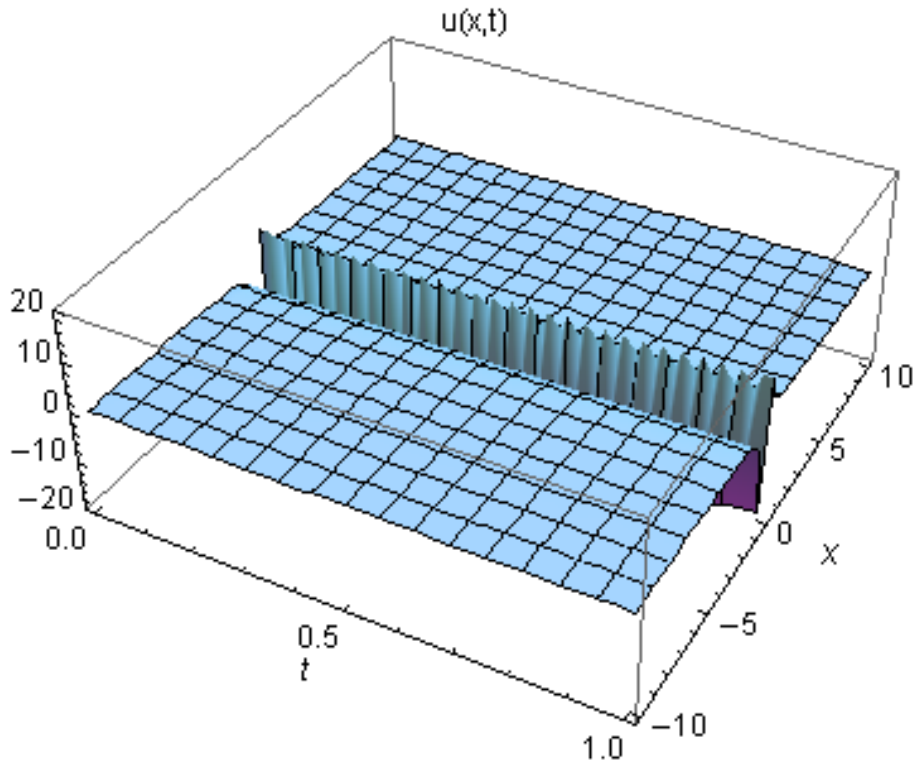
$$u(x,t) = \left[\alpha_1 \pm \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\exp \left[B_4 (x - \lambda_2 t^\alpha) \right] - 1} \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (4.7.21)$$

olarak bulunur. Burada $B_3 = \frac{A_2}{k}$, $B_4 = \frac{k(\alpha_1 - \alpha_2)}{A_2}$, $\lambda_2 = \frac{-k\alpha_1}{pb_0\Gamma[1+\alpha]}$ dir.

Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin MEDDM kullanılarak elde edilen (4.7.21) analitik çözümü için üç ve iki boyutlu grafikleri ile sayısal veri tablosu Mathematica programı kullanılarak aşağıdaki şekilde oluşturulmuştur;

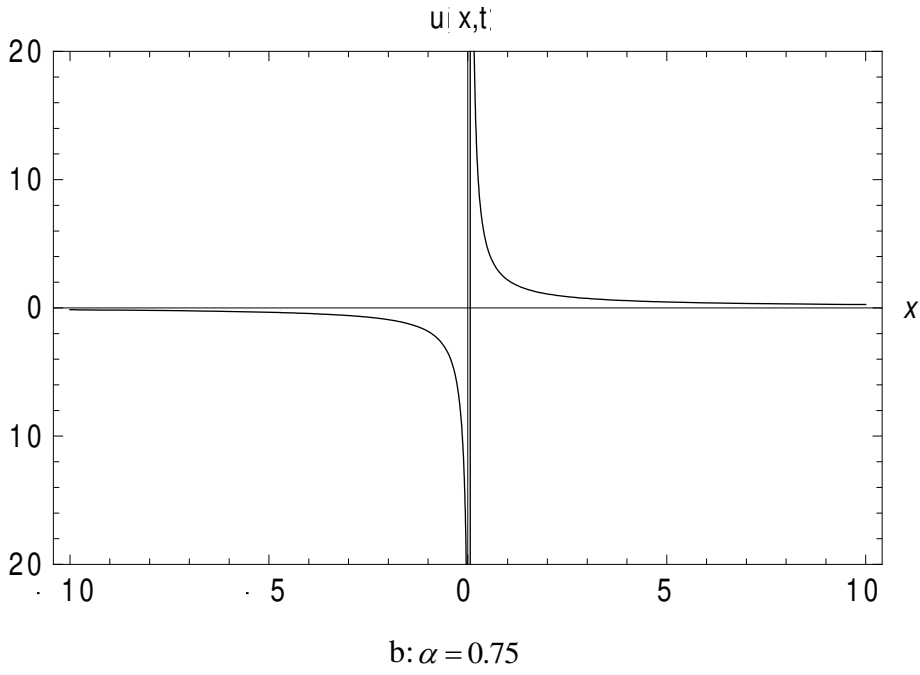
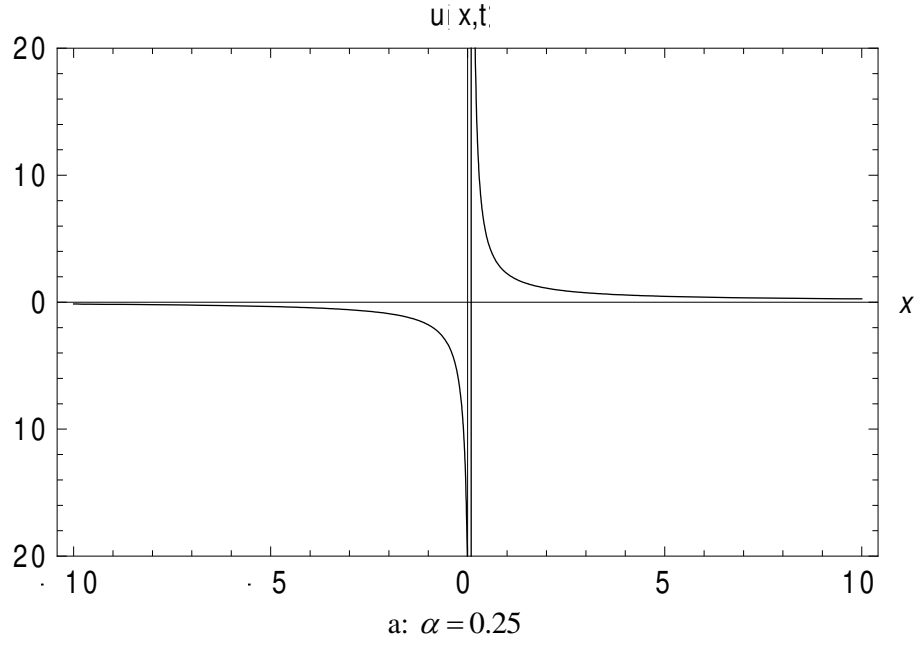


a: $\alpha = 0.25$



b: $\alpha = 0.75$

Şekil 4.7.1. Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin MEDDM ile elde edilen (4.7.21) analitik çözümünün $b_0 = a_1 = 0.1$, $a_2 = 0.01$, $p = \beta = 1$, $\lambda_2 = 0.110326$, $B_4 = 0.45$, $0 \leq t \leq 1$ ve $-10 \leq x \leq 10$ için elde edilen üç boyutlu görünümü



Şekil 4.7.2. Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin MEDDM ile elde edilen (4.7.21) analitik çözümünün $b_0 = a_1 = 0.1$, $a_2 = 0.01$, $p = \beta = 1$, $\lambda_2 = 0.110326$, $B_4 = 0.45$, $t = 0.45$ ve $-10 \leq x \leq 10$ için elde edilen iki boyutlu görünümü

Durum 2. $l=1$ ve $n=3$ değerleri (3.4.4) denkleminde yerine yazılırsa,
 $b_1 \neq 0, a_3 \neq 0$ olmak üzere

$$v' = \frac{a_0 + a_1 v + a_2 v^2 + a_3 v^3}{b_0 + b_1 v}, \quad (4.7.22)$$

bulunur. (4.7.22) eşitliği (4.7.9) denkleminde yerine yazılırsa cebirsel denklem sistemi elde edilir. Cebirsel denklem sisteminde bulunan $a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1$ ve λ katsayılarını bulmak için Mathematica programı kullanılırsa

$$\begin{aligned} a_0 = 0, \quad a_1 = a_1, \quad a_2 = a_2, \quad a_3 = -\frac{p\beta b_0 (k(1+p)a_2 + p\beta b_0)}{k^2(1+p)^2 a_1}, \\ b_0 = b_0, \quad b_1 = -\frac{b_0 (k(1+p)a_2 + p\beta b_0)}{k(1+p)a_1}, \quad \lambda = -\frac{k^2 a_1}{p b_0}, \end{aligned} \quad (4.7.23)$$

biçiminde olduğu görülür. Burada (4.7.23) katsayıları (3.4.8) denkleminde yerine yazılırsa

$$\pm(\mu - \mu_0) = \frac{k(1+p)}{p\beta} \int \frac{v + \frac{b_0}{b_1}}{v^3 + \frac{a_2}{a_3} v^2 + \frac{a_1}{a_3} v} dv, \quad (4.7.24)$$

bulunur. Bu denklemdeki integrali bulmak için Mathematica programı uygulanırsa

$$\pm(\mu - \mu_0) = -\frac{A_3 (b_0 + 2b_1 v - b_1 \alpha_1)}{2b_1 (v - \alpha_1)^2}, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3, \quad (4.7.25)$$

$$\begin{aligned} \pm(\mu - \mu_0) = \frac{A_3 (b_0 + b_1 \alpha_2)}{b_1 (\alpha_1 - \alpha_2)^2} \ln \left| \frac{v - \alpha_2}{v - \alpha_1} \right| - \frac{A_3 (b_0 + b_1 \alpha_1)}{b_1 (v - \alpha_1) (\alpha_1 - \alpha_2)}, \\ \alpha_1 \neq \alpha_2, \quad \alpha_2 = \alpha_3, \end{aligned} \quad (4.7.26)$$

$$\begin{aligned} \pm(\mu - \mu_0) = \frac{A_3}{b_1 (\alpha_1 - \alpha_2) (\alpha_2 - \alpha_3) (\alpha_1 - \alpha_3)} \ln \left| \frac{(v - \alpha_1)^M (v - \alpha_3)^N}{(v - \alpha_2)^p} \right|, \\ \alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3, \end{aligned} \quad (4.7.27)$$

elde edilir. Burada $A_3 = \frac{k(1+p)}{p\beta}$, $M = (\alpha_2 - \alpha_3)(b_0 + b_1 \alpha_1)$, $N = (\alpha_1 - \alpha_2)(b_0 + b_1 \alpha_3)$,

olup, α_1, α_2 ve α_3 ;

$$v^3 + \frac{a_2}{a_3} v^2 + \frac{a_1}{a_3} v + \frac{a_0}{a_3} \quad (4.7.28)$$

polinomunun kökleridir.

Diğer yandan, (4.7.25) denklemi (4.7.6) denkleminde yerine yazılırsa (4.7.1) Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin MEDDM kullanılarak elde edilen analitik çözümü;

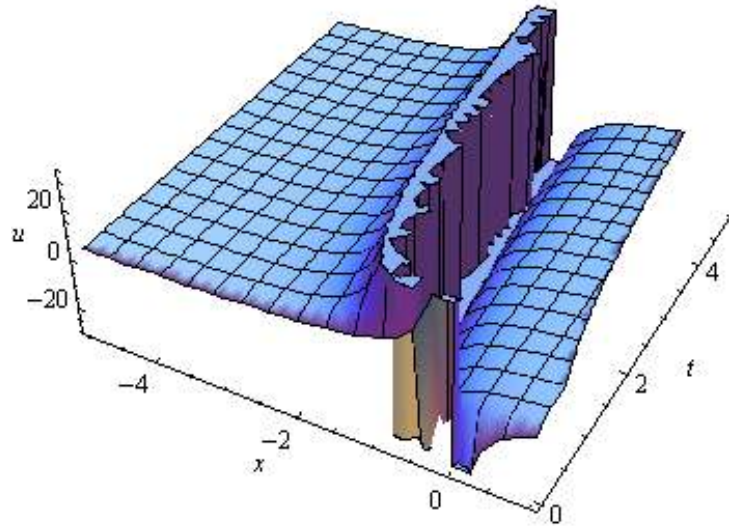
$$u(x,t) = \left[\frac{b_1 \left(2\alpha_1 (kx + C_1 t^\alpha - \eta_0) - A_3 \right) \left(2b_1 (kx + C_1 t^\alpha - \eta_0) \right)^{-1}}{+ \left((A_3 b_1)^2 - 2A_3 b_1 (b_0 + b_1 \alpha_1) (kx + C_1 t^\alpha - \eta_0) \right)^{1/2} \left(2b_1 (kx + C_1 t^\alpha - \eta_0) \right)^{-1}} \right]^{1/p} \quad (4.7.29)$$

Şeklindedir. Burada $C_1 = \frac{k^2 a_1}{pb_0 \Gamma[1+\alpha]}$ dir. Basitlik açısından (4.7.29) denkleminde $\eta_0 = 0$

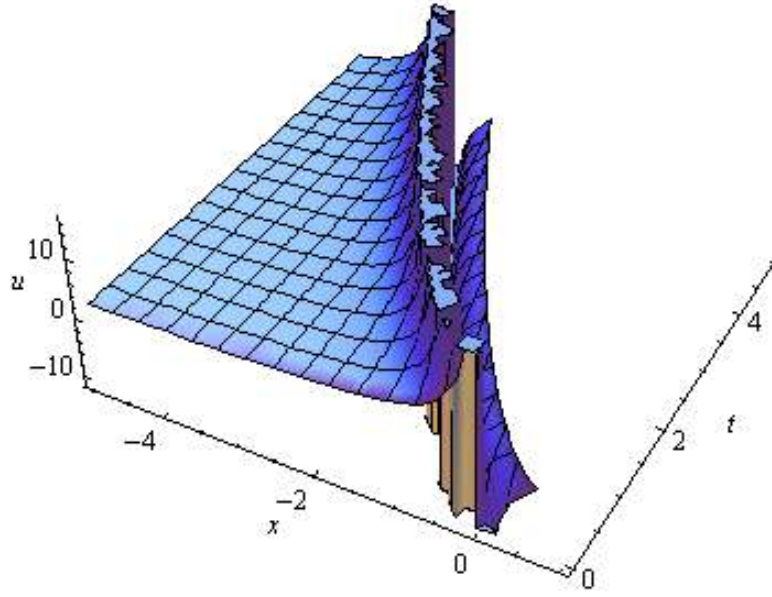
yazılırsa, (4.7.23) denklemindeki katsayılara göre (4.7.1) Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin analitik çözümü;

$$u(x,t) = \left[\frac{b_1 \left(2\alpha_1 (kx + C_1 t^\alpha) - A_3 \right) \left(2b_1 (kx + C_1 t^\alpha) \right)^{-1}}{+ \left((A_3 b_1)^2 - 2A_3 b_1 (b_0 + b_1 \alpha_1) (kx + C_1 t^\alpha) \right)^{1/2} \left(2b_1 (kx + C_1 t^\alpha) \right)^{-1}} \right]^{1/p}, \quad (4.7.30)$$

biçiminde elde edilir. Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin MEDDM ile elde edilen (4.7.30) analitik çözümü için üç ve iki boyutlu grafikleri ile sayısal veri tablosu Mathematica programı kullanılarak aşağıdaki şekilde oluşturulmuştur.

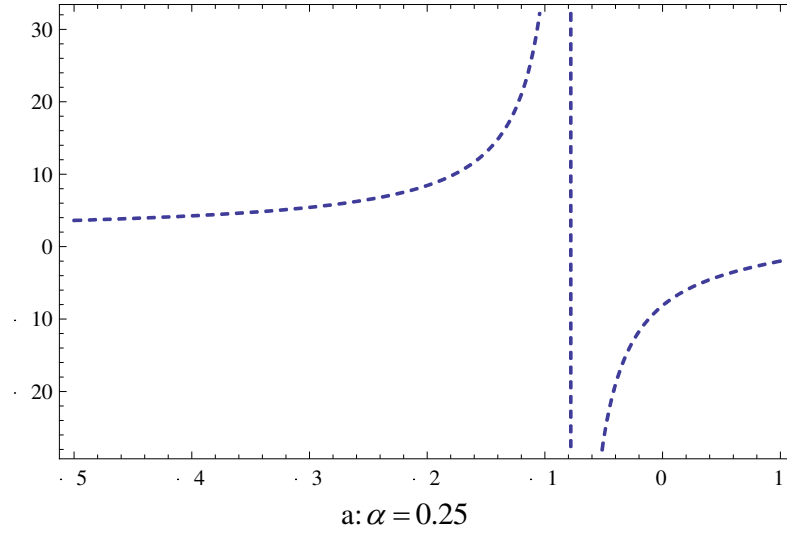


a: $\alpha = 0.25$

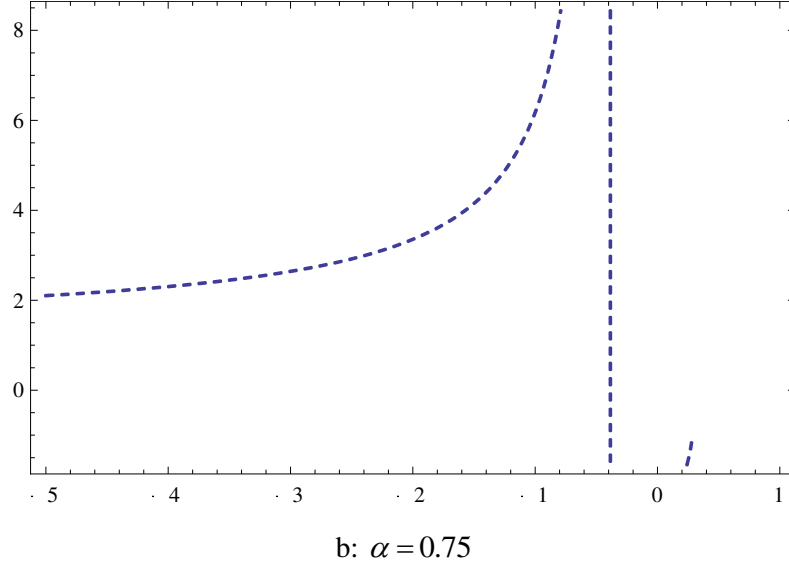


b: $\alpha = 0.75$

Şekil 4.7.3. Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin MEDDM ile elde edilen (4.7.30) analitik çözümünün $\beta = 0.75$, $a_1 = p = b_0 = b_1 = k = 1$, $0 \leq t \leq 5$, $-5 \leq x \leq 1$ için elde edilen üç boyutlu görünümü



a: $\alpha = 0.25$



Şekil 4.7.4. Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin MEDDM ile elde edilen (4.7.30) analitik çözümünün $\beta = 0.75$, $a_1 = p = b_0 = b_1 = k = 1$, $t = 0.5$, $-5 \leq x \leq 1$ için elde edilen iki boyutlu görünümü

Bakkyaraj ve Sahadevan, zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denklemini lineer olmayan adi diferansiyel denkleme dönüştürerek matematiksel analizini yapmıştır [101]. Bu çalışmada, MEDDM kullanılarak elde edilen (4.7.21) denklemi ile gösterilen üstel çözümü ve (4.3.30) biçimindeki rasyonel çözümü yeni çözümler olarak literatüre sunulmuştur.

4.8 Zaman-Kesirli Genelleştirilmiş Burgers Denklemine HAM'nun Uygulanması

Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin sayısal çözümü HAM kullanılarak aşağıdaki şekilde elde edilmiştir:

Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin genel yapısı, $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} - u_{xx}(x,t) - \beta u^p(x,t) u_x(x,t) = 0, p > 0, t > 0, \quad (4.8.1)$$

olarak tanımlanır. Burada β ve p reel sabitlerdir. (4.8.1) Burgers denkleminin MEDDM kullanılarak elde edilen analitik çözümü daha önceden

$$u(x,t) = \left[\alpha_1 \pm \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\exp[B_1(x - \lambda_1 t^\alpha)] - 1} \right]^{1/p}, \quad (4.8.2)$$

biçiminde olup $k, p, \beta, \alpha_1 \neq \alpha_2, b_0$ sabitler olmak üzere $A_1 = -\frac{k(1+p)}{p\beta}$, $B_1 = \frac{k(\alpha_1 - \alpha_2)}{A_1}$,

$\lambda_1 = \frac{-k\alpha_1}{pb_0\Gamma[1+\alpha]}$ katsayıları bilindiğinden bu değerler (4.8.1) Burgers denkleminde

$p = \beta = 1$ için yeniden düzenlenirse

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} - u_{xx}(x,t) - u(x,t)u_x(x,t) = 0, \quad (4.8.3)$$

elde edilir. Böylece (4.8.2) ile gösterilen analitik çözümü $k = 0.1$, $p = \beta = 1$, $b_0 = \alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 0.01$, $B_1 = 0.045$, $\lambda_1 = 0.110326$, için yeniden düzenlenirse;

$$u(x,t) = 0.1 + \frac{0.09}{-1 + e^{\left(0.045x - \frac{1}{10\Gamma[1+\alpha]}t^\alpha\right)}}, \quad (4.8.4)$$

bulunur. (4.8.4) çözümüne göre (4.8.3) denkleminin başlangıç koşulu

$$u(x,0) = 0.1 + \frac{0.09}{-1 + e^{0.045x}} \quad (4.8.5)$$

olarak tanımlanır ve (4.8.3) denkleminde HAM'u uygulanırsa, burada L lineer operatör

$$L[\Phi(x,t;p)] = D_t^\alpha [\Phi(x,t;p)],$$

ve N ' de lineer olmayan operatör olmak üzere

$$N[\Phi(x,t;p)] = \frac{\partial^\alpha \Phi(x,t;p)}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^2 \Phi(x,t;p)}{\partial x^2} - \Phi(x,t;p) \frac{\partial \Phi(x,t;p)}{\partial x}. \quad (4.8.6)$$

Homotopi analiz teorisi gereğince sıfıncı mertebeden deformasyon biçiminde yazılabilir.

$$(1-p)L[\Phi(x,t;p) - u_0(x,t)] = pHN[\Phi(x,t;p)] \quad (4.8.7)$$

Biçiminde oluturulur. Burada $p = 0$ alınır

$$\Phi(x,t;0) = u_0(x,t) = u(x,0), \quad (4.8.8)$$

ve $p = 1$ olduğunda da

$$\Phi(x, t; 1) = u(x, t) \quad (4.8.9)$$

elde edilir. Burada p ; 0'dan 1'e değıştikçe, $\Phi(x, t; p)$ çözüm fonksiyonu $u_0(x, t)$ başlangıç koşulundan $u(x, t)$ analitik çözümüne deforme olmaktadır. Eğer $\Phi(x, t; p)$ çözüm fonksiyonunu Taylor serisine açılırsa;

$$\Phi(x, t; p) = u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, t) p^m \quad (4.8.10)$$

bulunur. Burada

$$u_m(x, t) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \Phi(x, t; p)}{\partial p^m} \right|_{p=0} \quad (4.8.11)$$

dir. Liao tarafından da vurgulandığı gibi, başlangıç koşulu ve h yardımcı parametresi doğru olarak seçilirse (4.8.10) serisi $p=1$ noktasına yakınsar ve bu lineer olmayan diferansiyel denklemin çözümlerinden birisini verir. Bu çözüm

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, t). \quad (4.8.12)$$

biçiminde yazılabilir. Eğer (4.8.7) denklemi p parametresi yönünde m kez diferansiyellenirse,

$$L[u_m(x, t) - \chi_m u_{m-1}(x, t)] = h R_m[\tilde{u}_{m-1}(x, t)], \quad (4.8.13)$$

şeklinde m dereceli deformasyon denklemi elde edilir. Burada

$$R_m[\tilde{u}_{m-1}(x, t)] = \frac{\partial^\alpha u_{m-1}(x, t)}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^2 u_{m-1}(x, t)}{\partial x^2} - \sum_{n=0}^{m-1} u_n(x, t) \frac{\partial u_{m-1-n}(x, t)}{\partial x} \quad (4.8.14)$$

ve

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases} \quad (4.8.15)$$

dir. Böylece $m \geq 1$ için (4.8.13) m dereceli deformasyon denkleminin çözümü

$$u_m(x, t) = \chi_m u_{m-1}(x, t) + h J_t^\alpha [R_m[\tilde{u}_{m-1}(x, t)]] \quad (4.8.16)$$

olarak elde edilir. Diğer yandan (4.8.3) denklemi (4.8.5) başlangıç koşuluyla birlikte göz önüne alınırsa (4.8.12) denkleminin ilk üç terimi olan $u_0(x, t)$, $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$, ... aşağıdaki şekilde elde edilir;

$$u_0(x, 0) = 0.1 + \frac{0.09}{-1 + e^{0.045x}} \text{ olup}$$

$$m = 1 \text{ için } u_1(x, t) = \chi_1 u_0(x, t) + h J_t^\alpha \left[R_1 \left[\bar{u}_0(x, t) \right] \right],$$

$$= h J_t^\alpha \left[\frac{\partial^\alpha u_0(x, t)}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial x^2} - \sum_{n=0}^0 u_0(x, t) \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial x} \right],$$

$$u_1(x, t) = \frac{891 h t^\alpha}{16 \times 10^6 \alpha \Gamma[\alpha]} C s c h^2 \left(\frac{9x}{400} \right), \quad (4.8.17)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$m = 2 \text{ için } u_2(x, t) = \chi_2 u_1(x, t) + h J_t^\alpha \left[R_2 \left[\bar{u}_2(x, t) \right] \right],$$

$$= u_1(x, t) + h J_t^\alpha \left[\frac{\partial^\alpha u_1(x, t)}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} - \sum_{n=0}^1 u_n(x, t) \frac{\partial u_n(x, t)}{\partial x} \right],$$

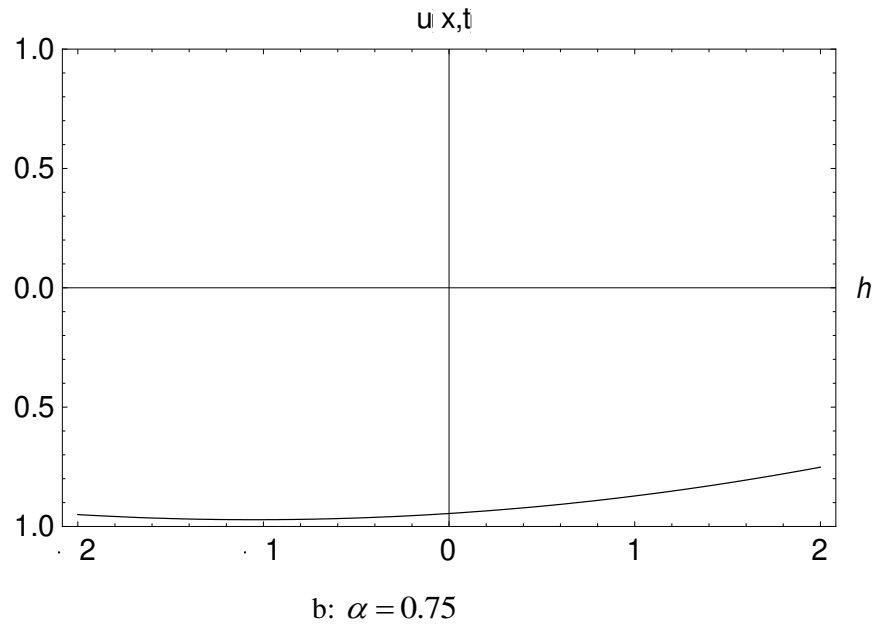
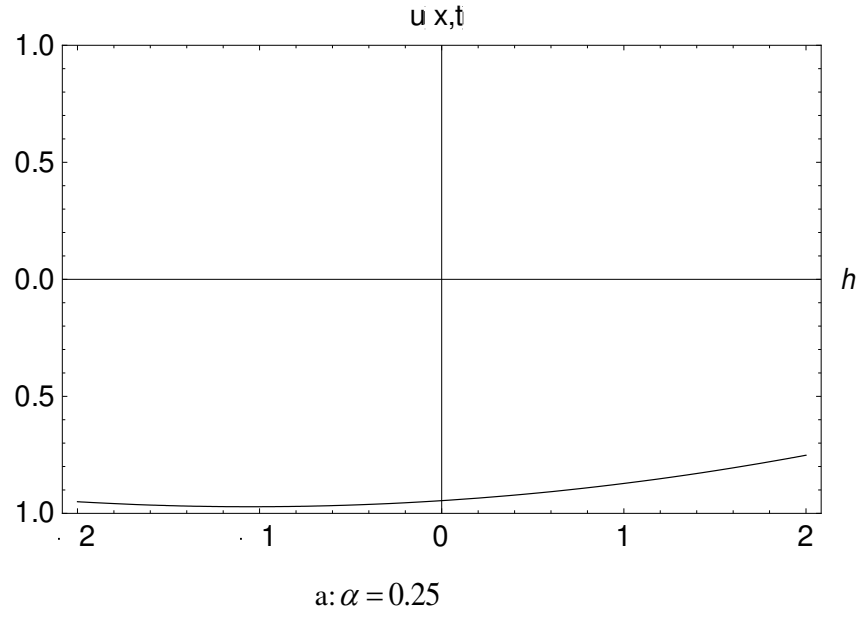
$$u_2(x, t) = \frac{891 h t^\alpha}{16 \times 10^6 \alpha \Gamma[\alpha]} C s c h^2 \left(\frac{9x}{400} \right) + \frac{891 \times 4^{-7-\alpha} e^{9x/200} h^2 t^\alpha}{9765625 \alpha \Gamma[\alpha] \Gamma[1/2 + \alpha]} \\ \times \left(-1 + e^{9x/200} \right)^{-2} \left(99 t^\alpha \sqrt{\pi} Coth \left(\frac{9x}{400} \right) + 625 \times 4^{3+\alpha} \Gamma[1/2 + \alpha] \right), \quad (4.8.18)$$

⋮

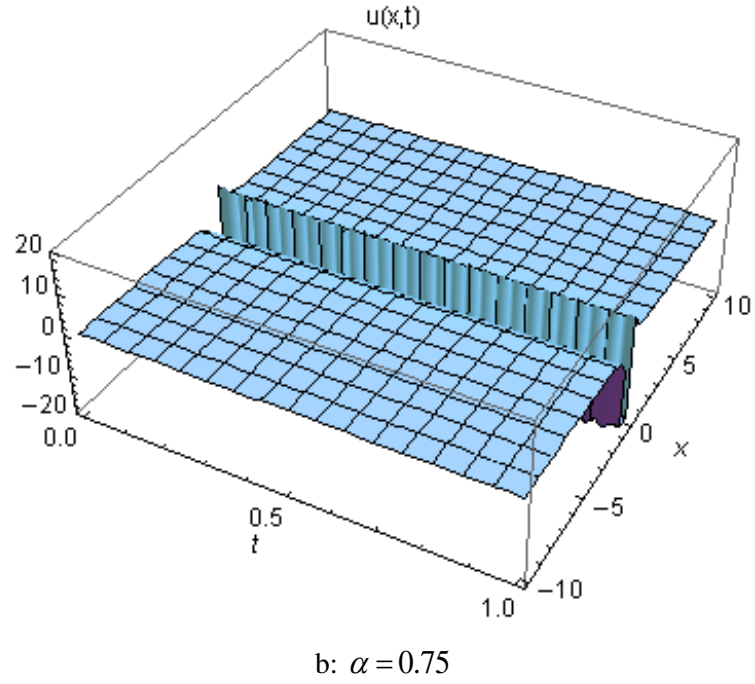
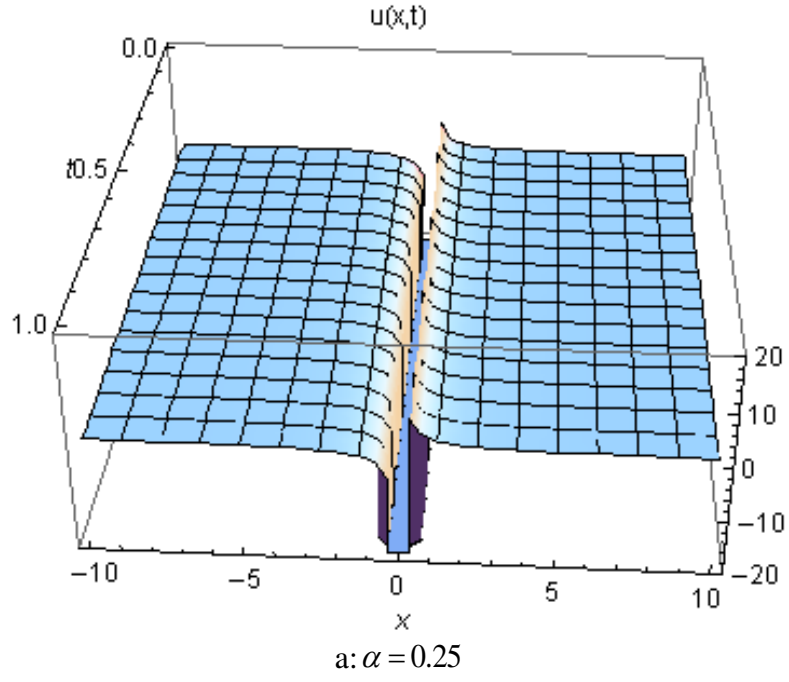
elde edilir. Sonuçta, bulunan $u_0(x, t), u_1(x, t), u_2(x, t), \dots$ terimleri (4.8.12) eşitliğinde yerine yazılarak (4.8.3) Burgers denkleminin ilk üç teriminden ibaret olan yaklaşık çözümü

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + \dots \\ = 0.1 + \frac{0.09}{-1 + e^{0.045x}} + \frac{891 h t^\alpha}{16 \times 10^6 \alpha \Gamma[\alpha]} C s c h^2 \left(\frac{9x}{400} \right) \\ + u_2(x, t) = \frac{891 h t^\alpha}{16 \times 10^6 \alpha \Gamma[\alpha]} C s c h^2 \left(\frac{9x}{400} \right) + \frac{891 \times 4^{-7-\alpha} e^{9x/200} h^2 t^\alpha}{9765625 \alpha \Gamma[\alpha] \Gamma[1/2 + \alpha]} \quad (4.8.19) \\ \times \left(-1 + e^{9x/200} \right)^{-2} \left(99 t^\alpha \sqrt{\pi} Coth \left(\frac{9x}{400} \right) + 625 \times 4^{3+\alpha} \Gamma[1/2 + \alpha] \right)$$

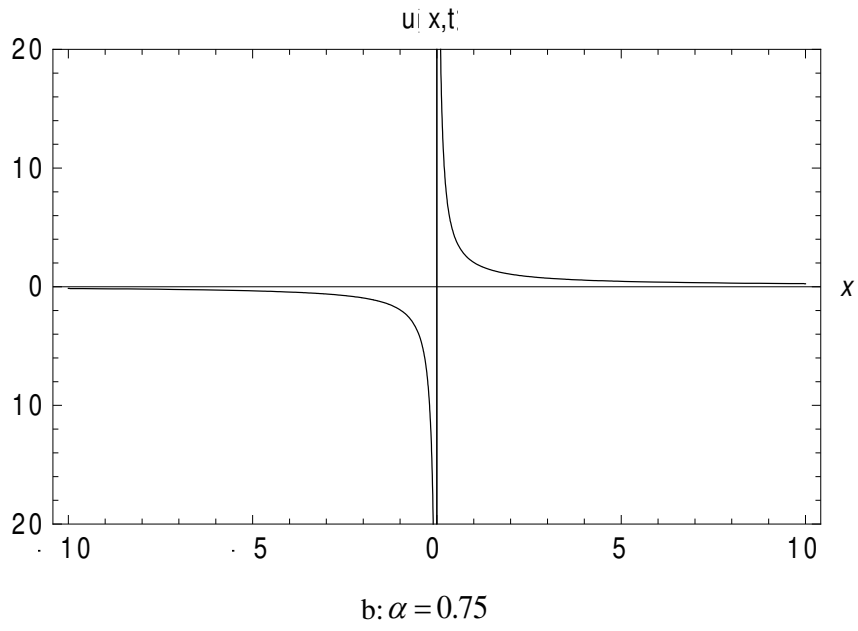
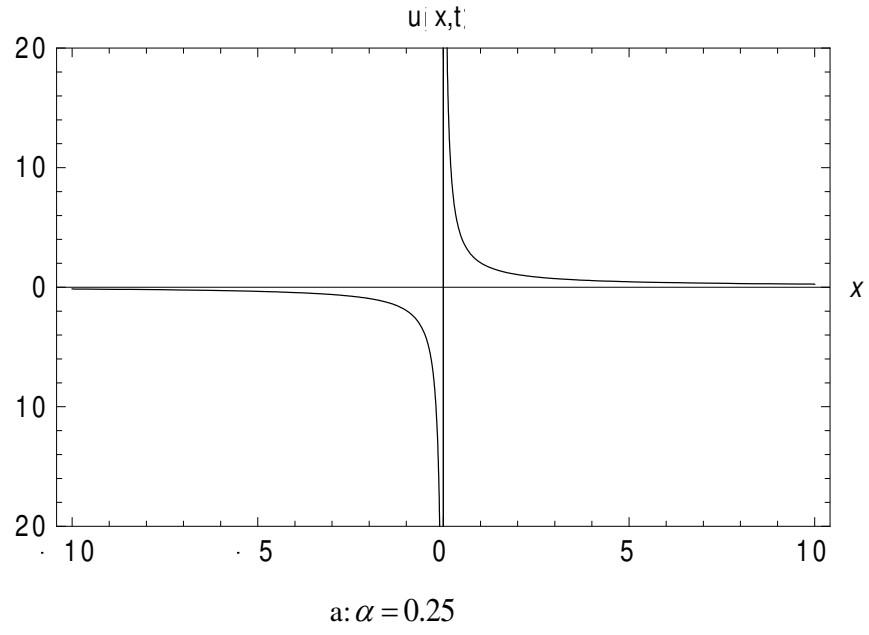
biçiminde olduğu görülür. (4.8.3) zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin HAM kullanılarak elde edilen (4.8.19) denklemi ile gösterilen yaklaşık çözümünün iki boyutlu h grafiği, üç ve iki boyutlu grafikleri, analitik çözüm ile sayısal çözümün arasındaki hata miktarlarını gösteren tablo Mathematica programı kullanılarak aşağıdaki şekilde oluşturulmuştur:



Şekil 4.8.1. Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin HAM ile elde edilen (4.8.19) yaklaşık çözümünün $t = 0.45, x = -2, -2 \leq h \leq 2$ için elde edilen iki boyutlu h grafiği



Şekil 4.8.2. Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin HAM ile elde edilen (4.8.19) yaklaşık çözümünün $-10 \leq x \leq 10$, $0 \leq t \leq 1$ için elde edilen üç boyutlu görünümü



Şekil 4.8.3. Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin HAM ile elde edilen (4.8.19) yaklaşık çözümünün $t = 0.45$, $h = -1/120$, $-10 \leq x \leq 10$, için Mathematica programı kullanılarak elde edilen iki boyutlu görünümü

Tablo 4.8.1. Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin HAM ile elde edilen (4.8.19) yaklaşık çözümü ile MEDDM ile elde edilen (4.8.4) analitik çözümünün $t = 0.25$, $h = -1/120$, $-8 \leq x \leq 12$ için elde edilen mutlak hata tablosu

x	$\alpha = 0.25$			$\alpha = 0.75$		
	$u_{Analitik}$	u_{HAM}	$u_{Analitik} - u_{HAM}$	$u_{Analitik}$	u_{HAM}	$u_{Analitik} - u_{HAM}$
-8	-1.95305E-1	-1.97716E-1	2.41020E-3	-1.96510E-1	-1.97705E-1	1.19435E-3
-4	-4.36810E-1	-4.46438E-1	9.62750E-3	-4.41599E-1	-4.46393E-1	4.79362E-3
4	5.66268E-1	5.56226E-1	1.00080E-2	5.61191E-1	5.56305E-1	4.88612E-3
8	3.10129E-1	3.07672E-1	2.45774E-3	3.08889E-1	3.07683E-1	1.20591E-3
12	2.26761E-1	2.25687E-1	1.07429E-3	2.26220E-1	2.25692E-1	5.27972E-4

5. SONUÇ

Kesirli Adams-Bashforth-Moulton metodu kullanılarak kesirli mertebeden lineer ve lineer olmayan adi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri elde edilmiştir. Elde edilen bu çözümlerin sayısal verileri ışığı altında L_2 ayırık normu ve L_∞ maximum nodal normu kullanılarak L_2 hata miktarları toplamı ve L_∞ maximum hata miktarı sonuçlarına göre Kesirli Adams-Bashforth-Moulton metodu kararlı bir şekilde analitik çözüme yakınsayan sayısal çözümler verdiği gözlemlenmiştir. L_2 ve L_∞ hata miktarlarının azalması için sayısal çözümde bulunan iterasyon sayısı ($n = 300$) arttırıldığında analitik çözüme oldukça yakın sayısal değerler elde edilebildiği görülmüştür.

Kesirli mertebeden Rosenau-Hyman denklemine Genişletilmiş Deneme Denklem metodu, kesirli mertebeden genelleştirilmiş Fisher denklemine Modifiye Edilmiş Kudryashov metodu, zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denklemine Modifiye Edilmiş Deneme Denklem metodu uygulanarak bu denklemlerin analitik çözümleri bulunmuştur. Daha sonra, bu denklemlerin her birisine Homotopi analiz metodu uygulanarak sayısal çözümler elde edilmiştir. Bulunan bu çözümler dikkate alınarak Mathematica 9 programı yardımıyla hata miktarlarını gösteren tablolar ile iki ve üç boyutlu grafiklerle gösterilmiştir.

Ayrıca, Homotopi analiz metodu kullanılarak elde edilen seri çözümlerin yakınsaklığı, çözümlerde bulunan h parametresine bağlı olduğu için h parametresinin grafiği çizilerek çözümün yakınsaklığına göre h parametresinin değeri belirlenmiştir.

Buna ilaveten, elde edilen grafikler ve sayısal veriler göz önüne alındığında, α parametresi $\alpha = 0$ 'dan $\alpha = 1$ 'e değişirken, çözüm fonksiyonunun iki ve üç boyutlu grafikleri ve bunlara ilişkin sayısal veri tablolarındaki değişimlerin de düzenli olarak değiştiği gözlemlenmiştir. Böylece h ve α parametre değerlerinde yapılan küçük değişikliklerin çözümde de küçük değişmelere neden olacağı göz önünde bulundurulduğunda sonuçta dolayı bu çözümlerin kararlı olduğu görülmüştür.

KAYNAKLAR

- [1] **Nishimoto, K.**, 1991. An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus (Calculus of the 21st Century): Integrations and Differentiations of Arbitrary Order, *Descartes Press*, Koriyama, JAPAN.
- [2] **Loverro, A.**, 2004. Fractional Calculus: History, Definition and Applications for the Engineer, Department of Aerospace and Mechanical Engineering, University of Notre Dame, 28 pages, USA.
- [3] **Miller, K.S., Ross, B.**, 1993. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, *John Wiley and Sons*, New York, USA.
- [4] **Molliq, R. Y., and Noorani, M. S. M.**, 2012. Solving the Fractional Rosenau-Hyman Equation via Variational Iteration Method and Homotopy Perturbation Method, *International Journal of Differential Equations*, **2012**, Article ID 472030, 14 pages.
- [5] **Rajabi, A., Ganji, D.D., Taherian, H.**, 2007. Application of homotopy perturbation method in non-linear heat conduction and convection equation, *Physics Letters A*, **360(4-5)**, 570-573.
- [6] **Siddiqui, A. M., Mahmood, R., Ghor, Q. K.**, 2006. Homotopy perturbation method for thin film flow of a fourth grade fluid down a vertical cylinder, *Physics Letters A*, **352**, 404-410.
- [7] **He, J.H.**, 2004. Comparison of homotopy perturbation method and homotopy analysis method, *Applied Mathematics and Computation*, **156(2)**, 527-539.
- [8] **He, J.H.**, 2006. Non-Perturbative Methods for Strongly Non-linear Problems, *Dissertation, de -verlag im Internet GmbH*, Berlin.
- [9] **He, J.H.**, 2005. Homotopy perturbation method for bifurcation of non-linear problems, *The International Journal of Non-linear Sciences and Numerical Simulation*, **6**, 207-208.
- [10] **He, J.H.**, 2004. The homotopy perturbation method for non-linear oscillators with discontinuities, *Applied Mathematics and Computation*, **151**, 287-292.
- [11] **He, J.H.**, 2000. A coupling method a homotopy technique and a perturbation technique for non-linear problems, *The International Journal of Non-linear Mechanics*, **35**, 37-43.

- [12] **He, J.H.**, 2006. Application of He's homotopy perturbation method to non-linear coupled system of reaction diffusion equations, *The International Journal of Non-linear Sciences and Numerical Simulation*, **7**, 413–420.
- [13] **He, J.H.**, 2006. Some asymptotic methods for strongly nonlinear equations, *International Journal of Modern Physics B*, **20(10)**, 1141–1199.
- [14] **Siddiqui, A.M., Mahmood, R, Ghor, Q.K**, 2006. Thin film flow of a third grade fluid on a moving belt by He's homotopy perturbation method, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, **7(1)**, 7–14.
- [15] **Liang, S., Jeffrey, D.J.**, 2009. Comparison of homotopy analysis method and homotopy perturbation method through an evolution equation, *Communication Non-linear Science and Numerical Simulation*, **14**, 4057-4064.
- [16] **Ozis, T., Agirseven, D.**, 2008. He's homotopy perturbation method for solving heat-like and wave-like equation with variable coefficients, *Physics Letters A*, **372**, 5944–5950.
- [17] **Wazwaz, A. M.**, 2006. The variational iteration method for rational solutions for KdV, K(2,2), Burgers, and cubic Boussinesq equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **207**, 18–23.
- [18] **Liao, S.J.**, 1992. The Proposed Homotopy Analysis Technique for the Solution of Non-linear Problems, PhD Thesis, Shanghai Jiao Tong University.
- [19] **Liao, S. J.**, 2003. Beyond perturbation: introduction to the homotopy analysis method, Chapman Hall CRC/Press, Boca Raton.
- [20] **Inc, M.**, 2008. On numerical solution of Burgers' equation by homotopy analysis method, *Physics Letters A*, **372**, 356-360.
- [21] **Abbasbandy, S.**, 2006. The application of homotopy analysis method to non-linear equations arising in heat transfer, *Physics Letters A*, **360**, 109–113.
- [22] **Motsa, S.S., Sibanda, P. and Shateyi, S.** 2010. A new spectral-homotopy analysis method for solving a non-linear second order BVP, *Communications in Non-linear Science and Numerical Simulation*, **15**, 2293-2302.
- [23] **Uğurlu, Y.**, 2010. Bazı Lineer Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Periyodik Dalga Çözümleri, *Doktora Tezi*, F.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.

- [24] **Achouri, T., Omrani, K.**, 2009. Numerical solutions for the damped generalized regularized long-wave equation with a variable coefficient by Adomian decomposition method, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **14**, 2025–2033.
- [25] **Bulut, H., Baskonus, H. M.**, 2009. A comparison among homotopy perturbation method and the decomposition method with the variational iteration method for dispersive equation, *International Journal of Basic & Applied Sciences*, **9(10)** 32–42.
- [26] **Adomian, G.**, 1984. A new approach to non-linear partial differential equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **102**, 420–434.
- [27] **Kudryashov, N. A.**, 2012. One method for finding exact solutions of non-linear differential equations, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **17**, 2248–2253.
- [28] **Podlubny, I.**, 1999. Fractional Differential Equations, *Academic Press*, San Diego, USA.
- [29] **Momani, S., Odibat, Z.**, 2007. Comparison between the homotopy perturbation method and the variational iteration method for linear fractional partial differential equations, *Computers & Mathematics with Applications: An International Journal*, **54**, 910–919.
- [30] **Adomian, G.**, 1984. Convergence series solution of non-linear equations, *Journal of Computation and Applied Mathematics*, **11(2)**, 225–230.
- [31] **Adomian, G.**, 1986. On composite non-linearity and the decomposition method, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **113(2)**, 504–509.
- [32] **Adomian, G., Cherruault, Y.**, 1993. Decomposition method: A new proof of convergence, *Mathematical and Computer Modelling*, **1**, 103–106.
- [33] **Adomian, G.**, 1986. Non-linear Stochastic Operator Equations, *Academic Press*, San Diego, USA.
- [34] **Adomian, G.**, 1988. A review of the decomposition method in applied mathematics, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **135**, 501–544.
- [35] **Adomian, G.**, 1994. Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method, *Kluwer*, Boston, USA.

- [36] **Ray, S. S.**, 2009. Analytical solution for the space fractional diffusion equation by two step Adomian decomposition method, *Communications in Non-linear Science and Numerical Simulation*, **14**, 1295–1306.
- [37] **Esen A., Tasbozan, O., and Yagmurlu, N. M.**, 2012. Approximate analytical solutions of the fractional Sharma-Tasso-Olver equation using homotopy analysis method and a comparison with other methods, *Cankaya University Journal of Science and Engineering*, **9(2)**, 139-147.
- [38] **Zedan, H. A., Adrous, E. E.**, 2012. The application of the homotopy perturbation method and the homotopy analysis method to the generalized zakharov equations, *Abstract and Applied Analysis*, **2012**, Article ID 561252, 19 pages.
- [39] **Liao, S.**, 2004. On the homotopy analysis method for non-linear problems, *Applied Mathematics and Computation*, **147(2)**, 499–513.
- [40] **Liao, S.**, 2005. Comparison between the homotopy analysis method and homotopy perturbation method, *Applied Mathematics and Computation*, **169(2)**, 1186–1194.
- [41] **Abbasbandy, S.**, 2007. The application of homotopy analysis method to solve a generalized Hirota-Satsuma Coupled Kdv equation, *Physics Letters A*, **361(6)**, 478–483.
- [42] **Dahab, M. A., Mohamed, S. M., and Nofal, T. A.**, 2013. A one step optimal homotopy analysis method for propagation of harmonic waves in non-linear generalized magnetothermoelasticity with two relaxation times under influence of rotation, *Abstract and Applied Analysis*, **2013**, Article ID 614874, 14 pages.
- [43] **Xing, R.**, 2013. Wavelet-Based homotopy analysis method for non-linear matrix system and its application in Burgers equation, *Mathematical Problems in Engineering*, **2013**, Article ID 982810, 7 pages.
- [44] **Nik, H. S., Effati, S., Motsa, S. S., and Shateyi, S.**, 2013. a new piecewise-spectral homotopy analysis method for solving chaotic systems of initial value problems, *Mathematical Problems in Engineering*, **2013**, Article ID: 583193, 13 pages.

- [45] **Aziz, Z.a., Nazari, M., Salah F., Ching, D.L.C.,** 2012. Constant accelerated flow for a third-grade fluid in a porous medium and a rotating frame with the Homotopy Analysis Method, *Mathematical Problems in Engineering*, **2012**, Article ID 601917, 14 pages.
- [46] **Momani, S., Odibat, Z.,** 2007. Homotopy perturbation method for non-linear partial differential equations of fractional order, *Physics Letters A*, **365**, 345-350.
- [47] **Momani, S., Odibat, Z.,** 2008. A generalized differential transform method for linear partial differential equations of fractional order, *Applied Mathematics Letters*, **21**, 194–199.
- [48] **Luchko, Y., Gorenflo, R.,** 1999. An operational method for solving fractional differential equations with the Caputo derivatives, *Acta Mathematica Vietnamica*, **24(2)**, 207–233.
- [49] **Liu, C.S.,** 2005. Trial equation method and its applications to non-linear evolution equations, *Acta Physica Sinica*, **54**, 2505-2509.
- [50] **Liu, C.S.,** 2006. A new trial equation method and its applications, *Communications in Theoretical Physics*, **45**, 395-397.
- [51] **Galeone, L., and Garrappa, R.,** 2008. Fractional Adams–moulton methods, *Mathematics and Computers in Simulation*, **79**, 1358–1367
- [52] **Amirali, G., Duru, H.,** 2002. Nümerik Analiz, *Pegem A Yayıncılık*. Ankara.
- [53] **Diethelm, K., Ford, J.M. Ford, N.J, Weilbeer, M.,** 2006. Pitfalls in fast numerical solvers for fractional differential Equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **186**, 482–503.
- [54] **Ford, N.J., Connolly, J.A.,** 2006. Comparison of numerical methods for fractional differential equations, *Communications on Pure and Applied Analysis*, **5 (2)** 289–306.
- [55] **Bulut, H., Pandir, Y., and Baskonus, H. M.,** 2013. Symmetrical hyperbolic Fibonacci function solutions of generalized Fisher equation with fractional order, *11th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics Proceeding*, Rhodes, Greece, 21-27 Eylül.

- [56] **Bulut H., Baskonus H. M., and Pandir Y.,** 2013. The modified trial equation method for fractional wave equation and time fractional generalized Burgers equation, *Abstract and Applied Analysis*, **2013**, Article ID 636802, 8 pages.
- [57] **Bulut, H., Pandir, Y., Baskonus, H. M.,** 2013. An application of the extended trial equation method to the fractional Rosenau–hyman equation, *International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modelling*, Yildiz Technical University, Istanbul.
- [58] **Landy, A. J.,** 2009. Fractional Differential Equations and Numerical Methods, *M. S. Thesis*, University of Chester, Chester, UK.
- [59] **Oldham, K. B., Spanier, J.,** 1974. The Fractional Calculus: Integrations and Differentiations of Arbitrary Order, *New York: Academic Press*, New York, USA.
- [60] **Özen, S., Öztürk, İ.,** 2004. Grunwald-Letnikov, Riemann-Liouville ve Caputo kesirsel türevleri üzerine, *Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, **20(1-2)**, 66–76.
- [61] **Petras, I.,** 2011. Fractional Derivatives, Fractional Integrals, and Fractional Differential Equations in Matlab in *Engineering Education and Research using Matlab*, pp. 239-264, InTech, Rijeka, Croatia, Hırvatistan.
- [62] **Kaczorek, T.,** 2011. Selected Problems of Fractional Systems Theory, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Poland.
- [63] **Tarasov, V. E.,** 2010. Fractional Dynamics; Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media, *Springer*, New York, USA.
- [64] **Ortigueira, M. D.,** 2011. Fractional Calculus for Scientists and Engineers, *Springer Science and Business Media B.V*, New York, USA.
- [65] **Monje, A. Chen,YQ., Vinagre, B. M. Xue, D. F. Vicente,** 2010. Fundamentals of fractional-order systems in fractional-order systems and controls fundamentals and applications, *Advances in Industrial Control*, Springer, UK.
- [66] **Diethelm, K.,** 2010. The Analysis of fractional differential equations, an application-oriented exposition using differential operators of Caputo type, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer, Germany.

- [67] **Mainardi, F.**, 2010. Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity An Introduction to Mathematical Models, *Imperial College Press*, USA.
- [68] **Mainardi, F., Antonio Mura, A., and Gianni, P.**, 2010. The M-Wright function in time-fractional diffusion processes: A Tutorial Survey, *International Journal of Differential Equations*, **2010**, 29 pages.
- [69] **George, A.A.**, 2011. Advances on Fractional Inequalities, *Springer*, USA.
- [70] **Kayhan, M.**, 2013. Kesirli kısmi diferansiyel denklemlerin sonlu farklar ve iterasyon metotları ile çözümü, *Yüksek Lisans Tezi*, F.Ü.Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- [71] **Bayın, S.**, 2006. Mathematical Methods in Science and Engineering, *John Wiley & Son*, New Jersey, USA.
- [72] **Köse, Z. S.**, 2007. Methods for solving fractional differential equations, *M. S. Thesis*, Fatih U. Faculty of Science, Istanbul.
- [73] **Dalir, M., Bashour, M.**, 2010. Applications of Fractional Calculus, *Applied Mathematical Sciences*, **4(21)**, 1021 – 1032.
- [74] **Gorenflo, R., and Mainardi, F.**, 2008. Fractional Calculus: Integral and differential equations of fractional order, *CISM LECTURE NOTES; International Centre for Mechanical Sciences*, 223-276.
- [75] **Soytaş, C.**, 2006. Kesirli diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemleri, *Yüksek lisans Tezi*, S.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.
- [76] **Sorkun, H.H.**, 2008. Volterra integral denklem sistemlerinin yaklaşık çözümleri, *Yüksek Lisans Tezi*, C.B.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Manisa.
- [77] **Başkonuş, H. M.**, 2010. Bazı Lineer olmayan diferansiyel denklemlerin Adomian ayrışım metodu ve Homotopi Pertürbasyon metodu ile Sayısal çözümleri, *Yüksek lisans Tezi*, F.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- [78] **Debnath, L.**, 2004. Non-linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, *Birkhauser*, USA.
- [79] **Kolmogorov, A. N., Fomin, S.V.**, 1957, Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis, *Graylock Press*, Rochester, USA.

- [80] **Cavlak, E.**, 2013. Kesirli Kuvvetlere Sahip Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Homotopi Analiz Yöntemi ile Sayısal Çözümlerinin İrdelenmesi, *Doktora Tezi*, F.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- [81] **Orhun, N.**, 1998. Vektör Uzayları, *Lineer Cebir*, Sayfa: 89-110, Açıköğretim Fakültesi Yayınları, Eskişehir.
- [82] **Yaşar, B. İ.**, 2005. Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları, *Siyasal Kitabevi*, Ankara.
- [83] **Balcı, M.**, 1988. Analiz II, *Balcı Yayınları*, Ankara, Türkiye.
- [84] **Başkonuş, H. M.**, 2012. Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemlerine Varyasyonel İterasyon Metodunun Uygulanması, *Doktora Semineri*, F.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- [85] **Mittal, R.C. and Nigam, R.**, 2008. Solution of fractional integro-differential equations by Adomian decomposition method, *The International Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **4(2)**, 87-94.
- [86] **Bulut, H.**, 1997. Adi Diferansiyel Denklemlerin Tek Adım Metotları ile Nümerik Çözümü İçin Genişletilmiş A-Dengeli ve L-Dengeli Simpson ve Dikdörtgen Kuralı, *Yüksek lisans Tezi*, F.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- [87] **Atkinson, K.E.**, 1989. An Introduction to Numerical Analysis, *John Wiley & Sons*. New York.
- [88] **Diethelm, K., Ford, N.J., and Freed, A. D.**, 2004. Detailed error analysis for a fractional Adams method, *Numerical Algorithms*, **36**, 31–52.
- [89] **Diethelm, K., and Freed, A.D.**, 1998. The FracPECE subroutine for the numerical solution of differential equations of fractional order, in: Forschung und wissenschaftliches Rechnen: Beiträge zum Heinz-Billing-Preis 1998, eds. S. Heinzel and T. Plesser (Gesellschaft für wissenschaftliche Datenverarbeitung, Göttingen, 1999) 57–71.
- [90] **Diethelm, K., Ford, N. J., Freed, A. D., Luchko, Y.**, 2005. Algorithms for the fractional calculus: A selection of numerical methods, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **194**, 743-773.
- [91] **Hairer, E. and Wanner, G.**, 1991. Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential–Algebraic Problems, *Springer*, Berlin.

- [92] **Lubich, C.**, 1985. Fractional linear multistep methods for Abel–Volterra integral equations of the second kind, *Mathematics of Computation*, **45**, 463–469.
- [93] **Pandir, Y., Gurefe, Y., Misirli, E.**, 2012. A new approach to Kudryashov’s method for solving some non-linear physical models, *International Journal of Physical Sciences*, **7(21)**, 2860-2866.
- [94] **Bulut, H., Kilic, B.**, 2012. Exact solutions for some fractional non-linear partial differential equations via Kudryashov method, *e-Journal of New World Sciences Academy*, **8(1)**, 24-31.
- [95] **Kabir, M. M.**, 2011. Modified Kudryashov method for generalized forms of the Non-linear heat conduction equation, *International Journal of the Physical Sciences*, **6(25)**, 6061-6064.
- [96] **Bulut, H., and Pandir, Y.**, 2013. Modified trial equation method to the non-linear fractional Sharma–Tasso–Oleever equation, *International Journal of Modeling and Optimization*, **3(4)**, 353-357.
- [97] **Belgacem, F. B. M., Bulut, H., Baskonus, H. M., Akturk, T.**, 2013. Mathematical analysis of the generalized Benjamin and Burger-Kdv equations via the extended trial equation method, *Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences*, **In press**,
- [98] **Pandir, Y., Gurefe, Y., Misirli, E.**, 2013. New exact solutions of the time-fractional non-linear Dispersive KdV equation, *International Journal of Modeling and Optimization*, **3(4)**, 349-352.
- [99] **Baranwal, V. K., Pandey, R. K., Tripathi, M. P., Singh, O. P.**, 2012. An analytic algorithm for time fractional non-linear reaction–diffusion equation based on a new iterative method, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **17**, 3906–3921.
- [100] **Jafari, H., Seifi, S.**, 2009. Homotopy analysis method for solving linear and non-linear fractional diffusion-wave equation, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **14**, 2006–2012.
- [101] **Sahadevan, R., Bakkyaraj, T.** 2012. Invariant analysis of time fractional generalized Burgers and Korteweg–de Vries equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **393**, 341–347.

- [102] **Tülüce, Ş.**, 2012. Kesirli Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Analizi, *Doktora Semineri*, F.Ü.Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- [103] **Kimeu, J.M.**, 2009. Fractional Calculus: Definitions and Applications, *Master Theses&Specialist Projects*, Western Kentucky University, Faculty of Science, Bowling Green.
- [104] **Cao, J., and Xu, C.** 2013. A high order schema for the numerical solution of the ordinary differential Equations, *Journal of Computational Physics*, **238**, 154–168.
- [105] **Esen, A., Ucar, Y., Yagmurlu, N., and Tasbozan, O.**, 2013. A galerkin finite element method to solve fractional diffusion and fractional Diffusion-Wave equations, *Mathematical Modelling and Analysis*, **18(2)**, 260-273.
- [106] **Taşbozan, O.**, 2011. Lineer Olmayan Kesirli Mertebeden Türevli Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Homotopi Analiz Yöntemi İle Çözümü, *Yüksek lisans Tezi*, İ.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Malatya.
- [107] **Samko, S.G., Kilbas, A.A., Marichev, O.I.**, 1993. Fractional Integrals and Derivatives Theory and Applications, *Gordon and Breach Science Publishers* Amsterdam.
- [108] **He, J.H., Elagan, S.K., Li, Z.B.**, 2012. Geometrical explanation of the fractional complex transform and derivative chain rule for fractional calculus, *Physics Letters A*, **376 (2012)**, 257–259.
- [109] **Atangana, A., Bildik, N.**, 2013. Existence and numerical solution of the volterra fractional integral equations of the second kind, *Mathematical Problems in Engineering*, **2013 (2013)**, 1–11.

ÖZGEÇMİŞ

1982 yılında Kahramanmaraş'ta doğmuşum. İlk ve Orta eğitim-öğretimimi Döngele İlköğretim okulunda ve Lise eğitim-öğretimimi ise Gaziantep Mimar Sinan Lisesinde tamamladım. 2001 yılında Gazi Üniversitesi Kırşehir Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Lisans öğrenimine başladım. 2005 yılında tamamlayarak 2008 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladım ve 2010 yılında Yüksek Lisansı bitirdim. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında Doktora çalışmasına başladım.