

**T.C.**  
**FIRAT ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



**BAZI LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERENSİYEL**  
**DENKLEMLERİN HAREKET EDEN DALGA ÇÖZÜMLERİNİN**  
**BULUNMASI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Sedat BULUT**

**Anabilim Dalı: Matematik**  
**Programı: Uygulamalı Matematik**  
**Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Münevver TUZ**

**Temmuz - 2019**

T.C.  
FIRAT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BAZI LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN  
HAREKET EDEN DALGA ÇÖZÜMLERİNİN BULUNMASI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**  
**Sedat BULUT**

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 26/05/2019

Tezin Savunulduğu Tarih : 01/07/2019

|                      |                                     |                                                                                       |
|----------------------|-------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| Tez Danışmanı :      | Dr. Öğrt. Üyesi Münevver TUZ (F.Ü.) |  |
| Diğer Jüri Üyeleri : | Dr. Öğrt. Üyesi Asif YOKUŞ (F.Ü.)   |  |
|                      | Dr. Öğrt. Üyesi Keziban TAŞ (M.Ü.)  |  |

TEMMUZ - 2019

## ÖNSÖZ

Bu çalışmanın her aşamasında benden destek ve ilgilerini esirgemeyen, bilgi ve hoşgörülerinden yararlandığım değerli hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Münevver TUZ'a, sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmalarım süresince her zaman yanımda olan, bana her türlü desteğini veren değerli dostum Said Hulusi MİRZE'ye ve hayatım boyunca haklarını ödeyemeyeceğim sevgili aileme teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

**Sedat BULUT**  
**ELAZIĞ - 2019**

## İÇİNDEKİLER

### Sayfa No

|                                                                              |     |
|------------------------------------------------------------------------------|-----|
| ÖNSÖZ .....                                                                  | I   |
| İÇİNDEKİLER.....                                                             | II  |
| ÖZET .....                                                                   | III |
| SUMMARY .....                                                                | IV  |
| ŞEKİLLER LİSTESİ .....                                                       | V   |
| 1. GİRİŞ .....                                                               | 1   |
| 2. TEMEL TANIMLAR.....                                                       | 5   |
| 3. MATERYAL VE METOT.....                                                    | 7   |
| 3.1. $G'G$ - Açılım Metodu .....                                             | 8   |
| 3.2. $G'G, 1G$ - Açılım Metodu.....                                          | 13  |
| 4. METODLARIN UYGULANMASI .....                                              | 17  |
| 4.1. Burgers Benzeri Denklemine $G'G$ - Açılım Metodunun Uygulanması .....   | 17  |
| 4.2. Tipik Kırılma Denklemine $G'G, 1G$ - Açılım Metodunun Uygulanması ..... | 22  |
| 4.3. Burger-Huxley Denklemine $G'G, 1G$ - Açılım Metodunun Uygulanması.....  | 26  |
| 5. SONUÇ .....                                                               | 30  |
| KAYNAKLAR.....                                                               | 31  |
| ÖZGEÇMİŞ .....                                                               | 34  |

## ÖZET

Bu çalışma dört bölümden oluşturulmuştur.

Birinci bölümde dalga kavramı hakkında detaylı bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde kullandığımız metot olan  $\left(\frac{G'}{G}\right)$  ve  $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$  açılım metotları hakkında bilgi verilmiştir. Bu metotlar kullanılarak genel çözümünün nasıl elde edildiği gösterilmiştir.

Üçüncü bölümde,  $\left(\frac{G'}{G}\right)$  ve  $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$  açılım metotları kullanılarak bazı lineer olmayan denklemlerin hareket eden dalga çözümleri elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde ise tez sonuçları yazılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Dalga, Lineer Olmayan Denklemler, Kısmi Diferensiyel Denklemler, Dalga Çözümleri

## SUMMARY

### Finding Moving Wave Solutions of Some Nonlinear Partial Differential Equations

This study is composed of four parts.

In the first chapter, detailed information about the wave concept is given.

In the second part, the information is given about  $\left(\frac{G'}{G}\right)$  and  $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$  expansion methods we used. It has been shown how to obtain the general solution of these methods.

In the third chapter, the moving wave solutions of some nonlinear equations are obtained by using the expansion methods of  $\left(\frac{G'}{G}\right)$  and  $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$ .

In the fourth chapter, the results of the thesis were written.

**Key Words:** Wave, Nonlinear Equations, Partial Differential Equations, Wave Solutions

## ŞEKİLLER LİSTESİ

### Sayfa No

|            |                                                                                                                                            |    |
|------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Şekil 1.1. | Periyodik doğrusal bir dalga.....                                                                                                          | 1  |
| Şekil 1.2. | Bir solitary dalga.....                                                                                                                    | 2  |
| Şekil 1.3. | İki soliton etkileşimi .....                                                                                                               | 4  |
| Şekil 4.1. | (4.1) denkleminin (4.6) çözümünün üç boyutlu grafiği ( $A = 0$ , $B = 1$ , $\lambda = 1$ , $\mu = -1$ ).....                               | 20 |
| Şekil 4.2. | (4.1) denkleminin (4.6) çözümünün iki boyutlu grafiği ( $A = 0$ , $B = 1$ , $\lambda = 1$ , $\mu = -1$ ).....                              | 20 |
| Şekil 4.3. | (4.1) denkleminin (4.8) çözümünün üç boyutlu grafiği a) Reel Kısım b) Sanal Kısım ( $A = 0$ , $B = 1$ , $\lambda = 1$ , $\mu = 1$ ) .....  | 21 |
| Şekil 4.4. | (4.1) denkleminin (4.8) çözümünün iki boyutlu grafiği a) reel kısım b) sanal kısım ( $A = 0$ , $B = 1$ , $\lambda = 1$ , $\mu = 1$ ) ..... | 22 |
| Şekil 4.5. | (4.1) denkleminin (4.10) çözümünün üç boyutlu grafiği ( $A = 1$ , $B = 1$ , $\lambda = 2$ , $\mu = 1$ ).....                               | 22 |
| Şekil 4.6. | (4.1) denkleminin (4.10) çözümünün iki boyutlu grafiği ( $A = 1$ , $B = 1$ , $\lambda = 2$ , $\mu = 1$ ).....                              | 22 |

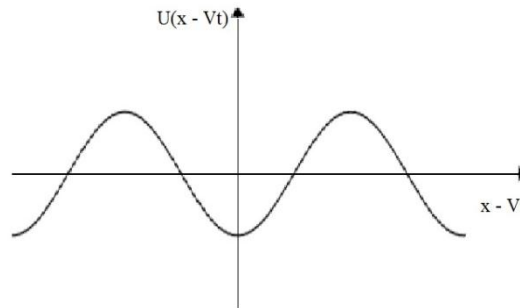
## 1. GİRİŞ

Lineer denklemler farklı olayları tanımlamak için yıllardır kullanılmaktadır. Örneğin; Newton, Maxwell ve Schrödinger denklemleri lineer denklemlerdir ve bu denklemler dış etkenlerin sisteme sadece doğrusal bir etkisini göz önünde bulundurlar. Ancak birçok sistem lineer değildir. Teorik modellerin çoğunluğu halen doğrusal tanımlamalara dayanmaktadır. Doğrusal olmayan yapılar küçük müdahaleler ile düzeltilmektedir. Bu yaklaşımın kesin olarak yanlış olduğu bilinmektedir. Doğrusal yaklaşım sistemin bazı temel davranışlarını tam olarak belirtmeyebilir.

Doğrusal olmayanlığın, uyarılmalar değiştikçe niteliksel olarak değişen eşikler ile çoklu kararlılık ve olay ile bir alakası yoktur. Doğrusal bir sistemde iki farklı sebebin birlikte hareketinin bir etkisi, bireysel olarak bu etkilerin her birinin üst üste eklenmesidir. Ancak doğrusal olmayan sistemlerde iki temel hareketin birbirine eklenmesi, oluşan parçaların işbirliğini yansıtan yeni etkilere sebep olabilir. Doğrusal olmayanlığı anlamak için ilk önce doğrusallığı anlamak gerekir. Doğrusal dalgaları göz önüne alalım. Genellikle, bir dalga hareketi esnasında ilerlemesi ile bilinir. Herhangi bir lineer dalganın karakteristik özellikleri şunlardır:

- i) Doğrusal bir dalganın şekli ve hızı genliğinden bağımsızdır.
- ii) İki doğrusal dalganın toplamı yine bir doğrusal dalgadır
- iii) Küçük genlikli dalgalar doğrusaldır.

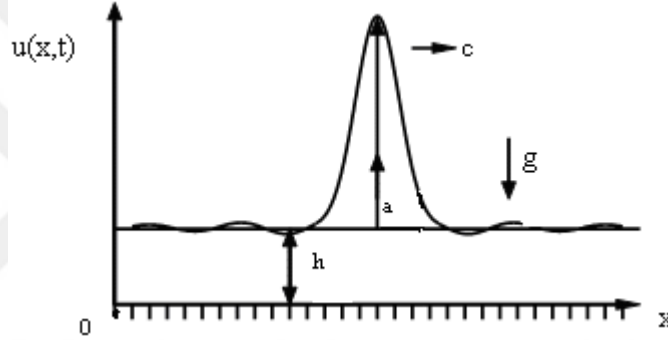
Şekil 1.1. periyodik doğrusal bir dalgayı göstermektedir.



Şekil 1.1. Periyodik doğrusal bir dalga

Yüksek genlikli dalgalar doğrusal olmayan dalgalar haline gelebilir. Ortamda hareket eden bir dalganın akıbeti ortamın özellikleri ile belirlenir. Büyük genlikli dalgaların şeklinin bozulmasının doğrusal olmayan sonuçlarına örnek olarak türbülans verilebilir. Ancak bir başka bozulma kaynağı da dalganın dağılımıdır.

Yüz yıldan daha aşkın bir süredir solitary dalgaları tanımlayan matematiksel denklemler çözülmektedir. Şekil 1.2’den de görüldüğü gibi solitary dalgalar, dağılım ve doğrusal olmayanlığın etkileri arasındaki küçük bir denge sayesinde oluşmaktadır. Doğrusal olmayanlık, Şekil 1.2’de görüldüğü gibi dağılımı düzleştiren tepeyi dik yapma eğilimindedir.



Şekil 1.2. Bir solitary dalga

Solitary dalgalar bu iki tehlike ve yıkıcı kuvvetler arasında yaşar. Buna göre, lineer olmayanlık ve dağılım arasındaki denge, solitary dalgaların varlığını ortaya koyar. Solitary dalgalar ve solitonlar lineer denklemler kullanılarak tanımlanamaz. Bir su yüzeyindeki yükselmelerin ve çukurların periyodik olarak tekrarlanmasını temsil eden veya yoğunluğun sıklaşması ve seyrelmesini temsil eden sıradan dalgalardan farklı olarak solitonlar, belirli bir hız ile kendine özgü hareket eden tek yükseltilerdir. Solitonların hareketi ve dönüşümü matematiksel fiziğin doğrusal olmayan denklemleri ile tanımlanır. Solitary dalgaların ve solitonların tarihi çok ilginçtir. Solitary dalgaların ilk bilimsel gözlemi su yüzeyi üzerinde 1834 yılında Russell tarafından yapılmıştır. Russell gözlemini şu şekilde açıklamıştır:

“Ben çift beygir gücüyle giden bir botun, dar bir kanaldan geçerken hareketini gözlemliyordum. Bot aniden durunca kanalda hareketli olan su kütleinin botun uç kısmının etrafında biriktiğini gördüm. Daha sonra bu su kütlesi arkaya doğru yayıldı. Büyük bir hızla öne doğru tek başına bir su dalgasının meydana geldiğini fark ettim. Bu

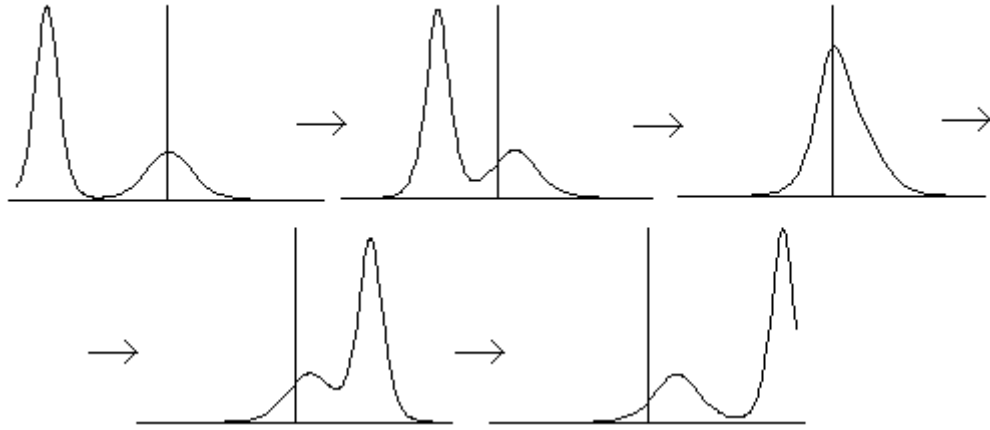
yuvarlanmış su kütlesinin hızının azalmadan ve formunu değiştirmeden kanal boyunca ilerleyişine devam ettiğini gördüm. Onu at sırtında takip ettim. Ona yetiştiğim zaman saatte yaklaşık 8–9 mil hızla ilerlediğini gördüm. Onu 1–2 mil takip ettikten sonra kanalın dönüşünde kaybettim. Böylece 1834’ün Ağustos ayında Translasyon Dalgası olarak adlandırdığım ilk görüşümü tanıtma şansım oldu” [1]. Dikkate değer bu keşif, solitary dalgaları çalışmak ve fiziksel laboratuvar deneylerini yapmak için Russell’i motive etmiştir. Russell, deneysel olarak

$$c^2 = g(h + a) \quad (1.1)$$

ilişkisini ortaya çıkarmıştır. Burada Şekil 1.2’ de görüldüğü gibi  $c$  solitary dalganın hızı,  $a$  su yüzeyi üzerinde dalganın genliği,  $h$  sonlu bir derinliği ve  $g$  yerçekimi ivmesini göstermektedir. Solitary dalgalar bundan dolayı yerçekimi dalgaları olarak da adlandırılır.

Solitary dalgaları tanımlayan ilk matematiksel denklemler 1895 yılında formüle edildi. 1960’lı yıllara kadar solitary dalgalar gereken ilgiyi görmemiştir. Ancak 1965 yılında Zabusky ve Kruskal [2] solitary dalgaların birbirleriyle etkileşimini incelemişlerdir. Zabusky ve Kruskal, KdV denklemi için yaptıkları sayısal çalışmalar ve bu denklemin integrallenebileceğini göstermeleri ile solitary dalgalara olan ilgiyi tekrar arttırmışlardır. Aynı yıl içerisinde Zabusky ve Kruskal, solitary dalgaların birbirleriyle etkileşim içinde olduğunu keşfetmişlerdir. Bunlara ilaveten, şeklini ve genliğini muhafaza eden bu dalgalar bu etkileşimden ortaya çıktığı gözlemlenmiştir. Kimliklerini koruyan ve karakterlerini küçük parçalarına aktarabilen solitary dalgaların keşfi, Zabusky ve Kruskal’ı bu solitary dalgalara solitonlar demek için cesaretlendirmiştir. Bu bilim adamları, solitonlar kavramının doğuşuna damgalarını vurmuşlardır. 1965 yılından sonra fark edildi ki, su yüzeyindeki, nabız atışlarındaki, girdaplardaki kasırgalardaki ve benzer kategoriye giren pek çok olaydaki solitary dalgalar aslında solitonlardır. Şekil 1.3’te görüldüğü gibi çarpışma esnasında şekillerini koruyan solitary dalgalara *solitonlar* denir. Solitonların en önemli özelliklerinden biri bir parçacık gibi davranırlar. Solitonların diğer önemli özellikleri şunlardır:

- i) Şekil değiştirmezler.
- ii) Uzayın bir bölgesinde sınırlıdır.
- iii) Diğer solitonlar ile etkileşime girdikten sonra şekillerini muhafaza ederler.



**Şekil 1.3.** İki soliton etkileşimi

Matematiksel olarak solitonlar ve solitary dalgalar arasında bir fark vardır. Solitary dalgalar integrallenemeyen denklemlerin sınırlandırılmış çözümleri iken, solitonlar integrallenebilen denklemlerin sınırlandırılmış çözümleridir. Solitonların bir başka karakteristik özelliği ise, diğer solitonlar ile çarpıştıktan sonra bozulmayan solitary dalgalardır. Kasırgalar ve girdaplar gibi solitary dalgaları dalgalar olarak göz önüne almak zordur. Bunun sebebi, bu dalgalar bazen soliton - like uyarılmaları olarak adlandırılır. Bu ifadeden kaçınmak için genellikle bütün durumlarda soliton terimi kullanılır.

## 2. TEMEL TANIMLAR

**Tanım 2.1. (Diferansiyel denklem)** Bir bilinmeyen fonksiyon ve bu fonksiyonun muhtelif türevlerini içeren matematiksel denklemlere *diferansiyel denklemler* denir. Bir denklemde belirli bir değişkene göre türev alınıyorsa, o değişkene *bağımsız değişken*, denklemde türevi alınan değişkene ise *bağımlı değişken* denir.

**Tanım 2.2. (Adi diferansiyel denklem)** Bir tek bağımsız değişken içeren diferansiyel denkleme *adi diferansiyel denklem* denir ve genel olarak *n. mertebeden adi bir diferansiyel denklem*;

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (2.1)$$

şeklinde gösterilir.

**Tanım 2.3. (Kısmi diferansiyel denklem)** İki veya daha fazla bağımsız değişken ihtiva eden diferansiyel denkleme *kısmi diferansiyel denklem* denir ve *n. mertebeden bir kısmi diferansiyel denklem*

$$F\left(x, y, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right) = 0 \quad (2.2)$$

olarak yazılır.

**Tanım 2.4. (Lineer olmayan diferansiyel denklem)** Bir diferansiyel denklemde bağımlı değişken kendisi veya türevleri ile çarpım ya da bölüm durumunda ise veya bağımlı değişken üstel, trigonometrik ya da logaritmik olarak bulunuyor ise veya bağımlı değişkenin herhangi bir türevinin derecesi iki ve ikiden büyük ise bu tür diferansiyel denklemlere *lineer olmayan diferansiyel denklem* denir. Aksi durumda denklem lineerdir denir.

**Tanım 2.5.** Bir  $a < x < b$  aralığında tanımlı bir  $\Phi$  fonksiyonu  $a < x < b$  aralığında bulunan her  $x$  için tanımlı ve ilk *n. mertebeden türevelere sahip fonksiyonu*

$$F(x, \Phi(x), \Phi'(x), \dots, \Phi^{(n)}) = 0, \quad (2.3)$$

ise  $\Phi$  fonksiyonuna (2.1) denkleminin *çözümüdür* denir. Bir adi diferansiyel denklemin genel çözümü, diferansiyel denklemin mertebesi kadar keyfi sabit içerir. Çözüm

fonksiyonundaki sabitlere verilen her bir değere karşılık bulunan çözüme de *özel çözüm* denir. Bir adi diferensiyel denklemin çözümü eğri ailesine karşılık gelmesine karşın, bir kısmi diferensiyel denklemin çözümü yüzey ailesine karşılık gelir.

**Tanım 2.6.** Lineer olmayan herhangi bir adi diferensiyel denklemde en yüksek mertebeden lineer olan terim  $\frac{d^q u}{d\xi^q}$  ve en yüksek mertebeden lineer olmayan terim  $u^p \left(\frac{d^r u}{d\xi^r}\right)^s$  ile verilsin.  $m$  dengeleme terimi olmak üzere  $m + q = mp + s(m + r)$  eşitliği yazılabilir.



### 3. MATERYAL VE METOT

Lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemler fizik ve matematikte önemli bir yere sahiptir. Bu denklemler fizik, mekanik, biyoloji, kimya ve mühendislik alanlarında ortaya çıkan olayların matematiksel modelleridir. Bu denklemlerin genel çözümleri fiziksel olayların karakteri hakkında araştırmacılara bilgi verir. Kısmi diferensiyel denklemlerin genel çözümünün elde edilmesinde Matlab, Maple ve Mathematica gibi bilgisayar programlarından faydalanılır. Fiziksel olayların doğasını anlamak için pek çok analitik metot literatüre kazandırılmıştır. Bu metotların bazıları; Bäcklund dönüşümü [3], Cole-Hopf dönüşümü [4], Generalized Miura dönüşümü [5], Ters saçılma metodu [6], Darboux dönüşümü [7], Painleve analizi [8], benzerlik indirgeme metodu [9], sine-cosine metodu [10], ilk integral metodu [11], üstel fonksiyon metodu [12]. Bu metotların yanı sıra, keyfi bir adi diferensiyel denklemi göz önüne alınıp bu denklemin çözümlerinden faydalanarak lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin çözümüne ulaşan pek çok metot vardır. Bu metotların bazılarını şöyle sıralayabiliriz: Tanh fonksiyon metot [13], genişletilmiş tanh fonksiyon metot [14], değiştirilmiş genişletilmiş tanh fonksiyon metot [15], genelleştirilmiş genişletilmiş tanh fonksiyon metot [16], geliştirilmiş tanh fonksiyon metot [17], Jacobi elliptic fonksiyon metot [18], genelleştirilmiş Jakobi eliptik fonksiyon metot [19], Jakobi eliptik rasyonel açılım metot [20],  $(G'/G)$  - açılım metot [21],  $(1/G')$  - açılım metot [22],  $(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G})$  - açılım metot [23].

Bu metotlardan  $(G'/G)$  - açılım metodu ilk olarak Wang [24] tarafından sunuldu. Guo ve Zhou bu metot üzerinde çalışmalar yaparak genişletilmiş  $(G'/G)$  - açılım metodunu [25] sundular. Daha sonra Lü ve arkadaşları ise genelleştirilmiş  $(G'/G)$  - açılım metodunu [26] sundular.  $(1/G')$  - açılım metodu ile ilgili ilk çalışmaları Yokuş [27] yapmış olup, bu yöntemi bazı lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanmıştır. Son zamanlarda ise Li ve arkadaşları  $(G'/G)$  - açılım metodu üzerine bazı eklemeler yaparak  $(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G})$  - açılım metodunu [28] literatüre kazandırdılar.  $(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G})$  - açılım metodu araştırmacılar tarafından kullanılarak birçok denkleme uygulanmıştır [29 - 32].

Bu bölümde kısmi diferensiyel denklemlerin hareket eden dalga çözümlerinin elde edilmesinde kullanılan ve literatürde birçok uygulaması bulunan  $\left(\frac{G'}{G}\right)$  ve  $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$  - açılım metotlarının analizleri yapılacaktır.

### 3.1. $\left(\frac{G'}{G}\right)$ - Açılım Metodu

Bu bölümde, lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin analitik çözümlerinin bulunmasında kullanılan  $\left(\frac{G'}{G}\right)$  - açılım metodunun analizi verilecektir. Bu metot ilk olarak Wang [23] tarafından literatüre kazandırılmıştır. Daha sonra bazı bilim adamları tarafından bu metot üzerine birçok çalışmalar yapılmıştır [33,34].

Bu metodu açıklamak için  $x$  ve  $t$  gibi iki değişkenli lineer olmayan bir kısmi diferensiyel denklem

$$Q(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xt}, u_{xx}, \dots) = 0, \quad (3.1)$$

verilsin. Burada  $u = u(x, t)$  fonksiyonu (3.1) denkleminin aranan çözüm fonksiyonudur.  $\left(\frac{G'}{G}\right)$  - açılım metodunun lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlere uygulanışı aşağıdaki gibidir.

**Adım 1:**  $x$  ve  $t$  bağımsız değişkenler,  $u$  bağımlı değişken olmak üzere (3.1) denklemine

$$u(x, t) = u(\xi), \quad \xi = x - vt, \quad (3.2)$$

dönüşümü uygulanırsa,

$$Q(u, -vu', u', v^2u'', -vu'', u'', \dots) = 0, \quad (3.3)$$

adi diferensiyel denklemi elde edilir.

**Adım 2:** (3.3) adi diferensiyel denkleminin çözüm fonksiyonu  $\left(\frac{G'}{G}\right)$  - açılım metoduna göre aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^m a_i \left(\frac{G'}{G}\right)^i, \quad (3.4)$$

Burada  $G = G(\xi)$  olmak üzere

$$G'' + \lambda G' + \mu G = 0, \quad (3.5)$$

ikinci dereceden lineer bir adi diferensiyel denklemdir. Burada  $\lambda$  ve  $\mu$  keyfi sabitlerdir.

(3.4) denklemindeki  $m$  pozitif tamsayısı (3.3) adi diferensiyel denkleminde görülen en yüksek mertebeden lineer olan terim ile lineer olmayan terimin dengelenmesiyle bulunur.

**Adım 3:** (3.4) eşitliği, (3.3) denkleminde yerine yazılır ve (3.5) ikinci mertebeden lineer adi diferensiyel denklemi kullanılarak,  $\left(\frac{G'}{G}\right)$  'nin kuvvetlerine göre ayrılırsa (3.3) denkleminin sol tarafı polinoma dönüşür. Bu polinomun her bir katsayısı sıfıra eşitlenerek  $a_0, a_i, v, \lambda$  ve  $\mu$  için bir cebirsel denklem sistemi bulunur. Elde edilen cebirsel denklem sistemi çözülerek  $a_0, a_i, v, \lambda$  ve  $\mu$  sabitleri elde edilir. Bulunan sabitler (3.4) denkleminde yerlerine yazılır ve (3.5) adi diferensiyel denkleminin çözümleri de kullanılarak (3.1) lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemin analitik çözümleri elde edilir. (3.5) denkleminin genel çözümü ise şu şekilde bulunur:

$$G'' + \lambda G' + \mu G = 0,$$

denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin karakteristik denklemini

$$\varphi(k) = k^2 + \lambda k + \mu = 0,$$

dir. Bu karakteristik denklemin kökleri ise

$$\Delta = \lambda^2 - 4\mu,$$

$$k_1 = \frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}, \quad k_2 = \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2},$$

olarak bulunur.

i)  $\Delta = \lambda^2 - 4\mu > 0$  olmak üzere (3.5) denkleminin genel çözümü

$$G(\xi) = c_1 e^{k_1 \xi} + c_2 e^{k_2 \xi},$$

şeklinde hesaplanır. Genel çözümde  $\xi$  'ye göre her iki tarafın türevi alınır

$$G'(\xi) = k_1 c_1 e^{k_1 \xi} + k_2 c_2 e^{k_2 \xi},$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} &= \frac{k_1 c_1 e^{k_1 \xi} + k_2 c_2 e^{k_2 \xi}}{k_1 c_1 e^{k_1 \xi} + k_2 c_2 e^{k_2 \xi}} \\
\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} &= \frac{c_1 \frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} e^{k_1 \xi} + c_2 \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} e^{k_2 \xi}}{c_1 e^{k_1 \xi} + c_2 e^{k_2 \xi}} \\
\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} &= \frac{-c_1 \frac{\lambda}{2} e^{k_1 \xi} - c_1 \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} e^{k_1 \xi} - c_2 \frac{\lambda}{2} e^{k_2 \xi} + c_2 \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} e^{k_2 \xi}}{c_1 e^{k_1 \xi} + c_2 e^{k_2 \xi}} \\
\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} &= \frac{-\frac{\lambda}{2} [c_1 e^{k_1 \xi} + c_2 e^{k_2 \xi}] + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} [-c_1 e^{k_1 \xi} + c_2 e^{k_2 \xi}]}{c_1 e^{k_1 \xi} + c_2 e^{k_2 \xi}} \\
\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} &= \frac{[c_1 e^{k_1 \xi} + c_2 e^{k_2 \xi}] + \left[ \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left( \frac{-c_1 e^{k_1 \xi} + c_2 e^{k_2 \xi}}{c_1 e^{k_1 \xi} + c_2 e^{k_2 \xi}} \right) - \frac{\lambda}{2} \right]}{c_1 e^{k_1 \xi} + c_2 e^{k_2 \xi}} \\
\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} &= \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[ \frac{-c_1 e^{k_1 \xi} + c_2 e^{k_2 \xi}}{c_1 e^{k_1 \xi} + c_2 e^{k_2 \xi}} \right] - \frac{\lambda}{2} \\
\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} &= \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[ \frac{-c_1 e^{\frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi} + c_2 e^{\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi}}{c_1 e^{\frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi} + c_2 e^{\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi}} \right] - \frac{\lambda}{2} \\
\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} &= \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left[ \frac{-c_1 \left( \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi - \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi \right) + c_2 \left( \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi + \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi \right)}{c_1 \left( \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi - \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi \right) + c_2 \left( \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi + \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi \right)} \right] - \frac{\lambda}{2} \\
\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} &= \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[ \frac{(-c_1 + c_2) \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi + (c_1 + c_2) \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi}{(-c_1 + c_2) \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi + (c_1 + c_2) \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi} \right] - \frac{\lambda}{2}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu son ifadede

$$-c_1 + c_2 = A, \quad c_1 + c_2 = B$$

alınırsa

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left[ \frac{-A \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi + B \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi}{A \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi + B \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi} \right] - \frac{\lambda}{2} \quad (3.6)$$

elde edilir.

ii)  $\Delta = \lambda^2 - 4\mu < 0$  ise

$$k_1 = \frac{-\lambda - \sqrt{-(4\mu - \lambda^2)}}{2} = \frac{-\lambda - i\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} = -\frac{\lambda}{2} - \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}i$$

$$k_2 = \frac{-\lambda + i\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} = -\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}i$$

bulunur. (3.5) denkleminin genel çözümü

$$G(\xi) = c_1 e^{\left(-\frac{\lambda}{2} - \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}i\right)\xi} + c_2 e^{\left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}i\right)\xi}$$

$$G(\xi) = c_1 e^{-\frac{\lambda}{2}\xi} e^{-\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}i\xi} + c_2 e^{-\frac{\lambda}{2}\xi} e^{\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}i\xi}$$

$$G(\xi) = e^{-\frac{\lambda}{2}\xi} \left[ c_1 e^{-\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}i\xi} + c_2 e^{\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}i\xi} \right],$$

$$G(\xi) = e^{-\frac{\lambda}{2}\xi} \left[ c_1 \left( \cos \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi - i \sin \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi \right) + c_2 \left( \cos \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi + i \sin \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi \right) \right],$$

$$G(\xi) = e^{-\frac{\lambda}{2}\xi} \left[ \cos \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi (c_1 + c_2) + \sin \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi (ic_2 - ic_1) \right],$$

olarak bulunur. Bu son eşitlikte

$$A = c_1 + c_2, \quad B = ic_2 - ic_1,$$

alınırsa

$$G(\xi) = e^{-\frac{\lambda}{2}\xi} \left( A \cos \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi + B \sin \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi \right),$$

genel çözümü bulunur. Genel çözümde  $\xi$  'ye göre her iki tarafın türevi alınırsa

$$G'(\xi) = -\frac{\lambda}{2} e^{-\frac{\lambda}{2}\xi} \left( A \cos \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi + B \sin \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi \right) \\ + e^{-\frac{\lambda}{2}\xi} \left( -A \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \sin \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi + B \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \cos \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi \right),$$

$$G'(\xi) = -\frac{\lambda}{2} e^{-\frac{\lambda}{2}\xi} \left( A \cos \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi + B \sin \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi \right) \\ + \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} e^{-\frac{\lambda}{2}\xi} \left( -A \sin \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi + B \cos \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi \right),$$

$$G'(\xi) = e^{-\frac{\lambda}{2}\xi} \left[ -\frac{\lambda}{2} \left( A \cos \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi + B \sin \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi \right) \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \left( -A \sin \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi + B \cos \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi \right) \right],$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{-\frac{\lambda}{2} \left( A \cos \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi + B \sin \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi \right)}{\left( A \cos \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi + B \sin \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi \right)} \\ + \frac{\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \left( -A \sin \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi + B \cos \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi \right)}{\left( A \cos \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi + B \sin \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi \right)},$$

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \left[ \frac{-A \sin \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi + B \cos \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi}{A \cos \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi + B \sin \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi} \right] - \frac{\lambda}{2} \quad (3.7)$$

iii)  $\Delta = \lambda^2 - 4\mu = 0$  durumunda ise

$$k_1 = k_2 = -\frac{\lambda}{2},$$

bulunur. (3.5) denkleminin genel çözümü

$$G(\xi) = e^{-\frac{\lambda}{2}\xi} (c_1 + c_2 \xi),$$

şeklinde bulunur.

Genel çözümde  $\xi$  'ye göre her iki tarafın türevi alınır

$$G'(\xi) = -\frac{\lambda}{2} e^{-\frac{\lambda}{2}\xi} (c_1 + c_2 \xi) + c_2 e^{-\frac{\lambda}{2}\xi},$$

$$G'(\xi) = e^{-\frac{\lambda}{2}\xi} \left[ -\frac{\lambda}{2} (c_1 + c_2 \xi) + c_2 \right],$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{e^{-\frac{\lambda}{2}\xi} \left[ -\frac{\lambda}{2} (c_1 + c_2 \xi) + c_2 \right]}{e^{-\frac{\lambda}{2}\xi} (c_1 + c_2 \xi)},$$

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{-\frac{\lambda}{2} (c_1 + c_2 \xi)}{(c_1 + c_2 \xi)} + \frac{c_2}{(c_1 + c_2 \xi)},$$

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{c_2}{(c_1 + c_2 \xi)} - \frac{\lambda}{2},$$

bulunur. Bu son ifadede

$$c_1 = B, \quad c_2 = A,$$

alınır

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{A}{A\xi+B} - \frac{\lambda}{2} \quad (3.8)$$

bulunur.

### 3. 2. $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$ - Açılım Metodu

İlk olarak,

$$G(\xi) + \lambda G(\xi) = \mu, \quad (3.9)$$

ile verilen ikinci mertebeden lineer adi diferensiyel denklemi göz önüne alalım.

$\phi = \frac{G'}{G}$  ve  $\psi = \frac{1}{G}$  olmak üzere

$$\phi' = -\phi^2 + \mu\psi - \lambda, \quad \psi' = -\phi\psi, \quad (3.10)$$

denklemleri yazılır. (3.10) ile verilen eşitlikler kullanılarak (3.9) denkleminin çözümü için aşağıdaki durumlar ortaya çıkar.

*i)*  $\lambda < 0$  olmak üzere

$$G(\xi) = A_1 \sinh(\sqrt{-\lambda} \xi) + A_2 \cosh(\sqrt{-\lambda} \xi) + \frac{\mu}{\lambda}, \quad (3.11)$$

olur, burada  $A_1$  ve  $A_2$  keyfi sabitlerdir. Ayrıca,

$$\psi^2 = \frac{-\lambda}{\lambda^2 \sigma + \mu^2} (\phi^2 - 2\mu\psi + \lambda), \quad (3.12)$$

yazılır ve burada  $\sigma = A_1^2 - A_2^2$  dir.

*ii)*  $\lambda > 0$  olmak üzere

$$G(\xi) = A_1 \sin(\xi\sqrt{\lambda}) + A_2 \cos(\xi\sqrt{\lambda}) + \frac{\mu}{\lambda}, \quad (3.13)$$

yazılır ve bununla birlikte

$$\psi^2 = \frac{\lambda}{\lambda^2 \sigma - \mu^2} (\phi^2 - 2\mu\psi + \lambda), \quad (3.14)$$

eşitliği vardır.

*iii)*  $\lambda = 0$  ise

$$G(\xi) = \frac{\mu}{2} \xi^2 + A_1 \xi + A_2, \quad (3.15)$$

olur ve bu eşitliğin yanında

$$\psi^2 = \frac{1}{A_1^2 - 2\mu A_2} (\phi^2 - 2\mu\psi), \quad (3.16)$$

eşitliği geçerlidir.

Şimdi ise bu metodun nasıl uygulandığını inceleyelim.

**Adım 1:** Hareketli dalga fonksiyonu  $u(x, t)$  olmak üzere

$$u(x, t) = u(\xi), \quad \xi = x - Vt, \quad (3.17)$$

dönüşümü yapılarak (3.17) denklemi

$$P(u, u', u'', \dots) = 0, \quad (3.18)$$

şeklinde lineer olmayan adi diferensiyel denkleme indirgenir.  $V$  bir sabittir ve  $P$  ise  $u$  ve türevlerine ait bir polinomdur. Burada  $u = u(x, t)$  fonksiyonu (3.18) denkleminin aranan çözüm fonksiyonudur.  $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$  - açılım metodunun lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlere uygulanışı aşağıdaki şekilde devam eder.

**Adım 2:** (3.18) denkleminin çözümünün  $\phi$  ve  $\psi$  polinomları cinsinden şu şekilde ifade edilebileceğini varsayalım,

$$u(\xi) = \sum_{i=1}^m a_i \phi^i + \sum_{i=1}^m b_i \phi^{i-1} \psi, \quad (3.19)$$

burada  $a_i (i = 0, 1, \dots, m)$  ve  $b_i (i = 0, 1, \dots, m)$  sayıları daha sonra belirlenecek olan sabit sayılardır.

**Adım 3:** Homojen balansı kullanarak (3.13)'deki  $m$  tamsayısı belirlenir.  $m$ , (3.17) denkleminde en yüksek mertebeden türev ile en yüksek mertebeden lineer olmayan terimin karşılaştırılması ile elde edilebilen pozitif bir dengeleme terimidir.

**Adım 4:** (3.19) eşitliği (3.10) ve (3.12) eşitlikleri ile birlikte (3.18) denkleminde yerine yazılır ve (3.9) ikinci mertebeden lineer adi diferensiyel denklemi kullanılırsa  $\phi$  ve  $\psi$  ye bağlı bir polinom elde edilir. Bu polinomda  $\phi^i \psi^j$  terimlerinin her bir katsayısı sıfıra eşitlenerek  $a_i (i = 0, 1, \dots, m)$ ,  $b_i (i = 0, 1, \dots, m)$ ,  $V, \mu, A_1, A_2$  ve  $\lambda (\lambda < 0)$  için bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemi Mathematica veya Matlab gibi bilgisayar programları yardımıyla çözülerek (3.9) denkleminin  $\lambda < 0$  değerleri için

$$G(\xi) = A_1 \sinh(\sqrt{-\lambda} \xi) + A_2 \cosh(\sqrt{-\lambda} \xi) + \frac{\mu}{\lambda},$$

şeklinde hiperbolik fonksiyonlara karşılık gelen çözümleri bulunur.

**Adım 5:** (3.19) eşitliği (3.10) ve (3.14) eşitlikleri ile birlikte (3.18) denkleminde yerine yazılır ve (3.9) ikinci mertebeden lineer adi diferensiyel denklemi kullanılırsa  $\phi$  ve  $\psi$  ye bağlı bir polinom elde edilir. Bu polinomda  $\phi^i \psi^j$  terimlerinin her bir katsayısı sıfıra eşitlenerek  $a_i (i = 0, 1, \dots, m)$ ,  $b_i (i = 0, 1, \dots, m)$ ,  $V, \mu, A_1, A_2$  ve  $\lambda (\lambda > 0)$  için bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemi çözülerek (3.9) denkleminin  $\lambda > 0$  değerleri için

$$G(\xi) = A_1 \sin(\xi\sqrt{\lambda}) + A_2 \cos(\xi\sqrt{\lambda}) + \frac{\mu}{\lambda},$$

şeklinde trigonometrik fonksiyonlara veya rasyonel fonksiyonlara karşılık gelen çözümleri bulunur.  $\lambda = 0$  için ise (3.9) denkleminin

$$G(\xi) = \frac{\mu}{2} \xi^2 + A_1 \xi + A_2,$$

çözümü elde edilir.



#### 4. METODLARIN UYGULANMASI

Akışkanlar mekaniği, lineer olmayan akustik, gaz dinamiği, trafik akışı, şok dalgaların teorisi ve türbülans problemlerin matematiksel modellenmesinde kullanılan Burgers denklemi ilk olarak Bateman [35] tarafından ortaya çıkarılmış, daha sonra bazı iyileştirmeler ile Burgers [36] tarafından yeniden sunulmuştur.  $v$  kinematik viskozite katsayısı olmak üzere ( $v > 0$ ) Burgers denklemi

$$u_t(x, t) + u(x, t)u_x(x, t) = vu_{xx}(x, t)$$

şeklinde yazılır. Burgers denkleminin bazı farklı durumları literatürde araştırmacılar tarafından incelenmiştir. Örneğin Wazwaz [37], dört farklı formda Burgers benzeri denklemlerinin hareket eden dalga çözümlerini incelemiştir.

Bu bölümde,  $\left(\frac{G'}{G}\right)$  ve  $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$  - açılım metotları kullanılarak bazı lineer olmayan Burgers benzeri denklemlerin hareket eden dalga çözümleri elde edilecektir.

##### 4. 1. Burgers Benzeri Denklemine $\left(\frac{G'}{G}\right)$ - Açılım Metodunun Uygulanması

$$u_t + u_x + uu_x + \frac{1}{2}u_{xx} = 0, \quad (4.1)$$

denklemini ele alalım. Bu denklemin hareket eden dalga çözümleri bazı araştırmacılar tarafından farklı metotlar kullanılarak elde edilmiştir [38-40]. Biz  $\left(\frac{G'}{G}\right)$  - açılım metodunu kullanacağız. İlk önce (4.1) eşitliğine

$$u(\xi) = u(x, t), \quad \xi = x - vt, \quad (4.2)$$

dönüşümü uygulanırsa,  $u = u(\xi)$  için

$$-vu' + u' + uu' + \frac{1}{2}u'' = 0,$$

$$-vu' + u' + \frac{1}{2}(u^2)' + \frac{1}{2}u'' = 0,$$

adi diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin her iki tarafı  $\xi$  'e göre integre edilirse,

$$c - vu + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}u' = 0,$$

burada  $c$  integrasyon sabiti özel olarak sıfır seçilirse

$$u(1 - v) + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}u' = 0, \quad (4.3)$$

elde edilir. (4.3) denkleminde lineer olmayan  $u^2$  terimi ile en yüksek mertebeden lineer olan  $u'$  terimini dengeleyerek dengeleme terimini bulmak için

$$D \left[ \frac{d^q u}{d\xi^q} \right] = m + q, \quad D \left[ u^p \left( \frac{d^q u}{d\xi^q} \right)^s \right] = mp + s(m + q),$$

eşitlikleri kullanılırsa

$$m + 1 = 2m \Rightarrow m = 1,$$

bulunur. Böylece (4.1) Burgers benzeri denkleminin çözümü

$$u(\xi) = a_0 + a_1 \left( \frac{G'}{G} \right), \quad (4.4)$$

formunda aranır. (4.4) çözüm fonksiyonu (4.3) adi diferensiyel denkleminde yazılırsa  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $v$ ,  $\lambda$  ve  $\mu$  sabitlerini içeren cebirsel denklem sistemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\left( \frac{G'}{G} \right)^0 = a_0 - va_0 + \frac{a_0^2}{2} - \frac{\mu a_1}{2} = 0$$

$$\left( \frac{G'}{G} \right)^1 = a_1 - va_1 - \frac{\lambda a_1}{2} + a_0 a_1 = 0$$

$$\left( \frac{G'}{G} \right)^2 = -\frac{a_1}{2} + \frac{a_1^2}{2} = 0$$

Bu cebirsel denklemlerin çözülmesiyle

$$a_0 = \frac{1}{2} \left( \lambda \mp \sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \right), \quad a_1 = 1, \quad v = \frac{1}{2} (2 - \lambda + 2a_0) \quad (4.5)$$

sabitleri elde edilir. Bulunan bu sabitler (4.4) çözüm fonksiyonunda yazılır ve (3.6), (3.7) ve (3.8) eşitlikleri göz önünde bulundurulursa (4.1) denkleminin analitik çözümleri aşağıdaki gibi bulunur.

i)  $\lambda^2 - 4\mu > 0$  olmak üzere  $a_0 = \frac{1}{2}(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu})$  için

$$u(\xi) = \frac{1}{2}(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}) + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left( \frac{A \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi + B \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi}{A \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi + B \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi} \right) - \frac{\lambda}{2}, \quad (4.6)$$

ve

$a_0 = \frac{1}{2}(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu})$  için

$$u(\xi) = \frac{1}{2}(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}) + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \left( \frac{A \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi + B \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi}{A \sinh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi + B \cosh \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \xi} \right) - \frac{\lambda}{2}, \quad (4.7)$$

soliton çözümleri elde edilir, burada  $\xi = x - \frac{1}{2}(2 - \lambda + 2a_0)t$ .

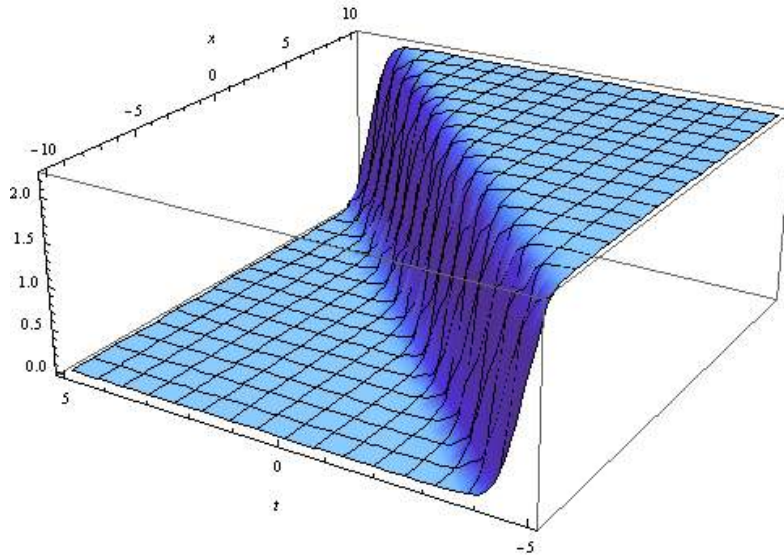
Özel olarak (4.6) çözümünde  $A = 0, B = 1$  alınır

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}(-1 + \tanh\left(\frac{1}{4}\left(2x + t(-2 + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu})\right)\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\right))$$

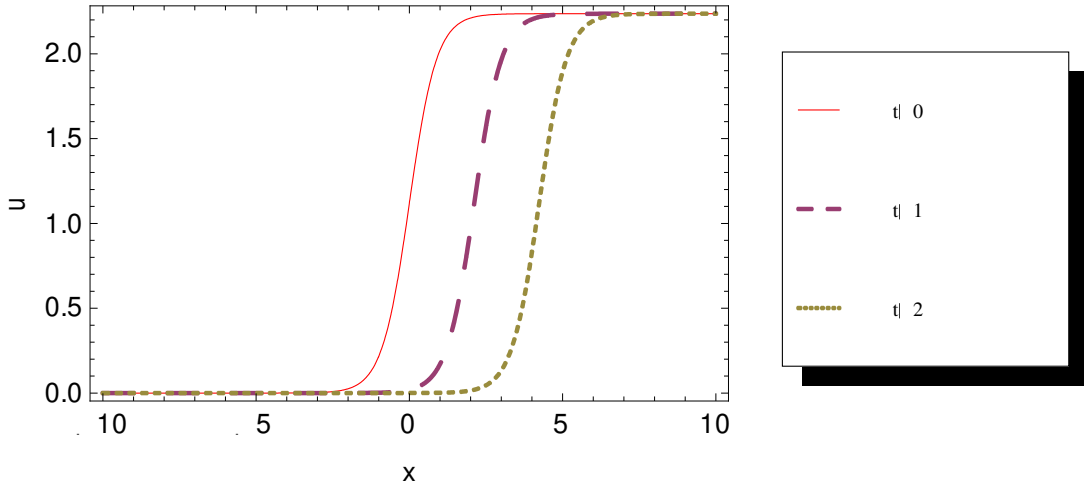
olur. Özel olarak (4.6) çözümünde  $A = 1, B = 0$  alınır

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}(-1 + \coth\left(\frac{1}{4}\left(2x + t(-2 + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu})\right)\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\right))$$

bulunur.



**Şekil 4.1.** (4.1) denkleminin (4.6) çözümünün üç boyutlu grafiği ( $A = 0, B = 1, \lambda = 1, \mu = -1$ )



Şekil 4.2. (4.1) denkleminin (4.6) çözümünün iki boyutlu grafiği ( $A = 0, B = 1, \lambda = 1, \mu = -1$ )

ii)  $\lambda^2 - 4\mu < 0$  olmak üzere  $a_0 = \frac{1}{2}(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu})$  için,

$$u(\xi) = \frac{1}{2}(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}) + \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \left( \frac{-A \sin \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi + B \cos \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi}{A \cos \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi + B \sin \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi} \right) - \frac{\lambda}{2}, \quad (4.8)$$

ve  $a_0 = \frac{1}{2}(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu})$  için

$$u(\xi) = \frac{1}{2}(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}) + \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \left( \frac{-A \sin \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi + B \cos \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi}{A \cos \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi + B \sin \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \xi} \right) - \frac{\lambda}{2}, \quad (4.9)$$

trigonometrik çözümlerine ulaşılır, burada  $\xi = x - \frac{1}{2}(2 - \lambda + 2a_0)t$ .

Özel olarak (4.8) çözümünde  $A = 0, B = 1$  alınırsa

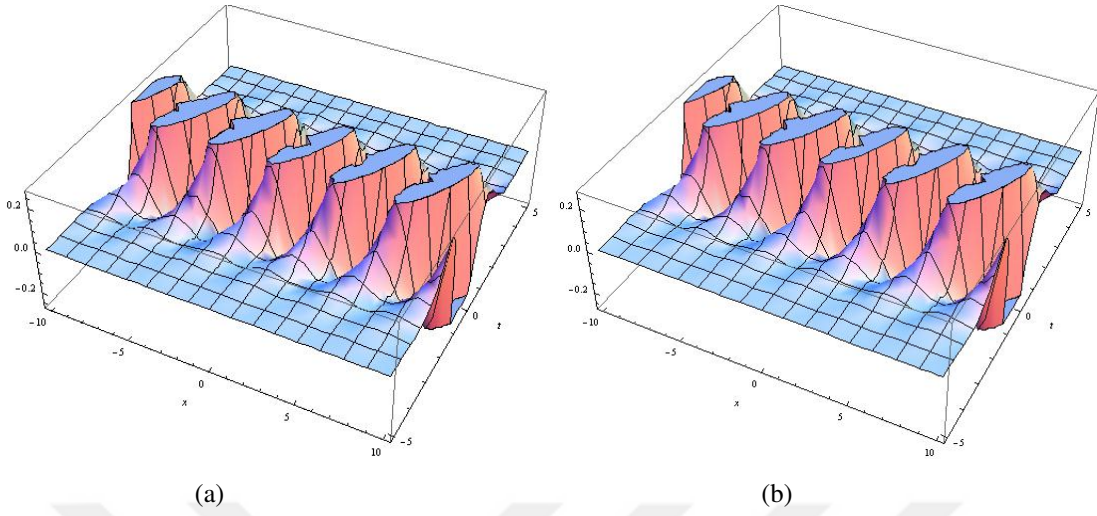
$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left( -\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} + \sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \cot \left( \frac{1}{4} (2x + t(-2 + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu})) \sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \right) \right),$$

elde edilir.

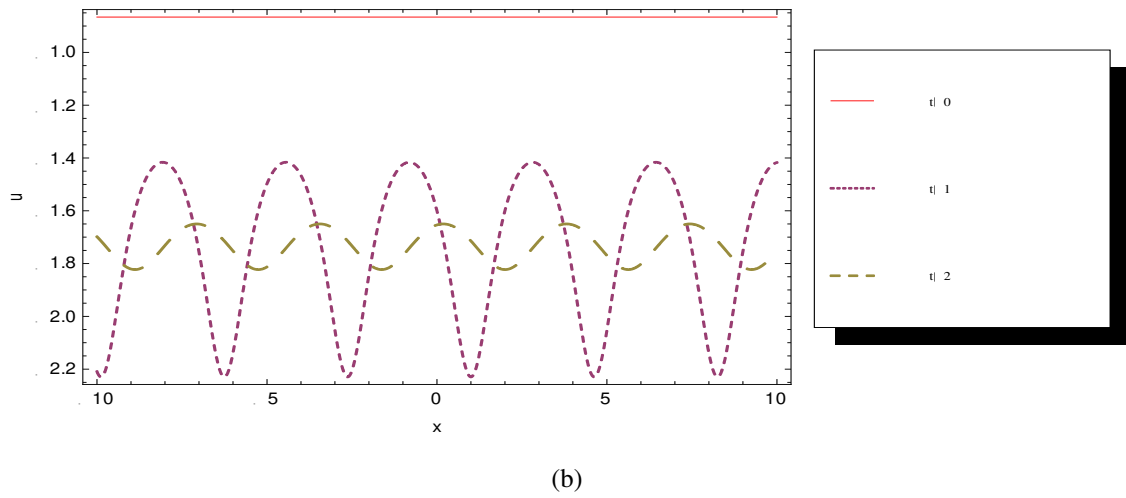
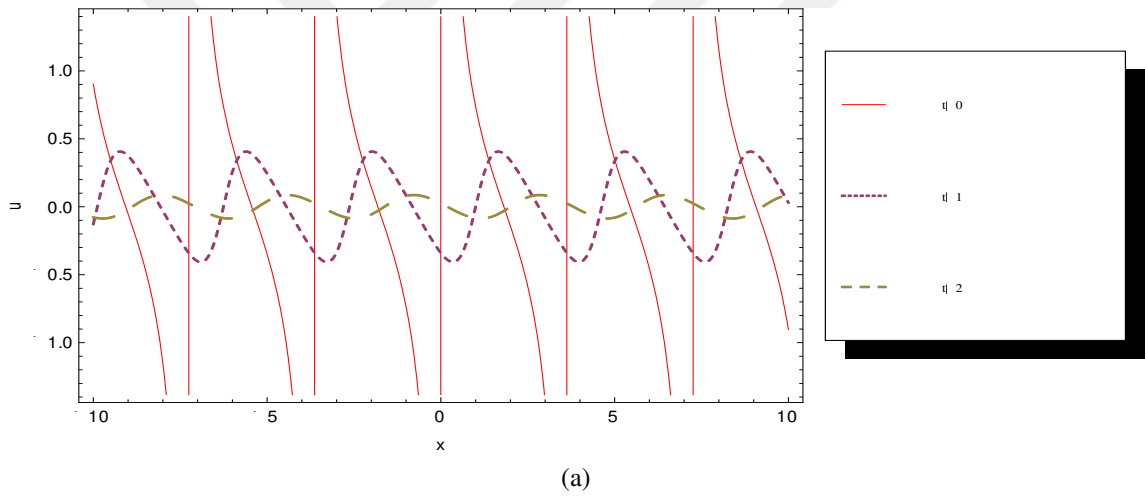
Özel olarak (4.8) çözümünde  $A = 1, B = 0$  alınırsa

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left( -\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} - \sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \tan \left( \frac{1}{4} (2x + t(-2 + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu})) \sqrt{-\lambda^2 + 4\mu} \right) \right),$$

olur.



**Şekil 4.3.** (4.1) denkleminin (4.8) çözümünün üç boyutlu grafiği a) Reel Kısım b) Sanal Kısım ( $A = 0, B = 1, \lambda = 1, \mu = 1$ )

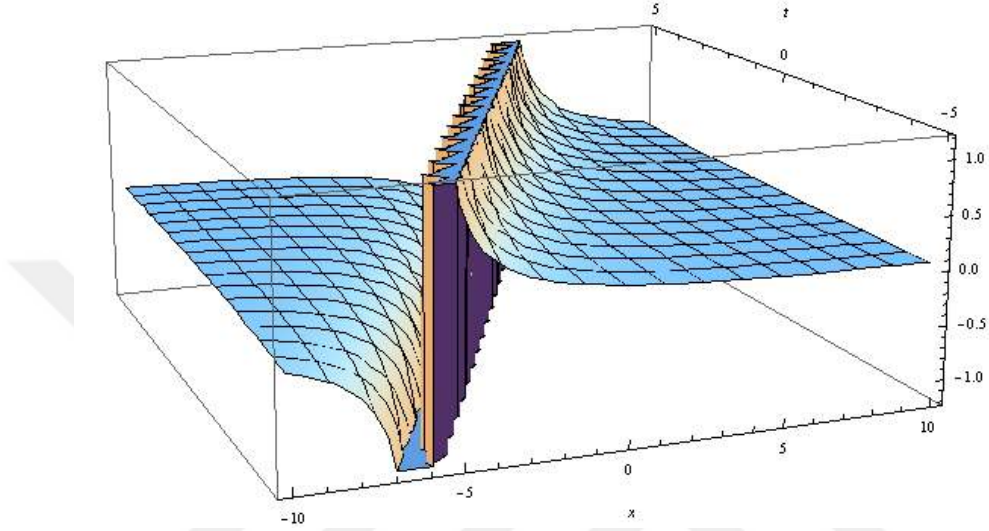


**Şekil 4.4.** (4.1) denkleminin (4.8) çözümünün iki boyutlu grafiği a) Reel Kısım b) Sanal Kısım ( $A = 0, B = 1, \lambda = 1, \mu = 1$ )

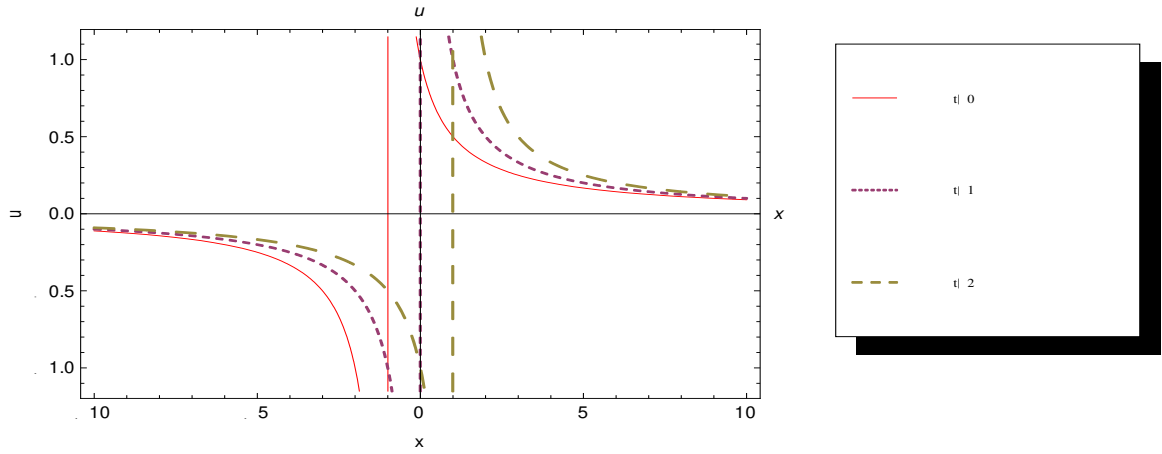
iii)  $\lambda^2 - 4\mu = 0$  ise

$$u(x, t) = \frac{A}{A(x-t)+B}, \quad (4.10)$$

cebirsel çözüm elde edilir.



Şekil 4.5. (4.1) denkleminin (4.10) çözümünün üç boyutlu grafiği ( $A = 1, B = 1, \lambda = 2, \mu = 1$ )



Şekil 4.6. (4.1) denkleminin (4.10) çözümünün iki boyutlu grafiği ( $A = 1, B = 1, \lambda = 2, \mu = 1$ )

#### 4.2. Tipik Kırılma Denklemine $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$ - Açılım Metodunun Uygulanması

Bu bölümde,  $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$  - Açılım Metodunun iki denklem için uygulaması verilmiştir. Önce Tipik kırılma denkleminin yeni kesin dalga çözümleri elde edilmiştir.

(2 + 1) - boyutlu Tipik Kırılma Denklemleri,

$$u_{xt} - 4u_x u_{xy} - 2u_x u_y + u_{xxy} = 0 \quad (4.11)$$

Bu denklem için (4.2) dönüşümü uygulanırsa,  $u = u(\xi)$  için

$$k - V(u)' - 3u^2 + u''' = 0$$

elde edilir. Buradaki  $k$ , integrasyon sabitidir ve dengeleme terimi  $m = 1$ 'dir. (4.11) denklemi için

$$u(\xi) = a_0 + a_1 \phi(\xi) + b_1 \psi(\xi) \quad (4.12)$$

şeklinde bir çözüm fonksiyonu seçilir. Buna göre (4.11) çözümü (4.3) denkleminde yerine yazılır ve (3.9) - (3.15) eşitlikleri de bir arada düşünülür ise incelemek için üç durum vardır.

i)  $\lambda < 0$  ise (hiperbolik fonksiyon çözümleri),

(4.12) 'yi (4.11)' de yerine yazarak ve (3.9) ve (3.11) 'i kullanarak, (4.11) denklemi  $\phi$  ve  $\psi$  türünden bir polinom haline gelir. Bu polinomun her katsayısının sıfıra eşitlenmesi ile  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $b_1$  ve  $V$  sabitlerine bağlı bir cebirsel denklem elde edilmiş olur. Sonra bu cebirsel sistemleri çözerek,

$$a_1 = -1, b_1 = \pm \frac{\sqrt{-\mu^2 - \lambda^2 \sigma}}{\sqrt{\lambda}}, V = -\lambda \text{ ve } k = 0$$

$$a_1 = -2, b_1 = 0, V = -4\lambda, k = 0 \text{ ve } \mu = 0 \quad (4.13)$$

elde edilir. Bu değerler (3.11) eşitliği ile birlikte (4.12) çözüm fonksiyonunda yazılır ise (4.11) denkleminin çözümü

$$u(\xi) = -\phi(\xi) \pm \frac{\sqrt{-\mu^2 - \lambda^2 \sigma}}{\sqrt{\lambda}} \psi(\xi) \quad (4.14)$$

olur.

(3.9) ve (3.10) 'u (4.14)' de kullanarak, (4.11) 'in çözümünü şu şekilde elde ederiz.

$$u(\xi) = \frac{-\sqrt{-\lambda}\{A_1 \cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_2 \sinh(\sqrt{-\lambda}\xi)\}}{A_1 \sinh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_2 \cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + \frac{\mu}{\lambda}} \pm \frac{\sqrt{-\mu^2 - \lambda^2 \sigma}}{\sqrt{\lambda}\{A_1 \sinh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_2 \cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + \frac{\mu}{\lambda}\}}$$

Yukarıdaki denklemde  $\xi = x + y + \lambda t$  alırsak,

$$u(x, y, t) = - \frac{-\sqrt{-\lambda}\{A_1 \cosh(\sqrt{-\lambda}(x + y + \lambda t)) + A_2 \sinh(\sqrt{-\lambda}(x + y + \lambda t))\}}{A_1 \sinh(\sqrt{-\lambda}(x + y + \lambda t)) + A_2 \cosh(\sqrt{-\lambda}(x + y + \lambda t)) + \frac{\mu}{\lambda}} \pm \frac{\sqrt{-\mu^2 - \lambda^2 \sigma}}{\sqrt{\lambda}\{A_1 \sinh(\sqrt{-\lambda}(x + y + \lambda t)) + A_2 \cosh(\sqrt{-\lambda}(x + y + \lambda t)) + \frac{\mu}{\lambda}\}} \quad (4.15)$$

olur.

Eğer özel olarak (4.15) çözümünde  $A_1 = 0, A_2 \neq 0$  ve  $\mu = 0$  alınırsa (4.11) denklemi

$$u(x, y, t) = -\sqrt{-\lambda} \tanh(\sqrt{-\lambda}(x + y + \lambda t)) \pm \frac{\sqrt{\lambda} \sigma}{A_2} \operatorname{sech}(\sqrt{-\lambda}(x + y + \lambda t))$$

şeklinde bir çözüme sahip olur.

Öte yandan,  $A_2 = 0, A_1 \neq 0$  ve  $\mu = 0$  için

$$u(\xi) = -2\varphi(\xi), \quad \xi = x + y + 4\lambda t \text{ alınırsa}$$

$$u(x, y, t) = -\sqrt{-\lambda} \coth(\sqrt{-\lambda}(x + y + 4\lambda t)) \pm \frac{\sqrt{\lambda} \sigma}{A_1} \operatorname{cosech}(\sqrt{-\lambda}(x + y + 4\lambda t))$$

çözümüne sahip olur.

(4.13), (4.12) de yerine yazılırsa,

$$u(\xi) = -2\varphi(\xi), \quad \xi = x + y + 4\lambda t \quad (4.16)$$

elde edilir. Buradan,

(3.9) ve (3.10) 'u (4.16)' da kullanarak, (4.11) 'in çözümü

$$u(x, y, t) = - \frac{2\sqrt{-\lambda}\{A_1 \cosh(\sqrt{-\lambda}(x + y + 4\lambda t)) + A_2 \sinh(\sqrt{-\lambda}(x + y + 4\lambda t))\}}{A_1 \sinh(\sqrt{-\lambda}(x + y + 4\lambda t)) + A_2 \cosh(\sqrt{-\lambda}(x + y + 4\lambda t)) + \frac{\mu}{\lambda}} \quad (4.17)$$

olarak bulunur.

Özellikle, eğer  $A_1 = 0, A_2 \neq 0$  ise, (4.17) 'den

$$u(x, y, t) = -2\sqrt{-\lambda} \tanh(\sqrt{-\lambda}(x + y + 4\lambda t))$$

elde edilir.

ii)  $\lambda > 0$  ise (trigonometrik fonksiyon çözümleri),

1. durum ile aynı adımların atılması ve denklem sisteminin çözülmesi ile aşağıdaki gibi keyfi iki değer kümesi elde edilir,

$$a_1 = -1, b_1 = \pm \frac{\sqrt{\lambda^2 p - \mu^2}}{\sqrt{\lambda}}, V = -\lambda, k = 0 \text{ ve } \mu \text{ keyfi sabittir,} \quad (4.18)$$

$$a_1 = -2, b_1 = 0, k = 0, \mu = 0 \text{ ve } V = -4\lambda. \quad (4.19)$$

Bu iki set için, dalga çözümleri bulunabilir.

(4.18)' deki  $a_1$  ve  $b_1$  değerlerini (4.12)' de yerine yazarsak,

$$u(\xi) = -\varphi(\xi) \pm \frac{\sqrt{\lambda^2 p - \mu^2}}{\sqrt{\lambda}} \psi(\xi), \quad \xi = x + y + \lambda t \text{ için,} \quad (4.20)$$

$$u(x, y, t) = -\frac{\sqrt{\lambda} \{A_1 \cosh(\sqrt{\lambda}(x + y + \lambda t)) - A_2 \sinh(\sqrt{\lambda}(x + y + \lambda t))\}}{A_1 \sinh(\sqrt{\lambda}(x + y + \lambda t)) + A_2 \cosh(\sqrt{\lambda}(x + y + \lambda t)) + \frac{\mu}{\lambda}} \pm \frac{\sqrt{\lambda^2 p - \mu^2}}{\sqrt{\lambda} \{A_1 \sinh(\sqrt{\lambda}(x + y + \lambda t)) + A_2 \cosh(\sqrt{\lambda}(x + y + \lambda t)) + \frac{\mu}{\lambda}\}} \quad (4.21)$$

bulunur [41]. Eğer özel olarak (4.21) çözümünde  $A_1 = 0, A_2 \neq 0$  ve  $\mu = 0$  alınırsa (4.11) denklemi

$$u(x, y, t) = \sqrt{\lambda} \tan(\sqrt{\lambda}(x + y + \lambda t)) \pm \frac{\sqrt{\lambda} p}{A_2} \sec(\sqrt{\lambda}(x + y + \lambda t)) \quad (4.22)$$

olur. (4.19)' daki  $a_1$  ve  $b_1$  değerleri (4.12)' de yerine yazıldığında

$$u(\xi) = -2\varphi(\xi), \quad \xi = x + y + 4\lambda t \text{ için} \quad (4.23)$$

elde edilir. Buradan, (3.9) ve (3.10) 'u (4.23)' de kullanarak, (4.11) 'in çözümü

$$u(x, y, t) = -\frac{2\sqrt{\lambda} \{A_1 \cos(\sqrt{\lambda}(x + y + 4\lambda t)) - A_2 \sin(\sqrt{\lambda}(x + y + 4\lambda t))\}}{A_1 \sin(\sqrt{\lambda}(x + y + 4\lambda t)) + A_2 \cos(\sqrt{\lambda}(x + y + 4\lambda t))} \quad (4.24)$$

bulunur. Özellikle, eğer  $A_1 = 0, A_2 \neq 0$  ise (4.24) çözümü, aşağıdaki periyodik dalga çözümünü verir.

$$u(x, y, t) = 2\sqrt{\lambda} \tan(\sqrt{\lambda}(x + y + 4\lambda t))$$

iii)  $\lambda = 0$  ise (rasyonel fonksiyon çözümleri),

1.durumdaki benzer adımlar takip edilerek denklem sistemini çözüp keyfi sabitlerin değerlerini elde ederiz.

$$a_1 = -1, b_1 = \pm \sqrt{A_1^2 - 2\mu A_2}, V = 0, \quad (4.25)$$

Burada  $\mu$  ve  $k$  keyfi sabitlerdir. Sabitlerin bu değerlerini kullanarak (4.11) denkleminin çözümünü

$$u(\xi) = -\varphi(\xi) \pm \sqrt{A_1^2 - 2\mu A_2} \psi(\xi) \quad (4.26)$$

şeklinde elde ederiz. Burada  $\xi = x + y$  dir.

(3.9) ve (3.14) aracılığıyla, (4.11) 'in (4.26) çözümü şu şekilde yazılabilir;

$$u(x, y, t) = -\frac{\mu(x + y) + A_1}{\frac{\mu}{2}(x + y)^2 + A_1(x + y) + A_2} \pm \frac{\sqrt{A_1^2 - 2\mu A_2}}{\frac{\mu}{2}(x + y)^2 + A_1(x + y) + A_2}$$

Özellikle, eğer  $A_1 = 0, A_2 \neq 0$  ise, bu çözüm aşağıdaki gibi basitleştirilir;

$$u(x, y, t) = -\frac{\mu(x + y)}{\frac{\mu}{2}(x + y)^2 + A_2} \pm \frac{\sqrt{-2\mu A_2}}{\frac{\mu}{2}(x + y)^2 + A_2}$$

#### 4.3. Burger-Huxley Denkleminin $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$ - Açılım Metodunun Uygulanması

Burgers-Huxley denklemi çok çeşitli lineer olmayan fiziksel olayları açıklar. Örneğin reaksiyon mekanizmaları bir prototip model, taşınım etkileri ve difüzyon taşınımı arasındaki etkileşim problemleri bunlardan bazılarıdır. Burgers-Huxley denklemi şu şekildedir;

$$u_t - u_{xx} = uu_x + u(k - u)(u - 1). \quad (4.27)$$

Lineer olmayan bu PDE, fizik, ekonomi, ekoloji ve metalurji gibi birçok alanda pek çok uygulamaya sahiptir. Bu denklem için

$$u(x, t) = u(\xi), \quad \xi = x - vt,$$

dalga değişkeni dönüşümü kullanıldıktan sonra

$$cu + uu' + u'' + u(k - u)(1 - u) = 0 \quad (4.28)$$

ODE denklemi elde edilir. Burada dengeleme terimi  $m = 1$ ' dir. (4.27) denklemi için

$$u(\xi) = a_0 + a_1\varphi(\xi) + b_1\psi(\xi)$$

şeklinde bir çözüm fonksiyonu seçilir [42]. Buna göre bu çözüm (4.27) denkleminde yerine yazılır ve (3.9) - (3.15) eşitlikleri de bir arada düşünülür ise şu üç durum incelenir.

i)  $\lambda < 0$  ise,

Çözüm fonksiyonunu (4.28) de yerine yazarak ve (3.9) ve (3.11) 'i kullanarak, (4.27) denklemi  $\varphi$  ve  $\psi$  türünden bir polinom haline gelir. Bu polinomun her katsayısının sıfıra eşitlenmesi ile  $a_0, a_1, b_1$  ve  $\mu$  sabitlerine bağlı cebirsel denklem sistemleri aşağıdaki şekilde bulunmuştur,

$$\varphi^3 = -\lambda^2\sigma a_1^2 + 2\lambda^2\sigma a_1 - \mu^2 a_1^2 + \lambda b_1^2 + 2\mu^2 a_1$$

$$\varphi^3\psi = -\lambda^2\sigma a_1 b_1 + 2\lambda^2\sigma b_1 - 2\mu^2 a_1 b_1 + 2\mu^2 b_1$$

$$\begin{aligned} \varphi^2 = & -v\lambda^2\sigma a_1 - \lambda^2\sigma a_0 a_1 - \lambda^2\sigma a_1^2 - v\mu^2 a_1 - \lambda\mu a_1 b_1 - \mu^2 a_0 a_1 - \mu^2 a_1^2 - \lambda\mu b_1 \\ & - \lambda b_1^2 \end{aligned}$$

.

.

.

$$\begin{aligned} \psi = & v\lambda^2\sigma\mu a_1 - \lambda^3\sigma a_1 b_1 + \lambda^2\mu\sigma a_0 a_1 + v\mu^3 a_1 + \lambda^3\sigma b_1 - 2\lambda^2\sigma a_0 b_1 + \lambda\mu^2 a_1 b_1 \\ & + \mu^3 a_0 a_1 + \lambda^2\sigma b_1 - \lambda\mu^2 b_1 - 2\lambda\mu\sigma b_1^2 - 2\mu^2 a_0 b_1 + \mu^2 b_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi^0 = & v\lambda^3\sigma a_1 - \lambda^3\sigma a_0 a_1 - v\lambda\mu^2 a_1 - \lambda^2\mu a_1 b_1 - \lambda^2\sigma a_0^2 - \lambda\mu^2 a_0 a_1 + \lambda^2\mu b_1 + \lambda^2\sigma a_0 \\ & + \lambda^2 b_1^2 - \mu^2 a_0^2 + \mu^2 a_0 \end{aligned}$$

Yukarıdaki cebirsel denklem sistemlerini Mathematica yardımı ile çözerek, Burgers-Huxley denkleminin çözüm kümesini şu şekilde elde ederiz:

$$a_0 = \frac{1}{2}, a_1 = -1, b_1 = \frac{1}{2}\sqrt{16\mu^2 + \sigma}, v = -2k + \frac{1}{2}, \lambda = -\frac{1}{4} \quad (4.29)$$

$\varphi = \frac{G'}{G}$  ve  $\psi = \frac{1}{G}$  çözüm fonksiyonunda yerine yazılmak üzere,

$$u(\xi) = \frac{\sqrt{-\lambda}\{A_1 \cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_2 \sinh(\sqrt{-\lambda}\xi)\}}{A_1 \sinh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_2 \cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + \frac{\mu}{\lambda}} + \frac{b_1}{\sqrt{\lambda}\{A_1 \sinh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_2 \cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + \frac{\mu}{\lambda}\}} + b_0 \quad (4.30)$$

$$u(\xi) = \frac{\frac{1}{2}\{A_1 \cosh(\frac{\xi}{2}) + A_2 \sinh(\frac{\xi}{2})\}}{A_1 \sinh(\frac{\xi}{2}) + A_2 \cosh(\frac{\xi}{2}) - 4\mu} + \frac{\frac{1}{2}\sqrt{16\mu^2 + \sigma}}{A_1 \sinh(\frac{\xi}{2}) + A_2 \cosh(\frac{\xi}{2}) - 4\mu} + \frac{1}{2} \quad (4.31)$$

bulunur.  $A_1 = 0, A_2 = \sqrt{-\sigma}$  ve  $\mu = 0$  için, bükülme hareketli dalga çözümünü şu şekilde elde ediyoruz,

$$u(\xi) = \frac{1}{2}(\tanh(\frac{\xi}{2}) + \operatorname{sech}(\frac{\xi}{2}) + 1) \quad (4.32)$$

Son olarak,  $\xi = x - vt$  yerine yazılırsa Burger-Huxley denkleminin hareketli dalga çözümünü

$$u(x - vt) = \frac{1}{2}(\tanh(x - vt) + \operatorname{sech}(x - vt) + 1) \quad (4.33)$$

şeklinde elde ederiz. Benzer şekilde, yine  $A_1 = \sqrt{\sigma}, A_2 = 0$  ve  $\mu = 0$  alarak hareketli dalga çözümünü şu şekilde elde ediyoruz,

$$u(x - vt) = \frac{1}{2}(\coth(x - vt) + \operatorname{csch}(x - vt) + 1). \quad (4.34)$$

ii)  $\lambda > 0$  ise,

1.duruma benzer şekilde, denklem sisteminin çözülmesi ile aşağıdaki gibi keyfi değer kümesi elde edilir,

$$a_0 = \frac{1}{2}, a_1 = -1, b_1 = \frac{1}{2}\sqrt{16\mu^2 - \sigma}, v = -2k + \frac{1}{2}, \lambda = -\frac{1}{4} \quad (4.35)$$

$\varphi = \frac{G'}{G}$  ve  $\psi = \frac{1}{G}$  alınarak

$$u(\xi) = \frac{\sqrt{-\lambda}\{A_1 \cos(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_2 \sin(\sqrt{-\lambda}\xi)\}}{A_1 \sin(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_2 \cos(\sqrt{-\lambda}\xi) + \frac{\mu}{\lambda}} + \frac{b_1}{\sqrt{\lambda}\{A_1 \sin(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_2 \cos(\sqrt{-\lambda}\xi) + \frac{\mu}{\lambda}\}} + b_0 \quad (4.36)$$

$$u(\xi) = \frac{\frac{1}{2}\{A_1 \cos(\frac{\xi}{2}) + A_2 \sin(\frac{\xi}{2})\}}{A_1 \sin(\frac{\xi}{2}) + A_2 \cos(\frac{\xi}{2}) + 4\mu} + \frac{\frac{1}{2}\sqrt{16\mu^2 - \sigma}}{A_1 \sin(\frac{\xi}{2}) + A_2 \cos(\frac{\xi}{2}) + 4\mu} + \frac{1}{2} \quad (4.37)$$

bulunur.

$A_1 = 0, A_2 = \sqrt{\sigma}$  ve  $\mu = 0$  için, bükülme hareketli dalga çözümünü şu şekilde elde ediyoruz,

$$u(\xi) = \frac{1}{2}(\tan\left(\frac{\xi}{2}\right) + \operatorname{isec}\left(\frac{\xi}{2}\right) + 1) \quad (4.38)$$

$\xi = x - vt$  için

$$u(x - vt) = \frac{1}{2}(\tan(x - vt) + \operatorname{isec}(x - vt) + 1). \quad (4.39)$$

Benzer şekilde, yine  $A_1 = \sqrt{\sigma}, A_2 = 0$  ve  $\mu = 0$  alarak hareketli dalga çözümünü şu şekilde elde ederiz,

$$u(x - vt) = \frac{1}{2}(\cot(x - vt) + \operatorname{icsc}(x - vt) + 1) \quad (4.40)$$

*iii)*  $\lambda = 0$  ise, Burgers-Huxley denklemi

$$a_0 = 0, a_1 = 0, b_1 = 0, \mu = \mu$$

şeklinde aşık bir çözüme sahip olur.

## 5. SONUÇ

Uygulamalı matematikte lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerini bulmak oldukça önemlidir. Çünkü bu denklemler fizik, kimya, biyoloji ve mühendislik alanlarında ortaya çıkan problemlerin matematiksel modellemeleridir. Bu problemlerin doğası hakkında bilgi sahibi olmak için modellemesi yapılan diferensiyel denklemin çözümünü bilmek gerekir. Bu yüzden uygulamalı matematik alanında çalışan bilim adamları son zamanlarda lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin analitik çözümleri üzerine yoğunlaşmışlardır. Böylece bir çok analitik metot literatüre kazandırılmıştır.

Bu tezde literatürde var olan ve birçok uygulaması bulunan  $\left(\frac{G'}{G}\right)$  ve  $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$  açılım metotlarının analizleri yapılarak bazı lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlere uygulanmıştır. Önce Burgers benzeri denkleminin  $\left(\frac{G'}{G}\right)$  metodu yardımıyla trigonometrik, hiperbolik ve rasyonel çözümleri elde edilmiştir. Elde edilen çözümlerin denklemi sağladığı Mathematica bilgisayar programı kullanılarak gösterilmiştir. Daha sonra  $(2 + 1)$  - boyutlu Tipik Kırılma Denklemine ve Burgers-Huxley denklemine  $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$  metodu uygulanarak trigonometrik, hiperbolik ve rasyonel çözümleri elde edilmiştir. Elde edilen çözümlerin denklemi sağladığı da program yardımı ile gösterilmiştir.

Bu çalışma lineer olmayan buna benzer kısmi diferensiyel denklemlerin analitik çözümlerinin hesaplanmasında ve bu denklemlerin fiziksel yapısının incelenmesi konusunda bilim adamlarına yararlı olacaktır.

## KAYNAKLAR

- [1] **Russell, J. S.**, 1844. Report on Waves, 14th meeting of the British Association for the Advancement of Science, London: BAAS.
- [2] **Zabusky, N. J. and Kruskal, M. D.**, 1965. Interaction of solitons incollisionless plasma and the recurrence of initial states, *Physical Review Letters*, **15**, 240-243.
- [3] **Shang, Y.**, 2007. Bäcklund transformation, Lax pairs and explicit exact solutions for the shallow water waves equation, *Applied Mathematics and Computation*, **187**, 1286-1297.
- [4] **Abourabia, A.M. and El Horbaty, M. M.**, 2006. On solitary wave solutions for the two-dimensional nonlinear modified Kortweg–de Vries–Burger equation, *Chaos, Solitons & Fractals*, **29**, 354-364.
- [5] **Bock, T. L. and Kruskal, M. D.**, 1979. A two-parameter Miura transformation of the Benjamin-Ono equation, *Physics Letters A*, **74**, 173-176.
- [6] **Drazin, P. G. and Jhonson, R. S.**, 1989. Solitons: An Introduction, Cambridge University Press, Cambridge.
- [7] **Matveev, V. B. and Salle, M. A.**, 1991. Darboux transformations and solitons, Springer, Berlin.
- [8] **Cariello, F. and Tabor, M.**, 1989. Painlevé expansions for nonintegrable evolution equations, *Physica D*, **39**, 77-94.
- [9] **Clarkson, P. A.**, 1989. New Similarity Solutions for the Modified Boussinesq Equation, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **22**, 2355-2367.
- [10] **Chuntao, Y.**, 1996. A simple transformation for nonlinear waves, *Physics Letters A*, **224**, 77-84.
- [11] **Feng, Z. S.**, 2002. The first integral method to study the Burgers-Korteweg – deVries equation, *Journal Physics A*, **35**, 343-349.
- [12] **He, J. H. and Wu, X. H.**, 2006. Exp-function method for nonlinear wave equations, *Chaos, Solitons & Fractals*, **30**, 700-708.
- [13] **Malfliet, W.**, 1992. Solitary wave solutions of nonlinear wave equations, *American Journal of Physics*, **60**, 650-654.
- [14] **Fan, E.**, 2000. Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations, *Physics Letters A*, **277**, 212-218.
- [15] **Elwakil, S. A., El-labany, S. K., Zahran, M. A. and Sabry, R.**, 2002. Modified extended tanh-function method for solving nonlinear partial differential equations, *Physics Letters A*, **299**, 179-188.
- [16] **Zheng, X., Chen, Y. and Zhang, H.**, 2003. Generalized extended tanh-function method and its application to (1+1)-dimensional dispersive long wave equation, *Physics Letters A*, **311**, 145-157.

- [17] **Chen, H. and Zhang, H.**, 2004. New multiple soliton solutions to the general Burgers-Fisher equation and the Kuramoto-Sivashinsky equation, *Chaos, Solitons & Fractals*, **19**, 71-76.
- [18] **Fu, Z., Liu, S., Liu, S. and Zhao, Q.**, 2001. New Jacobi elliptic function expansion and new periodic solutions of nonlinear wave equations, *Physics Letters A*, **290**, 72-76.
- [19] **Chen, H.T. and Hong-Qing, Z.**, 2004. New double periodic and multiple soliton solutions of the generalized  $(2 + 1)$ -dimensional Boussinesq equation, *Chaos, Solitons & Fractals*, **20**, 765-769.
- [20] **Chen, Y., Wang, Q. and Li B.**, 2004. Jacobi elliptic function rational expansion method with symbolic computation to construct new doubly periodic solutions of nonlinear evolution equations, *Zeitschrift für Naturforschung A*, **59**, 529-536.
- [21] **Yokuş, A. and Tuz M.**, 2017. An Application of a new version of  $G'/G$  Expansion Method, *AIP Conference Proceedings*, **1798**, 020165.
- [22] **Yokuş, A.**, 2011. Bazı özel lineer olmayan diferensiyel denklemlerin çözümlerinin elde edilmesi ve bu çözümlerin karşılaştırılması, Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- [23] **Inan, I.E., Ugurlu, Y., and Inc, M.**, 2015. New Applications of the  $(G'/G, 1/G)$ -Expansion Method, *Acta Physica Polonica A*, **128** (3), 245-251.
- [24] **Wang, M., Li, X. and Zhang, J.**, 2008. The  $(G'/G)$ -expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics, *Physics Letters A*, **372**, 417-423.
- [25] **Guo, S. and Zhou, Y.**, 2010. The extended  $(G'/G)$ -expansion method and its applications to the Whitham–Broer–Kaup–Like equations and coupled Hirota–Satsuma KdV equations, *Applied Mathematics and Computation*, **215**, 3214-3221.
- [26] **Lü, H.L., Liu, X.Q. and Niu, L.**, 2010. A generalized  $(G'/G)$  -expansion method and its applications to nonlinear evolution equations, *Applied Mathematics and Computation*, **215**, 3811-3816.
- [27] **Yokuş, A.**, 2015. An Expansion Method for Finding Wave solutions to nonlinear, *İstanbul Ticaret Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, **14** (27), 65-80.
- [28] **Li, L., Li, E. and Wang, M.**, 2010. The  $(G'/G, 1/G)$ -expansion method and its application to travelling wave solutions of the Zakharov equations, *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, **25**, 454-462.
- [29] **Zayed, E. M. E. and Alurfi, K. A. E.**, 2014. The  $(G'/G, 1/G)$ -Expansion Method and Its Applications for Solving Two Higher Order Nonlinear Evolution Equations, *Mathematical Problems in Engineering*, **746538**, 1-20.
- [30] **Zayed, E. M. E. and Alurfi, K. A. E.**, 2014. The  $(G'/G, 1/G)$ -Expansion Method and Its Applications to Find the Exact Solutions of Nonlinear

PDEs for Nanobiosciences, *Mathematical Problems in Engineering*, **521712**, 1-10.

- [31] **Demiray, S., Unsal, O. and Bekir, A.**, 2014. New Exact Solutions for Boussinesq Type Equations by using  $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$  and  $(1/G')$  - Expansion Methods, *Acta Physica Polonica A*, **125** (5), 1093-1098.
- [32] **Zayed, E.M.E. and Alurrfi, K.A.E.**, 2014. The  $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$  - Expansion Method and its Applications to Find the Exact Solutions of Nonlinear PDEs for Nanobiosciences, *Mathematica Problems In Engineering*, **521712**, 10.
- [33] **Manafian, J., Lakestani, M.**, 2015. Solitary wave and periodic wave solutions for Burgers, Fisher, Huxley and combined forms of these equations by the  $(G'/G)$ -expansion method, *Pramana-Journal of Physics*, **85**, 31-52.
- [34] **Duran, S., Uğurlu, Y., and Inan, I. E.**, 2012. G'/G Expansion Method for (3+1)-dimensional Burgers and Burgers Like Equations, *World Applied Sciences Journal*, **20** (12), 1607-1611.
- [35] **Bateman, H.**, 1915. Some recent researches on the motion of fluids, *Monthly Weather Review*, **43**, 163–170.
- [36] **Burger, J.M.**, 1948. A mathematical model illustrating the theory of turbulence, *Advances in Applied Mechanics*, **1**, 171–199.
- [37] **Wazwaz, A.M.**, 2014. Kinks and travelling wave solutions for Burgers-like equations, *Applied Mathematics Letters*, **38**, 174–179.
- [38] **Vaganan, B. M.**, 2012. Cole-Hopf transformations for higher dimensional Burgers equations with variable coefficients, *Studies in Applied Mathematics*, **129** (3), 300–308.
- [39] **Bulut, H., Tuz, M and Akturk, T.**, 2013. New Multiple Solution to the Boussinesq Equation and the Burgers-Like Equation, *Journal of Applied Mathematics*, **952614**, 1-6.
- [40] **Gencoglu, T.**, 2013. Complex Solutions for Burgers-Like Equation, *Turkish Journal of Science & Technology*, **8**, 121-123.
- [41] **Miah, M. M., Shahadat Ali, H. M., Akbar, M. A., and Wazwaz, A.M.**, 2017. Some applications of the  $(G/G, 1/G)$ -expansion method to find new exact solutions of NLEEs, *Eur. Phys. J. Plus*, **132**, 252.
- [42] **Huda, M. A., Samsuzzoha, M. and Akbar, M. A.**, 2019. Searching soliton solutions to the Burgers-Huxley and the Klein Gordon Equations, *Global Journal of Advanced Research*, **6**, (2), 67 -77.

## ÖZGEÇMİŞ

1988 Balıkesir/Bigadiç doğumluyum. İlkokulu Bigadiç Cumhuriyet İlkokulu'nda, ortaokulu Bigadiç Atatürk Ortaokulu'nda, liseyi Bigadiç Cumhuriyet Lisesi'nde tamamladım. 2005 yılında Uşak Üniversitesi Matematik Bölümünü kazandım ve 2010 yılında lisans eğitimimi tamamladım. 2014 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisansa başladım ve halen devam etmekteyim. 2019 yılında Rize Fatih Anadolu Lisesi'ne Matematik Öğretmeni olarak atandım ve halen devam etmekteyim.