

T.C.

BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**BAZI LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE TAM  
ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YAKUP YANARDAĞ

TEZ DANIŞMANI

DR. ÖĞR. ÜYESİ İLKER BURAK GİRESUNLU

BİLECİK, 2025

10695156

T.C.

BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**BAZI LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE TAM  
ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YAKUP YANARDAĞ

TEZ DANIŞMANI

DR. ÖĞR. ÜYESİ İLKER BURAK GİRESUNLU

BİLECİK, 2025

10695156

## BEYAN

"Bazı Lineer Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemler ve Tam Çözüm Yöntemleri" adlı yüksek lisans tezinin hazırlık ve yazımı sırasında bilimsel araştırma ve etik kurallarına uyduğumu, başkalarının eserlerinden yararlandığım bölümlerde bilimsel kurallara uygun olarak atıfta bulunduğumu, kullandığım verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı, tezin herhangi bir kısmının Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını, aksinin tespit edileceği muhtemel durumlarda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|
| Bu çalışmanın,<br>Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP), TÜBİTAK veya benzeri kuruluşlarca desteklenmesi durumunda;<br>projenin ve destekleyen kurumun adı proje numarası ile birlikte, ETİK KURUL onayı alınması durumunda ise ETİK KURUL tarih karar ve sayı bilgilerinin beyan edilmesi gerekmektedir. |                                |
| <b>DESTEK ALINMIŞTIR</b>                                                                                                                                                                                                                                                                               | <b>DESTEK ALINMAMIŞTIR   X</b> |
| <b>Destek alındı ise;</b>                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                |
| <b>Destekleyen kurum;</b>                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                |
| <b>Desteğin Türü</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                   | <b>Proje Numarası</b>          |
| <b>1-BAP (Bilimsel Araştırma Projesi)</b>                                                                                                                                                                                                                                                              |                                |
| <b>2-TÜBİTAK</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                |
| <b>Diğer;</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                |
| <b>ETİK KURUL onayı var</b>                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                |
| <b>ise;</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                |
| <b>ETİK KURUL karar tarih/<br/>sayı:</b>                                                                                                                                                                                                                                                               | <b>...../</b><br><b>.....</b>  |

**Yakup YANARDAĞ**

**.../.../2025**

**İmza**

## ÖN SÖZ

Bu tez, Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yürütülen yüksek lisans çalışmam kapsamında hazırlanmıştır. Çalışmam boyunca, matematiksel modelleme, analitik çözüm yöntemleri ve kısmi diferensiyel denklemler üzerine yoğunlaşarak, özellikle lineer olmayan sistemlerin çözümüne yönelik önemli analizler gerçekleştirdim.

Tezimin hazırlanması sürecinde, bilgi ve deneyimleriyle bana rehberlik eden ve her aşamada desteğini esirgemeyen danışmanım Sayın **Dr. Öğr. Üyesi İlker Burak Giresunlu**'ya en derin şükranlarımı sunuyorum. Ayrıca, bu süreçte manevi desteklerini hep yanımda hissettiğim aileme ve arkadaşlarıma teşekkür ederim. Çalışmam boyunca katkıda bulunan tüm akademisyenlere ve destek sağlayan kurumlara minnettarım.

Bu tezde, lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin çözümü için geliştirilen yöntemlerin etkinliği değerlendirilmiş ve bu yöntemlerin bilimsel katkıları vurgulanmıştır. Çalışmamın, ilgili literatüre katkı sağlayacağına ve bu alanda ileride yapılacak araştırmalara ışık tutacağına inanıyorum.

Bu süreç boyunca gösterdiğim çaba ve kararlılıkla kendimi geliştirme fırsatı bulduğum için gurur duyuyorum. Bilgi birikimimle sonraki akademik çalışmalarına daha sağlam adımlarla devam etmeyi hedefliyorum.

**Yakup Yanardağ**

.../.../2025

## ÖZET

### BAZI LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE TAM ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Bu tezde, optik fiberlerde ışık darbelerinin yayılımını modelleyen ve dördüncü mertebeden doğrusal olmayan bir kısmi diferansiyel denklem ele alınmıştır. Söz konusu denklem, doğrusal olmayan terimler ve yüksek mertebeden dispersiyon etkilerini içermesi nedeniyle oldukça karmaşık bir yapıya sahiptir. Optik fiber sistemlerinde veri iletimi, soliton oluşumu ve solitonların dinamik davranışlarının anlaşılması için önemli bir matematiksel çerçeve sunmaktadır. Bu nedenle, denklemin tam çözümlerinin elde edilmesi hem teorik hem de uygulamalı bilimler açısından büyük önem taşımaktadır.

Denklemin tam çözümlerinin elde edilmesi için literatürde sistematik ve etkili yöntemler olarak bilinen üç farklı yöntem kullanılmıştır: Sardar alt denklem yöntemi, Riccati-Bernoulli yöntemi ve  $\left(\frac{G'}{kG' + G + r}\right)$ -genişleme yöntemi. Bu yöntemler, doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde sıklıkla kullanılan güçlü tekniklerdir. Çalışma kapsamında, bu yöntemler ile yeni ve özgün tam çözümler türetilmiştir. Elde edilen çözümler, yalnızca matematiksel olarak önemli sonuçlar sunmakla kalmamış, aynı zamanda optik fiberlerde soliton davranışlarının modellenmesi, plazma fiziğinde elektromanyetik dalgaların yayılımının anlaşılması ve fiber optik teknolojilerinin geliştirilmesi gibi çeşitli bilimsel alanlarda uygulama potansiyeli göstermiştir.

Elde edilen analitik çözümlerin fiziksel anlamı, bazı özel çözümlere ait grafikler aracılığıyla görselleştirilmiştir. Bu grafikler, soliton davranışlarının zamana ve mekâna bağlı evrimini açıklamakta kritik bir rol oynamıştır. Çözümlerin pratik doğruluğunu ve bilimsel önemini vurgulayan bu görselleştirmeler, doğrusal olmayan fenomenlerin daha derinlemesine anlaşılmasına katkıda bulunmuştur.

Sonuç olarak, bu çalışma, zorlu yapıya sahip bir denklemin tam çözümlerini sunarak, doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemler ve bunların çeşitli bilimsel ve mühendislik uygulamalarına yönelik literatüre önemli bir katkı sağlamaktadır.

**Anahtar Kelimeler:** Tam Çözümler, Kısmi Diferansiyel Denklemler, Optik Solitonlar, Sardar Alt Denklem Yöntemi,  $\left(\frac{G'}{kG' + G + r}\right)$ -genişleme Yöntemi, Riccati-Bernoulli Yöntemi.

## ABSTRACT

### SOME NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS AND METHODS OF EXACT SOLUTION

The present study concerns a fourth-order nonlinear partial differential equation that models the propagation of light pulses in optical fibers. The equation is notable for its inclusion of nonlinear terms and higher-order dispersion effects, which give rise to a highly complex structure. The equation thus provides a significant mathematical framework for understanding data transmission, soliton formation, and the dynamic behavior of solitons in optical fiber systems. Consequently, the identification of exact solutions to this equation is of great importance in both theoretical and applied sciences.

In order to derive exact solutions to the equation, three different methods were employed, which are widely recognized in the literature for their systematic and effective approach. These methods comprised the Sardar Sub-equation method, the Riccati-Bernoulli method, and the  $\left(\frac{G'}{G'+kG+r}\right)$  - expansion method. These techniques are powerful tools frequently used for solving nonlinear partial differential equations. Within the scope of this study, novel and original exact analytical solutions were obtained using these methods. The solutions obtained offer valuable mathematical insights and demonstrate their applicability in various scientific fields, including the modeling of soliton behavior in optical fibers, the understanding of electromagnetic wave propagation in plasma physics, and the advancement of fiber optic technologies.

The physical significance of the analytical solutions was elucidated through graphs of specific solutions. These visualizations play a critical role in explaining the spatiotemporal evolution of soliton behaviors. The graphs thus underscore the practical accuracy and scientific significance of these solutions, thereby contributing to a more profound comprehension of nonlinear phenomena.

In summary, the present study provides precise solutions to a complex equation and makes a significant contribution to the existing literature on nonlinear partial differential equations and their diverse applications in scientific and engineering disciplines.

**Keywords:** Exact Solutions, Partial Differential Equations, Optical Solitons, Sardar Sub-Equation Method,  $\left(\frac{G'}{kG'+G+r}\right)$ -Expansion Method, Riccati-Bernoulli Method.

## İÇİNDEKİLER

|                                                                                                  | Sayfa |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| ÖN SÖZ .....                                                                                     | i     |
| ÖZET .....                                                                                       | ii    |
| ABSTRACT.....                                                                                    | iii   |
| İÇİNDEKİLER .....                                                                                | iv    |
| ŞEKİLLER LİSTESİ .....                                                                           | v     |
| KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ .....                                                            | vi    |
| 1. GİRİŞ .....                                                                                   | 1     |
| 2. TEMEL KAVRAMLAR .....                                                                         | 4     |
| 3. YÖNTEMLER .....                                                                               | 8     |
| 3.1. Sardar Alt Denklem Yöntemi .....                                                            | 8     |
| 3.2. $\left(\frac{G'}{kG'+G+r}\right)$ -Genişleme Yöntemi .....                                  | 10    |
| 3.3. Riccati Bernoulli Yöntemi .....                                                             | 12    |
| 4. UYGULAMALAR: TAM ÇÖZÜMLER .....                                                               | 15    |
| 4.1. (4.6) Denklemi İçin Sardar-Alt Denklem Yönteminin Uygulaması .....                          | 16    |
| 4.2. (4.6) Denklemi İçin $\left(\frac{G'}{kG'+G+r}\right)$ -Genişleme Yönteminin Uygulaması..... | 20    |
| 4.3. (4.6) Denklemi İçin Riccati-Bernoulli Yönteminin Uygulaması .....                           | 27    |
| 5. SONUÇ.....                                                                                    | 41    |
| KAYNAKÇA .....                                                                                   | 42    |

## ŞEKİLLER LİSTESİ

|                                                        | Sayfa |
|--------------------------------------------------------|-------|
| Şekil 4.1. (4.10) çözümünün grafiksel gösterimi .....  | 18    |
| Şekil 4.2. (4.11) çözümünün grafiksel gösterimi .....  | 19    |
| Şekil 4.3. (4.12) çözümünün grafiksel gösterimi .....  | 20    |
| Şekil 4.4. (4.13) çözümünün grafiksel gösterimi .....  | 21    |
| Şekil 4.5. (4.17) çözümünün grafiksel gösterimi .....  | 23    |
| Şekil 4.6. (4.18) çözümünün grafiksel gösterimi .....  | 24    |
| Şekil 4.7. (4.19) çözümünün grafiksel gösterimi .....  | 25    |
| Şekil 4.8. (4.20) çözümünün grafiksel gösterimi .....  | 27    |
| Şekil 4.9. (4.25) çözümünün grafiksel gösterimi .....  | 30    |
| Şekil 4.10. (4.29) çözümünün grafiksel gösterimi ..... | 32    |
| Şekil 4.11. (4.32) çözümünün grafiksel gösterimi ..... | 34    |
| Şekil 4.12. (4.33) çözümünün grafiksel gösterimi ..... | 34    |
| Şekil 4.13. (4.36) çözümünün grafiksel gösterimi ..... | 37    |
| Şekil 4.14. (4.39) çözümünün grafiksel gösterimi ..... | 39    |
| Şekil 4.15. (4.40) çözümünün grafiksel gösterimi ..... | 40    |
| Şekil 4.16. (4.41) çözümünün grafiksel gösterimi ..... | 40    |



## KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ

- $\frac{\partial}{\partial x}$  : Kısmi türev  
ADD : Adi Diferansiyel Denklemler  
KDD : Kısmi Diferansiyel Denklemler



## 1. GİRİŞ

Diferansiyel denklemler, türevler ve bağımsız değişkenler arasındaki ilişkiyi ifade eden matematiksel araçlardır. Bu denklemler, fiziksel, biyolojik ve mühendislik sistemlerini modellemek için kritik bir role sahiptir. Genel olarak, bir diferansiyel denklem şu şekilde ifade edilebilir:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots\right) = 0. \quad (1.1)$$

Burada  $x$  bağımsız değişken,  $y$  bağımlı değişken ve  $\frac{dy}{dx}$ ,  $y$ 'nin türevini ifade etmektedir. Diferansiyel denklemler, bir sistemin mevcut durumu ile bu sistemin zaman veya uzaydaki davranışı arasındaki ilişkiyi tanımlar. Bu denklemler, özellikle fiziksel ve biyolojik sistemlerin analizi ve modellemesinde önemli bir yere sahiptir( Bluman ve Kumei, 1989; Hirota, 2004; Ibragimov, 2023; Strachan, 1992).

Diferansiyel denklemler, 17. yüzyılda Isaac Newton ve Gottfried Wilhelm Leibniz'in çalışmalarıyla matematiksel analizde önemli bir yer kazanmıştır. Newton'un hareket yasaları, diferansiyel denklemlerin fiziksel sistemlerdeki kullanımını başlatmıştır. 18. ve 19. yüzyıllarda Euler, Lagrange ve Fourier gibi matematikçilerin katkılarıyla diferansiyel denklemler, bilimsel ve mühendislik uygulamalarında temel araçlar haline gelmiştir( Bluman ve Kumei, 1989; Hirota, 2004).

Bu dönemde, diferansiyel denklemler genellikle fiziksel sistemlerin davranışını modellemek için kullanılmıştır. Özellikle Newton'un ikinci hareket yasası olan  $F = ma$ , diferansiyel denklemlerin fiziksel sistemlere uygulanmasının ilk örneklerinden biri olarak kabul edilir. Euler'in hidrodinamikteki çalışmaları, akışkanlar mekaniği ile diferansiyel denklemlerin bağıni kurmuştur. Fourier ise ısı iletimi problemlerini inceleyerek kısmi diferansiyel denklemlerin temellerini atmıştır( Ibragimov, 2023).

Diferansiyel denklemler, lineer ve lineer olmayan olarak iki ana kategoriye ayrılır. Lineer diferansiyel denklemler, çözüm yöntemleri açısından daha basit bir yapıya sahiptir ve genellikle süperpozisyon ilkesi ile çözülebilir. Örneğin, aşağıdaki genel formdaki bir adi diferansiyel denklem lineer bir denklemdir:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x).$$

Burada  $p(x)$ ,  $q(x)$  ve  $f(x)$  fonksiyonları,  $x$ 'e bağlı katsayılardır.

Lineer olmayan diferansiyel denklemler ise daha karmaşık bir yapı sergiler ve genellikle analitik çözümler elde etmek oldukça zordur. Bu tür denklemler, sistemlerin doğrusal olmayan doğasını modellemek için kullanılır. Örneğin:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y\frac{dy}{dx} = \sin(x).$$

Lineer olmayan denklemler, kaotik davranışlar, bifurkasyonlar ve solitonlar gibi birçok ilginç fiziksel olayı açıklamak için kullanılır. Bu tür denklemler, özellikle biyoloji, kimya ve mühendislikte karmaşık sistemlerin modellenmesinde önemlidir ( Strachan, 1992).

Kısmi diferansiyel denklemler (KDD'ler), birden fazla bağımsız değişkene bağlı fonksiyonları içeren denklemlerdir. Bu denklemler, genellikle fiziksel olayların uzay ve zaman üzerindeki değişimlerini modellemek için kullanılır. Örneğin, ısı iletimi, dalga hareketi ve elektromanyetik alan teorisi gibi birçok alan KDD'ler ile modellenir.

Örnek bir KDD, dalga denklemi olarak bilinen şu denklemdir:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Burada  $u(x,t)$  dalga fonksiyonunu,  $c$  ise dalganın hızını temsil eder. Bu denklem, akustik, optik ve su dalgaları gibi çeşitli fiziksel olayları modellemek için kullanılır.

Lineer olmayan diferansiyel denklemler, fiziksel olayların yanı sıra kimyasal reaksiyonlar ve biyolojik süreçlerin modellenmesinde kullanılmaktadır. Örneğin:

- Fizik: Optik solitonların açıklanması, elektromanyetik dalga yayılımı ( Hirota, 2004).
- Biyoloji: Genetik mutasyonların ve popülasyon dinamiklerinin modellenmesi ( Ibragimov, 2023).
- Kimya: Reaksiyon-difüzyon denklemleri ile kimyasal reaksiyonların modellenmesi ( Strachan, 1992).
- Mühendislik: Akışkanlar mekaniği ve enerji transfer sistemleri (Cohen ve Kundu 2004;Pajevic 1995).

Özellikle soliton teorisi, lineer olmayan diferansiyel denklemlerin önemli bir uygulama alanıdır.

Solitonlar, optik fiberlerde veri iletimi, su dalgalarının dinamiği ve plazma fizik gibi alanlarda kritik bir rol oynar ( Hirota, 2004).

Bu tezde, literatürde güncel ve popüler olan tam çözüm yöntemleri ele alınmış ve bunların lineer olmayan diferansiyel denklemlere uygulanabilirliği incelenmiştir. Bu bağlamda, Sardar alt denklem yöntemi,  $\left(\frac{G'}{G'+kG+r}\right)$  genişleme yöntemi ve Riccati-Bernoulli yöntemi incelenmiştir. Ayrıca, bu çözümlerin grafiksel analizleri gerçekleştirilerek görselleştirilmesi sağlanmıştır. Çalışmanın sonunda, elde edilen sonuçların literatürdeki mevcut çalışmalarla karşılaştırılması yapılmış ve bu yöntemlerin avantajları ile sınırlılıkları tartışılmıştır ( Bluman ve Kumei, 1989; Hirota, 2004; Ibragimov, 2023; Strachan, 1992).

Bu bağlamda tezde ele alınacak yöntemler, literatürde sıklıkla kullanılan analitik teknikler olup, fiziksel ve biyolojik modelleme bağlamında geniş bir uygulama yelpazesine sahiptir. Literatür araştırmasında elde edilen veriler ışığında, farklı matematiksel modeller için önerilen çözüm yöntemlerinin etkinliği analiz edilmiş ve bu yöntemlerin avantajları detaylandırılmıştır.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezde kullanılan temel tanımlara yer verilmiştir.

Diferansiyel denklemler, modern bilimin ve mühendisliğin en temel araçlarından biri olarak, dinamik sistemlerin incelenmesinde ve anlaşılmasında kritik bir rol oynar. Bu denklemler, bir olayın veya sistemin zamana, mekâna ya da diğer değişkenlere bağlı değişimini matematiksel olarak ifade eder ve çözüm süreçleriyle gelecekteki davranışları tahmin etmeye olanak tanır. Diferansiyel denklemler, doğadaki süreçlerin çoğunu anlamlandırmak için kullanılan matematiksel bir araçtır. Örneğin, fizik alanında Newton'un hareket yasaları, Maxwell'in elektromanyetik denklemleri ve Schrödinger denklemi gibi temel kuramlar, diferansiyel denklemlerin gücünü ve önemini gösterir. Aynı şekilde, mühendislikte akışkanlar mekaniği, ısı transferi ve yapısal analiz gibi birçok alanda bu denklemler vazgeçilmezdir.

Diferansiyel denklemlerin kullanımı disiplinler arası bir öneme sahiptir. Biyolojide, popülasyon dinamiklerini modellemek, hücre büyümesini incelemek veya salgın hastalıkların yayılımını anlamak için diferansiyel denklemler kullanılır. Kimyada, reaksiyon hızlarını ve maddenin taşınımını modelleyen diferansiyel denklemler, endüstriyel süreçlerin optimizasyonunda kritik bir yere sahiptir. Ekonomide ise piyasa dalgalanmalarını, faiz oranlarını veya ekonomik büyüme süreçlerini modellemek için diferansiyel denklemlerden faydalanılır. Ayrıca, sosyal bilimlerde insan davranışını, sosyal ağların dinamiklerini veya yayılım modellerini anlamak için diferansiyel denklemlerden yararlanılır (Braun ve Golubitsky 1983; Dutta 2016; Murray 2002).

Teknolojideki hızlı ilerlemelerle birlikte diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemleri de büyük bir gelişim göstermiştir. Özellikle, yapay zeka ve makine öğrenimi gibi alanlarda kullanılan optimizasyon tekniklerinde, diferansiyel denklemlerin teorisi temel bir rol oynamaktadır. Kontrol sistemlerinde, robotik teknolojilerde ve simülasyon tabanlı analizlerde diferansiyel denklemler, sistemlerin verimli bir şekilde yönetilmesini ve tasarlanmasını sağlar. Bu denklemlerin çözümü sayesinde, sistemlerin kararlılığı analiz edilir, hata oranları minimize edilir ve gelecekteki davranışları öngörülür.

Sonuç olarak, diferansiyel denklemler yalnızca bir matematik dalı değil, aynı zamanda bilim, teknoloji ve mühendisliğin temel taşıdır. Bu denklemler, doğadaki ve insan yapımı sistemlerdeki karmaşıklığı anlamak ve bu sistemlerin nasıl çalıştığını modellemek için bir anahtar görevi görür. Dolayısıyla diferansiyel denklemleri anlamak, çözmek ve uygulamak, hem teorik

hem de uygulamalı bilimlerde ilerlemenin ön koşullarından biridir.

**Tanım 2.1** (Diferansiyel Denklem). Bağımsız değişken, bağımlı değişken ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre türevlerini içeren denkleme diferansiyel denklem denir.

**Tanım 2.2** (Adi Diferansiyel Denklem (ADD)). Bir bağımsız değişken, bağımlı değişken (değişkenler) ve bağımlı değişkenin (değişkenlerin) bağımsız değişkenlere göre türevlerini içeren denkleme denir. Genel olarak ADD aşağıdaki biçimde yazılır:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Bu ifadede  $x$  bağımsız değişken,  $y$  bağımlı değişken ve  $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$  türevlerdir.

**Tanım 2.3** (Kısmi Diferansiyel Denklem (KDD)). İki veya daha fazla bağımsız değişken, bağımlı değişken (değişkenler) ve bağımlı değişkenin (değişkenlerin) bağımsız değişkenlere göre türevlerini içeren denkleme denir. Bu tür denklemler genel olarak

$$F(x, y, t, u, u_x, u_y, u_t, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots) = 0$$

şekilde ifade edilir.

**Tanım 2.4** (Mertebe). Bir diferansiyel denklemde en yüksek türevli terimin türev sayısına denir.

**Tanım 2.5** (Derece). Bir diferansiyel denklemde en yüksek türevli terimin kuvvetine denir.

**Tanım 2.6** (Lineerlik). Bir diferansiyel denklemde bağımlı değişken ve türevlerinin herbirinin ayrı ayrı kuvvetlerinin 1 (bir) olmasına denir. Bu terimlerin çarpım veya bölüm şeklinde olmaması gerekmektedir.

Diferansiyel denklemler, bir fonksiyon ile onun türevleri arasındaki ilişkiyi ifade eden temel matematiksel araçlardır ve genellikle **lineer** ve **lineer olmayan** olmak üzere iki ana gruba ayrılır. **Lineer olmayan diferansiyel denklemler**, bilinmeyen fonksiyonun veya türevlerinin çarpımını, yüksek derecelerini veya karmaşık bağıntılarını içerir. Örneğin, aşağıdaki denklem bir lineer olmayan ADD örneğidir:

$$y'' + y^2 = 0.$$

Lineer olmayan denklemler süperpozisyon ilkesine uymaz ve analitik çözümleri nadiren bulunur. Çözüm yöntemleri genellikle daha zordur ve sayısal yöntemlere veya yaklaşım tekniklerine başvurulur. Ayrıca, bu denklemler bifurkasyon, kaos ve karmaşık dinamik davranışlar gibi zengin matematiksel özellikler sergileyebilir.

Lineer ve lineer olmayan denklemler arasındaki bu temel ayrım, çözüm yöntemlerinin yanı sıra modellenen sistemlerin dinamiklerini anlamak açısından kritik öneme sahiptir. Lineer denklemler daha basit ve öngörülebilir sistemleri tanımlarken, lineer olmayan denklemler daha gerçekçi, ancak çözümü zorlayıcı süreçleri kapsar. Bu nedenle, diferansiyel denklemlerin bu iki sınıfı, bilim ve mühendislikte geniş bir uygulama yelpazesine sahiptir.

Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler, bilim ve mühendislikteki pek çok fenomenin anlaşılmasında kritik bir rol oynar. Örneğin, akışkanlar mekaniği, plazma fiziği, optik fiberler ve biyolojik sistemler gibi birçok uygulama alanında bu denklemlerden yararlanılır.

Dalga, enerji taşınımını sağlayan periyodik hareketlerdir. Dalga denklemleri, bu hareketlerin matematiksel modellemesinde kullanılır ve genel olarak şu ifadeyi alır:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}.$$

Burada  $u$  dalga fonksiyonu,  $t$  zaman,  $x$  konum ve  $c$  dalganın hızıdır.

**Tanım 2.7 (Soliton).** Solitonlar, çarpışma veya diğer etkileşimler sırasında özelliklerini (şekil, hız vb.) koruyabilen özel dalga türleridir.

Solitonlar, lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin önemli çözümlerini oluşturur ve aşağıdaki gibi bir formda ifade edilebilir:

$$u(x, t) = A \operatorname{sech}^2(B(x - ct)).$$

Burada  $A$  dalganın genliğini,  $B$  genişliğini ve  $c$  hızını temsil eder.

Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümleri genellikle periyodik, kompleks, soliton ve diğer özel çözümler şeklindedir. Örnek olarak, Korteweg-de Vries (KdV) denklemi, solitonları açıklamak için kullanılan temel modellerden biridir:

$$u_t + auu_x + bu_{xxx} = 0$$

Bu denklemin çözümü, genellikle dalga dönüşümleri ve analitik yöntemler kullanılarak elde edilir.

**Tanım 2.8** (Dengeleme Yöntemi).  $N$  pozitif tamsayısı, toplam sembolü ile gösterilen tam çözüm fonksiyonlarının üst sınırını belirtir. Lineer olmayan herhangi bir ADD için en yüksek türevli lineer terim  $\left(\frac{d^a H(x)}{dx^a}\right)$  ile en yüksek dereceli lineer olmayan terim  $\left(H(x)^b \left(\frac{d^c H(x)}{dx^c}\right)^\theta\right)$  arasında elde edilen en küçük pozitif tamsayıdır.  $a, b, c, \theta$  pozitif tam sayılar olmak üzere  $H(x) = \frac{\lambda}{x^N}$  dönüşümü yukarıda belirtilen en yüksek mertebeden türevli lineer terim ile en yüksek dereceden lineer olmayan terimde yerine yazılarak birbirine eşitlenir. Bu eşitlik ile

$$N + a = Nb + \theta(N + c)$$

dengeleme eşitliği elde edilir.

Lineer olmayan diferansiyel denklemler, karmaşık fiziksel, biyolojik ve mühendislik sistemlerini modellemede önemli bir araçtır. Bu tür denklemlerin çözümünde kullanılan yöntemlerin etkinliği, teorik ve uygulamalı bilimlerde kritik bir rol oynamaktadır. Bu çalışmada, literatürde sıkça kullanılan çözüm yöntemleri ele alınarak, bu yöntemlerin temel prensipleri, uygulama süreçleri ve avantajları detaylı bir şekilde incelenecektir. Özellikle, bu yöntemlerin lineer olmayan diferansiyel denklemlere uygulanabilirliği ve sonuçların doğruluğu üzerinde durulacaktır. Aşağıdaki bölümlerde, her bir yöntem ayrı ayrı tanıtılarak çözüm süreçleri adım adım açıklanacaktır.



### 3. YÖNTEMLER

$$F(Y, Y_t, Y_x, Y_{tt}, Y_{xx}, \dots) = 0 \quad (3.1)$$

lineer olmayan KDD için  $Y = Y(x, t)$  kompleks fonksiyonu,  $F$  de,  $Y$  ve  $Y$  nin kısmi türevlerinin bir polinomu olsun.

$$Y(x, t) = e^{i\xi} \psi(\eta), \quad \eta = x - ct, \quad \xi = kx - wt + \theta_0 \quad (3.2)$$

ilerleyen dalga denklemi göz önüne alındığında  $c$  soliton hızını,  $\theta$  faz sabitini,  $w$  soliton frekansını,  $k$  dalga numarasını belirtir. (3.2) değişkeni (3.1) denkleminde yerine yazıldığında,

$$H(\psi, \psi', \psi'', \psi''', \dots) = 0 \quad (3.3)$$

biçimindeki ADD ye dönüşür.

#### 3.1. Sardar Alt Denklem Yöntemi

##### Adım 1.

$$(G'(\eta))^2 = G(\eta)^4 + \gamma G(\eta)^2 + \beta, \quad f_N \neq 0 \quad (3.4)$$

olacak şekilde

$$\psi(n) = \sum_{i=0}^N f_i (G(\eta))^i, \quad (3.5)$$

çözümü (3.3) denkleminin çözümü olarak kabul edilir.

**Adım 2.** (3.3) denklemi için dengeleme yöntemi uygulanarak, pozitif  $N$  tam sayısı elde edilir.

**Adım 3.** (3.4) eşitliği göz önünde bulundurularak (3.5) çözümü (3.3) denkleminde yerine yazılarak, (3.3) denklemi düzenlendiğinde  $G(\eta)$  fonksiyonunun bir polinomu biçiminde yazılabilir. Bu polinomun her bir teriminin katsayısı sıfıra eşitlenerek bir denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümünü bulmak ile (3.3) ADD nin çözümünü bulmak aynı anlama gelmektedir. Dolayısıyla (3.1) KDD nin çözümü de elde edilmiş olur.

**Adım 4.** (3.4) denkleminin çözümleri aşağıdaki gibidir:

*Durum (1):*  $\gamma > 0$  ve  $\beta = 0$  için,

$$G_1(\eta) = \pm \sqrt{-pq\gamma} \operatorname{sech}_{pq} \sqrt{\gamma\eta}, \quad (3.6)$$

$$G_2(\eta) = \pm \sqrt{pq\gamma} \operatorname{csc} h_{pq} \sqrt{\gamma\eta}.$$

*Durum (2):*  $\gamma < 0$  ve  $\beta = 0$  için,

$$G_3(\eta) = \pm \sqrt{-pq\gamma} \operatorname{sech}_{pq} \sqrt{-\gamma\eta}, \quad (3.7)$$

$$G_4(\eta) = \pm \sqrt{-pq\gamma} \operatorname{csc} h_{pq} \sqrt{-\gamma\eta},$$

*Durum (3):*  $\gamma < 0$  ve  $\beta = \frac{\gamma^2}{4}$  için,

$$G_5(\eta) = \pm \sqrt{-\frac{\gamma}{2}} \tan h_{pq} \sqrt{-\frac{\gamma}{2}\eta}, \quad (3.8)$$

$$G_6(\eta) = \pm \sqrt{-\frac{\gamma}{2}} \cot h_{pq} \sqrt{-\frac{\gamma}{2}\eta},$$

$$G_7(\eta) = \pm \sqrt{-\frac{\gamma}{2}} (\tan h_{pq} \sqrt{-2\gamma\eta} \pm i \sqrt{pq} \operatorname{sech}_{pq} \sqrt{-2\gamma\eta}),$$

$$G_8(\eta) = \pm \sqrt{-\frac{\gamma}{2}} (\cot h_{pq} \sqrt{-2\gamma\eta} \pm i \sqrt{pq} \operatorname{csc} h_{pq} \sqrt{-2\gamma\eta}),$$

$$G_9(\eta) = \pm \sqrt{-\frac{\gamma}{8}} (\tan h_{pq} (\sqrt{-\frac{\gamma}{8}}) \pm i \sqrt{pq} \cot h_{pq} (\sqrt{-\frac{\gamma}{8}})).$$

*Durum (4):*  $\gamma > 0$  ve  $\beta = \frac{\gamma^2}{4}$

$$G_{10}(\eta) = \pm \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \tan h_{pq} \sqrt{\frac{\gamma}{2}\eta}, \quad (3.9)$$

$$G_{11}(\eta) = \pm \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \cot h_{pq} \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \eta,$$

$$G_{12}(\eta) = \pm \sqrt{\frac{\gamma}{2}} (\tan h_{pq}(\sqrt{2\gamma\eta}) \pm \sqrt{pq} \sec h_{pq}(\sqrt{2\gamma\eta})),$$

$$G_{13}(\eta) = \pm \sqrt{\frac{\gamma}{2}} (\cot h_{pq}(\sqrt{2\gamma\eta}) \pm \sqrt{pq} \csc h_{pq}(\sqrt{2\gamma\eta})),$$

$$G_{14}(\eta) = \pm \sqrt{\frac{\gamma}{8}} (\tan h_{pq}(\sqrt{\frac{\gamma}{8}}) \pm \cot h_{pq}(\sqrt{\frac{\gamma}{8}})).$$

Burada

$$\operatorname{sech}_{pq}(\eta) = \frac{2}{pe^\eta + qe^{-\eta}}, \quad \operatorname{csc} h_{pq}(\eta) = \frac{2}{pe^\eta - qe^{-\eta}}, \quad (3.10)$$

$$\operatorname{sec}_{pq}(\eta) = \frac{2}{pe^{i\eta} + qe^{-i\eta}}, \quad \operatorname{csc}_{pq}(\eta) = \frac{2}{pe^{i\eta} - qe^{-i\eta}},$$

$$\tan h_{pq}(\eta) = \frac{pe^\eta - qe^{-\eta}}{pe^\eta + qe^{-\eta}}, \quad \cot h_{pq}(\eta) = \frac{pe^\eta + qe^{-\eta}}{pe^\eta - qe^{-\eta}},$$

$$\tan_{pq}(\eta) = -i \frac{pe^{i\eta} - qe^{-i\eta}}{pe^{i\eta} + qe^{-i\eta}}, \quad \cot_{pq}(\eta) = i \frac{pe^{i\eta} + qe^{-i\eta}}{pe^{i\eta} - qe^{-i\eta}}.$$

### 3.2. $\left(\frac{G'}{kG' + G + r}\right)$ -Genişleme Yöntemi

$\left(\frac{G'}{kG' + G + r}\right)$  Genişleme yöntemi, sistematik bir yapıya sahip olup aşağıdaki gibidir:

**Adım 1.** (3.3) denkleminin çözümü

$$\psi(n) = \sum_{i=0}^N s_i F(\eta)^i, \quad (3.11)$$

formunda olsun. Burada  $F(\eta) = \left(\frac{G'}{kG' + G + r}\right)$  ve  $G(\eta)$ ,

$$G''(\eta) = -\frac{\lambda}{k} G'(\eta) - \frac{\gamma}{k^2} G(\eta) - \frac{\gamma}{k^2} r, \quad (3.12)$$

ikinci mertebeden diferansiyel denklemin çözümüdür. Ayrıca  $s_i$  keyfi sabitler,  $k, \gamma$  ve  $\lambda$  daha sonra bulunacak sabitlerdir. Dolayısıyla  $F(\eta)$  da

$$F'(\eta) = (\lambda - \gamma - 1)F(\eta)^2 + \frac{1}{k}(2\gamma - \lambda)F(\eta) - \frac{1}{k^2}\gamma. \quad (3.13)$$

denkleminin çözümüdür.

**Adım 2.** Dengeleme yöntemi ile  $N$  pozitif tam sayısı elde edilir.

**Adım 3.** (3.13) denkleminin çözümleri aşağıdaki gibidir:

*Durum (1):*  $\Delta = \lambda^2 - 4\gamma > 0$  olduğunda,

$$G = -r + p_1 e^{\frac{1}{2k}(-\lambda - \sqrt{\Delta})\eta} + p_2 e^{\frac{1}{2k}(-\lambda + \sqrt{\Delta})\eta},$$

olup  $p_1$  ve  $p_2$  keyfi sabitler olmak üzere  $r^2 + p_1^2 + p_2^2 \neq 0$  için,

$$F(\eta) = \frac{p_1(\lambda + \sqrt{\Delta}) + p_2(\lambda - \sqrt{\Delta})e^{\frac{\sqrt{\Delta}\eta}{k}}}{kp_1(\lambda - 2 + \sqrt{\Delta}) + kp_2(\lambda - 2 - \sqrt{\Delta})e^{\frac{\sqrt{\Delta}\eta}{k}}}$$

$$= \frac{\left\{ \begin{array}{l} [\lambda(p_2 - p_1) - \sqrt{\Delta}(p_2 + p_1)] \sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta}\eta}{2k}\right) \\ + [\lambda(p_2 + p_1) - \sqrt{\Delta}(p_2 - p_1)] \cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta}\eta}{2k}\right) \end{array} \right\}}{\left\{ \begin{array}{l} k[(\lambda - 2)(p_2 - p_1) - \sqrt{\Delta}(p_2 + p_1)] \sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta}\eta}{2k}\right) \\ + k[(\lambda - 2)(p_2 + p_1) - \sqrt{\Delta}(p_2 - p_1)] \cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta}\eta}{2k}\right) \end{array} \right\}}$$

$$F(\eta) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\lambda - 2\gamma}{2k(\lambda - \gamma - 1)} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2k(\lambda - \gamma - 1)} \tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta}\eta}{2k}\right) & , \quad (\lambda - 2)(p_2 - p_1) - \sqrt{\Delta}(p_2 + p_1) = 0, \\ \frac{\lambda - 2\gamma}{2k(\lambda - \gamma - 1)} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2k(\lambda - \gamma - 1)} \coth\left(\frac{\sqrt{\Delta}\eta}{2k}\right) & , \quad (\lambda - 2)(p_2 + p_1) - \sqrt{\Delta}(p_2 - p_1) = 0. \end{array} \right.$$

*Durum (2):*  $\Delta = \lambda^2 - 4\gamma < 0$  olduğunda,

$$G = -r + e^{\frac{-\lambda\eta}{2k}} \left[ p_1 \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}\eta}{2k}\right) + p_2 \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}\eta}{2k}\right) \right],$$

için

$$F(\eta) = \frac{(\lambda p_1 - \sqrt{-\Delta} p_2) \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}\eta}{2k}\right) + (\lambda p_2 + \sqrt{-\Delta} p_1) \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}\eta}{2k}\right)}{k((\lambda - 2)p_1 - \sqrt{-\Delta} p_2) \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}\eta}{2k}\right) + k((\lambda - 2)p_2 + \sqrt{-\Delta} p_1) \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}\eta}{2k}\right)}$$

ve

$$F(\eta) = \begin{cases} \frac{\lambda - 2\gamma}{2k(\lambda - \gamma - 1)} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2k(\lambda - \gamma - 1)} \tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta}\eta}{2k}\right) & , \quad (\lambda - 2)(p_2 - p_1) - \sqrt{\Delta}(p_2 + p_1) = 0, \\ \frac{\lambda - 2\gamma}{2k(\lambda - \gamma - 1)} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2k(\lambda - \gamma - 1)} \coth\left(\frac{\sqrt{\Delta}\eta}{2k}\right) & , \quad (\lambda - 2)(p_2 + p_1) - \sqrt{\Delta}(p_2 - p_1) = 0. \end{cases}$$

**Adım 4.** (3.3) denkleminde (3.13) eşitiği göz önüne alınarak (3.11) çözümü yerine yazıldığında  $F(\eta)$  nin bir polinomu elde edilir. Tüm katsayılar sıfıra eşitlenerek bir denklem sistemi ortaya çıkar. Bu sistemin çözümünü elde etmek için Maple veya Mathematica gibi matematiksel programlar kullanılabilir.

### 3.3. Riccati Bernoulli Yöntemi

**Adım 1.** (3.3) denkleminin çözümü için

$$\psi' = a\psi^{2-m} + b\psi + c\psi^m \quad (3.14)$$

Riccati-Bernoulli denkleminin çözümünü göz önüne alalım. Burada  $a, b, c$  ve  $m$  daha sonra belirlenecek sabitlerdir.

Denklem (3.14) kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\psi'' = ab(3-m)\psi^{2-m} + a(2-m)\psi^{3-2m} + mc^2\psi^{2m-1} + bc(m+1)\psi^m + (2ac + b^2)\psi,$$

$$\begin{aligned} \psi''' = & (ab(3-m)(2-m)\psi^{1-m} + a^2(2-m)(3-2m)\psi^{2-2m} + m(2m-1)c^2\psi^{2m-2} \\ & + bcm(m+1)\psi^{m-1} + (2ac + b^2))\psi', \end{aligned} \quad (3.15)$$

⋮

Denklem (3.14) aşağıdaki gibi çözümlere sahiptir:

*Durum (1):*  $m = 1$  için,

$$\psi(\xi) = Ce^{(a+b+c)\xi}.$$

*Durum(2):*  $m \neq 1$ ,  $b = 0$  ve  $c = 0$  için

$$\psi(\xi) = (a(m-1)(\xi + C))^{\frac{1}{m-1}}.$$

*Durum(3):*  $m \neq 1$ ,  $b \neq 0$  ve  $c = 0$  için

$$\psi(\xi) = \left( \frac{-a}{b} + Ce^{b(m-1)\xi} \right)^{\frac{1}{m-1}}$$

*Durum(4):*  $m \neq 1$ ,  $a \neq 0$  ve  $b^2 - 4ac < 0$  için

$$\psi(\xi) = \left( -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \tan \left( \frac{(1-m)\sqrt{4ac - b^2}}{2} (\xi + C) \right) \right)^{\frac{1}{1-m}}$$

ve

$$\psi(\xi) = \left( -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \cot \left( \frac{(1-m)\sqrt{4ac - b^2}}{2} (\xi + C) \right) \right)^{\frac{1}{1-m}}.$$

*Durum(5):*  $m \neq 1, a \neq 0$  ve  $b^2 - 4ac > 0$  için

$$\psi(\xi) = \left( -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \coth \left( \frac{(1-m)\sqrt{b^2 - 4ac}}{2} (\xi + C) \right) \right)^{\frac{1}{1-m}}$$

ve

$$\psi(\xi) = \left( -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tanh \left( \frac{(1-m)\sqrt{b^2 - 4ac}}{2} (\xi + C) \right) \right)^{\frac{1}{1-m}}.$$

*Durum(6):*  $m \neq 1, a \neq 0$  ve  $b^2 - 4ac = 0$  için

$$\psi(\xi) = \left( \frac{1}{a(m-1)(\xi + C)} - \frac{b}{2a} \right)^{\frac{1}{1-m}},$$

burada C keyfi bir sabittir.

**Adım 2.** (3.3) denkleminde  $\psi$  nin türevleri olan (3.14) ve (3.15) eşitlikleri yerine yazılır. Düzenlendiğinde denklem,  $\psi$  ye bağlı bir polinom biçiminde yazılabilir. Bu polinomda  $\psi$  nin her bir katsayısı sıfıra eşitlenerek  $a, b, d$  sabitleri elde edilir. Dolayısıyla bu sabitler (3.14) denkleminde yerine yazılarak yukarıdaki farklı durumlara göre çözüm aranır.

**Uyarı 3.4.**  $ac \neq 0$  ve  $m = 0$  durumunda (3.14) denklemi bir Riccati denklemi olur.  $a \neq 0, c = 0$  ve  $m \neq 0$  olduğunda ise (3.14) denklemi Bernoulli denklemi olur. Riccati denklemi ve Bernoulli denklemi (3.14) denkleminin özel durumlarıdır. Bu nedenle (3.14) denklemi Riccati-Bernoulli denklemi olarak anılır.



#### 4. UYGULAMALAR: TAM ÇÖZÜMLER

Optik fiberlerdeki optik darbelerin yayılımını tanımlayan

$$u_{xxxx} + \alpha u_{xx} + \mu |u|^2 + \nu |u|^4 u + \chi |u|^2 u_{xx} + i \left( u_t + \beta u_{xxx} + \frac{\beta \chi}{2} |u|^2 u_x \right) = 0 \quad (4.1)$$

dördüncü mertebeden doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemi için  $u(x, t)$  iki bağımsız değişkenli kompleks değerli bir fonksiyonu,  $\chi, \mu, \alpha, \nu, \beta$  denklemin parametreleri ifade eder. (4.1) denkleminde  $\eta = x - ct$  olmak üzere

$$u(x, t) = P(\eta) e^{i(kx - wt + \theta)} \quad (4.2)$$

değişken değişimi ile aşağıdaki reel ve sanal kısımlar elde edilir ki burada  $c, \theta, w, k$  sırasıyla soliton hızını, faz sabitini, soliton frekansını ve dalga sayısını temsil eder:

$$2 \left[ P'' (\alpha + 6k^2) + P^3 (k^2 \chi + \mu) + P (w - 3k^4 - \alpha k^2) + \nu P^5 + \chi P'' P^2 + P^{(4)} \right] = 0 \quad (4.3)$$

$$[-8k^3 - 6\beta k^2 + 4\alpha k - 2c] P' + [8k + 2\beta] P^3 + [4k\chi + \beta\chi] P^2 P' = 0 \quad (4.4)$$

(4.4) sanal kısmından aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\beta = -4k$$

$$c = 2k\alpha + 8k^3. \quad (4.5)$$

(4.5) eşitlikleri (4.3) reel kısmında yerine yazılıp düzenlenirse

$$P'' (\alpha + 6k^2) + P^3 (k^2 \chi + \mu) + P (-3k^4 - \alpha k^2 + w) + \nu P^5 + \chi P'' P^2 + P^{(4)} = 0 \quad (4.6)$$

denklemini elde edilir.

(4.6) ADD için dengeleme yöntemi kullanıldığında

$$N + 4 = 5N \Rightarrow N = 1$$



bulunur.

#### 4.1. (4.6) Denklemi İçin Sardar-Alt Denklem Yönteminin Uygulaması

$p = P(\eta)$ ,  $g = G(\eta)$  olmak üzere  $N = 1$  olduğundan

$$p = f_0 + f_1 g \quad (4.7)$$

çözüm olarak kabul edilir. (3.4) göz önüne alınarak (4.7) çözümü (4.6) denklemde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} 0 = & \left( f_1^5 v + 2\kappa f_1^3 + 24f_1 \right) g^5 + \left( 5f_0 f_1^4 v + 4f_0 f_1^2 + 4f_0 f_1^2 \kappa \right) g^4 \\ & + \left( 10f_0^2 f_1^3 v + f_1^3 k^2 \kappa + f_1^3 \kappa \gamma + 2f_0^2 f_1 \kappa + f_1^3 \mu + 12f_1 k^2 + 2\alpha f_1 + 20f_1 \gamma \right) g^3 \\ & + \left( 10f_0^3 f_1^2 v + 3f_0 f_1^2 k^2 \kappa + 2f_0 f_1^2 \kappa \gamma + 3f_0 f_1^2 \mu \right) g^2 \\ & + \left( \begin{array}{c} 5f_0^4 f_1 v + 3f_0^2 f_1^2 k^2 \kappa + f_0^2 f_1 \kappa \gamma - 3f_1 \kappa^4 - \alpha \\ f_1 k^2 + 3f_0^2 f_1 \mu + 6f_1 k^2 \gamma + \alpha f_1 \gamma + f_1 \gamma^2 + 12\beta f_1 + f_1 \omega \end{array} \right) g \\ & + f_0^5 v + f_0^3 k^2 \kappa - 3f_0 k^4 - \alpha f_0 k^2 + f_0^3 \mu + f_0 \omega \end{aligned} \quad (4.8)$$

elde edilir. (4.8) denklemi  $g$  fonksiyonuna göre bir polinom olduğu açıkça görülmektedir. Bu nedenle, bu polinomun her bir katsayısı sıfıra eşitlenerek aşağıdaki denklem sistemi bulunur:

$$0 = f_1^5 v + 2\kappa f_1^3 + 24f_1$$

$$0 = 5f_0 f_1^4 v + 4f_0 f_1^2 + 4f_0 f_1^2 \kappa$$

$$0 = 10f_0^2 f_1^3 v + f_1^3 k^2 \kappa + f_1^3 \kappa \gamma + 2f_0^2 f_1 \kappa + f_1^3 \mu + 12f_1 k^2 + 2\alpha f_1 + 20f_1 \gamma$$

$$0 = 10f_0^3 f_1^2 v + 3f_0 f_1^2 k^2 \kappa + 2f_0 f_1^2 \kappa \gamma + 3f_0 f_1^2 \mu$$

$$\begin{aligned}
0 &= 5f_0^4 f_1 v + 3f_0^2 f_1^2 k^2 \kappa + f_0^2 f_1 \kappa \gamma - 3f_1 \kappa^4 - \alpha f_1 k^2 + 3f_0^2 f_1 \mu + 6f_1 k^2 \gamma \\
&\quad + \alpha f_1 \gamma + f_1 \gamma^2 + 12\beta f_1 + f_1 \omega \\
0 &= f_0^5 v + f_0^3 k^2 \kappa - 3f_0 k^4 - \alpha f_0 k^2 + f_0^3 \mu + f_0 \omega.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

(4.9) sistemi Maple yardımı ile çözülerek

$$f_0 = 0,$$

$$\begin{aligned}
f_1 &= \mp \frac{\sqrt{\mp v (\pm \kappa + \sqrt{\kappa^2 - 24v})}}{v} \\
\gamma_{1,2} &= - \frac{\frac{(\pm \kappa + \sqrt{\kappa^2 - 24v}) \kappa^2 \kappa}{v} \mp \frac{(\pm \kappa + \sqrt{\kappa^2 - 24v}) \mu}{v} + 12k^2 + 2\alpha}{20 \mp \frac{(\pm \kappa + \sqrt{\kappa^2 - 24v}) \kappa}{v}} \\
\omega &= \pm \frac{\left( \frac{1}{v} \left( (-\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 24v}) (-8k^4 \kappa^3 - 2\alpha k^2 \kappa^3 + 144k^4 \kappa v + 40\alpha k^2 \kappa v - 4k^2 \kappa^2 \mu) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \alpha^2 \kappa v - \alpha k^2 \kappa v \mu + 12\beta \kappa^3 + 48k^2 \mu v + 8\alpha \mu v - 240\beta \kappa v + \kappa \mu^2) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 12\mu^2 - 24\alpha k^2 \kappa^2 + 416\alpha k^2 v - 48k^2 \kappa \mu - 12\alpha \kappa \mu \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 96k^4 \kappa^2 + 1248k^4 v + 18\alpha^2 v + 144\beta \kappa^2 - 2400\beta v \right) \right)}{\left( \mp \frac{\kappa^3 (\pm \kappa + \sqrt{\kappa^2 - 24v})}{v} - 20\kappa (-\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 24v}) + 12\kappa^2 - 200v \right)},
\end{aligned}$$

katsayıları elde edilir. Elde edilen bu katsayılar ile aşağıdaki çözüm sınıfları bulunur:

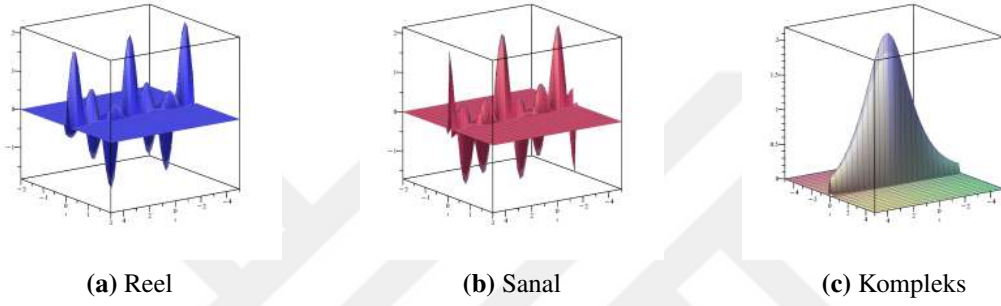
*Durum (1):*

$$P = \frac{2\sqrt{v(-\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 24v})} \sqrt{pq \left( \frac{(k^2 \kappa + \mu)(-\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 24v}) + 2(6k^2 + \alpha)v}{\kappa \sqrt{\kappa^2 - 24v} - \kappa^2 + 20v} \right)}}{v \left( \begin{aligned} &pe^{\sqrt{-\frac{(k^2 \kappa + \mu)(-\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 24v}) + 2(6k^2 + \alpha)v}{\kappa \sqrt{\kappa^2 - 24v} - \kappa^2 + 20v}} (-8k^3 t - 2k\alpha t + x)} \\ &+ qe^{-\sqrt{-\frac{(k^2 \kappa + \mu)(-\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 24v}) + 2(6k^2 + \alpha)v}{\kappa \sqrt{\kappa^2 - 24v} - \kappa^2 + 20v}} (-8k^3 t - 2k\alpha t + x)} \end{aligned} \right)}$$

olmak üzere

$$u(x,t) = Pe \left[ i \left( kx - \frac{\begin{pmatrix} -8k^4\kappa^3 - 2\alpha k^2\kappa^3 + 144k^4\kappa v + 40\alpha k^2\kappa v \\ -4k^2\kappa^2\mu + \alpha^2\kappa v - \alpha\kappa^2\mu + 12\beta\kappa^3 \\ +48k^2\mu v + 8\alpha\mu v - 240\beta\kappa v + \kappa\mu^2 \end{pmatrix}}{-96k^4\kappa^2 - 24\alpha k^2\kappa^2 + 1248k^4v + 416\alpha k^2v - 48k^2\kappa\mu + 18\alpha^2v - 12\alpha\kappa\mu + 144\beta\kappa^2 - 2400\beta v + 12\mu^2} \right) t + \vartheta \right] \quad (4.10)$$

dir.



**Şekil 4.1.** (4.10) çözümünün grafiksel gösterimi

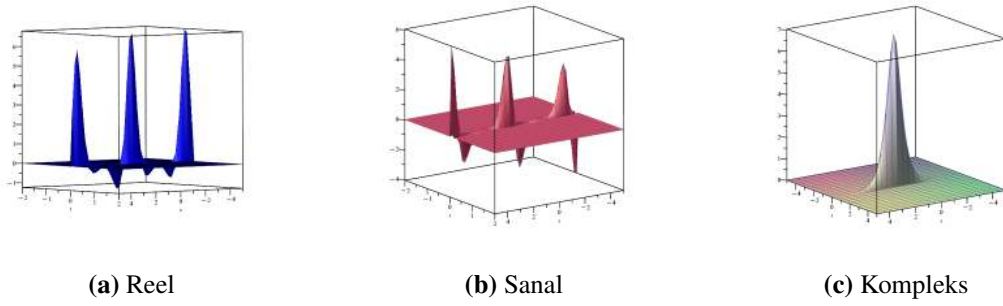
*Durum (2):*

$$P = \frac{2\sqrt{v(-\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 24v})} \sqrt{pq \left( \frac{(k^2\kappa + \mu)(-\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 24v}) + 2(6k^2 + \alpha)v}{\kappa\sqrt{\kappa^2 - 24v} - \kappa^2 + 20v} \right)}}{v \left( \begin{aligned} &pe \sqrt{\frac{(k^2\kappa + \mu)(-\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 24v}) + 2(6k^2 + \alpha)v}{\kappa\sqrt{\kappa^2 - 24v} - \kappa^2 + 20v}} (-8k^3t - 2k\alpha t + x) \\ &+ qe^{-\sqrt{\frac{(k^2\kappa + \mu)(-\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 24v}) + 2(6k^2 + \alpha)v}{\kappa\sqrt{\kappa^2 - 24v} - \kappa^2 + 20v}}} (-8k^3t - 2k\alpha t + x) \end{aligned} \right)}$$

olmak üzere

$$u(x,t) = Pe \left[ i \left( kx - \frac{\begin{pmatrix} -8k^4\kappa^3 - 2\alpha k^2\kappa^3 + 144k^4\kappa v + 40\alpha k^2\kappa v \\ -4k^2\kappa^2\mu + \alpha^2\kappa v - \alpha\kappa^2\mu + 12\beta\kappa^3 \\ +48k^2\mu v + 8\alpha\mu v - 240\beta\kappa v + \kappa\mu^2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -96k^4\kappa^2 - 24\alpha k^2\kappa^2 + 1248k^4v + 416\alpha k^2v - 48k^2\kappa\mu \\ +18\alpha^2v - 12\alpha\kappa\mu + 144\beta\kappa^2 - 2400\beta v + 12\mu^2 \end{pmatrix}} \right) t + \theta \right] \quad (4.11)$$

dir.



**Şekil 4.2.** (4.11) çözümünün grafiksel gösterimi

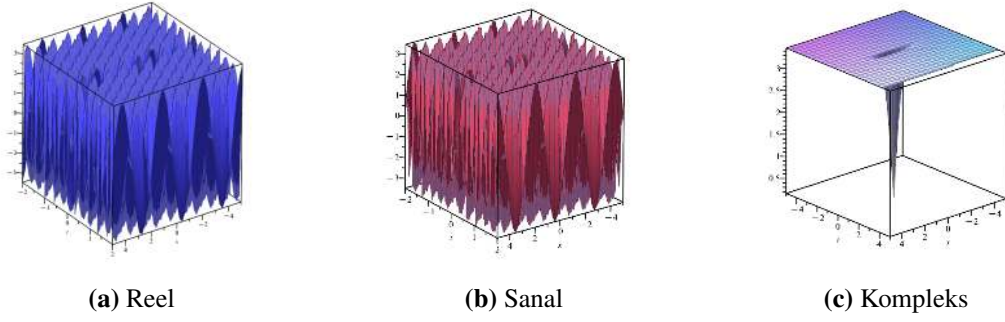
*Durum (3):*

$$P = \frac{\sqrt{v(-\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 24v})} \begin{pmatrix} pe^{\sqrt{2} \sqrt{\frac{(k^2\kappa + \mu)(-\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 24v}) + 2(6k^2 + \alpha)v}{\kappa\sqrt{\kappa^2 - 24v - \kappa^2 + 20v}}} (-8k^3t - 2\kappa\alpha t + x)} \\ -qe^{-\sqrt{2} \sqrt{\frac{(k^2\kappa + \mu)(-\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 24v}) + 2(6k^2 + \alpha)v}{\kappa\sqrt{\kappa^2 - 24v - \kappa^2 + 20v}}} (-8k^3t - 2\kappa\alpha t + x)} \end{pmatrix}}{v \begin{pmatrix} pe^{\sqrt{2} \sqrt{\frac{(k^2\kappa + \mu)(-\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 24v}) + 2(6k^2 + \alpha)v}{\kappa\sqrt{\kappa^2 - 24v - \kappa^2 + 20v}}} (-8k^3t - 2\kappa\alpha t + x)} \\ +qe^{-\sqrt{2} \sqrt{\frac{(k^2\kappa + \mu)(-\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 24v}) + 2(6k^2 + \alpha)v}{\kappa\sqrt{\kappa^2 - 24v - \kappa^2 + 20v}}} (-8k^3t - 2\kappa\alpha t + x)} \end{pmatrix}}$$

olmak üzere

$$u(x, t) = Pe \left[ i^{kx - \left( \frac{\begin{pmatrix} -8k^4\kappa^3 - 2\alpha k^2\kappa^3 + 144k^4\kappa v + 40\alpha k^2\kappa v \\ (-\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 24v}) \begin{pmatrix} -4k^2\kappa^2\mu + \alpha^2\kappa v - \alpha\kappa^2\mu + 12\beta\kappa^3 \\ +48k^2\mu v + 8\alpha\mu v - 240\beta\kappa v + \kappa\mu^2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -96k^4\kappa^2 - 24\alpha k^2\kappa^2 + 1248k^4v + 416\alpha k^2v - 48k^2\kappa\mu \\ +18\alpha^2v - 12\alpha\kappa\mu + 144\beta\kappa^2 - 2400\beta v + 12\mu^2 \end{pmatrix}}} t + \theta \right) \right] \quad (4.12)$$

dir.



**Şekil 4.3.** (4.12) çözümünün grafiksel gösterimi

*Durum (4):*

$$P = \frac{\sqrt{v(-\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 24v})} \left( \begin{array}{l} pe^{\sqrt{2} \sqrt{-\frac{(k^2\kappa + \mu)(-\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 24v}) + 2(6k^2 + \alpha)v}{\kappa\sqrt{\kappa^2 - 24v} - \kappa^2 + 20v}} (-8k^3t - 2k\alpha t + x)} \\ -qe^{-\sqrt{2} \sqrt{-\frac{(k^2\kappa + \mu)(-\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 24v}) + 2(6k^2 + \alpha)v}{\kappa\sqrt{\kappa^2 - 24v} - \kappa^2 + 20v}} (-8k^3t - 2k\alpha t + x)} \end{array} \right)}{v \left( \begin{array}{l} pe^{\sqrt{2} \sqrt{-\frac{(k^2\kappa + \mu)(-\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 24v}) + 2(6k^2 + \alpha)v}{\kappa\sqrt{\kappa^2 - 24v} - \kappa^2 + 20v}} (-8k^3t - 2k\alpha t + x)} \\ +qe^{-\sqrt{2} \sqrt{-\frac{(k^2\kappa + \mu)(-\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 24v}) + 2(6k^2 + \alpha)v}{\kappa\sqrt{\kappa^2 - 24v} - \kappa^2 + 20v}} (-8k^3t - 2k\alpha t + x)} \end{array} \right)}$$

olmak üzere

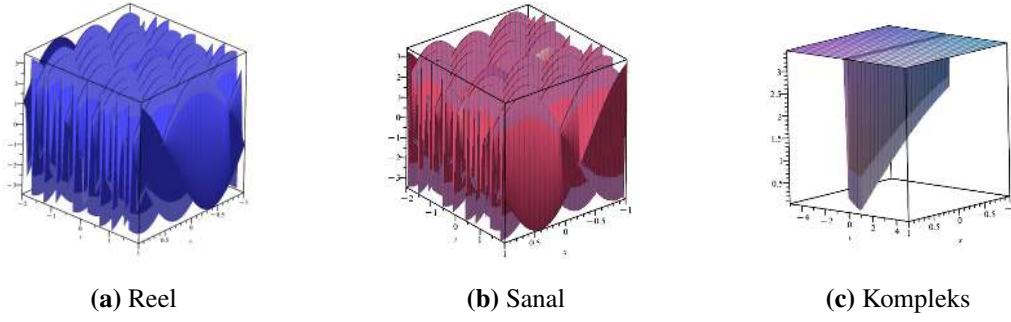
$$u(x, t) = Pe \left[ i^{kx - \left( \begin{array}{l} (-\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 24v}) \left( \begin{array}{l} -8k^4\kappa^3 - 2\alpha k^2\kappa^3 + 144k^4\kappa v + 40\alpha k^2\kappa v \\ -4k^2\kappa^2\mu + \alpha^2\kappa v - \alpha\kappa^2\mu + 12\beta\kappa^3 \\ + 48k^2\mu v + 8\alpha\mu v - 240\beta\kappa v + \kappa\mu^2 \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{l} -96k^4\kappa^2 - 24\alpha k^2\kappa^2 + 1248k^4v + 416\alpha k^2v - 48k^2\kappa\mu \\ + 18\alpha^2v - 12\alpha\kappa\mu + 144\beta\kappa^2 - 2400\beta v + 12\mu^2 \end{array} \right) \end{array} \right) t + \theta \right] \quad (4.13)$$

dir.

#### 4.2. (4.6) Denklemi İçin $\left(\frac{G'}{kG' + G + r}\right)$ -Genişleme Yönteminin Uygulaması

(4.6) denkleminde  $p = p(\eta)$ ,  $f = F(\eta)$  fonksiyonları için

$$p = s_0 + s_1 f \quad (4.14)$$



**Şekil 4.4.** (4.13) çözümünün grafiksel gösterimi

çözümü kabul edilsin. (3.13) yardımcı denklemi göz önüne alınarak (4.6) denkleminde (4.14) çözümü yerine yazılarak

$$\begin{aligned}
& \left( v s_1^5 + 2\kappa(-\lambda + \gamma + 1)^2 s_1^3 + 24(-\lambda + \gamma + 1)^4 s_1 \right) f^5 \\
& + \left( 5v s_0 s_1^4 + \frac{1}{k} \left( s_1(\lambda - \gamma - 1)(4\kappa\lambda s_0 s_1 - 4k\kappa\gamma s_0 s_1 - 4k\kappa s_0 s_1 - 3\kappa\lambda s_1^2 + 6\kappa\gamma s_1^2 - 60\lambda^3 + 240\lambda^2\gamma - 300\lambda\gamma^2 + 120\gamma^3 + 120\lambda^2 - 360\lambda\gamma + 240\gamma^2 - 60\lambda + 120\gamma) \right) \right) f^4 \\
& + \left( \frac{1}{k^2} (2s_1(\lambda - \gamma - 1)^2(6k^4 + \alpha k^2 + 25\lambda^2 - 120\lambda\gamma + 120\gamma^2 + 20\gamma)) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{k^3} (\kappa s_1^3 k(\lambda^2 - 6\lambda\gamma + 6\gamma^2 + 2\gamma) + 2s_0 s_1 \kappa(\lambda - \gamma - 1)k^2(k\lambda s_0 - k\gamma s_0 - k s_0 - 3\lambda s_1 + 6\gamma s_1)) \right. \\
& \quad \left. s_1^3(\kappa k^2 + 10v s_0^2 + \mu) \right) f^3 \\
& + \left( \frac{1}{k^3} (-3(\lambda - \gamma - 1)(-2\gamma + \lambda)s_1(6k^4 + \alpha k^2 + 5\lambda^2 - 40\lambda\gamma + 40\gamma^2 + 20\gamma)) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{k^3} \left( s_1^2 \kappa(2k\lambda^2 s_0 - 12k\lambda\gamma s_0 + 12k\gamma^2 s_0 + 4k\gamma s_0 + \lambda\gamma s_1 - 2\gamma^2 s_1) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 3\kappa s_1(\lambda - \gamma - 1)k^2(-2\gamma + \lambda)s_0^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + s_0 s_1^2(3k^2 \kappa + 10v s_0^2 + 3\mu) \right) \right) f^2 \\
& + \left( \frac{1}{k^2} ((\lambda^2 - 6\lambda\gamma + 6\gamma^2 + 2\gamma)s_1(6k^2 + \alpha)) \right. \\
& \quad + \frac{1}{k^3} (s_0 \kappa s_1(k\lambda^2 s_0 - 6k\lambda\gamma s_0 + 6k\gamma^2 s_0 + 2k\gamma s_0 + 2\lambda\gamma s_1 - 4\gamma^2 s_1)) \\
& \quad + \frac{1}{k^4} \left( -2(\lambda^2 - 12\lambda\gamma + 12\gamma^2 + 8\gamma)s_1\gamma(\lambda - \gamma - 1) \right. \\
& \quad \left. + s_1(-2\gamma + \lambda)^2(\lambda^2 - 24\lambda\gamma + 24\gamma^2 + 20\gamma) \right. \\
& \quad \left. - s_1(-3k^2 \kappa s_0^2 - 5v s_0^4 + 3k^4 + \alpha k^2 - 3\mu s^2 - \omega) \right) \right) f \\
& + \frac{1}{k^4} ((-2\gamma + \lambda)s_1\gamma(k^2 \kappa s_0^2 + 6k^4 + \alpha k^2 + \lambda^2 - 12\lambda\gamma + 12\gamma^2 + 8\gamma)) = 0
\end{aligned} \tag{4.15}$$

denklemleri elde edilir. (4.15) denklemleri  $f$  fonksiyonuna göre polinom olduğu açıktır.  $f$  nin her bir katsayısı sıfıra eşitlenerek aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$\begin{aligned}
0 &= vs_1^5 + 2\kappa(-\lambda + \gamma + 1)^2 s_1^3 + 24(-\lambda + \gamma + 1)^4 s_1 \\
0 &= 5vs_0s_1^4 + \frac{1}{k} \left( s_1(\lambda - \gamma - 1)(4\kappa\lambda s_0s_1 - 4k\kappa\gamma s_0s_1 - 4k\kappa s_0s_1 - 3\kappa\lambda s_1^2 + 6\kappa\gamma s_1^2 - 60\lambda^3 \right. \\
&\quad \left. + 240\lambda^2\gamma - 300\lambda\gamma^2 + 120\gamma^3 + 120\lambda^2 - 360\lambda\gamma + 240\gamma^2 - 60\lambda + 120\gamma) \right) \\
0 &= 12(-\lambda + \gamma + 1)^2 s_1 \left( k^2 + \frac{\alpha}{6} \right) + s_1^3 (\kappa k^2 + \mu) + 10vs_0^2s_1^3 \\
&\quad + \frac{1}{k^3} \left( 2 \left( \begin{aligned} &(-2\kappa(-\gamma + \frac{\lambda}{2})s_1k(\gamma - \frac{\lambda}{2}) + \kappa k(-\lambda + \gamma + 1)s_1\gamma)s_1^2 + \\ &2(\kappa(-\gamma + \frac{\lambda}{2})s_1(-\lambda + \gamma + 1)k^2 - 2\kappa k^2(-\lambda + \gamma + 1)s_1)(\gamma - \frac{\lambda}{2}) \end{aligned} \right) s_0s_1 \right. \\
&\quad \left. + \kappa k^3(-\lambda + \gamma + 1)s_1s_0^2 \right) \\
0 &= \frac{1}{k^2} (2s_1(\lambda - \gamma - 1)^2(6k^4 + \alpha k^2 + 25\lambda^2 - 120\lambda\gamma + 120\gamma^2 + 20\gamma)) \\
&\quad + \frac{1}{k^3} (\kappa s_1^3k(\lambda^2 - 6\lambda\gamma + 6\gamma^2 + 2\gamma) + 2s_0s_1\kappa(\lambda - \gamma - 1)k^2(k\lambda s_0 - k\gamma s_0 - ks_0 - 3\lambda s_1 + 6\gamma s_1)) \\
&\quad + s_1^3(\kappa k^2 + 10vs_0^2 + \mu) \\
0 &= \frac{1}{k^2} ((\lambda^2 - 6\lambda\gamma + 6\gamma^2 + 2\gamma)s_1(6k^2 + \alpha)) \\
&\quad + \frac{1}{k^3} (s_0\kappa s_1(k\lambda^2s_0 - 6k\lambda\gamma s_0 + 6k\gamma^2s_0 + 2k\gamma s_0 + 2\lambda\gamma s_1 - 4\gamma^2s_1)) \\
&\quad + \frac{1}{k^4} \left( \begin{aligned} &-(2(\lambda^2 - 12\lambda\gamma + 12\gamma^2 + 8\gamma))s_1\gamma(\lambda - \gamma - 1) \\ &+ s_1(-2\gamma + \lambda)^2(\lambda^2 - 24\lambda\gamma + 24\gamma^2 + 20\gamma) \end{aligned} \right) \\
&\quad - s_1(-3k^2\kappa s_0^2 - 5vs_0^4 + 3k^4 + \alpha k^2 - 3\mu s^2 - \omega) \\
0 &= \frac{1}{k^4} ((-2\gamma + \lambda)s_1\gamma(k^2\kappa s_0^2 + 6k^4 + \alpha k^2 + \lambda^2 - 12\lambda\gamma + 12\gamma^2 + 8\gamma)) \tag{4.16}
\end{aligned}$$

(4.16) sisteminin çözümü ile aşağıdaki durumlar bulunmuştur:

*Durum (1):*

$$s_0 = 0,$$

$$s_1 = \frac{(\gamma-1)}{\mu n} \sqrt{-2\mu(-9k^2n^2 + \alpha n^2 + 10\gamma^2 - 10\gamma)},$$

$$\lambda = 2\gamma,$$

$$v = \frac{\kappa^2}{25},$$

$$\kappa = \frac{15n^2\mu}{((-9k^2 + \alpha)n^2 + 10\gamma^2 - 10\gamma)},$$

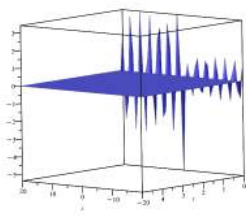
$$\omega = \frac{-16\gamma^4 + 32\gamma^3 + 2(-8 + n^2(6k^2 + \alpha))\gamma^2 - 2(6k^2 + \alpha)n^2\gamma + k^2n^4(3k^2 + \alpha)}{n^4}$$

$$f = \frac{p_1(2\gamma + \sqrt{-2\gamma})e^{\frac{-(2\gamma + \sqrt{-2\gamma})(x - (8k^3 + 2k\alpha)t)}{2n}} + p_2(2\gamma - \sqrt{-2\gamma})e^{\frac{-(2\gamma - \sqrt{-2\gamma})(x - (8k^3 + 2k\alpha)t)}{2n}}}{n \left[ p_1(2\gamma + \sqrt{-2\gamma} - 2)e^{\frac{-(2\gamma + \sqrt{-2\gamma})(x - (8k^3 + 2k\alpha)t)}{2n}} + p_2(2\gamma - \sqrt{-2\gamma} - 2)e^{\frac{-(2\gamma - \sqrt{-2\gamma})(x - (8k^3 + 2k\alpha)t)}{2n}} \right]}$$

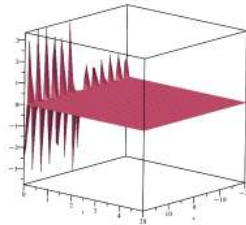
olmak üzere

$$u(x, t) = s_1 f e^{i \left[ kx - \left( \frac{-16\gamma^4 + 32\gamma^3 + 2(-8 + n^2(6k^2 + \alpha))\gamma^2 - 2(2k^2 + \alpha)n^2\gamma + (3k^2 + \alpha)n^4k^2}{n^4} \right) t + \theta \right]}. \quad (4.17)$$

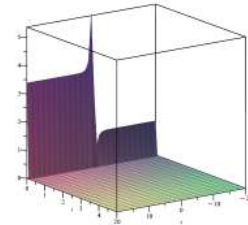
dir.



(a) Reel



(b) Sanal



(c) Kompleks

**Şekil 4.5.** (4.17) çözümünün grafiksel gösterimi



*Durum (2):*

$$s_0 = 0,$$

$$s_1 = \frac{(\gamma - 1)}{\mu} \sqrt{-2\mu(-4k^2 + \alpha)},$$

$$\lambda = 2\gamma, \quad \nu = \frac{\kappa^2}{25},$$

$$\kappa = \frac{10\mu}{-4k^2 + \alpha},$$

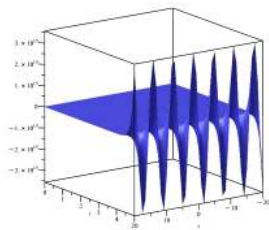
$$\omega = \frac{-16\gamma^4 + 32\gamma^3 + 2(-8 + n^2(6k^2 + \alpha))\gamma^2 - 2(6k^2 + \alpha)n^2\gamma + k^2n^4(3k^2 + \alpha)}{n^4},$$

$$f = \frac{p_1(2\gamma + \sqrt{-2\gamma})e^{\frac{-(2\gamma + \sqrt{-2\gamma})(x - (8k^3 + 2k\alpha)t)}{2n}} + p_2(2\gamma - \sqrt{-2\gamma})e^{\frac{-(2\gamma - \sqrt{-2\gamma})(x - (8k^3 + 2k\alpha)t)}{2n}}}{n \left[ p_1(2\gamma + \sqrt{-2\gamma} - 2)e^{\frac{-(2\gamma + \sqrt{-2\gamma})(x - (8k^3 + 2k\alpha)t)}{2n}} + p_2(2\gamma - \sqrt{-2\gamma} - 2)e^{\frac{-(2\gamma - \sqrt{-2\gamma})(x - (8k^3 + 2k\alpha)t)}{2n}} \right]}$$

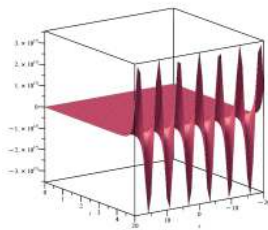
olmak üzere

$$u(x, t) = s_1 f e^{i \left[ kx - \left( \frac{-16\gamma^4 + 32\gamma^3 + 2(-8 + n^2(6k^2 + \alpha))\gamma^2 - 2(2k^2 + \alpha)n^2\gamma + (3k^2 + \alpha)n^4k^2}{n^4} \right) t + \theta \right]}. \quad (4.18)$$

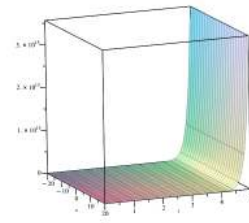
dir.



(a) Reel



(b) Sanal



(c) Kompleks

**Şekil 4.6.** (4.18) çözümünün grafiksel gösterimi

*Durum (3):*

$$s_0 = 0,$$

$$s_1 = \frac{40}{\sqrt{-5\kappa}},$$

$$\gamma = 5,$$

$$\lambda = \gamma + 5, \quad \nu = \frac{\kappa^2}{25},$$

$$\mu = \frac{\kappa(-4k^2 + \alpha)}{10},$$

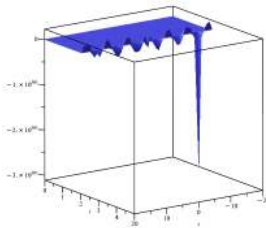
$$\omega = \frac{3k^4n^4 + \alpha k^2n^4 + 240k^2n^2 + 40\alpha n^2 - 6400}{n^4}$$

$$f = \frac{p_1 (10 + i\sqrt{10}) e^{\frac{-(10+i\sqrt{10})(x-(8k^3+2k\alpha)t)}{2n}} + p_2 (10 - i\sqrt{10}) e^{\frac{-(10-i\sqrt{10})(x-(8k^3+2k\alpha)t)}{2n}}}{n \left[ p_1 (8 + i\sqrt{10}) e^{\frac{-(10+i\sqrt{10})(x-(8k^3+2k\alpha)t)}{2n}} + p_2 (8 - i\sqrt{10}) e^{\frac{-(10-i\sqrt{10})(x-(8k^3+2k\alpha)t)}{2n}} \right]}$$

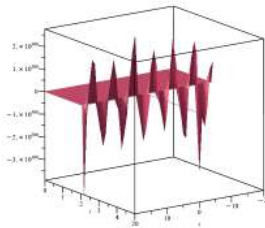
olmak üzere

$$u(x,t) = s_1 f e^{i \left[ kx - \left( \frac{3k^4n^4 + \alpha k^2n^4 + 240k^2n^2 + 40\alpha n^2 - 6400}{n^4} \right) t + \theta \right]}. \quad (4.19)$$

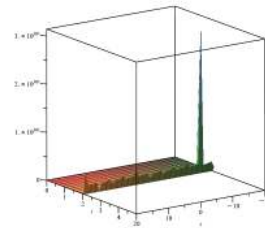
dir.



(a) Reel



(b) Sanal



(c) Kompleks

**Şekil 4.7.** (4.19) çözümünün grafiksel gösterimi

*Durum (4):*

$$s_0 = 0,$$

$$s_1 = \frac{40}{\sqrt{-5\kappa}},$$

$$\gamma = \frac{31}{3} + \frac{\sqrt{-270k^2n^2 - 45\alpha n^2 + 18400}}{15},$$

$$\lambda = \gamma + 5,$$

$$v = \frac{\kappa^2}{25},$$

$$\mu = \frac{\kappa \left( -33k^2n^2 - 3\alpha n^2 + 2480 + 16\sqrt{-270k^2n^2 - 45\alpha n^2 + 18400} \right)}{15n^2},$$

$$\omega = \frac{\left[ (1587200 - 2160(6k^2 + \alpha)n^2) \sqrt{18400 - 45(6k^2 + \alpha)n^2} + 217216000 \right. \\ \left. + (17739k^4 + 5913\alpha k^2 + 324\alpha^2)n^4 - 565200(6k^2 + \alpha)n^2 \right]}{2025n^4},$$

$$\Delta_1 = \frac{46}{3} + \frac{\sqrt{-270k^2n^2 - 45\alpha n^2 + 18400}}{15} + \frac{\sqrt{-650 - 5\sqrt{-270k^2n^2 - 45\alpha n^2 + 18400}}}{5},$$

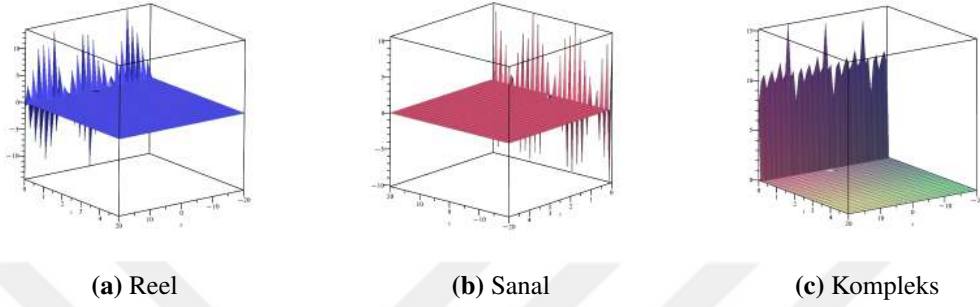
$$\Delta_2 = \frac{46}{3} + \frac{\sqrt{-270k^2n^2 - 45\alpha n^2 + 18400}}{15} - \frac{\sqrt{-650 - 5\sqrt{-270k^2n^2 - 45\alpha n^2 + 18400}}}{5}$$

$$f = \frac{p_1 \Delta_1 e^{\frac{-\Delta_1(x - (8k^3 + 2k\alpha)t)}{2n}} + p_2 \Delta_2 e^{\frac{-\Delta_2(x - (8k^3 + 2k\alpha)t)}{2n}}}{n \left[ p_1 (\Delta_1 - 2) e^{\frac{-(\Delta_1 - 2)(x - (8k^3 + 2k\alpha)t)}{2n}} + p_2 (\Delta_2 - 2) e^{\frac{-(\Delta_2 - 2)(x - (8k^3 + 2k\alpha)t)}{2n}} \right]}.$$

olmak üzere

$$u(x, t) = s_1 f e^{i \left[ kx - \left( \frac{3k^4 n^4 + \alpha k^2 n^4 + 240k^2 n^2 + 40\alpha n^2 - 6400}{n^4} \right) t + \theta \right]}. \quad (4.20)$$

dir.



**Şekil 4.8.** (4.20) çözümünün grafiksel gösterimi

#### 4.3. (4.6) Denklemi İçin Riccati-Bernoulli Yönteminin Uygulaması

(4.6) denkleminde  $p = P(\eta)$  fonksiyonu için ve

$$p' = ap^{(2-m)} + bp + dp^m \quad (4.21)$$

(4.6) denkleminde (4.21) ve türevleri yerine yazıldığında aşağıdaki  $p$  ye bağlı polinom denklemi elde edilir:

$$\begin{aligned} 0 = & vp^5 - a^3(-2+m)^3 \left( ap^{(5-4m)} + bp^{4-3m} + dp^{3-2m} \right) \\ & + a^2 \left( (-m^2 + 5m - 5) b^2 + d(-2+m)a - 2k^2 - \frac{\alpha}{3} \right) p^{3-2m} \\ & + 4d^2m \left( \left( \frac{3}{4}m^2 + \frac{3}{2}m - \frac{3}{4} \right) b^2 + dam^2 + \frac{3k^2}{2} + \frac{\alpha}{4} \right) p^{-1+2m} \\ & + 4d^4m^2 \left( -\frac{3}{4} + m \right) p^{-3-4m} + p^{1+2m} d^2 \kappa m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -3a^3(-1+m)(-2+m)^2 \left( ap^{(5-4m)} + bp^{4-3m} + dp^{3-2m} \right) - a^2 \kappa(-2+m) p^{(5-2m)} \\
& -3 \left( \left( -m^2 + 4m - \frac{13}{3} \right) b^2 + d(-2+m)(-m^2 + 5m - 5) a + 2 \left( k^2 + \frac{\alpha}{6} \right) (m-3) \right) abp^{2-m} \\
& + 3db \left( \left( m^2 + \frac{1}{3} \right) b^2 + dm(m^2 + 3) a + 2(1+m) \left( k^2 + \frac{\alpha}{6} \right) \right) p^m \\
& + \left( -b^3 m(-1+m)(-2+m)(p^{(-1-m)} a - p^{(m-3)} d) + 2a\kappa d + \kappa b^2 + \kappa k^2 + \mu \right) p^3 \\
& + \left( \begin{aligned} & -b^2(-1+m)(-2+m)(3m(p^{(-1-m)} a - p^{(m-3)} d)(ap^{(2-m)} + dp^m) + a^2 p^{(1-2m)}) \\ & + b^2(-1+m)(p^{(-3+2m)} d^2 m^2 + p^{(-m)} abm + p^{(-2+m)} bdm - 2p^{(-m)} ab) \\ & + \kappa(abp^{(2-m)} + dbp^m) \end{aligned} \right) p^2 \\
& + \left( \begin{aligned} & 3bm(-1+m)(-2+m)(ap^{(2-m)} + dp^m)^2(p^{(-1-m)} a + p^{(m-3)} d) + \\ & 2b(-1+m)(p^{(1-2m)} a^2 m^2 + p^{(-3+2m)} d^2 m^2 - 4p^{(1-2m)} a^2 m + p^{(-m)} abm + \\ & p^{(-2+m)} bdm + 4a^2 p^{(1-2m)} - 2p^{(-m)} ab)(ap^{(2-m)} + dp^m) \\ & + 6ab^2 d(-1+m)^2 + b^4 + 6 \left( 2da + k^2 + \frac{\alpha}{6} \right) b^2 + 6d^2(m^2 - 2m + 2) a^2 \\ & + 12d \left( k^2 + \frac{\alpha}{6} \right) a - 3k^4 - \alpha k^2 + \omega \end{aligned} \right) p \\
& -(ap^{(2-m)} + dp^m)^2(-1+m)(p^{(1-2m)} a^2 m^2 - p^{(-3+2m)} d^2 m^2 - 4p^{(1-2m)} a^2 m \\
& - p^{(-m)} abm - p^{(-2+m)} bdm + 4a^2 p^{(1-2m)} + 2p^{(-m)} ab) + 6abd(-1+m)^2(ap^{(2-m)} + dp^m) \\
& -m(-1+m)(-2+m)(ap^{(2-m)} + dp^m)^3(p^{(-1-m)} a - p^{(m-3)} d) \\
& + ab(-2+m)(-3p^{(4-3*m)} a^2 m^2 + 3p^{(2-m)} adm + 15p^{(4-3*m)} a^2 m + 3p^{(3-2*m)} abm \\
& - 6p^{(2-m)} ad - 15p^{(4-3m)} a^2 - p^{(3-2*m)} ab - p^{(4-m)} \kappa) \\
& + d^3(7m^2 - 3) mbp^{(-2+3*m)} + p^{(m+2)} bd\kappa m
\end{aligned} \tag{4.22}$$

şekline dönüşür.

*Durum (1):*  $m = 1$  için (4.22) denklemi

$$0 = v p^5 + (a^2 \kappa p a + 2ab\kappa + 2ad\kappa + b^2\kappa + 2bd\kappa + d^2\kappa + k^2\kappa + \mu) p^3$$

$$+ p \left( \begin{array}{c} b^4 + (12da + 6k^2 + \alpha)b^2 + 6d^2a^2 + 2(6k^2 + \alpha)ad \\ -3k^4 - \alpha k^2 + \omega + 4bd^3 + (4b^2 + 12ad + 12k^2 + 2\alpha)bd \\ + a^3(a + b + d) - b(-4b^2 - 9ad - 12k^2 - 2\alpha)a \\ + (3b^2 + 3ad + 6k^2 + \alpha)a^2 + (6b^2 + 4ad + 6k^2 + \alpha)d^2 \\ + d^4 + 3a^2b(a + b + d) \end{array} \right) \quad (4.23)$$

olur. (4.23) denklemi  $p$  fonksiyonuna göre bir polinom olduğundan her bir katsayısı sıfıra eşitlenerek aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$0 = v,$$

$$0 = a^2 \kappa p a + 2ab\kappa + 2ad\kappa + b^2\kappa + 2bd\kappa + d^2\kappa + k^2\kappa + \mu,$$

$$0 = \left( \begin{array}{c} b^4 + (12da + 6k^2 + \alpha)b^2 + 6d^2a^2 + 2(6k^2 + \alpha)ad \\ -3k^4 - \alpha k^2 + \omega + 4bd^3 + (4b^2 + 12ad + 12k^2 + 2\alpha)bd \\ + a^3(a + b + d) - b(-4b^2 - 9ad - 12k^2 - 2\alpha)a \\ + (3b^2 + 3ad + 6k^2 + \alpha)a^2 + (6b^2 + 4ad + 6k^2 + \alpha)d^2 \\ + d^4 + 3a^2b(a + b + d) \end{array} \right). \quad (4.24)$$

(4.24) sistemi çözülerek aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$v = 0$$

$$\mu = -(a^2 \kappa p a + 2ab\kappa + 2ad\kappa + b^2\kappa + 2bd\kappa + d^2\kappa + k^2\kappa)$$

$$\omega = -a^4 - 4a^3b - 4a^3d - 6a^2b^2 - 12a^2bd - 6a^2d^2 - 6a^2k^2 - 4ab^3 - 12ab^2d - 12abd^2$$

$$-12abk^2 - 4ad^3 - 12adk^2 - b^4 - 4b^3d - 6b^2d^2 - 6b^2k^2 - 4bd^3 - 12bdk^2$$

$$-d^4 - 6d^2k^2 + 3k^4 - a^2\alpha - 2a\alpha b - 2a\alpha d - \alpha b^2 - 2\alpha bd - \alpha d^2 + \alpha k^2$$

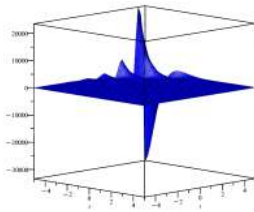
Buradan da

$$p = Ce^{(a+b+d)(x-ct)}$$

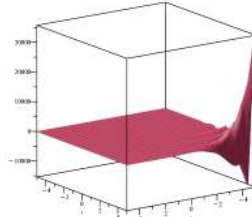
olmak üzere

$$u(x,t) = pe^{i \left[ kx + \left( \begin{aligned} &a^4 + 4a^3b + 4a^3d + 6a^2b^2 + 12a^2bd + 6a^2d^2 + 6a^2k^2 \\ &+ 4ab^3 + 12ab^2d + 12abd^2 + 12abk^2 + 4ad^3 + 12adk^2 \\ &+ b^4 + 4b^3d + 6b^2d^2 + 6b^2k^2 + 4bd^3 + 12bdk^2 \\ &+ d^4 + 6d^2k^2 - 3k^4 + a^2\alpha + 2ab\alpha + 2ad\alpha \\ &+ b^2\alpha + 2bd\alpha + d^2\alpha - k^2\alpha \end{aligned} \right) t + \theta \right]} \quad (4.25)$$

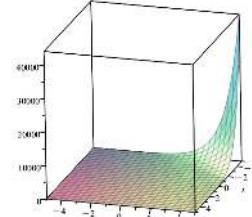
çözümü bulunur.



(a) Reel



(b) Sanal



(c) Kompleks

**Şekil 4.9.** (4.25) çözümünün grafiksel gösterimi

*Durum (2):*  $b = 0$  ve  $d = 0$  için (4.22) denklemi

$$0 = a^4(p^{(2-m)})^2(-1+m)(-2+m)^2p^{(1-2m)} - a^4(p^{(2-m)})^3m(-1+m)(-2+m)p^{(-1-m)}$$

$$+vp^5 + (-3k^4 - \alpha k^2 + \omega)p + (k^2\kappa + \mu)p^3$$

$$\begin{aligned}
& -a^4(-2+m)^3 p^{(5-4m)} - a^2 \kappa(-2+m) p^{(5-2m)} \\
& + 3(-2+m)(-2k^2 - \frac{\alpha}{3}) a^2 p^{(3-2m)} - 3a^4(-1+m)(-2+m)^2 p^{(5-4m)}
\end{aligned} \tag{4.26}$$

olur. Denklem (4.26)  $p$  ye göre düzenlenirse

$$\begin{aligned}
0 = & \left( v - \frac{6a^4 m^3}{(p^m)^4} + \frac{29a^4 m^2}{(p^m)^4} - \frac{46a^4}{(p^m)^4} + \frac{24a^4}{(p^m)^4} + \frac{2a^2 \kappa}{(p^m)^2} - \frac{a^2 \kappa}{(p^m)^2} \right) p^5 \\
& + \left( \frac{12a^2 k^2}{(p^m)^2} + \frac{2a^2 \alpha}{(p^m)^2} + \mu + \kappa k^2 - \frac{6a^2 m k^2}{(p^m)^2} - \frac{a^2 m \alpha}{(p^m)^2} \right) p^3 \\
& + (-3k^4 - \alpha k^2 + \omega) p
\end{aligned} \tag{4.27}$$

biçimine dönüşür. Denklem (4.27) nin katsayıları sıfıra eşitlenerek

$$0 = -a^4(-2+m)(3m-4)(-3+2m)$$

$$0 = -a^2 \kappa(-2+m)$$

$$0 = v$$

$$0 = -a^2(-2+m)(6k^2 + \alpha)$$

$$0 = k^2 \kappa + \mu$$

$$0 = -3k^4 - \alpha k^2 + \omega \tag{4.28}$$

sistemi bulunur. (4.28) sisteminin çözümlerinden aşağıdaki sonuçlar bulunur:

$$m = 2, \quad \mu = -\kappa k^2, \quad v = 0, \quad \omega = 3k^4 + \alpha k^2.$$



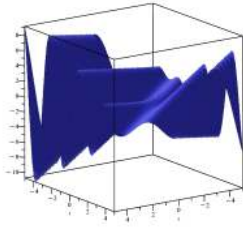
Bu sabitler ile birlikte

$$p = (a(m-1)(x-ct+C))^{\frac{1}{m-1}}$$

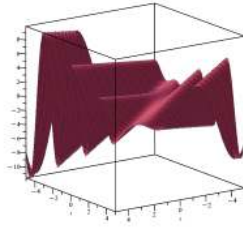
olmak üzere

$$u(x,t) = pe^{i[kx-(3k^4+\alpha k^2)t+\theta]} \quad (4.29)$$

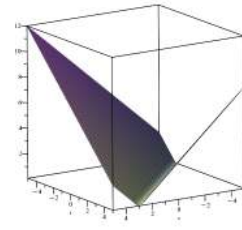
çözümü elde edilir.



(a) Reel



(b) Sanal



(c) Kompleks

**Şekil 4.10.** (4.29) çözümünün grafiksel gösterimi

*Durum (3):*  $d = 0$  için (4.22) denklemi

$$\begin{aligned} 0 = & \left( v - \frac{a^2 \kappa m}{(p^m)^2} + \frac{2a^2 \kappa}{(p^m)^2} - \frac{6a^4 m^3}{(p^m)^4} + \frac{29a^4 m^2}{(p^m)^4} - \frac{46a^4 m}{(p^m)^4} + \frac{24a^4}{(p^m)^4} \right) p^5 \\ & + \left( \frac{62a^3 b m^2}{(p^m)^3} - \frac{106a^3 b m}{(p^m)^3} - \frac{12a^3 b m^3}{(p^m)^3} + \frac{3a \kappa b}{p^m} + \frac{60a^3 b}{(p^m)^3} - \frac{a \kappa b m}{p^m} \right) p^4 \\ & + \left( \frac{\mu + \kappa(b^2 + k^2)}{(p^m)^2} - \frac{7a^2 b^2 m^3}{(p^m)^2} + \frac{40a^2 b^2 m^2}{(p^m)^2} - \frac{77a^2 b^2 m}{(p^m)^2} - \frac{6a^2 m k^2}{(p^m)^2} - \frac{a^2 m \alpha}{(p^m)^2} + \frac{50a^2 b^2}{(p^m)^2} + \frac{12a^2 k^2}{(p^m)^2} + \frac{2a^2 \alpha}{(p^m)^2} \right) p^3 \\ & + \left( \frac{7ab^3 m^2}{p^m} - \frac{17ab^3 m}{p^m} - \frac{ab^3 m^3}{(p^m)^2} + \frac{18bak^2}{p^m} + \frac{3ba\alpha}{p^m} + \frac{15ab^3}{p^m} - \frac{6bamk^2}{p^m} - \frac{bam\alpha}{p^m} \right) p^2 \\ & + (b^4 + 6b^2 k^2 - 3k^4 + b^2 \alpha - \alpha k^2 + \omega) p \end{aligned} \quad (4.30)$$

olur. (4.30) denkleminin katsayıları sıfıra eşitlenerek

$$0 = b^4 + 6b^2k^2 - 3k^4 + b^2\alpha - \alpha k^2 + \omega$$

$$0 = -ab(m-3)(b^2m^2 - 4b^2m + 5b^2 + 6k^2 + \alpha)$$

$$0 = -a^2(-2+m)(7b^2m^2 - 26b^2m + 25b^2 + 6k^2 + \alpha)$$

$$0 = b^2\kappa + k^2\kappa + \mu$$

$$0 = -2a^3b(3m-5)(-2+m)(-3+2m)$$

$$0 = -a\kappa b(m-3)$$

$$0 = v$$

$$0 = -a^2\kappa(-2+m)$$

$$0 = -a^4(-2+m)(3m-4)(-3+2m) \quad (4.31)$$

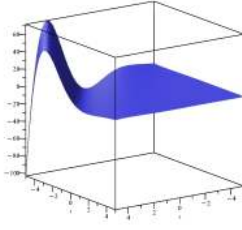
sistemi bulunur. (4.31) sisteminin çözümünden aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$\bullet \ a = 0, \quad \mu = -b^2\kappa - k^2\kappa, v = 0, \quad \omega = -b^4 - 6b^2k^2 + 3k^4 - \alpha b^2 + \alpha k^2 \text{ için}$$

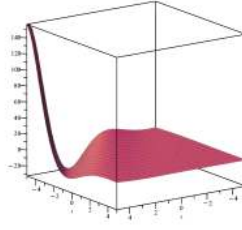
$$p = \left( -\frac{a}{b} + Ce^{b(m-1)(x-ct)} \right)^{\frac{1}{m-1}}$$

olmak üzere

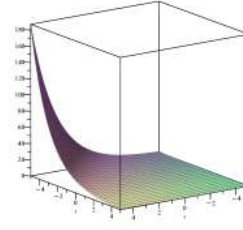
$$u(x, t) = pe^{i[kx - (-b^4 - 6b^2k^2 + 3k^4 - \alpha b^2 + \alpha k^2)t + \theta]} \quad (4.32)$$



(a) Reel



(b) Sanal



(c) Kompleks

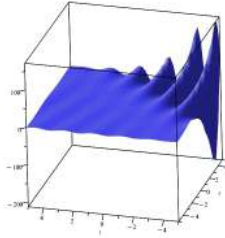
**Şekil 4.11.** (4.32) çözümünün grafiksel gösterimi

- $\alpha = -b^2 - 6k^2$ ,  $m = 2, \kappa = \mu = \nu = 0$ ,  $\omega = -b^2k^2 - 3k^4$  için

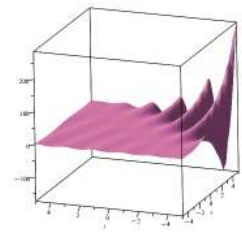
$$p = \left( -\frac{a}{b} + Ce^{b(m-1)(x-ct)} \right)^{\frac{1}{m-1}}$$

olmak üzere

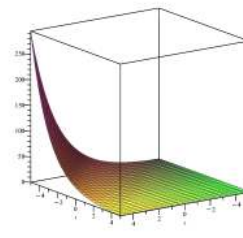
$$u(x, t) = pe^{i[kx - (-b^2k^2 - 3k^4)t + \theta]} \quad (4.33)$$



(a) Reel



(b) Sanal



(c) Kompleks

**Şekil 4.12.** (4.33) çözümünün grafiksel gösterimi

*Durum (4):* (4.22) denklemi  $p$  ye göre düzenlenerek

$$0 = \left( \nu - \frac{a^2 \kappa m}{(p^m)^2} + \frac{2a^2 \kappa}{(p^m)^2} - \frac{6a^4 m^3}{(p^m)^4} + \frac{29a^4 m^2}{(p^m)^4} - \frac{46a^4 m}{(p^m)^4} + \frac{24a^4}{(p^m)^4} \right) p^5$$

$$+ \left( \frac{62a^3 b m^2}{(p^m)^3} - \frac{106a^3 b m}{(p^m)^3} - \frac{12a^3 b m^3}{(p^m)^3} + \frac{3a \kappa b}{p^m} + \frac{60a^3 b}{(p^m)^3} - \frac{a \kappa b m}{p^m} \right) p^4$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \mu + \frac{40a^3dm^2}{(p^m)^2} - \frac{68a^3dm}{(p^m)^2} - \frac{8a^3dm^3}{(p^m)^2} - \frac{77a^2b^2m}{(p^m)^2} + \frac{40a^2b^2m^2}{(p^m)^2} - \frac{7a^2b^2m^3}{(p^m)^2} \right. \\
& \quad \left. - \frac{a^2m\alpha}{(p^m)^2} + 2a\kappa d + \frac{40a^3d}{(p^m)^2} + \frac{50b^2a^2}{(p^m)^2} + \frac{12a^2k^2}{(p^m)^2} + \frac{2a^2\alpha}{(p^m)^2} + \kappa b^2 + \kappa k^2 \right) p^3 \\
& + \left( \frac{60a^2bd}{p^m} + b\kappa dp^m + \frac{7ab^3m^2}{p^m} - \frac{17ab^3m}{p^m} - \frac{ab^3m^3}{p^m} + \frac{18bak^2}{p^m} + \frac{3ba\alpha}{p^m} + \frac{15ab^3}{p^m} \right. \\
& \quad \left. + p^m b\kappa dm - \frac{86a^2bdm}{p^m} + \frac{46a^2bdm^2}{p^m} - \frac{8a^2bdm^3}{p^m} - \frac{6bamk^2}{p^m} - \frac{bam\alpha}{p^m} \right) p^2 \\
& + \left( (p^m)^2 d^2 \kappa m + 10a^2 d^2 m^2 + 10ab^2 dm^2 - 20a^2 d^2 m - 20ab^2 dm + 16d^2 a^2 \right. \\
& \quad \left. + 22ab^2 d + 12cak^2 + b^4 + 6b^2 k^2 - 3k^4 + 2da\alpha + b^2 \alpha - \alpha k^2 + \omega \right) p \\
& + \left( \frac{8d^3 m^3 (p^m)^2 a + 7b^2 d^2 m^3 (p^m)^2 - 8d^3 m^2 (p^m)^2 a - 2b^2 d^2 m^2 (p^m)^2}{+ 4am(p^m)^2 d^3 + b^2 d^2 m(p^m)^2 + 6md^2 (p^m)^2 k^2 + md^2 (p^m)^2 \alpha} \right) \frac{1}{p} \\
& + (12bd^3 m^3 (p^m)^3 - 10bd^3 m(p^m)^3 + 2bd^3 m(p^m)^3) \frac{1}{p^2} \\
& + (6d^4 m^3 (p^m)^4 - 7d^4 m^2 (p^m)^4 + 2d^4 m(p^m)^4) \frac{1}{p^3} \tag{4.34}
\end{aligned}$$

olur. (4.34) denkleminin katsayıları sıfıra eşitlenerek aşağıdaki sistem elde edilir:

$$0 = v$$

$$0 = -a^2 \kappa (-2 + m)$$

$$0 = -a^4 (-2 + m)(3m - 4)(-3 + 2m)$$

$$0 = -a\kappa b(m - 3)$$

$$0 = -2a^3 b(3m - 5)(-2 + m)(-3 + 2m)$$

$$0 = 2ad\kappa + b^2\kappa + k^2\kappa + \mu$$

$$0 = -a^2(-2 + m)(8adm^2 + 7b^2m^2 - 24adm - 26b^2m + 20ad + 25b^2 + 6k^2 + \alpha)$$

$$0 = b\kappa d(1 + m)$$

$$0 = -ab(m - 3)(8adm^2 + b^2m^2 - 22adm - 4b^2m + 20ad + 5b^2 + 6k^2 + \alpha)$$

$$0 = d^2\kappa m$$

$$0 = 10a^2d^2m^2 + 10ab^2dm^2 - 20a^2d^2m - 20ab^2dm + 16a^2d^2 + 22ab^2d \\ + 12adk^2 + b^4 + 6b^2k^2 - 3k^4 + 2a\alpha d + \alpha b^2 - \alpha k^2 + \omega$$

$$0 = bd(1 + m)(8adm^2 + b^2m^2 - 10adm + 8ad + b^2 + 6k^2 + \alpha)$$

$$0 = d^2m(8adm^2 + 7b^2m^2 - 8adm - 2b^2m + 4ad + b^2 + 6k^2 + \alpha)$$

$$0 = 2bd^3m(3m - 1)(-1 + 2m)$$

$$0 = d^4m(-1 + 2m)(-2 + 3m) \tag{4.35}$$

(4.35) denklem sistemi çözüldüğünde aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$\alpha = -b^2 - 6k^2, \quad m = 2, \quad d = \kappa = \mu = \nu = 0, \quad \omega = -b^2k^2 - 3k^4$$

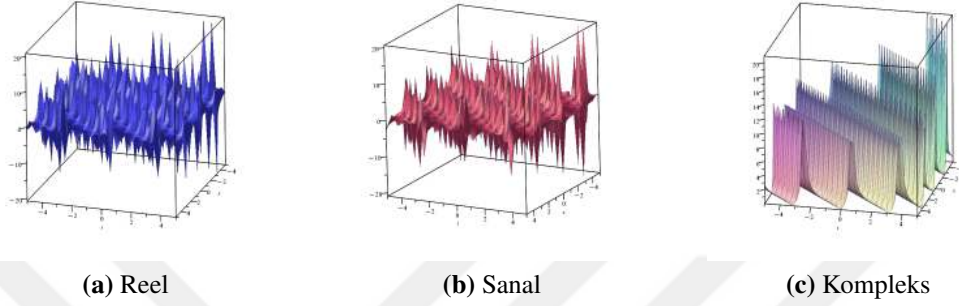
ve

$$p = \left[ -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ad}}{2a} \coth \left( \frac{(1 - m)\sqrt{b^2 - 4ad}}{2} (x - ct + C) \right) \right]^{\frac{1}{1-m}}$$

olmak üzere

$$u(x, t) = pe^{i[kx - (-b^2k^2 - 3k^4)t + \theta]} \quad (4.36)$$

çözümü bulunur.



**Şekil 4.13.** (4.36) çözümünün grafiksel gösterimi

*Durum (5):*  $a \neq 0$  ve  $b^2 - 4ad = 0$  için (4.22) denklemi

$$\begin{aligned}
0 = & \left( v - \frac{a^2 \kappa m}{(p^m)^2} + \frac{2a^2 \kappa}{(p^m)^2} - \frac{6a^4 m^3}{(p^m)^4} + \frac{29a^4 m^2}{(p^m)^4} - \frac{46a^4 m}{(p^m)^4} + \frac{24a^4}{(p^m)^4} \right) p^5 \\
& + \left( \frac{62a^3 b m^2}{(p^m)^3} - \frac{106a^3 b m}{(p^m)^3} - \frac{12a^3 b m^3}{(p^m)^3} + \frac{3a \kappa b}{p^m} + \frac{60a^3 b}{(p^m)^3} - \frac{a \kappa b m}{p^m} \right) p^4 \\
& + \left( \mu + \frac{40a^3 d m^2}{(p^m)^2} - \frac{68a^3 d m}{(p^m)^2} - \frac{8a^3 d m^3}{(p^m)^2} - \frac{77a^2 b^2 m}{(p^m)^2} + \frac{40a^2 b^2 m^2}{(p^m)^2} - \frac{7a^2 b^2 m^3}{(p^m)^2} \right. \\
& \left. - \frac{a^2 m \alpha}{(p^m)^2} + 2a \kappa d + \frac{40a^3 d}{(p^m)^2} + \frac{50b^2 a^2}{(p^m)^2} + \frac{12a^2 k^2}{(p^m)^2} + \frac{2a^2 \alpha}{(p^m)^2} + \kappa b^2 + \kappa k^2 \right) p^3 \\
& + \left( \frac{60a^2 b d}{p^m} + b \kappa d p^m + \frac{7ab^3 m^2}{p^m} - \frac{17ab^3 m}{p^m} - \frac{ab^3 m^3}{p^m} + \frac{18bak^2}{p^m} + \frac{3ba\alpha}{p^m} + \frac{15ab^3}{p^m} \right. \\
& \left. + p^m b \kappa d m - \frac{86a^2 b d m}{p^m} + \frac{46a^2 b d m^2}{p^m} - \frac{8a^2 b d m^3}{p^m} - \frac{6bamk^2}{p^m} - \frac{bam\alpha}{p^m} \right) p^2 \\
& + \left( (p^m)^2 d^2 \kappa m + 10a^2 d^2 m^2 + 10ab^2 d m^2 - 20a^2 d^2 m - 20ab^2 d m + 16d^2 a^2 \right. \\
& \left. + 22ab^2 d + 12cak^2 + b^4 + 6b^2 k^2 - 3k^4 + 2da\alpha + b^2 \alpha - \alpha k^2 + \omega \right) p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \begin{aligned} & 8d^3m^3(p^m)^2a + 7b^2d^2m^3(p^m)^2 - 8d^3m^2(p^m)^2a - 2b^2d^2m^2(p^m)^2 \\ & + 4am(p^m)^2d^3 + b^2d^2m(p^m)^2 + 6md^2(p^m)^2k^2 + md^2(p^m)^2\alpha \end{aligned} \right) \frac{1}{p} \\
& + (12bd^3m^3(p^m)^3 - 10bd^3m(p^m)^3 + 2bd^3m(p^m)^3) \frac{1}{p^2} \\
& + (6d^4m^3(p^m)^4 - 7d^4m^2(p^m)^4 + 2d^4m(p^m)^4) \frac{1}{p^3}
\end{aligned} \tag{4.37}$$

olur. (4.37) denkleminin katsayıları sıfıra eşitlenerek aşağıdaki sistem elde edilir:

$$0 = v$$

$$0 = -a^2\kappa(-2+m)$$

$$0 = -a^4(-2+m)(3m-4)(-3+2m)$$

$$0 = -a\kappa b(m-3)$$

$$0 = -2a^3b(3m-5)(-2+m)(-3+2m)$$

$$0 = 2ad\kappa + b^2\kappa + k^2\kappa + \mu$$

$$0 = -a^2(-2+m)(8adm^2 + 7b^2m^2 - 24adm - 26b^2m + 20ad + 25b^2 + 6k^2 + \alpha)$$

$$0 = b\kappa d(1+m)$$

$$0 = -ab(m-3)(8adm^2 + b^2m^2 - 22adm - 4b^2m + 20ad + 5b^2 + 6k^2 + \alpha)$$

$$0 = d^2\kappa m$$

$$0 = 10a^2d^2m^2 + 10ab^2dm^2 - 20a^2d^2m - 20ab^2dm + 16a^2d^2 + 22ab^2d \\ + 12adk^2 + b^4 + 6b^2k^2 - 3k^4 + 2a\alpha d + \alpha b^2 - \alpha k^2 + \omega$$

$$0 = bd(1+m)(8adm^2 + b^2m^2 - 10adm + 8ad + b^2 + 6k^2 + \alpha)$$

$$0 = d^2m(8adm^2 + 7b^2m^2 - 8adm - 2b^2m + 4ad + b^2 + 6k^2 + \alpha)$$

$$0 = 2bd^3m(3m-1)(-1+2m)$$

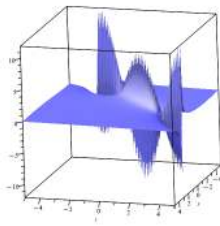
$$0 = d^4m(-1+2m)(-2+3m) \quad (4.38)$$

(4.38) denklem sisteminin çözümünden aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

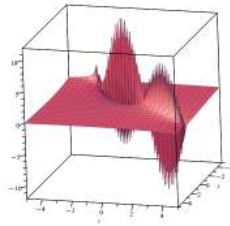
$$\bullet \quad b = d = v = 0, \quad m = 2, \quad \mu = -k^2\kappa, \quad \omega = 3k^4 + \alpha k^2, \quad p = \left[ \frac{1}{a(x-ct+C)} - \frac{b}{2a} \right]^{-1}$$

için

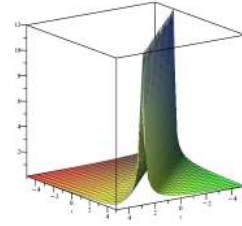
$$u(x,t) = pe^{i[kx - (3k^4 + \alpha k^2)t + \theta]} \quad (4.39)$$



(a) Reel



(b) Sanal



(c) Kompleks

**Şekil 4.14.** (4.39) çözümünün grafiksel gösterimi

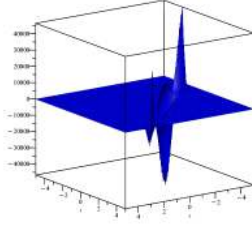
$$\bullet \quad b = d = \kappa = \mu = v = 0, \quad m = \frac{4}{3}, \quad \alpha = -6k^2, \quad \omega = -3k^4 \text{ için}$$

$$p = \left[ \frac{3}{a(x-ct+C)} - \frac{b}{2a} \right]^{-3}$$

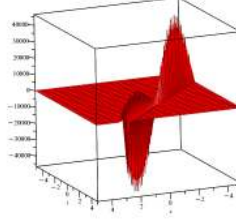


olmak üzere

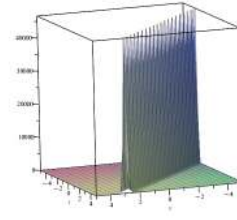
$$u(x,t) = pe^{i[kx - (-3k^4)t + \theta]} \quad (4.40)$$



(a) Reel



(b) Sanal



(c) Kompleks

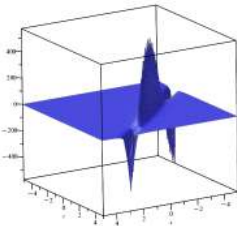
**Şekil 4.15.** (4.40) çözümünün grafiksel gösterimi

•  $b = d = \kappa = \mu = \nu = 0$ ,  $m = \frac{3}{2}$ ,  $\alpha = -6k^2$ ,  $\omega = -3k^4$  için

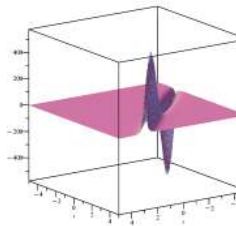
$$p = \left[ \frac{2}{a(x - ct + C)} - \frac{b}{2a} \right]^{-2}$$

olmak üzere

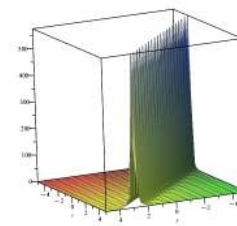
$$u(x,t) = pe^{i[kx - (-3k^4)t + \theta]} \quad (4.41)$$



(a) Reel



(b) Sanal



(c) Kompleks

**Şekil 4.16.** (4.41) çözümünün grafiksel gösterimi

## 5. SONUÇ

Bu çalışmada, dördüncü mertebeden doğrusal olmayan optik fiberlerde ışık darbelerinin yayılımını modelleyen denklemin tam çözümleri üç farklı analitik yöntem kullanılarak elde edilmiştir: Sardar alt denklem yöntemi,  $\left(\frac{G'}{kG'+G+r}\right)$ -genişleme yöntemi ve Riccati-Bernoulli yöntemi. Her bir yöntemin sağladığı çözüm sınıfları incelenmiş ve bu çözümlerin fiziksel sistemlerdeki anlamları tartışılmıştır.

Elde edilen sonuçlar, bu tür yöntemlerin doğrusal olmayan sistemlerin çözümünde nedenli etkili olduğunu açıkça ortaya koymuştur. Özellikle şu sonuçlar dikkat çekicidir: Sardar Alt Denklem Yöntemi ile denklemin çözüm uzayında farklı sınıflarda çözümler üretmiştir. Elde edilen çözümler, optik solitonların kararlılığını ve davranışını açıklamada önemli katkılar sağlamaktadır. Grafik analizleri, çözümlerin hem reel hem sanal hem de kompleks alanlarda farklı fiziksel özellikler gösterdiğini ortaya koymuştur. Bu durum, dispersiyon ve doğrusal olmayan etkiler arasındaki dengenin hassas bir şekilde modellenmesini mümkün kılmıştır.

$\left(\frac{G'}{kG'+G+r}\right)$ -Genişleme Yöntemi ile periyodik ve hiperbolik çözümlerin yanında yeni rasyonel çözümlerin de elde edilmesini sağlamıştır. Bu çözümler, doğrusal olmayan optik fiber sistemlerinde enerji yayılımı ve ışık darbelerinin kontrolü gibi pratik uygulamalarda kullanılabilir. Ayrıca, yöntem sayesinde parametrelerin çözümler üzerindeki etkisi detaylı bir şekilde incelenebilmiştir.

Riccati-Bernoulli Yöntemi ile elde edilen geniş çözüm sınıfları, dördüncü mertebeden dispersiyon etkisinin soliton genişliği ve kararlılık üzerindeki etkilerini anlamada önemli bir rol oynamıştır. Çözüm sınıflarının analizi, doğrusal olmayan sistemlerdeki parametrelerin fiziksel sistem üzerindeki rolünü daha net bir şekilde anlamamıza olanak tanımıştır. Elde edilen çözümler, doğrusal olmayan bu denklemin, optik ve akışkanlar dinamiği gibi çeşitli fiziksel sistemlerdeki rolünü anlamak için önemli ipuçları sunmaktadır.

Sonuç olarak, bu çalışmada kullanılan analitik yöntemlerin doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin çözümündeki etkinliği açıkça gösterilmiştir. Bu yöntemlerin gelecekteki çalışmalarda daha karmaşık fiziksel sistemlere uygulanması, modelleme ve çözüm tekniklerinin daha da geliştirilmesine katkıda bulunabilir.

## KAYNAKÇA

- Ablowitz, M. J., & Segur, H** (1981). *Solitons and the inverse scattering transform*, Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Braun, M., & Golubitsky, M.** (1983). *Differential equations and their applications* (Vol. 2). New York: Springer-Verlag.
- Bluman G.W. & Kumei, S.** (1989). *Symmetries and Differential Equations*. Applied Mathematical Science (Vol. 81), Springer-Verlag.
- Cohen, I. M., & Kundu, P. K.** (2004). *Fluid mechanics*. Elsevier.
- Drazin, P. G., & Johnson, R. S.** (1989). *Solitons: An Introduction* (Vol. 2). Cambridge university press.
- Dutta, B. K.** (2016). *Mathematical methods in chemical and biological engineering*. CRC Press.
- Hirota, R.** (2004). *The Direct Method in Soliton Theory*.(No 155.) Cambridge University Press.
- Ibragimov, N. H.** (2007). A new conservation theorem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 333(1), 311-328.
- Ibragimov, N. H.** (2023). *CRC handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Volume I: Symmetries, Exact Solutions, and Conservation Laws*. CRC Press.
- Giresunlu, İ. B., & Yildiz, B.** (2023). Analytical Rational Solitons of the Modified Lakshmanan-Porsezian-Daniel Equation. *Universal Journal of Mathematics and Applications*. 6(2), 53-54.
- Kopçasız, B., & Yaşar, E.** (2023). The investigation of unique optical soliton solutions for dual-mode nonlinear Schrödinger's equation with new mechanisms. *Journal of Optics*. 52(3), 1513-1527.
- Kudryashov, N. A.** (1990). Exact solutions of nonlinear differential equations. *Applied Mathematics Letters*. 3(4), 75-78.

- Kudryashov, N. A.** (2019). First integrals and solutions of the traveling wave reduction for the Triki–Biswas equation. *Optik*. 185, 275-281.
- Kudryashov, N. A.** (2019). General solution of traveling wave reduction for the Kundu–Mukherjee–Naskar model. *Optik*. 186, 22-27.
- Kudryashov, N. A.** (2020). Periodic and solitary waves of the Biswas–Arshed equation. *Optik*. 200, 163442.
- Kudryashov, N. A.** (2020). Traveling wave solutions of the generalized Gerdjikov–Ivanov equation. *Optik*. 219, 165193.
- Murray, J. D.** (2002). *Mathematical Biology* [electronic resource].
- Pajevic, S.** (1995). *Nonlinear dynamics and chaos: Steven H. Strogatz*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1994.
- Rezazadeh, H., Inc, M., & Baleanu, D.** (2020). New solitary wave solutions for variants of  $(3+1)$ -dimensional Wazwaz-Benjamin-Bona-Mahony equations. *Frontiers in Physics*. 8, 332.
- Shabat, A., & Zakharov, V.** (1972). Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. *Sov. Phys. JETP*, 34(1), 62.
- Sternberg, S.** (2010). *Dynamical Systems*. Courier Corporation.
- Strachan, I. A. B.** (1992). *Beam Structures: Classical And Advanced Theories*. John Wiley & Sons.
- Strogatz, S. H.** (2018). *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering* CRC press.
- Wang, M., Li, X., & Zhang, J.** (2008). The  $(G'/G)$ -expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics. *Physics Letters A*. 372(4).
- Whitham, G. B.** (2011). *Linear and nonlinear waves*. John Wiley & Sons.
- Zabusky, N. J., & Kruskal, M. D.** (1965). Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Physical review letters*. 15(6), 240.