



**BAZI LİNEER OLMAYAN KİSMİ DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN $(1/G')$ - AÇILIM METODU İLE
ANALİTİK ÇÖZÜMÜNÜN ELDE EDİLMESİ**

Yüksek Lisans Tezi

Ufuk GÜNGÖZ

(16121122)

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı: Münevver AYDIN TUZ

MART– 2019

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
 $\left(\frac{1}{G'}\right)$ - AÇILIM METODU İLE
ANALİTİK ÇÖZÜMÜNÜN ELDE EDİLMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ufuk GÜNGÖZ

(161121122)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 21.01.2019

Tezin Savunulduğu Tarih: 22.02.2019

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Münevver AYDIN TUZ

*Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Hasan BULUT

Doç. Dr. Hacı Mehmet BAŞKONUŞ



ŞUBAT - 2019

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın her aşamasında benden desteğini esirgemeyen, bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım değerli hocalarım Sayın Dr. Öğr. Üyesi Münevver AYDIN TUZ ve Dr. Öğr. Üyesi Asif YOKUŞ'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmalarım süresince her zaman yanımda olan ve bana her türlü desteği veren sevgili eşim Tuğba GÜNGÖZ'e ve aileme teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Ufuk GÜNGÖZ

ELAZIĞ - 2019

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ	I
İÇİNDEKİLER	II
ÖZET.....	III
SUMMARY.....	IV
ŞEKİLLER LİSTESİ	V
TABLolar LİSTESİ	VI
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIMLAR.....	6
3. MATERYAL VE METOT	8
3.1. $(1/G')$ - Açılım Metodu.....	9
4. METODUN UYGULANMASI.....	11
4.1. NLSE (Nonlinear Schrödinger Equation – Lineer Olmayan Schrödinger Denklemleri)	11
4.2. Lineer Olmayan Schrödinger Denkleminin $(1/G')$ Açılım Metoduyla Analitik Çözümü.....	12
4.3. Sonlu Farklar Metodunun Lineer Olmayan Schrödinger Denklemine Uygulanması.....	15
4.4. Kesme Hatası ve Kararlılık Analizi	17
4.5. L_2 ve L_∞ Norm Hataları	18
4.6. Nümerik Örnek.....	19
5. SONUÇ.....	22
KAYNAKLAR	23
ÖZGEÇMİŞ.....	27

ÖZET

Bu çalışma beş bölümden oluşturulmuştur.

Birinci bölümde dalga kavramı hakkında detaylı bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde lineer olmayan diferansiyel denklemler ile ilgili genel tanımlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, kullandığımız metot olan $(1/G')$ - Açılım Metodu hakkında bilgi verilmiştir. Bu metodun genel çözümünün nasıl elde edildiği gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde, NLS denklemleri hakkında bilgi verilmiştir. Özel olarak lineer olmayan Schrödinger denklemi ele alınmıştır. Bu denklemin $(1/G')$ - Açılım Metodu kullanılarak genel çözümü elde edilmiştir. Sonlu farklar metodu açıklanarak bu metod kullanılıp norm hataları bulunmuştur. Nümerik örnek verilmiştir.

Beşinci bölümde ise tez sonuçları yazılmıştır.

Anahtar Kelimeler : $(1/G')$ - Açılım Metodu, Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi, (G'/G) Açılım Metodu.

SUMMARY

Some Linear Non - Partial Differential Equations With $(1/G')$ - Expansion Method Analytical Solution

This study is composed of five parts.

In the first chapter, detailed information about the wave concept is given.

In the second chapter, general definitions related to nonlinear differential equations are given.

In the third chapter, we give information about the method used $(1/G')$ - Expansion Method. It has been shown how to obtain the general solution of this method.

In the fourth chapter, information is given about NLS equations. In particular, the nonlinear Schrödinger equation is discussed. General solution of this equation by using $(1/G')$ - Expansion Method was obtained. Finite difference method is described and the norm is found. Numerical examples are given.

In the fifth chapter, the results of the thesis were written.

Keywords : $(1/G')$ - Expansion Method, Nonlinear Schrödinger Equation, (G'/G) - Expansion Method.

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 1.1. Dalga Grafiği.....	3
Şekil 4.1. $w=2, \lambda=1, b=1, k=-2, \mu=-1, A=7$ için duran dalgaları temsil eden solitonları sergilemek için (4.21) ile verilen tam karmaşık hareketli dalga çözümü.....	15
Şekil 4.2. $w=2, \lambda=1, b=1, k=-2, \mu=-1, A=7$ için duran dalgaları temsil eden solitonları sergilemek için (4.21) ile verilen tam karmaşık hareketli dalga çözümü grafiği	21
Şekil 4.3. Sonlu farklar yöntemi için (4.2) denkleminin sayısal çözümü	21

TABLÖLAR LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 2.1. Denklemin (3.1) sayısal ve kesin çözümleri ve $\Delta x = 0.01$ olduğunda mutlak hatalar 20

Tablo 2.2. $0 \leq h \leq 1$ ve $0 \leq x \leq 1$ için L_2 ve L_∞ norm hatası 20



1. GİRİŞ

Bu bölümde öncelikle dalga hakkında genel bilgiler verilip sonra ise çalışmamızın temel konuları olan “Diferansiyel Denklem, Dengeleme terimi” hakkında bilgiler verilecektir.

Dalga, bir ortamda veya bir boşlukta yayılan ve genellikle enerjinin yer değişimine neden olan titreşime verilen addır. Denizlerde meydana gelen büyük su dalgaları, yüksek ve alçak basınç nedeniyle meydana gelen rüzgârların etki alanında bulunan tüm esnek olan maddelerin hareketi, elektromanyetik dalgalar, ışık dalgaları, atom dalgaları, ses dalgaları gibi içinde bulunduğumuz dünyada yaşantımızı etkileyen fiziksel olayların hepsi dalga kavramıyla ifade edilebilir. Dalga her zaman bilim dünyasında çok dikkat çekici bir konu olmuştur. Dolayısıyla dalgayla ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Yapılan bu çalışmalar diferansiyel denklemlerin çözümlerinde kullanılan bazı metotların elde edilmesini sağlamıştır.

Dalga soyut bir kavramdır. Esnek bir cisim üzerine uygulanan enerji, esnek cisimde bir hareket ortaya çıkarır, bu harekete dalga adı verilmektedir. Bu hareketlilik esnek cismin hareketiymiş gibi algılanır fakat bu olay esnek cismin üzerine uygulanan enerjinin yer değiştirip taşınmasıdır. Dalganın enerji taşıma özelliği ilkesinden faydalanılarak okyanuslarda dalga türbinleri ile elektrik enerjisi elde edilmiştir.

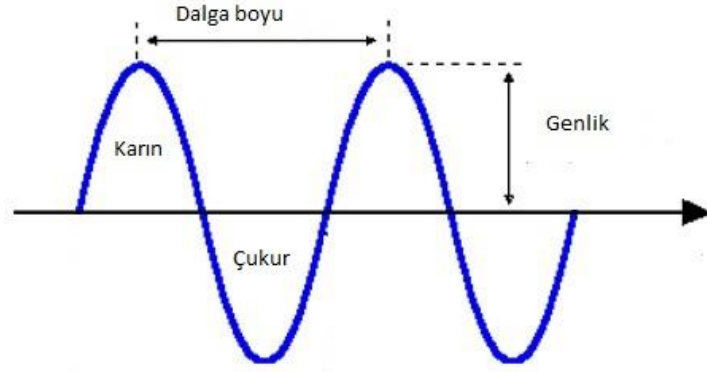
Su yüzeyi incelenilerken su dalgası olarak isimlendirilen olay aslında su yüzeyinin yeni bir hale geçmesi olarak anlatılabilir. Bir cisim veya ortamdaki sarsıntının karşılığı dalgadır. Su dalgası izlendiği zaman, su yüzeyinin tekrardan düzenlendiği görülebilir. Okyanusta görülen dalgalar bilim insanlarının dikkatini çekmiş ve insanların yararına nasıl kullanılabilir fikri ortaya çıkmıştır. Bu fikirden hareketle dalgalardan elektrik enerjisi elde edebileceği düşüncesine ulaşan bilim insanları, dalga jeneratörleri ile dalganın taşıdığı enerjiyi elektrik enerjisine dönüştürmüşlerdir. Geliştirilen bu sistemde ortamın taşıdığı enerji, elektrik enerjisine çevrilmektedir. Buradan şu sonuca ulaşırız; Enerjinin taşınabilmesi için kesinlikle enerjiyi taşıyacak bir ortamın var olması gerekir. Atmosferdeki gazlar yok olsa, rüzgâr ve su yok olsa dalga da olmayacaktır.

Örneğin uzay boşluğunda sesin yayılması ve iletilmesi imkânsızdır. Çünkü sesle elde edilen enerjiyi taşıyacak bir ortam bulunmamaktadır. Ses dalgalarının havada bir yerden başka bir yere gitmesi basınç değişimi ile olur. Basınç değişimi ile ortaya çıkan enerji atmosfer ortamında iletilir. Enerjinin gücüne bağlı olarak etki alanı içerisinde bulunan tüm insanlar sesi duyar. Bu da “*Dalga bir ortam boyunca yayılır.*” savunmasının doğru olduğunu gösterir. Bir ortama gereksinim duymadan dağılabilen dalgalara ise elektromanyetik dalgalar denir.

Elektromanyetik dalga; bir radyo frekans kaynağından elde edilir ve boşlukta yayılır. Normal hayatımızda ne kadar çok ve uzun zamanlı faydalandığımızın farkında bile olmadığımız elektronik cihazlar elektromanyetik alan üretmektedir. Elektronik cihazlardan yaratılan elektromanyetik dalgaların gücü ister büyük, ister küçük olsun, bu dalgalar insan bedeninde etkilere neden olur. Elektromanyetik dalgalar bedendeki hücrelerin ısınıp arttırarak ya da kimyasal farklılaşmalara neden olarak zarar verirler. Büyük güçlü elektromanyetik dalgalar sıcaklığa tabii olarak zarar verirken, küçük güçlü elektromanyetik dalgalara uzun zaman maruz kalınmasıyla dokularda kimyasal değişimler sebebiyle hasarlar ortaya çıkar. Elektromanyetik radyasyonlar boşlukta yer değiştirme niteliğine sahiptir. Bu şekildeki dalgalar dalga boyları ve frekansları ile anlaşılır. Bütün elektromanyetik dalgalar, boşlukta aynı sürede yol alır. Bu hız ışık hızıdır ve saniyede 300.000 kilometredir.

Elektromanyetik dalgaların etkileri virüsler, bitkiler, domuzlar, böcekler, kuşlar ve kurbağalarda kas - sinir ilaçlarında araştırılmıştır. Bu farklı deney hayvanları sayesinde bulunan bilgiler kısa dalgalar ile mikrodalgalar arasındaki frekansa ait olan elektromanyetik dalgaların biyolojik etkilerinin etki alanı ile orantılı, dalga uzunluğu ile ters orantılı olduğunu göstermiştir.

Bir dalgada Şekil 1.1 de görüldüğü gibi tepeye *karın*, vadiye *çukur* ve karınla çukur arasındaki uzunluğa ise *dalga boyu* denir. Bir dalganın normal konumundan yükselme ve alçalma mesafesine ise *genlik* denir.



Şekil 1.1. Dalga Grafiği

Doğrusal (Lineer) dalgalar çoğu zaman bir dalga hareketi ile gider. Bir doğrusal dalganın özellikleri şunlardır:

- Şekliyle hızı genliğine bağlı değildir.
- Birbirinden bağımsız lineer dalgalar bir araya gelince tekrardan lineer dalga oluştururlar.
- Küçük genliğe sahip olan dalgalar lineerdir.
- Genliği yüksek olan dalgalar lineer olmayabilirler. Yer değiştiren bir dalganın şekli olduğu ortama göre farklılık gösterebilir.

Şekil ve hız gibi özellikleri değişmeden yayılan dalgalara *solitary dalgalar* adı verilir. Bu dalgalar herhangi bir çarpışmadan sonra aynı özellikte kalmaya çalışır. Asırlardır solitary dalgalarını belirten matematiksel denklemler ile uğraşılmaktadır. Bu dalgalar karın kısmını dik yapmak için uğraşan dalgalardır. Lineer olmama ve dağılım arasındaki denklik solitary dalgalarını ortaya çıkarır. Solitary dalgalar doğrusal denklemler ile açıklanamaz. Büyük genlikli bir solitary dalgası, küçük genlikli dalgaya göre daha seri bir şekilde yol alır. Bir solitary dalgasının hızı genliği ile doğru orantılı olduğundan normal dalgalardan ayrılır. Ses dalgaları solitary dalgalarından farklıdır. Bunun nedeni alçak ve yüksek sesi aynı anda duymamızdır. Eğer Solitary dalgası olsaydı ilk olarak yüksek sesi sonra da alçak sesi duyardık. Ama bedenimizdeki sinirler arasındaki iletişim solitary dalgalara güzel bir örnektir. Küçük bir ateşe dokunduğumuzda ki tepkimiz ile büyük bir ateşe dokunduğumuzdaki tepkimiz farklıdır. Sinirlerimiz solitary dalgaları ile iletişim kurarlar.

Russell 1834 yılında su dalgalarını bir su kanalında izledikten sonra laboratuvarında su tankları oluşturmuş ve solitary dalgaları elde etmeye çalışmıştır. Bunun sonucunda,

$$c^2 = g.(h + a) \quad (1.1)$$

denklemini elde etmiştir. Bu denklemde c dalga hızını, a dalga genliğini, h derinliği, g de yer çekim ivmesini belirtmektedir.

1965’da Zabusky ile Kruskal solitary dalgaları arasındaki etkileşimi araştırmıştır. Bu araştırma sonucunda şekillerini değiştirmeyen ve karakterlerini küçük parçalarına ileten dalgalara *soliton* dalgaları denilmiştir. Solitonlar şekillerini hep aynı tutarlar ve uzayın bir bölgesinde kısıtlı halledirler.

Soliton çözümleri hem analitik hem de sayısal olarak analiz edildikten sonra, solitonlar hakkındaki çalışmalar daha da çoğalmıştır. Günlük hayatımızda soliton dalgaları akışkanlar mekaniği, lazer fiziği, biyofizik, süper iletkenlik fiziği gibi birçok alanda aktif olarak kullanılmaktadır. Solitonlar bunun dışında uzun mesafeler kat edebildiğinden, teorik olarak bir fiber optikte normal dalga olarak kullanılabilirler. Solitonlar sayesinde, yer değiştiren sinyalde bir yitirilme olmaksızın büyük çoklukta bilgi, binlerce kilometre kadar yer değiştirme yapabilir. Bu nedenle, soliton dalgaları elektronik ve telekomünikasyonda sık kullanılmaktadır. 2006 senesinde Harvard Üniversitesi elektrik mühendisliğinde görevli olan Donhee Ham ve iki öğrencisi David Ricketts ve Xiaofen Li tarafından geliştirilen bir araçla soliton dalgaları üretilmiştir. Bu araç ile normal dalgaların yerine soliton dalgalarının kullanılması kolaylaşmıştır ve yakın zamanda radar, iletişim gibi birçok sektörde kullanılacaktır.

Doğada meydana gelen olayların matematiksel modellenmesi genellikle lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemler ile açıklanır. Bu denklemlerin özellikleri hakkında bilgi veren analitik çözümler büyük bir öneme sahiptir. Bu nedenle son yıllarda özellikle uygulamalı matematik alanında lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin hareket eden dalga çözümleri üzerine çalışmalar yoğunlaşmıştır. Doğrusal olmayan dalga denklemleri, akışkanlar dinamiğinde, kinetikte, plazmalardaki dalgalarda, titreşim problemlerinde ve daha birçok uygulamalı bilim alanlarında aktif rol oynar. Pek çok araştırmacı diferansiyel denklemlerin nümerik ve analitik çözümleri üzerinde çalışmalar yapmıştır. Literatürde bu alanda kullanılan bazı metotlar şunlardır; Optik Çözümler [1], Zayıf Doğrusal Olmayan Dağılım Dalgası [2], Derin Su Dalgaları [3], Yeni Soliton

Çözümleri [4], Çözeltilerin Düzenliliği [5], H1 Çözeltilisinin Boşaltılması [6], Asimptotik Çözüm [7], Optik Türbülans [8], Seri Çözümleri [9], Üstel ve Trigonometrik Olarak Yerleştirilmiş Yöntemler [10], S - Dalgasının Kesin Çözümleri [11], Lineer Olmayan Salınım Teorisi [12], $\exp(-\phi(\xi))$ - Açılım Metodu [13], sine - Gordon Açılım Metodu [14], sinh - Gordon Denklemi [15], Solitonlar ve Tekil Periyodik Çözümler [16], İki Çeşit İlerici Dalga Çözümü [17], Homojen Balans Metodu [18], Bağımlı Değişken Metodu [19], Tanh- Coth Metodu [20], (G'/G) - Açılım Metodu [21], Painleve Açılım Metodu [22], Ters Saçılma Metodu [23], Exp - Function Metodu [24], Homotopi Pertürbasyon Metodu [25-26], İlk İntegral Metodu [27], Adomian Ayırıştırma Metodu [28], Runge Kutta Metodu [29], Varyasyonel İterasyon Metodu [30], Sonlu Farklar Metodu [31-33], Analitik ve Sayısal Yönler [34], Ters Saçılma Dönüşümü [35]. Bu metotların bazıları analitik, bazıları numerik ve bir kısmı da sayısal çözümler vermektedir.

Programlama tekniklerinin kullanılması günümüzde işlem kolaylığı ve zaman tasarrufu sağlamaktadır. Sayısal çözüm teknikleri ile yapılan işlemlerde hata oranı ne kadar küçük olursa fiziksel olayların simülasyonu ve çözümle ilgili yorumlar çok daha sağlıklı yapılabilir. Bu hatalar kesme hatası, bilgisayar veya kullanılan programlama dilinden kaynaklanabilir.

2. TEMEL TANIMLAR

Tanım 2.1. (Diferansiyel denklem) Bir bilinmeyen fonksiyon ve bu fonksiyonun türevlerini içeren denklemlere *diferansiyel denklemler* denir. Denklemden hangi değişkene göre türev alınıyorsa o *bağımsız değişken*, türevi alınan değişkende *bağımlı değişkendir*.

Diferansiyel denklemler üç şekilde elde edilir.

Problem cebirsel özelliklerle anlatılabilir. Örneğin, birbirinden bağımsız n tane keyfi sabit içeren cebirsel bir denklem, düzlemde bir eğri ailesi oluşturur. Böyle bir eğri ailesinin öğelerinin bazı ortak özelliklerini bu keyfi sabitlerin verilen cebirsel denklem ve onun türevleri arasında yok edilmesi ile elde edildiği bilinmektedir. Bu yok etme işleminin sonunda bir diferansiyel denklem elde edilebilmektedir.

Geometrik özellikleri ile problemi tanımlayıp bu özelliklere uyan bir eğrinin bulunması da bize diferansiyel denklem verir. Bilindiği gibi bir eğrinin bir noktadaki teğetinin eğimi o noktadaki türevin değeri ile verilmektedir.

Uygulamalı bilim dallarında ise problemin bir matematiksel modeli elde edilerek olaya veya sisteme karşılık gelen diferansiyel denklem oluşturulabilir.

Bugüne kadar birçok bilim adamı fiziksel olayları modelleyerek birçok diferansiyel denklem oluşturmuşlardır. Modelleme yapılırken olayın fiziksel özellikleri ve birçok fiziksel kanun göz önüne alınmaktadır. Literatürde diferansiyel denklemlerin korunum kanunları adı altında fiziksel özellikleri incelenmektedir. Elde edilen matematiksel modelin çözümleri için birçok metot geliştirilmiştir.

1. Değişkenlerine Ayırma Metodu,
2. Riemann Metodu,
3. D'Alembert Metodu,

gibi klasik metotlar ve diğer özel metotlar kullanılarak çözüm fonksiyonları elde edilebilir

Elde edilen model denklemin ve bu modelin çözümlerinin, modele uygun olup olmadığını Hadamard kuralı ile iyi durumda veya kötü durumda olduğunu test etmek mümkündür. Modeli oluşturan kısmi diferansiyel denklem aşağıda verilen

- Bir çözüm mevcut ise o çözüm tektir.
- Başlangıç ve sınır şartlarının uygun sınırlamalar altında bir çözümü vardır.
- Kararlıdır.

şartlarını sağlıyorsa modele iyi durumludur, aksi takdirde kötü durumludur denir.

Tanım 2.2. (Adi diferansiyel denklem) Bir bağımsız değişken içeren denklemlerdir. n.mertebeden adi diferansiyel denklem şöyledir:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (2.1)$$

Tanım 2.3. (Kısmi diferansiyel denklem) İki veya daha fazla bağımsız değişken bulunduran denklemlerdir.

n.mertebeden kısmi diferansiyel denklem şöyledir:

$$F(x, y, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}) = 0. \quad (2.2)$$

Tanım 2.4. (Lineer olmayan diferansiyel denklem) Bağımlı değişken kendisi veya türevleri ile çarpım ya da bölüm durumunda ise veya bağımlı değişken üstel, trigonometrik ya da logaritmik olarak bulunuyor ise veya bağımlı değişkenin herhangi bir türevinin derecesi iki ve ikiden büyük ise bu tür diferansiyel denklemlere *lineer olmayan diferansiyel denklemler* denir. Bu tanımın tersi durumuna ise *lineer diferansiyel denklemler* denir.

Tanım 2.5. (Dengeleme Terimi) Dengeleme terimi, toplam şeklinde verilen çözüm fonksiyonu üst sınırını temsil etmektedir. Lineer olmayan herhangi bir adi diferansiyel denklemde en yüksek mertebeden lineer olan terim ile en yüksek mertebeden lineer olmayan terim arasında elde edilen sabit bir sayıdır. Lineer olmayan herhangi bir adi diferansiyel denklemde en yüksek mertebeden lineer olan terim $\frac{d^q u}{d\xi^q}$ ve en yüksek mertebeden lineer olmayan terim $u^p \left(\frac{d^r u}{d\xi^r} \right)^s$ şeklinde verilsin. Burada p, q, r, s birer sabit sayı ve m dengeleme terimi olmak üzere

$$m + q = mp + s(m + r), \quad (2.3)$$

eşitliği yazılabilir.

3. MATERYAL VE METOT

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler fizik ve matematikte önemli bir yere sahiptir. Bu denklemler fizik, mekanik, biyoloji, kimya ve mühendislik alanlarında ortaya çıkan olayların matematiksel modelleridir. Bu denklemlerin genel çözümleri fiziksel olayların karakteri hakkında araştırmacılara bilgi verir. Kısmi diferansiyel denklemlerin genel çözümünün elde edilmesinde bilgisayar programlamalarından faydalanılır.

Fiziksel olayların doğasını anlamak için pek çok analitik metot literatüre kazandırılmıştır. Bu metotların bazıları; Bäcklund Dönüşümü [36], Cole - Hopf Dönüşümü [37], Genelleştirilmiş Miura Dönüşümü [38], Ters Saçılma Metodu [39], Darboux Dönüşümü [40], Painleve Analizi [41], Benzerlik İndirgeme Metodu [42], sine – cosine Metodu [43], İlk İntegral Metodu [44], Üstel Fonksiyon Metodu [45]. Bu metotların yanı sıra, keyfi bir adi diferansiyel denklemi göz önüne alınıp bu denklemin çözümlerinden faydalanarak lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümüne ulaşan pek çok metot vardır. Bu metotların bazılarını şöyle sıralayabiliriz. Genişletilmiş Tanh Fonksiyon Metodu [46], Genelleştirilmiş Tanh Fonksiyonu Metodu [47], Jacobi Eliptik Fonksiyon Metodu [48] ve (G'/G) Açılım Metodu [49].

(G'/G) Açılım Metodu ilk olarak Wang [49] tarafından ele alındı. Guo ve Zhou bu metot üzerinde çalışmalar yaparak, genişletilmiş (G'/G) Açılım Metodunu [50] sundular. Daha sonra Li ve arkadaşları ise Geliştirilmiş Genelleştirilmiş (G'/G) Açılım Metodunu [51] incelediler. Ayrıca Yokuş, $(1/G')$ - açılım metodunu ilk olarak literatüre kazandırıp, lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümünde bu yöntemi kullanmıştır [52]. Son zamanlarda ise Li ve arkadaşları (G'/G) açılım metodu üzerine bazı eklemeler yaparak $(G'/G, 1/G')$ açılım metodunu [53] literatüre kazandırdılar. $(G'/G, 1/G')$ açılım metodu araştırmacılar tarafından kullanılarak birçok denkleme uygulanmıştır [54 - 55].

3.1. $(1/G')$ - Açılım Metodu

Bu metodu açıklamak için önce x ve t değişkenlerine bağlı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin genel halini

$$Q(q, q_t, q_x, q_{xx}, \dots) = 0, \quad (3.1)$$

şeklinde ele alalım. Burada $q = q(x, t)$ bilinmeyen bir fonksiyondur, $\xi = x - vt$, $\phi = -kx + \omega t + \theta$ olmak üzere $q(x, t) = u(\xi)e^{I\phi(x, t)} = q$ şeklindedir. Burada v, k, ω sabittir. (3.1) şeklinde verilen kısmi diferansiyel denklem dönüşümler altında;

$$Q'(q', q'', q''', \dots) = 0, \quad (3.2)$$

şeklinde adi diferansiyel denkleme dönüşür. Ayrıca,

$$G'' + \lambda G' + \mu = 0, \quad (3.3)$$

lineer ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemin çözümünü $G = G(\xi)$ şeklinde tanımlayacak olursak (3.2) ile verilen lineer olmayan adi diferansiyel denklemin çözümünü

$$u(\xi) = a_0 + \sum_{p=1}^m a_p \left(\frac{1}{G'} \right)^p, \quad (3.4)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $a_0, a_1, a_2, \dots, \lambda, \mu$ sabitlerdir. m ise dengeleme terimidir. Dengeleme terimi bulunup (3.4) denkleminde yerine yazıldıktan sonra bu çözümün gerekli türevleri alınır. Bu türevlerde $G'' = -\lambda G' - \mu$ dir. $(1/G')$ ye bağlı polinomsal ve homojen bir denklem elde edilir. Burada $(1/G')^p$, $p = 0, 1, 2, \dots$ terimlerinin katsayıları sıfıra eşitlenerek bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözülerek, çözümler (3.4) ile verilen çözüm fonksiyonunda yerlerine yazılır ve (3.1) şeklinde verilen lineer olmayan kısmi diferansiyel denkleminin yürüyen dalga çözümleri elde edilmiş olur.

Ayrıca (3.3) ile verilen ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemin genel çözümünü;

$$G = G(\xi) = -\frac{\mu \xi}{\lambda} - \frac{c_1 e^{-\lambda \xi}}{\lambda} + c_2, \quad (3.5)$$

olarak buluruz. Burada c_1 ve c_2 birer sabittir. (3.5) ile verilen çözüm fonksiyonunun ξ değişkenine göre bir kez türevi alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\frac{1}{G'} = \frac{1}{-\frac{\mu}{\lambda} + c_1 e^{-\lambda \xi}}, \quad (3.6)$$

elde edilir. (3.6) ile verilen cebirsel ifadeyi $c_1 = A$ olmak üzere trigonometrik fonksiyona dönüştürecek olursak;

$$\frac{1}{G'} = \frac{\lambda}{-\mu + \lambda A (\cosh(\xi \lambda) - \sinh(\xi \lambda))}, \quad (3.7)$$

şeklinde yazabiliriz.

4. METODUN UYGULANMASI

Bu bölümde Schrödinger denklemi hakkında bilgi verilecektir. Bir NLS denkleminin $(1/G')$ - açılım metoduyla çözümü üzerine çalışılacaktır.

4.1. NLSE (Nonlinear Schrödinger Equation – Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi)

Lineer olmayan Schrödinger denklemi genel olarak,

$$IU_t + U_{xx} + q|U|^2 U = 0, \quad (4.1)$$

şeklinde ifade edilir. Bu denklemde x ve t indisleri sırasıyla konum ve zamana göre kısmi türevleri göstermekte olup $I = \sqrt{-1}$ ve q reel parametredir.

NLSE, plazmalardaki dalgaları, su dalgalarını, görsel titreşimlerin yayılması gibi pek çok fiziksel olayı tanımlar. Bu denklemi çözmek için birçok yöntem uygulanmıştır. Bu denklem yeterince büyük x 'ler için türevleri göz ardı edilen bir $U(x, t_0)$ başlangıç koşulu kullanılarak ters saçılma metodu ile analitik olarak çözülmüştür [23] - [39]. Bu metot sadece kompakt destekli başlangıç verileri için uygulanabilir olduğundan lineer olmayan Schrödinger denkleminin analitik çözümü genel başlangıç şartları için bilinmemektedir. Adomian Ayrıştırma ve Değişken İterasyon gibi metotlar ile NLSE'nin yaklaşık analitik çözümleri verilmiştir [28].

Son yıllarda lineer olmayan denklemler daha da önemli bir hal aldı. Fizik, Kimya, Biyoloji, Ekonomi gibi birçok alanda ki tabiat olayları lineer olmayan denklemler yardımıyla modellenmektedir. Bunların analizinde bilgisayarların etkisi büyüktür. Bilgisayarlar sayesinde soliton denklemleriyle ilgili önemli bilgiler bulunmuştur.

Soliton denklemi olan NLS denklemi fizikte bazı olayları modellemekte kullanılır. NLS denklemi ile derin su dalgalarının okyanusta dağılmadan uzun mesafeler gitmesinin nasıl mümkün olacağı açıklanır. Soliton teorisi fiber optikte de kullanılır. NLS denklemlerinin akışkanlar dinamiğinde de kullanıldığı bilinmektedir.

Zayıf dalga paketleri için NLS denklemi 1967 de Benney ve Newell tarafından kullanıldı. 1975 de Ablowitz ve L dik integrallenebilir sonlu fark  emalarını NLS denklemi için geliştirdi. 1986 yılında Hersbst ve Weideman NLS denklemi için parçalara ayırma yönteminin analizini yaptı. Bu yöntem NLS denkleminin Hamiltonian yapısını koruyan çok hızlı pseudo - spectral  emadır. Bu yıllarda Overman sine - Gordon denkleminin spektrumunu hesaplayan bilgisayar kodunu yazdı. Bu kod periyodik NLS denkleminin homoclinic yapısı üzerinde çalışmalar yapmak için kullanıldı.

4.2. Lineer Olmayan Schrödinger Denkleminin $(1/G')$ Açılım Metoduyla

Analitik   z m 

Bu bölümde lineer olmayan Schrödinger denklemi olan;

$$Iq_t + \alpha q_{xx} + bq|q|^2 = 0, \quad (4.2)$$

denkleminin $(1/G')$ - açılım metoduyla çözümü verilecektir.

(4.2) denklemini çözmek için denklemde verilenleri bilmemiz gerekir. Ayrı ayrı yazacak olursak denklemde;

$$I = \sqrt{-1}, \quad q(x,t) = u(\xi)e^{I\phi(x,t)}, \quad (4.3)$$

 eklindedir. Burada   z m yapmak için;

$$\xi = x - vt, \quad \phi = -kx + \omega t + \theta, \quad (4.4)$$

alalım. Gerekli türevleri alacak olursak

$$q_t = -vu'e^{I\phi} + I\omega ue^{I\phi}, \quad (4.5)$$

$$q_{xx} = u'' \cdot e^{I\phi} - 2Ik \cdot u' \cdot e^{I\phi} - k^2 \cdot u \cdot e^{I\phi}, \quad (4.6)$$

$$|q|^2 = u^2. \quad (4.7)$$

Bulunan (4.5), (4.6) ve (4.7) denklemlerini (4.2) denkleminde yerine yazalım.

$$I[-vu'e^{I\phi} + I\omega ue^{I\phi}] + \alpha[u''e^{I\phi} - 2Iku'e^{I\phi} - k^2ue^{I\phi}] + bu^3e^{I\phi} = 0. \quad (4.8)$$

Bu denklemi düzenlersek,

$$-Ivu'e^{I\phi} - \omega ue^{I\phi} + \alpha u''e^{I\phi} - I2\alpha ku'e^{I\phi} - \alpha k^2ue^{I\phi} + bu^3e^{I\phi} = 0, \quad (4.9)$$

denklemi elde edilir.

Sadeleştirme sonucunda,

$$-Ivu' - \omega u + \alpha u'' - I2\alpha ku' - \alpha k^2u + bu^3 = 0, \quad (4.10)$$

bulunur. Bu denklemde imajiner ve reel kısımları ayırılım.

$$-Ivu' - 2I\alpha ku' = 0. \quad (4.11)$$

İmajiner kısım olan (4.11) denkleminde gerekli sadeleşmeler yapılırsa,

$$v = -2\alpha k, \quad (4.12)$$

bulunur. Reel kısım ise,

$$(-\alpha k^2 - \omega)u + bu^3 + \alpha u'' = 0, \quad (4.13)$$

olur. (4.13) denkleminde u^3 ile u'' terimleri göz önüne alınırsa dengeleme terimi $m=1$ olarak bulunur. Bu durumda (4.13) ile verilen diferansiyel denklemin çözümü,

$$u(\xi) = a_0 + a_1 \left(\frac{1}{G'} \right), \quad (4.14)$$

şeklinde yazılabilir. (4.14) ile verilen çözüm fonksiyonunun gerekli türevleri alındığında,

$$u^3 = a_0^3 + 3a_0^2a_1 \left(\frac{1}{G'} \right) + 3a_0a_1^2 \left(\frac{1}{G'} \right)^2 + a_1^3 \left(\frac{1}{G'} \right)^3, \quad (4.15)$$

$$u'' = a_1\lambda^2 \left(\frac{1}{G'} \right) + 3a_1\lambda\mu \left(\frac{1}{G'} \right)^2 + 2a_1\mu^2 \left(\frac{1}{G'} \right)^3, \quad (4.16)$$

elde edilir. (4.14), (4.15) ve (4.16) ifadeleri (4.13)'de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} & \left(-\alpha k^2 - \omega\right) \left(a_0 + a_1 \left(\frac{1}{G'}\right)\right) + b \left(a_0^3 + 3a_0^2 a_1 \left(\frac{1}{G'}\right) + 3a_0 a_1^2 \left(\frac{1}{G'}\right)^2 + a_1^3 \left(\frac{1}{G'}\right)^3\right) + \\ & + \alpha \left(a_1 \lambda^2 \left(\frac{1}{G'}\right) + 3a_1 \lambda \mu \left(\frac{1}{G'}\right)^2 + 2a_1 \mu^2 \left(\frac{1}{G'}\right)^3\right) = 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

elde edilir.

Gerekli düzenleme yapılırsa,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{G'}\right)^0 : & -\alpha k^2 a_0 - \omega a_0 + b a_0^3 = 0, \\ \left(\frac{1}{G'}\right)^1 : & -\alpha k^2 a_1 - \omega a_1 + 3b a_0^2 a_1 + \alpha a_1 \lambda^2 = 0, \\ \left(\frac{1}{G'}\right)^2 : & 3b a_0 a_1^2 + 3\alpha a_1 \lambda \mu = 0, \\ \left(\frac{1}{G'}\right)^3 : & b a_1^3 + 2\alpha a_1 \mu^2 = 0, \end{aligned} \quad (4.18)$$

şeklinde denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözülürse,

$$\alpha = -\frac{2\omega}{2k^2 + \lambda^2}, \quad a_0 = \frac{\lambda\sqrt{\omega}}{\sqrt{b(2k^2 + \lambda^2)}}, \quad a_1 = \frac{2\mu\sqrt{\omega}}{\sqrt{b(2k^2 + \lambda^2)}}, \quad (4.19)$$

şeklinde çözüm elde edilir.

Elde edilen (4.19) çözümleri (4.14) denkleminde yerlerine yazılırsa (4.2) şeklinde verilen denkleminin analitik çözümü;

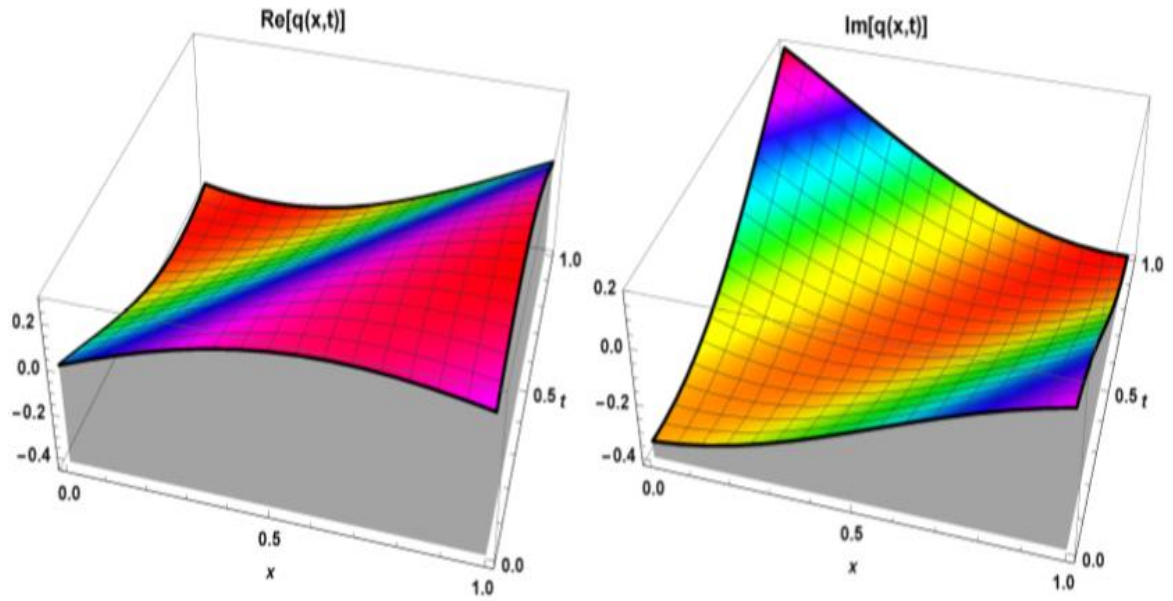
$$\xi = x + 2\alpha kt, \quad (4.20)$$

olmak üzere,

$$u(\xi) = \left[\frac{\lambda\sqrt{\omega}}{\sqrt{b(2k^2 + \lambda^2)}} + \frac{2\mu\lambda\sqrt{\omega}}{\sqrt{b(2k^2 + \lambda^2)}(-\mu + \lambda A(Cosh(\xi\lambda) - Sinh(\xi\lambda)))} \right] e^{I(-kx + \omega t + \theta)}, \quad (4.21)$$

şeklinde bulunur.

Fiziksel olarak tanımlı olan bölgede, lokalize olmayan (non - localized) duran dalgaları temsil eden solitonları sergilemek için (4.21) ile verilen tam karmaşık hareketli dalga çözümünde sabitlere $w=2$, $\lambda=1$, $b=1$, $k=-2$, $\mu=-1$, $A=7$ değerleri verilmiştir. Bu değerler için tam karmaşık hareketli dalga çözümünün grafiğini Şekil 4.1 deki gibi sergileyebiliriz.



Şekil 4.1. $w=2$, $\lambda=1$, $b=1$, $k=-2$, $\mu=-1$, $A=7$ için duran dalgaları temsil eden solitonları sergilemek için (4.21) ile verilen tam karmaşık hareketli dalga çözümü

4.3. Sonlu Farklar Metodunun Lineer Olmayan Schrödinger Denklemine Uygulanması

Sonlu farklar metodunda asıl amaç, ele alınacak olan diferansiyel denklemde bulunan kısmi türevleri, cebirsel olarak inşa etmektir. Bu inşanın temel taşı Taylor Serisi oluşturmaktadır. Bu serinin belli terimde sonrasının ihmal edilmesi (kesilmesi) sayısal yöntemlerin doğasında var olan kesme hatasını oluşturmaktadır. Bu kesme hatasını azaltmak bazı parametrelerin seçimine bağlı olacaktır. Ayrıca kullanılan bilgisayarın özellikleri, paket programın hassasiyeti ve yapılan programdan kaynaklanan bazı hatalar da olabilir. Sonlu farklar metodunu daha iyi anlayabilmek için bazı notasyonlar tanımlayalım.

Bunlardan bazıları:

- $h = \Delta x$, uzaysal adım,
- $m = \Delta t$, zamansal adım,
- $x_i = a + i\Delta x$, $i = 0, 1, 2, \dots, N$,
- $N = \frac{b-a}{\Delta x}$, $t_j = j\Delta t$, $j = 0, 1, 2, \dots, M$ ve $M = \frac{T}{\Delta t}$.
- $u(x, t)$ fonksiyonu $u(x_i, t_j) \cong u_{i,j}$ ifadesindeki çözümün değeridir. Burada $u_{i,j}$ ifadesi $u(x, t)$ noktalarındaki (x_i, t_j) tam değerinin sayısal yaklaşımıdır.

Sonlu fark operatörleri ise;

$$\begin{aligned} W_t q_{i,j} &= q_{i,j+1} - q_{i,j}, \\ W_{xx} q_{i,j} &= q_{i+1,j} - 2q_{i,j} + q_{i-1,j}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

(4.22) ile verilen operatörü kullanarak denklemde bulunan kısmi türevleri cebirsel olarak aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial q}{\partial t} \right|_{i,j} &= \frac{W_t q_{i,j}}{\Delta t} + O(\Delta t), \\ \left. \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \right|_{i,j} &= \frac{W_{xx} q_{i,j}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x^2). \end{aligned} \quad (4.23)$$

(4.23) ile verilen eşitliklerde kesme hatası olarak bilinen $O(\Delta t)$ ve $O(\Delta x^2)$ terimleri ihmal edilirse, $q(x, t) = r(x, t) + Ip(x, t)$ olarak seçilir ve (4.2) denkleminde yerlerine yazılırsa denklem cebirsel olarak

$$I \frac{W_t q_{i,j}}{\Delta t} + \alpha \frac{W_{xx} q_{i,j}}{(\Delta x)^2} + b q_{i,j} |q_{i,j}|^2 = 0, \quad (4.24)$$

şeklinde olur.

(4.22) denklemi (4.24) da yerine yazılırsa,

$$q_{i+1,j} = \frac{-\alpha\Delta t q_{-1+i,j} + 2\alpha\Delta t q_{i,j} - b\Delta t \Delta x^2 |q_{i,j}|^2 q_{i,j} + I(\Delta x^2 q_{i,j} - \Delta x^2 q_{i,1+j})}{\alpha\Delta t}, \quad (4.25)$$

elde edilir.

4.4. Kesme Hatası ve Kararlılık Analizi

Bu kısımda sayısal yöntemlerin doğasında var olan kesme hataları incelenecek ve Von Neumann's Stability analizi yapılacaktır. Burada kesme hatasının oldukça küçük bulunması matematik modelin kararlı olması anlamına gelir. Matematik modelin kararlı olması oluşacak hatanın büyümemesi ve sayısal sonuçların tam çözümden uzaklaşmaması anlamına gelir.

Teorem 4.1. Eğer (4.2) denkleminin sonlu farklar metodundaki kesme hatası E ise $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} E = 0$.

İspat. (4.23) ile verilen eşitlikler (4.2) denkleminde yerlerine yazılırsa indislenmiş denklem aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$I\left(\frac{W_t q_{i,j}}{\Delta t} + O(\Delta t)\right) + \alpha \left(\frac{W_{xx} q_{i,j}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x^2)\right) + b p_{i,j} |p_{i,j}|^2 = 0. \quad (4.26)$$

Ayrıca (4.22) eşitlikleri (4.26) ile verilen denklemde yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa;

$$p_{i+1,j} = \frac{-\alpha\Delta t q_{-1+i,j} + 2\alpha\Delta t q_{i,j} - b\Delta t \Delta x^2 |q_{i,j}|^2 q_{i,j} + I(\Delta x^2 q_{i,j} - \Delta x^2 q_{i,1+j})}{\alpha\Delta t} + \frac{-O(\Delta t)\alpha\Delta t \Delta x^2 + I(-O(\Delta x^2)\Delta t \Delta x^2)}{\alpha\Delta t}, \quad (4.27)$$

(4.27) ile verilen eşitlikte kesme hatası olarak adlandırdığımız terimleri E ile gösterirsek

$$E = \frac{-O(\Delta t)\alpha\Delta t \Delta x^2 + I(-O(\Delta x^2)\Delta t \Delta x^2)}{\alpha\Delta t}, \quad (4.28)$$

şeklinde yazabiliriz. (4.27) denkleminde E ihmal edilirse geriye kalan terimler nümerik değer olacaktır, bu ifade de (4.23) indisel denklemi ile aynı olur. Burada daha açık bir şekilde görmekteyiz ki kesme hatası, uzaysal basamak Δt ve zaman basamağı Δx nin seçimine bağlıdır. Δt ve Δx değerleri ne kadar küçük seçilirse kesme hatası o kadar

küçük olacaktır. Kesme hatasının küçük olması nümerik sonuçların tam çözüme yaklaşması anlamına gelir. Ayrıca E kesme hatasının limit değeri incelendiğinde;

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} E = 0. \quad (4.29)$$

Eğer Δt ve Δx sıfıra $\delta > 0$ yakın bir değer için yapılandırılmışsa, şu eşitsizliğin elde edildiğini görebiliriz. $|E| < \delta$, bu da sonlu fark yönteminin kararlılığını kanıtlar.

Teorem 4.2. Lineer olmayan Schrödinger denklemi için sonlu farklar yöntemi kesin olarak kararlıdır.

İspat. Von Neumann'ın NLSE'nin sonlu farklar yöntemindeki kararlılığını düşünüyoruz.

$$q_{i,j} = q(i\Delta x, j\Delta t) = q(\kappa, \omega) = \varepsilon^\omega e^{I\phi\kappa}, \quad \phi \in [-\pi, \pi], \quad (4.30)$$

$$\kappa = i\Delta x, \quad \omega = j\Delta t \quad \text{ve} \quad I = \sqrt{-1}, \quad (4.31)$$

$$I \frac{W_t q_{i,j}}{\Delta t} + \alpha \frac{W_{xx} q_{i,j}}{(\Delta x)^2} + b(r_{i,j} + ip_{i,j})|q|^2 = 0, \quad (4.32)$$

şeklinde yazabiliriz. Ayrıca (4.22) eşitlikleri (4.30) da yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$X = \frac{\Delta x^2 + \alpha \Delta t \sin(\phi) + \alpha \Delta t \cos(2\phi) \sin(\phi) - \alpha \Delta t \cos(\phi) \sin(2\phi)}{\Delta x^2}, \quad (4.33)$$

$$Y = \frac{\Delta t (-2\alpha + bQ\Delta x^2 + 2\alpha \cos(\phi))}{\Delta x^2}, \quad (4.34)$$

olup $\varepsilon = X + IY$ şeklinde ifade edilir.

$$|\varepsilon|^2 = \frac{6\alpha^2 \Delta t^2 - 4b|q|^2 \alpha \Delta t^2 \Delta x^2 + (1+b^2|q|^4 \Delta t^2) \Delta x^4 + 2\alpha \Delta t^2 (2(-2\alpha + b|q|^2 \Delta x^2) \cos(\phi) + \alpha \cos(2\phi))}{\Delta x^4}. \quad (4.35)$$

Von Neumann'ın Stabilité analizine göre sonlu fark yöntemi $|\varepsilon| \leq 1$ ise sabittir.

Dolayısıyla, sonlu farklar yöntemi NLS denklemiyle şartlı olarak kararlıdır.

4.5. L_2 ve L_∞ Norm Hataları

Sayısal yaklaşımların L_2 ve L_∞ tam yaklaşımlarına ne kadar yakın olduğunu göstermek için norm hataları kullanılır. Norm hatası aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$L_2 = \|u^{exact} - u^{numeric}\|_2 = \sqrt{h \sum_{j=0}^N |u_j^{exact} - u_j^{numeric}|^2}, \quad (4.36)$$

ve L_∞ hata değeri,

$$L_\infty = \|u^{exact} - u^{numeric}\|_\infty = \max_j |u_j^{exact} - u_j^{numeric}|. \quad (4.37)$$

4.6. Nümerik Örnek

Bu bölümde NLS denkleminin sonlu farklar metoduna uygulanışı sunulacaktır. Bölüm 4.3 de sonlu farklar metodunun analizi yapılmıştır. x uzaysal, t zamansal boyu temsil etmektedir. Sayısal yöntemlerde başlangıç şartının sayısal sonuçların elde edilmesinde önemli bir rol oynamakta olup özel olarak (4.19) ile verilen tam karmaşık hareketli dalga çözümünde sabitlere $w=2$, $\lambda=1$, $b=1$, $k=-2$, $\mu=-1$, $A=7$ değerleri verilirse (4.2) denkleminin duran dalgayı temsil eden çözümlerinden biri

$$q(x,t) = e^{i(2t+2x)} \left(-\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3 \left(1 + 7 \cosh\left(\frac{16t}{9} + x\right) - 7 \sinh\left(\frac{16t}{9} + x\right) \right)} \right), \quad (4.38)$$

şeklinde yazılır. (4.38) tam çözümü kullanılarak da başlangıç şartı;

$$q(x,0) = q_0(x) = e^{i(2x)} \left(-\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3(1 + 7 \cosh(x) - 7 \sinh(x))} \right), \quad (4.39)$$

şeklinde yazılabilir. Sonlu farklar metodunun işleyişinde bulunan (4.13) indisel denklemi göz önünde bulundurularak;

$$q_{i+1,j} = -0.000225 \left(4444.44q_{-1+i,j} - 8888.88q_{i,j} - q_{i,j}^3 - (100I)(-q_{i,j} + q_{i,1+j}) \right), \quad (4.40)$$

NLS denkleminin indisel denklemi yazılabilir. (4.38) tam çözümü (4.39) başlangıç şartı ve (4.40) indisel denklemi kullanılarak Tablo 4.1 ve Tablo 4.2'yi oluşturabiliriz.

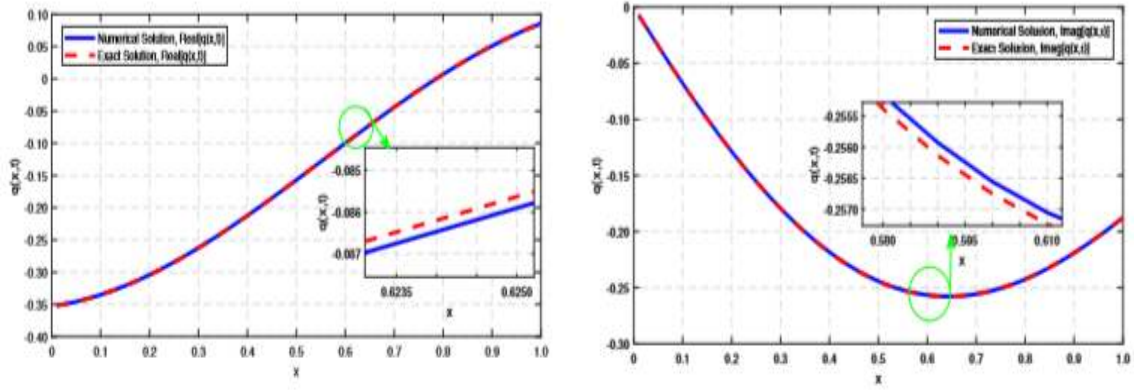
Tablo 4.1. Denklemin (3.1) sayısal ve kesin çözümleri ve $\Delta x = 0.01$ olduğunda mutlak hatalar

x_j	t_j	Sayısal Çözüm	Kesin Çözüm	Mutlak Hata
0.00	0.01	-0.35172-0.00707079i	-0.351638-0.00703369i	$(9.06455).10^{-5}$
0.01	0.01	-0.350443-0.0140609i	-0.350378-0.0140226i	$(7.48351).10^{-5}$
0.02	0.01	-0.349019-0.0210017i	-0.348973-0.0209636i	$(4.64503).10^{-5}$
0.03	0.01	-0.347452-0.0278899i	-0.347423-0.0278533i	$(5.99183).10^{-5}$
0.04	0.01	-0.345741-0.0347224i	-0.345723-0.0346886i	$(3.56854).10^{-5}$

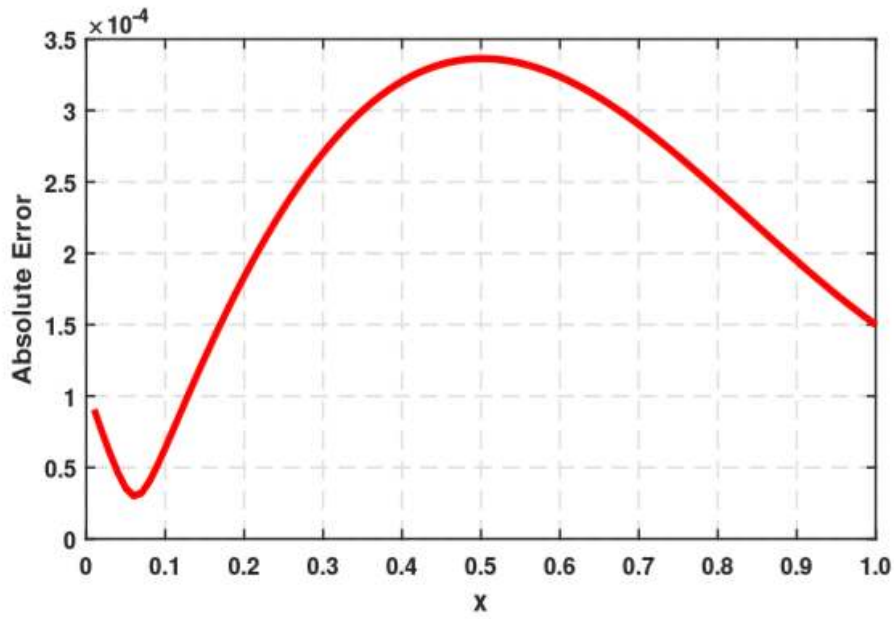
Tablo 4.2. $0 \leq h \leq 1$ ve $0 \leq x \leq 1$ için L_2 ve L_∞ norm hatası

$\Delta x = \Delta t$	L_2	L_∞
0.100	0.0058620200	0.0074750300
0.020	0.0003988260	0.0005216710
0.010	0.0002505860	0.0003363890
0.001	0.0000310757	0.0000410464

Bölüm 4.3 de açıklandığı gibi sayısal çözümlemenin doğasında var olan kesme hatası sonlu farklar metodunda da Δx uzaysal ve Δt zamansal adımların seçimine bağlıdır. Tablo 4.1 ve Tablo 4.2 de görüleceği gibi Δx uzaysal ve Δt zamansal adımları sıfıra yaklaştıkça L_2 ve L_∞ norm hataları sıfıra yaklaşmaktadır. Elde ettiğimiz bu sonuç Teorem 4.1. in doğru olduğunu işaret eder. Ayrıca mutlak L_2 ve L_∞ norm hatalarının küçük olması, elde edilen sayısal sonuçların tam çözüme kararlı bir şekilde yaklaştığını gösterir. Bu durumu görsel olarak Şekil 4.2 ve Şekil 4.3 ile de destekleyebiliriz.



Şekil 4.2. $w=2$, $\lambda=1$, $b=1$, $k=-2$, $\mu=-1$, $A=7$ için duran dalgaları temsil eden solitonları sergilemek için (4.21) ile verilen tam karmaşık hareketli dalga çözümü grafiği



Şekil 4.3. Sonlu farklar yöntemi için (4.2) denkleminin sayısal çözümü

5. SONUÇ

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin dalga çözümlerini elde etmek için öncelikle denklem, belli dönüşüm altında tek değişkenli lineer adi diferansiyel denkleme getirilerek bu denklemin çözüm fonksiyonundan yararlanarak istenilen analitik çözüme gidilir. Bu metotların birbirlerinden farklı olan yanı dönüşüm yaparken seçilen Riccati diferansiyel denkleminin ve dolayısıyla kullanılan çözüm fonksiyonunun farklı olmasıdır. Bunun yanında; bazı metotlarda daha farklı adi diferansiyel denklemler alınarak çözüme ulaşılmıştır. Metotların hepsi lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin hareket eden dalga çözümlerini verir.

Bu çalışmada bir $(1/G')$ – açılım metodu inşa edildi. Biz bu metodu lineer olmayan Schrödinger denkleminin yürüyen dalga çözümünü bulmak için uyguladık. Normalde lineer olmayan Schrödinger denkleminin (G'/G) - açılım metodu ile analitik çözümü elde edilemeyeceğini ancak $(1/G')$ - açılım metodu ile analitik çözümlerin elde edilebileceğini açıkça gördük. İşlem yoğunluğu açısından da bu metodun diğer metoda göre daha avantajlı olduğunu gözlemledik.

Sayısal yöntemlerin içeriğinde var olan kesme hatalarını inceleyerek Von Neumann's Stability analizini yaptık. Kesme hatasının oldukça küçük bulunması matematik modelin kararlı olması anlamına gelir. Matematik modelin kararlı olması oluşacak hatanın büyümemesi ve sayısal sonuçların tam çözümden uzaklaşmaması demektir. Biz de sayısal yaklaşımların L_2 ve L_∞ tam yaklaşımlarına ne kadar yakın olduğunu norm hataları kullanarak gösterdik ve bunun doğruluğunu verdiğimiz nümerik bir örnek ile kanıtladık.

Açılım metodu ile elde edilen çözümlerin yürüyen dalga davranışlarını sergilediklerini grafiksel olarak gösterdik. Günümüzde popülerliğini koruyan bu alandaki çalışmaların yoğunlaşarak devam edeceğini düşünmekteyiz. Bu çalışmanın devamında elde edilen çözüm fonksiyonların asimptotik davranışları farklı alanlardaki çalışmalara ışık tutması açısından ilginç olabilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Taylor, J.R.**, 1992. Optical solitons: theory and experiment, (Vol. 10), Cambridge: Cambridge University Press.
- [2] **Sulem, C., Sulem, P. L.**, 2007. The nonlinear Schrödinger equation: self-focusing and wave collapse, (Vol. 139), Springer Science & Business Media.
- [3] **Dysthe, K. B.**, 1979. Note on a modification to the nonlinear Schrödinger equation for application to deep water waves, Proc. R. Soc. Lond. A, 369(1736), 105-114.
- [4] **Serkin, V.N., Hasegawa, A.**, 2000. Novel soliton solutions of the nonlinear Schrödinger equation model, Physical Review Letters, 85(21), 4502.
- [5] **Sjölin, P.**, 1987. Regularity of solutions to the Schrödinger equation. Duke mathematical journal, 55 (3), 699 - 715.
- [6] **Ogawa, T., Tsutsumi, Y.**, 1991. Blow-up of H1 solution for the nonlinear Schrödinger equation, Journal of Differential Equations, 92 (2), 317 - 330.
- [7] **Alt, E.O., Mukhamedzhanov, A.M.**, 1993. Asymptotic solution of the Schrödinger equation for three charged particles, Physical Review A, 47 (3), 2004.
- [8] **Dyachenko, S., Newell, A.C., Pushkarev, A., Zakharov, V.E.**, 1992. Optical turbulence: weak turbulence, condensates and collapsing filaments in the nonlinear Schrödinger equation, Physica D: Nonlinear Phenomena, 57 (1-2), 96 - 160.
- [9] **Yu, J., Dong, S. H., Sun, G.H.**, 2004. Series solutions of the Schrödinger equation with position-dependent mass for the Morse potential, Physics Letters A, 322 (5-6), 290 - 297.
- [10] **Simos, T.E.**, 2010. Exponentially and trigonometrically fitted methods for the solution of the Schrödinger equation, Acta Applicandae Mathematicae, 110(3), 1331-1352.
- [11] **Dong, S.H., Garcia-Ravelo, J.**, 2007. Exact solutions of the s-wave Schrödinger equation with Manning–Rosen potential, Physica Scripta, 75(3), 307.
- [12] **Pelinovsky, D.E., Afanasjev, V.V., Kivshar, Y.S.**, 1996. Nonlinear theory of oscillating, decaying, and collapsing solitons in the generalized nonlinear Schrödinger equation, Physical Review E, 53(2), 1940.
- [13] **Eslami, M., Neirameh, A.**, 2018. New exact solutions for higher order nonlinear Schrödinger equation in optical fibers, Optical and Quantum Electronics, 50 (1), 47.
- [14] **Bulut, H., Sulaiman, T.A., Demirdag, B.**, 2018. Dynamics of soliton solutions in the chiral nonlinear Schrödinger equations, Nonlinear Dynamics, 91(3), 1985 - 1991.
- [15] **Esen, A., Sulaiman, T.A., Bulut, H., Baskonus, H.M.**, 2018. Optical solitons to the space-time fractional (1+1)-dimensional coupled nonlinear Schrödinger equation, Optik, 167, 150-156.

- [16] **Eslami, M.**, 2016. Trial solution technique to chiral nonlinear Schrodinger's equation in (1+2)-dimensions, *Nonlinear Dynamics*, 85(2), 813-816.
- [17] **Nishino, A., Umeno, Y., Wadati, M.**, 1998. Chiral nonlinear Schrödinger equation, *Chaos, Solitons & Fractals*, 9(7), 1063-1069.
- [18] **Lan, H., Wang, K.**, 1990. Exact solutions for two nonlinear equations, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 23, 3923-3928.
- [19] **Hu, X.B., Ma, W.X.**, 2002. Application of Hirota's bilinear formalism to the Toeplitz lattice-some special soliton-like solutions, *Physics Letters A*, 293, 161-165.
- [20] **Wawaz, A.M.**, 2007. The tanh-coth method for solitons and kink solutions for nonlinear parabolic equations, *Appl. Math. Comput.*, 188(2), 1467 – 1475.
- [21] **Yokuş, A.**, 2015. An Expansion Method for Finding Wave solutions to nonlinear, *İstanbul Ticaret Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi* Yıl: 14, Sayı:27, 65-80.
- [22] **Cariello, F., Tabor, M.**, 1989. Painleve expansions for non integrable evolution equations, *Physica D*, 39, 77-94.
- [23] **Drazin, P.G., Jhonson, R.S.**, 1989. *Solitons: An Introduction*, Cambridge : Cambridge University Press.
- [24] **Noor, M.A., Noor, K.I., Waheed, A., Al-Said, E.A.**, 2011. Some new solitary solutions of the modified Benjamin–Bona–Mahony equation, *Comput. Math.*, 62, 2126 – 2131.
- [25] **Imed, G.**, 2006. Numerical solution of the (2 + 1)-dimensional Boussinesq equation with initial condition by homotopy perturbation method, *Lett. Math. Phys.*, 76 (2), 249–267.
- [26] **Ayati, Z., Biazar, J., Ebrahimi, S.**, 2014. A new homotopy perturbation method for solving linear and nonlinear Schrödinger equations, *Journal of Interpolation and Approximation in Scientific Computing*, 1-8.
- [27] **Bekir, A., Güner Ö., Ünsal, Ö.**, 2015. The First integral method for exact solutions of nonlinear fractional differential equations, *Journal of Computational and Nonlinear Dyn.*, 10 (2), 021020.
- [28] **Babolian, E., Vahidi, A.R., Shoja, A.**, 2014. An efficient method for nonlinear fractional differential equations: combination of the Adomian decomposition method and spectral method, *Indian J. Pure Appl. Math.*, 45(6), 1017.
- [29] **Kalogiratou, Z., Monovasilis, T., Simos, T. E.**, 2010. New modified Runge–Kutta–Nyström methods for the numerical integration of the Schrödinger equation, *Computers & Mathematics with Applications*, 60(6), 1639-1647.
- [30] **Miansari, M., Barari, A., Mirgolbabaei, H., Vahdatirad, M.J.**, 2009. An approximate solution for different types of wave problems, *sdu journal of science (E-JOURNAL)*, 4(2), 189-198.

- [31] **Hosseini, F., Pouyafar, V., Sadough, S. A.,** 2009. Finite-difference solutions of a non-linear Schrödinger. In Proceedings of the 11th WSEAS international conference on Mathematical and computational methods in science and engineering (pp. 92-97), World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS).
- [32] **Taha, T. R., Ablowitz, M. I.,** 1984. Analytical and numerical aspects of certain nonlinear evolution equations. II. Numerical, nonlinear Schrödinger equation, Journal of Computational Physics, 55(2), 203-230.
- [33] **Delfour, M., Fortin, M., Payr, G.,** 1981. Finite-difference solutions of a non-linear Schrödinger equation, Journal of computational physics, 44(2), 277-288.
- [34] **Simos, T. E., Williams, P. S.,** 1999. On finite difference methods for the solution of the Schrödinger equation, Computers & chemistry, 23(6), 513-554.
- [35] **Taha, T. R.,** 1990. Numerical simulation of the nonlinear Schrödinger equation, Mathematics and Computers in Simulation, 32(3), 309-312.
- [36] **Zhao, Z., Zhang, Y., Rui, W.,** 2014. Bäcklund transformation and solutions of a $(3+1)$ - dimensional nonlinear evolution equation, Applied Mathematics and Computation, 248, 456-462.
- [37] **Jordan, P.M.,** 2010. On the application of the Cole–Hopf transformation to hyperbolic equations based on second-sound models, Mathematics and Computers in Simulation, 81, 18-25.
- [38] **Xifang, C., Hongyou, W., Chuanyou, X.,** 2006. On Miura transformation among nonlinear partial differential equations, Journal of Mathematical Physics, 47, 083515-19.
- [39] **Demontis, F., Prinari, B., van der Mee, C.,** 2014. The inverse scattering transform for the focusing nonlinear Schrödinger equation with asymptotic boundary conditions, Journal of Mathematical Physics, 55, 101505.
- [40] **Yilmaz, H.,** 2015. Exact solutions of the Gerdjikov-Ivanov equation using Darboux transformations, Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 22, 32 - 46.
- [41] **Kumar, V., Gupta, R.K., Jiwari, R.,** 2013. Painlevé Analysis, Lie Symmetries and Exact Solutions for Variable Coefficients Benjamin – Bona-Mahony-Burger (BBMB) Equation, Communications in Theoretical Physics, 60, 175.
- [42] **Inan, I.E., Kaya, D., Ugurlu, Y.,** 2010. Auto-Bäcklund transformation and similarity reductions for coupled Burger's equation, Applied Mathematics and Computation, 216, 2507 - 2511.
- [43] **Taşcan, F., Bekir, A.,** 2009. Analytic solutions of the $(2 + 1)$ -dimensional nonlinear evolution equation using the sine – cosine method, Applied Mathematics and Computation, 215, 3134 - 3139.
- [44] **Eslami, M., Mirzazadeh, M.,** 2014. First integral method to look for exact solutions of a variety of Boussinesq-like equations, Ocean Engineering, 83, 133 - 137.

- [45] **He, J.H., Wu, X.H.**, 2006. Exp-function method for nonlinear wave equations, Chaos, Solitons&Fractals, 30, 700 - 708.
- [46] **Fan, E.**, 2000. Extended tanh - function method and its applications To nonlinear equations, Physics Letters A, 277, 212 - 218.
- [47] **Chen, H., Zhang, H.**, 2004. New multiple soliton solution stothe general Burgers – Fisher equation and the Kuramoto – Sivashinsky equation, Chaos, Solitons Fractals, 19, 71 - 76.
- [48] **Fu, Z., Liu, S., Zhao, Q.**, 2001. New Jacobi elliptic function expansion and new periodic solutions of nonlinear wave equations, Physics Letters A, 290, 72 - 76.
- [49] **Wang, M., Li, X., Zhang, J.**, 2008. The G'/G - expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations, in mathematical physics, Physics Letters A, 372, 417 -423.
- [50] **Guo, S., Zhou, Y.**, 2010. The extended G'/G - expansion method and its applications to the Whitham–Broer–Kaup–Like equations and coupled Hirota–Satsuma KdV equations, Applied Mathematics and Computation, 215, 3214 - 3221.
- [51] **Lü, H.L., Liu, X.Q., Niu, L.**, 2010. A generalized G'/G - expansion method and its applications to nonlinear evolution equations, Applied Mathematics and Computation, 215, 3811 - 3816.
- [52] **Yokuş, A.**, 2011. Bazı özel lineer olmayan diferensiyel denklemlerin çözümlerinin elde edilmesi ve bu çözümlerin karşılaştırılması, Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- [53] **Inan, I.E., Ugurlu, Y., Inc, M.**, 2015. New Applications of the $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$ -Expansion Method, Acta Physica Polonica A, 128 (3), 245-251.
- [54] **Demiray, S., Unsal, O., Bekir, A.**, 2014. New Exact Solutions for Boussinesq Type Equations by using $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$ and $(1/G')$ - Expansion Methods, Acta Physica Polonica A, 125 (5), 1093-1098.
- [55] **Zayed, E.M.E., Alurffi, K.A.E.**, 2014. The $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$ - Expansion Method and its Applications to Find the Exact Solutions of Nonlinear PDEs for Nanobio sciences, Mathematica Problems In Engineering, 521712 - 10.

ÖZGEÇMİŞ

1990 Elazığ doğumluyum. İlköğretimi Elazığ Namık Kemal İlköğretim Okulu'nda, liseyi Elazığ Mehmet Akif Ersoy Lisesi'nde tamamladım. 2008 yılında Fırat Üniversitesi Matematik Bölümünü kazandım ve 2012 yılında lisans eğitimimi tamamladım. 2013 yılında Bingöl Rekabet Kurumu Anadolu Lisesi'ne Matematik Öğretmeni olarak atandım ve halen devam etmekteyim. 2016 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisansa başladım ve halen devam etmekteyim. 2018 yılında İnönü Üniversitesi Hukuk Fakültesi'ni kazandım ve halen devam etmekteyim. Evliyim.

