

**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**BAZI ORANSAL GECİKMELİ UYUMLU KESİRLİ MERTEBEDEN KİSMİ
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YENİ SAYISAL METOTLARLA
ÇÖZÜMLERİ**

YÜKSEK LİSANS

Halil Hüseyin AVCI

**EKİM-2023
GÜMÜŞHANE**



T.C.

**GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**BAZI ORANSAL GECİKMELİ UYUMLU KESİRLİ MERTEBEDEN KISMİ
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YENİ SAYISAL METOTLARLA
ÇÖZÜMLERİ**

**SOLUTIONS OF SOME PROPORTIONAL DELAY CONFORMABLE
FRACTIONAL ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS BY NEW
NUMERICAL METHODS**

YÜKSEK LİSANS

Halil Hüseyin AVCI

**EKİM-2023
GÜMÜŞHANE**



T.C.

**GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**BAZI ORANSAL GECİKMELİ UYUMLU KESİRLİ MERTEBEDEN KİSMİ
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YENİ SAYISAL METOTLARLA
ÇÖZÜMLERİ**

**SOLUTIONS OF SOME PROPORTIONAL DELAY CONFORMABLE
FRACTIONAL ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS BY NEW
NUMERICAL METHODS**

YÜKSEK LİSANS

Halil Hüseyin AVCI

Danışman: Dr. Öğretim Üyesi Halil ANAÇ

**EKİM-2023
GÜMÜŞHANE**

KABUL VE ONAY

X X X X

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlamış olduğum ve 26.10.2023 tarihinde savunmasını yaptığım “**Bazı Oransal Gecikmeli Uyumlu Kesirli Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Yeni Sayısal Metotlarla Çözümleri**” isimli bu tezimin, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, alıntı yaptığım tüm çalışmaları kaynakçada belirttiğimi ve Gümüşhane Üniversitesi’nin lisanslı kullanıcısı olduğu intihal yazılım programı ile Lisansüstü Eğitim Enstitüsü’nün belirlediği kıstaslara uygun olarak raporladığımı taahhüt ederim. Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivinde saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği’nin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

../../....

.....
Halil Hüseyin AVCI

TEŞEKKÜR

Çalışmalarında bana ilgisini ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, kıymetli zamanını ve bilgilerini benimle paylaşan; gösterdiği sonsuz anlayış ve ilgiyle tezimin ortaya çıkmasına yardımcı olan saygıdeğer danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Halil ANAÇ' a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans öğrenimim süresince emeklerinden ve yardımlarından dolayı bölümümüzün kıymetli hocalarına teşekkürü bir borç bilirim.

Yüksek lisans öğrenimim boyunca her zaman yanımda olan ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen değerli anneme ve babama teşekkürlerimi sunarım.

Halil Hüseyin AVCI
GÜMÜŞHANE-2023

ÖZET

Bu tez, beş ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, oransal gecikmeli diferansiyel denklemler hakkındaki genel bilgilerden söz edilmektedir. İkinci bölümde, temel tanımlar ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde üretilen yöntemler anlatılmaktadır. Dördüncü bölümde, oransal gecikmeli lineer olmayan uyumlu zaman kesirli genelleştirilmiş Burgers (UZKGB) denklemleri, uyumlu q-Mohand homotopi analiz dönüşüm metodu (Uq-MHADM), ve uyumlu kesirli Mohand ayrıştırma metodu (UKMAM) olarak isimlendirilen iki yeni metottan faydalanılarak yeni nümerik çözümler bulunmuştur. Önerilen metotların etkili ve güvenilir olduğunu göstermek üzere nümerik simülasyonlar yapılmaktadır. Mutlak hata hesapları yapılmaktadır. Sonuç bölümünde yeni üretilen her iki metodun da oransal gecikmeli lineer olmayan uyumlu kesirli kısmi diferansiyel denklemleri incelemek için etkin olduğu öngörülmektedir.

Anahtar Kelimeler: Uyumlu q-Mohand homotopi analiz dönüşüm metodu, uyumlu kesirli Mohand ayrıştırma metodu

SUMMARY

This thesis consists of five main chapters. In the first chapter, general information about proportional delay differential equations is mentioned. In the second chapter, basic definitions and theorems are given. In the third section, the produced methods are explained. In the fourth chapter, new numerical solutions were found by using two new methods called proportional delay non-linear conformable time-fractional generalized Burgers (CTFGB) equations, conformable q-Mohand homotopy analysis transform method (Cq-MHATM), and conformable fractional Mohand decomposition method (CFMDM). Numerical simulations are performed to show that the proposed methods are effective and reliable. Absolute error calculations are made. In the conclusion section, it is predicted that both newly produced methods are effective for examining nonlinear conformable fractional partial differential equations with proportional delay.

Keywords: Conformable q-Mohand homotopy analysis transform method, conformable fractional Mohand decomposition method

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	III
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI	IV
TEŞEKKÜR	V
ÖZET	VI
SUMMARY	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
TABLolar DİZİNİ	IX
ŞEKİLLER DİZİNİ	X
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	XI
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	5
3. ÜRETİLEN METOTLAR	6
3.1. Uyumlu q-Mohand Homotopi Analiz Dönüşüm Metodu (Uq-MHADM)	6
3.2. Uyumlu Kesirli Mohand Ayrıştırma Metodu (UKMAM)	9
4. YAPILAN ÇALIŞMALAR	11
4.1 UKZGB Denklemi için Uq-MHADM çözümü	11
4.1. UKZGB Denklemi için UKMAM çözümü	13
4.2. UKZGB Denklemi için Uq-MHADM çözümü	20
4.2. UKZGB Denklemi için UKMAM çözümü	22
5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME	30
KAYNAKÇA	31
ÖZGEÇMİŞ	35

TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 1. Örnek 4.1 de $\alpha = 1, h = -1$ ve $n = 1$ olmak üzere x' ler sabit iken farklı t' ler için Uq-MHADM, UKMAM ve HPM sayısal çözümlerinin karşılaştırılması	20
Tablo 2. Örnek 4.2 de $\alpha = 1, h = -1$ ve $n = 1$ olmak üzere x' ler sabit iken farklı t' ler için Uq-MHADM, UKMAM ve HPM sayısal çözümlerinin karşılaştırılması	29



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. Örnek 4.1 için $h = -1, n = 1, \alpha = 1$ olmak üzere	
(a) Uq-MHADM çözümü	
(b) Örnek 4.1 denkleminin analitik çözümü	
(c) Mutlak hata = $ w_{\text{analitik}} - w_{\text{Uq-MHADM}} $	17
Şekil 2. Örnek 4.1 için $\alpha = 1$ olmak üzere	
(a) UKMAM çözümü	
(b) Örnek 4.1 denkleminin analitik çözümü	
(c) Mutlak hata = $ w_{\text{analitik}} - w_{\text{UKMAM}} $	18
Şekil 3. Örnek 4.1 için $t = 0.5, h = -1, n = 1$ olmak üzere farklı α değerleri için	
(a) Uq-MHADM çözümleri ile analitik çözümün karşılaştırılması	
(b) UKMAM çözümleri ile analitik çözümün karşılaştırılması.....	19
Şekil 4. Örnek 4.2 için $h = -1, n = 1, \alpha = 1$ olmak üzere	
(a) Uq-MHADM çözümü	
(b) Örnek 4.2 denkleminin analitik çözümü	
(c) Mutlak hata = $ w_{\text{analitik}} - w_{\text{Uq-MHADM}} $	26
Şekil 5. Örnek 4.2 için $\alpha = 1$ olmak üzere	
(a) UKMAM çözümü	
(b) Örnek 4.2 denkleminin analitik çözümü	
(c) Mutlak hata = $ w_{\text{analitik}} - w_{\text{UKMAM}} $	27
Şekil 6. Örnek 4.2 için $t = 0.5, h = -1, n = 1$ olmak üzere farklı α değerleri için	
(a) Uq-MHADM çözümleri ile analitik çözümün karşılaştırılması	
(b) UKMAM çözümleri ile analitik çözümün karşılaştırılması.....	28

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

UKZGB	: Uyumlu Kesirli Zaman Genelleştirilmiş Burgers
Uq-MHADM	: Uyumlu q-Mohand homotopi analiz dönüşüm metodu
UKMAM	: Uyumlu Kesirli Mohand ayrıştırma metodu
$T_{\alpha}(f)$	: f fonksiyonunun α mertebeden uyumlu kesirli türevi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar
E_{α}	: Mittag-Leffler fonksiyonu
${}_cM_{\alpha}$	: Uyumlu kesirli Mohand dönüşümü
$({}_cM_{\alpha})^{-1}$	: Ters uyumlu kesirli Mohand dönüşümü
H_m	: Homotopi polinomu

1. GİRİŞ

Mühendislik bilimleri, fizik, kimya ve biyoloji gibi birçok alanda oluşan problemin özelliklerini açıklayan matematiksel modellerin kurulması oldukça önemlidir. Bu modellemelerde ortaya konulan problemlerin çözülebilmesi ihtiyacı karşımıza diferansiyel denklemleri çıkartmaktadır. Doğada var olan problemlerin modellenmesinde tamsayı mertebeden diferansiyel denklemler ile fiziksel olayları açıklamadaki eksiklikleri giderebilmesi ve bu problemlerin daha iyi modellenmesi için kesirli mertebeden diferansiyel denklemler kullanılmaktadır. Son yıllarda kesirli hesap konusu oldukça önem kazanmaktadır. Güncel bir konu olmasına rağmen kesirli hesap temelleri oldukça eski olup, 1695 yılına dayanmaktadır. Leibniz' in, Eylül 1695' te, L' Hospital' e sorduğu “tamsayı mertebeden türevler, kesirli mertebeden türevlere genişletilebilir mi?” sorusuyla ortaya çıkmıştır. Daha sonra 1730’ da Euler, 1772 ’de Lagrange, 1812’ de Laplace, 1819’ da Lacroix, 1822’de Fourier, 1832’de Liouville, 1847’de Riemann, 1865’ de Holmgren, 1867’ de Grünwald, 1868’ de Letnikov, 1869’ da Sonin, 1884’ te Laurent, 1888’ de Nekrassov, 1890’ da Krug ve 1917’ de Weyl gibi birçok matematikçi tarafından kesirli hesap üzerine önemli çalışmalar yapılmıştır (Kilbas vd., 2006).

Kesirli mertebeden türevlerinin matematiksel temeli, özellikle Liouville, Riemann, Caputo olmak üzere Miller ve Ross, Podlubny ve diğerleri gibi öncülerin ortak çabalarıyla atılmıştır (Miller ve Ross,1993). Kesirli mertebeli hesap teorisi pratik projelerle ilişkilendirilmiştir. Kimyasal fizik, kaos teorisi, elektrodinamik, optik ve sinyal işleme gibi çeşitli uygulama alanlarında kesirli hesap sıklıkla kullanılmaktadır (Veeresha vd., 2019; ,Prakasha vd., 2019). Yukarıdaki olaylarda ortaya çıkan keyfi mertebeden diferansiyel denklemlerin analitik ve sayısal çözümleri, günlük hayatta ortaya çıkan doğrusal olmayan problemlerin doğasını ve davranışını tanımlamada önemli bir rol oynamaktadır.

Kesirli türevin klasik türevden en önemli farkı, kesirli türevin tek bir tanımının olmamasıdır. Kesirli analizde birden fazla türev tanımının varlığı problemin türüne en uygun olanının kullanılması olanağını sağlamaktadır. Bu türev tanımlarından bazıları Liouville, Riemann, Weyl, Fourier, Laplace, Lagrange, Euler, Abel, Lacroix, Grünwald ve Letnikov gibi tanımlardır. Bu tanımların en çok kullanılanları Riemann - Liouville, Grünwald - Letnikov ve Caputo kesirli türevleridir (Kilbas vd, 2006; Miller ve Ross, 1993; Podlubny, 1999). Literatürde olan bu tanımlar birbirleri arasında geçişler

sağlamasına rağmen fiziksel yorumları açısından farklılıklar göstermektedir.

Kesirli mertebeden modeller, türevlenebilirlik kavramlarını genişletir, uzay ve zaman kesirli mertebe türevleri aracılığıyla yerel olmayan ve sistem belleği etkilerini birleştirir. Bu özellikler, sorunu küçük ve daha küçük bölümlere ayırmadan olayları çoklu zaman ve uzay ölçeklerinde modellememize izin verir. Kesirli dereceli bir modelin çoklu ölçekleri ne ölçüde kapsayacağı, kesirli türevlerin karmaşık fenomenlerin göze çarpan özelliklerini sınırlayabileceği veya yakalayabileceği temeldeki bir varsayıma dayanır. Ayrıca, klasik türevler doğası gereği yereldir, yani klasik türevleri kullanarak bir noktanın komşuluğundaki değişiklikleri tanımlayabiliriz, ancak kesirli türevleri kullanarak bir aralıktaki değişiklikleri tanımlayabiliriz. Bu özellik, deprem titreşimleri, difüzyon, esneklik, sinyal analizi, kuantum mekaniği ve diğerleri gibi daha fazla fiziksel fenomeni simüle etmek için keyfi mertebeden türevlerini uygun hale getirir. Disiplinler arası alanlarda birçok sistemin kesirli diferansiyel denklemler ile daha doğru ve daha rahat bir şekilde tanımlanabileceği bulunmuştur. Son zamanlarda, kesirli türevler, çeşitli karmaşık problemleri analiz etmek için yaygın olarak kullanılmaktadır. Örneğin, visko-elastik malzemelerin matematiksel modellenmesi, kesirli hesap yardımıyla incelenmektedir. Uyumlu türevi olan kesirli Burgers tipi denklemlerin yaklaşık analitik çözümü artık güç serileri yöntemi yardımıyla araştırılmıştır (Kurt vd., 2019). Polinom yöntemi için tam bir ayırım sisteminin yardımıyla zaman-kesirli birleştirilmiş Drinfel'd–Sokolov–Wilson denklemlerinin tam hareket eden dalga çözümlerini elde etmişlerdir (Singh vd., 2018). Zaman-kesirli Phi-4 denkleminin yeni analitik çözümü, Rezazadeh vd. nin 2018'de yaptığı çalışmadaki uyumlu kesirli türev aracılığıyla genişletilmiş doğrudan cebirsel yöntem kullanılarak araştırılmıştır ve birçok bilim insanı, kesirli hesabı karmaşık problemlerin doğasını anlamak için bir araç olarak düşünmektedir (Hilfer, 2000; Prakasha vd., 2019).

Son zamanlarda, kesirli hesap birçok gerçek problemin modellenmesinde kullanılmaktadır. Dünya problemlerinin kesirli matematiksel modellenmesi hızlı bir şekilde artmaktadır. Dolayısıyla, birçok araştırmacı kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemler üzerinde çalışmaktadır. Kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemler, farklı bilim alanlarında birçok olayı analiz etmek için kullanılmaktadır (Baleanu vd., 2009).

Değiştirilmiş deneme denklemi yöntemi, zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denklemine uygulanmıştır. Zayıf Galerkin (WG) sonlu elemanlar yöntemi, bir sınıf zaman kesirli genelleştirilmiş Burgers denklemini incelemek için kullanılmıştır. Genelleştirilmiş zaman-kesirli burgers denklemini çözmek için doğrusal bir kapalı sonlu

fark şeması kullanılmıştır. Zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denklemini çözmek için yerel süreksiz Galerkin yöntemi kullanılmıştır. Lie grup analizi yöntemi, zaman-kesirli genelleştirilmiş Burgers denklemine uygulanmıştır (Bulut vd., 2013; Wang vd., 2021; Li vd., 2016; Li vd., 2021; Wang vd., 2016).

Öte yandan, son otuz yılda bir takım keşfedilen yeni yöntemler, yeni hesaplama algoritmaları ve geliştirilen sembolik programlamalar doğrusal olmayan kesirli mertebeden diferansiyel denklem sistemlerini açıklamaya yardımcı olmuştur. Doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemler için analitik ve sayısal çözümler oldukça önemlidir. Çünkü karmaşık olayların çoğu matematiksel olarak doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemlerle modellenmektedir. Bununla bağlantılı olarak literatürde bu denklemleri çözmek için birçok yöntem bulunmaktadır. Bu yöntemler; Adomian ayrıştırma yöntemi (AAY) (Wazwaz, 1999), diferansiyel dönüşüm metodu (DDM) (Ayaz, 2004), homotopi analiz yöntemi (HAY) (Liao, 2004), varyasyonel yineleme yöntemi (VYY) (He,1999), homotopi pertürbasyon metodu (HPM) (He,2003)' dir.

Mohand ve Mahgoub (2017), Mohand dönüşümü adı verilen yeni bir integral dönüşümü bulmuşlardır. Mekanik ve elektrik devresi problemleri Mohand dönüşümünün kullanılmasıyla çözülmüştür. Mohand dönüşümünü kullanarak ikinci dereceden doğrusal Volterra integral denklemlerini çözmek için bir yöntem sağlanmaktadır. Doğrusal kısmi integral diferansiyel denklemleri ele almak için Mohand dönüşümünden faydalanılmıştır. Doğrusal Volterra integral diferansiyel denklemlerinin çözümünde Mohand dönüşümünün kullanımı sunulmaktadır (Mohand ve Mahgoub, 2017; Aggarwal vd., 2018; Aggarwal vd., 2018; Sathya ve Rajeswari, 2018; Kumar vd., 2018; Kumar vd., 2018).

Lineer olmayan gecikmeli KDD' ler için Chebyshev psödospektral metodu (Zubik-Kowal, 2000), homotopi analizi metodu (Alkan, 2022) gibi oransal gecikmeli kesirli mertebeden KDD' leri çözme metotları ile ilgili literatürde az sayıda makale vardır. Abazari ve Ganji (2011) indirgenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi kullanarak oransal gecikmeli KDD' lerin yaklaşık çözümlerini bulmuşlardır. Abazari ve Kilicman (2014) diferansiyel dönüşüm yöntemi ile oransal gecikmeli lineer olmayan integro-diferansiyel denklemleri incelemişlerdir. Sakar vd. (2016), Biazar ve Ghanbari (2012) oransal gecikmeli uyumlu zaman-kesirli mertebeden KDD' lerin analitik çözümlerini bulmak için homotopi pertürbasyon metodunu (HPM) kullanmışlardır. Chen ve Wang (2010) varyasyonel iterasyon yöntemi ile oransal gecikmeli nötr fonksiyonel diferansiyel denklemi çözmüşlerdir. Singh ve Kumar (2017), oransal gecikmeli uyumlu zaman-kesirli

mertebeden KDD' lerin başlangıç değerli otonom sisteminin alternatif varyasyonel iterasyon yöntemi ile alternatif bir yaklaşık çözümünü elde etmişlerdir.

1992' de Liao Shijun, homotopi adı verilen temel diferansiyel geometri ve topoloji kavramını uygulayarak homotopi analiz yöntemini (HAY) (Liao, 1992; Liao, 1999) önermiştir. HAY, bilim ve teknolojide ortaya çıkan problemler için doğrusallaştırma ve pertürbasyon olmaksızın yaklaşık analitik çözümü bulmak için etkin bir şekilde kullanılmıştır. Bu nedenle, bu sınırlamaların üstesinden gelmek için, bu algoritmanın hali hazırda mevcut dönüştürme teknikleri ile bir kombinasyonuna ihtiyaç duyulmuştur. Singh ve arkadaşları tarafından (Singh vd., 2016) q-homotopi analiz metodu (q-HAM) ve Laplace dönüşümünün bir birleşimi olan, q-homotopi analiz dönüşüm metodu (q-HADM) önerilmiştir. Bu yöntem, izin verilen kısa bir bölgede hızlı bir şekilde kesin çözüme yakınsayan seri çözümü kontrol etmekte ve sonuca ulaştırmaktadır. Önerilen tekniğin geliştirilmesi, doğrusal ve doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemleri hem sayısal hem de analitik olarak çözmek için iki güçlü algoritmayı birleştirme kapasitesidir. Yarı-analitik tekniklerle Laplace dönüşümünün, bilim ve teknolojide ortaya çıkan doğrusal olmayan karmaşık modeller ve olayların çözümlerini hesaplamak için daha az işlem zamanı gerektirdiğini ortaya koymaktadır. q-HADM çözümü, iki yardımcı parametre $\hbar$ ve n' yi içerir, bu da çözümün yakınsamasını ayarlanmasına ve kontrol edilmesine olanak sağlamaktadır. Önerilen tekniğin, elde edilen sonuçların büyük verimliliğini korurken, diğer geleneksel tekniklerle karşılaştırıldığında zaman ve işin hesaplanmasını azaltabileceğini söyleyebiliriz. Son zamanlarda, Srivastava ve arkadaşları gibi birçok bilin insanı, kesirli mertebeden titreşim denklemi modeli incelemektedir (Srivastava vd., 2017), Singh ve arkadaşları tarafından, ısı-dağılım denkleminin çözümünü bulmak için bu yöntem kullanılır (Singh vd., 2018), Bulut ve arkadaşları rastgele mertebeden HIV enfeksiyonu modelini analiz etmişlerdir (Bulut vd., 2018), Prakash ve arkadaşları kesirli mertebeden çok boyutlu telgraf denklemi için yaklaşık analitik çözümü bulmuşlardır (Prakash vd., 2019), Kumar ve arkadaşları Lienard denkleminin modelini analiz etmişlerdir (Kumar vd., 2018) ve birçok yazar doğrusal olmayan problemler için yaklaşık analitik çözüm bulmaktadırlar (Veeresha vd., 2019; Prakash vd., 2019).

Bu tezde, iki yeni sayısal metot önerilmektedir. Bu metotlardan ilki; q-homotopi analiz dönüşüm metodunu, uyumlu kesirli Mohand dönüşümü ile birleşmesinden oluşan uyumlu q-Mohand homotopi analiz dönüşüm metodu (Uq-MHADMD), diğeri ise, Adomian ayrıştırma metodunun, uyumlu kesirli Mohand dönüşümü ile birleşmesinden oluşan uyumlu kesirli Mohand ayrıştırma metodudur. Önerilen yöntemler, yeni hibrit metotlardır. Oransal gecikmeli lineer olmayan uyumlu

zaman kesirli genelleştirilmiş Burgers (UZKGB) denklemlerini önerilen metotlar kullanılarak yeni sayısal çözümleri elde edilmektedir. Sunulan metotların etkin ve güvenilir olduğunu göstermek üzere nümerik simülasyonlar üretilmiştir. Mutlak hata hesapları yapılmaktadır. Yeni üretilen her iki metodun da oransal gecikmeli lineer olmayan uyumlu kesirli kısmi diferansiyel denklemleri incelemek için etkin olduğu öngörülmektedir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu kısımda tezde kullanılan temel tanım ve teoremler verilmektedir.

Tanım 2.1 (Abdeljawad, 2015; Khalil vd., 2014): $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. O halde, $\forall x > 0$ için, f' in α mertebeden uyumlu kesirli türevi:

$$T_{\alpha}(f)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon x^{1-\alpha}) - f(x)}{\varepsilon}, \quad \alpha \in (0, 1] \quad (1)$$

ile tanımlıdır.

Teorem 2.1 (Khalil vd., 2014): $\alpha \in (0, 1]$ ve f, g bir $x > 0$ noktasında α -türevlenebilir olsun. Öyleyse,

$$\text{a) } \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ için, } T_{\alpha}(af + bg) = aT_{\alpha}(f) + bT_{\alpha}(g), \quad (2)$$

$$\text{b) } \forall p \in \mathbb{R} \text{ için, } T_{\alpha}(x^p) = px^{p-1}, \quad (3)$$

$$\text{c) } f(t) = \lambda \text{ için } T_{\alpha}(\lambda) = 0, \quad (4)$$

$$\text{d) } T_{\alpha}(fg) = fT_{\alpha}(g) + gT_{\alpha}(f), \quad (5)$$

$$\text{e) } T_{\alpha}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT_{\alpha}(f) - fT_{\alpha}(g)}{g^2}, \quad (6)$$

$$\text{f) } f, \text{ diferansiyellenebilir ise } T_{\alpha}(f)(t) = t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} f(t). \quad (7)$$

Tanım 2.2 (Khalil vd., 2014): f, x 'te n -defa türevlenebilir olsun. $\forall x > 0$ için, f 'in α mertebeli uyumlu kesirli türevi şu şekilde tanımlıdır;

$$T_{\alpha}(f)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f^{([\alpha]-1)}(x + \varepsilon x^{([\alpha]-\alpha)}) - f^{([\alpha]-1)}(x)}{\varepsilon}, \quad \alpha \in (n, n + 1]. \quad (8)$$

Burada, $[\alpha]$ gösterimi α 'ya eşit veya daha büyük en küçük tamsayıdır.

Teorem 2.2 (Khalil vd., 2014): f, x 'te n -defa türevlenebilir olsun. Öyleyse, $\forall x > 0, \alpha \in (n, n + 1]$ için

$$T_\alpha(f(x)) = x^{[\alpha]-\alpha} f^{[\alpha]}(x) \quad (9)$$

'tir.

Tanım 2.3 (Mittag-Leffler, 1903): Mittag-Leffler fonksiyonu,

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{na}}{\Gamma(na + 1)}. \quad (10)$$

ile verilir. Mittag-Leffler fonksiyonu E_α ile gösterilir.

Tanım 2.4 $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere, $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli fonksiyon olsun. f 'nin α derecesindeki uyumlu kesirli Mohand dönüşümü

$${}_cM_\alpha[f(t)] = R_\alpha(r) = r^2 \int_0^{\infty} \exp\left(\frac{-rt^\alpha}{\alpha}\right) f(t) t^{\alpha-1} dt. \quad (11)$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 2.5 $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere, $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli fonksiyon olsun. $f(t)$ 'nin uyumlu kesirli mertebeden türevinin uyumlu kesirli Mohand dönüşümü

$${}_cM_\alpha[T_\alpha f(t)](v) = rR_\alpha(r) - r^2 f(0). \quad (12)$$

şeklinde tanımlıdır.

3. ÜRETİLEN METOTLAR

Bu kısımda, tezde kullanılan yöntemler verilmektedir.

3.1. Uyumlu q-Mohand Homotopi Analiz Dönüşüm Metodu (Uq-MHADMD)

$${}_tT_\alpha w(x, t) + Aw(\rho_i x, \sigma_i t) + Hw(\rho_i x, \sigma_i t) = f(x, t), t > 0, n - 1 < \alpha \leq n \quad (13)$$

Uyumlu kesirli mertebeden lineer olmayan oransal gecikmeli kısmi diferansiyel denklemini ele alalım. Burada A lineer operatörü, H lineer olmayan operatörü, $f(x, t)$ kaynak terimini göstermektedir. ${}_tT_\alpha$, α . mertebeden bir uyumlu kesirli türev operatörüdür.

Şimdi, (13) denkleminin uyumlu Mohand dönüşümünü uygulayarak ve başlangıç koşulunu kullanarak,

$$rR_\alpha(r) - r^2 w(x, 0) + {}_cM_\alpha[Aw(\rho_i x, \sigma_i t) + Hw(\rho_i x, \sigma_i t)] = {}_cM_\alpha[f(x, t)] \quad (14)$$

eşitliği elde edilir.

(14) denklemini tekrar düzenlenirse,

$${}_cM_\alpha[w(x, t)] - rw(x, 0) + \frac{1}{r} {}_cM_\alpha[Aw(\rho_i x, \sigma_i t) + Hw(\rho_i x, \sigma_i t)] - \frac{1}{r} {}_cM_\alpha[f(x, t)] = 0 \quad (15)$$

elde edilir. Reel $\varphi(x, t; q)$ fonksiyonu için homotopi analiz metodu (HAM) yardımıyla doğrusal olmayan operatörü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$N[\varphi(x, t; q)] = {}_cM_\alpha[\varphi(x, t; q)] - r\varphi(x, t; q) (0^+) + \frac{1}{r} ({}_cM_\alpha[A\varphi(\rho_i x, \sigma_i t; q)] + {}_cM_\alpha[H\varphi(\rho_i x, \sigma_i t; q)] - \frac{1}{r} {}_cM_\alpha[f(x, t)]). \quad (16)$$

Burada $q \in [0, \frac{1}{n}]$, dir.

Aşağıdaki gibi bir homotopi kurulur:

$$(1 - nq) {}_cM_\alpha[\varphi(x, t; q) - w_0(x, t)] = hqH^*(x, t)H[\varphi(\rho_i x, \sigma_i t; q)]. \quad (17)$$

Burada, $h \neq 0$ bir yardımcı parametredir ve ${}_cM_\alpha$, uyumlu kesirli Mohand dönüşümünü göstermektedir. $q = 0$ ve $q = \frac{1}{n}$ için, (9) denklemindeki sonuçlar sırasıyla sağlanır:

$$\varphi(x, t; 0) = w_0(x, t), \varphi(x, t; \frac{1}{n}) = w(x, t). \quad (18)$$

Bu nedenle, q 'yu 0' dan $\frac{1}{n}$ ye yükselterek, $\varphi(x, t; q)$ çözümü $w_0(x, t)$ 'den $w(x, t)$ çözümüne yakınsar. Taylor teoremi q civarında açılıp $\varphi(x, t; q)$ 'yu genişleterek, şu ifade elde edilir:

$$\varphi(x, t; q) = w_0(x, t) + \sum_{i=1}^{\infty} w_m(x, t)q^m. \quad (19)$$

Burada,

$$w_m(x, t) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \varphi(x, t; q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} \quad (20)$$

dır. (18) denklemi, $q = \frac{1}{n}$ 'de uygun n ve h için $w_0(x, t)$ 'ye yakınsar. Ardından, orijinal lineer olmayan denkleminin çözümlerinden biri

$$w(x, t) = w_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} w_m(x, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m \quad (21)$$

şeklinde bulunur.

Sıfırıncı mertebeden deformasyon denkleminin q 'ya göre m –kez türevi alınır ve $m!$ ye bölersek, sonra $q = 0$ için

$${}_cM_\alpha[w_m(x, t) - k_m w_{m-1}(x, t)] = h H^*(x, t) \mathcal{R}_m(\vec{w}_{m-1}) \quad (22)$$

olarak bulunur.

Burada vektörler

$$\vec{w}_m = \{w_0(x, t), w_1(x, t), \dots, w_m(x, t)\} \quad (23)$$

ile tanımlıdır. (21) denklemin ters Shehu dönüşümü uygulandığında

$$w_m(x, t) = k_m w_{m-1}(x, t) + h ({}_cM_\alpha)^{-1} [H^*(x, t) \mathcal{R}_m(\vec{w}_{m-1})] \quad (24)$$

eşitliği bulunur. Burada,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_m(\vec{w}_{m-1}) = & {}_cM_\alpha[w_{m-1}(x, t)] - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) r w_0(x, t) + \frac{1}{r} {}_cM_\alpha[A w_{m-1}(\rho_i x, \sigma_i t) \\ & + H_{m-1}(x, t) - f(x, t)] \end{aligned} \quad (25)$$

dir.

Burada

$$k_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1, \\ n, & m > 1 \end{cases} \quad (26)$$

dir. Burada, H_m homotopi polinomudur ve aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$H_m^* = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \varphi(x, t; q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} \quad \text{ve}$$

$$\varphi(x, t; q) = \varphi_0 + q\varphi_1 + q^2\varphi_2 + \dots. \quad (27)$$

(23) ve (24) denklemleri kullanılarak,

$$w_m(x, t) = (k_m + h)w_{m-1}(x, t) - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right)rw_0(x, t) + h\left({}_cM_\alpha\right)^{-1}$$

$$\times \left[\left(\frac{1}{r}\right){}_cM_\alpha[Aw_{m-1}(\rho_i x, \sigma_i t) + H_{m-1}(x, t) - f(x, t)]\right]. \quad (28)$$

şeklinde bulunur. Uq-MHADMM kullanılarak seri çözümü

$$w(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} w_m(x, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m \quad (29)$$

olarak bulunur.

3.2. Uyumlu Kesirli Mohand Ayırıştırma Metodu (UKMAM)

$${}_tT_\alpha w(x, t) + Aw(\rho_i x, \sigma_i t) + Hw(\rho_i x, \sigma_i t) = f(x, t), t > 0, n - 1 < \alpha \leq n \quad (30)$$

uyumlu kesirli mertebeden lineer olmayan oransal gecikmeli kısmi diferansiyel denklemini ele alalım. Burada A lineer operatörü, H lineer olmayan operatörü, $f(x, t)$ dış kuvveti göstermektedir. ${}_tT_\alpha$, α -yıncı mertebeden bir uyumlu kesirli türev operatörüdür. Şimdi, (29) denklemine uyumlu kesirli Mohand dönüşümünü uygulayarak ve başlangıç koşulunu kullanarak,

$$rR_\alpha(r) - r^2w(x, 0) + {}_cM_\alpha[Aw(\rho_i x, \sigma_i t) + Hw(\rho_i x, \sigma_i t)] = {}_cM_\alpha[f(x, t)] \quad (31)$$

eşitliği bulunmaktadır. (30) denklemi düzenlendiğinde,

$${}_cM_\alpha[w(x, t)] - rw(x, 0) + \frac{1}{r} {}_cM_\alpha[Aw(\rho_i x, \sigma_i t) + Hw(\rho_i x, \sigma_i t)] - \frac{1}{r} {}_cM_\alpha[f(x, t)]$$

$$= 0 \quad (32)$$

olarak elde edilir.

(31) denklemine ters uyumlu kesirli Mohand dönüşümü uygulanırsa,

$$w(x, t) = A(x, t) - \left({}_cM_\alpha \right)^{-1} \left\{ \frac{1}{r} {}_cM_\alpha [Aw(\rho_i x, \sigma_i t) + Hw(\rho_i x, \sigma_i t)] \right\} \quad (33)$$

olur. Burada $A(x, t)$, başlangıç koşulundan ve homojen olmayan terimden elde edilen terimi göstermektedir. Şimdi, sonsuz seri çözümünün şu şekilde olduğunu varsayalım:

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x, t) \quad (34)$$

dir.

(32) ve (33) denklemlerini kullanarak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x, t) = A(x, t) - \left({}_cM_\alpha \right)^{-1} \left\{ \frac{1}{r} {}_cM_\alpha \left[A \sum_{n=0}^{\infty} w_n(\rho_i x, \sigma_i t) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n(w_n(\rho_i x, \sigma_i t)) \right] \right\} \quad (35)$$

elde edilir. Burada B_n , Adomian polinomunu göstermektedir. (34) denkleminin her iki tarafı karşılaştırılırsa,

$$w_0(x, t) = A(x, t), \quad (36)$$

$$w_1(x, t) = - \left({}_cM_\alpha \right)^{-1} \left\{ \frac{1}{r} {}_cM_\alpha [w_0(\rho_i x, \sigma_i t) + B_0] \right\}, \quad (37)$$

$$w_2(x, t) = - \left({}_cM_\alpha \right)^{-1} \left\{ \frac{1}{r} {}_cM_\alpha [w_1(\rho_i x, \sigma_i t) + B_1] \right\}, \quad (38)$$

$\vdots$

olur. Benzer şekilde, genelleştirilirse

$$w_{n+1}(x, t) = - \left({}_cM_\alpha \right)^{-1} \left\{ \frac{1}{r} {}_cM_\alpha [w_n(\rho_i x, \sigma_i t) + B_n] \right\}, m \geq 1 \quad (39)$$

elde edilir.

Böylece, yaklaşık çözüm $w(x, t)$

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x, t) \quad (40)$$

olur.

4.YAPILAN ÇALIŞMALAR

Örnek 4.1 (Sakar vd., 2016; Singh ve Kumar, 2017): Oransal gecikmeli uyumlu zaman kesirli genelleştirilmiş Burgers (UZKGB) denklemini ele alalım.

$$\frac{\partial^\alpha w(x, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + w\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right) \frac{\partial w\left(x, \frac{t}{2}\right)}{\partial x} + \frac{1}{2} w(x, t) \quad (41)$$

dir.

Bu denklemin başlangıç koşulu,

$$w(x, 0) = x \quad (42)$$

dır.

Durum (i) : UZKGB Denklemi için Uq-MHADM çözümü

Şimdi, (40) denklemine uyumlu kesirli Mohand dönüşümünü uygulayarak ve (46) başlangıç koşulunu kullanarak,

$${}_cM_\alpha[w(x, t)] = rw(x, 0) + \frac{1}{r} {}_cM_\alpha \left[\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + w\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right) \frac{\partial w\left(x, \frac{t}{2}\right)}{\partial x} + \frac{1}{2} w(x, t) \right] \quad (44)$$

elde edilir. (42) denklemini kullanılarak lineer olmayan operatör,

$$\begin{aligned} N[\varphi(x, t; q)] = & {}_cM_\alpha[\varphi(x, t; q)] - rx - \frac{1}{r} {}_cM_\alpha \left[\frac{\partial^2 \varphi(x, t; q)}{\partial x^2} \right. \\ & \left. + \varphi\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}; q\right) \frac{\partial \varphi\left(x, \frac{t}{2}; q\right)}{\partial x} + \frac{1}{2} \varphi\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}; q\right) \right] \end{aligned} \quad (44)$$

şeklinde tanımlıdır. Önerilen algoritmayı uygulayarak, m . dereceden deformasyon denklemi şu şekilde tanımlanır:

$${}_cM_\alpha[w_m(x, t) - k_m w_{m-1}(x, t)] = h\mathcal{R}_m[\vec{w}_{m-1}] \quad (45)$$

dir. Burada,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_m[\vec{w}_{m-1}] = & {}_cM_\alpha[\vec{w}_{m-1}(x, t)] - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right)rx - \frac{1}{r} {}_cM_\alpha \left[\frac{\partial^2 w_{m-1}(x, t; q)}{\partial x^2} \right. \\ & \left. + \sum_{r=0}^{m-1} w_r \left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2} \right) \frac{\partial w_{1-r} \left(x, \frac{t}{2} \right)}{\partial x} + \frac{1}{2} w_{m-1} \left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (46)$$

tür. (44) denklemine ters uyumlu kesirli Mohand dönüşümü uygulandığında,

$$w_m(x, t) = k_m w_{m-1}(x, t) + h({}_cM_\alpha)^{-1} \{\mathcal{R}_m[\vec{w}_{m-1}]\} \quad (47)$$

olarak bulunur. Başlangıç koşulunun kullanılmasıyla,

$$w_0(x, t) = x \quad (48)$$

olur.

$w_1(x, t)$ değerini bulmak için, (46) eşitliğinde $m = 1$ koyarak,

$$w_1(x, t) = -xh \frac{t^\alpha}{\alpha} \quad (49)$$

olarak elde edilir.

Benzer olarak, $w_2(x, t)$, değerini bulmak için, (46)-(47) denklemlerine $m = 2$ koyarak

$$w_2(x, t) = -(n + h) \left(hx \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) + \left(\frac{5xh^2 t^{2\alpha}}{82^\alpha \alpha^2} \right) \quad (50)$$

olarak elde edilir. Bu şekilde, diğer terimler elde edilebilir. Böylece, (40) denkleminin Uq-MHADMM çözümü

$$w(x, t) = w_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} w_m(x, t) \left(\frac{1}{n} \right)^m \quad (51)$$

ile tanımlanır.

Eğer (50) denkleminin $\alpha = 1, n = 1, h = -1$ koyarsak, elde edilen sonuç $M \rightarrow \infty$ iken

$$\sum_{m=1}^M w_m(x, t) \left(\frac{1}{n}\right)^m \quad (52)$$

serisi, UZKGB denkleminin analitik çözümü olan

$$w(x, t) = x e^t \quad (53)$$

ye yakınsar.

Durum (ii): UZKGB Denklemi için UKMAM çözümü

Şimdi, (40) denkleminin her iki tarafına uyumlu kesirli Mohand dönüşümü uygulanırsa,

$${}_c M_\alpha [w(x, t)] = r w(x, 0) + \frac{1}{r} {}_c M_\alpha \left[\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + w\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right) \frac{\partial w\left(x, \frac{t}{2}\right)}{\partial x} + \frac{1}{2} w(x, t) \right] \quad (54)$$

olarak elde edilir. (53) denkleminin ters uyumlu kesirli Mohand dönüşümü uygulandığında,

$$w(x, t) = x + ({}_c M_\alpha)^{-1} \left\{ \frac{1}{r} {}_c M_\alpha \left[\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + w\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right) \frac{\partial w\left(x, \frac{t}{2}\right)}{\partial x} + \frac{1}{2} w(x, t) \right] \right\} \quad (55)$$

$w(x, t)$ bilinmeyen fonksiyonunun sonsuz seri çözümünün

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x, t) \quad (56)$$

olduğunu varsayalım. Adomian ayrıştırma metodu kullanılarak,

$$w_0(x, t) = x, \quad (57)$$

$$w_{s+1}(x, t) = ({}_cM_\alpha)^{-1} \left[\frac{1}{r} {}_cM_\alpha \left[\frac{\partial^2 w_s(x, t)}{\partial x^2} + w_s\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right) \frac{\partial w_s\left(x, \frac{t}{2}\right)}{\partial x} + \frac{1}{2} w_s(x, t) \right], s = 0, 1, 2, \dots \right] \quad (58)$$

olarak elde edilir. (56) denkleminin her iki tarafını karşılaştırarak, (41) başlangıç koşulunu ve (56) iterasyonundan faydalanılarak

$$w_0(x, t) = x, \quad (59)$$

$$w_1(x, t) = ({}_cM_\alpha)^{-1} \left[\frac{1}{r} {}_cM_\alpha \left[\frac{\partial^2 w_0(x, t)}{\partial x^2} + w_0\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right) \frac{\partial w_0\left(x, \frac{t}{2}\right)}{\partial x} + \frac{1}{2} w_0(x, t) \right] \right] = x \frac{t^\alpha}{\alpha}, \quad (60)$$

$$w_2(x, t) = -({}_cM_\alpha)^{-1} \left[\frac{1}{r} {}_cM_\alpha \left[\frac{\partial^2 w_1(x, t)}{\partial x^2} + w_1\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right) \frac{\partial w_1\left(x, \frac{t}{2}\right)}{\partial x} + w_1\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right) \frac{\partial w_0\left(x, \frac{t}{2}\right)}{\partial x} + \frac{1}{2} w_1(x, t) \right] \right] = \frac{5xh^2t^{2\alpha}}{82^\alpha\alpha^2}, \quad (61)$$

⋮

iterasyonları elde edilir. Benzer şekilde

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x, t) = w_0(x, t) + w_1(x, t) + w_2(x, t) + \dots = x + x \frac{t^\alpha}{\alpha} + \frac{5xh^2t^{2\alpha}}{82^\alpha\alpha^2} + \dots \quad (62)$$

(62) eşitliğinde $\alpha = 1$ yazılırsa (40) denkleminin UKMAM çözümü

$$w(x, t) = x \left[1 + t + \frac{5t^2}{8.2!} + \dots \right] \quad (63)$$

olarak elde edilir. (61) eşitliği

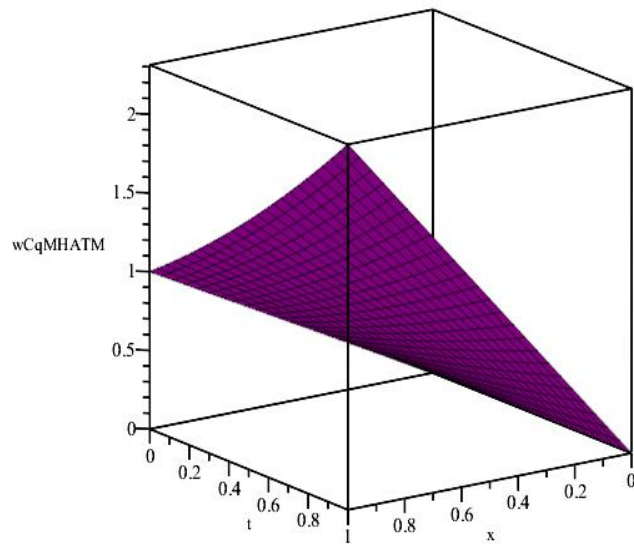
$$w(x, t) = xe^t \quad (64)$$

(40) denkleminin analitik çözümüne yakınsar.

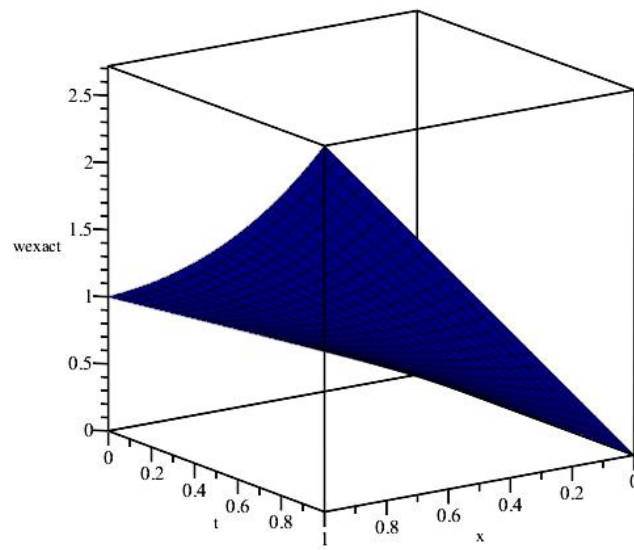
$w(x, t)$ ' nin Uq-MHADM çözümünün, denklemin analitik çözümü ile uyumlu olduğu görülmektedir. Örnekteki $w(x, t)$ için Uq-MHADM çözümünün sonuçlarını daha iyi anlamak için Şekil 1'de gösterilmiştir. Şekil 1'de bu çözümlerin daha yüksek doğrulukta olduğunu gözlemliyoruz. $w(x, t)$ ' nin UKMAM çözümünün, denklemin analitik çözümü ile uyumlu olduğu görülmektedir. Örnekteki $w(x, t)$ için UKMAM çözümünün sonuçlarını daha iyi anlamak için Şekil 2'de gösterilmiştir.



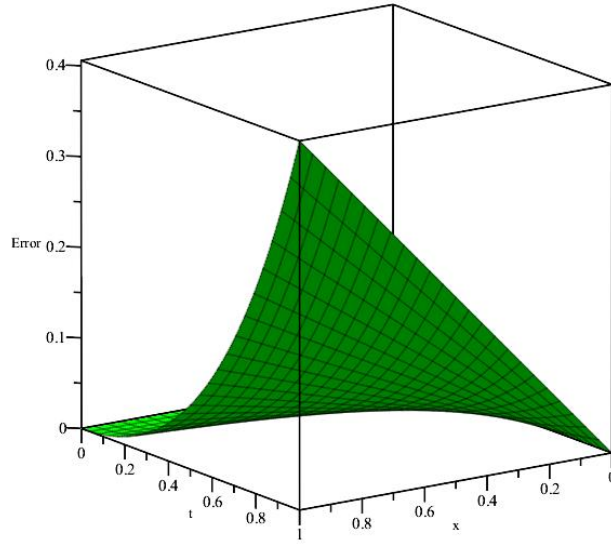
(a)



(b)



(c)



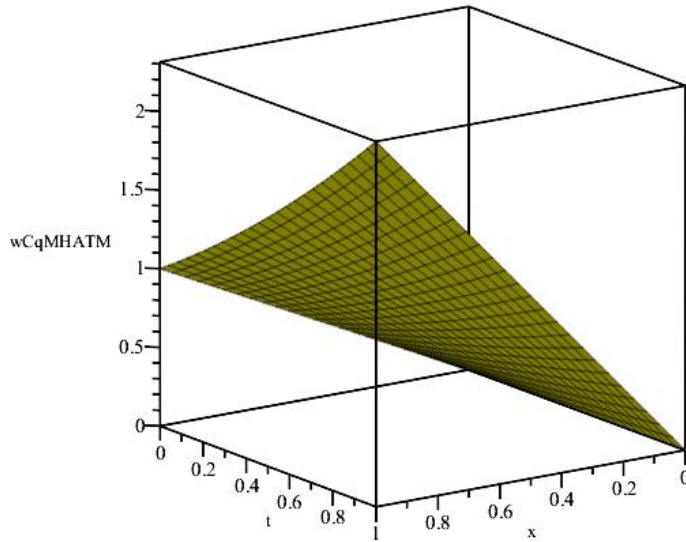
Şekil 1. Örnek 4.1 için $h = -1, n = 1, \alpha = 1$ olmak üzere

(a) Uq-MHADM çözümü

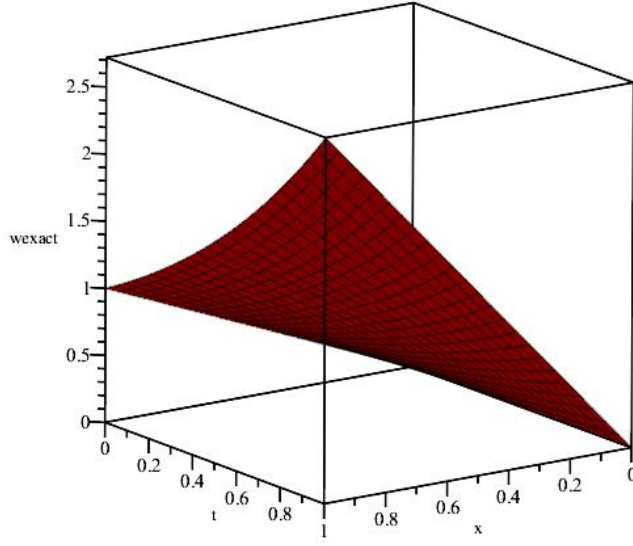
(b) Örnek 4.1 denkleminin analitik çözümü

(c) Mutlak hata = $|w_{analitik} - w_{Uq-MHADM}|$

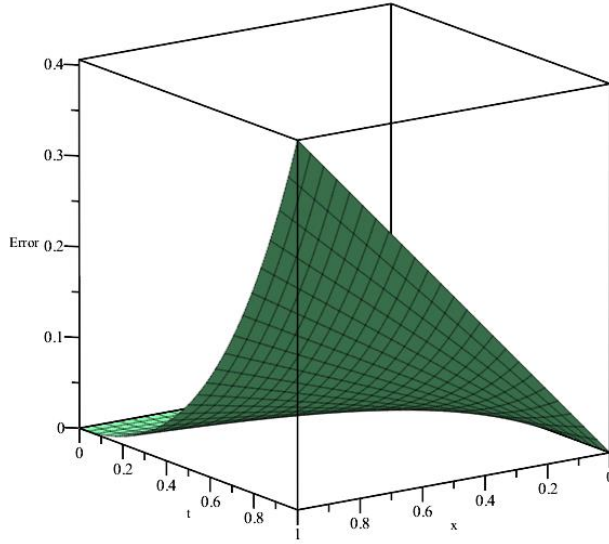
(a)



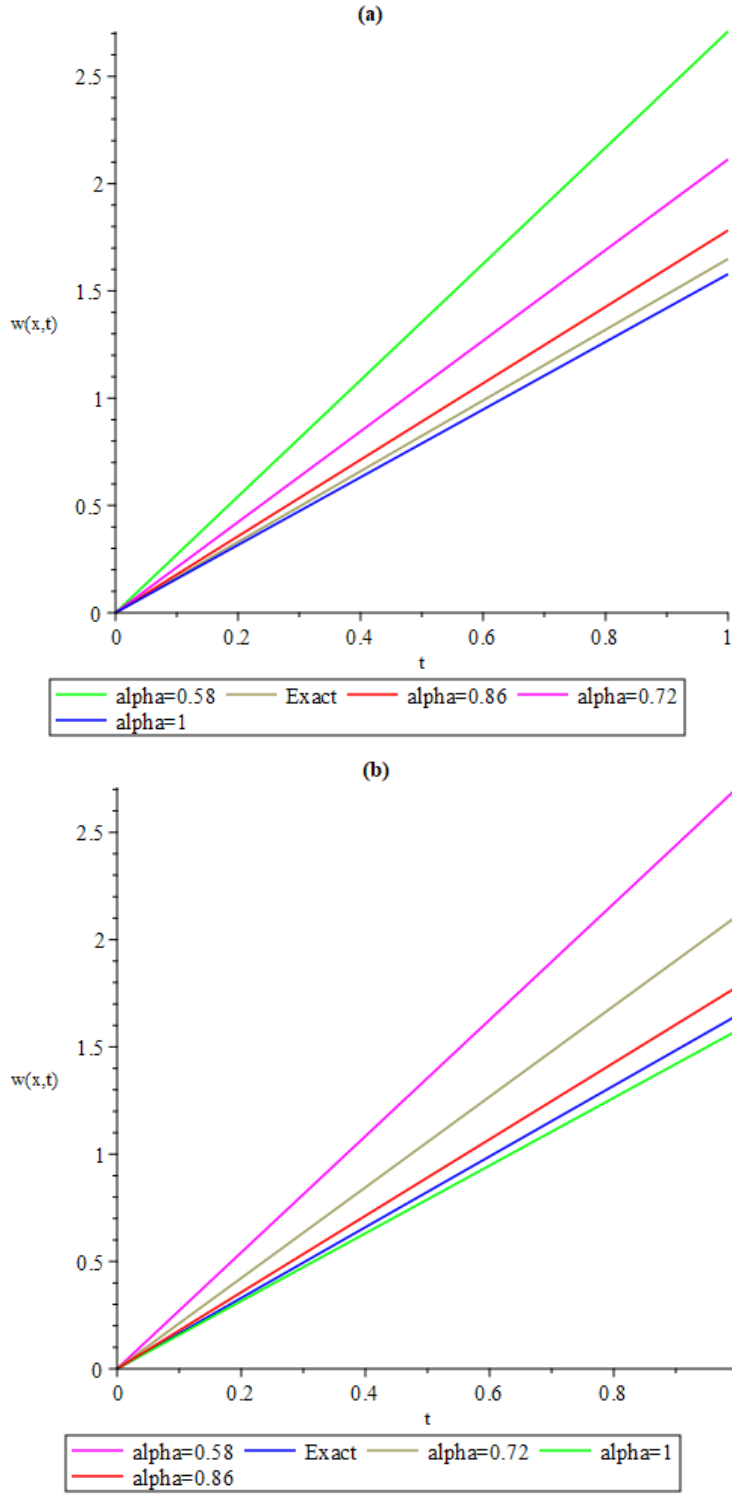
(b)



(c)



Şekil 2. Örnek 4.1 için $\alpha = 1$ olmak üzere
(a) UKMAM çözümü
(b) Örnek 4.1 denkleminin analitik çözümü
(c) Mutlak hata = $|w_{analitik} - w_{UKMAM}|$



Şekil 3. Örnek 4.1 için $t = 0.5, h = -1, n = 1$ olmak üzere farklı α değerleri için
(a) Uq-MHADM çözümleri ile analitik çözümün karşılaştırılması
(b) UKMAM çözümleri ile analitik çözümün karşılaştırılması

Tablo 1. Örnek 4.1 de $\alpha = 1, h = -1$ ve $n = 1$ olmak üzere x' ler sabit iken farklı t' ler için Uq-MHADM, UKMAM ve HPM (Sakar vd., 2016) sayısal çözümlerinin karşılaştırılması

x		t			
		0.025	0.050	0.075	0.1
Uq-MHADM	0.25	1.0×10^{-9}	1.6×10^{-8}	8.1×10^{-8}	2.5×10^{-7}
UKMAM		1.0×10^{-9}	1.6×10^{-8}	8.1×10^{-8}	2.5×10^{-7}
HPM		1.0×10^{-9}	1.6×10^{-8}	8.1×10^{-8}	2.5×10^{-7}
Uq-MHADM	0.50	4.0×10^{-9}	6.4×10^{-6}	3.2×10^{-7}	1.0×10^{-6}
UKMAM		4.0×10^{-9}	6.4×10^{-6}	3.2×10^{-7}	1.0×10^{-6}
HPM		4.0×10^{-9}	6.4×10^{-6}	3.2×10^{-7}	1.0×10^{-6}
Uq-MHADM	0.75	9.1×10^{-9}	1.4×10^{-7}	7.3×10^{-7}	2.2×10^{-6}
UKMAM		9.1×10^{-9}	1.4×10^{-7}	7.3×10^{-7}	2.2×10^{-6}
HPM		9.1×10^{-9}	1.4×10^{-7}	7.3×10^{-7}	2.2×10^{-6}

Örnek 4.2 (Sakar vd., 2016; Singh ve Kumar, 2017): Oransal gecikmeli uyumlu zaman kesirli genelleştirilmiş Burgers (UZKGB) denklemini ele alalım.

$$\frac{\partial^\alpha w(x, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 w\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right)}{\partial x^2} \frac{\partial w\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right)}{\partial x} - \frac{1}{8} \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - w(x, t) \quad (65)$$

dir.

Bu denklemin başlangıç koşulu,

$$w(x, 0) = x^2 \quad (66)$$

dır. Burada $x, t \in [0, 1], 0 < \alpha \leq 1$ dir.

Durum (i) : UZKGB Denklemi için Uq-MHADM çözümü

Şimdi, (65) denklemine uyumlu kesirli Mohand dönüşümünü uygulayarak ve (66) başlangıç koşulunu kullanarak,

$${}_c M_\alpha [w(x, t)] = r w(x, 0) - \frac{1}{r} {}_c M_\alpha \left[\frac{\partial^2 w\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right)}{\partial x^2} \frac{\partial w\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right)}{\partial x} - \frac{1}{8} \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - w(x, t) \right] \quad (67)$$

elde edilir. (67) denklemi kullanılarak lineer olmayan operatör,

$$N[\varphi(x, t; q)] = {}_cM_\alpha[\varphi(x, t; q)] - rx^2 - \frac{1}{r} {}_cM_\alpha \left[\frac{\partial^2 w\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right)}{\partial x^2} \frac{\partial w\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right)}{\partial x} - \frac{1}{8} \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - w(x, t) \right]. \quad (68)$$

şeklinde tanımlıdır. Önerilen algoritmayı uygulayarak, m . dereceden deformasyon denklemi şu şekilde tanımlanır:

$${}_cM_\alpha[w_m(x, t) - k_m w_{m-1}(x, t)] = h\mathcal{R}_m[\vec{w}_{m-1}] \quad (69)$$

dir.

Burada,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_m[\vec{w}_{m-1}] = & {}_cM_\alpha[\vec{w}_{m-1}(x, t)] - \left(1 - \frac{k_m}{n}\right) rx^2 - \frac{1}{r} {}_cM_\alpha \left[\sum_{r=0}^{m-1} \frac{\partial^2 w_r\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right)}{\partial x^2} \right. \\ & \left. \times \frac{\partial w_{1-r}\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right)}{\partial x} - \frac{1}{8} \frac{\partial w_{m-1}(x, t)}{\partial x} - w_{m-1}(x, t) \right] \end{aligned} \quad (70)$$

tür. (69) denklemine ters uyumlu kesirli Mohand dönüşümü uygulandığında,

$$w_m(x, t) = k_m w_{m-1}(x, t) + h({}_cM_\alpha)^{-1} \{\mathcal{R}_m[\vec{w}_{m-1}]\} \quad (71)$$

olarak bulunur. Başlangıç koşulunun kullanılmasıyla,

$$w_0(x, t) = x^2 \quad (72)$$

olur.

$w_1(x, t)$ değerini bulmak için, (71) eşitliğinde $m = 1$ koyarak,

$$w_1(x, t) = hx^2 \frac{t^\alpha}{\alpha} \quad (73)$$

olarak elde edilir.

Benzer olarak, $w_2(x, t)$, değerini bulmak için, (71)-(72) denklemlerine $m = 2$ koyarak

$$w_2(x, t) = (n + h) \left(hx^2 \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) - h^2 \left(\frac{x}{2^{\alpha+1}} - \frac{x}{4} - x^2 \right) \frac{t^{2\alpha}}{2\alpha^2} \quad (74)$$

olarak elde edilir. Bu şekilde, diğer terimler elde edilebilir. Böylece, (65) denkleminin Uq-MHADM çözümü

$$w(x, t) = w_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} w_m(x, t) \left(\frac{1}{n} \right)^m \quad (75)$$

ile tanımlanır.

Eğer (75) denkleminde $\alpha = 1, n = 1, h = -1$ koyarsak, elde edilen sonuç $M \rightarrow \infty$ iken

$$\sum_{m=1}^M w_m(x, t) \left(\frac{1}{n} \right)^m \quad (76)$$

serisi, UZKGB denkleminin analitik çözümü olan

$$w(x, t) = x^2 e^{-t} \quad (77)$$

ye yakınsar.

Durum (ii): UZKGB Denklemi için UKMAM çözümü

Şimdi, (65) denkleminin her iki tarafına uyumlu kesirli Mohand dönüşümü uygulanırsa,

$${}_c M_\alpha [w(x, t)] = r w(x, 0) - \frac{1}{r} {}_c M_\alpha \left[\frac{\partial^2 w\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right)}{\partial x^2} \frac{\partial w\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right)}{\partial x} - \frac{1}{8} \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - w(x, t) \right] \quad (78)$$

olarak elde edilir. (78) denklemin ters uyumlu kesirli Mohand dönüşümü uygulandığında,

$$w(x, t) = x^2 - ({}_c M_\alpha)^{-1} \left\{ \frac{1}{r} {}_c M_\alpha \left[\frac{\partial^2 w\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right)}{\partial x^2} \frac{\partial w\left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}\right)}{\partial x} - \frac{1}{8} \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - w(x, t) \right] \right\} \quad (79)$$

$w(x, t)$ bilinmeyen fonksiyonunun sonsuz seri çözümünün

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x, t) \quad (80)$$

olduğunu varsayalım. Adomian ayrıştırma metodu kullanılarak,

$$w_0(x, t) = x^2, \quad (81)$$

$$w_{s+1}(x, t) = -({}_c M_\alpha)^{-1} \left[\frac{1}{r} {}_c M_\alpha \left[\frac{\partial^2 w_s \left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2} \right)}{\partial x^2} \frac{\partial w_s \left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2} \right)}{\partial x} - \frac{1}{8} \frac{\partial w_s(x, t)}{\partial x} \right. \right. \\ \left. \left. - w_s(x, t) \right] \right], s = 0, 1, 2, \dots \quad (82)$$

olarak elde edilir. (82) denkleminin her iki tarafını karşılaştırarak, (66) başlangıç koşulunu ve (82) iterasyonundan faydalanılarak

$$w_0(x, t) = x^2, \quad (83)$$

$$w_1(x, t) = -({}_c M_\alpha)^{-1} \left[\frac{1}{r} {}_c M_\alpha \left[\frac{\partial^2 w_0 \left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2} \right)}{\partial x^2} \frac{\partial w_0 \left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2} \right)}{\partial x} - \frac{1}{8} \frac{\partial w_0(x, t)}{\partial x} \right. \right. \\ \left. \left. - w_0(x, t) \right] \right] = -x^2 \frac{t^\alpha}{\alpha}, \quad (84)$$

$$w_2(x, t) = -({}_c M_\alpha)^{-1} \left[\frac{1}{r} {}_c M_\alpha \left[\frac{\partial^2 w_1 \left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2} \right)}{\partial x^2} \frac{\partial w_1 \left(\frac{x}{2}, \frac{t}{2} \right)}{\partial x} - \frac{1}{8} \frac{\partial w_1(x, t)}{\partial x} \right. \right. \\ \left. \left. - w_1(x, t) \right] \right] = -\left(\frac{x}{2^{\alpha+1}} - \frac{x}{4} - x^2 \right) \frac{t^{2\alpha}}{2\alpha^2}, \quad (85)$$

⋮

iterasyonları elde edilir. Benzer şekilde

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x, t) = w_0(x, t) + w_1(x, t) + w_2(x, t) + \dots \\ = x^2 - x^2 \frac{t^\alpha}{\alpha} - \left(\frac{x}{2 \cdot 2^\alpha} - \frac{x}{4} - x^2 \right) \frac{t^{2\alpha}}{2\alpha^2} + \dots \quad (86)$$

(86) eşitliğinde $\alpha = 1$ yazılırsa (65) denkleminin UKMAM çözümü

$$w(x, t) = x^2 \left[1 - t + \frac{t^2}{2!} - \dots \right] \quad (87)$$

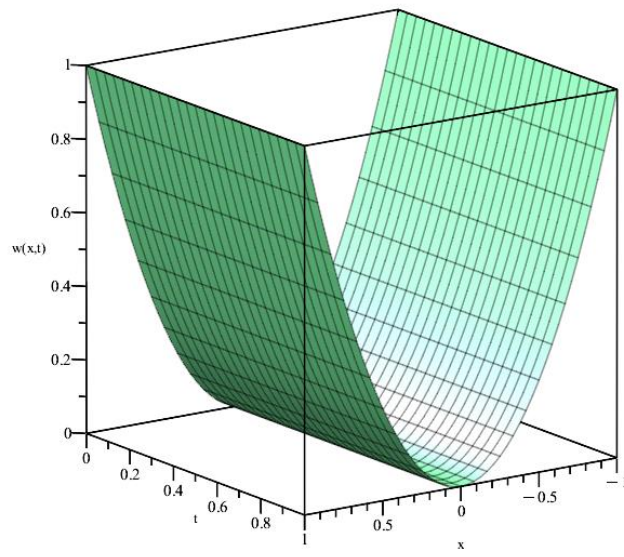
olarak elde edilir. (61) eşitliği

$$w(x, t) = x^2 e^{-t} \quad (88)$$

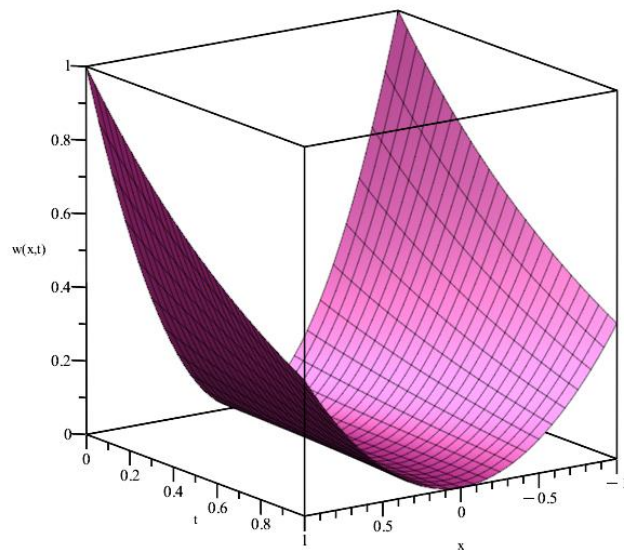
(65) denkleminin analitik çözümüne yakınsar.

$w(x, t)'$ nin Uq-MHADM çözümünün, denklemin analitik çözümü ile uyumlu olduğu görülmektedir. Örnekteki $w(x, t)$ için Uq-MHADM çözümünün sonuçlarını daha iyi anlamak için Şekil 4' te gösterilmiştir. Şekil 4' te bu çözümlerin daha yüksek doğrulukta olduğunu gözlemliyoruz. $w(x, t)'$ nin UKMAM çözümünün, denklemin analitik çözümü ile uyumlu olduğu görülmektedir. Örnekteki $w(x, t)$ için UKMAM çözümünün sonuçlarını daha iyi anlamak için Şekil 5' te gösterilmiştir. Örnekteki $w(x, t)$ için Uq-MHADM, UKMAM çözümlerinin iki boyutlu grafikleri Şekil 5' te gösterilmiştir.

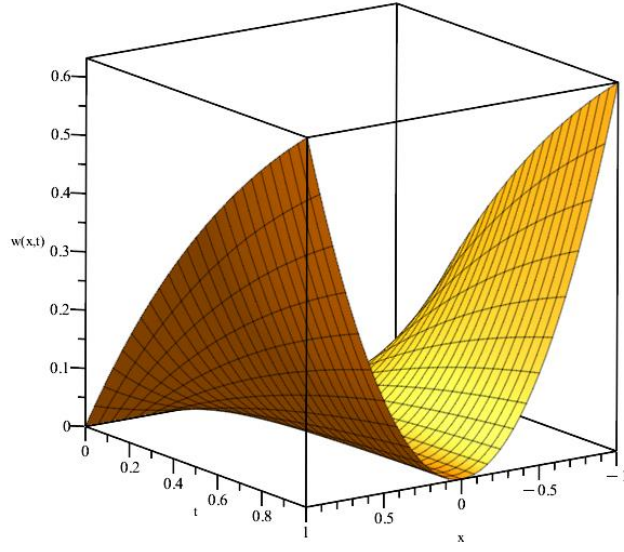
(a)



(b)



(c)



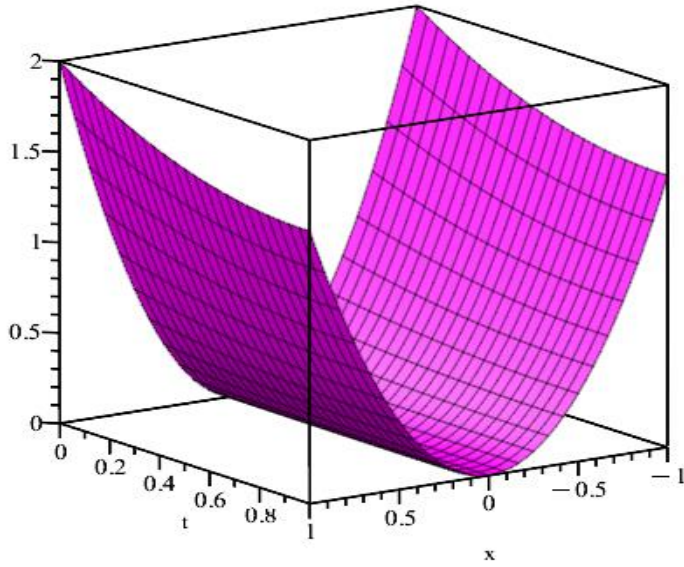
Şekil 4. Örnek 4.2 için $h = -1$, $n = 1$, $\alpha = 1$ olmak üzere

(a) Uq-MHADM çözümü

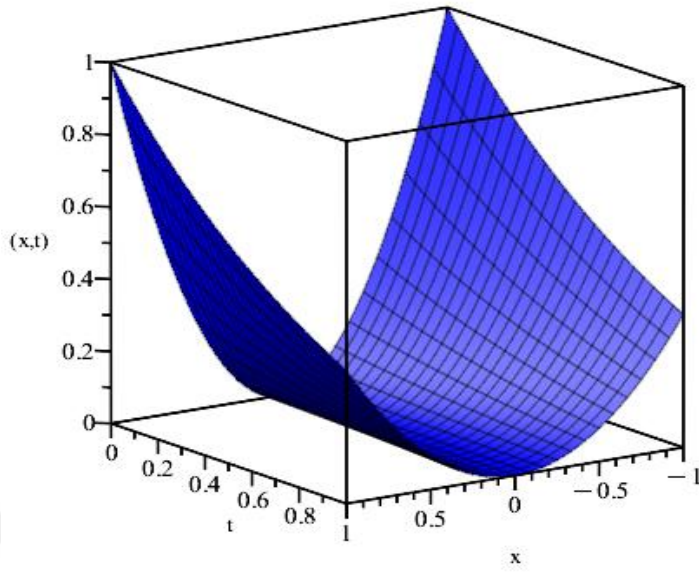
(b) Örnek 4.2 denkleminin analitik çözümü

(c) Mutlak hata = $|w_{analitik} - w_{Uq-MHADM}|$

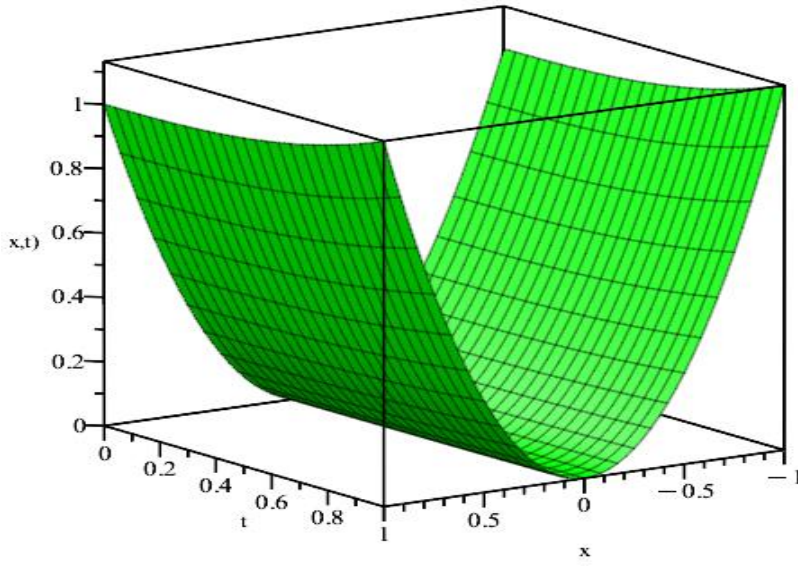
(a)



(b)



(c)

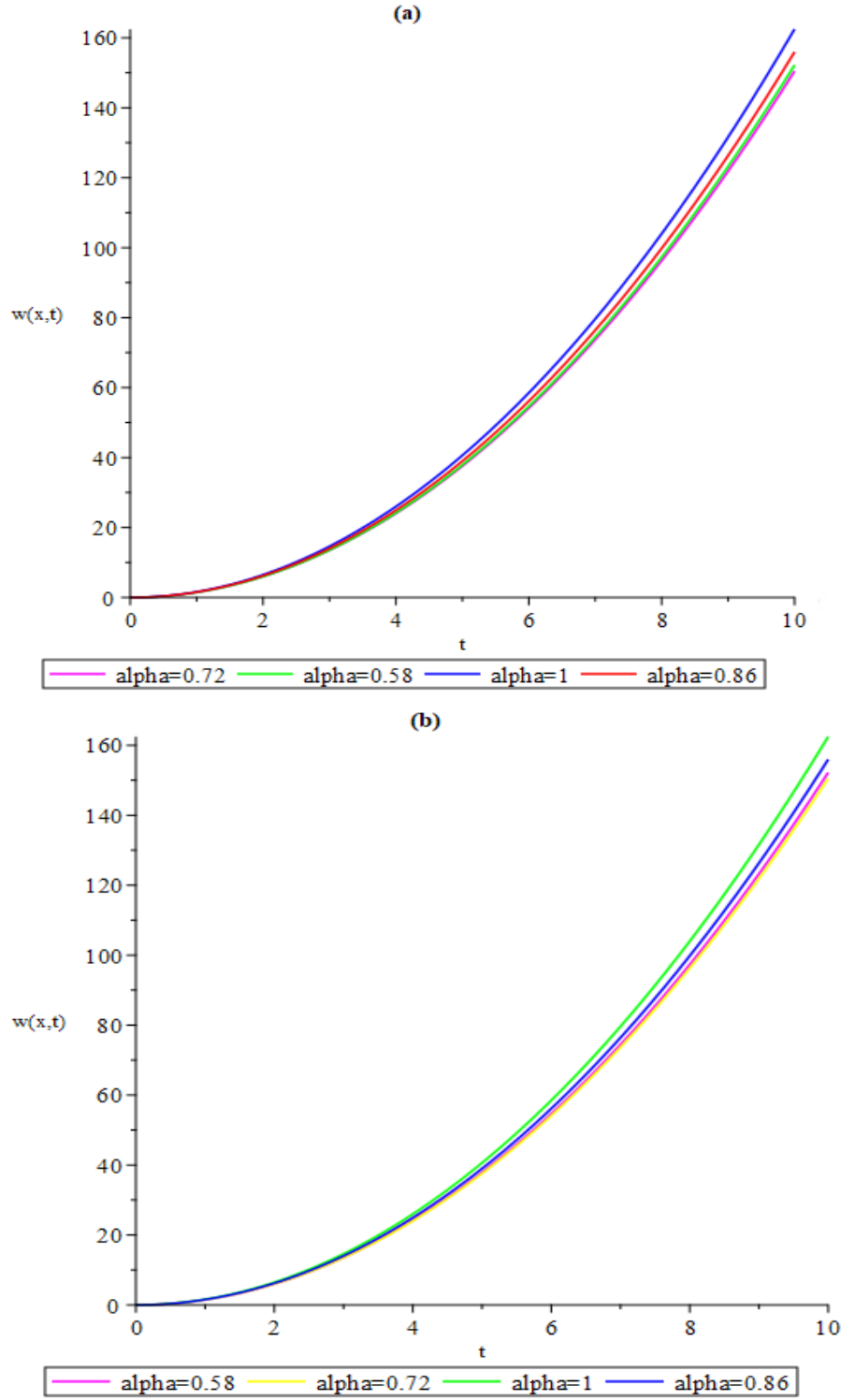


Şekil 5. Örnek 4.2 için $\alpha = 1$ olmak üzere

(a) UKMAM çözümü

(b) Örnek 4.2 denkleminin analitik çözümü

(c) Mutlak hata = $|w_{analitik} - w_{UKMAM}|$



Şekil 6. Örnek 4.2 için $t = 0.5, h = -1, n = 1$ olmak üzere farklı α değerleri için
(a) Uq-MHADM çözümleri ile analitik çözümün karşılaştırılması
(b) UKMAM çözümleri ile analitik çözümün karşılaştırılması

Tablo 2. Örnek 4.2 de $\alpha = 1$, $h = -1$ ve $n = 1$ olmak üzere x' ler sabit iken farklı t' ler için Uq-MHADM, UKMAM ve HPM (Sakar vd., 2016) sayısal çözümlerinin karşılaştırılması

x		t			
		0.025	0.050	0.075	0.1
Uq-MHADM	0.25	1.6×10^{-7}	1.2×10^{-6}	4.3×10^{-6}	1.0×10^{-5}
UKMAM		1.6×10^{-7}	1.2×10^{-6}	4.3×10^{-6}	1.0×10^{-5}
HPM		1.6×10^{-7}	1.2×10^{-6}	4.3×10^{-6}	1.0×10^{-5}
Uq-MHADM	0.50	6.4×10^{-7}	5.1×10^{-6}	1.7×10^{-5}	4.0×10^{-5}
UKMAM		6.4×10^{-7}	5.1×10^{-6}	1.7×10^{-5}	4.0×10^{-5}
HPM		6.4×10^{-7}	5.1×10^{-6}	1.7×10^{-5}	4.0×10^{-5}
Uq-MHADM	0.75	1.4×10^{-6}	1.1×10^{-5}	3.8×10^{-5}	9.1×10^{-5}
UKMAM		1.4×10^{-6}	1.1×10^{-5}	3.8×10^{-5}	9.1×10^{-5}
HPM		1.4×10^{-6}	1.1×10^{-5}	3.8×10^{-5}	9.1×10^{-5}

5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Oransal gecikmeli uyumlu zaman kesirli genelleştirilmiş Burgers (UZKGB) denklemini uyumlu q-Mohand homotopi analiz dönüşüm metodu (Uq-MHADM) ve uyumlu kesirli Mohand ayrıştırma metodu (UKMAM) kullanılarak yeni sayısal çözümler üretilmektedir

Tablo 1' de, (41) eşitliğindeki uyumlu oransal gecikmeli lineer olmayan zaman kesirli genelleştirilmiş Burgers denklemi (UZKGB) için $\alpha=1$ olmak üzere Uq-MHADM, UKMAM ve HPM arasındaki mutlak hata karşılaştırması değerlendirilmektedir. Uq-MHADM' nin 3 boyutlu grafikleri, kesin çözüm ve mutlak hata Şekil 1'de gösterilmektedir. Şekil 2'de UKMAM' ın 3 boyutlu grafikleri, kesin çözüm ve mutlak hata gösterilmektedir. Şekil 3' te, farklı α değerleri için Uq-MHADM, UKMAM ve kesin çözümlerin karşılaştırılması iki boyutlu grafiklerde gösterilmektedir. Tablo 2' de, (61) eşitliğindeki uyumlu oransal gecikmeli lineer olmayan zaman kesirli genelleştirilmiş Burgers denklemi (UZKGB) için $\alpha=1$ olmak üzere Uq-MHADM, UKMAM ve HPM arasındaki mutlak hata karşılaştırması değerlendirilmektedir. Uq-MHADM' nin üç boyutlu grafikleri, kesin çözüm ve mutlak hata Şekil 4' te gösterilmektedir. Şekil 5' te UKMAM, kesin çözüm ve mutlak hatanın üç boyutlu grafikleri gösterilmektedir. Şekil 6' da farklı α değerleri için Uq-MHADM, UKMAM ve kesin çözümlerin karşılaştırılması iki boyutlu grafiklerde gösterilmektedir. Yapılan çalışmalarda, tablo 1 ve tablo 2' de önerilen metotların, HPM kullanılarak elde edilenlere eşdeğer sonuçlar ürettiğini buldu. Sonuçlar, Tablo 6'da sunulan tekniklerin, HPM kullanılarak elde edilenlere eşdeğer sonuçlar ürettiğini göstermektedir. Ayrıca, Uq-MHADM ve UKMAM kullanılarak oransal gecikmeli lineer olmayan zaman kesirli genelleştirilmiş Burgers denkleminin davranışları gözlemlenmiştir. Bununla birlikte, MAPLE yazılımı kullanılarak çözümlerinin iki ve üç boyutlu grafikleri çizdirilmiştir. Sunulan yöntemlerin, oransal gecikmeli uyumlu kesirli lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerini incelemekte, lisansüstü tezlere ve bilimsel çalışmalara katkı sunacağı öngörülmektedir.

KAYNAKÇA

- Abazari, R. ve Ganji, M. (2011). Extended two-dimensional DTM and its application on nonlinear PDEs with proportional delay. *International Journal of Computer Mathematics*, 88(8), 1749-1762.
- Abazari, R. ve Kılıcman, A. (2014). Application of differential transform method on nonlinear integro-differential equations with proportional delay. *Neural Computing and Applications*, 24, 391-397.
- Abdeljawad, T. (2015). On conformable fractional calculus. *Journal of computational and Applied Mathematics*, 279, 57-66.
- Aggarwal, S., Sharma, N. ve Chauhan, R. (2018). Solution of linear Volterra integral equations of second kind using Mohand transform. *International Journal of Research in Advent Technology*, 6(11), 3098-3102.
- Aggarwal, S., Gupta, A. R., Singh, D. P., Asthana, N. ve Kumar, N. (2018). Application of Laplace transform for solving population growth and decay problems. *International Journal of Latest Technology in Engineering, Management & Applied Science*, 7(9), 141-145.
- Alkan, A. (2022). Improving Homotopy Analysis Method with An Optimal Parameter for Time-Fractional Burgers Equation. *Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi Mühendislik ve Doğa Bilimleri Dergisi*, 4(2), 117-134.
- Ayaz, F. (2004). Applications of differential transform method to differential-algebraic equations. *Applied Mathematics and Computation*, 152(3), 649-657.
- Baleanu, D., Deftelri, O. ve Agrawal, O. P. (2009). A central difference numerical scheme for fractional optimal control problems. *Journal of Vibration and Control*, 15(4), 583-597.
- Biazar, J. ve Ghanbari, B. (2012). The homotopy perturbation method for solving neutral functional–differential equations with proportional delays. *Journal of King Saud University-Science*, 24(1), 33-37.
- Bulut, H., Baskonus, H. M. ve Pandir, Y. (2013). The modified trial equation method for fractional wave equation and time fractional generalized Burgers equation. In *Abstract and applied analysis*, 2013.
- Bulut, H., Kumar, D., Singh, J., Swroop, R. ve Baskonus, H. M. (2018). Analytic study for a fractional model of HIV infection of CD4+ T lymphocyte cells. *Math. Nat. Sci.*, 2(1), 33-43.

- Chen, X. ve Wang, L. (2010). The variational iteration method for solving a neutral functional-differential equation with proportional delays. *Computers & Mathematics with Applications*, 59(8), 2696-2702.
- He, J. H. (1999). Variational iteration method—a kind of non-linear analytical technique: some examples. *International journal of non-linear mechanics*, 34(4), 699-708.
- He, J. H. (2003). Homotopy perturbation method: a new nonlinear analytical technique. *Applied Mathematics and computation*, 135(1), 73-79.
- Hilfer, R. (2000). *Applications of fractional calculus in physics*. World scientific.
- Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A. ve Sababheh, M. (2014). A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264, 65-70.
- Kilbas, A. A., Srivastava, H. M. ve Trujillo, J. J. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations* (Vol. 204). Elsevier.
- Kumar, P. S., Gomathi, P., Gowri, S. ve Viswanathan, A. (2018). Applications of Mohand transform to mechanics and electrical circuit problems. *International Journal of Research in Advent Technology*, 6(10), 2838-2840.
- Kumar, P. S., Saranya, C., Gnanavel, M. G. ve Viswanathan, A. (2018). Applications of Mohand transform for solving linear Volterra integral equations of first kind. *International Journal of Research in Advent Technology*, 6(10), 2786-2789.
- Kurt, A., Şenol, M., Tasbozan, O. ve Chand, M. (2019). Two reliable methods for the solution of fractional coupled Burgers' equation arising as a model of polydisperse sedimentation. *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences*, 4(2), 523-534.
- Li, D., Zhang, C. ve Ran, M. (2016). A linear finite difference scheme for generalized time fractional Burgers equation. *Applied Mathematical Modelling*, 40(11-12), 6069-6081.
- Li, C., Li, D. ve Wang, Z. (2021). L1/LDG method for the generalized time-fractional Burgers equation. *Mathematics and Computers in Simulation*, 187, 357-378.
- Liao S. J. (1992). The Proposed Homotopy Analysis Technique for the Solution of Non-linear Problems, PhD, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai, China.
- Liao, S. J. (1999). An explicit, totally analytic approximate solution for Blasius' viscous flow problems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 34(4), 759-778.
- Liao, S. (2004). On the homotopy analysis method for nonlinear problems. *Applied mathematics and computation*, 147(2), 499-513.

- Miller, K. S. ve Ross, B. (1993) An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. Wiley.
- Mittag-Leffler G. M. (1903). Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$. *CR Acad Sci Paris* 137:554–558.
- Mohand, M. ve Mahgoub, A. (2017). The new integral transform “Mohand Transform”. *Advances in Theoretical and Applied Mathematics*, 12(2), 113-120.
- Podlubny, I. (1999). Fractional differential equations, mathematics in science and engineering, Academic Press, New York, 365 p.
- Prakash, A., Goyal, M. ve Gupta, S. (2019). Fractional variational iteration method for solving time-fractional Newell-Whitehead-Segel equation. *Nonlinear Engineering*, 8(1), 164-171.
- Prakasha, D. G., Veeresha, P. ve Baskonus, H. M. (2019). Two novel computational techniques for fractional Gardner and Cahn- Hilliard equations. *Computational and Mathematical Methods*, 1(2), e1021.
- Rezazadeh, H. ve Ziabarya, B. P. (2016). Sub-equation method for the conformable fractional generalized kuramoto sivashinsky equation. *Computational Research Progress in Applied Science & Engineering*, 2(3), 106-109.
- Sakar, M. G., Uludag, F. ve Erdogan, F. (2016). Numerical solution of time-fractional nonlinear PDEs with proportional delays by homotopy perturbation method. *Applied Mathematical Modelling*, 40(13-14), 6639-6649.
- Sathya, S. ve Rajeswari, I. (2018). Applications of Mohand transform for solving linear partial integro-differential equations. *International Journal of Research in Advent Technology*, 6(10), 2841-2843.
- Singh, J., Kumar, D. ve Swroop, R. (2016). Numerical solution of time-and space-fractional coupled Burgers’ equations via homotopy algorithm. *Alexandria Engineering Journal*, 55(2), 1753-1763.
- Singh, B. K., ve Kumar, P. (2017). Fractional variational iteration method for solving fractional partial differential equations with proportional delay. *International journal of differential equations*, 2017, 2017.
- Singh, J., Kumar, D., Baleanu, D. ve Rathore, S. (2018). An efficient numerical algorithm for the fractional Drinfeld–Sokolov–Wilson equation. *Applied Mathematics and Computation*, 335, 12-24.
- Srivastava, H. M., Kumar, D. ve Singh, J. (2017). An efficient analytical technique for fractional model of vibration equation. *Applied Mathematical Modelling*, 45, 192-204.

- Wang, H., Xu, D., Zhou, J. ve Guo, J. (2021). Weak Galerkin finite element method for a class of time fractional generalized Burgers' equation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 37(1), 732-749.
- Wang, X. B., Tian, S. F., Qin, C. Y. ve Zhang, T. T. (2016). Lie symmetry analysis, conservation laws and exact solutions of the generalized time fractional Burgers equation. *Europhysics Letters*, 114(2), 20003.
- Wazwaz, A. M. (1999). A reliable modification of Adomian decomposition method. *Applied mathematics and computation*, 102(1), 77-86.
- Veerasha, P., Prakasha, D. G. ve Baskonus, H. M. (2019). Solving smoking epidemic model of fractional order using a modified homotopy analysis transform method. *Mathematical Sciences*, 13(2), 115-128.
- Zubik-Kowal, B. (2000). Chebyshev pseudospectral method and waveform relaxation for differential and differential-functional parabolic equations. *Applied numerical mathematics*, 34(2-3), 309-328.

ÖZGEÇMİŞ

2001 yılında Niksar Daniřmend Gazi Lisesi'nden mezun oldu. 2012 yılında Gümüşhane Üniversitesi Matematik Mühendisliği Bölümü'nde başladığı lisans eğitimini 2016 yılında tamamladı. 2021 yılında Gümüşhane Üniversitesi Matematik Mühendisliği anabilim dalında tezli yüksek lisans eğitimine başladım.

