

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Erhan BATMAZ

BAZI METRİKLENEBİLME TEOREMLERİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA - 2023

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

BAZI METRİKLENEBİLME TEOREMLERİ

Erhan BATMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 03/03/2023 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

.....
Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT
DANIŞMAN

.....
Doç. Dr. Şehmus FINDIK
ÜYE

.....
Prof. Dr. Tuncay TUNÇ
ÜYE

Bu Tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.

Kod No:

Prof. Dr. Sadık DİNÇER
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI METRİKLENEBİLME TEOREMLERİ

Erhan BATMAZ

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİMDALI

Danışman : Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT
Yıl: 2023, Sayfa: 75
Jüri : Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT
: Doç. Dr. Şehmus FINDIK
: Prof. Dr. Tuncay TUNÇ

Bu tezde topolojinin başlıca çalışma konularından birisi olan “Bir (X, τ) topolojik uzayı ne gibi topolojik özelliklere sahip olursa τ topolojisi X üzerinde tanımlı uygun bir d metriğinin belirlediği τ_d topolojisine eşit olabilir?” sorusu ile ifade edilen metriklenebilme problemine dair çalışmalar, sonuçlar araştırılmış ve derlenmiştir. Herhangi bir X uzayının açık kümelere dayalı belirli koşulların gerekliliği ve yeterliliği ile metriklenebilir olduğu gözlemlenmiştir.

Derleme niteliğindeki bu tez çalışmasında bir X topolojik uzayının metriklenebilmesi için gerek ve yeter koşulun *Nagata-Smirnov Metriklenebilme Teoremi* ile ifade edildiği üzere “ X uzayının *regüler* ve *σ -yerel sonlu tabana* sahip olmasıdır” ve *Smirnov Metriklenebilme Teoremi* ile ifade edildiği üzere “ X uzayının *yerel metriklenebilir*, *parakompakt Hausdorff* uzayı olmasıdır” .

Anahtar Kelimeler: Yerel sonluluk, Parakompaktlık, metriklenebilir uzaylar, Nagata-Smirnov Metriklenebilme Teoremi, δ -yerel sonluluk

ABSTRACT

MSc. THESIS

SOME METRICABILITY THEOREMS

Erhan BATMAZ

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor : Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT
Year: 2023, Pages: 75
Jury : Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT
: Assoc. Prof. Dr. Şehmus FINDIK
: Prof. Dr. Tuncay TUNÇ

In this thesis, studies on the metricability problem, which is one of the main study subjects of topology, expressed with the question “Which topological properties belonging to a (X, τ) topological space can make the τ topology be equal to the τ_d topology determined by an appropriate metric d on X ?” has been researched and compiled.

In this compilation thesis study, the necessary and sufficient conditions for the metrization of a topological space X as expressed by the *Nagata-Smirnov Metricability Theorem*, are that “ X space must have a *regular* and *σ -local finite base*” and as expressed by the *Smirnov Metricability Theorem*, “local metricability of X space is a paracompact Hausdorff space.”

Key Words: Locally Finiteness, Paracompactness, Metrizable Spaces, Nagata-Smirnov Metrization Theorem, δ -Locally Finiteness

GENİŞLETİLMİŞ ÖZET

Metrik uzaylar Maurice Fréchet' in 1906 yılında yayınladığı meşhur ve kritik tezinde tanımlandığından beri topolojinin ve tabii olarak kalkülüsün en temel ve önemli uzayları arasında yer almıştır. Genel topoloji, bilhassa ayrılabilir metrik uzayların özellikleri üzerine uzun yıllar yoğun biçimde eğilmiştir. Ancak ondan daha fazla dikkat çeken ve üzerinde kafa yorulan bir başka temel konu metriklenebilme sorusu olmuştur. Çünkü matematikçiler için çok önemli olan uzayların birçoğu metriklenebilirdir ya da istendik olan uzayın metriklenebilir olmasıdır. Bundan dolayı topolojinin önemli başlıca problemlerinden biri herhangi bir topolojik uzay için bu topolojik uzayı her daim metriklenebilir yapacak gerekli ve yeterli koşulları bulmak olmuştur.

Peki hangi topolojik uzaylar metriklenebilirdir? Bir başka deyişle; hangi topolojik özelliklerle donatılmış bir X topolojik uzayının topolojisi, X üzerinde tanımlanmış bir metriğin belirlediği topolojiye eşit olabilir? Çünkü Bir (X, τ) topolojik uzayı verildiğinde, X üzerinde $\tau_d = \tau$ koşulunu sağlayan bir d metriği varsa bu τ ya metrik topoloji ve (X, τ) topolojik uzayına da metriklenebilir topolojik uzay denildiğini biliyoruz. 1920'lerin başında ortaya atılan bu soruyla o tarihten bugüne değin çalışılmıştır. (X, τ) verildiğinde X kümesi üzerinde böyle bir metriğin bulunabilmesi için sadece açık kümelere dayalı bir dizi koşulların bulunup bulunamayacağı ile ilgili araştırmalar Urysohn' nun çalışmalarına rağmen 1950'li yılların başına kadar arzu edilen aşamaya gelememişti. 1923 yılında kanıtlanan ünlü Urysohn Metriklenebilme Teoremi örneğin, bu konuda çok kullanışlı bir yeter koşul sunmaktadır.

Kompaktlığın doğal bir genelleştirilmesi olan parakompaktlık kavramına ilişkin bazı teorem ve sonuçlardan hareketle, metriklenebilirlik kavramı genel topolojik uzaylar için genelleştirilmiştir. Aynı zamanda bu çalışmada metriklenebilme teorisi üzerine yapılan uygulamalar için kolaylık sağlayan bir

takım önemli teorem ve sonuçlar da verilmiştir. 1944 yılında parakompaktlığın tanımlanması ve dört yıl sonra her sözde metrik uzayın parakompakt olduğunun kanıtlanmasının ardından metriklenebilme konusunda ilginç pek çok karakterizasyon verilmiştir. Bu yıllarda ise sahneye Bing, Nagata ve Smirnov çıkıp birbirlerinden bağımsız olarak genel metriklenebilme teoremini kanıtlayarak genel topolojinin baş problemlerinden birine cevap üreterek önemli bir gelişme kaydedilmiş oldu.

Bu tez çalışmasında, Urysohn Metriklenebilme Teoremi, Nagata-Smirnov Metriklenebilme Teoremi ve Smirnov Metriklenebilme Teoremi gibi önemli bazı metriklenebilme teoremi ayrıntılı bir biçimde ele alınıp kanıtları ile verilmiştir.

Bu tezin ana gövdesi olarak Nagata ve Smirnov tarafından bağımsız geliştirilen bazı metriklenebilme teoremlerini inceleyeceğiz. Nagata-Smirnov Metriklenebilme Teoremi, Smirnov Metriklenebilme Teoremi odağımız olmak üzere bu teoremlerin ispatında kullanılacak olan Genel Metrikleştirme Teoremi, Urysohn Lemma ve Urysohn Metriklenebilme Teoremi yanı sıra; Parakompaktlık ve Yerel Sonluluk gibi metriklenebilme koşulları ile ilgili özelliklere ve teoremlere de yer vereceğiz.

Urysohn Metrikleştirme Teoremi, bir topolojik uzay ne zaman metriklenebilir sorusuna “Bir X uzayının metrikleştirilebilir olması için regüler ve sayılabilir bir bazının olmasıdır.” diyerek önemli bir yanıt üretmiş oldu. Ancak daha güçlü ve rafine bir teorem ile ifade edilebilir mi sorusunu da beraberinde getirdi. Bu durumda X üzerinde X in metriklenebilir olması için hem gerekli hem de yeterli olan koşulları yani metrikliğe eşdeğer koşulları bularak teoremi güçlendirmek gerekecekti.

Urysohn Metrikleştirme Teoremindeki regülerlik koşulunun gerekli olduğunu biliyoruz, ancak sayılabilir bazının olması temel bir koşul değil. Dolayısıyla yapılacak bariz şey, sayılabilirlik koşulunu daha zayıf bir koşulla değiştirmek olmalıdır. Ancak bu öylesine hassas bir iştir ki; bu koşulun metrikleştirmeyi garanti edecek kadar güçlü ve tüm metrik uzayların da

sağlayacağı kadar da zayıf olması gerekir. Böyle bir durumda doğru hipoteze ulaşmak meselenin yarısından fazlasını çözmek anlamına geliyordu.

Sonunda J.Nagata ve Y.Smirnov tarafından bağımsız olarak formüle edilen bu koşul, yeni bir şey olan yerel sonluluk kavramını içerir. “ X uzayının alt kümelerinden oluşan bir $\mathcal{A}$ ailesi için, X in her noktasının $\mathcal{A}$ nın yalnızca sonlu sayıda elemanı ile kesişen komşuluğu varsa yerel sonludur.” diyoruz.

Parakompaktlık kavramı kompaktlığın son yıllarda keşfedilen en yararlı genellemelerinden biri olma özelliğini taşımaktadır. Özellikle topoloji ve diferansiyel geometrideki uygulamalar için oldukça kullanışlıdır. Burada yalnızca bir uygulama olarak bir sonraki bölümde ispatını yapacağımız metriklenebilme teoreminde kullanılmak adına verilecektir.

Bu kavram ilk kez 1944’te Dieudonné tarafından kompaktlığın doğal bir genelleştirilmesi olarak verilmiştir. Bu kavram Stone tarafından her metrik uzayın parakompakt olduğunun gösterilmesi ile daha büyük önem kazanmış ve bu sonuç Smirnov, Nagata ve Bing tarafından Genel Metriklenebilme Teoreminin ispatlanmasında kullanılmıştır.



TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans öğrenimim süresince bilgi ve birikimleriyle çalışmalarımı yönlendiren ve her daim akademik yönden kendimi geliştirmeme katkı sağlayan, danışmanım Sayın Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT'a, tez aşamasında okul ders programımın yüksek lisans yapmamı aksatmayacak şekilde düzenlenmesine olanak sağlayan çalıştığım okuluma, her türlü desteklerini esirgemeyip sabırla bana güvenerek moral ve motivasyon kaynağı olan sevgili Annem Meryem BATMAZ'a ve sevgili Babam Malik BATMAZ'a, tabiki de tez çalışmamdan kaynaklı kendisini ihmal etmeme karşın beni her durumda anlayışla karşılayıp sürekli başarabileceğim konusunda telkinde bulunan, çalışmam konusunda teşvik eden, manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen sevgili eşim Saadet Ertingü BATMAZ'a desteklerinden ötürü sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SAYFA

ÖZ	I
ABSTRACT.....	II
GENİŞLETİLMİŞ ÖZET	III
TEŞEKKÜR.....	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	3
2.1. Metrik Uzaylar ve Sürekli Fonksiyonlar.....	3
2.2. Kompaktlık	5
2.3. Sayılabilirlik ve Ayırma Aksiyomları.....	10
2.4. Urysohn Lemma ve Urysohn Metriklenebilme Teoremi	20
3. BAZI METRİKLENEBİLME TEOREMLERİ	29
3.1. Yerel Sonluluk.....	31
3.2. Nagata-Smirnov Metriklenebilme Teoremi.....	36
3.3. Parakompaktlık	45
3.4. Smirnov Metriklenebilme Teoremi	63
3.5. Metriklenebilir Uzaylar İçin Bir Toplam Teoremi (H. De VRIES).....	65
4. SONUÇ	71
KAYNAKLAR	73
ÖZGEÇMİŞ	75



1. GİRİŞ

Bir (X, τ) topolojik uzayı verildiğinde, X üzerinde $\tau_d = \tau$ koşulunu sağlayan bir d metriği varsa bu τ ya metrik topoloji ve (X, τ) topolojik uzayına da metriklenebilir topolojik uzay denir. (X, τ) verildiğinde X kümesi üzerinde böyle bir metriğin bulunabilmesi için sadece açık kümelerle dayalı bir dizi koşulların bulunup bulunamayacağı ile ilgili araştırmalar Urysohn 'nun çalışmalarına rağmen 1950'li yılların başına kadar arzu edilen aşamaya gelememişti. Bu yıllarda ise sahneye Bing, Nagata ve Smirnov çıkıp birbirlerinden bağımsız olarak genel metriklenebilme teoremini kanıtlayarak genel topolojinin baş problemlerinden birine cevap üreterek önemli bir gelişme kaydedilmiş oldu.

Bu tezin ana gövdesi olarak Nagata ve Smirnov tarafından bağımsız geliştirilen bazı metriklenebilme teoremlerini inceleyeceğiz. Nagata-Smirnov Metriklenebilme Teoremi, Smirnov Metriklenebilme Teoremi odağımız olmak üzere bu teoremlerin ispatında kullanılacak olan Genel Metriklenebilme Teoremi, Urysohn Lemma ve Urysohn Metriklenebilme Teoremi yanı sıra; Parakompaktlık ve Yerel Sonluluk gibi metriklenebilme koşulları ile ilgili özelliklere ve teoremlere de yer vereceğiz.

Urysohn Metriklenebilme Teoremi, bir topolojik uzay ne zaman metriklenebilir sorusuna “Bir X uzayının metriklenebilir olması için regüler ve sayılabilir bir bazının olmasıdır.” diyerek önemli bir yanıt üretmiş oldu. Ancak daha güçlü ve rafine bir teorem ile ifade edilebilir mi sorusunu da beraberinde getirdi. Bu durumda X üzerinde X ’in metriklenebilir olması için hem gerekli hem de yeterli olan koşulları yani metrikliğe eşdeğer koşulları bularak teoremi güçlendirmek gerekecekti.

Urysohn Metriklenebilme Teoremindeki regülerlik koşulunun gerekli olduğunu biliyoruz, ancak sayılabilir bazının olması temel bir koşul değil. Dolayısıyla yapılacak bariz şey, sayılabilirlik koşulunu daha zayıf bir koşulla

değiştirmek olmalıdır. Ancak bu öylesine hassas bir iştir ki; bu koşulun metriklenebilmeyi garanti edecek kadar güçlü ve tüm metrik uzayların da sağlayacağı kadar da zayıf olması gerekir. Böyle bir durumda doğru hipoteze ulaşmak meselenin yarısından fazlasını çözmek anlamına geliyordu.

Sonunda J.Nagata ve Y.Smirnov tarafından bağımsız olarak formüle edilen bu koşul, yeni bir şey olan yerel sonluluk kavramını içerir. “ X uzayının alt kümelerinden oluşan bir $\mathcal{A}$ ailesi için, X in her noktasının $\mathcal{A}$ nın yalnızca sonlu sayıda elemanı ile kesişen komşuluğu varsa yerel sonludur.” diyoruz.

Parakompaktlık kavramı kompaktlığın son yıllarda keşfedilen en yararlı genellemelerinden biri olma özelliğini taşımaktadır. Özellikle topoloji ve diferansiyel geometrideki uygulamalar için oldukça kullanışlıdır. Burada yalnızca bir uygulama olarak bir sonraki bölümde ispatını yapacağımız metriklenebilme teoreminde kullanılmak adına verilecektir.

Bu kavram ilk kez 1944’te Dieudonné tarafından kompaktlığın doğal bir genelleştirilmesi olarak verilmiştir. Bu kavram Stone tarafından her metrik uzayın parakompakt olduğunun gösterilmesi ile daha büyük önem kazanmış ve bu sonuç Smirnov, Nagata ve Bing tarafından Genel Metriklenebilme Teoreminin ispatlanmasında kullanılmıştır.

Bize aşina olan uzayların çoğu zaten parakompakttır. Örneğin, bu tanımın doğrudan bir sonucu olarak her kompakt uzay aynı zamanda parakompakttır. Ayrıca Stone tarafından ifade edilen ve ispatını vereceğimiz bu teoreme göre “Her metriklenebilir uzay parakompakttır.” Dolayısıyla parakompakt uzaylar sınıfı, incelediğimiz en önemli iki uzay sınıfını ve daha nice uzayları da içerir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde tezde kullanacağımız bazı temel tanım ve teoremleri vereceğiz. Bunu yaparken çoğu önerme niteliğindeki ifadelerin kanıtlarına girmeden kısa hatırlatmalar şeklinde verilecektir. Ancak bu tezin konusu olan bazı metriklenebilme teoremlerinin ifade edilmesinde kullanılacak olan önemli teoremler ve önermeler ispatları ile verilmiştir. Özellikle Urysohn Lemma, Urysohn Metriklenebilme Teoremi ve genel metriklenebilirlik bu kapsamda değerlendirilmiştir.

2.1. Metrik Uzaylar ve Sürekli Fonksiyonlar

Tanım 2.1.1. X kümesi boştan farklı ve $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyon olsun.

- (i) Her $x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$ ve $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- (ii) Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$
- (iii) Her $x, y, z \in X$ için $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

özellikleri sağlanıyorsa d 'ye X üzerinde metriktir denir. d metrik ile X kümesine metrik uzay denir ve (X, d) ile gösterilir.

X 'de verilen bir d metriği için $d(x, y)$ 'e x ve y arasındaki uzaklık ve (i). ve (iii). özelliklerine ise, metrik aksiyomları denir.

$\varepsilon > 0$ olmak üzere $B_d(x, \varepsilon) = \{ y \mid d(x, y) < \varepsilon \}$ kümesine merkezi x noktasında olan bir ε - top denir. $B_d(x, \varepsilon)$ kümesi yerine $B(x, \varepsilon)$ de yazılabilir.

Tanım 2.1.2. (X, d) metrik uzay ve A ve B , X in boştan farklı alt uzayları olsun.

Her $x \in X$ için x ten A ya uzaklığı

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$$

olarak tanımlarız.

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$$

A ile B arasındaki uzaklığı ise

Sabit bir A için $x, y \in X$ verildiğinde, her $a \in A$ için

$$d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$$

olup burada

$$d(x, A) - d(x, y) \leq \inf d(y, a) = d(y, A)$$

Böylece;

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik bize $d(x, A)$ fonksiyonunun x için sürekli fonksiyonu olduğunu gösterir.

Şimdi Lebesgue sayısı kavramını tanıtalım. Metrik uzayın (X, d) sınırlı bir A alt kümesinin çapının şu sayı olduğunu hatırlayalım:

$$\sup \{ d(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A \}$$

Lemma 2.1.3. (Lebesgue number lemma) $\mathcal{A}$, (X, d) metrik uzayının bir örtüsü olsun. Eğer X kompakt ise, $\delta > 0$ vardır, öyle ki X in çapı δ dan küçük olan her bir alt kümesi için onu içeren bir $\mathcal{A}$ nın bir elemanı vardır.

Burada δ sayısına $\mathcal{A}$ örtüsü için bir Lebesgue Sayısı denir.

İspat. Munkres, (2000) Lemma 27.5' e bakınız.

Tanım 2.1.4. (X, d_x) ve (Y, d_y) birer metrik uzay olmak üzere ve bir

$f: (X, d_x) \rightarrow (Y, d_y)$ fonksiyon olsun. Her $\epsilon > 0$ ve tüm $x_0, x_1 \in X$ çifti için

$$d_x(x_0, x_1) < \delta \implies d_y(f(x_0), f(x_1)) < \epsilon$$

olacak şekilde ϵ ya bağlı bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa f fonksiyonu düzgün süreklidir denir.

Teorem 2.1.5. $f: (X, d_x) \rightarrow (Y, d_y)$ sürekli fonksiyon olsun. (X, d_x) kompakt metrik uzayı ve (Y, d_y) metrik uzayı ise f düzgün süreklidir.

İspat. Munkres, (2000) Lemma 27.6' ya bakınız.

2.2. Kompaklık

Tanım 2.2.1. $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzay ve $\mathcal{A}$ da X in alt kümelerinden oluşan bir aile olsun. Eğer $\mathcal{A}$ ailesinin elemanlarının birleşimi X e eşit ise, $\mathcal{A}$ ailesine X in bir örtüsü(veya örtümü) denir. Bu durumda;
Eğer $\mathcal{A}$ nın elemanları açık kümeler ise, $\mathcal{A}$ ailesine X in bir açık örtüsü,
Eğer $\mathcal{A}$ ın elemanları kapalı kümeler ise, $\mathcal{A}$ ailesine X in bir kapalı örtüsü denir.

Ayrıca bir örtümün eleman sayısı sonlu veya sayılabilir ise bu örtüme sırasıyla sonlu örtüm veya sayılabilir örtüm adı verilir.

Tanım 2.2.2. (X, τ) topolojik uzay ve $\mathcal{A}$ ailesi X in bir örtüsü olsun. Eğer $\mathcal{A}$ nın bir $\mathcal{A}'$ alt ailesinin elemanlarının birleşimi yine X e eşit oluyorsa yani X için bir örtü oluyorsa bu $\mathcal{A}'$ ailesine $\mathcal{A}$ nın alt örtüsü denir.

Tanım 2.2.3. X topolojik uzayının her açık örtüsünün bir sonlu alt örtüsü varsa, bu X uzayına kompakt uzay denir.

Tanım 2.2.4. $Y \subset X$ ve $\mathcal{A}$, X in bir alt kümeler ailesi olmak üzere $\mathcal{A}$ nın elemanlarının birleşimi Y yi içeriyorsa, $\mathcal{A}$ ya Y nin bir örtümü denir. Bu durumda, eğer $\mathcal{A}$ nın elemanları açık (kapalı) kümeler ise, $\mathcal{A}$ ya Y nin bir açık (kapalı) örtümü denir.

Eğer Y nin her açık örtümünün bir sonlu alt örtümü varsa Y alt uzayına kompakttır denir. Eğer $\mathcal{A}$ nın elemanları Y de açık ise, $\mathcal{A}$ ya Y nin kendisindeki bir açık örtümü denir. Eğer Y nin kendisindeki her açık örtümünün bir sonlu alt örtümü varsa, Y alt uzayına kendisinde kompakttır denir.

Aşağıdaki kompaktlık ile kendisinde kompaktlık kavramının denklğini gösterelim.

Örnekler 2.2.5.

1. $\mathbb{R}$ uzayı doğal topolojiye göre kompakt değildir:

$\mathcal{A} = \{(n, n+2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ailesi $\mathbb{R}$ bir açık örtümü olduğu açıktır:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} (n, n+2)$$

Ayrıca, bu açık örtümün $\mathbb{R}$ için sonlu bir alt örtüsü yoktur. Dolayısıyla, $\mathbb{R}$ uzayı doğal topolojiye göre kompakt değildir.

2. $\mathbb{R}$ uzayının $X = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}^+\right\}$ alt uzayı kompakttır:

$\mathcal{A}$ ailesi X in herhangi bir açık örtüsü olsun. O halde $\exists U \in \mathcal{A}$ için U kümesi X in 0 noktasını içerendir. U kümesi açık olduğundan $\exists (a, b)$ için $0 \in (a, b) \subset U$ dir.

$n \in \mathbb{N}$ yi $0 < \frac{1}{n} < b$ olacak şekilde seçelim. Açıkça $\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots, 0 \in (a, b) \subset U$ dir. O halde $\exists U_1, U_2, \dots, U_{n-1} \in \mathcal{A}$ için $1 \in U_1, \frac{1}{2} \in U_2, \dots, \frac{1}{n-1} \in U_{n-1}$ olup,

$\mathcal{A}' = \{U_1, U_2, \dots, U_{n-1}, U\} \subset \mathcal{A}$ alt ailesi X in sonlu alt örtüsüdür. Dolayısıyla, X uzayı kompakttır.

3. $(0, 1]$ yarı-açık aralığı kompakt değildir:

$(0, 1]$ aralığının $\mathcal{A} = \left\{\left(\frac{1}{n}, 1\right] \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ açık örtüsünü ele alalım.

$$(0, 1] = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n}, 1\right]$$

Açıkça, $\mathcal{A}$ nın $(0, 1]$ kümesi için bir sonlu alt örtümü yoktur. Dolayısıyla $(0, 1]$ kompakt değildir.

Açıkça görülür ki, benzer şekilde $(0, 1)$ de kompakt değildir.

4. Sonlu bir küme kompakttır.

Teorem 2.2.6. Kompakt uzayların kapalı alt uzayları da kompakttır.

İspat. Munkres, (2000) Theorem 26.2'e bakınız.

Sonuç 2.2.7. X bir topolojik uzay ve $F_1, F_2, \dots, F_n$ kümeleri de bu uzayın kapalı alt kümeler ailesi olsun.

$$F = \bigcup_{i=1}^n F_i \text{ kompakttır} \Leftrightarrow \text{Her } i = 1, 2, \dots, n \text{ için } F_i \text{ kompakttır.}$$

İspat. Açıktır.

Teorem 2.2.8. Hausdorff uzayların her kompakt alt uzayı kapalıdır.

İspat. Munkres, (2000) Theorem 26.3'e bakınız.

Teorem 2.2.9. Kompakt uzayların sürekli dönüşümler altındaki görüntüsü de kompakttır. Yani $f: X \rightarrow Y$ sürekli ve X kompakt uzay olsun. O halde $f(X)$ de kompakt uzaydır.

İspat. Munkres, (2000) Theorem 26.5'e bakınız.

Teorem 2.2.10. X bir kompakt uzay ve Y bir Hausdorff uzay olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu sürekli olsun. Aşağıdakiler doğrudur.

- (i) f surjektif (örten) ise f kapalı dönüşümdür.
- (ii) f injektif (içine) ise f gömme dönüşümüdür.
- (iii) f bijektif (birebir ve örten) ise f homeomorfizmadır.

İspat. Açıktır.

Teorem 2.2.11. Sonlu sayıda kompakt uzayların çarpımı da kompakttır.

İspat. Munkres, (2000) Theorem 26.7'ye bakınız.

Tanım 2.2.12. X bir topolojik uzay ve $\mathcal{A}$, X in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer $\mathcal{A}$ nın her $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ sonlu alt ailesi

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \neq \emptyset$$

koşulunu sağlıyorsa, $\mathcal{A}$ ailesi sonlu arakesit özelliğine sahiptir denir.

Teorem 2.2.13. X bir topolojik uzay olsun. X topolojik uzayının kompakt olması için gerek ve yeter koşul bu uzayda sonlu arakesit özelliğine sahip olan her kapalı kümeler ailesinin bütün elemanlarının arakesitinin boştan farklı olmasıdır.

İspat. Munkres, (2000) Theorem 26.9'a bakınız.

Sonuç 2.2.14. $C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_n \supset C_{n+1} \supset \dots$ bir kompakt uzayın kapalı boştan farklı alt kümeleri olsun. O zaman

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$$

olur.

İspat. Açıktır.

Teorem 2.2.15. X , en küçük üst sınır özelliğine sahip basit sıralı bir küme olsun. Sıralama topolojisinde, X teki her bir kapalı aralık kompaktır.

İspat. Munkres, (2000) Theorem 27.1'e bakınız.

Teorem 2.2.16. (İç içe Aralıklar Lemması) $\mathbb{R}$ kümesinde

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ \text{ için, } [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$$

özelliğine sahip boştan farklı kapalı ve sınırlı aralıkların koleksiyonu $\{[a_n, b_n]\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ olsun. O zaman,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} [a_n, b_n] \neq \emptyset$$

arakesiti boştan farklıdır.

İspat. Munkres, (2000) Theorem 27.1'e bakınız.

Teorem 2.2.17. $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde standart topoloji olsun. Her kapalı ve sınırlı $[a, b]$ aralığı $\mathbb{R}$ nin kompakt alt kümesidir.

İspat. Açıktır.

Teorem 2.2.18. $\mathbb{R}$ kümesinde kapalı ve sınırlı aralıklar $[a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]$ olsun. $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ kümesi $\mathbb{R}^n$ uzayında kompakt alt kümedir.

İspat. Açıktır.

Teorem 2.2.19. (Heine - Borel Teoremi) $\mathbb{R}^n$ üzerinde standart topolojiye ve standart metrik var olsun. $C \subset \mathbb{R}^n$ alt kümesinin kompakt olması için gerek ve yeter koşul C nin kapalı ve sınırlı olmasıdır.

İspat. Açıktır.

Teorem 2.2.20. (Ekstrem Değer Teoremi) $X \neq \emptyset$ topolojik uzay ve Y lineer sıralı uzay olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ sürekli fonksiyon olsun. Eğer X kompakt ise $\forall x \in X$ için $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ olacak şekilde $c, d \in X$ vardır.

İspat. Munkres, (2000) Theorem 27.4' bakınız.

2.3. Sayılabilirlik ve Ayırma Aksiyomları

Buradaki tanıtacağımız kavramlar, kompaktlık ve bağlantılılık gibi kalkülüs ve analiz çalışmalarından doğal olarak ortaya çıkmayan çok önemli özel durumları içermektedir. Yani; belirli bir uzayı metrik uzaya veya bir kompakt Hausdorff uzayına gömmek gibi problemler, analizden ziyade temel olarak topolojiye has problemlerdir. Bu yüzden bu ve bunun gibi problemlerin çözümü için sayılabilirlik ve ayırılabilirlik aksiyomlarına ihtiyaç vardır.

Bu bölümde işte bu güçlü aksiyomları tanıtacağız, bunların sonuçlarını inceleyip (şimdilik) temel amacımız olan Urysohn Metriklenebilme Teoremi'nin ispatına giden yolu da inşa edeceğiz. Kısaca bu teorem diyor ki; "Eğer X topolojik bir uzayı belirli bir sayılabilirlik (2.sayılabilir) ve belirli bir ayırma aksiyomunu (regülerlik) sağlıyorsa X bir metrik uzaya gömülebilir yani metriklenebilirdir."

Tanım 2.3.1. Eğer bir topolojik uzayın x_0 noktasında öyle bir sayılabilir komşuluklar ailesi vardır ki; x_0 'ın herhangi bir komşuluğu bu ailenin en az bir elemanını içerirse bu uzay x_0 noktasında bir 'sayılabilir komşuluk tabanına sahiptir' denir.

Tanım 2.3.2. Eğer bir (X, τ) topolojik uzayın her noktasında bir sayılabilir komşuluk tabanı varsa, bu uzaya ‘birinci sayılabilirlik aksiyomunu sağlıyor’ veya ‘birinci sayılabilir uzay’ denir.

Önerme 2.3.3. Her metrik uzay birinci sayılabilirdir.

İspat. Açıktır.

Teorem 2.3.4. X , topolojik bir uzay olsun.

(i) $\emptyset \neq A \subset X$ alalım. $(x_n) \rightarrow x$ olacak şekilde x noktasına yakınsayan A ya ait bir (x_n) dizisi varsa o zaman $x \in \overline{A}$ olur. Eğer X , birinci sayılabilir uzay ise teoremin tersi de doğrudur.

(ii) $f: X \rightarrow Y$ olsun. Eğer f sürekli ise $(x_n) \rightarrow x$ iken tüm yakınsak diziler için $f(x_n) \rightarrow f(x)$ olur. Eğer X , birinci sayılabilir uzay ise teoremin tersi de doğrudur.

İspat. Munkres (2000) Theorem 21.2’e ve Teorem 21.3’ e bakınız. $\square$

Tanım 2.3.5. Eğer bir (X, τ) topolojik uzayının bir sayılabilir tabanı varsa bu uzaya ‘ikinci sayılabilirlik aksiyomunu sağlıyor’ veya ‘ikinci sayılabilir uzay’ denir.

Teorem 2.3.6. Her bir ikinci sayılabilir (X, τ) uzayı birinci sayılabilirdir. Tersisi doğru değildir.

Teorem 2.3.7.

- i) Birinci sayılabilir uzayın alt uzayı da birinci sayılabilirdir ve sayılabilir sayıda çarpımı da birinci sayılabilirdir.
- ii) İkinci sayılabilir uzayın alt uzayı da ikinci sayılabilirdir ve sayılabilir sayıda çarpımı da ikinci sayılabilirdir.

İspat. Munkres (2000) Theorem 30.2' e bakınız. $\square$

Not 2.3.8. İkinci sayılabilirlik aksiyomu global bir özellik iken birinci sayılabilirlik özelliği lokal bir özelliktir. Dolayısıyla ikinci sayılabilirlik aksiyomu çok daha güçlüdür öyle ki her metrik uzay bile bu aksiyomu sağlamaz, bilindik birçok uzay da sağlamaz. Bu aksiyom Urysohn Metrikleştirme Teoremi gibi teoremlerin kanıtlanmasında kullanılır.

Not 2.3.9. Öte yandan bir topolojik uzayın ikinci sayılabilir olup olmadığını uzay üzerinde tanımlı topoloji belirler.

Tanım 2.3.10. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ bir küme olsun.

- i) Eğer $\overline{A} = X$ ise A kümesine X uzayında **yoğundur** (her yerde yoğundur) denir.
- ii) Eğer X in sayılabilir yoğun bir alt kümesi varsa (X, τ) uzayına **ayrılabilir topolojik uzay** (Fréchet Uzayı) denir.

Sonuç 2.3.11. Yukarıdaki tanımın bir sonucu olmak üzere;

$$A \subset X, X \text{ te yoğun} \Leftrightarrow \text{her bir açık } \emptyset \neq U \subset X \text{ için } A \cap U \neq \emptyset \text{ dir.}$$

İspat. Açık

Teorem 2.3.12. İkinci sayılabilir her bir (X, τ) uzayı ayrılabilirdir.

İspat. Rahimov (2006), Teorem 2.1.3'e bakınız. $\square$

Teorem 2.3.13. Her ayrılabilir (X, d) metrik uzayı ikinci sayılabilir uzaydır.

İspat. Bülbul (1994), Teorem 4.12'e bakınız. 

Not 2.3.14. Ayrılabilir olduğu halde ikinci sayılabilir olmayan uzaylar da vardır. Örneğin X sayılamaz bir küme olmak üzere bu küme üzerindeki özel nokta topolojisi ve sayılabilir tümleyenler topolojisi ile topolojik uzay ayrılabilir olduğu halde ikinci sayılabilir değildir.

Not 2.3.15. $\mathbb{R}$ alışılmış topolojik uzayı ikinci sayılabilir, dolayısıyla $\mathbb{R}$ alışılmış topolojik uzayı ayrılabilir. Öte yandan $\mathbb{R}$ ayrık topolojik uzayı ayrılabilir değildir, çünkü bu uzayın tek yoğun alt kümesi $\mathbb{R}$ dir ve $\mathbb{R}$ sayılabilir değildir. Ayrılabilir olma özelliğinin de diğer topolojik özellikler gibi küme üzerindeki tanımlanan topolojiye bağlı olduğu görülmektedir.

Tanım 2.3.16. Bir topolojik uzayın her açık örtüsünün bir sayılabilir alt örtüsü varsa bu uzaya bir Lindelöf uzayı denir.

Tanımdan da anlaşılacağı üzere bu kavram kompaktlık kavramına da çok yakındır, şöyle ki bir kompakt uzayı bir Lindelöf uzayıdır. Fakat bir Lindelöf uzayının kompakt uzay olması gerekmez.

Tanım 2.3.17. (X, τ) bir topolojik uzay olsun.

- (i) Eğer her $x, y \in X$ ($x \neq y$) için $x \in U, y \notin U$ veya $x \notin V, y \in V$ olacak şekilde $U \subset X$ veya $V \subset X$ açık kümeleri varsa T_0 – uzayı (Kolmogorof),
- (ii) Eğer her $x, y \in X$ ($x \neq y$) için $x \in U, y \notin U$ ve $x \notin V, y \in V$ olacak şekilde $U \subset X$ ve $V \subset X$ açık kümeleri varsa T_1 – uzayı (Fréchet uzayı),
- (iii) Eğer her $x, y \in X$ ($x \neq y$) için $x \in U, y \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U \subset X$ ve $V \subset X$ açık kümeleri varsa T_2 – uzayı (Hausdorff uzayı) denir. (bir topolojik uzayın her farklı iki noktasının ayrık açık komşulukları varsa

Teorem 2.3.18. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. O halde;

$$(X, \tau) \text{ bir } T_0 - \text{uzayıdır} \Leftrightarrow \text{farklı her } x, y \in X \text{ için } \overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$$

İspat. Bülbul, (1994) Teorem 8.1'e bakınız. $\square$

Not 2.3.19. Tanımları karşılaştırsak kolayca görülür ki;

$$T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0 \quad (T_2 \subseteq T_1 \subseteq T_0)$$

olur. Ancak tersi doğru değildir.

Tanım 2.3.20. X topolojik uzay olsun.

(i) Eğer her $x \in X$ ve $x \notin F$ koşulunu sağlayan $F \subset X$ kapalı kümesi için x ve F nin ayrık komşulukları varsa, bu uzaya regüler uzay denir. Başka bir deyişle; Her kapalı $F \subset X$ kümesi ve $x \notin F$ noktası için $x \in U$, $F \subseteq V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \subset X$ açık kümelerinin olmasıdır.

Regüler uzaylar T_1 uzayı olmak zorunda değildir. Ancak X regüler uzayı aynı zamanda T_1 uzayı (her tek elemanlı kümesi kapalı) ise $T_3 - \text{uzayı}$ olarak adlandırılır.

(ii) Eğer X in her iki ayrık kapalı alt kümesinin ayrık komşulukları varsa bu uzaya normal uzay denir. Başka bir deyişle;

Her kapalı, ayrık $F, G \subset X$ kümeleri için $F \subset U$, $G \subset V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \subset X$ açık kümelerinin var olmasıdır.

Normal uzaylar T_1 uzayı olmak zorunda değildir. Ancak X normal uzayı aynı zamanda T_1 uzayı (her tek elemanlı kümesi kapalı) ise $T_4 - \text{uzayı}$ olarak adlandırılır.

Lemma 2.3.21. X bir topolojik uzay ve X in her tek elemanlı kümesi kapalı olsun. O halde;

(i) X regülerdir. $\Leftrightarrow$ Her $x \in X$ ve x in her keyfi bir U komşuluğu için

$x \in V \subset \bar{V} \subset U$ olacak şekilde x in bir V komşuluğu vardır.

(ii) X normaldir. $\Leftrightarrow$ Her $A \subset X$ kapalı kümesi ve A yı içeren her keyfi bir U açık kümesi için $A \subset V \subset \bar{V} \subset U$ olacak şekilde A yı içeren V açık kümesi vardır.

İspat. i) $(\Rightarrow)$: X bir regüler uzay olsun. $x \in X$ ve U , x in keyfi bir açık komşuluğu verilsin. Böylece $F = X - U$ kümesi kapalı olup $x \notin F$ dir. Hipotezden dolayı, $x \in V$, $F = X - U \subset W$ ve $V \cap W = \emptyset$ koşulunu sağlayan V ve W açık kümeleri vardır. $y \in F$ keyfi verilsin. $W_y = W$ alalım. O halde $y \in W_y$ ve $V \cap W_y = \emptyset$ olduğundan, $y \notin \bar{V}$ dir. Dolayısıyla $\bar{V} \cap F = \emptyset$ dir. Böylece $\bar{V} \subset U$ olur.
 $(\Leftarrow)$ Her $x \in X$ ve F , x i içermeyen bir kapalı küme olsun. O halde $U = X - F$ kümesi x in bir komşuluğudur. Buradan, V ve $X - \bar{V}$ kümeleri için $x \in V$, $F \subset X - \bar{V}$ ve $V \cap (X - \bar{V}) = \emptyset$ dir. Böylece X regülerdir. ■

ii) $(\Rightarrow)$: X bir normal uzay olsun. $A \subset X$ kapalı bir küme ve $A \subset U$ olacak şekilde bir U açık kümesi olsun. $F = X - U$ kümesi kapalı ve $(X - U) \cap A = \emptyset$ olduğundan $A \subset W_1$ ve $(X - U) \subset W_2$ ve $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ olacak şekilde W_1, W_2 açık kümeleri vardır. Buradan $A \subset W_1 \subset X - W_2 \subset X - (X - U) = U$ olur.
 $X - W_2$ kapalı bir küme olduğu için, $A \subset W_1 \subset \bar{W}_1 \subset X - W_2 \subset U$ elde edilir.
 $(\Leftarrow)$: $A, B \subset X$ kapalı, ayrık iki küme olsun. $X - B$ kümesi açık ve $A \subset X - B$ dir. Teoremin koşulundan V açık kümesi için; $A \subset V \subset \bar{V} \subset X - B$ yazılabilir.
 V ve $X - \bar{V}$ kümeleri için $A \subset V$, $B \subset X - \bar{V}$ ve $V \cap (X - \bar{V}) = \emptyset$ sağlanır. ■

Sonuç 2.3.22. X topolojik uzayının regüler olması için gerek ve yeter koşul her $x \in X$ noktasının kapalı komşuluklar ailesi bu noktanın bir yerel tabanıdır.

İspat. Bülbül, (1994) Teorem 8.12'ye bakınız.

Önerme 2.3.23. Aşağıdaki özellikler kolayca görülebilir:

- (i) Bir regüler $(T_3 - \text{uzayın})$ uzayın alt uzayı da regülerdir $(T_3 - \text{uzayıdır})$.
- (ii)

$$X = \prod_{i \in I} X_i \text{ çarpım uzayı regüler } (T_3 - \text{uzayı}) \Leftrightarrow \text{her bir } i \in I \text{ için } X_i \text{ uzayı regülerdir. } (T_3 - \text{uzayıdır})$$

İspat. Munkres, (2000) Theorem 31.2' ye bakınız.

Not 2.3.24. Bu bölümde ve bundan sonraki bölümde kısaca göreceğimiz gibi, normal uzaylar için yukarıdakine benzer bir teorem yoktur. Ancak aşağıda vereceğimiz teorem sadece kapalı alt uzaylarının normal olduğunu söyler.

Teorem 2.3.25. Bir normal uzayın $(T_3 - \text{uzayı})$ kapalı alt uzayları normaldir. $(T_3 - \text{uzayıdır})$.

İspat. Açıktır.

Sonuç 2.3.26. Regüler uzay $(T_3 - \text{uzayı})$ olma özelliği ve Normal uzay $(T_4 - \text{uzayı})$ olma özelliği topolojik bir değişmezdir.

İspat. Açıktır.

Teorem 2.3.27. Sayılabilir bir tabana sahip (İkinci sayılabilir) regüler uzaylar normaldir.

İspat. (X, τ) bir regüler uzay ve $\mathcal{B}$ ailesi τ nun bir sayılabilir tabanı olsun.

$A, B \subset X$ iki ayrık kapalı küme olsun. X uzayı regüler olduğundan her $x \in A$ nın B yi içermeyen bir V komşuluğu vardır. Lemma 2.3.21 'e göre x in bir U komşuluğu

için $\overline{U} \subset V$ komşuluğu vardır. O halde $\exists B \in \mathcal{B}$ için $x \in B \subset V$ dir ve $\mathcal{B}$ ailesi sayılabilir olduğundan $\exists B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B}$ için

$$A \subset \bigcup_n B_n$$

dir. Buradan;

$$A \subset \bigcup_n U_n \text{ ve } \overline{U_n} \cap B = \emptyset \text{ (} n = 1, 2, \dots \text{) dir.}$$

Benzer şekilde, $\exists V_1, V_2, \dots \in \tau$ için;

$$B \subset \bigcup_n V_n \text{ ve } \overline{V_n} \cap A = \emptyset \text{ (} n = 1, 2, \dots \text{) dir.}$$

$$U = \bigcup_n U_n \text{ ve } V = \bigcup_n V_n$$

olsun. Açıkça, $U, V \in \tau$ ve $A \subset U, B \subset V$ dir. Genel olarak, $U \cap V \neq \emptyset$ yani U ve V ayrık olmayabilir. Bundan dolayı aşağıdakileri kümeleri tanımlayalım:

$$U_n' = U_n - \bigcup_{i=1}^n \overline{V_i} \text{ ve } V_n' = V_n - \bigcup_{i=1}^n \overline{U_i}$$

U_n' ve V_n' kümeleri her n için açık kümelerdir. $x \in A$ keyfi verilsin. O halde $\exists n$ için $x \in U_n$ dir. Her i için $x \notin \overline{V_i}$ olduğundan $x \in U_n'$ dir. Dolayısıyla

$$A \subset \bigcup_n U_n'$$

dir. Benzer şekilde,

$$B \subset \bigcup_n V_n'$$

dir. Şimdi;

$$U' = \bigcup_n U_n' \text{ ve } V' = \bigcup_n V_n'$$

kümeleri için $U' \cap V' = \emptyset$ olduğunu gösterelim. Aksini varsayalım, yani bir x için $x \in U' \cap V'$ olsun. O halde, $\exists p, q$ için $x \in U_p' \cap V_q'$ dir. Kolaylık için $p \leq q$

olsun. U_p' ve V_q' kümelerinin tanımından $x \in U_p'$ ve $x \notin \overline{U_p}$ olduğu elde edilir. Oysa bu bir çelişkidir. Dolayısıyla U' ve V' kümeleri sırasıyla A ve B kümelerinin ayrık açık komşuluğudur. Sonuç olarak, (X, τ) uzayı normaldir. ■

Teorem 2.3.28. Bir metrik uzay normaldir.

İspat. (X, d) bir metrik uzay, A ve B , X in iki ayrık kapalı alt kümesi olsun.

Her $a \in A$ ve $b \in B$ için ϵ_a ve ϵ_b ' yi sırasıyla

$$B(a, \epsilon_a) \cap B = \emptyset \text{ ve } B(b, \epsilon_b) \cap A = \emptyset$$

olarak seçelim. U ve V kümelerini ise, şöyle tanımlayalım:

$$U = \bigcup_{a \in A} B\left(a, \frac{\epsilon_a}{2}\right) \text{ ve } V = \bigcup_{b \in B} B\left(b, \frac{\epsilon_b}{2}\right)$$

Açıkça, U ve V kümeleri açık olup, $A \subset U$ ve $B \subset V$ dir. Bu kümelerin ayrık olduğunu gösterelim. Eğer $z \in U \cap V$ ise, $\exists a \in A$ ve $b \in B$ için ;

$$z \in B\left(a, \frac{\epsilon_a}{2}\right) \text{ ve } z \in B\left(b, \frac{\epsilon_b}{2}\right)$$

dir.

$$d(a, b) \leq d(a, z) + d(z, b) < \frac{\epsilon_a}{2} + \frac{\epsilon_b}{2}$$

dir.

Eğer $\epsilon_a < \epsilon_b$ ise, $d(a, b) < \epsilon_b$ dir, yani $a \in B(b, \epsilon_b)$ dir.

Eğer $\epsilon_a \leq \epsilon_b$ ise, $d(a, b) < \epsilon_a$ dir, yani $b \in B(a, \epsilon_a)$ dir.

Her iki durumda da bir çelişki elde edilir. Dolayısıyla, $U \cap V = \emptyset$ olur.

Sonuç olarak (X, d) uzayı normaldir. ■

Teorem 2.3.29. Bir kompakt Hausdorff uzay normaldir.

İspat. X bir kompakt Hausdorff uzayı olsun. X in her kapalı alt kümesi kompakt olduğundan bu uzay regülerdir. $A, B \subset X$ iki ayrık kapalı küme ve $a \in A$ olsun. X uzayı regüler olduğundan a ve B lerin sırasıyla U_a ve V_a ayrık komşulukları vardır. A kompakt olduğundan A nın

$$\bigcup_a U_a$$

örtümünün bir sonlu alt örtümü vardır, yani $\exists a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ için,

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n U_{a_i}$$

dir.

$$U = \bigcup_{i=1}^n U_{a_i} \quad \text{ve} \quad V = \bigcup_{i=1}^n V_{a_i}$$

olsun. O halde U ve V kümeleri açık olup,

$$A \subset U, B \subset V \quad \text{ve} \quad U \cap V = \emptyset$$

olur. Buradan X uzayı normaldir. ■

Tanım 2.3.30. X topolojik uzay olsun. Eğer her kapalı $F \subset X$ kümesi ve $x \notin F$ noktası için $f(x) = 0$ ve $x \in F$ için $f(x) = 1$ koşullarını sağlayan sürekli $f: X \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu varsa X uzayına tam (tümüyle) regüler uzay denir.

Tam regüler uzaylar T_1 uzayı olmak zorunda değildir. Ancak X tam regüler uzayı aynı zamanda T_1 uzayı (her tek elemanlı kümesi kapalı) ise $T_{3\frac{1}{2}}$ - uzayı olarak adlandırılır. $T_{3\frac{1}{2}}$ - uzayı aynı zamanda Tychonoff uzayı olarak da bilinir.

Açıktır ki, normal uzay tam regüler uzaydır (Urysohn Lemma) ve tam regüler uzay da regüler uzaydır.

Önerme 2.3.31. Aşağıdaki özellikler vardır:

- (i) Tam regüler uzayların alt uzayları da tam regülerdir.
- (ii) Tam regüler uzayların çarpım uzayları da tam regülerdir.

İspat. Munkres, (2000) Theorem 33.2.'ye bakınız.

Teorem 2.3.32. Topolojik uzayın tam regüler olma özelliği de topolojik değişmezdir. (özelliktir)

İspat. Açık.

Sonuç 2.3.33. Her T_4 – uzayı aynı zamanda $T_{3\frac{1}{2}}$ – uzayıdır ve her $T_{3\frac{1}{2}}$ – uzayı da T_3 – uzayıdır.

2.4. Urysohn Lemma ve Urysohn Metriklenebilme Teoremi

Şimdi genellikle “Urysohn Lemması” olarak adlandırılan bir teorem olan bu bölümün en derin içeriğine geçiyoruz. Urysohn Lemması bir dizi önemli teoremi kanıtlamada kullanılan çok önemli bir araçtır. “Urysohn Metriklenebilme Teoremi” nin de ispatını vereceğiz.

Teorem 2.4.1. (Urysohn Lemma) X bir normal uzay olsun. Eğer A ve B , X in iki ayrık kapalı alt kümeleri ise $f(A) = \{a\}$ ve $f(B) = \{b\}$ olacak şekilde $f: X \rightarrow [a, b]$ sürekli fonksiyonu vardır.

İspat. Bütün kapalı ve sınırlı aralıklar birbirine homeomorf olduklarından teoremdaki $[a, b]$ yerine $[0, 1]$ aralığı alınabilir. Bundan dolayı, teoremi $[0, 1]$ için ispatlayalım. İspatı birkaç adımda gerçekleştireceğiz:

1. Adım: $P := [0, 1] \cap \mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\} \cup \{0, 1\}$ olmak üzere $P_1 := \{0, 1\}$ ve $n \geq 2$ için $P_n := \{q_1, q_2, \dots, q_{n-1}\} \cup \{0, 1\}$ olsun.

Matematik induksiyon yöntemi ile, her n ve $p, q \in P_n$ için;

$$p < q \Rightarrow \overline{U_p} \subset U_q \quad (1)$$

koşulunu sağlayan $\{U_p\}_{p \in P_n}$ açık kümeler ailesi varlığını gösterelim.

$n = 1$ için; X bir normal uzay ve $U_1 := X \setminus B$ için $A \subset U_1$ olduğundan normallikten Lemma 2.3.21. den dolayı öyle bir U_0 açık kümesi vardır ki:

$$A \subset U_0 \text{ ve } \overline{U_0} \subset U_1$$

dir. Buradan $n = 1$ ve $p, q \in P_n$ için

$$p < q \Rightarrow \overline{U_p} \subset U_q$$

dir.

Şimdi (1) in n için doğru olduğunu kabul edip, $n + 1$ için doğruluğunu ispatlayalım. $P_n \setminus P_{n+1} = \{r\}$ olsun. r için U_r yi tanımlayalım. $p, q \in P_{n+1}$ sayıları r nin sırasıyla sol ve sağ komşuluğu olsun. Açıkça $p, q \in P_n$ dir. Hipoteze göre $\overline{U_p} \subset U_q$ olan U_p ve U_q açık kümeleri vardır. X uzayı normal olduğundan normallikten Lemma 2.3.21. den öyle bir U_r açık kümesi vardır ki:

$$\overline{U_p} \subset U_r \text{ ve } \overline{U_r} \subset U_q \quad (2)$$

dir.

Şimdi (1) nin P_{n+1} kümesi için de doğru olduğunu gösterelim: $s, t \in P_{n+1}$ keyfi verilsin. Eğer $s, t \in P_n$ ise, hipoteze göre, $s < t$ için $\overline{U_s} \subset U_t$ dir. Eğer $t \notin P_n$ ise, $t = r$ ve $s \in P_n$ dir. Bu durumda, $s \leq p$ için (1) ve (2) ye göre;

$$\overline{U_s} \subset \overline{U_p} \subset U_r$$

dir. $s \geq q$ için ise, yine (1) ve (2) ye göre

$$\overline{U_r} \subset U_q \subset U_s$$

dir. Sonuç olarak, (1) i sağlayan U_p açık kümeleri elde edilir.

2.Adım: $\{U_p\}_{p \in P}$ ailesini tüm $\mathbb{Q}$ ya şöyle genişletelim:

$$U_p = \begin{cases} \emptyset, & p < 0 \text{ ise} \\ X, & p > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

Açıkça her $p, q \in \mathbb{Q}$ ve $p < q$ için $\overline{U_p} \subset U_q$ dir.

3. Adım: Bu adımda f fonksiyonu tanımlanacaktır.

Her $x \in X$ için $M(x) = \{p \mid x \in U_p\}$ olsun.

Eğer $p < 0$ ise, $U_p = \emptyset$ olduğundan $\{p \mid p < 0\} \cap M(x) = \emptyset$ olur.

Eğer $p > 1$ ise, $U_p = X$ olduğundan $p \in M(x)$ olur. Dolayısıyla, $M(x) \neq \emptyset$ ve $M(x)$ alttan sınırlıdır. Açıkça $\inf M(x) \in [0,1]$ dir.

$f: X \rightarrow [0,1]$ fonksiyonunu şöyle tanımlayalım:

$$f(x) = \inf M(x) = \inf \{p \mid x \in U_p\}$$

4. Adım: Bu adımda $f(A) = \{0\}$, $f(B) = \{1\}$ ve f nin sürekli olduğu gösterilecektir.

Eğer $x \in A$ ise, her $p \geq 0$ için $x \in U_p$ dir. Dolayısıyla $M(x) = \{p \mid p \geq 0, p \in \mathbb{Q}\}$ dir. Buradan, $f(x) = \inf M(x) = 0$ dir, yani $f(A) = \{0\}$ dir.

Benzer şekilde, eğer $x \in B$ ise, ancak $p > 1$ için $x \in U_p$ dir, yani

$M(x) = \{p \mid p > 1, p \in \mathbb{Q}\}$ dir. Dolayısıyla, $f(x) = \inf \{p \mid p > 1, p \in \mathbb{Q}\} = 1$ dir. Sonuç olarak $f(B) = \{1\}$ dir.

Eğer $x \in \overline{U_r}$ ise, (1) e göre , her $s > r$ için $x \in U_s$ dir. Dolayısıyla, $\inf M(x) \leq r$ dir, yani

$$x \in \overline{U_r} \Rightarrow f(x) \leq r \quad (3)$$

Eğer $x \notin \overline{U_r}$ ise, (1) e göre, her $s < r$ için $x \notin U_s$ dir. Dolayısıyla, $\inf M(x) \geq r$ dir, yani

$$x \notin \overline{U_r} \Rightarrow f(x) \geq r \quad (4)$$

$\forall x_0 \in X$ alalım. V kümesi $f(x_0)$ ın keyfi bir açık komşuluğu olsun. O halde $\exists c, d \in \mathbb{R}: f(x_0) \in (c, d) \subset V$ dir. Açıkça $\exists p, q \in \mathbb{Q}:$

$$c < p < f(x_0) < q < d \quad (5)$$

$U = U_q \setminus \overline{U_p}$ olsun. Eğer,

$x_0 \notin U_q$ ise, (4) e göre $f(x_0) \geq q$ dir. Oysa bu durum (5) ile çelişir. Buradan $x_0 \in U_q$ dir;

$x_0 \in \overline{U_p}$ ise, (3) e göre $f(x_0) \leq p$ dir. Oysa bu durum (5) ile çelişir. Buradan $x_0 \notin \overline{U_p}$ dir. Dolayısıyla, $x_0 \in U_q$ ve $x_0 \notin \overline{U_p}$ dir, yani $x_0 \in U$ dur.

Sonuç olarak, U kümesi x_0 ın bir açık komşuluğudur.

Şimdi $f(U) \subset V$ olduğunu gösterelim. $x \in U$ keyfi verilsin. O halde $x \in U_q \subset \overline{U_q}$ olup, (3) e göre $f(x) \leq q$ dir. $x \notin \overline{U_p}$ olduğundan $x \notin U_p$ dir. Buradan (4) e göre $f(x) \geq p$ dir. Dolayısıyla $p \leq f(x) \leq q$ dir, yani $f(x) \in [p, q]$ dir.

$$[p, q] \subset (c, d) \subset V$$

olduğundan $f(x) \in V$ dir. Buradan $f(U) \subset V$ dir. Sonuç olarak, $f(x)$ fonksiyonu süreklidir. ■

Tanım 2.4.2. X bir topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olsun. Eğer bir $f: X \rightarrow [0,1]$ sürekli fonksiyonu için

$$f(A) = \{0\} \text{ ve } f(B) = \{1\}$$

ise, A ve B kümeleri bir sürekli fonksiyonuyla ayrılabilir denir.

Şimdi, Urysohn Lemması şöyle de ifade edilebilir;

Eğer bir T_1 uzayının her iki ayrık kapalı kümesi açık kümelerle ayrılabilirse, bu kümeler bir sürekli fonksiyonlarla ayrılabilir.

Aslında önermenin tersi de doğrudur, şöyle ki bir sürekli fonksiyonla ayrılabilir iki kapalı ayrık kümeler açık kümelerle de ayrılabilir. Gerçekten, A ve B iki kapalı ayrık küme ve $f: X \rightarrow [0,1]$ bir sürekli fonksiyon olmak üzere $f(A) = \{0\}$ ve $f(B) = \{1\}$ olsun. Açıkça, $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ ve $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ kümeleri $[0, 1]$ uzayının $\mathbb{R}$ deki alt uzay topolojisine göre açıktır. f sürekli olduğundan

$$U = f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\right) \text{ ve } V = f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)$$

kümeleri X te açıktır. $f(A) = \{0\}$ ve $f(B) = \{1\}$ olduğundan $A \subset U$ ve $B \subset V$ dir. Eğer $x \in U \cap V$ ise,

$$f(x) \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \quad \text{ve} \quad f(x) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$$

dir. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $U \cap V = \emptyset$ dir. Sonuç olarak, A ve B kümeleri sırasıyla U ve V açık kümeleriyle ayrılabilirdir.

Buradan, son olarak Urysohn Lemması aşağıdaki gibi ifade edilebilir;

Bir T_1 uzayının her iki ayrık kapalı kümesinin açık kümelerle ayrılabilirdir olması için gerek ve yeter koşul bu kümelerin bir sürekli fonksiyonla da ayrılabilirdir olmasıdır.

Bu önermeden T_1 ve T_4 aksiyomları için aşağıdaki sonuç çıkarılabilir:

Sonuç 2.4.3. Bir T_1 uzayının T_4 uzayı olması için (normal uzay) gerekli ve yeter koşul bu uzayın her iki ayrık kapalı kümesinin bir sürekli fonksiyonla ayrılabilirdir olmasıdır.

İspat. Yukarıda ispatı verildi.

Sonuç 2.4.4. Her normal uzay tam regüler uzaydır.

İspat. $x \in X$, $F \subset X$ kapalı küme ve $x \notin F$ olsun. $\{x\} \subset X$ tek noktalı küme kapalı ve $\{x\} \cap F = \emptyset$ olduğu için Urysohn Lemmadan $f(x) = 0$ ve $f(F) = 1$ sağlanacak şekilde sürekli $f: X \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu vardır. ■

Şimdi bu bölümün asıl amacına, bize bir topolojik uzayın metriklenebilir olduğu koşulları veren bir teoreme geliyoruz. Kanıt, tezin önceki bölümlerinden birkaç bileşeni bir araya getiriyor; tezin başında verdiğimiz metrik topolojilere ilişkin sonuçların yanı sıra bu bölümde kanıtlanmış olan sayılabilirlik ve ayırma

aksiyomlarına ilişkin gerçekleri kullanır. İspatta kullanılan temel yapı basit ama çok kullanışlıdır.

Kanıtın iki versiyonu vardır ve her birinin daha sonra ortaya çıkacak yararlı genellemeleri olduğundan, burada ikisini de sunuyoruz. İlk versiyon, tamamen regüler uzaylar için bir gömme teoremi vermek üzere genelleştirir. İkinci versiyon, Nagata-Smirnov Metriklenebilme teoremini ispatladığımızda yani tezin ana bölümünde geliştirilecektir.

Teorem 2.4.5. (Urysohn Metriklenebilme Teoremi) Sayılabilir tabana sahip her regüler uzay metriklenebilirdir.

İspat. X i metriklenebilir bir Y uzayına gömerek X in metriklenebilir olduğunu kanıtlayacağız; yani, X i Y nin bir alt uzayı ile homeomorfik göstererek. Kanıtın iki versiyonu, metriklenebilir Y uzayının seçiminde farklılık gösterir. İlk versiyonda Y , çarpım topolojisindeki $\mathbb{R}^\omega$ uzayıdır, daha önce sahip olduğumuz bir uzaydır, metriklenebilir olduğunu biliyoruz. İkinci versiyonda, Y uzayı da $\mathbb{R}^\omega$ dir, ancak bu sefer düzgün metrik $\bar{\rho}$ ile verilen topolojide. Her durumda, bizim inşamızın X i $\mathbb{R}^\omega$ nin $[0,1]$ alt uzayına gömdüğü ortaya çıkıyor.

1. Adım: Aşağıdakileri kanıtlıyoruz:

X in herhangi bir x_0 noktası ve x_0 ın herhangi bir U komşuluğu verildiğinde; $f_n: X \rightarrow [0,1]$ sürekli fonksiyonlarının sayılabilir bir koleksiyonu vardır öyle ki f_n in x_0 da pozitif ve U dışında sıfır olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ vardır.

Urysohn Lemmasının bir sonucu olarak x_0 ve U verildiğinde böyle bir fonksiyon vardır. Ancak, her (x_0, U) çifti için böyle bir fonksiyon seçersek, elde edilen koleksiyon genel olarak sayılabilir olmayacaktır. Görevimiz koleksiyonu küçültmek. İşte devam etmenin bir yolu:

$\{B_n\}$, X için sayılabilir bir taban olsun. $\overline{B_n} \subset B_m$ şartını sağlayan her n, m indeks çifti için, Urysohn Lemmasının bir uygulaması olarak $g_{n,m}(\overline{B_n}) = \{1\}$ ve $g_{n,m}(X - B_m) = \{0\}$ olacak şekilde sürekli bir $g_{n,m}: X \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu seçilebilir. O halde $\{g_{n,m}\}$ koleksiyonu ihtiyacımızı karşılar: x_0 ve x_0 ın bir U komşuluğu verildiğinde, U da bulunan x_0 ı içeren bir B_m taban elemanı seçilebilir. Regülerlik kullanılarak, $x_0 \in B_n$ ve $\overline{B_n} \subset B_m$ olacak şekilde B_n seçilebilir. O halde n, m ; $g_{n,m}$ fonksiyonunun tanımlandığı indis çiftidir ve x_0 da pozitif ve U dışında sıfırlanır. $\{g_{n,m}\}$ koleksiyonu, $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ nin bir alt kümesiyle indeksli olduğundan, sayılabilir; bu sebeple pozitif tamsayılarla yeniden indekslenebilir ve bizim ihtiyacımız olan $\{f_n\}$ koleksiyonunu verir.

2. Adım: (Kanın birinci versiyonu)

1. Adımdaki f_n fonksiyonları göz önüne alındığında, çarpım topolojisi üzerinde bir $\mathbb{R}^\omega$ yi alalım ve $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots)$ kuralı bir $F: X \rightarrow \mathbb{R}^\omega$ tanımlayalım. F nin bir gömme olduğunu iddia ediyoruz.

Birincisi, F süreklidir çünkü $\mathbb{R}^\omega$ çarpım topolojisine sahiptir ve her bir f süreklidir. İkincisi, F birebirdir çünkü $x \neq y$ verildiğinde, $f_n(x) > 0$ ve $f_n(y) = 0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ olduğunu biliyoruz; bu nedenle, $F(x) \neq F(y)$.

Son olarak, F nin X in görüntüsü üzerindeki homeomorfizmi, $\mathbb{R}^\omega$ nin alt uzayı

$Z = F(X)$ olduğunu göstereceğiz. F nin X i Z ye eşleyen birebir-örten fonksiyon olduğunu biliyoruz, bu sebeple yalnızca X teki her bir açık U kümesi için, $F(U)$ nun Z de açık olduğunu göstermemiz yeterlidir. z_0 , $F(U)$ nun bir noktası olsun. $z_0 \in W \subset F(U)$ olacak şekilde bir Z nin açık bir W kümesini bulacağız.

$F(x_0) = z_0$ olacak şekilde x_0 , U nun bir noktası olsun.

$f_N(x_0) > 0$ ve $f_N(X - U) = \{0\}$ olduğu bir N indeksi seçelim. $\mathbb{R}$ deki $(0, \infty)$ açık ışını alalım ve V , $\mathbb{R}^\omega$ nin açık kümesi

$$V = \pi_N^{-1}((0, \infty))$$

olsun. $W = V \cap Z$ olsun; o zaman alt uzay topolojisinin tanımı gereği W, Z de açıktır. $z_0 \in W \subset F(U)$ olduğunu iddia ediyoruz. Birincisi $z_0 \in W$ çünkü

$$\pi_N(z_0) = \pi_N(F(x_0)) = f_N(x_0) > 0$$

dir. İkinci olarak, $W \subset F(U)$ dir. Eğer $z \in W$ ise, o zaman bazı $x \in X$ için

$$z = F(x) \text{ ve } \pi_N(z) \in (0, \infty) \text{ dir.}$$

$\pi_N(z) = \pi_N(F(x)) = f_N(x) > 0$ ve f_N, U dışında sıfır olduğundan, x noktası U içinde olmalıdır. O halde istendiği $z = F(x), F(U)$ içindedir.

Böylece F, X in $\mathbb{R}^\omega$ ye gömmedir. $\mathbb{R}^\omega$ uzayı çarpım topolojisine göre metriklenebilir ve $F: X \rightarrow \mathbb{R}^\omega$ bir gömme olduğundan X uzayı da metriklenebilirdir. ■

3. Adım: (Kanıtın ikinci versiyonu)

Bu versiyonda, X i $(\mathbb{R}^\omega, \bar{\rho})$ metrik uzayına gömeceğiz. Aslında X i $\bar{\rho}$ metriğinin $\rho = \sup\{|x_i - y_i|\}$ metriğine eşit olduğu $[0,1]^\omega$ alt uzayına gömeceğiz.

1. Adımda elde ettiğimiz $f_n: X \rightarrow [0,1]$ fonksiyonlarının sayılabilir bir koleksiyonunu kullanacağız. Ancak burada ek olarak tüm x ler için $f_n \leq 1/n$ koşulunu uygulayacağız.

$F: X \rightarrow [0,1]^\omega$ ve $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots)$ olarak önceki gibi tanımlayalım. F nin artık $[0,1]^\omega$ üzerindeki ρ metriğine göre bir gömme olduğunu iddia ediyoruz.

2. Adımdan F nin bire-bir olduğunu biliyoruz. Ayrıca, $[0,1]^\omega$ üzerinde çarpım topolojisi ile F nin X teki açık kümeleri $Z = F(X)$ alt uzayının açık kümelerine götürdüğünü biliyoruz. (F açık dönüşüm) Bu ifade ρ metriği tarafından indüklenen $[0,1]^\omega$ üzerinde daha ince (daha büyük) topolojiye geçilirse de doğru kalır.

Geriye kalan tek şey, F nin sürekli olduğunu göstermek. Bu, her bileşen fonksiyonunun sürekli olduğu gerçeğinden kaynaklanmaz, çünkü şu anda $\mathbb{R}^\omega$ üzerindeki çarpım topolojisini kullanmıyoruz. Burada $f_n \leq 1/n$ varsayımı devreye giriyor.

$x_0 \in X$ ve $\epsilon > 0$ olsun. Sürekliliği kanıtlamak için;

$$x \in U \Rightarrow \rho (F(x), F(x_0)) < \epsilon$$

koşulunu sağlayacak şekilde x_0 ın bir U komşuluğunu bulmamız gerekiyor.

Öncelikle yeterince büyük N seçelim ve $1/N \leq \epsilon/2$ olsun. Sonra her $n = 1, 2, \dots, N$ için, f_n lerin sürekliliğini kullanarak her $x \in U_n$ için

$$| f_n(x) - f_n(x_0) | \leq \epsilon/2$$

olacak şekilde x_0 ın bir U_n komşuluğu olsun.

$U = U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_N$ olarak alalım; o halde istenildiği gibi U nun x_0 ın bir komşuluğu olduğunu göstereceğiz.

$x \in U$ olsun.

Eğer $n \leq N$ ise, seçilen U ile $| f_n(x) - f_n(x_0) | \leq \epsilon/2$ olur.

Eğer $n > N$ ise, $| f_n(x) - f_n(x_0) | < 1/N \leq \epsilon/2$ olur. Çünkü f_n , X i $[0, 1/n]$ ile eşler. Buradan da tüm $x \in U$ için;

$$\rho (F(x), F(x_0)) \leq \epsilon/2 < \epsilon \text{ olur. } \blacksquare$$

3. BAZI METRİKLENEBİLME TEOREMLERİ

Bu tezin ana gövdesi olarak Nagata ve Smirnov tarafından bağımsız geliştirilen bazı metriklenebilme teoremlerini inceleyeceğiz. Nagata-Smirnov Metriklenebilme Teoremi, Smirnov Metriklenebilme Teoremi odağımız olmak üzere bu teoremlerin ispatında kullanılacak olan Genel Metriklenebilme Teoremi, Urysohn Lemma ve Urysohn Metriklenebilme Teoremi yanı sıra; Parakompaktlık ve Yerel Sonluluk gibi metriklenebilme koşulları ile ilgili özelliklere ve teoremleri de kullanacağız.

Urysohn Metriklenebilme Teoremi, bir topolojik uzay ne zaman metriklenebilir sorusuna “Bir X uzayının metrikleştirilebilir olması için regüler ve sayılabilir bir bazının olmasıdır.” diyerek önemli bir yanıt üretmiş oldu. Ancak daha güçlü ve rafine bir teorem ile ifade edilebilir mi sorusunu da beraberinde getirdi. Bu durumda X üzerinde X in metriklenebilir olması için hem gerekli hem de yeterli olan koşulları yani metrikliğe eşdeğer koşulları bularak teoremi güçlendirmek gerekecekti.

Urysohn Metriklenebilme Teoremindeki regülerlik koşulunun gerekli olduğunu biliyoruz, ancak sayılabilir bazının olması temel bir koşul değil. Dolayısıyla yapılacak bariz şey, sayılabilirlik koşulunu daha zayıf bir koşulla değiştirmek olmalıdır. Ancak bu öylesine hassas bir iştir ki; bu koşulun metrikleştirmeyi garanti edecek kadar güçlü ve tüm metrik uzayların da sağlayacağı kadar da zayıf olması gerekir. Böyle bir durumda doğru hipoteze ulaşmak meselenin yarısından fazlasını çözmek anlamına geliyordu.

Sonunda J.Nagata ve Y.Smirnov tarafından bağımsız olarak formüle edilen bu koşul, yeni olan yerel sonluluk kavramını içerir.

“ X uzayının alt kümelerinden oluşan bir $\mathcal{A}$ ailesi için, X in her noktasının $\mathcal{A}$ nın yalnızca sonlu sayıda elemanı ile kesişen komşuluğu varsa yerel sonludur.”

Şimdi, $\mathcal{B}$ tabanının sayılabilir olduğu koşulunu ifade etmenin bir yolu, $\mathcal{B}$ nin her bir $\mathcal{B}_n$ ailesinin sonlu olduğu

$$\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} \mathcal{B}_n$$

biçiminde ifade edilebileceğini söylemektir. Bu, $\mathcal{B}$ nin sayılabilir olduğunu söylemenin garip bir yolu, ancak onun daha zayıf bir versiyonunun nasıl formüle edileceğini gösteriyor. Nagata-Smirnov koşulu, $\mathcal{B}$ tabanının her bir $\mathcal{B}_n$ ailesi yerel sonlu olmak üzere,

$$\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} \mathcal{B}_n$$

biçiminde ifade edilebilmesini gerektirmektedir. Böyle bir $\mathcal{B}$ topluluğunun sayılabilir yerel sonlu olduğunu söylüyoruz. Şaşırtıcı bir şekilde, bu koşul, regülerlikle birlikte X in metriklenebilirliği için hem gerekli hem de yeterlidir. Bunu kanıtlayacağız.

Topolojide yerel sonluluk kavramını içeren başka bir kavram daha vardır. ‘Parakompaktlık’ adı verilen bu kavram kompaktlığın genelleştirilmiş halidir. Oldukça yeni bir kökene sahip olmasına karşın, matematiğin birçok dalında faydalı olduğu kanıtlanmıştır. Bir X uzayının metriklenebilir olması için gerekli ve yeterli başka birtakım koşulları verebilmemiz için onu burada tanıtıyoruz.

X in ancak ve ancak hem parakompakt hem de yerel metriklenebilir olması durumunda metriklenebilir olduğu ortaya çıkarıldı. Bunu tezin son bölümünde inceleyeceğiz.

Öncelikle yerel sonluluk kavramını tanıtacağız.

3.1. Yerel Sonluluk

Bu bölümde bu kavram ile ilgili bazı temel özellikleri, metriklenebilir olmak için önemli bir koşul olduğunu göreceğiz. Metriklenebilir uzaylarla ilgili çok önemli bir önermenin kanıtını vereceğiz.

Tanım 3.1.1. $\mathcal{A}$, (X, τ) uzayının alt kümelerinin bir koleksiyonu(ailesi) olsun.

(i) Her $x \in X$ için $\mathcal{A}$ nın sadece sonlu sayıda elemanı ile arakesiti boş olmayacak şekilde bir U_x komşuluğu varsa $\mathcal{A}$ ailesine X te yerel sonlu aile denir.

(ii) Eğer her $x \in X$ noktası $\mathcal{A}$ nın sonlu sayıda elemanının içine düşüyorsa o taktirde bu $\mathcal{A}$ ailesine nokta sonlu aile denir.

(iii) Yerel sonlu ailelerin bir özel tipi olarak ayrık(diskret) aileler tanımlanır. Eğer her $x \in X$ noktası $\mathcal{A}$ nın en çok bir elemanını kesen bir komşuluğu varsa bu $\mathcal{A}$ ailesine ayrık aile denir.

Sonuç 3.1.2. Açıkça görülür ki; her ayrık aile yerel sonludur.

Sonuç 3.1.3. Açıkça görülür ki her yerel sonlu aile aynı zamanda nokta sonludur.

Tanım 3.1.4. (X, τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{B}$, X in alt kümelerinden oluşan bir ailesi olsun.

(i) Eğer

$$\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} \mathcal{B}_n$$

şeklinde yerel sonlu $\mathcal{B}_n$ koleksiyonlarının sayılabilir bir birleşimi olarak yazılabilirse, $\mathcal{B}$ koleksiyonuna sayılabilir yerel sonlu aile veya σ - yerel sonlu aile denir.

(ii) Ayrıca her bir $\mathcal{B}_n$ ailesi ayrık bir aile ise bu taktirde $\mathcal{B}$ ye σ - ayrık aile adı verilir.

Örnek 3.1.5.

$$\mathcal{A} = \{(n, n+2) | n \in \mathbb{Z}^+\}$$

kontrol edeceğimiz gibi, $\mathbb{R}$ de yerel sonludur. Öte yandan;

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(0, \frac{1}{n}\right) | n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

$(0, 1)$ de yerel sonludur, ancak $\mathbb{R}$ de değildir

$$\mathcal{C} = \left\{ \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right) | n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

ailesi gibi.

Lemma 3.1.6. $\mathcal{A} = \{A_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$, X in alt kümelerinin yerel sonlu bir ailesi olsun.

O zaman

- (i) $\mathcal{A}$ nın herhangi bir alt ailesi de yerel sonludur.
- (ii) $\mathcal{A}$ nın elemanlarının kapanışlarının ailesi $\mathcal{B} = \{\overline{A}_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ de yerel sonludur.
- (iii)

$$\overline{\bigcup \{A_\lambda | \lambda \in \Lambda\}} = \bigcup \{\overline{A}_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$$

olur.

İspat:

- (i) Aşıkâr.

(ii) $x \in X$ herhangi bir nokta olsun. $\mathcal{A} = \{A_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ ailesi yerel sonlu olduğundan

$$|\Lambda_0| = |\{\lambda \in \Lambda : x \in A_\lambda\}| < \infty$$

olacak şekilde $\Lambda_0 \subset \Lambda$ vardır. $\Lambda_0 = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ olsun. Buradan her $\lambda \notin \Lambda_0$ için $x \notin A_\lambda$ olduğundan $\mathcal{B} = \{\overline{A}_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ ailesi de yerel sonludur. ■

(iii) $\mathcal{A}$ nın elemanlarının birleşimini

$$\bigcup \{A_\lambda | \lambda \in \Lambda\} = Y$$

olarak tanımlayalım.

Her $\lambda \in \Lambda$ için $A_\lambda \subset Y$ ve böylece $\overline{A_\lambda} \subset \overline{Y}$ olduğundan

$$\bigcup \{\overline{A_\lambda} | \lambda \in \Lambda\} \subset \overline{\bigcup \{A_\lambda | \lambda \in \Lambda\}} = \overline{Y}$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi yerel sonluluk varsayımları altında ters içermenin de olduğunu kanıtlayacağız.

$$x \in \overline{Y} = \overline{\bigcup \{A_\lambda | \lambda \in \Lambda\}}$$

alalım. $\{A_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ ailesi yerel sonlu olduğundan $\{A_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ ailesinin yalnızca sonlu tane elemanı ile kesişen x noktasının bir U komşuluğu vardır.

$$|\Lambda_0| = |\{\lambda \in \Lambda : U \cap A_\lambda \neq \emptyset\}| < \infty$$

diyelim. Buradan

$$x \notin \overline{\bigcup \{A_\lambda | \lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_0\}}$$

olur.

Gerçekten

$$x \in \overline{\bigcup \{A_\lambda | \lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_0\}} \text{ varsayarsak } U \cap (\overline{\bigcup \{A_\lambda | \lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_0\}}) \neq \emptyset$$

olur. Buradan $U \cap A_{\lambda'} \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $\lambda' \in (\Lambda \setminus \Lambda_0)$ bulabilmeliyiz. Fakat bu durum Λ_0 kümesinin tanımıyla çelişir.

O halde

$$x \notin \overline{\bigcup \{A_\lambda | \lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_0\}}$$

olur. Dolayısıyla;

$$x \in \overline{\bigcup \{A_\lambda | \lambda \in \Lambda\}} = \overline{\bigcup \{A_\lambda | \lambda \in \Lambda_0\}} \cup \overline{\bigcup \{A_\lambda | \lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_0\}}$$

ve Λ_0 sonlu küme olduğundan ötürü

$$x \in \overline{\bigcup \{A_\lambda | \lambda \in \Lambda_0\}} = \bigcup \{\bar{A}_\lambda | \lambda \in \Lambda_0\} \subset \bigcup \{\bar{A}_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$$

elde edilir. Yani,

$$x \in \bigcup \{\bar{A}_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$$

olur.

$$x \in \bar{Y} = \overline{\bigcup \{A_\lambda | \lambda \in \Lambda\}}$$

idi ve sonuç olarak;

$$\overline{\bigcup \{A_\lambda | \lambda \in \Lambda\}} = \bigcup \{\bar{A}_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$$

kanıtlanmış olur. ■

Tanım 3.1.7. $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$, X uzayının alt kümelerinin bir ailesi olsun. $\mathcal{B}$ nin her bir B elemanı için, B yi içeren $\mathcal{A}$ nın bir A elemanı varsa; $\mathcal{B}$ ye $\mathcal{A}$ nın bir inceltişi (inceliği) ya da $\mathcal{A}$ nın bir rafinesi denir. Eğer $\mathcal{B}$ nin elemanları açık kümeler ise $\mathcal{B}$ ye $\mathcal{A}$ nın açık rafinesi (inceliği); kapalı kümelerse $\mathcal{B}$ ye kapalı rafinesi (inceliği) denir.

Lemma 3.1.8. X metriklenebilir uzay olsun. Eğer $\mathcal{A}$, X in açık örtüsü ise o zaman $\mathcal{A}$ nın inceliği (rafinesi) olan σ –yerel sonlu bir $\mathcal{E}$ açık örtüsü vardır.

İspat: Bu teoremi ispatlarken iyi sıralama(well-ordering) aksiyomunu kullanacağız. $\mathcal{A}$ koleksiyonu için iyi sıralı ‘<’ olarak seçelim. $\mathcal{A}$ nın elemanlarını genel olarak $U, V, W, \dots$ gösterelim.

X için bir metrik olsun. $n \in \mathbb{Z}^+$ alalım. $\mathcal{A}$ nın bir U elemanı verildiğinde, $S_n(U)$ yu U nun $1/n$ mesafe ‘büzülerek’(shrinking) elde edilen alt kümesi olarak

tanımlayalım. Daha doğrusu, $S_n(U) = \{x \mid B(x, \frac{1}{n}) \subset U\}$. ($S_n(U)$ kapalı kümedir, ama bizim amacımız için bu önemli değil.) Şimdi daha küçük bir kümeye geçmek için $\mathcal{A}$ nın iyi sıralı ' $<$ ' oluşunu kullanıyoruz. $\mathcal{A}$ daki her bir U için;

$$T_n(U) = S_n(U) - \bigcup_{V < U} V$$

olarak tanımlayalım. Bu sayede görülür ki $U < V < W$ ve bu kümeler ayrıktrlar. Gerçekte en az $1/n$ lik bir mesafe ile ayrılırlar. (aralarında en az $1/n$ lik bir mesafe vardır.) Bu, V ve W , $\mathcal{A}$ nın farklı elemanları ise, $x \in T_n(V)$ ve $y \in T_n(W)$ olduğunda $d(x, y) \geq 1/n$ olması anlamına gelir.

Bu gerçeği kanıtlamak için, notasyonun $V < W$ olacak şekilde seçildiğini varsayalım. $x, T_n(V)$ içinde olduğundan $x, S_n(V)$ içindedir, dolayısıyla x in $1/n$ - nin komşuluğu da V de bulunur. Öte yandan $V < W$ ve $y, T_n(W)$ de olduğundan tanım bize y nin V de olmadığını söyler. Buradan y nin x in $1/n$ - komşuluğunda olmadığı sonucu çıkar.

$T_n(U)$, henüz istediğimiz kümeler değil, çünkü onların hala açık kümeler olduğunu bilmiyoruz. (Aslında kapalıdırlar.) Öyleyse açık bir $E_n(U)$ kümesi elde etmek için her birini biraz genişletelim. Özel olarak $E_n(U)$, $T_n(U)$ nun $1/3n$ - komşuluğu olsun; yani $x \in T_n(U)$ için $E_n(U)$; $B(x, 1/3n)$ açık yuvarların birleşimi olsun.

$U < V < W$ durumunda oluşturduğumuz kümeler ayrıktır. Gerçekten de eğer V ve W , $\mathcal{A}$ nın farklı elemanları ise $x \in E_n(V)$ ve $y \in E_n(W)$ olduğunda $d(x, y) \geq 1/3n$ olduğunu ileri sürüyoruz; bu gerçek hemen üçgen eşitsizliğinden çıkar. Her $V \in \mathcal{A}$ için, $E_n(V)$ kümesinin V içinde yer aldığına dikkat edelim.

Şimdi $\mathcal{E}_n = \{E_n(U) \mid U \in \mathcal{A}\}$ tanımlayalım.

$\mathcal{E}_n$ nin $\mathcal{A}$ nın incisi(rafinesi) olan yerel sonlu açık kümeler ailesi olduğunu iddia ediyoruz. $\mathcal{E}_n$ nin $\mathcal{A}$ nın incisi olduğu gerçeği, her $V \in \mathcal{A}$ için $E_n(V) \subset V$ olduğu

gerçeğinden geliyor. $\mathcal{E}_n$ nin yerel sonlu olması gerçeği, X teki herhangi bir x için, x in $1/6n$ - komşuluğunun $\mathcal{E}_n$ nin en fazla bir elemanı ile kesişebileceği gerçeğinden gelmektedir. Tabiki $\mathcal{E}_n$ ailesi X i örtmez, yani örtüsü değildir. Ancak;

$$\mathcal{E} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} \mathcal{E}_n$$

olarak tanımlarsak $\mathcal{E}$ nin X in bir örtüsü olduğunu iddia ediyoruz.

X in bir x noktası olsun. Başlangıçta ele aldığımız $\mathcal{A}$ ailesi X i örter; $\mathcal{A}$ nın x i içeren (' $<$ ' iyi sıralanışından kaynaklı) ilk elemanı olarak U yu seçelim. U açık olduğundan, $B(x, 1/n) \subset U$ olacak şekilde n seçebiliriz. O halde tanım gereği $x \in S_n(U)$ olur. Şimdi U , $\mathcal{A}$ nın x i içeren ilk elemanı olduğundan, x noktası $T_n(U)$ a aittir. O halde x , istenildiği gibi $\mathcal{E}_n$ nin $E_n(U)$ elemanına aittir. ■

3.2. Nagata-Smirnov Metriklenebilme Teoremi

Bu bölümde X in regülerliğinin ve sayılabilir yerel sonlu bir bazının varlığının X in metriklenebilir olmasına eşdeğer olduğunu ispatlayacağız.

Bu koşulların metriklenebilirliği ima ettiğinin kanıtı, Urysohn metriklenebilme teoreminin ikinci kanıtını çok yakından takip eder. Bu kanıtlamada, X uzayının $\mathbb{R}^\omega$ ye olan bir dönüşümünü oluşturduk; bu, düzgün metrik $\bar{\rho}$ ye göre $\mathbb{R}^\omega$ üzerindeki bir gömmeydi. Öyleyse, bu ispatın ana unsurlarını gözden geçirelim. İspatın ilk adımı, sayılabilir bir tabana sahip her regüler X uzayının normal olduğunu ispatlamaktır. İkinci adım, X üzerinde noktaları kapalı kümelerden ayıran gerçek değerli fonksiyonların sayılabilir bir $\{f_n\}$ koleksiyonunu oluşturmaktır. Üçüncü adım, X uzayını $\mathbb{R}^\omega$ çarpım uzayına gömen bir dönüşüm tanımlamak için f_n fonksiyonlarını kullanmaktır. Ve dördüncü adım tüm x için $f_n \leq \frac{1}{n}$ ise, bu dönüşümün gerçekten de X uzayını metrik uzay $(\mathbb{R}^\omega, \bar{\rho})$ ye gömdüğüdür.

Genel metriklenebilme teoremini kanıtlamak için bu adımların her birinin genelleştirilmesi gerekir. İlk olarak, sayılabilir yerel sonlu bir tabanı olan regüler

bir X uzayının normal olduğunu gösteriyoruz. İkinci olarak, noktaları kapalı kümelerden ayıran X üzerindeki gerçekteğerli fonksiyonların belirli bir $\{f_n\}$ ailesini oluşturuyoruz. Üçüncü olarak da bir J ailesi için X uzayını $\mathbb{R}^J$ çarpım uzayına gömmek için bu fonksiyonları kullanıyoruz. Ve dördüncü olarak da f_α fonksiyonları yeterince küçükse, bu dönüşümün gerçekten X uzayını $(\mathbb{R}^\omega, \bar{\rho})$ metrik uzayına gömdüğünü göstereceğiz.

Başlamadan önce, G_δ kümesi kavramını burada vermek gerekiyor.

Tanım 3.2.1. (X, τ) bir topolojik uzay olsun.

(i) Eğer bir $A \subset X$ kümesi

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i, (G_i \text{ açık})$$

şeklinde sayılabilir sayıda açık kümelerin arakesiti olarak yazılabilirse, bu A kümesine X te bir G_δ – kümesi adı verilir.

(ii) Eğer bir $B \subset X$ kümesi

$$B = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i, (F_i \text{ kapalı})$$

şeklinde sayılabilir sayıda kapalı kümelerin birleşimi şeklinde yazılabilirse, bu B kümesine X te bir F_δ – kümesi adı verilir.

Örnek 3.2.2. X uzayının her açık alt kümesi açıkça görülür ki; G_δ kümesidir.

Birinci sayılabilir bir Hausdorff uzayında her tek noktalı küme de bir G_δ kümesidir.

Bir X metrik uzayında her kapalı küme de bir G_δ kümesidir. $A \subset X$ ve $U(A, \epsilon)$; A nın ϵ - komşuluğunu gösterebilir. Eğer A kapalı ise

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} U(A, \frac{1}{n})$$

olur.

Lemma 3.2.3. Bir X regüler topolojik uzayının σ - yerel sonlu (sayılabilir yerel sonlu) bir $\mathcal{B}$ tabanı olsun. O zaman; X normal uzaydır ve X teki her kapalı küme, sayılabilir sayıda açık kümenin kesişimi şeklinde yazılabilir, yani X te bir G_δ kümesidir.

İspat: *Adım 1.* W, X te açık olsun.

$$W = \bigcup U_n = \bigcup \overline{U_n}$$

olacak şekilde X in açık kümelerinin sayılabilir bir ailesi $\{U_n\}$ olduğunu göstereceğiz.

Buradan X için $\mathcal{B}$ tabanı, sayılabilir yerel sonlu olduğundan her bir $\mathcal{B}_n$ ailesi yerel sonlu olmak üzere;

$$\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_n$$

biçiminde yazabiliriz.

$\mathcal{C}_n$, $B \in \mathcal{B}_n$ ve $\overline{B} \subset W$ olacak şekilde $\mathcal{B}$ taban elemanlarından oluşan bir aile olsun. O zaman $\mathcal{C}_n$ yerel sonludur, $\mathcal{B}_n$ nin bir alt ailesidir.

$$U_n = \bigcup_{B \in \mathcal{C}_n} B$$

olarak tanımlayalım. U_n açık bir kümedir ve Lemma 3.1.6. den dolayı;

$$\overline{U_n} = \bigcup_{B \in \mathcal{C}_n} \overline{B}$$

olarak tanımlayalım. Öyleyse $\overline{U_n} \subset W$ olur ve buradan da;

$$\bigcup U_n \subset \bigcup \overline{U_n} \subset W$$

elde edilir. $x \in W$ verilsin, regülerlikten dolayı $x \in B$ ve $\overline{B} \subset W$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{B}$ baz elemanı vardır. Şimdi bazı n değerleri için $B \in \mathcal{B}_n$ alalım. Daha sonra $B \in \mathcal{C}_n$

ve yukarıdaki tanımdan dolayı $x \in U_n$ olur. Buradan da istendiği üzere;

$$W \subset \bigcup U_n$$

olur.

Adım 2. X teki her kapalı C kümesinin X te bir G_δ kümesini olduğunu gösterelim. C verilsin, $W = X - C$ alalım. *Adım 1*'den;

$$W = \bigcup \bar{U}_n$$

olacak şekilde X te U_n kümeleri vardır. O zaman

$$C = \bigcap (X - \bar{U}_n)$$

X in açık kümelerinin sayılabilir bir kesişimine eşit olur.

Adım 3. Son olarak da X in normal uzay olduğunu gösterelim. C ve D , X te ayrık kapalı iki küme olsun. Kanıtta kullandığımız *Adım 1*'i $X - D$ kümesine uygulayarak,

$$\bigcup U_n = \bigcup \bar{U}_n = X - D$$

olacak şekilde açık kümelerin sayılabilir bir $\{U_n\}$ ailesini oluşturalım. Sonra $\{U_n\}$, C yi örter ve her bir $\bar{U}_n$ kümesi, D 'den ayrıktır. Benzer şekilde, kapanışları C den ayrık olan açık kümelerle D 'nin sayılabilir bir $\{V_n\}$ örtüsü vardır.

Şimdi sayılabilir tabanı olan bir regüler bir uzayın normal olduğunu ifade eden teoremin ispatında ortaya çıkan duruma geri dönmüş olduk. (Munkres (2000) Theorem 32.1' e bakınız.) bu kanıtı kelimesi kelimesine tekrarlayabiliriz.

$$U'_n = U_n - \bigcup_{i=1}^n \bar{V}_i \quad \text{ve} \quad V'_n = V_n - \bigcup_{i=1}^n \bar{U}_i$$

olarak tanımlayalım. Burada U'_n ve V'_n lerin açık bir kümeden kapalı bir kümenin farkı olmasından ötürü açık olduğuna dikkat edelim. $\{U'_n\}$ C yi örter, çünkü her

$x \in C$ bazı n ler için U_n a aittir ve $\overline{V_i}$ kümelerinin hiçbirine ait değildir. Benzer şekilde $\{V_n'\}$ D yi örter. Bu durumda

$$U' = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} U'_n \text{ ve } V' = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} V'_n$$

sırasıyla C ve D ye göre ayrık açık kümelerdir. ■

Lemma 3.2.4. (Urysohn Lemmasının Daha Güçlü Hali) X normal uzay olsun ve $A \subset X$ kapalı bir küme olsun. Bu durumda; $f^{-1}(\{0\}) = A$ ($x \in A$ için $f(x) = 0$ ve $x \notin A$ için de $f(x) > 0$) koşulunu sağlayan sürekli bir $f: X \rightarrow [0,1]$ fonksiyonunun bulunabilmesi için gerek ve yeter koşul A nın bir G_δ -kümesi olmasıdır.

İspat. ($\Rightarrow$): A , X uzayının herhangi bir kapalı alt kümesi olsun.

$\exists f: X \rightarrow [0,1]$, $f^{-1}(\{0\}) = A$ ($x \in A$ için $f(x) = 0$ ve $x \notin A$ için de $f(x) > 0$) koşulunu sağlayan bir fonksiyonunu alalım.

$$\{0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [0, \frac{1}{n})$$

eşitliğinden $\{0\}$ tek nokta kümesi, $[0,1]$ uzayının kapalı bir G_δ -altkümesidir ve böylece ters görüntü alınırsa f sürekli olduğundan, A kümesi de X uzayında kapalı bir G_δ -kümesidir. Yani;

her n için $[0, \frac{1}{n})$ kümesi $[0,1]$ in alt uzay topolojisine göre açıktır. O halde,

$$A = f^{-1}(\{0\}) = f^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} [0, \frac{1}{n})\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left([0, \frac{1}{n})\right)$$

şeklinde yazılabildiğinden dolayı A bir G_δ -kümesidir.

($\Leftarrow$) : A , normal X uzayında kapalı bir G_δ -küme olsun. $n \in \mathbb{Z}^+$ için A yı U_n açık kümelerinin kesişimi olarak

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_n$$

şeklinde yazılabilir. Burada her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $A \cap (X - U_n) = \emptyset$ olur yani A ve $(X - U_n)$ ler ayrıktır. Aynı zamanda bu kümeler kapalı olduğundan Urysohn Lemma dan dolayı $x \in A$ için $f_n(x) = 0$ ve $x \in (X - U_n)$ için $f_n(x) = 1$ olacak şekilde sürekli bir $f_n: X \rightarrow [0,1]$ sürekli fonksiyonu mevcuttur.

$x \in X$ için;

$$\sum \frac{f_n(x)}{2^n}$$

serisini göz önünde bulunduralım. Bu seri $\sum \frac{1}{2^n}$ ile karşılaştırıldığında (Weierstrass M-Testine göre)

$$\left| \frac{f_n(x)}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n} \text{ ve } \sum \frac{1}{2^n} = \frac{1/2}{1 - 1/2} = 1 \text{ yakınsak}$$

olduğundan

$$\sum \frac{f_n(x)}{2^n}$$

serisi düzgün yakınsaktır. O halde

$$f(x) = \sum \frac{f_n(x)}{2^n} \text{ ile tanımlanan } f: X \rightarrow [0,1]$$

limit fonksiyonu süreklidir.

$x \in A$ için ;

$$f(x) = \sum \frac{f_n(x)}{2^n} = 0$$

$x \notin A$ ($x \in (X - U_n)$) için

$$f(x) = \sum \frac{f_n(x)}{2^n} \sim \sum \frac{1}{2^n} = \frac{1/2}{1 - 1/2} = 1$$

olacak şekilde (f , A da 0 ve $(X - A)$ da pozitiftir) ■

Sonuç 3.2.5. X normal uzayının A alt kümesinin açık bir F_δ – kümesi olması için gerek ve yeter koşul $A = f^{-1}((0, 1])$ olacak şekilde bir $f: X \rightarrow [0, 1]$ sürekli fonksiyonun bulunmasıdır.

İspat: F_δ –kümesinin tümleyeni G_δ -kümesi olduğunu göz önüne alarak bu sonucun ispatı Lemma 3.2.3. den elde edilerek kolayca görülür.

Artık bu bölümün varılması gereken hedefi olan Nagata-Smirnov Metriklenebilme Teoremini ifade edip kanıtlayabiliriz:

Teorem 3.2.6. (Nagata-Smirnov Metriklenebilme Teoremi)

Bir X topolojik uzayının metriklenebilmesi için gerek ve yeter koşul X uzayının *regüler olması* ve bir *σ -yerel sonlu tabana* (sayılabilir yerel sonlu taban) sahip olmasıdır.

İspat. ($\Leftarrow$) X uzayının regüler uzay ve sayılabilir yerel sonlu bazının $\mathcal{B}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda X normaldir ve X teki her kapalı küme, X teki bir G_δ kümesidir. Şimdi bazı J ler için X i $(\mathbb{R}^J, \bar{\rho})$ metrik uzaya gömülerek ile X in metriklenebilir olduğunu göstereceğiz. Her $\mathcal{B}_n$ ailesi yerel sonlu olmak üzere,

$$\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_n$$

olsun. Her $n \in \mathbb{Z}^+$ ve her $B \in \mathcal{B}_n$ tabanı için;

$f_{n,B} : X \rightarrow [0, 1/n]$, $x \in B$ için $f_{n,B}(x) > 0$ ve $x \notin B$ için $f_{n,B}(x) = 0$ koşulunu sağlayacak şekilde bir sürekli fonksiyonu seçelim. (Urysohn Lemma) $\{f_{n,B}\}$ sürekli fonksiyonlar ailesi noktaları X teki kapalı kümelerden ayırır: Bir x_0 noktası ve bu x_0 noktasının bir U komşuluğu verildiğinde, $x \in B \subset U$ olacak

şekilde bir B tabanı vardır. Sonra bazı n ler için $B \in \mathcal{B}_n$, öyle ki $f_{n,B}(x) > 0$ ve $f_{n,B}$, U dışında sıfırlanır.

$B \in \mathcal{B}_n$ olmak üzere J , $(\mathbb{Z}^+ \times \mathcal{B})$ nin (n, B) tüm çiftlerden oluşan alt kümesi olsun.

$F: X \rightarrow [0,1]^J$, $F(x) = (f_{n,B}(x))_{(n,B) \in J}$ olarak tanımlayalım.

$[0,1]^J$ üzerindeki çarpım topolojisine göre F dönüşümü bir gömmedir. (İmbedding Teoremi)

Şimdi $[0,1]^J$ nin düzgün(uniform) metrik tarafından üretilen (indüklenen-doğurulan) topolojiyi veriyoruz ve F nin bu topolojiye göre bir gömme olduğunu gösteriyoruz. İşte burada $f_{n,B}(x) < 1/n$ koşulu söz konusu. Düzgün(Uniform) topoloji , çarpım topolojisinden daha incedir. Bu sebeple düzgün metriğe göre, F dönüşümü birebirdir ve X in açık kümelerini $Z = F(X)$ görüntü uzayının açık kümelerine taşır. F nin sürekli olduğunun ayrıca bir ispatını vermeliyiz.

$\mathbb{R}^J$ nin $[0,1]^J$ alt uzayında, düzgün metriğin aşağıdaki eşitliği sağladığına dikkat edelim.

$$\rho((x_\alpha), (y_\alpha)) = \sup\{|x_\alpha - y_\alpha|\}$$

Sürekliliği kanıtlamak için; bir $x_0 \in X$ noktasını ve $\epsilon > 0$ sayısını alalım.

$$x \in W \Rightarrow \rho(F(x), F(x_0)) < \epsilon$$

koşulunu sağlayan x_0 in bir W komşuluğunu buluruz.

n sabit tutulsun. $\mathcal{B}_n$ ailesinin yalnızca sonlu sayıda elemanı ile kesişen x_0 in bir U_n komşuluğunu ele alalım. Bu B nin $\mathcal{B}_n$ üzerinde değiştiğinden, $f_{n,B}$ fonksiyonlarının sonlu tanesi hariç hepsinin U_n üzerinde özdeş olarak sifıra eşit olduğu anlamına gelir. Çünkü her $f_{n,B}$ fonksiyonu sürekli, artık U_n içinde kalacak şekilde x_0 in bir V_n komşuluğunu seçebiliriz, $B \in \mathcal{B}_n$ için diğer kalan $f_{n,B}$ fonksiyonlarının her birinin $\epsilon/2$ oranında değiştiği durumlarda.

Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için böyle bir x_0 ın V_n komşuluğunu alalım. Ardından $1/N \leq \epsilon/2$ olacak şekilde N seçin ve $W = V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_N$ olarak tanımlayalım. W nın x_0 ın istenen komşuluğu olduğunu iddia ediyoruz.

$x \in W$ olsun. Eğer $n \leq N$ iken;

$$|f_{n,B}(x) - f_{n,B}(x_0)| \leq \epsilon/2$$

olur, çünkü $f_{n,B}$ fonksiyonu ya aynı şekilde sıfırlanır ya da W üzerinde en fazla $\epsilon/2$ oranında değişir.

Eğer $n > N$ iken;

$$|f_{n,B}(x) - f_{n,B}(x_0)| \leq 1/n < \epsilon/2$$

olur, çünkü $f_{n,B}$ X i $[0, 1/n]$ e eşler. Bu sebeple tam da istenildiği üzere

$$\rho(F(x), F(x_0)) \leq \epsilon/2 < \epsilon$$

olur.

($\Rightarrow$): Şimdi tersini kanıtlayacağız. X in metriklenebilir olduğunu varsayalım. X metriklenebilir ise regüler olduğunu biliyoruz; şimdi X in sayılabilir yerel sonlu tabanı olduğunu gösterelim.

X için bir metrik alalım. Bir m verildiğinde $\mathcal{A}_m$; X in yarıçapı $1/m$ olan tüm açık yuvarlardan oluşan bir örtüsü olsun. Lemma 3.1.8. den dolayı $\mathcal{A}_m$ açık örtüsünün yerel sonlu açık bir $\mathcal{B}_m$ incesi vardır. $\mathcal{B}_m$ nin her elemanının çapının en fazla $2/m$ olduğuna dikkat edelim. $m \in \mathbb{Z}^+$ için $\mathcal{B}$; $\mathcal{B}_m$ ailelerinin birleşimi

$$\mathcal{B} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}^+} \mathcal{B}_m$$

olacak yazalım. Burada her bir $\mathcal{B}_m$ ailesi sayılabilir yerel sonlu olduğundan dolayı $\mathcal{B}$ de sayılabilir yerel sonludur. Şimdi $\mathcal{B}$ nin X için bir taban olduğunu göstereceğiz. $x \in X$ ve $\epsilon > 0$ verilsin , $\mathcal{B}$ nin $B(x, \epsilon)$ içinde x içeren bir B elemanının olduğunu gösteriyoruz. $1/m < \epsilon/2$ olacak şekilde önce m seçelim. O halde $\mathcal{B}_m$, X in bir örtüsü olduğundan $\mathcal{B}_m$ nin x i içeren bir B elemanını seçebiliriz. B , x i

içerdiğinden ve çapı en fazla $2/m < \epsilon$ olduğundan, istenildiği gibi $B(x, \epsilon)$ içinde kaldığını göstermiş oluruz. ■

3.3. Parakompaktlık

Parakompaktlık kavramı kompaktlığın son yıllarda keşfedilen en yararlı genellemelerinden biri olma özelliğini taşımaktadır. Özellikle topoloji ve diferansiyel geometrideki uygulamalar için oldukça kullanışlıdır. Burada yalnızca bir uygulama olarak bir sonraki bölümde ispatını yapacağımız metriklenebilme teoreminde kullanılmak adına verilecektir.

Bu kavram ilk kez 1944'te Dieudonné tarafından kompaktlığın doğal bir genelleştirilmesi olarak verilmiştir. Bu kavram Stone tarafından her metrik uzayın parakompakt olduğunun gösterilmesi ile daha büyük önem kazanmış ve bu sonuç Smirnov, Nagata ve Bing tarafından Genel Metriklenebilme Teoreminin ispatlanmasında kullanılmıştır.

Bize aşına olan uzayların çoğu zaten parakompakttır. Örneğin, bu tanımın doğrudan bir sonucu olarak her kompakt uzay aynı zamanda parakompakttır. Ayrıca Stone tarafından ifade edilen ve ispatını vereceğimiz bu teoreme göre “Her metriklenebilir uzayın parakompakttır.” Dolayısıyla parakompakt uzaylar sınıfı, incelediğimiz en önemli iki uzay sınıfını ve daha nice uzayları da içerir.

Parakompaktlığın kompaktlığı nasıl genelleştirdiğini görmek için, kompaktlığın tanımını hatırlayalım;

“ X in her açık $\mathcal{A}$ örtüsünün X i örten sonlu bir alt örtü (ailesi) içeriyorsa, X uzayının kompakt olduğu söylenir.” Bunu söylemenin eşdeğer bir başka yolu şudur:

“ X in her açık $\mathcal{A}$ örtüsünün X i örten sonlu bir açık rafinesi(incesi) $\mathcal{B}$ varsa X uzayı kompakttır.”

Bu tanım aynı zamanda basitçe şunu ortaya çıkarır; böyle bir $\mathcal{B}$ rafine(incesi) verildiğinde, $\mathcal{B}$ nin her bir elemanı için onu içeren $\mathcal{A}$ nın bir elemanı seçilebilir; bu şekilde de $\mathcal{A}$ nın X i örten sonlu bir alt örtüsü elde edilir.

Bu yeni kompaktlık formülasyonu gariptir, ancak genelleştirmenin bir yolunu önermesi bağlamında önemlidir:

Tanım 3.3.1. X bir küme ve $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{V}$, X in iki farklı örtüsü olsun. Eğer her $U \in \mathcal{U}$ için $U \subset V$ olacak biçimde bir $V \in \mathcal{V}$ varsa bu $\mathcal{U}$ örtüsüne $\mathcal{V}$ örtüsünün bir incesi(rafinesi) denir ve $\mathcal{U} < \mathcal{V}$ ile gösterilir.

Tanım 3.3.2. (X, τ) topolojik uzayının her açık örtüsünün yerel sonlu açık incesi varsa bu (X, τ) uzayına parakompakt uzay denir.

Parakompaktlık tanımının bir parçası olarak uzayın Hausdorff olması koşulu da göz önünde bulundurulur.

Açıktır ki, her kompakt uzay parakompakttır. Ancak her parakompakt uzay, kompakt olmayabilir. Örneğin, X kümesi sonsuz elemanlı bir küme olmak üzere, (X, τ_D) ayrık topoloji uzayı parakompakt olmasına karşın kompakt değildir.

$\mathbb{R}^n$ uzayı parakompakttır. Yine benzer şekilde bilinen topoloji ile $\mathbb{R}$ de parakompakttır.

Daha sonra genel olarak tüm metrik uzayların parakompakt olduğunu göreceğiz. Bu yüzden kompakt olmayan her metrik uzay, kompakt olmayan parakompakt uzaydır.

Parakompakt uzaylar bazı özellikleri ile kompakt uzaylara benzer. Örneğin, bir parakompakt uzayın bir alt uzayı her zaman parakompakt değildir, ancak kapalı bir alt uzayı parakompakttır. Ayrıca parakompakt Hausdorff uzayı normaldir. Başka özellikler yönü ile de parakompakt uzaylar kompakt uzaylara benzemez, özellikle iki parakompakt uzayın çarpımı, parakompakt olmak zorunda değildir kompaktlığın aksine. Şimdi bu gerçekleri gösterelim.

Teorem 3.3.3. Parakompakt uzayların her kapalı alt uzayı parakompakttır.

İspat. (X, τ) bir parakompakt uzay ve A , (X, τ) uzayının herhangi bir kapalı alt kümesi olsun. $\tau_A = \{U \cap A : U \in \tau\}$ şeklinde tanımlıdır. $\mathcal{U}$, (A, τ_A) nın açık bir örtüsü olsun. Alt uzay topolojisi tanımından dolayı her $U \in \mathcal{U}$ için $U = A \cap V_U$ olacak şekilde en az bir $V_U \in \tau$ vardır. $\mathcal{V} = \{V_U : U \in \mathcal{U}\} \cup \{X \setminus A\}$ olsun. $\mathcal{V}$, (X, τ) nun bir açık örtüsüdür. (X, τ) parakompakt olduğundan $\mathcal{V}$ nin açık yerel sonlu bir $\mathcal{W}$ inceliği vardır. Şimdi kolayca görülür ki, $\{A \cap W : W \in \mathcal{W}\}$ ailesi de A nın yerel sonlu açık örtüsüdür ve $\mathcal{U}$ nun da bir inceliğidir. O halde (A, τ_A) kapalı alt uzayı da parakompakttır. ■

Teorem 3.3.4. X bir parakompakt uzay ve A ve B , X uzayının kapalı alt kümelerinin ayrık çifti olsun. Eğer $\forall x \in B$ için, $A \subset U_x$, $x \in V_x$ ve $U_x \cap V_x = \emptyset$ olacak şekilde U_x, V_x açık kümeleri varsa, bu durumda

$$A \subset U, B \subset V \text{ ve } U \cap V = \emptyset$$

olacak şekilde U, V açık kümeleri vardır.

İspat. X bir parakompakt uzay olsun. Bu uzayın kapalı alt kümelerinin ayrık A, B çiftini ve her $x \in B$ için $A \subset U_x, x \in V_x$ ve $U_x \cap V_x = \emptyset$ koşullarını sağlayan U_x, V_x açık kümelerini alalım. $\{V_x\}_{x \in B} \cup \{X \setminus B\}$ ailesi, X uzayının açık bir örtüsüdür. Bu örtünün yerel sonlu açık inceliğine $\{W_s\}_{s \in S}$ diyelim.

$$S_0 = \{s \in S : W_s \cap B \neq \emptyset\}$$

olsun. Bu durumda,

$$B \subset \bigcup_{s \in S_0} W_s \text{ ve her } s \in S_0 \text{ için } A \cap \overline{W_s} = \emptyset \text{ olur.}$$

Öncelikle $B \subset \bigcup_{s \in S_0} W_s$ olduğunu gösterelim. $B \not\subset \bigcup_{s \in S_0} W_s$ olduğunu varsayalım. O halde $x \notin \bigcup_{s \in S_0} W_s$ olacak şekilde bir $x \in B$ vardır. Bu durumda her $s \in S_0$ için $x \notin W_s$ olur. $\{W_s\}_{s \in S}$ ailesi örtü olduğundan $x \in W_{s'}$ olacak şekilde

$s' \in S$ vardır ve bu s' için, $x \in B \cap W_{s'} \neq \emptyset$ bulunur. Bunu sağlayan s' noktasının S_0 da olması gerekir. Ancak varsayımımıza göre her $s \in S_0$ için $x \notin W_s$ idi. Bu çelişkiden kaynaklı $B \subset \bigcup_{s \in S_0} W_s$ olduğu sonucu çıkar.

Şimdi her $s \in S_0$ için $A \cap \overline{W}_s = \emptyset$ olduğunu gösterelim. $\{W_s\}_{s \in S_0}$ ailesi

$\{V_x\}_{x \in B} \cup \{X \setminus B\}$ örtüsünün bir inceliği olduğundan, $W_s \in \{W_s\}_{s \in S_0}$ için

$$W_s \subset V_x \quad \text{veya} \quad W_s \subset (X \setminus B)$$

olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. Fakat $W_s \cap B \neq \emptyset$ olduğundan $W_s \subset (X \setminus B)$ olması imkansızdır. O halde $W_s \subset V_x$ olmalıdır. $U_x \cap V_x = \emptyset$ olduğundan

$W_s \cap U_x = \emptyset$ olmalıdır. Böylece $\overline{W}_s \cap U_x = \emptyset$ elde edilir. Gerçekten de $\overline{W}_s \cap U_x \neq \emptyset$ olsaydı $y \in \overline{W}_s \cap U_x$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır ve buradan $y \in \overline{W}_s$ ve $y \in U_x$ olur. U_x , y noktasını içeren bir açık küme olduğundan bu noktanın bir komşuluğu olur. $y \in \overline{W}_s$ ise, $\overline{W}_s \cap U_x \neq \emptyset$ olmalıdır. Bu durum $\overline{W}_s \cap U_x = \emptyset$ olması ile çelişkilidir. Dolayısıyla $\overline{W}_s \cap U_x = \emptyset$ olur. Bu durumda $A \subset U_x$ olduğundan $\overline{W}_s \cap A = \emptyset$ elde edilir.

Teorem 3.1.7. ii) den dolayı

$$\overline{\bigcup_{s \in S_0} W_s} = \bigcup_{s \in S_0} \overline{W}_s$$

elde edilir. Buradan da

$$U = X \setminus \bigcup_{s \in S_0} \overline{W}_s \quad \text{ve} \quad V = \bigcup_{s \in S_0} W_s$$

şeklinde seçilen U ve V kümeleri açıktır ve $U \cap V = \emptyset$ bulunur. O halde

$$A \subset U, \quad B \subset V \quad \text{ve} \quad U \cap V = \emptyset$$

koşulları sağlanmış olur. ■

Şimdi bu teoremden hareketle de aşağıdaki teoremi göstermeye çalışalım.

Teorem 3.3.5. Her parakompakt Hausdorff X uzayı normaldir.

İspat. X bir parakompakt uzay olsun. Öncelikle X uzayının regüler olduğunu göstermeliyiz. $A \subset X$ kapalı küme ve $x \notin A$ olsun. X uzayı Hausdorff olduğundan her $y \in A$ için $x \notin \overline{V_y}$ olacak şekilde bir $\overline{V_y}$ açık kümesi vardır. Gerçekten de her $y \in A$ için $x \neq y$ ve X uzayı Hausdorff olduğundan,

$$x \in U_x, y \in V_y \text{ ve } U_x \cap V_y = \emptyset$$

olacak şekilde $U_x, V_y \subset X$ açık kümeleri vardır. Eğer $x \in \overline{V_y}$ olsaydı, x noktasının her $U_{(x)}$ komşuluğu için $U_{(x)} \cap V_{(y)} \neq \emptyset$ olurdu. U_x , x noktasının bir komşuluğu olduğundan $U_x \cap V_y \neq \emptyset$ olmalıdır. Ancak bu durum $U_x \cap V_y = \emptyset$ ile çelişir, o halde $x \notin \overline{V_y}$ olmalıdır. Buradan;

$$\mathcal{V} = \{V_y : y \in A\} \cup \{X \setminus A\}$$

ailesi X uzayının bir açık örtüsüdür. X uzayı parakompakt olduğundan $\mathcal{V}$ örtüsünün yerel sonlu açık bir $\mathcal{W}$ inceliği vardır.

$$V = \bigcup \{W \in \mathcal{W} : W \cap A \neq \emptyset\}$$

şeklinde tanımlanan V kümesi açıktır ve $\mathcal{W}$ bir örtü olduğundan $A \subset V$ sağlanır. Ayrıca $\mathcal{W}$ ailesi yerel sonlu olduğundan

$$\overline{V} = \overline{\bigcup \{W \in \mathcal{W} : W \cap A \neq \emptyset\}} = \bigcup \{\overline{W} : W \cap A \neq \emptyset\}$$

olur. Diğer yandan, $\mathcal{W}$, $\mathcal{V}$ nin bir inceliğidir. Gerçekten de $W \in \mathcal{W}$ için eğer

$W \cap A \neq \emptyset$ ise $y \in W \cap A$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır. Bu durumda $y \in W$ ve $y \in A$ olur. $\mathcal{V}$ nin tanımından $y \in A$ noktasına karşılık gelen V_y için $W \subset V_y$ olur.

Buradan $W \in \mathcal{V}$ elde edilir. Eğer $W \cap A = \emptyset$ ise, $W \subset (X \setminus A)$ olur. Bu durumda yine $W \in \mathcal{V}$ bulunur. Böylece $W \cap A \neq \emptyset$ olacak şekildeki her $W \in \mathcal{W}$ için

$W \subset V_y$ olacak şekilde bir $V_y \in \mathcal{V}$ vardır. Buradan $\overline{W} = \overline{V_y}$ ve $x \notin \overline{V_y}$ olduğundan

$x \notin \overline{W}$ bulunur. Buradan $x \notin \overline{V}$ olur. Böylece $x \in (X \setminus \overline{V})$, $A \subset V$ ve

$V \cap (X \setminus \overline{V}) = \emptyset$ elde edilir, bu ise X uzayının regüler olması anlamına gelir.

Şimdi A ve B , X de ayrık ve kapalı kümeler olsun. X uzayı regüler olduğundan her $x \in B$ için $\overline{V_x} \cap A = \emptyset$ olacak şekilde bir V_x açık kümesi vardır. Yukarıda kullandığımız yöntemi tekrar uygularsak:

$$V^* = \{V_x \mid x \in B\} \cup \{X \setminus B\}$$

X uzayının açık bir örtüsüdür. Bu örtünün yerel sonlu açık incesi $\mathcal{W}^*$ olsun.

$$V^* = \bigcup \{W^* \in \mathcal{W}^* \mid W^* \cap B \neq \emptyset\}$$

olarak tanımlanan V^* açık kümesi açıktır ve $B \subset V^*$ olur. $\mathcal{W}^*$ yerel sonlu olduğundan

$$\overline{V^*} = \overline{\bigcup \{W^* \in \mathcal{W}^* \mid W^* \cap B \neq \emptyset\}} = \bigcup \{\overline{W^*} \mid W^* \cap B \neq \emptyset\}$$

olur. $\mathcal{W}^*$, V^* nin bir inceliği olduğundan $W^* \cap B \neq \emptyset$ koşulunu sağlayan her $W^* \in \mathcal{W}^*$ kümesi için $W^* \subset V_x$ olacak şekilde bir $V_x \in V^*$ vardır. Buradan

$\overline{W^*} \subset \overline{V_x}$ ve bu sebeple $\overline{W^*} \cap A = \emptyset$ ve dolayısıyla $\overline{V_x}^* \cap A = \emptyset$ elde edilir.

Buradan $A \subset (X \setminus \overline{V_x^*})$, $B \subset V^*$ ve $V^* \cap (X \setminus \overline{V_x^*}) = \emptyset$ olduğu görülür. O halde X parakompakt uzayı normaldir. ■

Örnek 3.3.6. Bir X Hausdorff uzayının parakompakt alt uzayının X de kapalı olmasına gerek yoktur. Aslında $(0,1)$ açık aralığı parakompakttır, $\mathbb{R}$ ye homeomorfiktir, fakat $\mathbb{R}$ de kapalı değildir.

Örnek 3.3.7. İki parakompakt uzayın çarpımı parakompakt olmak zorunda değildir. $\mathbb{R}_l$ uzayı regüler ve Lindelöf uzay olduğundan parakompakt, ancak $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$ parakompakt değildir. Hausdorff uzaylardır ancak normal değildir.

Örnek 3.3.8. $\mathbb{R}^J$ çarpım uzayı, J sayılabilir değilse parakompakt değildir. $\mathbb{R}^J$ Hausdorff uzaydır, ancak normal değildir.

Sonuç 3.3.9. Böylece parakompakt uzayların kompakt Hausdorff uzayları ile normal uzaylar arasında yer aldığı, başka bir ifade ile

$$Kompakt\ Hausdorff \Rightarrow Parakompakt \Rightarrow Normal$$

ilişkisi de elde edilmiş olur.

İspat. Aşıkâr

Lemma 3.3.10. X regüler uzay olsun. O halde X üzerinde aşağıdaki koşullar birbirine eşdeğerdirler. X in her açık örtüsü şu şekilde bir rafineye sahiptir:

- (i) X uzayının açık bir örtüsü ve σ -yerel sonlu (sayılabilir yerel sonlu).
- (ii) X uzayının bir örtüsü ve yerel sonlu.
- (iii) X uzayının kapalı bir örtüsü ve yerel sonlu.
- (iv) X uzayının açık bir örtüsü ve yerel sonlu.

İspat. (iv) $\Rightarrow$ (i) olduğu açıktır. Teoremi kanıtlamak için ihtiyacımız olan şey bunun tam tersidir. Tersini kanıtlamak için her halükârda (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) adımlarını izlemek zorundayız, bu sebeple kolaylık olsun diye bu koşulları Lemma ifadesinde listeledik.

(i) $\Rightarrow$ (ii): $\mathcal{A}$, X in açık bir örtüsü olsun. $\mathcal{B}$, X i örten ve $\mathcal{A}$ nın sayılabilir yerel sonlu açık bir incesi ve $\mathcal{B}_n$ lerin her biri yerel sonlu olmak üzere;

$$\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_n$$

olsun. Şimdi, daha önce farklı $\mathcal{B}_n$ lerin ayrıklarından kümeler yapmak için kullandığımız “shrinking (küçültme)” yönteminin aynısını uyguluyoruz. i verildiğinde,

$$V_i = \bigcup_{U \in \mathcal{B}_i} U$$

olsun. Sonra her $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $\mathcal{B}_n$ nin her U elemanı için;

$$S_n(U) = U - \bigcup_{i < n} V_i$$

olarak tanımlayalım. ($S_n(U)$ mutlaka açık ya da mutlaka kapalı olmadığını unutmayalım.)

$$\mathcal{C}_n = \{S_n(U) \mid U \in \mathcal{B}_n\}$$

O zaman $\mathcal{C}_n$; $\mathcal{B}_n$ in bir incesidir, çünkü her $U \in \mathcal{B}_n$ için $S_n(U) \subset U$ dir.

$$\mathcal{C} = \bigcup \mathcal{C}_n$$

alalım. $\mathcal{C}$; X i örten $\mathcal{A}$ nın gerekli yerel sonlu incesi olduğunu iddia ediyoruz.

x, X in bir noktası olsun. x in $\mathcal{C}$ nin bir elemanında olduğunu ve x in $\mathcal{C}$ nin yalnızca sonlu sayıda elemanını kesen bir komşuluğu olduğunu kanıtlamak istiyoruz.

$$\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_n$$

ele alalım; N, x in $\mathcal{B}_N$ nin bir elemanında yer aldığı en küçük tamsayı olsun. $U, \mathcal{B}_N$ nin x i içeren bir elemanı olsun. İlk olarak, $i < N$ için x ; $\mathcal{B}_i$ lerin hiçbirinde bulunmadığından, bu x noktasının $\mathcal{C}$ nin $S_n(U)$ elemanında bulunduğu dikkat edelim. İkinci olarak; her $\mathcal{B}_n$ ailesi yerel sonlu olduğundan, her $n = 1, 2, \dots, N$ için $\mathcal{B}_n$ nin yalnızca sonlu sayıda elemanı ile kesişen bir W_n komşuluğunu seçebiliriz. Şimdi eğer $W_n, \mathcal{C}_n$ nin $S_n(V)$ elemanı ile kesişiyorsa, $S_n(V) \subset V$ olmasından ötürü $\mathcal{B}_n$ nin V elemanı ile kesişir. Bu sebeple $W_n, \mathcal{C}_n$ nin yalnızca sonlu sayıda elemanı ile kesişir. Ayrıca $U, \mathcal{B}_n$ nin içinde olduğundan, $n > N$ için $U, \mathcal{C}_n$ nin hiçbir elemanı ile kesişmez. Sonuç olarak x in $W_1 \cap W_2 \cap \dots \cap W_N \cap U$ komşuluğu $\mathcal{C}$ nin yalnızca sonlu sayıda elemanı ile kesişir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): $\mathcal{A}, X$ in açık bir örtüsü olsun. $\mathcal{B}, X$ in U açık kümelerinin koleksiyonu olsun, öyle ki $\overline{U}, \mathcal{A}$ nın bir elemanında yer alır. Regülerlikten, $\mathcal{B}, X$ in bir örtüsüdür (X i örter) (2).koşulu kullanarak, $\mathcal{B}$ nin X i örten ve yerel sonlu bir $\mathcal{C}$

incesini bulabiliriz. $\mathcal{D} = \{\overline{C} \mid C \in \mathcal{C}\}$ olsun. O halde $\mathcal{D}$ ayrıca X in bir örtüsüdür, *Lemma 3.1.6.* den dolayı yerel sonludur ve $\mathcal{A}$ nın bir incesidir.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): $\mathcal{A}$, X in açık bir örtüsü olsun. (3). koşulu kullanarak, X i örten $\mathcal{A}$ nın yerel sonlu bir incesi olan $\mathcal{B}$ yi seçelim. $\mathcal{B}$ nin her bir B elemanını açık bir kümeye hafifçe genişletmeyi(expansion), ortaya çıkan açık kümeler ailesinin yine de yerel sonlu ve $\mathcal{A}$ nın bir incesi olmasına yetecek hafiflikte olmasını istiyoruz.

Bu adım yeni bir hileyi içerir. Birkaç kez kullanılan önceki hile, kümeleri bir şekilde sıralamak ve öncekileri çıkararak yeni bir küme oluşturmaktan ibaretti. Bu hile kümeleri küçültür; onları genişletmek için farklı bir şeye ihtiyacımız var. X in bir yardımcı yerel sonlu kapalı $\mathcal{C}$ örtüsünü tanıtacağız ve bunu $\mathcal{B}$ nin elemanlarını genişletmek için kullanacağız.

X in her x noktası için, $\mathcal{B}$ nin yalnızca sonlu sayıda elemanı ile kesişen x in bir komşuluğu vardır. $\mathcal{B}$ nin yalnızca sonlu sayıda elemanı ile kesişen tüm açık kümelerin ailesi evvela X in açık bir örtüsüdür. Yine (3). koşulu kullanarak, $\mathcal{C}$ X in bu yerel sonlu örtüsünün kapalı bir incesi olsun. $\mathcal{C}$ nin her elemanı, $\mathcal{B}$ nin yalnızca sonlu sayıda elemanı ile kesişir.

$\mathcal{B}$ nin her B elemanı için; $\mathcal{C}(B) = \{C \mid C \in \mathcal{C} \text{ ve } C \subset X \setminus B\}$ olsun. O zaman;

$$E(B) = X - \bigcup_{C \in \mathcal{C}(B)} C$$

olarak tanımlayalım. $\mathcal{C}$ kapalı kümelerin yerel sonlu bir ailesi olduğundan, $\mathcal{C}$ nin herhangi bir alt ailelerinin birleşimi de *Lemma 3.1.6'*den dolayı kapalıdır. Bu sebeple, $E(B)$ kümesi açık bir kümedir ve ayrıca tanım gereği $E(B) \supset B$ dir.

Şimdi her bir B yi çok fazla genişletmiş olabiliriz; $\{E(B)\}$ ailesi $\mathcal{A}$ nın bir incesi olmayabilir. Bu sorunu kolayca giderebiliriz. Her $B \in \mathcal{B}$ için $\mathcal{A}$ nın B de olan bir $F(B)$ elemanını seçelim. Ardından

$$\mathcal{D} = \{E(B) \cap F(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$$

olarak tanımlayalım. $\mathcal{D}$; $\mathcal{A}$ nın bir incesidir. Çünkü $B \subset E(B) \cap F(B)$ ve $\mathcal{B}$, X i örttüğünden dolayı, $\mathcal{D}$ ailesi de X i örter.

Son olarak $\mathcal{D}$ nin yerel sonlu olduğunu kanıtlamak gerekiyor. Bir $x \in X$ verildiğinde, $\mathcal{C}$ nin yalnızca sonlu sayıda elemanını kesen bir W komşuluğunu alalım, diyelim ki $C_1, C_2, \dots, C_k$ olsun. W , $\mathcal{D}$ nin yalnızca sonlu sayıda elemanını kestiğini gösteriyoruz. $\mathcal{C}$, X in bir örtüsü olduğundan W kümesi $C_1, C_2, \dots, C_k$ kümeleri tarafından örtülür. Bu sebeple $\mathcal{C}$ nin her bir C elemanının $\mathcal{D}$ nin yalnızca sonlu sayıda elemanını kestiğini göstermek yeterlidir. Şimdi eğer $\mathcal{C}$, $E(B) \cap F(B)$ kümesiyle kesişiyorsa, o zaman $E(B)$ ile de kesişir; bu sebeple de $E(B)$ nin tanımı gereği $(X \setminus B)$ içinde değildir, dolayısıyla $\mathcal{C}$; B ile kesişmelidir. $\mathcal{C}$; $\mathcal{B}$ nin yalnızca sonlu sayıda elemanını kestiği için, $\mathcal{D}$ ailesinin en fazla aynı sayıda elemanı ile kesişebilir.

Böylelikle $\mathcal{D}$ yerel sonludur. ■

Teorem 3.3.11. (Stone Teoremi) Her metriklenebilir uzay parakompakttır.

İspat. Lemma 3.1.8. da metriklenebilir bir uzayın her açık örtüsünün bir yerel sonlu açık incesinin olduğunun kanıtı verilmişti. O halde parakompaktlık tanımı gereği her metriklenebilir uzayının her açık örtüsünün yerel sonlu bir açık incesi mevcut olduğundan parakompakttır. ■

Teorem 3.3.12. Her regüler Lindelöf uzayı parakompakttır.

İspat. X regüler ve Lindelöf uzay olsun. X in açık bir $\mathcal{A}$ örtüsü verildiğinde, X i örten sayılabilir bir alt ailesi vardır; bu alt aile otomatik olarak sayılabilir yerel sonludur. Önceki lemma, $\mathcal{A}$ nın X in örtüsü olacak şekilde ve yerel sonlu bir açık rafineye sahip olduğunu göstermek için yeterlidir. ■

Tanım 3.3.13. X bir topolojik uzay ve $\phi_\alpha: X \rightarrow [0,1]$ olmak üzere $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in J}$ sürekli fonksiyonların ailesi olsun. Eğer her $x \in X$ için

$$\sum_{\alpha \in J} \phi_\alpha(x) = 1$$

ise $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in J}$ ailesine X uzayı üzerinde birimin bir parçalanışı denir.

Buradaki son eşitlik; her bir $x_0 \in X$ için sadece sayılabilir bazı ϕ_α fonksiyonlarının x_0 noktasında sıfırlanmadığı ve $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\} = \{\alpha \in J \mid \phi_\alpha(x_0) \neq 0\}$ için

$$\sum_{i=1}^{\infty} \phi_{\alpha_i}(x_0)$$

serisinin 1'e yakınsadığı anlamına gelir. Bu seri mutlak yakınsaktır, terimlerinin sıralanışı önemli değildir ve 1'e yakınsaması demek; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in J$ ve $k = 1, 2, 3, \dots$ için

$$\phi_{\alpha_1}(x_0) + \phi_{\alpha_2}(x_0) + \dots + \phi_{\alpha_k}(x_0)$$

formundaki sayılardan oluşan en küçük üst sınırının 1 olması demektir.

X üzerinde $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in J}$ birimin bir parçalanışı olmak üzere, $\{\phi_\alpha^{-1}((0,1])\}_{\alpha \in J}$ örtüsü X uzayında yerel sonlu ise, $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in J}$ fonksiyon ailesine X uzayında yerel sonludur denir. Bu $\alpha \in (J \setminus J_0)$ ve $\phi_{\alpha_1}(x_0) + \phi_{\alpha_2}(x_0) + \dots + \phi_{\alpha_k}(x_0) = 1$ iken, her bir $x_0 \in X$ ve $x \in U_0$ için $\phi_\alpha(x) = 0$ olacak şekilde x_0 noktasının bir U_0 komşuluğunun ve $J_0 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \subset J$ sonlu kümesinin var olması anlamına gelir.

$\mathcal{A}$, X uzayının bir örtüsü ve $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in J}$, X uzayı üzerinde birimin parçalanışı olsun. X uzayının $\{\phi_\alpha^{-1}((0,1])\}_{\alpha \in J}$ örtüsü $\mathcal{A}$ örtüsünün bir incesi ise, $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in J}$ fonksiyon ailesine $\mathcal{A}$ örtüsüne etkiyen (subordinate) birimin parçalanışı denir.

Tanım 3.3.14. Ayrıca birimin parçalanışı için alternatif bir tanım daha verilebilir.

$\phi: X \rightarrow \mathbb{R}$, $\overline{\phi^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})}$ kümesine ϕ nin desteği denir ve $(\text{dest } \phi)$ ile ifade edilmek üzere;

$\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$, X in etiketlenmiş bir açık örtüsü olsun. $\phi_\alpha : X \rightarrow [0,1]$ etiketlenmiş sürekli fonksiyonlar ailesi eğer;

- (i) Her α için $(\text{dest } \phi) \subset U_\alpha$
- (ii) Etiketlenmiş $\{\text{dest } \phi\}$ yerel sonludur.
- (iii) Her x için

$$\sum \phi_\alpha(x) = 1$$

dir.

Buradaki (ii). koşul her $x \in X$ in üzerinde ϕ_α fonksiyonunun α nın sonlu sayıda değeri dışında tümü için aynı şekilde sıfır olduğu bir komşuluğa sahip olduğunu ima eder. Böylece (iii) teki gösterilen ‘toplamı’ sıfıra eşit olmayan $\phi_\alpha(x)$ terimlerinin toplamı olarak anlamlandırabiliriz.

Lemma 3.3.15. X bir parakompakt Hausdorff uzayı olsun. X uzayının her $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ açık örtüsünün her $\alpha \in J$ için $F_\alpha \subset U_\alpha$ koşulunu sağlayacak şekilde bir kapalı yerel sonlu $\{F_\alpha\}_{\alpha \in J}$ örtüsü mevcuttur.

Bu koşulu sağlayan $\{F_\alpha\}_{\alpha \in J}$ açık incesine $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ örtüsünün *tam (precise) incesi* denir.

İspat. $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$, X uzayının bir açık örtüsü olsun. X uzayı regüler olduğundan $x \in U_\alpha$ için $x \in W_x \subset \overline{W_x} \subset U_\alpha$ olacak şekilde en az bir W_x açık kümesi vardır. Buradan $\mathcal{W} = \{W_x\}_{x \in X}$ ailesi X uzayının bir açık örtüsü ve $\{\overline{W_x}\}_{x \in X}$ ailesi $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ ailesinin bir incesidir. Hipotezden kaynaklı $\mathcal{W}$ örtüsünün $\{A_\beta\}_{\beta \in K}$ yerel sonlu inceliği vardır. Her $\beta \in K$ için $\overline{A_\beta} \subset U_{\alpha(\beta)}$ olacak şekilde bir $\alpha(\beta) \in J$ seçelim. Sonra her $\alpha \in J$ için

$$\emptyset \neq F_\alpha = \bigcup_{\alpha=\alpha(\beta)} \overline{A_\beta}$$

olarak tanımlayalım. $\{A_\beta\}_{\beta \in K}$ ailesi yerel sonlu olduğundan Lemma 3.1.7. ii) den dolayı $\{\overline{A_\beta}\}_{\beta \in K}$ ailesi de yerel sonludur. Lemma 3.1.7. iii) den de

$$F_\alpha = \bigcup_{\alpha(\beta)=\alpha} \overline{A_\beta} = \overline{\bigcup_{\alpha(\beta)=\alpha} A_\beta}$$

olduğu görülür. $\{F_\alpha\}_{\alpha \in J}$ ailesi kapalı yerel sonlu aile ve her $\alpha \in J$ için tanım gereği $F_\alpha \subset U_\alpha$ olur.

Şimdi $\{F_\alpha\}_{\alpha \in J}$ ailesinin yerel sonlu olduğunu gösterelim. $x \in X$ olmak üzere $\{\overline{A_\beta}\}_{\beta \in K}$ ailesi yerel sonlu olduğundan $|\{\beta \mid U_x \cap \overline{A_\beta} \neq \emptyset\}| < \infty$ olacak şekilde bir U_x komşuluğu vardır. $|\{\beta \mid U_x \cap \overline{A_\beta} \neq \emptyset\}| = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n\}$ olsun. $\{F_\alpha\}_{\alpha \in J}$ ailesinin yerel sonlu olmadığını varsayalım. Bu durumda $|\{\beta \mid U_x \cap \overline{A_\beta} \neq \emptyset\}| = \infty$ dur. Böylece $U_x \cap F_\alpha \neq \emptyset$ olacak şekilde $\alpha(\beta_i) = \alpha$ vardır. Yani $\alpha(\beta_i) = \alpha$ için

$$\bigcup_{\alpha(\beta)=\alpha} (\overline{A_\beta} \cap U_x) \neq \emptyset$$

olur. Bu durumda $\alpha(\beta) = \alpha$ olan öyle bir $\beta \in K$ vardır ki $\overline{A_\beta} \cap U_x \neq \emptyset$ dir.

$\alpha = \alpha(\beta_i)$ olduğunda $\beta = \beta_i$ olacak şekilde bir i doğal sayısı vardır. Bu şekilde sonlu tane β olduğu için sonlu tane α vardır. Yani $\{F_\alpha\}_{\alpha \in J}$ ailesi yerel sonludur. ■

Not 3.3.16. Bir önceki lemmada $\{A_\beta\}_{\beta \in K}$ açık örtüsünü alırsak,

$$\emptyset \neq V_\alpha = \bigcup_{\alpha=\alpha(\beta)} A_\beta$$

kümeleri açık olur. Buradan hareketle, parakompakt uzayın her açık örtüsü ve her $\alpha \in J$ için $\overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$ koşulunu sağlayan örtüsü vardır.

Bu koşulu sağlayan $\{V_\alpha\}_{\alpha \in J}$ açık incesine $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ örtüsünün *tam (precise)* büzülmesi(shrinking) denir.

Lemma 3.3.17. X uzayının, $\mathcal{U}$ açık örtüsüne etkiyen (subordinated) olan $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in J}$ birimin bir parçalanışı varsa, $\mathcal{U}$ açık bir yerel sonlu inceye sahiptir.

İspat. $\psi: X \rightarrow I$ sürekli fonksiyon olsun ve $\psi(x_0) > 0$ olacak şekilde her $x_0 \in X$ için,

$$x_0 \in U \text{ ve } \alpha \in J \setminus J_0 \text{ için } \phi_\alpha(x_0) < \psi(x_0) \quad (1)$$

koşulunu sağlayan $J_0 \subset J$ sonlu kümesi ve x_0 noktasının bir U_0 komşuluğu vardır. Gerçekten de,

$$1 - \sum_{i=1}^k \phi_{\alpha_i}(x_0) < \psi(x_0)$$

olacak şekilde seçtiğimiz $J_0 \subset J$ kümesi için

$$U_0 = \left\{ x \in X \mid 1 - \sum_{i=1}^k \phi_{\alpha_i}(x) < \psi(x) \right\}$$

kümesinin (1) özelliğini sağladığı ve x_0 noktasının bir komşuluğu olduğu açıktır. $\alpha \in (0,1]$ için $\alpha < \psi(x)$ alırsak;

$$\{x \in X \mid \psi(x) > \alpha\} = \psi^{-1}((\alpha, 1])$$

bulunur ve $\psi^{-1}((\alpha, 1])$ kümesi alt uzay topolojisine göre açıktır. Her $x \in X$ için $\phi_{\alpha(x)}(x) > 0$ koşulunu sağlayan bir $\alpha(x) \in J$ vardır.

Yukarıdaki durumda, $\phi_{\alpha(x)}(x) = \psi$ denilirse, her bir $x \in X$ için, $\phi(x) = \sup_{\alpha \in J} \phi_\alpha(x)$ şeklinde tanımlanan $\phi: X \rightarrow (0,1]$ fonksiyonu sürekli. Şimdi bu durumu görelim:

$x \in X$ alalım. Her $\alpha \in J$ için $\phi_\alpha: X \rightarrow I$ fonksiyonları sürekli olduğundan, her $\varepsilon > 0$ ve her $y \in G$ için $|\phi_\alpha(x) - \phi_\alpha(y)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir G açık kümesi vardır. Ayrıca,

$$x_0 \in U = \left\{ x \in X \mid 1 - \sum_{i=1}^k \phi_{\alpha_i}(x) < \phi_\alpha(x) \right\}$$

$$= \left\{ x \in X \mid \sum_{i=k+1}^{\infty} \phi_{\alpha_i}(x) < \phi_{\alpha}(x) \right\}$$

olur. $\phi(x) = \sup_{\alpha \in J} \phi_{\alpha}$ olsun. $\phi|_{U_0 \cap G}$ kısıtlamasının sürekli olduğunu görmek istiyoruz. Bunun için; $|\sup_{\alpha \in J} \phi_{\alpha}(x_0) - \sup_{\alpha \in J} \phi_{\alpha}(x)| < \varepsilon$ olduğunu görelim.

$$\left| \sup_{\alpha \in J} \phi_{\alpha}(x_0) - \phi_{\alpha}(x) + \phi_{\alpha}(x) - \sup_{\alpha \in J} \phi_{\alpha}(x) \right|$$

$$\leq \left| \sup_{\alpha \in J} \phi_{\alpha}(x_0) - \phi_{\alpha}(x) \right| + \left| \phi_{\alpha}(x) - \sup_{\alpha \in J} \phi_{\alpha}(x) \right|$$

$$< |\phi_{\alpha}(x_0) - \phi_{\alpha}(x)| + |\phi_{\alpha}(x) - \phi_{\alpha}(x_0)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \varepsilon$$

bulunur. Böylece ϕ fonksiyonu süreklidir. Her $\alpha \in J$ için

$V_{\alpha} = \left\{ x \in X \mid \phi_{\alpha}(x) > \frac{1}{2} \phi(x) \right\}$ kümesi açıktır ve $\mathcal{V} = \{V_{\alpha}\}_{\alpha \in J}$ ailesi $\mathcal{U}$ örtüsünün bir incesidir. $\psi = \frac{1}{2} \phi$ olarak aldığımızda, $\mathcal{V}$ ailesinin yerel sonlu olduğu kolayca görülür. ■

Teorem 3.3.18. X uzayı T_1 - uzayı olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar birbirine denktir:

- (i) X uzayı parakompakttır.
- (ii) X uzayının her açık örtüsü, kendine subordinated(etkiyen) olan yerel sonlu birimin parçalanışına sahiptir.
- (iii) X uzayının her açık örtüsü, kendine subordinated olan birimin parçalanışına sahiptir.

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii): $\mathcal{A}$, X parakompakt uzayının açık örtüsü olsun. X uzayı parakompakt olduğundan, $\mathcal{A}$ örtüsünün yerel sonlu açık $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ incesi vardır. Lemma 3.3.14. dan ötürü, her $\alpha \in J$ için $F_\alpha \subset U_\alpha$ koşulunu sağlayan $\{F_\alpha\}_{\alpha \in J}$ ailesi, X uzayının kapalı yerel sonlu örtüsüdür. Urysohn Lemma sayesinde, her $\alpha \in J$ için;

$$x \in X \setminus U_\alpha, \quad g_\alpha(x) = 0 \quad \text{ve} \quad x \in F_\alpha, \quad g_\alpha(x) = 1$$

koşullarını sağlayan $g_\alpha: X \rightarrow I$ sürekli fonksiyonunu bulabiliriz. (X parakompakt uzay olduğundan aynı zamanda normaldir, F_α ve $X \setminus U_\alpha$ ayrık kapalı kümelerdir.)

$\mathcal{U}$ ailesi yerel sonlu olduğundan

$$g(x) = \sum_{\alpha \in J} g_\alpha(x)$$

olarak $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonunu tanımlayabiliriz. Bu şekilde bir toplam var olduğundan, g bir fonksiyondur.

$\mathcal{U}$ ailesi yerel sonlu olduğu için, x noktasının $J_0 = \{\alpha \mid W_{(x)} \cap U_\alpha \neq \emptyset\}$ kümesini sonlu kılacak bir $W_{(x)}$ komşuluğu vardır. Bu durumda, her $\alpha \in J \setminus J_0$ için

$g_\alpha(x) = 0$ olur. Çünkü her $\alpha \in J \setminus J_0$ için $W_{(x)} \cap U_\alpha = \emptyset$ olur. Böylece $x \notin U_\alpha$, yani $x \in X \setminus U_\alpha$ bulunur. O halde $g_\alpha(x) = 0$, yani $\sum g_\alpha(x)$ toplamı yakınsak ve süreklidir.

Şimdi $f_\alpha = g_\alpha/g$ olmak üzere, $\{f_\alpha\}_{\alpha \in J}$ yerel sonlu birimin ayrışımının $\mathcal{A}$ ya subordinated(etkiyen) olduğunu gösterelim:

g_α ve g fonksiyonları sürekli olduğundan f_α fonksiyonları da sürekli olur.

$$\sum f_\alpha(x) = \sum_{\alpha \in J} \frac{g_\alpha}{g}(x) = \sum_{\alpha \in J} \frac{g_\alpha(x)}{\sum_{\alpha \in J} g_\alpha(x)} = \frac{\sum_{\alpha \in J} g_\alpha(x)}{\sum_{\alpha \in J} g_\alpha(x)} = 1$$

olduğundan $\{f_\alpha\}_{\alpha \in J}$ ailesi X uzayı üzerinde birimin bir parçalanışıdır.

Şimdi, $f_\alpha: X \rightarrow I$ olmak üzere $\{f_\alpha^{-1}((0,1])\}_{\alpha \in J}$ ailesinin X uzayının yerel sonlu örtüsü olduğunu gösterelim.

$x \in X$ olsun. $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ ailesi yerel sonlu olduğundan;

$|J_0| = |\{\alpha \mid W_{(x)} \cap U_\alpha \neq \emptyset\}| < \infty$ olacak şekilde x in bir $W_{(x)}$ komşuluğu vardır.

Ayrıca her $\alpha \in J \setminus J_0$ için $f_\alpha^{-1}((0,1]) \subset U_\alpha$ olur. Gerçekten de eğer $f_\alpha^{-1}((0,1]) \not\subset U_\alpha$ olduğunu varsayarsak, $x \in f_\alpha^{-1}((0,1])$ ve $x \notin U_\alpha$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. Buradan; $x \in f_\alpha^{-1}((0,1])$ iken $f_\alpha(x) \in (0,1]$ ve $x \notin U_\alpha$ iken $g_\alpha(x) = 0$ dır. Bu durumda

$$f_\alpha(x) = \frac{g_\alpha(x)}{g(x)}$$

eşitliğinden $f_\alpha(x) = 0$ elde edilir ancak bu durum $f_\alpha(x) \in (0,1]$ olması ile çelişirdi. O halde $\{f_\alpha^{-1}((0,1])\}_{\alpha \in J}$ ailesi yerel sonludur. Üstelik $\mathcal{U} \prec \mathcal{A}$ ve $\{f_\alpha^{-1}((0,1])\}_{\alpha \in J} \subset \mathcal{U}$ olduğundan $\{f_\alpha^{-1}((0,1])\}_{\alpha \in J} \subset \mathcal{A}$ bulunur. Böylece $\{f_\alpha\}_{\alpha \in J}$ yerel sonlu birimin bir parçalanışı X uzayının $\mathcal{A}$ örtüsüne subordinateddir (etkiyendir).

(ii) $\Rightarrow$ (iii): X uzayının her açık örtüsü kendisine subordinated olan yerel sonlu birimin bir parçalanışına sahip olsun. X uzayının $\mathcal{A}$ açık örtüsünü ve bu uzay üzerinde $\{f_\alpha\}_{\alpha \in J}$ yerel sonlu birimin parçalanışını ele alalım. Kabulümüze göre, $\{f_\alpha^{-1}((0,1])\}_{\alpha \in J}$ yerel sonlu ailesi, X uzayının bir örtüsü ve $\mathcal{A}$ örtüsünün de bir açık incesidir. Buradan $\{f_\alpha^{-1}((0,1])\}_{\alpha \in J}$, $\mathcal{A}$ örtüsüne subordinated olan birimin parçalanışındır.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): $\mathcal{U}$, X uzayının açık bir örtüsü olsun. Lemma 3.3.16. gereği, X uzayının her açık örtüsü kendisine subordinated olan birimin parçalanışı mevcutsa, o zaman $\mathcal{U}$ örtüsünün de yerel sonlu açık incesi mevcuttur. Şimdi X uzayının

Hausdorff olduğunu gösterelim. $x_1 \neq x_2$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in X$ noktalarını alalım. $\{f_\alpha\}_{\alpha \in J}$ birimin parçalanışı, X uzayının $\mathcal{U} = \{X \setminus \{x_1\}, X \setminus \{x_2\}\}$ açık örtüsüne subordinated olan $f_{\alpha_0}(x_1) = a > 0$ olacak şekilde $\alpha_0 \in J$ alalım. $f_{\alpha_0}^{-1}((0,1])$ kümesi $X \setminus \{x_2\}$ kümesi tarafından kapsandığı için, $f_{\alpha_0}(x_2) = 0$ olur. Ayrıca $U_1 = f_{\alpha_0}^{-1}((\frac{a}{2}, 1])$ ve $U_2 = f_{\alpha_0}^{-1}([0, \frac{a}{2}))$ şeklinde tanımladığımız U_1 ve U_2 kümeleri açık ve ayrık turlar. Üstelik bu kümeler için, $x_1 \in U_1$ ve $x_2 \in U_2$ bulunur. O halde X uzayı Hausdorff ve böylece parakompakttır. ■

Teorem 3.3.19. X , parakompakt Hausdorff uzayı; $\mathcal{C}$, X in alt kümelerinin bir koleksiyonu ve her $C \in \mathcal{C}$ için ϵ_C pozitif bir sayı olsun.

Eğer $\mathcal{C}$ yerel sonlu ise; tüm x ler için $f(x) > 0$ ve $x \in C$ için $f(x) \leq \epsilon_C$ olacak şekilde $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu mevcuttur.

İspat. X i her biri $\mathcal{C}$ nin en fazla sonlu sayıda elemanı ile kesişen açık kümelerle örtelim; bu açık kümeler koleksiyonunu $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ etiketlenmiş bir aile olacak şekilde etiketleyelim. Teorem 3.3.17. den dolayı $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ etkiyen X üzerinde bir $\{\phi_\alpha\}$ olacak şekilde birimin parçalanışı vardır. α verildiğinde $\delta_\alpha, \epsilon_C$ sayılarının minimumu olsun, çünkü $C, \mathcal{C}$ nin $(dest \phi)$ ile kesişen tüm bu elemanları ile üzerinde değişir, C nin böyle elemanları yoksa, $\delta_\alpha = 1$ alalım.

Tüm δ_α sayıları pozitif, dolayısıyla f da pozitif olmak üzere;

$$f(x) = \sum \delta_\alpha \phi_\alpha(x)$$

olarak tanımlayalım. $x \in C$ için $f(x) \leq \epsilon_C$ olduğunu göstereceğiz.

$x \in C$ ve keyfi α için

$$\delta_\alpha \phi_\alpha(x) \leq \epsilon_C \phi_\alpha(x) \quad (*)$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır. O zaman istenen eşitsizlik

$$\sum \phi_\alpha(x) = 1$$

toplanarak elde edilir.

Eğer $x \notin (dest \phi)$ ise o zaman eşitsizlik (*) aşıkâr, çünkü $\phi_\alpha(x) = 0$.

Eğer $x \in (dest \phi)$ ve $x \in C$ ise o zaman C , $(dest \phi)$ ile kesişir.

Böylece

$$\delta_\alpha \leq \epsilon_C$$

olur ve (*) sağlanır. ■

3.4. Smirnov Metriklenebilme Teoremi

Nagata – Smirnov Metriklenebilme Teoremi, bir uzayın metriklenebilirliği için gerekli ve yeterli koşulların bir takımının (dizisini) verir. Bu bölümde, bu tür başka bir koşul dizisi veren teoremi kanıtlayacağız. Nagata – Smirnov Teoreminin bir sonucudur ve ilk olarak Smirnov tarafından kanıtlandı.

Tanım 3.4.1. Bir X uzayı, X in her x noktasının, alt uzay topolojisi ile metriklenebilir bir U komşuluğuna sahipse, yerel metriklenebilirdir denir.

Not 3.4.2. Eğer X uzayı metriklenebilir ise yerel metriklenebilir olduğu kolayca görülür.

Teorem 3.4.3. (Smirnov Metriklenebilme Teoremi)

X uzayının metriklenebilir olması için gerek ve yeter koşul X uzayının yerel metriklenebilir, parakompakt Hausdorff olmasıdır.

İspat. ($\Rightarrow$): X in metriklenebilir olduğunu varsayalım. O zaman X yerel olarak metriklenebilir olduğunu biliyoruz. Ayrıca Teorem 3.3.17 den dolayı X uzayı parakompakttır.

($\Leftarrow$): Tersine X in yerel metriklenebilir parakompakt Hausdorff uzayı olduğunu varsayalım. X in sayılabilir yerel sonlu bir bazı olduğunu göstereceğiz. X regüler

olduğundan, Nagata-Smirnov Teoremi gereği X in metriklenebilir olduğu sonucu çıkacaktır.

İspat, Nagata-Smirnov Teoremi nin ispatının son bölümünün bir uyarlamasıdır. X in metriklenebilir açık kümelerden oluşan bir örtüsü için parakompaktlığın tanımı ve Lemma 3.3.9. den dolayı X in bu örtüsünün yerel sonlu bir açık incesi vardır. Bu durumda bu yerel sonlu açık incesi $\mathcal{C}$ olsun. $\mathcal{C}$ nin her C elemanı metriklenebilirdir; bu durumda C üzerinde bir $d_C: C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ metriği vardır ki C üzerindeki topolojiyi üretir. $x \in C$ verildiğinde, $d_C(x, y) < \epsilon$ olacak şekilde C nin tüm y noktalarının kümesini $B_C(x, \epsilon)$ ile gösterelim. C de açık olan $B_C(x, \epsilon)$, X te de açıktır.

$m \in \mathbb{Z}^+$ için $\mathcal{A}_m$, X in $1/m$ yarıçaplı açık yuvarlarından oluşan açık örtüsü olsun. Yani;

$$\mathcal{A}_m = \{B_C(x, 1/m) \mid x \in C \text{ ve } C \in \mathcal{C}\}$$

Parakompaktlık gereği; $\mathcal{D}_m$, $\mathcal{A}_m$ nin yani bu açık örtünün yerel sonlu bir incesi olsun. Bu durumda

$$\mathcal{D} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}^+} \mathcal{D}_m$$

Her bir $\mathcal{D}_m$ yerel sonlu olmak üzere $\mathcal{D}$ sayılabilir yerel sonludur. (σ –yerel sonlu). $\mathcal{D}$, X için bir taban olduğunu iddia ediyoruz.

$x \in X$ ve U , x in bir komşuluğu, yani $x \in U \subseteq X$ olsun. $x \in D \subset U$ olacak şekilde $\mathcal{D}$ nin bir D elemanını bulmaya çalışıyoruz. Şimdi x , $\mathcal{C}$ nin sadece sonlu sayıda diyelim ki $C_1, C_2, \dots, C_k$ ye aittir. O zaman, $(U \cap C_i)$, C_i içinde x in bir komşuluğudur. Yani bir $\epsilon_i > 0$ vardır ki;

$$B_{C_i}(x, \epsilon) \subset (U \cap C_i)$$

dir.

$2/m < \min\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_k\}$ olacak şekilde m seçelim. $\mathcal{D}_m$ ailesi X in bir örtüsü olduğundan, $\mathcal{D}_m$ nin x i içeren bir D elemanı olmak zorundadır. $\mathcal{D}_m$, $\mathcal{A}_m$ nin yani

bu açık örtünün yerel sonlu bir incesi olduğundan D yi içeren bazı $C \in \mathcal{C}$ ve bazı $y \in C$ için $\mathcal{A}_m$ nin bir $B_C(y, 1/m)$ elemanı olmalıdır. Çünkü

$$x \in D \subset B_C(y, 1/m)$$

x noktası C ye aittir, bu sebeple $C; C_1, C_2, \dots, C_k$ kümelerinden biri olmalıdır, diyelim ki $C = C_i$ olsun. O halde $B_C(y, 1/m)$ en fazla $2/m < \epsilon_i$ çapa sahip olduğundan;

$$x \in D \subset B_{C_i}(x, 1/m) \subset B_{C_i}(x, \epsilon_i) \subset U$$

istendiği gibi olduğu sonucu elde edilir. ■

3.5. Metriklenebilir Uzaylar İçin Bir Toplam Teoremi (H. De VRIES)

(30 Kasım 1957 tarihli toplantıda Prof. A. HEYTING tarafından tebliğ edilmiştir)

Bu notun amacı, aşağıdaki iki teoremin topolojik kanıtını vermektir.

Prof. J.DE GROOT, birinci teoremi BİNG 'in bir teoremini kullanarak metrik yöntemlerle ispatladı ve ikincisini önerdi.

Bu teoremler aslında Smirnov ve Nagata-Smirnov Metriklenebilme Teoremlerinin bir uygulaması olarak aşağıda ifade edilecek.

Teorem 3.5.1. Sonlu sayıda kapalı metriklenebilir altkümenin birleşimi olan bir topolojik uzayın kendisi de metriklenebilirdir. Yani;

X topolojik uzay ve $F_1, F_2, \dots, F_n$; X 'in kapalı metriklenebilir alt uzayları olmak üzere ,

$$X = \bigcup_{k=1}^n F_n$$

topolojik uzayı da metriklenebilirdir.

Teorem 3.5.2. X bir topolojik uzay ve X , kapalı metriklenebilir yerel sonlu bir ailenin birleşimi ise X metriklenebilirdir. Yani;

$\mathcal{A} = \{ F_i \mid i \in J \}$ F_i ler kapalı ve metriklenebilir, $\mathcal{A}$ yerel sonlu olmak üzere,

$$X = \bigcup F_i$$

topolojik uzayı da metriklenebilirdir.

Teorem I deki "sonlu" kelimesinin "sayılabilir" ile değiştirilemeyeceği gözlemlenebilir. Sayılabilir sonsuz herhangi bir metriklenemeyen T_1 – uzay bir karşı örnek sağlar. Kanıtlarımız, metriklenebilir uzayların aşağıdaki karakterize edici özelliğine dayanacaktır: regüler bir topolojik uzay, ancak ve ancak δ -yerel sonlu bir tabanı varsa metriklenebilirdir. Bir δ - yerel olarak sonlu taban ile, sayılabilir sayıda yerel sonlu açık küme ailelerinden oluşan bir taban kastedilmektedir.

Teorem 3.5.1'in İspatı. Açıkça, X topolojik uzayının iki kapalı metriklenebilir alt kümesi olan A ve B nin birleşimi olduğu durum için teoremi kanıtlamak yeterlidir. İlk önce X 'nin regülerliğinin kanıtlıyoruz. X açıkça bir T_1 – uzay dır.

$x \in X$ alalım. Varsayalım ki $x \in A$ olsun. A metrik uzay olduğundan $\{x\}$ kapalı ve $\{x\} \subset A \subset X$ olur dolayısıyla $\{x\} \subset X$ kapalı olur. Benzer şekilde $x \in B$ için de kolayca gösterilebilir.

$p \in X$ ve F , X nin kapalı bir alt kümesi olsun öyle ki $p \notin F$.

$p \in U \subset \bar{U} \subset X \setminus F$ olacak şekilde bir açık U kümesinin varlığını göstermeliyiz.

Eğer p , A ve B kümelerinden en az birinin içinde ise, diyelim ki

$p \in \text{Int } A$ olsun, o zaman A 'nın regülerliğinden; $p \in U \subset \bar{U} \subset A \setminus F \subset X \setminus F$ olacak şekilde $U \subset \text{Int } A \subset A$ açık kümesi vardır. ($p \in A \setminus F \subset A$ açıktır.)

Benzer şekilde;

$p \in \text{Int } B$ olsun, o zaman B 'nin regülerliğinden $p \in U \subset \bar{U} \subset B \setminus F \subset X \setminus F$ olacak şekilde $U \subset \text{Int } B \subset B$ açık kümesi vardır. ($p \in B \setminus F \subset B$ açıktır.) Eğer $p \in A \cap B$ ise $p \in A$ ve $p \in B$ dir. $p \in A$ olduğuna göre $A \cap F$, A içinde

kapalıdır. $p \notin F$ olduğundan $p \notin A \cap F$ olur. A metriklenebilir dolayısıyla regüler olduğundan;

$p \in U_A \subset A$ açık kümesi vardır öyle ki, $\overline{U_A} \cap (A \cap F) = \emptyset$ dolayısıyla $\overline{U_A} \cap F = \emptyset$ Benzer şekilde $p \in B$ olduğuna göre $B \cap F$, B içinde kapalıdır. $p \notin F$ olduğundan $p \notin B \cap F$ olur. B metriklenebilir dolayısıyla regüler olduğundan;

$p \in U_B \subset B$ açık kümesi vardır öyle ki $\overline{U_B} \cap (B \cap F) = \emptyset$ dolayısıyla $\overline{U_B} \cap F = \emptyset$ O zaman $U_A = U_A' \cap A$, $U_B = U_B' \cap B$ $U_A' \subset X$ $U_B' \subset X$ açık kümeleri vardır ve $U = U_A' \cap U_B'$ olsun. $p \in U \subset \overline{U} \subset X \setminus F \subset X$.

$p \in \text{Int } A \setminus F$ olsun. A regüler olduğundan $\text{Int } A$ regülerdir. $p \in U \subset \text{Int } A$ vardır öyle ki $p \in U \subset \overline{U} \subset \text{Int } A \setminus F \subset A \setminus F \subset X \setminus F$ ve $U \subset \text{Int } A \subset X$ ise U , X içinde açıktır. Benzer şekilde;

$p \in \text{Int } B \setminus F$ olsun. B regüler olduğundan $\text{Int } B$ regülerdir. $p \in V \subset \text{Int } B$ vardır öyle ki $p \in V \subset \overline{V} \subset \text{Int } B \setminus F \subset B \setminus F \subset X \setminus F$ ve $V \subset \text{Int } B \subset X$ ise V , X içinde açıktır.

$p \in A \setminus \text{Int } A$ ise $p \in \text{Int } B$ veya $p \in \text{Int } A \cap B$

$p \in B \setminus \text{Int } B$ ise $p \in \text{Int } A$ veya $p \in \text{Int } A \cap B$

olur.

Şimdi X 'in δ – yerel sonlu taban ile bazını oluşturacağız.

$$\mathfrak{A}_n = \{ A_{n\alpha} \mid \alpha \in I_n \} \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\mathfrak{B}_m = \{ B_{m\beta} \mid \beta \in I_m \} \quad m = 1, 2, \dots$$

sırasıyla A ve B de yerel sonlu küme ailesi ve yine sırasıyla A ve B de açık ve bu kümeler için baz oluşturur.

$D = B_d A \cap B_d B$ olsun. (A ve B 'nin sınırlarının kesişimi olsun)

$$\mathfrak{A}_n' = \{ A_{n\alpha} \cap \text{Int } A \mid \alpha \in I_n \}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\mathfrak{B}_m' = \{ B_{m\beta} \cap \text{Int } B \mid \beta \in I_m \}, \quad m = 1, 2, \dots$$

$$\mathfrak{A}_n'' = \{ A_{n\alpha} \mid A_{n\alpha} \cap D \neq \emptyset \mid \alpha \in I_n \}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\mathfrak{A}_n'' = \{ A_{n\alpha} \mid \alpha \in I_n'' \} \quad n = 1, 2, \dots$$

B parakompakt dolayısıyla D kapalı parakompakt olduğundan $A_{n\alpha}^o$; D 'nin açık örtüsü ve $(A_{n\alpha} \cap D)$; D 'nin yerel sonlu incesi olmak üzere $A_{n\alpha}^o \supset A_{n\alpha} \cap D$ olacak şekilde açık kümeleri bulabiliriz. öyle ki $n = 1, 2, \dots$ için B 'de yerel sonlu

$$A_{n\alpha}^* = \{ A_{n\alpha}^o \mid \alpha \in I_n'' \}$$

olsun. Şimdi

$$A_{n\alpha}^* = \text{Int}((A_{n\alpha}^o \cap X \setminus A) \cup A_{n\alpha}), \quad \alpha \in I_n'', \quad n = 1, 2, \dots$$

olsun. O zaman,

$$\mathfrak{A}_n^* = \{ A_{n\alpha}^* \mid \alpha \in I_n'' \} \quad n = 1, 2, \dots \text{ için}$$

X 'in yerel sonlu bir açık küme ailesidir.

$$\mathfrak{A}_{n,m}^* = \left\{ \text{Int}((A_{n\alpha}^* \cap \left(\bigcap \{ Q \mid Q \in \mathfrak{B}_m, Q \supset A_{n\alpha} \supset D \} \right) \cup A_{n\alpha}) \mid \alpha \in I_n'') \right\}$$

Her bir $\mathfrak{A}_{n,m}^*$ X 'in yerel sonlu bir açık küme ailesidir ve $\mathfrak{A}_n', n = 1, 2, \dots$

$\mathfrak{B}_m', m = 1, 2, \dots$ ve $\mathfrak{A}_{n,m}^*, n, m = 1, 2, \dots$ birlikte X 'in δ – yerel sonlu bir bazını oluştururlar. Şimdi bunu göstereceğiz:

Yerel sonluluk açıktır. Şimdi $U \subset X$ açık kümesi ve $p \in U$ olsun. $p \in \text{Int } A$ veya $p \in \text{Int } B$ dır. Eğer $p \in \text{Int } A$ ise, bir n ve bir $O \in \mathfrak{A}_n'$ vardır öyle ki $p \in O \subset U$ olur. Benzer şekilde $p \in \text{Int } B$ ise, bir m ve bir $O' \in \mathfrak{B}_m'$ vardır öyle ki $p \in O' \subset U$ olur. $p \in D$ olduğunu varsayalım. O zaman bir m doğal sayısı ve Q vardır öyle ki $p \in Q \in \mathfrak{B}_m$ ve $Q \subset U$ olur. O zaman $p \in A_{n\alpha} \subset U, A_{n\alpha} \cap D \subset Q$ olacak şekilde bir n ve bir $A_{n\alpha} \in \mathfrak{A}_n$ bulabiliriz. Bu durumda α 'ya karşılık gelen $\mathfrak{A}_{n,m}^*$ nin O elemanı $p \in O \subset U$ özelliğini sağlar. ■

Teorem 3.5.2'nin İspatı. X 'nin teoremdaki koşulları sağlasın. X 'in herhangi bir noktası, onu içeren verilen ailenin kümelerinin (sonlu) birleşiminin bir iç noktasıdır. Bu birleşim Teorem 1'e göre metriklenebilir olduğundan, X 'in regüler

ve yerel metriklenebilir olduğu kolayca görülebilir. X , yerel olarak sonlu bir kapalı parakompakt alt küme ailesinin birleşimi olan bir T_1 uzayıdır. O halde, E.Michael'in belirttiği gibi, X parakompakttır. Dolayısıyla, X yerel olarak metriklenebilir bir parakompakt Hausdorff uzayı olduğundan, X metriklenebilirdir. ■





4. SONUÇ

1923 yılında ispatlanan ilk metriklenebilme teoremi olan Urysohn Metriklenebilme Teoreminden bugüne metriklenebilme problemi konusunda pek çok yaklaşım sunulmuştur. Bunların her biri metriklenebilmeyi farklı topolojik özellikler yoluyla ifade ederler.

Biz bu çalışmada bunlar arasından iki tanesini ayrıntılı bir biçimde ele alıp kanıtlarını verdik. 1951 yılında kanıtlanan Nagata-Smirnov Teoremi, ancak ve ancak δ -yerel sonlu bir tabana sahip regüler Hausdorff uzaylarının metriklenebildiğini söylerken, 1951 yılında Smirnov tarafından kanıtlanan başka bir teorem ancak ve ancak yerel metriklenebilir, parakompakt Hausdorff uzaylarının metriklenebildiğini söylemektedir. Ayrıca bu çalışmada; kompaktlığın doğal bir genelleştirilmesi olan parakompaktlık kavramına ilişkin bazı teorem ve sonuçlardan hareketle, metriklenebilirlik kavramı genel topolojik uzaylar için genelleştirilmiştir.

Metriklenebilme teoremi ve sonuçları bu açıdan önem arz etmektedir. Ayrıca sonuçların geliştirilmesi ve genelleştirilmesi de 1950'den beri devam etmektedir. Hala bu konuda yeni ve ilginç yaklaşımlar sunan çalışmalar mevcuttur. Bu tezde de Smirnov ve Nagata-Smirnov Metriklenebilme teoremlerinin bir uygulaması olarak H. De Vries ve J. De Groot tarafından ortaya konan 'Metriklenebilir Uzaylar İçin Bir Toplam Teoremleri' ve bu teoremlerin ispatı verilmiştir.

Yani kısacası metriklenebilme teorisi etkinlik ve canlılığını günümüzde de sürdürmektedir.



KAYNAKLAR

- Bayramov S, & Gündüz Ç. 2004. Genel Topoloji. Çağlayan Kitapevi, İstanbul. 360 s.
- Bülbül, A. 1994 Genel Topoloji. Trabzon Karadeniz Teknik Üniversitesi .244 s.
- Groot, J. De And H. De Vries, 1955. A note on non-archimedean metrizations, Ind. Math. , 17 : 222-224.
- Michael, E. 1953. A note on paracompact spaces. Proc. Amer. Math. Soc. 4: 831-838 .
- Munkres, R. J. 2000. Topology 2nd Edition. Prentice Hall Incorporated.
- Nagata, Jun-Iti. 1950. On a necessary and sufficient condition of metrizability. J.Instit, Polytechn. Osaka City Un. Ser. A Math. , 1: 93-100.
- Prentice Hall. 537 s.
- Rahimov, A. 2006. Topolojik Uzaylar, Seçkin yayıncılık.
- Smirnov, Yu. 1951. A necessary and sufficient condition of metrizability of topological spaces, Doklady Akad. Nauk SSSR N.S., 77: 197-200
- Smirnov, Yu., 1951. On the metrization of topological spaces. Uspehi Matem. Nauk (N.S.), 6: 100-111.



ÖZGEÇMİŞ

Erhan BATMAZ, ilköğretim ve ortaöğretim öğrenimini Adana’da tamamladıktan sonra Lisans öğrenimine 2008 yılında Çukurova Üniversitesi Matematik Bölümü’nde başladı ve 2012 yılında mezun oldu. Millî Eğitim Bakanlığına Matematik öğretmeni olarak atanmış olup halen görevini sürdürmekte iken 2019 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı.

