



T.C.

**AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



T.C.

**SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
ORTAK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI**

BAZI MODÜL TİPLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FUAAD MUHAMMAD MUSTAFA

DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Ali AYTEKİN

ORTAK DANIŞMAN

Doç. Dr. Yıldırım KESKİN

AKSARAY, 2016



T.C.

**AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



T.C.

**SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
ORTAK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI**

BAZI MODÜL TİPLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FUAAD MUHAMMAD MUSTAFA

DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Ali AYTEKİN

ORTAK DANIŞMAN

Doç. Dr. Yıldırar KESKİN

AKSARAY, 2016

AKSARAY ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ONAY BELGESİ

Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 132309802 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi, "FUAAD MUHAMMAD MUSTAFA", ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı "BAZI MODÜL TİPLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİLER" başlıklı tezini, aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Ali AYTEKİN
Aksaray Üniversitesi

Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Enver Önder USLU
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Jüri Üyeleri : Yrd. Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN
Aksaray Üniversitesi

Teslim Tarihi: 18 Nisan 2016

Savunma Tarihi: 6 Mayıs 2016

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ve bu eserleri her kullanışımında alıntı yaparak yararlandığımı belirtir; bunu şerefimle doğrularım.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

FUAAD MUHMMAD MUSTAFA

İmza

ÖNSÖZ

Bu tezde sıg modüller, yerel modüller, tümlenmiş modüller, zayıf tümlenmiş modüller, yeterli tümlenmiş modüller, yeterli $\oplus$ -tümlemiş, lifting modüller, zayıf lifting modüller ve güçlü lifting modül sınıfları ve bunların arasındaki bağıntılar incelenmektedir.

Bölüm 1 iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısım modüllere, alt modüllere ve bunları açıklayacak bazı örneklere yönelik temel kavramları içermektedir. İkinci kısım ise birinci, ikinci ve üçüncü izomorfizma teoremlerinin yanısıra alt modüller için modül kanunu ve bunların bazı sonuçlarını ihtiva etmektedir.

Bölüm 2' de sıg modüller, güçlü sıg modüller ve yerel modüller incelenerek bunların arasındaki ilişkiyi belirleyen bazı sonuçlar verilmektedir.

Bölüm 3' te tümlenmiş, zayıf tümlenmiş ve yeterli tümlenmiş modüller üzerinde durulmuştur. Bu bölüm üç kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda tümlenmiş modüllerin bazı özellikleri gösterilmiştir. Örneğin, iki tümlenmiş modülün toplamı da bir tümleniş modüldür ve eğer M , R -modülü, $Rad(M) = 0$ şartıyla beraber bir tümlenmiş modül ise bu durumda M bir yarıbasit modüldür. İkinci kısımda zayıf tümlenmiş alt modüller araştırılarak onların bir zayıf tümlenmiş modülün her tümlenmiş modülü bir zayıf tümlenmiş modüldür ve bir zayıf tümlenmiş modülün her bölüm modülü de bir zayıf tümlenmiş modüldür gibi bazı özellikleri verilmiştir. Son kısımda ise yeterli tümlenmiş modüller ve bazı diğer tipler ele alınmıştır. Zayıf tümlenmiş modül durumunda, bir yeterli tümlenmiş modülün her tümlenmiş modülünün aynı zamanda yeterli tümlenmiş modül olduğu ve bir yeterli tümlenmiş modülün her bölüm modülünün de yine bir yeterli tümlenmiş modül olduğu gösterilmiştir.

Bölüm 4' te lifting, zayıf lifting ve güçlü lifting modüller incelenmiştir. Burada iki zayıf lifting modülün direkt toplamı zayıf lifting modül ve zayıf lifting modülün bir $\oplus$ -tümlemiş modül olduğu gösterilmiştir. Diğer taraftan M , R -modülünün zayıf lifting modül olması için gerek ve yeter şartın M nin $\oplus$ -tümlemiş modül ve M nin

tümlenmiş modüllerinin direkt toplam olması gerektiği araştırılmıştır. Ayrıca bu bölümde güçlü tümlenmiş modüller de incelenmiştir. Burada her güçlü tümlenmiş modülün bir lifting modül olduğu fakat tersinin doğru olmadığı örnek yardımıyla gösterilmiştir.

Son olarak sıg, yerel, tümlenmiş ve lifting modüller arasındaki bağıntılar incelenerek bazı sonuçlar ile teori desteklenmiştir.



TEŞEKKÜR

Bu tezin çalışma ve hazırlık aşamalarında yardımları, rehberliği, anlayışı ve teşvikleri için danışmanım Yrd. Doç. Dr. Ali AYTEKİN'e teşekkürlerimi ve en derin şükranlarımı sunarım.

Ayrıca, bu çalışma ile ilgili sorularımı her daim yanıtlayan Prof. Dr. Adil Kadir JABBAR'a ve Yrd. Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN'a da teşekkür ederim.

Son olarak, hayatım boyunca desteklerini, sevgilerini, anlayışlarını ve teşviklerini eksik etmeyen sevgili aileme minnetlerimi sunarım.

FUAAD MUHAMMAD MUSTAFA

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖNSÖZ	i
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
1. GİRİŞ	1
1.1 Temel Tanımlar	1
1.2 Bazı Teoremler ve Modüllerin Homomorfizması	7
2. SIĞ VE YEREL MODÜLLER ARASINDAKİ BAĞINTILAR	10
2.1 Sığ Modüller	10
2.2 Güçlü Sığ ve Tam Sığ Alt Modüller ve Bunların Arasındaki Bağıntılar ..	10
2.3 Yerel Modüller	12
3. TÜMLENMİŞ, ZAYIF TÜMLENMİŞ VE YETERLİ TÜMLENMİŞ MODÜLLER	13
3.1 Tümlenmiş Modüller	13
3.2 Zayıf Tümlenmiş Modüller	17
3.3 Yeterli Tümlenmiş Modüller ve Diğer Bazı Tipler	19
4. LİFTİNG, ZAYIF LİFTİNG VE GÜÇLÜ LİFTİNG MODÜLLER	21
4.1 Lifting Modüller ve Zayıf Lifting Modüller	21
4.2 Güçlü Lifting Modüller	22
5. SIĞ, TÜMLENMİŞ VE LİFTİNG MODÜLLER ARASINDAKİ BAĞINTILAR	25
5.1 Tümlen Alt Modül ve Eş-Kapalı Alt Modül Arasındaki Bağıntılar	25
5.2 Direkt Toplam ve Tümlen Alt Modüller Arasındaki Bağıntılar	25
5.3 Basit, Yarı Basit, Sığ ve Yerel Modüller Arasındaki Bağıntılar	26
5.4 Sığ, Tümlenmiş ve Lifting Modüller Arasındaki Bağıntılar	27
6. SONUÇ	28

KAYNAKLAR	30
ÖZGEÇMİŞ	32



ÖZET

BAZI MODÜL TİPLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİLER

Bu tezin temel amacı, birimli değişmeli halkalar üzerindeki sıg, yerel, tümlenmiş, zayıf tümlenmiş, yeterli tümlenmiş, lifting, zayıf lifting ve güçlü lifting modüller de dahil olmak üzere bazı modül sınıfları üzerine inceleme yapmaktır. Özellikle belirli modül tipleri arasındaki bazı bağıntılarda, eğer M basit bir modül ise, M yarı basit, yerel, sıg ve güçlü Lifting modüller olmaktadır. Eğer M basit olmayan bir yarı basit modül ise, M sıg modül ve yerel modül değildir, ancak bu önermenin tersi doğrudur. Ayrıca alt modüller (tümleyen ve eş-kapalı ve direkt toplam) arasındaki bazı bağıntılar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Modül, altmodül

ABSTRACT

SOME RELATIONS BETWEEN CERTAIN TYPES OF MODULES

The main purpose of this thesis is to give a survey about some classes of modules including hollow, local, supplemented, weak supplemented, amply supplemented, lifting, weak lifting and strongly lifting modules over commutative rings with identity. In particular some relations between certain types of modules, if M is a simple module then M are semisimple, local, hollow and strongly lifting modules. If M semisimple module which is not simple, then M are not hollow module and local module but the converse is true. Also some relations between (supplement and coclosed and direct sum) submodules have been given.

Key Words: Module, submodule

1. GİRİŞ

1.1 Temel Tanımlar

Tanım 1.1.1 [1] R bir birimli halka, M bir toplamsal abel grubu ve $f : R \times M \rightarrow M$, $f(r, m) = rm$ olarak tanımlanan bir dönüşüm olsun. Eğer f , aşağıdaki (1) - (4) koşullarını sağlar ise, M bir sol R -modül veya kısaca bir modül olarak adlandırılır:

- 1) $r(m + n) = rm + rn, \forall r \in R$ ve $m, n \in M$,
- 2) $(r + s)m = rm + sm, \forall r, s \in R$ ve $m \in M$,
- 3) $(rs)m = r(sm), \forall r, s \in R$ ve $m \in M$,
- 4) $1m = m, \forall m \in M, 1 \in R$.

Eğer $f(m, r) = mr$ ile tanımlanan $f : M \times R \rightarrow M$ dönüşümü,

- 1) $(m + n)r = mr + nr, \forall m, n \in M$ ve $r \in R$,
- 2) $m(r + s) = mr + ms, \forall m \in M$ ve $r, s \in R$,
- 3) $m(rs) = (mr)s, \forall m \in M$ ve $r, s \in R$,
- 4) $m1 = m, \forall m \in M, 1 \in R$.

koşullarını sağlıyorsa bu durumda M ye bir sağ R -modül denir.

Eğer her $r \in R, m \in M, s \in S$ için M bir sol R -modül, sağ S -modül ve $(rm)s = r(ms)$ ise, M bir R - S -modül veya bimodül olarak adlandırılır.

Bu çalışmada sağ veya sol R -modül yerine R -modül ifadesini kullanacağız.

İlk olarak bazı modül örnekleri verelim.

Örnek 1.1.2

1. $M = \mathbb{Z}$ bir $\mathbb{Q}$ -modüldür.
2. $M = \mathbb{Q}$ bir $\mathbb{R}$ -modüldür.
3. $M = \mathbb{Z}_n$ bir $\mathbb{Z}$ -modüldür, burada n bir tamsayıdır, $n \geq 2$.

Tanım 1.1.3 [1] M bir R -modül olsun. Eğer her $x, y \in L$ ve $r \in R$ için $x + y \in L$ ve $rx \in L$ ise, M 'nin boş olmayan bir L alt kümesine M 'nin bir alt modülü denir ve $L \leq M$ şeklinde gösterilir.

Örnek 1.1.4

1. $M = \mathbb{Z}_m$ bir $\mathbb{Z}$ -modüldür, bu durumda $\langle \bar{n} \rangle$, M nin bir alt modülüdür, burada $m \geq 2$ ve $n \geq 0, m, n$ tamsayılarıdır.

2. $M = \mathbb{Z}_2$ bir $\mathbb{Z}$ -modüldür ve $\mathbb{Z}_2$ sadece aşağıdaki alt modüllere sahiptir:

$$\langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\},$$

$$\langle \bar{1} \rangle = M.$$

Tanım 1.1.5 [1] L, M 'nin bir alt modülü olsun; eğer $L \neq M$ ise, L ye M nin bir öz alt modülü denir.

Örnek 1.1.6 $M = \mathbb{Z}_4$ bir $\mathbb{Z}$ -modül olsun ve $\mathbb{Z}_4$ sadece aşağıdaki alt modüllere sahiptir:

$$\langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\},$$

$$\langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{3} \rangle = M,$$

$\langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}\}$, bu durumda $\langle \bar{2} \rangle$ ve $\langle \bar{0} \rangle$ M 'nin öz alt modülleridir, $\langle \bar{1} \rangle$ M 'nin öz alt modülü değildir, fakat $\langle \bar{1} \rangle$ M 'nin bir alt modülüdür.

Tanım 1.1.7 [1] M bir R -modül ve $N \leq M$ olsun. Eğer N nin tek öz alt modülü 0 ise, N ye M nin minimal alt modülü denir, yani K, N nin öz alt modülü olmak üzere her $K \leq M$ için $K = 0$ olur.

Örnek 1.1.8 $M = \mathbb{Z}_4$ alalım. Bu durumda $\mathbb{Z}_4$ sadece aşağıdaki alt modüllere sahiptir:

$$\langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\},$$

$$\langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{3} \rangle = M,$$

$\langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}\}$, burada $\langle \bar{0} \rangle$, $\langle \bar{2} \rangle$ 'nin M içinde kalan tek öz alt modülü olduğundan, $\langle \bar{2} \rangle$ M 'nin bir minimal alt modülüdür.

Tanım 1.1.9 [1] M bir R -modül ve $N \leq M$ olsun. Eğer N, M nin herhangi bir diğer K öz alt modülü tarafından kapsanmıyorsa, bu durumda N ye M nin maksimal alt modülü denir, yani K nın M deki N öz alt modülü ile birlikte her $K \leq M$ için $K = M$ olur.

Örnek 1.1.10 $M = \mathbb{Z}_{12}$ olsun. Bu durumda $\mathbb{Z}_{12}$ sadece aşağıdaki alt modüllere sahiptir:

$$\langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\},$$

$$\langle \bar{1} \rangle = M,$$

$$\langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}\},$$

$$\langle \bar{3} \rangle = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\},$$

$$\langle \bar{4} \rangle = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\},$$

$\langle \bar{6} \rangle = \{\bar{0}, \bar{6}\}$. Burada $\langle \bar{2} \rangle$ ve $\langle \bar{3} \rangle$ ün, $\mathbb{Z}_{12}$ 'nin herhangi bir diğer öz alt modülü tarafından kapsanmadığı için, $\mathbb{Z}_{12}$ 'nin maksimal alt modülleri olduğu aşıkardır.

Tanım 1.1.11 [1] M bir R -modül ve $N \leq M$ olsun. Eğer $M = N + C$ ve $N \cap C = 0$ olacak şekilde $C \leq M$ varsa, N ye M nin direkt toplamı denir ve $M = N \oplus C$ şeklinde gösterilir.

Örnek 1.1.12 $M = \mathbb{Z}_6$ olarak alalım. Bu durumda $\mathbb{Z}_6$ sadece aşağıdaki alt modüllere sahiptir:

$$\langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\},$$

$$\langle \bar{1} \rangle = M,$$

$$\langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\},$$

$$\langle \bar{3} \rangle = \{\bar{0}, \bar{3}\},$$

$M = \langle \bar{2} \rangle + \langle \bar{3} \rangle$ ve $\langle \bar{2} \rangle \cap \langle \bar{3} \rangle = \{\bar{0}\}$ olduğundan, $M = \langle \bar{2} \rangle \oplus \langle \bar{3} \rangle$ elde edilir ve dolayısıyla $\langle \bar{2} \rangle$ ve $\langle \bar{3} \rangle$ alt modülleri M 'nin direkt toplamları olur.

Tanım 1.1.13 [1] M bir R -modül olsun. Eğer I , herhangi bir indis kümesi olmak üzere

$$M = \bigoplus_{i \in I} B_i = \begin{cases} M = \sum_{i \in I} B_i \wedge \\ B_j \cap \sum_{i \neq j} B_i = 0, \forall j \in I. \end{cases}$$

şartı sağlanıyorsa, M ye, $B_i \leq M$ alt modüllerinin $\{B_i, i \in I\}$ ailesinin iç direkt toplamı denir.

Tanım 1.1.14 [2] $M \neq 0$ bir R -modül olsun. Eğer M , sıfırdan farklı alt modüllerinden herhangi ikisinin direkt toplamı değilse bir parçalanamaz modül olarak adlandırılır.

Örnek 1.1.15 $M = \mathbb{Z}_4$ sadece aşağıdaki alt modüllere sahiptir:

$$\langle \bar{0} \rangle = \{0\},$$

$$\langle \bar{1} \rangle = M,$$

$$\langle \bar{2} \rangle = \{0, \bar{2}\}.$$

Dolayısıyla M nin sıfırdan farklı iki alt modülünün direkt toplamı değildir. Bu nedenle M bir parçalanamaz modüldür, ancak Örnek 1.1.12 de gösterildiği üzere, $M = \mathbb{Z}_6$, sıfırdan farklı iki $\langle \bar{2} \rangle$ ve $\langle \bar{3} \rangle$ alt modülünün direkt toplamıdır, dolayısıyla $\mathbb{Z}_6$ bir parçalanamaz modül değildir.

Tanım 1.1.16 [1,3] M bir R -modül ve $N \leq M$ olsun. Eğer $M = N + L$ şartını sağlayan her $L \leq M$ için $M = L$ oluyorsa bu durumda N ye, M de dar (small) denir ve $N \ll M$ şeklinde gösterilir.

Örnek 1.1.17 Sıfırdan farklı herhangi bir M, R -modülünün sıfır alt modülü dardır, çünkü $N, M = 0 + N$ olmak üzere M nin herhangi bir alt modülü ise, $M = N$ dir.

Örnek 1.1.18 $M = \mathbb{Z}_4$ olsun. Bu durumda $\mathbb{Z}_4 = \langle \bar{1} \rangle + \langle \bar{2} \rangle$ ve ancak $\mathbb{Z}_4 \neq \langle \bar{2} \rangle$ olduğundan $\langle \bar{1} \rangle, \mathbb{Z}_4$ te dar değildir.

Örnek 1.1.19 Aşağıdaki tabloda, $\mathbb{Z}_6 \neq \langle \bar{2} \rangle$ ve $\mathbb{Z}_6 \neq \langle \bar{3} \rangle$ iken $\mathbb{Z}_6 = \langle \bar{2} \rangle + \langle \bar{3} \rangle$ olduğundan $\langle \bar{2} \rangle$ ve $\langle \bar{3} \rangle$ ün $\mathbb{Z}_6$ da dar olmadığı görülmektedir.

+	$\langle \bar{0} \rangle$	$\langle \bar{1} \rangle$	$\langle \bar{2} \rangle$	$\langle \bar{3} \rangle$
$\langle \bar{0} \rangle$		M		
$\langle \bar{1} \rangle$	M	M	M	M
$\langle \bar{2} \rangle$		M		M
$\langle \bar{3} \rangle$		M	M	

Örnek 1.1.20 Aşağıdaki tabloda, $\mathbb{Z}_8 = \langle \bar{2} \rangle + \langle \bar{1} \rangle$ ve $\mathbb{Z}_8 = \langle \bar{4} \rangle + \langle \bar{1} \rangle$ ve açık bir şekilde $\mathbb{Z}_8 = \langle \bar{1} \rangle$ olduğundan, $\langle \bar{2} \rangle$ ve $\langle \bar{4} \rangle$ ün $\mathbb{Z}_8$ de dar alt modüller olduğu görülmektedir.

+	$\langle \bar{0} \rangle$	$\langle \bar{1} \rangle$	$\langle \bar{2} \rangle$	$\langle \bar{4} \rangle$
$\langle \bar{0} \rangle$		M		
$\langle \bar{1} \rangle$	M	M	M	M
$\langle \bar{2} \rangle$		M		
$\langle \bar{4} \rangle$		M		

Tanım 1.1.21 [1] M bir R -modül ve $N \leq M$ olsun. Eğer $L \cap N = 0$ olmak üzere herhangi bir $L \leq M$ için $L = 0$ ise, N ye M de geniş veya gerekli modül denir ve $N \leq_e M$ ile gösterilir.

Her M , R -modülünün kendi içinde geniş olduğu açıktır.

Örnek 1.1.22 $\mathbb{Z}_{12}$ nin $\langle \bar{2} \rangle$ alt modülü geniştir.

Örnek 1.1.23 $M = \mathbb{Z}_6$ olsun. $\langle \bar{2} \rangle \cap \langle \bar{3} \rangle = \langle \bar{0} \rangle$ ve $\langle \bar{2} \rangle \neq 0, \langle \bar{3} \rangle \neq 0$ olduğu için, $\langle \bar{2} \rangle$ ve $\langle \bar{3} \rangle$, $\mathbb{Z}_6$ da geniş alt modül değildir.

Tanım 1.1.24 [4] M bir R -modül olsun. M 'nin bir N öz alt modülü, eğer N , M de herhangi bir düzgün geniş genişlemeye sahip değil ise veya diğer bir deyişle eğer her $K \leq M$ için $N \leq_e K$ iken $K = N$ ise, M nin bir kapalı alt modülü olarak adlandırılır ve $N \leq_c M$ ile gösterilir.

Örnek 1.1.25 $\langle \bar{2} \rangle$ ve $\langle \bar{3} \rangle$ ün, $\mathbb{Z}_6$ 'nın kapalı alt modülleri olduğu, $\{\bar{0}, \bar{2}\}$ 'nin ise $\mathbb{Z}_4$ te kapalı olmadığı kolayca kontrol edilebilir.

Tanım 1.1.26 [5] M bir R -modül ve $N \leq M$ olsun. $M/N = \{x + N \mid x \in M\}$ eş kümelerin kümesi,

$$(x + N) + (y + N) = (x + y) + N \text{ ve } r(x + N) = rx + N$$

ile tanımlanan toplama ve skaler çarpma olmak üzere iki işlemli bir modüldür. Bu durumda M/N modülü, M nin N ye göre bölüm modülü olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.27 [6] M bir R -modül ve $N \leq L \leq M$ olsun. Eğer $L/N \ll M/N$ ise, N ye L nin eş-geniş alt modülü denir ve L nin, N nin M de bir eş-geniş genişlemesi olduğu söylenir.

Örnek 1.1.28 $M = \mathbb{Z}_8$ aşağıdaki alt modüllere sahiptir:

$$\langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\},$$

$$\langle \bar{1} \rangle = M,$$

$$\langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\},$$

$$\langle \bar{4} \rangle = \{\bar{0}, \bar{4}\},$$

$\langle \bar{4} \rangle \leq \langle \bar{2} \rangle \leq M$ ve $\langle \bar{2} \rangle / \langle \bar{4} \rangle = \langle \bar{2} \rangle \ll M / \langle \bar{4} \rangle = M$ olduğundan, bu durumda $\langle \bar{4} \rangle$ M 'nin bir eş-geniş alt modülüdür ve $\langle \bar{2} \rangle$ de M 'nin bir eş-geniş genişlemesidir.

Tanım 1.1.29 [2] M bir R -modül ve $N \leq L \leq M$ olsun. $N = L$ olmak üzere eğer $L / N \ll M / N$ ise, N ye M nin eş-kapalı alt modülü denir ve $N \leq_{cc} M$ ile gösterilir.

Örnek 1.1.30 $M = \mathbb{Z}_6$ aşağıdaki alt modüllere sahiptir:

$$\langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\},$$

$$\langle \bar{1} \rangle = M,$$

$$\langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\},$$

$$\langle \bar{3} \rangle = \{\bar{0}, \bar{3}\}, N = \langle \bar{2} \rangle \text{ için, } K = \langle \bar{0} \rangle \text{ alt modülü } N\text{'nin tek öz alt modülüdür,}$$

Örnek 1.1.19 a göre $N/K = NM/K = M$ de dar olmadığından, $N = \langle \bar{2} \rangle$ M de eş kapalı alt modüldür ve $N = \langle \bar{3} \rangle$ için $K = \langle \bar{0} \rangle$ alt modülü N nin tek öz alt modülüdür Örnek 1.1.19 a göre $N/K = NM/K = M$ de dar olmadığından $N = \langle \bar{3} \rangle$ M de eş kapalı alt modüldür.

Tanım 1.1.31 [7,8] M bir R -modül olsun. M nin tüm dar alt modüllerinin toplamına veya başka bir deyişle, M nin tüm maksimal alt modüllerinin kesişimine M modülünün radikali denir ve $\text{Rad}(M)$ ile gösterilir.

Örnek 1.1.32 $M = \mathbb{Z}_4$ olsun. $\langle \bar{0} \rangle$ ve $\langle \bar{2} \rangle$ alt modülleri $\mathbb{Z}_4$ ün tek dar alt modülleridir ve dolayısıyla $\text{Rad}(M) = \langle \bar{0} \rangle + \langle \bar{2} \rangle = \langle \bar{2} \rangle$ olur.

1.2 Bazı Teoremler ve Modüllerin Homomorfizması

Tanım 1.2.1 M ve N iki modül olsun. Bu durumda $f : M \rightarrow N$ dönüşümü, her $a, b \in M$ ve $r \in R$ için

1. $f(a + b) = f(a) + f(b)$

2. $f(ra) = r f(a)$.

koşullarını sağlıyorsa f ye modül homomorfizması denir.

Tanım 1.2.2 [5] $f : M \rightarrow N$ bir modül homomorfizması olmak üzere

$\{m \in M : f(m) = 0\}$ ile tanımlanan kümeye f in çekirdeği denir ve $\text{Çek}f$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.3 [5] $f : M \rightarrow N$ bir modül homomorfizması olmak üzere $\{f(m) : m \in M\}$ şeklinde tanımlanan kümeye f in. Görüntüsü denir ve $\text{Gör}f$ ile gösterilir.

$\text{Çek}f$ nin M nin bir alt modülü ve $\text{Gör}f$ in N nin bir alt modülü olduğu kolayca gösterilebilir.

Tanım 1.2.4 [5] $f : M \rightarrow N$ bir modül homomorfizması olsun. Bu durumda,

1. f bire bir ise f ye monomorfizma,

2. f örten ise f ye epimorfizma,

3. f bir monomorfizma ve epimorfizma ise f ye izomorfizma denir ve $M \cong N$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.5 [1,9] $f : M \rightarrow N$ bir modül homomorfizması olsun. Bu durumda, $\text{Çek}f \ll M$ ise f ye dardır denir.

Tanım 1.2.6 [5] $f : M \rightarrow N$ bir modül homomorfizması olsun. Bu durumda, $\text{Çek}f \ll M$ ve f bir epimorfizma ise f ye dar epimorfizma denir.

Tanım 1.2.7 [5,9] M bir R -modül ve K, M nin bir alt modülü olsun. Bu durumda $i_K : K \rightarrow M$ monomorfizmasına içine dönüşüm denir. Ayrıca her $m \in M$ için $\sigma K(m) = m + K$ şeklinde tanımlanan $\sigma K : M \rightarrow M/K$ dönüşümü M/K üzerine M nin doğal (kanonik) epimorfizması olarak adlandırılır. Bu durumda $\text{Çek}f \sigma K = K$ olur.

Teorem 1.2.8 [5] (Birinci İzomorfizma Teoremi)

$f: M \rightarrow N$ bir modül homomorfizması olsun. Bu durumda, $M / (\text{Çek} f) \cong \text{Gör } f$ dir. f bir epimorfizma ise, $M / (\text{Çek } f) \cong N$ olur.

Teorem 1.2.9 [5] (İkinci İzomorfizma Teoremi)

M bir R -modül, N ve K , M 'nin alt modülleri ise $(N + K)/K \cong N/(N \cap K)$ dir.

Teorem 1.2.10 [5] (Üçüncü İzomorfizma Teoremi)

M bir R -modül olsun. Eğer $K \leq N \leq M$ ise $(M/K)/(N/K) \cong M/N$ dir.

Teorem 1.2.11 [9] (Alt Modüller için Modül Kanunu)

M bir R -modül olsun. K, L , ve N , M 'nin alt modülleri olsun. Eğer $K \leq N$ ise $K + (L \cap N) = (K + L) \cap N$ dir.

Önerme 1.2.12 [5] (Dar Alt Modüllerin Özellikleri)

M bir R -modül olsun.

1. Eğer $K \leq N \leq M$ ve $K \ll N$ ise $K \ll M$ dir.
2. Eğer $N \ll M$ ise, N 'nin herhangi bir alt modülü M de dardır.
3. Eğer N , M 'nin bir direkt toplamı ve $K \ll M$ olmak üzere $K \leq N$ ise $K \ll N$ dir.
4. $K + N \ll M$ olması için gerek ve yeter şart $K \ll M$ ve $N \ll M$ olmasıdır.
5. $K \leq N \leq M$ iken $N \ll M$ olması için gerek ve yeter şart $K \ll M$ ve $N/K \ll M/K$ olmasıdır.
6. Eğer $K \ll M$ ve $f: M \rightarrow N$ bir homomorfizma ise, $f(K) \ll N$ dir.

İspat: 1. $M = L + K$ olmak üzere $L \leq M$ olsun. $M = L$ eşitliğini göstermek yeterlidir. O halde modül kanununa göre $N = N \cap M = N \cap (K + L) = (K + L) \cap N = K + (N \cap L)$ elde edilir. K, N de dar olduğundan, $N = N \cap L$ ve $N \leq L$ elde edilir. Diğer taraftan $K \leq N = N \cap L \leq L$ olduğundan, $K \leq L$ olur. $M = K + L = L$ olup $K \ll M$ dir.

2. $M = L + K$ olmak üzere $K \leq N$ ve $L \leq M$ olsun. $M = L$ eşitliğini göstermek yeterlidir. $M = L + K \leq L + N$ olduğundan $M = L + N$ elde edilir. Ayrıca $N \ll M$ olduğundan $L = M$ olmaktadır. Bu nedenle $K \ll M$ elde edilir.

3. $K \leq N \leq M$, $K \ll M$ ve $M = N \oplus L$ olduğundan $L \leq M$ elde edilir. $N = K + U$, $U \leq N$ olsun. Bu durumda $N = U$ eşitliğinin gösterilmesi yeterlidir. O halde $M = N + L = K + U + L$ ve $K \ll M$ olduğundan $M = U + L$ ve $U \leq N$ elde edilir. Böylece $U \cap L = 0$ şartını sağlayan $U \cap L \leq N \cap L = 0$ için

modül kanununa göre $M = U \oplus L$ ve $N = N \cap M = N \cap (U \oplus L) = (U \oplus L) \cap N = U \oplus (N \cap L) = U$ olur. Buradan da $K \ll N$ elde edilir.

4. Bazı $L \leq M$ için $M = (K + N) + L$ olsun. $M = L$ eşitliğini göstermemiz yeterlidir. Ancak $M = (K + N) + L = K + (N + L)$ ve $K \ll M$ olduğundan, $M = N + L$ elde edilir ve $N \ll M$ olduğundan $L = M$ olur. Bu nedenle $(K + N) \ll M$ elde edilir.

Diğer taraftan (2) gereğince $K \ll M$ olduğundan $K \leq K + N \ll M$ olur. Benzer şekilde $N \leq K + N \ll M$ elde edilir.

5. (2) gereğince $N \ll M$ olduğundan $K \ll M$ dir. Şimdi $N/K \ll M/K$ olduğunu gösterelim. V , $N/K + V = M/K$ şartını sağlayan M/K nin alt modülü olsun. Bu durumda $K \leq X$ olacak şekilde $V = X/K$ şartını sağlayan M nin X alt modülü vardır. Böylece $N/K + X/K = M/K$ olup $M \leq N + X$ dir. Ayrıca $m \in M$ olduğundan $m + k \in M/K = N/K + X/K$ olur. $m - n - x \in K \leq N$ ve $n \in N$ için $m - x \in N$ dir. Böylece $m = m - x + x \in N + X$ olması $M \leq N + X$ anlamına gelir. N, M de dar olduğundan $M = N + X$ ve $M = X$ elde edilir. Buradan $M/K = X/K$ olup $N/K \ll M/K$ dir.

Diğer taraftan her $X \leq M$ için $N + X = M$ olsun. $M = X$ eşitliğinin gösterilmesi yeterlidir. $K \leq N$ olduğundan, $N = N + K$ elde edilir. Ayrıca $M = N + K + X = N + (K + X)$ ve $K \leq K + X$ olduğundan $M/K = N/K + (K + X)/K$ elde edilir. Dolayısıyla $N/K \ll M/K$ olduğundan $M/K = (K + X)/K$ ve $M = X + K$ elde edilir. Böylece $K \ll M$ olduğundan $M = X$ dir.

6. Bazı $L \leq f(M)$ için $f(K) + L = f(M)$ olduğunu kabul edelim ve $f(K) \ll f(M)$ olduğunu gösterelim. $f^{-1}(f(M)) = f^{-1}(L + f(K)) = f^{-1}(L) + f^{-1}(f(K))$ olup $M = f^{-1}(L) + K$ elde edilir. Ayrıca $K \ll M$ olduğundan $M = f^{-1}(L)$ ve $f(M) = L$ olur. Diğer taraftan $f(K) \leq f(M) \leq N$ olduğundan $f(K) \ll N$ dir.

2. SIĞ VE YEREL MODÜLLER ARASINDAKİ BAĞINTILAR

2.1 Sığ Modüller

Tanım 2.1.1 [5,10] M bir R -modül olmak üzere eğer M nin her öz alt modülü M de dar ise, M ye sığ modül denir. Diğer bir ifadeyle, eğer M nin $M = N_1 + N_2$ şartını sağlayan her N_1 ve N_2 alt modülleri için, $M = N_1$ veya $M = N_2$ ise M ye sığ modül denir.

Örnek 2.1.2 $M = \mathbb{Z}_5$ olsun. $\mathbb{Z}_5$ in tek öz alt modülü $\langle \bar{0} \rangle$ ve herhangi bir modülün alt modülü dar olduğundan $\langle \bar{0} \rangle \ll \mathbb{Z}_5$ dir. O halde $\mathbb{Z}_5$ in bir sığ modüldür.

Örnek 2.1.3 Bir $M = \mathbb{Z}_4$ olsun. $\mathbb{Z}_4$ ün öz alt modülleri $\langle \bar{0} \rangle$ ve $\langle \bar{2} \rangle$ ve bu alt modüllerin her ikisini de $\mathbb{Z}_4$ te dar olduğundan $\mathbb{Z}_4$ bir sığ modüldür.

Örnek 2.1.4 $M = \mathbb{Z}_6$ olsun. $\mathbb{Z}_6 = \langle \bar{2} \rangle + \langle \bar{3} \rangle$ olup $\mathbb{Z}_6 \neq \langle \bar{2} \rangle$ ve $\mathbb{Z}_6 \neq \langle \bar{3} \rangle$ olduğundan $\mathbb{Z}_6$ sığ modül değildir.

Tanım 2.1.5 [1] M sıfırdan farklı bir R -modül olsun. Eğer M nin tek alt modülleri $\{0\}$ ve M ise M ye basit modül denir.

Örnek 2.1.6 $M = \mathbb{Z}_5$ olsun. $\mathbb{Z}_5$, $\langle \bar{0} \rangle$ ve $\mathbb{Z}_5$ dışında herhangi bir alt modüle sahip olmadığından bir basit modüldür.

Uyarı 2.1.7 Her basit modül bir sığ modüldür, ancak tersi genelde doğru değildir, örneğin $M = \mathbb{Z}_4$ bir sığ modüldür, ancak $\{\bar{0}, \bar{2}\} \neq \{\bar{0}\}$ ve $\{\bar{0}, \bar{2}\} \neq \mathbb{Z}_4$ olduğundan basit değildir. Diğer taraftan $\{\bar{0}, \bar{2}\}$ bir basit alt modüldür, çünkü $\{\bar{0}, \bar{2}\}$ sadece $\{\bar{0}\}$ ve $\{\bar{0}, \bar{2}\}$ alt modüllerine sahiptir.

2.2 Güçlü Sığ ve Tam Sığ Alt Modüller ve Bunların Arasındaki Bağlılıklar

Tanım 2.2.1 [11] M bir R -modül ve $0 \neq K \leq M$ olsun. $K \leq K_1 + K_2$ olacak şekilde her $K_1, K_2 \leq M$ alt modülleri için $K \leq K_1$ veya $K \leq K_2$ ise, K ya güçlü sığ alt modül denir ve SH -altmodül ile gösterilir. Eğer M kendisinin güçlü sığ alt modülü ise, M modülüne güçlü-sığ modül denir.

Örnek 2.2.2 $\mathbb{Z}_4$ 'ün bir güçlü sıg modül olduğu, diğer taraftan $\mathbb{Z}_{12} = \langle \bar{3} \rangle + \langle \bar{4} \rangle$, ancak $\mathbb{Z}_{12} \not\leq \langle \bar{3} \rangle$ ve $\mathbb{Z}_{12} \not\leq \langle \bar{4} \rangle$ olduğundan $\mathbb{Z}_{12}$ 'nin bir güçlü sıg modül olmadığı açıktır.

Tanım 2.2.3 [11] M bir R -modül ve $0 \neq K \leq M$ olsun. Eğer M nin R -alt modüllerinin herhangi bir $\{K_i\}_{i \in \Lambda}$ koleksiyonu bazı $i \in \Lambda$ için $K = \sum_{i \in \Lambda} K_i$ ve $K = K_i$ olmasını gerektiriyor ise, K ya tam sıg alt modül denir ve CH -altmodül ile gösterilir. Eğer M kendisinin tam sıg alt modülü ise, bir M ye tam sıg modül denir ve CH -modül ile gösterilir.

Örnek 2.2.4 $\mathbb{Z}_4$ tam sıg modüldür, diğer taraftan $\mathbb{Z}_{12} = \langle \bar{3} \rangle + \langle \bar{4} \rangle$, ancak $\mathbb{Z}_{12} \neq \langle \bar{3} \rangle$ ve $\mathbb{Z}_{12} \neq \langle \bar{4} \rangle$ olduğundan $\mathbb{Z}_{12}$ bir tam sıg modül değildir.

Uyarı 2.2.5 [11] 1. M bir R -modül ve $N \leq K \leq M$ olsun. Eğer K , M nin SH -alt modülü veya CH -altmodülü ise, N nin, M nin bir SH -altmodülü veya bir CH -altmodülü olması gerekmez, örneğin $\langle \bar{2} \rangle$, $\mathbb{Z}_4$ ün SH -altmodülü ve CH -altmodülüdür, ancak $\langle \bar{0} \rangle \leq \langle \bar{2} \rangle$, Tanım 2.2.1'e göre SH -altmodül ve Tanım 2.2.3 e göre CH -altmodül değildir.

2. M bir R -modül ve $0 \neq L \leq N \leq M$ olsun. Eğer L bir SH -alt modül veya CH -alt modül ise, N 'nin SH -alt modül veya CH -alt modül olması gerekmez, örneğin $\langle \bar{6} \rangle \leq \mathbb{Z}_{12}$ 'nin SH -alt modülü ve CH -alt modülüdür, ancak $\mathbb{Z}_{12}$ 'nin $\langle \bar{2} \rangle$ alt modülü, $\langle \bar{6} \rangle \leq \langle \bar{2} \rangle$ olduğundan SH -alt modül değildir ve CH -alt modül değildir.

3. M bir R -modül ve $K_1, K_2 \leq M$ olsun. Eğer K_1 ve K_2 , M nin SH -altmodülü veya CH -altmodülü ise, $K_1 + K_2$ nin M nin SH -altmodülü veya CH -altmodülü olması gerekmez, örneğin $K_1 = \langle \bar{3} \rangle$ ve $K_2 = \langle \bar{4} \rangle \leq \mathbb{Z}_{12}$ nin SH -altmodülleri ve CH -altmodülleridir, ancak $\mathbb{Z}_{12} = \langle \bar{3} \rangle + \langle \bar{4} \rangle$ olduğundan SH -altmodülleri ve CH -altmodülleri değildir.

4. M bir R -modül ve $0 \neq K \leq M$ olsun. Eğer her $K_1, \dots, K_n \leq M$ için $K \leq K_1 + K_2 + \dots + K_n$ olması $K \leq K_1$ veya $K \leq K_2, \dots$ veya $K \leq K_n$ olmasını gerektirir ise L bir SH -alt modüldür.

Sonuç 2.2.6 [11] M bir R -modül olsun. Bu durumda

1. Her basit modülü bir SH -modül ve bir CH -modüldür.
2. M nin her basit L alt modülü bir CH -alt modüldür.
3. Her CH -modül bir SH -modüldür.

İspat: 1. M bir basit modül, $0 \neq K \leq M$ ve $K = M$ olduğundan $0 + M = M$ ve $M + M = M$ olduğu aşıkardır, bu durum her zaman $K = M$ olması anlamına gelir.

2. K , M nin basit alt modülü ve $0 \neq K \leq M$ olup $K = K + 0$ ve $K = K + K$ olduğundan $K = K$ olması gerekir.

3. M bir CH -modül ve $0 \neq K \leq M$ olduğundan bazı $i \in \Lambda$ için $M = K_i$ olacak şekilde $M = \sum_{i \in \Lambda} K_i$ vardır. O halde $M \leq K_i$ dir.

2.3 Yerel Modüller

Tanım 2.3.1 [5,10] M bir R -modül olsun. Eğer M bir sığ modül ve M bir tek maksimal alt modüle sahipse, ya da başka bir deyişle eğer N , M nin bir geniş alt modülü, $\text{Rad}(M) = N \neq M$ ve bu durumda $\text{Rad}(M) \ll M$ olacak şekilde M nin tüm diğer alt modüllerini içeriyorsa, M ye yerel modül denir. Her basit modülün bir yerel modül olduğu, ancak tersinin genelde geçerli olmadığı aşıkardır.

Örnek 2.3.2 $\mathbb{Z}_4$ bir yerel $\mathbb{Z}$ -modüldür, çünkü $\mathbb{Z}_4$ bir sığ modüldür ve $\{\bar{0}, \bar{2}\} \mathbb{Z}_4$ ün tek maksimal alt modülüdür, ancak $\mathbb{Z}_4$ basit modül değildir.

Tanım 2.3.3 [1] M bir R -modül olsun. Eğer $M = Rm$ olacak şekilde bir $m \in M$ var ise, M ye devirli modül denir.

Örnek 2.3.4 $\mathbb{Z}_6 = \mathbb{Z}\bar{1} = \langle \bar{1} \rangle$ olduğundan $\mathbb{Z}_6$ devirli $\mathbb{Z}$ -modüldür.

Önerme 2.3.5 [5] M bir R -modül olsun. Bu durumda,

1. M in sığ modül olması için gerek ve yeter şart M nin sıfırdan farklı her bölüm modülünün parçalanamaz olmasıdır.
2. Aşağıdaki önermeler birbirine denktir:
 - a. M sığ modül ve $\text{Rad}(M) \neq M$ dır.
 - b. M sığ ve devirli modüldür.
 - c. M yerel modüldür.

3. TÜMLENİMİŞ, ZAYIF TÜMLENİMİŞ VE YETERLİ TÜMLENİMİŞ MODÜLLER

3.1 Tümlenmiş Modüller

Tanım 3.1.1 [1] M bir R -modül ve $K, N \leq M$ olsun. Bu durumda

1. $M = N + K$

2. $N, M = N + K$ de minimaldir

şartları sağlanıyorsa, N ye K nin M de tümleyeni veya toplam tamlayanı denir.

Tanımdan anlaşılacağı gibi sıfır modül her modülün aşıkâr tümlenmiş modülüdür.

Lemma 3.1.2 [5] $U + V = M$ ve $U \cap V \ll V$ olması için gerek ve yeter şart V, U nun M de bir tümleyeni olmasıdır.

İspat: $M = U + V$ olacak şekilde V, U nun M de bir tümleyeni ve bazı $X \leq V$ için $(U \cap V) + X = V$ olsun. $X = V$ olduğunu göstermek yeterlidir. $M = U + V = U + (U \cap V) + X = U + X$ ve V minimal olduğundan $X = V$ olup $U \cap V \ll V$ elde edilir.

Diğer taraftan $M = U + V$ ve $U \cap V \ll V$ ve bazı $Y \leq V$ için $M = U + Y$ olsun. Modül kanununa göre $V = M \cap V = (U + Y) \cap V = (U \cap V) + Y$ olur. Bu durumda $U \cap V \ll V$ olduğundan $Y = V$ elde edilir. Dolayısıyla V, U nun M de bir tümleyenidir.

Örnek 3.1.3 $\mathbb{Z}_6$ yı ele alalım. $\mathbb{Z}_6 = \langle \bar{2} \rangle + \langle \bar{3} \rangle$ ve $\langle \bar{2} \rangle \cap \langle \bar{3} \rangle = \langle \bar{0} \rangle \ll \langle \bar{2} \rangle$ ve $\langle \bar{0} \rangle \ll \langle \bar{3} \rangle$ olduğundan, $\langle \bar{2} \rangle, \langle \bar{3} \rangle$ ün bir tümleyenidir ve $\langle \bar{3} \rangle, \langle \bar{2} \rangle$ nin bir tümleyenidir.

Önerme 3.1.4 [5] M bir R -modül, $U, V \leq M$ ve V, U nun M de bir tümleyeni olsun.

Bu durumda aşağıdaki önermeler doğrudur.

1. Bazı $W \leq U$ için $W + V = M$ ise V, W nin bir tümleyenidir.
2. Eğer M devirli ise V de devirlidir.
3. Eğer U, M nin bir maksimal alt modülü ise, V devirlidir ve $U \cap V = \text{Rad}(V)$, V nin tek maksimal alt modülüdür.
4. Eğer $K \ll M$ ise $V, U + K$ nin bir tümleyenidir.
5. Eğer $K \ll M$ ise $V \cap K \ll V$ ve $\text{Rad}(V) = V \cap \text{Rad}(M)$ dır.
6. Eğer $\text{Rad}(M) \ll M$ ise U, M nin bir maksimal alt modülü tarafından kapsanır.
7. Eğer $L \leq U$ ise $(V + L)/L, U/L$ nin M/L de bir tümleyenidir.
8. Eğer $\text{Rad}(M) \ll M$ veya $\text{Rad}(M) \leq U$ ve $p : M \rightarrow M/\text{Rad}(M)$ bir kanonik epimorfizma ise $M/\text{Rad}(M) = p(U) \oplus p(V)$ olur.

Tanım 3.1.5 [5,8] M bir R -modül olsun. Eğer M nin her alt modülü bir tümleyene sahip ise, yani M nin her N alt modülü için M de $M = N + K$ ve $K \cap N \ll K$ olacak şekilde bir K alt modülü varsa M tümlenmiş modül olarak adlandırılır.

Örnek 3.1.6 $\mathbb{Z}_4$ bir tümlenmiş $\mathbb{Z}$ -modüldür.

Tanım 3.1.7 [1] M bir R -modül olsun. Eğer M nin her alt modülü, M nin bir direkt toplamı ise, M ye yarı basit modül denir. Bu durumda $\text{Rad}(M) = 0$ olur.

Örnek 3.1.8 $M = \mathbb{Z}_6$ olsun. Bu durumda $\mathbb{Z}_6$ aşağıdaki alt modüllere sahiptir.

$$\langle \bar{0} \rangle = \{\bar{0}\},$$

$$\langle \bar{1} \rangle = M,$$

$$\langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\},$$

$$\langle \bar{3} \rangle = \{\bar{0}, \bar{3}\},$$

$\oplus$	$\langle \bar{0} \rangle$	$\langle \bar{1} \rangle$	$\langle \bar{2} \rangle$	$\langle \bar{3} \rangle$
$\langle \bar{0} \rangle$		M		
$\langle \bar{1} \rangle$	M			
$\langle \bar{2} \rangle$				M
$\langle \bar{3} \rangle$			M	

Yukarıdaki tablodan da anlaşılacağı gibi $\mathbb{Z}_6$ nın tüm alt modülleri $\mathbb{Z}_6$ nın direkt toplamı olduğundan $\mathbb{Z}_6$ yarı basit modüldür.

Uyarı 3.1.9 Her yarı basit modül bir tümlenmiş modüldür, tersi genelde doğru değildir. Örneğin $\mathbb{Z}_4$ bir tümlenmiş modüldür ancak yarı basit değildir. $\mathbb{Z}_6$ ise bir yarı basittir, aynı zamanda tümlenmiş modüldür. Çünkü $\mathbb{Z}_6$ nın her alt modülü $\mathbb{Z}_6$ nın bir direkt toplananıdır ve görüldüğü üzere $\mathbb{Z}_6$ nın tek dar alt modülü $\{0\}$ dır ve $\mathbb{Z}_6$ nın tek geniş alt modülü $\mathbb{Z}_6$ dır.

Lemma 3.1.10 [1] Eğer M bir yarı basit modül ise, M nin tek dar alt modülü $\{0\}$ dır ve M nin tek geniş alt modülü M dir.

İspat: M bir yarı basit modül olduğundan, M nin herhangi bir N alt modülü için, $M = N \oplus K$ ve $N \cap K = 0$ olacak şekilde M nin bir K alt modülü vardır, eğer N dar ise, $N = N \cap M = N \cap K = 0$ ve $M = N + K$ olduğundan $M = K$ dır. Bu nedenle $N = 0$ olur, öte yandan eğer N geniş ise, M yarı basit modül olduğundan, $M = N + K$ ve $N \cap K = 0$ olur, dolayısıyla $K = 0$ ve $M = N$ elde edilir.

Önerme 3.1.11 [5] M bir R -modül olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler doğrudur.

1. U ve V , M nin alt modülleri, U tümlenmiş ve $U + V$, M de bir tümleyene sahip olsun. Bu durumda V , M de bir tümleyene sahiptir.
2. Eğer M_1 ve M_2 tümlenmiş modüller ise $M = M_1 + M_2$ de tümlenmiş modüldür.
3. Eğer M tümlenmiş modül ise $M / \text{Rad}(M)$ yarı basittir.

İspat: 1. X , M de $U + V$ nin bir tümleyeni yani $M = (U + V) + X$ ve $(U + V) \cap X \ll X$ olsun. Ayrıca Y , U da $(V + X) \cap U$ nun bir tümleyeni yani $U = (V + X) \cap U + Y$ ve $((V + X) \cap U) \cap Y \ll Y$ dir, çünkü

$Y \leq U, Y + V \leq U + V$ olduğunda $(Y + V) \cap X \leq (U + V) \cap X$ elde edilir.

Bu nedenle $(U + V) \cap X \ll X$ olduğundan $(Y + V) \cap X \ll X$ olur. Bu durumda $M = U + V + X = (V + X) \cap U + Y + V + X = Y + V + X$ ve

$Y \cap (V + X) = Y \cap U \cap (V + X) \ll Y$ olur. Yani Y , M de $V + X$ in bir tümleyenidir. Buna göre

$(X + Y) \cap V \leq (X \cap (U + V)) + (Y \cap (V + X)) \ll X + Y$ elde edilir.

Dolayısıyla $X + Y$, V nin M de bir tümleyenidir.

2. U , M nin bir alt modülü olsun. Bu durumda $M = M_1 + M_2 + U$ olur ve sıfır modülü $M_1 + M_2 + U$ için bir tümleyen ve M_1 tümlenmiş olduğundan, $M_2 + U$ bir tümleyene sahiptir. Dolayısıyla M_2 tümlenmiş olduğundan U , M de bir tümleyene sahiptir. Bu nedenle M tümlenmiştir.

3. $N/Rad(M)$, $M/Rad(M)$ nin bir alt modülü olsun. M tümlenmiş olduğundan, $N + K = M$ ve $N \cap K \ll K$ olacak şekilde N nin M de bir K tümleyeni vardır. Tümleyen tanımına göre, $M/Rad(M) = (N + K)/Rad(M) = (N/Rad(M)) + ((K + Rad(M))/Rad(M))$ $(N/Rad(M)) \cap ((K + Rad(M))/Rad(M)) = (N \cap K + Rad(M))/Rad(M)$ elde edilir. $N \cap K \ll K$ olduğundan $N \cap K \ll M$ olur. Dolayısıyla $(N \cap K) \leq Rad(M)$ iken $(N \cap K) + Rad(M) = Rad(M)$ olmaktadır. Bu nedenle $(N/Rad(M)) \cap ((K + Rad(M))/Rad(M)) = 0$ olur. Dolayısıyla $N/Rad(M)$, $M/Rad(M)$ nin bir direkt toplamıdır. Bu nedenle $M/Rad(M)$ yarı basittir.

Sonuç 3.1.12 [5] M bir R -modül olsun. Eğer M tümlenmiş ve $Rad(M) = 0$ ise M yarı basittir.

İspat: İspat, Önerme 3.1.11(3) te verildiği gibi yapılır.

Tanım 3.1.13 [12,13] M bir R -modül ve $N, K \leq M$ olsun. Bu durumda $M = N + K$ olmak üzere eğer K , $N \cap K \leq Rad(K)$ ise, K ya N nin M de bir Rad –tümleyeni denir.

Uyarı 3.1.14 Bir M modülünün radikali, M nin tüm dar alt modüllerinin toplamı olduğundan, M nin her tümleyen alt modülü, M nin bir Rad –tümleyen alt modülüdür.

Örnek 3.1.15 $\mathbb{Z}_6$ da, $\langle \bar{2} \rangle$ ve $\langle \bar{3} \rangle$ her biri diğerinin bir tümleyeni ve $\langle \bar{2} \rangle \cap \langle \bar{3} \rangle = \{0\}$ olduğundan, $\langle \bar{2} \rangle$ ve $\langle \bar{3} \rangle$ $\mathbb{Z}_6$ nın Rad –tümleyenidir.

Tanım 3.1.16 [12,13] M bir R -modül olsun. Eğer M nin her alt modülü bir Rad –tümleyene sahip ise, bu durumda M bir Rad –tümlenmiş modül olarak adlandırılır, yani her M nin N alt modülü için M de $M = N + K$ ve $K \cap N \leq Rad(K)$ olacak şekilde bir K Rad –tümleyeni vardır.

Uyarı 3.1.17 Bir tümlenmiş modül bir Rad –tümlenmiş modüldür.

Örnek 3.1.18 $\mathbb{Z}_4$ bir tümlenmiş $\mathbb{Z}$ -modül olduğundan, bir Rad –tümlenmiş $\mathbb{Z}$ -modüldür.

Tanım 3.1.19 [12,13] M bir R -modül olsun. $M = N + K$ olmak üzere herhangi bir $N, K \leq M$ için, K de N nin bir Rad –tümleyen L alt modülü var ise, M ye yeterli Rad –tümlenmiş modül denir. Yani $M = N + K$ olmak üzere her $N, K \leq M$ için, $L \cap N \leq Rad(L)$ olacak şekilde $M = L + N$ şartını sağlayan bir $L \leq K$ vardır.

Örnek 3.1.20 $\mathbb{Z}_6$ yeterli Rad –tümlenmiş $\mathbb{Z}$ -modüldür.

3.2 Zayıf Tümlenmiş Modüller

Tanım 3.2.1 [14,15] M bir R -modül ve $N, K \leq M$ olsun. Bu durumda,

1. $M = N + K$,

2. $N \cap K \ll M$.

ise, K ya M de N nin zayıf tümleyeni denir.

Örnek 3.2.2 $\langle \bar{2} \rangle$ ve $\langle \bar{3} \rangle$ alt modülleri, $\mathbb{Z}_6$ nin zayıf tümleyen alt modülleridir.

Tanım 3.2.3 [14,15] M bir R -modül olsun. Eğer M nin her alt modülü M de bir zayıf tümleyene sahip ise, M ye zayıf tümlenmiş modül denir. Yani her $N \leq M$ için, $M = N + K$ ve $N \cap K \ll M$ olacak şekilde $K \leq M$ vardır.

Her tümlenmiş modülün zayıf tümlenmiş modül olduğu açıktır.

Örnek 3.2.4 $\mathbb{Z}_4$, bir zayıf tümlenmiş $\mathbb{Z}$ -modülüdür.

Önerme 3.2.5 [16,17] M bir R -modül olsun.

1. Eğer U ve V zayıf tümlenmiş modüller ve $U + V, M$ de bir zayıf tümleyene sahip ise V, M de bir zayıf tümleyene sahiptir.

2. Eğer M_1 ve M_2 zayıf tümlenmiş modüller ise $M = M_1 + M_2$ bir zayıf tümlenmiş modüldür.

İspat: Önerme 3.1.11 e benzer şekilde yapılır.

Önerme 3.2.6 [16,17] M bir zayıf tümlenmiş R –modül olsun.

1. M nin her bölüm modülü zayıf tümlenmiş modüldür.

2. M nin her tümleyeni ve M nin her direkt toplamı zayıf tümlenmiş modüldür.

İspat: 1. M bir zayıf tümlenmiş modül, $L, K \leq M$ ve $K \leq L$ olsun. $M/K, M$ nin bölüm modülü ve $L/K \leq M/K$ olsun. M zayıf tümlenmiş olduğundan $L + N =$

M ve $L \cap N \ll M$ olacak şekilde M nin N alt modülü vardır. O halde $L \cap K \ll M$ olup $M/K = (L + N)/K = L/K + (N + K)/K$ dir. Bu durumda $(L/K) \cap ((N + K)/K) \ll M/K$ olacağından $L/K, M/K$ da zayıf tümleyene sahiptir. Böylece M/K zayıf tümlenmiş modüldür.

2. $N \leq M, M$ nin tümlenmiş modülü olsun. Bu durumda bazı $K \leq M$ için $N + K = M$ ve $N \cap K \ll N$ dir. Böylece (1) gereğince M/K zayıf tümlenmiş modül ve Teorem 1.2.10 gereğince $M/K \cong N/(N \cap K)$ olduğundan $f : N \rightarrow M$ epimorfizması vardır. $\text{Ker} f = N \cap K \ll N$ olduğundan her $K \ll M$ için $f^{-1}(K) \ll N$ olacaktır. $L \leq N$ olmak üzere $f(L), M$ de X zayıf tümleyenine sahiptir. $f^{-1}(X)$ in L nin N de zayıf tümleyeni modülü olduğu açıktır. Böylece N zayıf tümlenmiş modüldür. Direkt toplam tümlenmiş modüldür ve dolayısıyla zayıf tümlenmiştir.

Tanım 3.2.7 [16] M bir R -modül ve herhangi bir $N, K \leq M$ için $M = N + K$ olsun. Eğer N nin K içinde kalan bir zayıf tümleyen L alt modülü varsa, M ye yeterli zayıf tümlenmiş modül denir. Yani her $N, K \leq M$ ve $M = N + K$ için $L \cap N \ll M$ ve $M = L + N$ olacak şekilde $L \leq K$ vardır.

Örnek 3.2.8 $\mathbb{Z}_6$ bir yeterli zayıf tümlenmiş $\mathbb{Z}$ -modüldür.

Tanım 3.2.9 [15] M bir R -modül olsun. Eğer M nin herhangi bir kapalı N alt modülü için $M = K + N$ ve $N \cap K \ll M$ olacak şekilde M nin bir K alt modülü var ise bu durumda M ye kapalı zayıf tümlenmiş modül denir.

Lemma 3.2.10 [15] M bir kapalı zayıf tümlenmiş modül olsun. Bu durumda M nin herhangi bir direkt toplamı kapalı zayıf tümlenmiş modüldür.

İspat: N, M nin herhangi bir direkt toplamı ve L, N nin M de herhangi bir kapalı alt modülü olsun. N, M de kapalı olduğundan, M nin $M = K + L$ ve $K \cap L \ll M$ olacak şekilde bir K alt modülü vardır. Bu nedenle $N = (N \cap K) + L$ olur. N, M nin direkt toplamı olduğundan, $N \cap K \cap L = L \cap K \ll N$ elde edilir. Bu nedenle Önerme 1.2.12(3) e göre N bir kapalı zayıf tümlenmiş modüldür.

3.3 Yeterli Tümlenmiş Modüller ve Diğer Bazı Tipler

Tanım 3.3.1 [5] M bir R -modül olsun. $M = N + K$ olmak üzere herhangi bir $N, K \leq M$ için N nin K içinde kalan bir tümleyen L alt modülü varsa, M ye yeterli tümlenmiş modül denir. Yani $M = N + K$ şartını sağlayan her $N, K \leq M$ için $M = N + L$ ve $L \cap N \ll L$ şartını sağlayan $L \leq K$ vardır.

Her yeterli tümlenmiş modülün bir tümlenmiş modül olduğu açıktır.

Örnek 3.3.2 $\mathbb{Z}_6$ bir yeterli tümlenmiş $\mathbb{Z}$ -modüldür.

Önerme 3.3.3 [5] M bir R -modül olsun. Eğer M yeterli tümlenmiş ise, aşağıdaki özellikler geçerlidir:

1. M nin her tümlenmiş alt modülü yeterli tümlenmiş modüldür.
2. M nin direkt toplamı ve bölüm modülleri yeterli tümlenmiş modüldür.

İspat: 1. $V, U \leq M$ ve $V = X + Y$ nin bir tümleyeni olsun. Bu durumda $M = U + X + Y$ olur. M bir yeterli tümlenmiş modül olduğundan, $U + X$ in $L \leq Y$ olacak şekilde M de bir L tümleyeni vardır. Buradan $X \cap L \leq (U + X) \cap L \ll L$ ve $M = U + X + L$ olup $X + L = V$ dir. Dolayısıyla L, X in V de bir tümleyenidir. Böylece V yeterli tümlenmiş modüldür.

2. Tümlenmiş modüllerin her direkt toplamı tümlenmiş olduğundan (1) ve Önerme 3.1.4(7) gereğince M nin direkt toplamı ve bölüm modülleri yeterli tümlenmiş modüldür.

Tanım 3.3.4 [18,19] M bir R -modül olsun. Eğer M nin her alt modülü M nin bir direkt toplamına denk gelen bir tümleyene sahip ise M ye $\oplus$ -tümlenmiş denir.

Örnek 3.3.5 $\mathbb{Z}_6$ bir $\oplus$ -tümlenmiş $\mathbb{Z}$ -modüldür.

Tanım 3.3.6 [18] M bir R -modül olsun. Eğer M nin her direkt toplamı $\oplus$ -tümlenmiş modül ise M ye tam veya yeterli $\oplus$ -tümlenmiş modül denir.

Her yeterli $\oplus$ -tümlenmiş modülün $\oplus$ -tümlenmiş modül olduğu ancak bunun tersinin doğru olmadığı aşikardır. Tersine eğer M nin her tümleyen alt modülü bir direkt toplamı ise doğrudur.

Tanım 3.3.7 [8,20] M bir R -modül olsun. Eğer M nin her alt modülü, M nin bir direkt toplamı olarak bir Rad-tümleyene sahip ise M ye bir Rad- $\oplus$ -tümlenmiş modül denir ve Rad- $\oplus$ -s-modül ile gösterilir.

Örnek 3.3.8 $\mathbb{Z}_6$ bir Rad- $\oplus$ -tümlenmiş $\mathbb{Z}$ -modüldür.

Tanım 3.3.9 [20] M bir R -modül olsun. Eğer M nin her direkt toplamı Rad- $\oplus$ -tümlenmiş ise, M ye bir tam veya bir yeterli Rad- $\oplus$ -tümlenmiş modül denir.

Sonuç 3.3.10 [8] 1. Her $\oplus$ -tümlenmiş modül ve yeterli $\oplus$ -tümlenmiş modül, sırasıyla Rad- $\oplus$ -tümlenmiş modül ve yeterli Rad- $\oplus$ -tümlenmiş modüldür.

2. Her yarı basit modül $\oplus$ -tümlenmiş, yeterli $\oplus$ -tümlenmiş, Rad- $\oplus$ -tümlenmiş modül ve yeterli Rad- $\oplus$ -tümlenmiş modüldür, ancak bunun tersi genel olarak geçerli değildir, örneğin $\mathbb{Z}_4$ bir $\oplus$ -tümlenmiş ve yeterli $\oplus$ -tümlenmiştir, ancak $\langle \bar{2} \rangle$ alt modülü $\mathbb{Z}_4$ ün direkt toplamı değildir.



4. LİFTİNG, ZAYIF LİFTİNG VE GÜÇLÜ LİFTİNG MODÜLLER

4.1 Lifting Modüller ve Zayıf Lifting Modüller

Tanım 4.1.1 [18] M bir R -modül olsun. Eğer M tümlenmiş ve M nin her tümleyen alt modülü bir direkt toplam ise M ye zayıf lifting modül denir.

Örnek 4.1.2 $\mathbb{Z}_4$ bir zayıf lifting $\mathbb{Z}$ -modüldür.

Önerme 4.1.3 [18] Bir zayıf lifting M modülünün herhangi bir direkt toplamı da zayıf lifting modüldür.

İspat: Bir tümlenmiş modülün herhangi bir direkt toplamı aynı zamanda tümlenmiş olduğundan A , M nin bir direkt toplamıdır. Bu durumda $M = A \oplus L$ olacak şekilde M nin bir L alt modülü vardır. A nin her tümleyen alt modülünün A nin bir direkt toplamı olduğu gösterilmelidir. B_1 , A nin bir alt modülü ve A_1 , A de B_1 nin bir tümleyeni olsun. $A = B_1 + A_1$ ve $B_1 \cap A_1 \ll A_1$ elde edilir. Ancak $(B_1 + L) \cap A_1 \leq B_1 \cap A_1$ ve bu durumda $(B_1 + L) \cap A_1 \ll A_1$ olduğu kolayca kontrol edilebilir. $M = (B_1 + L) + A_1$ olduğundan A_1 , M de $B_1 + L$ nin bir tümleyenidir. M zayıf lifting modül olduğundan A_1 in, M nin bir direkt toplamı olması gerekir. Bu nedenle A_1 , A nin bir direkt toplamıdır.

Sonuç 4.1.4 [18] Herhangi bir zayıf lifting modül yeterli $\oplus$ -tümlenmiş modüldür.

İspat: M zayıf lifting modül olduğundan M tümlenmiş modül ve M nin her tümlenmiş alt modülü M nin direkt toplamıdır. Bu yüzden M , $\oplus$ -tümlenmiş modüldür. O halde M nin her direkt toplamının $\oplus$ -tümlenmiş olduğunu göstermek yeterlidir. Önerme 4.1.3 gereğince her direkt toplam zayıf lifting olduğundan her direkt toplam $\oplus$ -tümlenmiş modüldür. Böylece M yeterli $\oplus$ -tümlenmiş modüldür.

Uyarı 4.1.5 [18] 1. M bir R -modül olsun. Bu durumda M nin zayıf lifting modül olması için gerek ve yeter şart M nin bir $\oplus$ -tümlenmiş olması ve M nin her tümleyen alt modülünün bir direkt toplam olmasıdır.

2. Her zayıf lifting modül $\oplus$ -tümlenmiş modüldür.

Tanım 4.1.6 [18] M bir R -modül olsun. Eğer M zayıf lifting ve yeterli tümlenmiş modül ise M ye lifting modül denir. Başka bir deyişle, eğer M nin her N alt modülü için $M = A \oplus B$, $A \leq N$ ve $N \cap B \ll B$ olacak şekilde M de A ve B alt modülleri varsa M ye lifting modül denir.

4.2 Güçlü Lifting Modüller

Tanım 4.2.1 [2] M bir R -modül olsun. Eğer N , M nin herhangi bir alt modülü ve N , M nin direkt toplamı veya dar alt modülü ise M ye güçlü lifting modül denir.

Uyarı 4.2.2 1. Her yarı basit modül bir güçlü lifting modüldür, ancak tersi doğru değildir. Çünkü $\mathbb{Z}_4$ bir sıg $\mathbb{Z}$ -modüldür, dolayısıyla $\langle \bar{2} \rangle$, $\mathbb{Z}_4$ te dardır ancak bir direkt toplam değildir.

2. Her sıg modül bir güçlü lifting modüldür, ancak tersinin doğru değildir. Örneğin $\mathbb{Z}_6$ bir yarı basit $\mathbb{Z}$ -modüldür, ancak $\langle \bar{2} \rangle$ ve $\langle \bar{3} \rangle$ alt modülleri $\mathbb{Z}_6$ nın dar alt modülleri değildir.

Önerme 4.2.3 [2] Her güçlü lifting modül bir lifting modüldür.

İspat: M nin bir lifting modül olduğunu göstermek için, M nin her N alt modülü için $M = A \oplus B$, N de A ve $N \cap B \ll B$ olacak şekilde A ve B alt modüllerinin var olduğunu göstermek yeterlidir. M bir güçlü lifting modül olduğundan M nin herhangi bir N alt modülü M nin dar alt modülü veya M nin direkt toplamıdır. Eğer $N \ll M$ ise M nin bir direkt toplamı olarak bir aşık $\{0\}$ alt modülü vardır. Yani $\{0\}$ N içinde olmak üzere $N \cap M = N \ll M$ olduğunda $M = \{0\} \oplus M$ olmaktadır, dolayısıyla M bir lifting modüldür. Ancak eğer N , M nin bir direkt toplamı değilse, M de $M = N \oplus K$ olacak şekilde bir K alt modülü vardır ve açıkça N kendisinin bir alt modülüdür ve $N \cap K = 0 \ll K \ll M$ olur. Bu nedenle M bir lifting modüldür.

Ancak bu önermenin tersi genelde doğru değildir, çünkü $\mathbb{Z}_{12}$ bir lifting $\mathbb{Z}$ -modüldür ancak güçlü lifting modül değildir.

Önerme 4.2.4 [2] M_1 ve M_2 bir R -modül olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler doğrudur.

1. Eğer $f: M_1 \rightarrow M_2$ bir modül epimorfizması ve M_1 bir güçlü lifting modül ise $f(M_1) = \text{Görf} = M_2$ de güçlü lifting modüldür.
2. Eğer M bir güçlü lifting modül ise M/N de bir güçlü lifting modüldür.

3. $f: M_1 \rightarrow M_2$ bir dar epimorfizma olsun. Eğer M_2 bir güçlü lifting modül ise M_1 de bir güçlü lifting modüldür.

4. K, M_1 in bir dar alt modülü olsun. Eğer M_1/K bir güçlü lifting modül ise M_1 bir güçlü lifting modüldür.

5. $f: M_1 \rightarrow M_2$ bir dar epimorfizma olsun. M_1 in bir güçlü lifting modül olması için gerek ve yeter koşul M_2 nin bir güçlü lifting modül olmasıdır.

İspat: 1. $\bar{N}, M_2 = f(M_1)$ in herhangi bir alt modülü olsun. Bu durumda $N = \{x \in M_1 : f(x) \in \bar{N}\}$, M_1 ve $f(N) = \bar{N}$ nin bir alt modülüdür. O halde $f(N)$ nin, M_2 nin direkt toplamı olduğunu veya M_2 de dar olduğunu göstermek yeterlidir. Diğer taraftan $f^{-1}(f(N)) = N$, M_1 in alt modülüdür ancak M_1 güçlü lifting modül olduğundan N , M_1 in direkt toplamıdır, eğer N, M_1 in toplamı ise M_1 de $M_1 = N \oplus K$ nin $f(M_1) = f(N \oplus K)$ olmasını gerektirecek şekilde bir K vardır ve f bir epimorfizma olduğundan $M_2 = f(N) \oplus f(K)$ olur. Dolayısıyla M_2 güçlü liftingdir, öte yandan eğer N, M_1 de dar ise Önerme 1.2.12(6) ya göre $f(N) \ll M_2$ elde edilir ve bu durumda M_2 bir güçlü lifting modüldür.

2. Tanım 1.2.7 ye göre, M güçlü lifting modül olduğundan $f: M \rightarrow M/N$ olacak şekilde bir doğal f epimorfizması vardır, bu durumda (1) gereğince M/N de güçlü lifting modüldür.

3. $K = \text{Çek} f$ olsun. 1. izomorfizma teoremine göre $M_1/K \cong M_2$ olup M_1/K bir güçlü lifting modüldür. M_1 in güçlü lifting modül olduğunu göstermek için N, M_1 in herhangi bir alt modülü iken N nin M_1 in toplamı olduğu veya M_1 de dar olduğunu göstermek gereklidir. M_1/K bir güçlü lifting modül olduğundan $(N + K) / K, M_1/K$ nin toplamıdır. Eğer $(N + K) / K, M_1/K$ nin toplamı ise M_1/K de bir K'/K alt modülü vardır ve burada $M_1/K = (N + K) / K \oplus K' / K$ olacak şekilde, K, K' nün bir alt modülüdür ve K', M_1 in bir alt modülüdür. Buna göre $M_1 = (N + K) \oplus K'$ dir. Ayrıca $K = \ker f \ll M_1$ olduğundan $M_1 = N \oplus K'$ olur ve bu da N nin M_1 in bir toplamı olduğunu gösterir.

Eğer $(N + K) / K, M_1/K$ de dar ise $N + L = M_1$ olacak şekilde M_1 in her L alt modülünün $M_1 = L$ olmasını gerektirdiği gösterilmelidir. $(N + K) / K \ll M_1/K$ olduğundan M_1/K de, $(N + L)/K + L / K = M_1 / K$ veya $(N + K) / K + (L + K) / K = M_1 / K$ olacak şekilde herhangi bir L / K alt modülü vardır. $(N + K) / K, M_1/K$ de dar olduğundan $(L + K)/K = M_1/K$ veya başka bir deyişle $L + K = M_1$

elde edilir ve $K = \text{Çekf} \ll M_1$ olduğundan $M_1 = L$ olur. Bu nedenle N , M_1 de dardır ve dolayısıyla M_1 bir güçlü lifting modüldür.

4. Tanım 1.2.7 ye göre, $f: M \rightarrow M/K$ olacak şekilde bir f doğal epimorfizma vardır ve $K \ll M$ olduğundan $f: M \rightarrow M/K$ fonksiyonu dar epimorfizmadır. Bu nedenle, (3) e göre M nin de bir güçlü lifting modül olduğu elde edilir.

5. M_1 güçlü lifting modül olduğundan (1) e göre M_2 güçlü lifting modüldür.

Diğer taraftan $f: M_1 \rightarrow M_2$ bir dar epimorfizma ve M_2 bir güçlü lifting modül olduğundan, (3) e göre M_1 bir güçlü lifting modüldür.



5. SIĞ, TÜMLENİMİŞ VE LİFTİNG MODÜLLER ARASINDAKİ BAĞINTILAR

5.1 Tümleyen Alt Modül ve Eş-Kapalı Alt Modül Arasındaki Bağıntılar

Lemma 5.1.1 [6] M bir R -modül ve $N \leq M$ olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler doğrudur.

1. Eğer N, M de bir tümleyen ise N, M de eş-kapalıdır.
2. Eğer N, M de eş-kapalı ise her $X \leq N$ için $X \ll M$ iken $X \ll N$ dir.

İspat: 1. N, L nin M de bir tümleyeni olsun. Bu durumda $M = N + L$ olup N minimaldir. $K \leq N$ ve $N/K \ll M/K$ olsun. Böylece $M/K = N/K + L/K = N/K + (L + K)/K$ olacak şekilde M/K da bir L/K modülü vardır ki $M/K = (L + K)/K$ elde edilir. Ayrıca N nin minimalliğinden $M = K + L$ olur. O halde $N = K$ ve N, M nin eş-kapalı alt modülüdür.

2. $N = X + Y$ ve $Y \leq N$ olsun. Bu durumda $N/Y \ll M/Y$ olduğunu göstermek gereklidir. Diğer taraftan $Y \leq H \leq M$ olmak üzere $M/Y = N/Y + H/Y$ olsun. Böylece $M = N + H = X + Y + H = X + H$ ve $X \ll M$ olduğundan $M = H$ ve $M/Y = H/Y$ dir. O halde $N/Y \ll M/Y$ ve N, M nin eş-kapalı alt modülü olduğundan $N = Y$ ve $X \ll N$ elde edilir.

5.2 Direkt Toplam ve Tümleyen Alt Modüller Arasındaki Bağıntılar

Lemma 5.2.1 [8] M bir R -modül olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler doğrudur.

1. Eğer N, M nin bir direkt toplam alt modülü ise N, M nin bir tümleyen alt modülüdür.
2. Eğer N, M nin bir tümleyen alt modülü ise N, M nin bir Rad-tümleyen alt modülüdür.
3. Eğer N, M nin bir dar alt modülü ise N, M nin bir zayıf tümleyen alt modülüdür.

İspat: 1. N , M nin bir direkt toplam alt modülü olsun. Buna göre, $M = N + K$ ve $N \cap K = 0 \ll N$ olmak üzere $M = N \oplus K$ olacak şekilde M nin bir K alt modülü vardır. Dolayısıyla N , M nin bir tümleyen alt modülüdür.

2. N , M nin bir tümleyen alt modülü olduğundan, $M = N + K$ ve $N \cap K \ll N$ olacak şekilde M nin bir K alt modülü vardır. Ancak $\text{Rad}(N)$ nin tüm dar alt modüllerinin toplamı ve $\text{Rad}(N) \leq N$ olduğundan $N \cap K \leq \text{Rad}(N)$ olup $N \cap K \ll N \leq N$ elde edilir. Bu nedenle N , M nin bir Rad-tümleyen alt modülüdür.

3. N , M nin bir dar alt modülü olsun. Buna göre M nin, $M = N + K$ ve $M = K$ şartını sağlayan bir K alt modülü vardır. Bu durumda $N \cap K = N \ll M$ elde edilir. Dolayısıyla N , M nin bir zayıf tümleyen alt modülüdür.

5.3 Basit, Yarı Basit, Sığ ve Yerel Modüller Arasındaki Bağlılıklar

Lemma 5.3.1 [1] M bir R -modül olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler doğrudur.

1. Eğer M bir basit modül ise M yarı basit modüldür.
2. Eğer M bir basit modül ise M sığ modüldür.
3. Eğer M bir basit modül ise M yerel modüldür.
4. Eğer M bir yerel modül ise M sığ modüldür.
5. Eğer M , basit modül olmayan bir yarı basit modül ise M sığ modül ve yerel modül değildir ve bu lemmanın tersi de doğrudur.

İspat: 1. M basit modül olduğundan $\{0\}$ ve M , M nin tek alt modülleridir ve $M = \{0\} + M$ ve $\{0\} \cap M = 0$ olduğundan $M = \{0\} \oplus M$ elde edilir. Bu nedenle M yarı basit modüldür.

2. M basit modül olduğundan, $\{0\}$ ve M , M nin tek alt modülleridir dolayısıyla $\{0\}$, M nin aşık dar alt modülüdür. Buna göre M sığ modüldür.

3. M basit modül olduğundan $\{0\}$ ve M , M nin tek alt modülleridir buna göre M (2) ye göre aşık geniş alt modüldür ve tektir. Bu durumda M nin sığ modül olduğu ve tek maksimum alt modüle sahip olduğu gösterilmiştir. Dolayısıyla M bir yerel modüldür.

4. Tanıma göre yerel modül olduğu açıktır.

5. M basit olmayan yarı basit modül olduğundan M nin herhangi bir N alt modülü için M nin $M = N \oplus K$ olacak şekilde bir K alt modülü vardır. Dolayısıyla $M = N + K$ ve $N \cap K = 0$ olması $M \neq N$ ve $M \neq K$ olmasını gerektirir. M nin herhangi bir N alt modülünün M nin dar alt modülü olmadığı görülür. Bu nedenle M , sığ modül ve yerel modül değildir.

Tersi M sığ ve yerel modül olarak alınır, M nin herhangi bir N alt modülü için $M = N + K$ nin $M = K$ ve $N \cap K \neq 0$ olacak şekilde M nin bir K alt modülü vardır. Buna göre M basit olmadığından M nin herhangi bir N alt modülünün direkt toplamı olmadığı ve dolayısıyla M nin yarı basit modül olmadığı elde edilir.

Lemma 5.3.2 [8] Eğer M bir basit modül ise M tümlenmiş, zayıf tümlenmiş, yeterli tümlenmiş, lifting, zayıf lifting ve güçlü lifting modüldür.

5.4 Sığ, Tümlenmiş ve Lifting Modüller Arasındaki Bağlılıklar

Lemma 5.4.1 [12,18]

1. Eğer M sığ modül ise M bir lifting modüldür.
2. Eğer M sığ modül ise, M bir tümlenmiş modüldür.

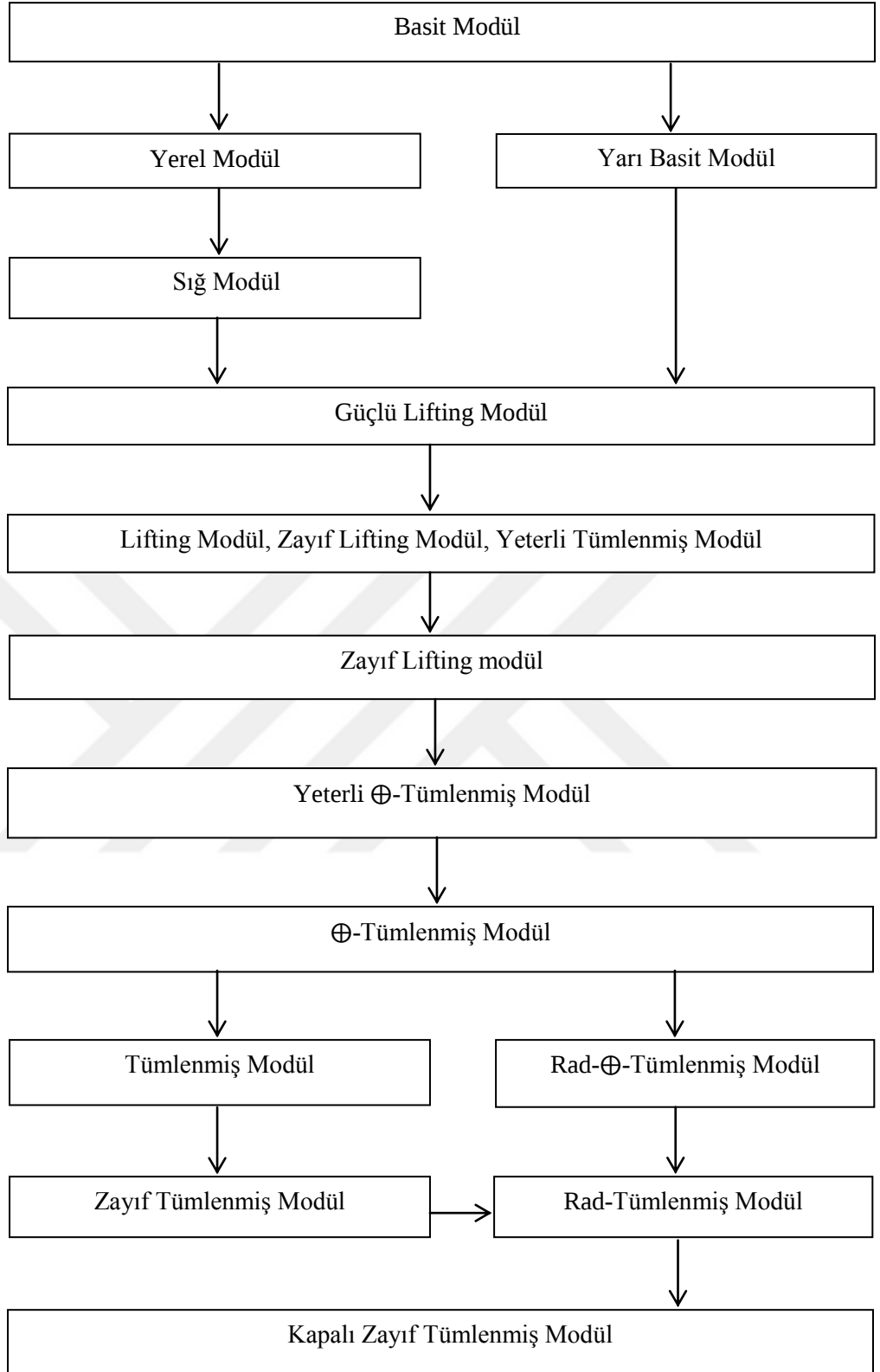
İspat: 1. M bir sığ modül olduğundan, Uyarı 4.2.2.(2) ye göre M nin bir güçlü lifting modül olduğu ve Önerme 4.2.3 a göre M nin bir lifting modül olduğu anlaşılır.

2. M bir sığ modül olduğundan, (1) e göre M bir lifting modüldür. Dolayısıyla Tanım 4.1.6 ye göre M bir zayıf liftingdir ve Sonuç 4.1.4 e göre M nin bir tam $\oplus$ -tümlenmiş olduğu ve bu nedenle M nin bir tümlenmiş modül olduğu açıktır.

6. SONUÇ

Bu tezi son bölümünde, elde edilen bazı sonuçlar şu şekildedir;

1. Basit modüller, çalıştığımız modüller arasındaki en güçlü modül tipleridir.
2. Kapalı zayıf tümlenmiş modüller, çalışılan modüller arasındaki en zayıf modüllerdir.
3. Diğer modül tipleri bu iki modül yapısı arasındadır.
4. Yerel modüller sığ modüllerden daha güçlüdür ve onların her ikisi de yarıbasit modüller ile ilişkilidir.
5. Tümlenmiş ve $\text{Rad-}\oplus$ - tümlenmiş modüller diğer modüller ile bağlantılıdır.
6. Modül tiplerinin birbirleriyle ilişkisi açık bir şekilde aşağıda verilmiştir.



KAYNAKLAR

- [1] Kasch, F., 1982. Modules and rings, 17, Academic Press, London, New York.
- [2] Gareeb, N. H., 2012. Strongly lifting modules, Journal of Zankoy Sulaimani PartA, 14, 1, 1, 15-21.
- [3] Tütüncü, D. K., 2005. On coclosed submodules, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 36, 3, 135-144.
- [4] Majid, M., ve Ahmad, G. B. A., 2013, On some properties of hollow and hollow dimension modules. Pure and Applied Mathematics Journal, 2, 5, 156-161.
- [5] Wisbauer, R., 1991. Foundations of module and ring theory, 3, CRC Press, University of Düsseldorf.
- [6] Keskin, D., 2000. On lifting modules, Communications in Algebra, 28, 7, 3427- 3440.
- [7] Fuller, K. R., ve Anderson, F. W., 1992. Rings and Categories of Modules, Springer-Verlag Press.
- [8] Türkmen, E., 2013. Rad- $\oplus$ -supplemented modules, Analele Universitatii Ovidius Constanta-Seria Matematica, 21, 1, 225-237.
- [9] Larsen, M. D., ve Mc Carthy, P. J., 1971. Multiplicative theory of ideals, Academic Press, New York.
- [10] Inoue, T., 1983. Sum of hollow modules, Osaka J. Math, 20, 2, 331-336.
- [11] Hadi, I. M. A. ve Humod, G. A., 2012. Strongly (completely) hollow submodules, College of Education Ibn-Al-Haitham, University of Baghdad. Ibn Al-Haitham Journal for Pure and Applied Science, 3, 25.

- [12] Türkmen, E., ve Pancar, A., 2009. On radical supplemented modules, *Int. J. Comput. Cognition*, 7, 1, 62-64.
- [13] Türkmen, E., ve Pancar, A., 2009. On cofinitely rad-supplemented modules, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 53, 2, 153-162.
- [14] Büyükaşık, E., 2009. On cofinitely weak supplemented modules. *The Arabian Journal for Science and Engineering*, 34, 159-164.
- [15] Zeng, Q. Y., ve Shi, M. H., 2006. On closed weak supplemented modules. *Journal of Zhejiang University Science A*, 7, 210-215.
- [16] Clark, J., Lomp, C., ve Vanaja, N., 2006. *Lifting modules*, Springer-Verlag Press.
- [17] Lomp, C., 1999. On semilocal modules and rings. *Commuincations in Algebra*, 27, 4, 1921-1935.
- [18] Tütüncü, D. K., ve Tribak, R., 2005. On lifting modules and weak lifting modules, *Kyungpook Mathematical Journal*, 45, 3, 445-445.
- [19] Talebi, Y., Hamzekolaei, A. R. M., ve Tütüncü, D. K., 2010. On $\text{rad-}\oplus$ -supplemented modules. *Hadronic J*, 32, 505-512.
- [20] Talebi, Y., ve Mahmoudi, A., 2012. On $\text{rad-}\oplus$ -supplemented modules. *Thai Journal of Mathematics*, 9, 2, 373-381.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Fuaad Muhammad MUSTAFA

Doğum Tarihi ve Yeri : 10.02.1980 – Al Sulaymaneyah, Irak

E-posta adresi : fuaad.mustafa@gmail.com

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Salahaddin Üniversitesi-Erbil, 1998-2002

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, 2013-2016

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLERİ

Matematik öğretmeni, Peshraw Lisesi, 2002-2013