



**BAZI ÖZEL FONKSİYONLAR İÇİN
FONKSİYONEL EŞİTSİZLİKLER**

Yücel ÖZKAN

Doktora Tezi

Matematik

2025

(Her hakkı saklıdır.)

T.C.
ERZURUM TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



BAZI ÖZEL FONKSİYONLAR İÇİN
FONKSİYONEL EŞİTSİZLİKLER

DOKTORA TEZİ
Yücel ÖZKAN

Danışman: Prof. Dr. Murat ÇAĞLAR
İkinci Danışman: Prof. Dr. Erhan DENİZ

ERZURUM, 2025

T.C.
ERZURUM TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ KABUL VE ONAY TUTANAĞI

BAZI ÖZEL FONKSİYONLAR İÇİN FONKSİYONEL EŞİTSİZLİKLER

Prof. Dr. Murat ÇAĞLAR danışmanlığında ve Prof. Dr. Erhan DENİZ eş danışmanlığında Yücel ÖZKAN tarafından hazırlanan bu çalışma 24.12.2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Ana Bilim Dalı'nda Doktora tezi olarak **Oy birliği ile (5/5)** kabul edilmiştir.

Danışman:	Prof. Dr. Murat ÇAĞLAR <i>Erzurum Teknik Üniversitesi</i>	<i>İmza</i>
Üye:	Prof. Dr. Halit ORHAN <i>Atatürk Üniversitesi</i>	<i>İmza</i>
Üye:	Prof. Dr. İbrahim KARAHAN <i>Erzurum Teknik Üniversitesi</i>	<i>İmza</i>
Üye:	Doç. Dr. İbrahim AKTAŞ <i>Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi</i>	<i>İmza</i>
Üye:	Dr. Öğr. Üyesi Bilal USANMAZ <i>Atatürk Üniversitesi</i>	<i>İmza</i>

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum.

Prof. Dr. İlker KAZAZ
Enstitü Müdürü

ÜRETKEN YAPAY ZEKÂ VE ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki tüm bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etik ilkelere uygun davrandığımı ve tezin hazırlanması sürecinde üretken yapay zekâ programlarından destek alınmadığımı beyan ederim.

24.12.2025

İmzası

Yücel ÖZKAN

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışmada, fikirleriyle bana yol gösteren, hiçbir özveriden kaçınmayıp değerli bilgi ve katkılarını benden esirgemeyen Sayın Prof. Dr. Murat ÇAĞLAR ve Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerinden Sayın Prof. Dr. Erhan DENİZ danışman hocalarıma en içten şükran ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tezimin hazırlanışında yakın ilgi ve desteğini gördüğüm Sayın Prof. Dr. Halit ORHAN'a ve Sayın Dr. Öğr. Üyesi Bilal USANMAZ'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Kendisiyle çalışma şansını yakaladığım değerli bilgilerini benimle paylaşan, ilgisini ve içten desteğini her zaman yanımda hissettiğim Sayın Doç. Dr. Khaled MEHREZ'e şükranlarımı sunarım.

2211- A Yurtiçi Genel Doktora Burs Programı kapsamında sağladığı finansal destek için Türkiye Bilimsel ve Teknik Araştırma Kurumu' na (TÜBİTAK) teşekkür ederim.

Yücel ÖZKAN

ÖZET

DOKTORA TEZİ

BAZI ÖZEL FONKSİYONLAR İÇİN FONKSİYONEL EŞİTSİZLİKLER

Yücel ÖZKAN

Erzurum Teknik Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Murat ÇAĞLAR

İkinci Danışman: Prof. Dr. Erhan DENİZ

Bu tezde Ramanujan tipi tam fonksiyonu, modifiye q – Tricomi fonksiyonu, q – Bessel fonksiyonu ve q – Struve-Bessel gibi bazı özel fonksiyonların fonksiyonel eşitsizlikleri üzerine çalışmalar yapılmıştır. Çalışmanın temel amacı iki ana problem üzerine yoğunlaşmaktadır. İlk olarak, Ramanujan tipi tam fonksiyonu ve modifiye q – Tricomi fonksiyonu için yeni Turán tipi eşitsizlikler elde edilmiştir. Ayrıca, bu fonksiyonların seri açılımlarındaki kalan terimlere ilişkin çeşitli Turán tipi eşitsizlikler verilmiştir. İkinci olarak, Ramanujan tipi tam fonksiyonu, q – Bessel ve q – Struve -Bessel fonksiyonlarının monotonluk özellikleri subordinasyon faktör dizisi yöntemi kullanılarak araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Ramanujan tipi tam fonksiyonu, q – Tricomi fonksiyonu, q – Bessel fonksiyonu, q – Struve-Bessel fonksiyonu, Turán tipi eşitsizlikler, Konveks fonksiyon, Monotonluk, Subordinasyon faktör dizisi.

ABSTRACT

PhD THESIS

FUNCTIONAL INEQUALITIES FOR SOME SPECIAL FUNCTIONS

Yücel ÖZKAN

Erzurum Technical University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Murat ÇAĞLAR

Co-Supervisor: Prof. Dr. Erhan DENİZ

In this thesis, studies have been made on the functional inequalities of several some special functions, including the Ramanujan type entire function, the modified q – Tricomi function, the q – Bessel function and the q – Struve-Bessel function. The main objective of the study focuses on two fundamental problems. First, new Turán type inequalities for the Ramanujan type entire function and the modified q – Tricomi function are obtained. In addition, several Turán type inequalities concerning the remainder terms in the series expansions of these functions are also established. Second, the monotonicity properties of the Ramanujan type entire function, as well as those of the q – Bessel and q – Struve-Bessel functions, are investigated by employing the subordination factor sequence method.

Keywords: Ramanujan type entire function, Modified q – Tricomi function, q – Bessel function, q – Struve-Bessel function, Turán type inequalities, Convex function, Monotonicity, Subordination factor sequence.

İÇİNDEKİLER

ÜRETKEN YAPAY ZEKÂ VE ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI	i
TEŞEKKÜR	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
İÇİNDEKİLER	v
TABLolar DİZİNİ	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
KISALTMALAR VE SİMGELER DİZİNİ	ix
1.GİRİŞ	1
1.1. Turán Tipi Eşitsizlikler.....	1
1.2. Bazı Özel Fonksiyonların Monotonluğu	6
2.KURAMSAL TEMELLER.....	10
3.MATERYAL VE YÖNTEM.....	21
3.1. Ramanujan Tipi Tam Fonksiyonu	24
3.2. Modifiye q – Tricomi Fonksiyonu	26
3.3. q – Bessel Fonksiyonu	27
3.4. q – Struve-Bessel Fonksiyonu	28
4.ARAŞTIRMA BULGULARI.....	30
4.1. Ramanujan Tipi Tam Fonksiyonu için Turan Tipi Eşitsizlikler.....	31
4.1.1. Ramanujan Tipi Tam Fonksiyonun Kalan Terimleri için Turán Tipi Eşitsizlikler.....	44
4.2. Modifiye q – Tricomi Fonksiyonu için Turán Tipi Eşitsizlikler.....	53
4.2.1. Modifiye q – Tricomi Fonksiyonunun Kalan Terimleri için Turán Tipi Eşitsizlikler.....	63
4.3. q – Bessel Fonksiyonun Monotonluk Özellikleri	68
4.4. Ramanujan Tipi Tam Fonksiyonunun Monotonluk Özellikleri	86
4.5. q – Struve-Bessel Fonksiyonlarının Monotonluk Özellikleri	90
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	104
5.1. Sonuç	104
5.2. Öneriler.....	104
KAYNAKÇA	105

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR.....	113
1. Makaleler.....	113
2. Bildiriler	113



TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 4.1. q 'nun özel değerleri için v_0, v_1, v_2 ve v_3 85

Tablo 4.2. q 'nun özel değerleri için $\alpha - \beta$ sonuçlarına ait tablo87



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Bessel fonksiyonunun ($\nu = 0, 1, 2$ için) grafiği.....	16
Şekil 2.2. Modifiye Bessel fonksiyonunun ($\nu = 0, 1, 2, 3$ için) grafiği.....	17
Şekil 2.3. Küresel Bessel fonksiyonunun ($\nu = 0, 1, 2$ için) grafikleri.....	17
Şekil 4.1. $F_1^{(1)}(\frac{1}{e}; x)$ ve $G_1(\frac{1}{e})$ fonksiyonlarının grafikleri.....	40
Şekil 4.2. $F_1^{(1)}(\frac{1}{3}; x)$ ve $G_1(\frac{1}{3})$ fonksiyonlarının grafikleri.....	41
Şekil 4.3. $\mathcal{H}_1^{(1)}(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}; x)$ ve $\mathcal{H}_1^{(1)}(\frac{1}{2}, \frac{1}{9}; x)$ fonksiyonlarının grafikleri.....	49
Şekil 4.4. $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}, 0}(x)$ fonksiyonunun grafiği.....	50
Şekil 4.5. $\chi_5^{(1)}(0.5; z)$ fonksiyonunun grafiği.....	63
Şekil 4.6. $C_5(0.5; z)$ fonksiyonunun grafiği.....	66
Şekil 4.7. $f(\nu)$ fonksiyonunun grafiği.....	70
Şekil 4.8. $g(\nu)$ fonksiyonunun grafiği.....	72
Şekil 4.9. $h_q(\nu)$ fonksiyonunun grafiği.....	77
Şekil 4.10. $p_q(\nu)$ fonksiyonunun grafiği.....	80
Şekil 4.11. $t_q(\nu)$ fonksiyonunun grafiği.....	96
Şekil 4.12. $\rho_q(\nu)$ fonksiyonunun grafiği.....	99
Şekil 4.13. $\theta_q(\nu)$ fonksiyonunun grafiği.....	101
Şekil 4.14. $\phi_q(\nu)$ fonksiyonunun grafiği.....	103

KISALTMALAR VE SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{C}$	Kompleks düzlem
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\Re$	Kompleks sayının reel kısmı
$\mathbb{D}$	$\{z \in \mathbb{C} : z < 1\}$ açık birim disk
$\prec$	Subordinasyon
$f \prec g$	f fonksiyonu g fonksiyonuna subordinatedir
$f * g$	Hadamard çarpım
Γ	Euler gamma fonksiyonu
Γ_q	q – gamma fonksiyonu
$B(x, y)$	Beta fonksiyonu
$B_q(x, y)$	q – beta fonksiyonu
$(a)_n$	Pochhammer sembolü
ψ	Klasik digamma fonksiyonu
ψ_q	q – digamma fonksiyonu
J_ν	ν . mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonu
I_ν	ν . mertebeden birinci tür modifiye Bessel fonksiyonu
j_ν	ν . mertebeden birinci tür küresel Bessel fonksiyonu
i_ν	ν . mertebeden birinci tür modifiye küresel Bessel fonksiyonu

$w_{b,c,v}$ v . mertebeden genelleştirilmiş Bessel fonksiyonu

$j_{v,n}$ J_v Bessel fonksiyonunun n . pozitif sıfırı

$A_q(z)$ Ramanujan fonksiyonu

$A_q^{(\alpha)}(a; z)$ Ramanujan tipi tam fonksiyonu

$\mathcal{T}_n(z)$ Tricomi fonksiyonu

$\mathcal{T}_n(q; z)$ q – Tricomi fonksiyonu

$\mathcal{C}_n(z)$ Modifiye Tricomi fonksiyonu

$\mathcal{C}_n(q; z)$ Modifiye q – Tricomi fonksiyonu

$H_v^{(s)}(z; q^2)$ q – Struve-Bessel fonksiyonu

$x \mapsto$ Değişkeni x olan fonksiyon

1. GİRİŞ

Hipergeometrik, Bessel, Ramanujan, Lommel, Struve, Tricomi ve bu fonksiyonların q versiyonları gibi özel fonksiyonlar matematiksel fiziğin çeşitli problemlerinde, mühendisliğin bir çok alanında, ekonomide ve sağlık gibi gerçek hayatın bir çok uygulama alanında önemli rol oynamaktadırlar. Son zamanlarda ise bu fonksiyonlar özellikle ünivalent fonksiyonlar ve eşitsizlikler teorisinde oldukça fazla uygulama alanı bulmaktadır.

Daha sonra eşitsizlikler Hipergeometrik, Bessel, Lommel, Struve gibi özel fonksiyonlar için farklı yöntemler kullanılarak ve çeşitli yönleriyle ele alınmıştır. Bu eşitsizliklerden en çok bilinenlerden biri (1.1) şeklindeki Turán eşitsizliğidir (Paul, 1950).

Turán tipi eşitsizliklerle ilgili detaylı bilgi aşağıdaki bölümde verilmiştir.

1.1. Turán Tipi Eşitsizlikler

Turán eşitsizliği, ilk olarak Paul Turán tarafından 1950 yılında

$$P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} \left[\frac{(x^2 - 1)^n}{n! 2^n} \right] = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} x^{2n-2k} \quad (1.1)$$

şeklinde tanımlanan Legendre polinomlarının sıfırlarının dağılımını araştırırken ortaya çıkmıştır. Çalışmasında $x \in (-1,1)$ ve $n \in \{0,1,2,\dots\}$ için

$$\begin{cases} (n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), & n = 1,2,\dots \\ P_{-1}(x) = 0, & P_0(x) = 1 \end{cases} \quad (1.2)$$

ve

$$(1-x^2)P'_n(x) = nP_{n-1}(x) - nxP_n(x)$$

(1.3)

rekürans bağıntılarını kullanarak

$$\left| \begin{matrix} P_{n+1}(x) & P_n(x) \\ P_{n+2}(x) & P_{n+1}(x) \end{matrix} \right| > 0 \quad \text{veya} \quad [P_{n+1}(x)]^2 > P_n(x)P_{n+2}(x) \quad (1.4)$$

eşitsizliğini elde etmiş ve Turán eşitsizliğinin bir anlamda miladı başlamıştır. Bu eşitsizlik literatürde Turán eşitsizliği olarak bilinir. Her ne kadar Turán'ın makalesi 1950 yılında yayımlanmış olsada (Turán, 1950), Szegő 1948'de yukarıdaki eşitsizliğin dört farklı kanıtını sunmuş ve sonucu Gegenbauer, Laguerre ve Hermite polinomlarına genelleştirmiştir (Szegő, 1948). Legendre polinomları için ortaya konulan Turán eşitsizliği bir çok matematikçi için büyük ilgi uyandırmış ve sonraki yıllarda diğer klasik polinomlar ve özel fonksiyonlar için Turán tipi eşitsizlikler üzerine çalışmalar başlamıştır.

1951 yılında Thiruvenkatachar ve Nanjundiah, bu konu üzerine oldukça kapsamlı bir çalışma yapmış ve Turán tipindeki birkaç eşitsizliğin kolay kanıtlarını vermişlerdir (Thiruvenkatachar & Nanjundiah, 1951). Turán tipi eşitsizlikler, fonksiyonların log-konvekslik ve log-konkavlık özellikleriyle doğrudan bağlantılı olup, hem teorik hem de uygulamalı matematikte güçlü bir yöntem olarak kullanılmaktadır.

En önemli özel fonksiyonlardan biri olan Bessel fonksiyonları ve onun özellikleri Watson'un 1944 yılında yayımladığı *A Treatise on the Theory of Bessel Functions* adlı kitabında detaylı bir şekilde verilmiştir. Bu kitap, Bessel fonksiyonlarının integral gösterimleri, asimptotik açılımları ve sıfırlarının dağılımlarını incelemiş, daha sonraki yıllarda yazılan eşitsizlik çalışmalarına güçlü bir zemin hazırlamıştır. Bu bağlamda modifiye Bessel fonksiyonları için ilk Turán eşitsizlikleri 1951 yılında Thiruvenkatachar ve Nanjundiah tarafından verilmiştir (Thiruvenkatachar & Nanjundiah, 1951). 2007 yılında İsmail ve Laforgia (Ismail & Laforgia, 2007), 1991 yılında Joshi ve Bissu tarafından bulunan eşitsizliği genelleştirmiştir (Joshi & Bissu, 1991). 2008 yılında Baricz, modifiye Bessel fonksiyonunun monotonluğunu, konveksliğini ve sonsuz çarpımlar temsilini kullanarak aynı eşitsizliğin farklı bir ispatını vermiştir. Elde edilen sonuçların parametrenin belli aralıklarında önceki sonuçlardan daha genel olduğu görülmektedir. Ayrıca, aynı çalışmada hipergeometrik fonksiyonlar için bazı Turán ve Lazareviç tipi eşitsizlikler de elde edilmiştir (Baricz, 2008a). Yine aynı yılda Baricz, genelleştirilmiş Bessel fonksiyonları için Jordan eşitsizliğini (Baricz, 2008b); 2010 yılında ise birinci ve ikinci tür modifiye Bessel fonksiyonları için kesin Turán eşitsizliklerini ispatlamıştır (Baricz, 2010). 2011 yılında Segura, modifiye Bessel fonksiyonlarının oranları için sınırlar ve bunlarla ilişkili Turán tipi eşitsizlikler elde etmiştir (Segura, 2011). 2013 yılında Baricz ve Ponnusamy, Laforgia ve Natalini (Laforgia & Natalini, 2006) tarafından elde edilen birinci ve ikinci tür modifiye Bessel

fonksiyonlarına ilişkin bazı eşitsizliklerin, aslında bu fonksiyonlara karşılık gelen Turán tipi eşitsizliklerle eşdeğer olduğunu göstermiştir. Ayrıca, söz konusu çalışmada bu fonksiyonlara ilişkin bazı yeni Turán tipi eşitsizlikler verilmiştir (Baricz & Ponnusamy, 2013). 2015 yılında Baricz, Bessel fonksiyonlarının uygulamalı matematik, biyoloji, kimya, fizik ve mühendislik bilimlerindeki bazı uygulamalardan esinlenerek, birinci ve ikinci türden modifiye Bessel fonksiyonlar için integral temsilini kullanarak yeni ve kesin Turán tipi eşitsizlikler elde etmiştir. Bu eşitsizlikler, söz konusu fonksiyonların Turán ifadeleri için hem alt hem de üst sınırlara dair kesin sonuçları vermektedir (Baricz, 2015).

2006 yılında Simic tarafından Appell polinomlarının Turán eşitsizliğini sağlaması için bazı gerekli ve yeterli koşullar verilmiştir. Diğer sonuçlar arasında, elde edilen bulguları bazı ortogonal polinom sınıflarına uygulanmıştır (Simic, 2006). Aynı yıl, Baricz tarafından, Gauss hipergeometrik fonksiyonlar için bir Turán tipi eşitsizlik verilmiştir. Bu sonuç, G. Gasper'in Jacobi polinomları için ispatladığı önceki sonucu tamamlamaktadır (Baricz, 2008c).

2013 yılında Baricz ve Ismail, parabolik silindirik fonksiyonlar ve Tricomi hipergeometrik fonksiyonlar için kesin iki taraflı Turán tipi eşitsizlikler elde etmişlerdir. İspatlar, parabolik silindirik fonksiyonlar ile Tricomi hipergeometrik fonksiyonlarının oranlarına ait integral temsillerine dayanmaktadır (Baricz & Ismail, 2013). 2016 yılında Baricz ve Koumandos, birinci tür Lommel fonksiyonlar için Turán tipi eşitsizlikleri çalışmışlardır. İspatlarda kullanılan temel araçlar, Lommel fonksiyonlar için sonsuz çarpım gösterimi, bazı özel tam fonksiyonların sıfırları üzerine G. Pólya'nın klasik bir sonucu ve Lommel fonksiyonların Laguerre–Pólya sınıfı ile bağlantısıdır. Ayrıca, bazı durumlarda J. Steinig'in birinci tür Lommel fonksiyonlarının işareti üzerine elde ettiği sonuçları L'Hospital kuralının monoton biçimiyle birleştirilerek, Turán tipi eşitsizliklerin ispatında kullanılabileceği gösterilmiştir (Baricz & Koumandos, 2016). 2016 yılında Baricz ve arkadaşları, birinci tür Struve fonksiyonları için bazı Turán tipi eşitsizlikler elde etmişlerdir (Baricz et al., 2016). 2019 yılında Mehrez ve Sitnik, Fox-Wright fonksiyonları için bazı Turán tipi eşitsizlikler vermiştir (Mehrez & Sitnik, 2019). 2025 yılında Mehrez ve Brahim, Fox–Wright fonksiyonlarının belirttiği serilerin kalan terimleri için yeni Turán tipi eşitsizlikler elde etmişlerdir. Çalışmada, hipergeometrik fonksiyonlar için bazı yeni integral temsilleri ile gamma fonksiyonunun oranının monotonluk kriterleri temel araç olarak kullanılmıştır. Bu sonuçlar, Fox–Wright fonksiyonları ve genelleştirilmiş

hipergeometrik fonksiyonların Turán eşitsizlikleri literatürüne önemli katkılar sağlamaktadır (Mehrez & Brahim, 2025).

1983 yılında Kershaw, gamma fonksiyonu için log-konvekslik ve log-konkavlık özelliklerini kullanarak Turán tipi eşitsizlikleri vermiştir. Elde edilen sonuçlar, Bessel ve q – Bessel fonksiyonlarının eşitsizliklerinin geliştirilmesine bir temel oluşturmuştur (Kershaw, 1983). 2004 yılında Gasper ve Rahman, *Basic Hypergeometric Series* adlı eserlerinde q – serilerini ve q – Bessel fonksiyonlarını ayrıntılı biçimde incelemiş, bu fonksiyonlarının eşitsizlikler teorisi açısından önemini ortaya koymuştur (Gasper & Rahman, 2004).

2017 yılında Mehrez, q – üstel fonksiyonların kalan terimleri için bazı kesin Turán tipi eşitsizlikler elde etmiştir. Elde edilen bu sonuçların, Alzer'in 1990 yılındaki çalışmasında yer alan sonuçların bir genellemesi olduğu gösterilmiştir (Mehrez, 2017).

Bu dönemde elde edilen sonuçlar yalnızca teorik analizde değil, aynı zamanda geometrik fonksiyon teorisinde de uygulanmış; özellikle yıldızlılık, konvekslik ve ünivalentlik gibi kavramlarla doğrudan ilişkilendirilmiştir. Bu eşitsizlikler yalnızca fonksiyonların teorik yapısını açıklamakla kalmamış; aynı zamanda diferansiyel denklemler, olasılık teorisi, matematiksel fizik, istatistik, analitik sayı teorisi ve spektral teori gibi pek çok uygulama alanında doğrudan kullanılmaktadır.

Aynı yıl, Özkan ve arkadaşları modifiye Lommel fonksiyonunun integral temsilini kullanarak alt ve üst sınırlarını elde etmişlerdir (Özkan et al., 2025e). Ayrıca, birinci tür modifiye Struve fonksiyon için yeni eşitsizlikler türetilmiş, modifiye Lommel fonksiyonuyla ilişkili bir fonksiyon sınıfının log-konvekslik özellikleri incelenmiştir. Çalışmada, doğrudan bir sonuç olarak, parametrelerin belli koşulları altında ${}_3F_2(z)$ hipergeometrik fonksiyonunun log-konvekslik özelliği de çalışılmıştır. Bu sonuçların ispatlarında, modifiye Lommel fonksiyonunun çift katlı integral temsili ve çeşitli integral eşitsizlikler kullanılmıştır.

Yine son yıllarda, q – özel fonksiyonlara yönelik çalışmalar dikkat çekmektedir. 2009 yılında Brahim bazı q – özel fonksiyonlar için çeşitli Turán tipi eşitsizlikleri elde etmiştir (Brahim, 2009). 2018 yılında Ben Said ve arkadaşları modifiye q – Bessel, Macdonal q – Bessel ve q – Dunkel Kernel fonksiyonları için çeşitli Turán tipi eşitsizlikleri çalışmışlardır (Ben Said et al., 2018). Aynı yıl Mehrez, q – Mittag-Leffler ve q – Wright

fonksiyonları için çeşitli Turán tipi eşitsizlikleri vermiştir (Mehrez, 2018). 2025 yılında Deniz ve arkadaşları, modifiye edilmiş big q – Bessel fonksiyonu için bazı Turán tipi eşitsizlikler elde etmişlerdir. Ayrıca, bu fonksiyonun seri açılımlarının kalan terimleri için de yeni Turán tipi eşitsizlikler ortaya konulmuştur. Yöntemin temelinde, Ponnusamy ve Vourienenin lamması (Lemma 3.1.8) yatmaktadır (Deniz et al., 2025b).

Eşitsizlikler sadece Turán veya Turán tipi eşitsizliklerle sınırlı kalmamış aksine Lazareviç, Wilker-tipi, Redheffer, Jordan-tipi ve Wronskians gibi bir çok farklı türden eşitsizlikler üzerine de çalışmalar yapılmıştır. Bunlardan bazıları şunlardır:

1. Laguerre ve Hermite polinomları (Dimitrov, 1998; Szegő, 1948)
2. Ultrasferik polinomlar (Bustoz & Ismail, 1983; Bustoz & Pyung, 2001; Bustoz & Savage, 1979; Danase, 1959; Szász, 1950; Szegő, 1948, Venkatachaliengar et al., 1957)
3. Jacobi polinomları (Szegő 1962, Gasper 1971, Gasper, 1972)
4. Appell polinomları (Csordas & Williamson, 1974; Simic, 2006)
5. Pollaczek ve Lommel polinomları (Bustoz & Ismail, 1997)
6. Askey–Wilson polinomları (Abreu & Bustoz, 2000)
7. Birinci tür Bessel fonksiyonları (Joshi & Bissu, 1991; Szász, 1950; Szász, 1951)
8. Birinci tür modifiye Bessel fonksiyonları (Ismail & Laforgia, 2007; Joshi & Bissu, 1991; Thiruvankatachar & Nanjundiah, 1951)
9. İkinci tür modifiye Bessel fonksiyonları (Ismail & Laforgia, 2007; Ismail & Muldoon, 1978; Laforgia & Natalini, 2006)
10. Galué’nin genelleştirilmiş birinci tür modifiye Bessel fonksiyonları (Baricz, 2007a)
11. Poligamma fonksiyonu ve Riemann zeta fonksiyonu (Csordas et al., 1986; Ismail & Laforgia, 2007; Laforgia & Natalini, 2006)
12. Bessel fonksiyonları (Baricz, 2007b)
13. Genelleştirilmiş Bessel fonksiyonları (Baricz, 2007c)
14. Genel Bessel fonksiyonlarının sıfırları (Lorch, 1980)
15. Ultrasferik, Laguerre ve Hermite polinomlarının sıfırları (Elbert & Laforgia, 1986; Elbert & Laforgia, 1987; Laforgia, 1982)
16. Genelleştirmiş hipergeometrik fonksiyonların oranları üzerine (Karp & Sitnik, 2009)
17. Kummer ve hipergeometrik fonksiyonların oranları üzerine (Sitnik, 2014)
18. Genelleştirmiş q – hipergeometrik fonksiyonların oranları üzerine (Mehrez & Sitnik, 2016)

19. Fox-Wright fonksiyonları (Mehrez & Sitnik, 2019)

20. Birinci tür modifiye Lommel fonksiyonları (Zayed et al., 2024).

Nitekim son zamanlarda Constantinescu (Constantinescu, 2005), Alzer ve arkadaşları (Alzer et al., 2007) farklı türden eşitsizlikler üzerine çalışmışlardır.

Bu eşitsizliklerin içerisinde en dikkat çeken ve en fazla uygulaması olan eşitsizlik türü hiç şüphesiz Turán tipi eşitsizliklerdir. Örneğin, Riemann hipotezi için gerekli bir koşul, daha yüksek dereceden bir Turán tipi eşitsizlik biçiminde ifade edilebilir. İlgilenen okuyucu (Csordas et al., 1986; Dimitrov, 1998; Laforgia & Natalini, 2006) makalelerine ve orada verilen kaynaklara başvurabilir. Bir diğer uygulama örneği Krasikov'un yakın tarihli makalesinde görülmektedir. Yazar, çeşitli Turán tipi eşitsizliklerden yararlanarak ortogonal polinomların kökleri için asimptotik olmayan sınırlar vermiştir (Krasikov, 2005). Ayrıca yakın zamanda Sun ve Baricz, genelleştirilmiş Marcum Q-fonksiyonunun mertebesine göre log-konkav olduğunu ve dolayısıyla bir Turán tipi eşitsizliği sağladığını öne sürmüşlerdir (Sun & Baricz, 2008).

1.2. Bazı Özel Fonksiyonların Monotonluğu

Matematikte monotonluk kavramı, fonksiyonların artan ya da azalan davranışlarının incelenmesini ifade eden temel bir özellik olup analizin en önemli yapı taşlarından birini oluşturur. Monotonluk, yalnızca fonksiyonların grafiksel ya da analitik özelliklerini belirlemek için değil; log-konvekslik, log-konkavlık, majorizasyon ve fonksiyonel eşitsizlikler gibi kavramlarla olan sıkı ilişkisi nedeniyle de büyük önem taşır. Bu ilişkiler sayesinde monotonluk, optimizasyon problemlerinden integral tahminlerine, diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemlerinden özel fonksiyonların analizine kadar geniş bir uygulama alanı bulmuştur. Özellikle log-konvekslik ve Turán tipi eşitsizliklerle kurulan bağ, monotonluk kavramını modern matematiğin en güçlü araçlardan biri haline getirmiştir (Hardy et al., 1952; Mitrinović, 1970).

Monotonluk üzerine ilk sistematik araştırmalar 20. yüzyılın başında q – analitik fonksiyonların tanımıyla başlamıştır. 1905 yılında Jackson, q – sinüs ve q – kosinüs fonksiyonlarını tanımlayarak q – özel fonksiyonların temelini atmış, daha sonraki yıllarda q – Bessel fonksiyonlarının doğuşuna zemin hazırlamıştır (Jackson, 1905). Bu çalışmaları, klasik Bessel fonksiyonlarının teorisini bütünlüklü biçimde inceleyen Watson'un *A Treatise on the Theory of Bessel Functions* adlı eseri takip etmiş, bu eser

yalnızca integral gösterimleri ve asimptotik açılımlarıyla değil aynı zamanda fonksiyonların parametreye ve argümana göre monotonluk özelliklerine de değinmesiyle klasik literatürde bir dönüm noktası olmuştur (Watson, 1944).

1950’li yıllarda monotonluk kavramı fonksiyonel eşitsizlikler çerçevesinde daha kapsamlı bir şekilde ele alınmıştır. 1952 yılında Hardy, Littlewood ve Pólya tarafından yayımlanan *Inequalities* adlı klasik eser, monotonluk kavramını majorizasyon ve konvekslik teorisiyle ilişkilendirmiş, Jensen eşitsizliği ve türevsel testler aracılığıyla fonksiyonların artan-azalan davranışlarının incelenmesi için temel kriterler sunmuştur (Hardy et al., 1952).

1960’lı yıllarda Bellman ve Beckenbach, *Inequalities* adlı çalışmalarında monotonluğu integral eşitsizlikler bağlamında ele almış, fonksiyonların integral ortalamaları üzerinden incelenmesine katkı sağlamıştır (Bellman & Beckenbach, 1961). 1970 yılında Mitrinović ise *Analytic Inequalities* adlı eserinde analitik fonksiyonların eşitsizliklerini geniş bir çerçevede sunmuş, özellikle monotonluk ve log-konvekslik kriterlerini sistematik hale getirmiştir (Mitrinović, 1970).

Monotonluk pek çok uygulama alanında da önemli rol oynamıştır. Diferansiyel denklemler teorisinde, çözümlerin varlığı ve tekliği üzerine yapılan çalışmalarda kritik bir araç olmuştur (Gilbarg et al., 1977). Matematiksel fizikte monotonluk özellikleri, izoperimetrik eşitsizlikler ve ısı denklemi gibi temel problemlerde kendini göstermiştir. Pólya ve Szegő’nün, *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics* adlı eseri monotonluğun fiziksel problemlerdeki önemini vurgulamıştır (Pólya & Szegő, 1953).

1980’li yıllardan itibaren q – özel fonksiyonlarda araştırmalar ivme kazanmıştır. 1983 yılında Harold Exton, q – *Hypergeometric Functions and Applications* adlı eserinde q – hipergeometrik fonksiyonların teorisini detaylı biçimde ele almıştır. Bu çalışmada Hahn-Exton q – Bessel fonksiyonları ve bu fonksiyonların klasik Bessel fonksiyonlarıyla bağlantıları, serisel tanımları ve temel özellikleri incelenmiştir (Exton, 1983).

1990’larda Rahman ve Suslov, q – ortogonal polinomların klasik polinomlarla benzer biçimde monotonluk özellikleri sergilediklerini göstermiştir (Rahman & Suslov, 1994). Koelink ise Askey–Wilson polinomları ve q – Hankel dönüşümü bağlamında q – Bessel fonksiyonlarının monotonluk özelliklerini ele almıştır (Koelink, 1995).

2000’li yıllarda monotonluk araştırmaları yeni bir boyut kazanmıştır. Gasper ve Rahman, *Basic Hypergeometric Series* adlı eserlerinde q – serilerinin yapısını ele alarak log-konvekslik ve monotonluk analizlerine dair kapsamlı sonuçlar elde etmişlerdir (Gasper & Rahman, 2004). Niculescu ve Persson, *Convex Functions and Their Applications* adlı çalışmalarında monotonluğu daha genel fonksiyon sınıflarına uygulayarak konvekslik teorisiyle ilişkisini güçlendirmiştir (Niculescu & Persson, 2006). Bu srete özel fonksiyonlara dair araştırmalar da derinleşmiştir.

Son yıllarda ise monotonluk problemi özellikle hipergeometrik, Bessel, Struve, Struve -Bessel, Lommel ve Tricomi gibi bir çok özel fonksiyonlar için de ele alınmıştır. 2014 yılında Baricz ve Pogány, kuvvet serilerinin oranlarının monotonluğu üzerine genel bir sonucu kullanarak, modifiye Struve fonksiyonları için bazı monotonluk ve konvekslik özelliklerini ortaya koymuşlardır. Elde edilen bu temel sonuçlardan hareketle, modifiye Struve fonksiyonları için çeşitli fonksiyonel eşitsizlikler ile alt ve st sınırlar sunulmuştur. Çalışmanın ana bulguları, Joshi ve Nalwaya’nın 1998’deki sonuçlarını tamamlamakta ve geliştirmektedir (Baricz & Pogány, 2014).

Son 15 yılda ise kompleks özel fonksiyonların monotonluğu üzerine çalışmalar hız kazanmıştır. Bu anlamda ilk olarak András ve Baricz kompleks mertebeden genelleştirilmiş ve normalize edilmiş Bessel fonksiyonlarının monotonluk özelliklerini çalışmışlardır (András & Baricz, 2009). 2023 yılında Cotırlă ve Szász, birinci tür Bessel fonksiyonlarının monotonluk özelliklerini incelemişlerdir. Çalışmada, András ve Baricz’in (András & Baricz, 2009) normalize edilmiş Bessel fonksiyonları için ortaya koydukları açık bir problemi çözüme kavuşturmuşlardır (Cotırlă & Szász, 2024). Aynı yazarlar kısa bir süre sonra subordinasyon faktör dizilerinin özelliklerini kullanarak normalize edilmiş Lommel fonksiyonları için monotonluk özelliklerini incelemişlerdir. (Cotırlă & Szász, 2023). 2024 yılında Deniz ve Szász, subordinasyon faktör dizilerinin özelliklerini kullanarak Struve fonksiyonlarının monotonluğu üzerine yeterli sonuçlar elde etmişlerdir (Deniz & Szász, 2024).

Tüm bu çalışmalara bakıldığında, monotonluk kavramının klasik fonksiyonlardan başlayarak özel fonksiyonlara ve onların q – versiyonlarına kadar sürekli bir gelişim gösterdiği, ayrıca log-konvekslik, log-konkavlık ve Turán tipi eşitsizliklerle sıkı bir ilişki içinde de olduğu görülmektedir. Başlangıçta Bessel fonksiyonlarının monotonluk davranışları üzerine yapılan analizler, zamanla Struve, Lommel, Tricomi, big q – Bessel

ve q –gamma fonksiyonlarına genişletilmiş, q –Struve–Bessel fonksiyonları ve son olarak Ramanujan tipi tam fonksiyonu ile de desteklenmiştir. Günümüzde monotonluk, hem teorik hem de uygulamalı matematikte yeni araştırma alanlarının kapısını açmakta ve bu bağlamda doktora tezi kapsamında yapılan bu çalışma, literatürdeki boşlukları doldurarak q –özel fonksiyonların daha geniş bir çerçevede anlaşılmasına katkı sağlamaktadır.

Bizde tüm bu çalışmalardan ilham alarak tez çalışmamızda Ramanujan tipi tam fonksiyon için çeşitli yeni Turán tipi eşitsizlikler elde edildi. Ayrıca, söz konusu fonksiyonun seri açılımlarının kalan terimleri için de bazı Turán tipi eşitsizlikler ispatlanmıştır. Ana sonuçların ispatında kullanılan temel araçlar, Ramanujan tipi tam fonksiyonun oranlarının monotonluk özellikleri ve q –gamma fonksiyonuyla ilgili rekürans bağıntılarıdır (Özkan et al., 2025a). Bunun yanısıra modifiye edilmiş q –Tricomi fonksiyonu için de bazı Turán tipi eşitsizlikler elde edildi. Ayrıca, bu fonksiyonun seri açılımının kalan terimleri için de Turán tipi eşitsizlikler ortaya konulmuştur. İspatlarda kullanılan temel araç, q –Tricomi fonksiyonu için oranların monotonluk özellikleridir (Deniz et al., 2025a). q –versiyonlar bağlamında da, tez çalışmamızda Jackson ve Hahn–Exton tipindeki normalize edilmiş q –Bessel fonksiyonları için monotonluk özellikleri tüm yönleriyle incelendi. İspatlarda subordinasyon faktör dizisi ve fonksiyonların konvekslik özellikleri kullanıldı. Çalışmada ayrıca q –gamma fonksiyonları için bazı önemli eşitsizlikler ispatlanmıştır. Ayrıca, özel durumda $q \rightarrow 1$ için Cotîrlă ve Szász’ın (Cotîrlă & Szász, 2024) sonucuna ulaşılmaktadır. Bu çalışma, genel olarak q –özel fonksiyonların analitik, geometrik ve monotonluğu üzerine yapılacak çalışmalara önemli katkılar sağlamaktadır (Özkan et al., 2025b). Ayrıca, normalize edilmiş q –Struve–Bessel fonksiyonlarının monotonluk özellikleri detaylı bir şekilde incelenmiştir. Çalışmada, subordinasyon faktör dizisi, fonksiyonların konvekslik özellikleri ve q –gamma fonksiyonun bazı eşitsizlikleri kullanılarak bu fonksiyonların monotonluk kriterleri ortaya konulmuştur. Ayrıca, q ’nun özel değerleri için bir tablo sunularak sonuçlar somutlaştırılmıştır (Özkan et al., 2025d).

Aynı şekilde subordinasyon faktör dizisi yöntemini kullanılarak Ramanujan tipi tam fonksiyonunun monotonluk özellikleri çalışılmıştır (Özkan et al., 2025c).

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde tez çalışmasında ana sonuçlara ve bu sonuçlara ulaşmada kullanılacak olan genel bilgilere yer verilmiştir.

Tanım 2.1.1: $z \in \mathbb{C}$ ve $\Re(z) > 0$ olmak üzere

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (2.1)$$

fonksiyonuna *Euler gamma fonksiyonu* denir (Şahin, 2011).

Gamma fonksiyonu ile ilişkili olan Beta fonksiyonu, $x, y > 0$ olmak üzere

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır. Beta fonksiyonu ile gamma fonksiyonu arasında

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (2.3)$$

bağıntısı geçerlidir.

Gamma fonksiyonun bazı temel özellikleri aşağıda verilmiştir:

- 1) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$
- 2) $\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}$
- 3) $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}, \quad n \in \mathbb{N}$
- 4) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$

Tanım 2.1.2: $n \in \mathbb{N}_0$, $a \in \mathbb{C}$ ve $a \neq 0, -1, -2, \dots$ olmak üzere

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = \begin{cases} 1, & n = 0; a \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ a(a+1)\dots(a+n-1), & n \in \mathbb{N}; a \in \mathbb{C} \end{cases} \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanan ifadeye *Pochhammer (Appell) sembolü* denir. Eğer a ve $a+n$ negatif tamsayı ise

$$(a)_n = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Gamma(a+n+t)}{\Gamma(a+t)}$$

formülü geçerlidir (Şahin, 2011).

$\Gamma(x)$ fonksiyonu ile bağlantılı önemli bir diğer fonksiyon olan klasik digamma fonksiyonu, gamma fonksiyonunun logaritmik türevi olup,

$$\psi(x) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlanır. Bu fonksiyonların seri açılımı

$$\psi(x) = -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x} \right)$$

şeklindedir. Burada γ Euler–Mascheroni sabitidir. $x \mapsto \psi(x)$ fonksiyonu $x > 0$ için artan ve konkav bir fonksiyondur.

$a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $0 < q < 1$ için q -Shifted faktöriyel fonksiyonları

$$(a; q)_0 = 1, (a; q)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - aq^k), (a; q)_{\infty} = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - aq^k) \quad (2.6)$$

ve

$$(q; q)_{n+k} = (q; q)_n (q^{n+1}; q)_k \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlanır (Gasper & Rahman, 2004).

Ayrıca, $(a; q)_{\infty}$ çarpımı

$$(a; q)_n = \frac{(a; q)_{\infty}}{(aq^n; q)_{\infty}} \quad (2.8)$$

bağıntısını sağlar. n pozitif bir tam sayı olduğunda ise

$$(a; q)_n = (1-a)(1-aq) \cdots (1-aq^{n-1})$$

eşitliği sağlanır. Diğer yandan, $a \in \mathbb{C}$ ve $0 < q < 1$ olmak üzere

$$[a]_q = \frac{1-q^a}{1-q}$$

ve bir $n \in \mathbb{N}$ sayının q – faktöriyeli

$$[n]_q! = \prod_{m=1}^n [m]_q = \frac{(q; q)_n}{(1-q)^n} \quad (2.9)$$

şeklinde tanımlanır (Gasper & Rahman, 2004). Özel olarak $q \rightarrow 1$ iken $[n]_q! = n!$ dır.

Üstel fonksiyonun q – versiyonları,

$$e_q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(q; q)_n}, \quad |z| < 1$$

ve $|z| < (1-q)^{-1}$ ve $0 < q < 1$ için

$$E_q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{[n]_q!} \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlanır. $E_q(z)$ fonksiyonunda özel olarak $q \rightarrow 1$ alınırse klasik e^z fonksiyonu elde edilir.

Jackson (Jackson, 1910), gamma fonksiyonunun q – versiyonunu (q – gamma fonksiyonu) $0 < q < 1$ ve $x > 0$ için

$$\Gamma_q(x) = \frac{(q; q)_{\infty}}{(q^x; q)_{\infty}} (1-q)^{1-x} \quad (2.11)$$

şeklinde tanımlamıştır. Ayrıca,

$$\Gamma_q(x+1) = [x]_q \Gamma_q(x) \quad (2.12)$$

fonksiyonel denklemi sağlanır. Eğer x pozitif bir tam sayı ise, bu durumda

$$\Gamma_q(x+1) = (1+q) \cdots (1+q+\dots+q^{x-1}) = [x]_q! = \frac{(q; q)_x}{(1-q)^x} \quad (2.13)$$

eşitliği doğrudur. Ayrıca, (2.12) ve (2.13) den

$$\frac{\Gamma_q(a+k)}{\Gamma_q(a)} = \frac{(q^a; q)_k}{(1-q)^k}, \quad (2.14)$$

$$(q; q)_{n+k+1} = (1-q^{n+k+1})(q; q)_{n+k} \quad (2.15)$$

ve

$$(q; q)_{n+k+1} = (1 - q^{n+k}) \Gamma_q(n+k+1) \quad (2.16)$$

yazılır. Klasik gamma fonksiyonu ile q – gamma fonksiyonu arasında

$$\lim_{q \rightarrow 1^-} \Gamma_q(x) = \Gamma(x)$$

geçişi vardır.

q – gamma fonksiyonunun sonsuz çarpım formları $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere $0 < q < 1$ için

$$\Gamma_q(z) = (1 - q)^{1-z} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q^{n+z}}$$

ve $q > 1$ olduğu durumda ise

$$\Gamma_q(z) = (1 - q)^{1-z} q^{\frac{z(z-1)}{2}} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1 - q^{-(n+1)}}{1 - q^{-(n+z)}}$$

şeklinde tanımlanmaktadır (Gasper & Rahman, 2004). Γ_q fonksiyonunun bazı özel değerleri aşağıda verilmiştir:

- $\Gamma_q(1) = 1,$
- $\Gamma_q(2) = 1,$
- $\Gamma_q(3) = \frac{1 - q^2}{1 - q} = 1 + q,$
- $\Gamma_q(4) = \frac{(1 - q^2)(1 - q^3)}{(1 - q)^2} = (1 + q)(1 + q + q^2),$
- $\Gamma_q(5) = \frac{(1 - q^2)(1 - q^3)(1 - q^4)}{(1 - q)^3} = (1 + q)(1 + q + q^2)(1 + q + q^2 + q^3),$
- $\Gamma_q\left(\frac{1}{2}\right) = (1 - q)^{1/2} \frac{(q; q)_{\infty}}{(q^{1/2}; q)_{\infty}}, \quad (0 < q < 1)$
- $\Gamma_q\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1 - q^{3/2}}{1 - q} \Gamma_q\left(\frac{3}{2}\right), \quad (0 < q < 1)$
- $\Gamma_q\left(\frac{1}{2}\right) = (q - 1)^{1/2} q^{-1/8} \frac{(q^{-1}; q^{-1})_{\infty}}{(q^{-1/2}; q^{-1})_{\infty}}, \quad (q > 1)$
- $\Gamma_q\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{q^{1/2} - 1}{q - 1} \Gamma_q\left(\frac{1}{2}\right) \quad (q > 1).$

Yukarıdaki tanımlar dikkate alındığında pozitif bir x reel sayısı ve $q \geq 1$ için

$$\Gamma_q(x) = (1-q)^{1-x} q^{\frac{(x-1)(x-2)}{2}} \Gamma_{\frac{1}{q}}(x)$$

bağıntısı sağlanır (Gasper & Rahman, 2004).

Thomae ve Jackson, q – beta fonksiyonunu $x, y > 0$ için

$$B_q(x, y) = \frac{\Gamma_q(x)\Gamma_q(y)}{\Gamma_q(x+y)} \quad (2.17)$$

şeklinde tanımlamışlardır. Klasik Beta fonksiyonu ile q – beta fonksiyonu arasında

$$\lim_{q \rightarrow 1^-} B_q(x, y) = B(x, y)$$

geçişi doğrudur.

Bu fonksiyonun q – integral temsili ise

$$B_q(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-qt)_q^{y-1} d_q t \quad (2.18)$$

şeklindedir.

Ayrıca, q – integrali de

$$\int_0^a f(x) d_q x = (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} a q^n f(a q^n)$$

şeklinde tanımlamışlardır (Thomae, 1869; Jackson, 1910).

$\Gamma_q(x)$ fonksiyonu ile bağlantılı önemli bir diğer fonksiyon olan q – digamma fonksiyonu

$\psi_q(x)$,

$$\psi_q(x) = \frac{\Gamma'_q(x)}{\Gamma_q(x)} = -\log(1-q) + \log(q) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{kx}}{1-q^k} \quad (2.19)$$

şeklinde tanımlanır. $x \mapsto \psi_q(x)$ fonksiyonu tüm $0 < q < 1$ değerleri için $(0, \infty)$ aralığında artan olup konkavdır. q – digamma ile klasik digamma fonksiyonu arasında

$$\lim_{q \rightarrow 1^-} \psi_q(x) = \psi(x)$$

geçişi vardır.

Tanım 2.1.3: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, fonksiyonu verilsin. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna *konveks fonksiyon* denir (Grasmair, 2016).

Tanım 2.1.4: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$g(x) = \log f(x)$$

konveks bir fonksiyon ise f fonksiyonuna *log-konveks fonksiyon* denir (Noor et al., 2020).

Tanım 2.1.5: $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x_1, x_2 \in A$ için

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

koşulunu sağlıyorsa, f fonksiyonuna A kümesinde *monoton artan fonksiyon* denir (Rudin, 1976).

Tanım 2.1.6: $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x_1, x_2 \in A$ için

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

koşulunu sağlıyorsa, f fonksiyonuna A kümesinde *monoton azalan fonksiyon* denir (Rudin, 1976).

Tanım 2.1.7: $v \in \mathbb{C}$ (veya $\mathbb{R}$) olmak üzere

$$z^2 w''(z) + zw'(z) + (z^2 - v^2)w(z) = 0 \quad (2.20)$$

ikinci mertebeden diferansiyel denkleminde *Bessel diferansiyel denklemi* denir.

Frobenüs metodu kullanılarak (2.20) diferansiyel denkleminin bir özel çözümü

$$J_v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(v+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+v} \quad (2.21)$$

şeklinde. Burada J_v fonksiyonuna *v. mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonu* adı verilir (Watson, 1944).

Her $z \in \mathbb{C}$ için ν . mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonunun integral gösterimi

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t - \nu t) dt - \frac{\sin(\pi \nu)}{\pi} \int_0^\infty e^{-x \sinh(t) - \nu t} dt$$

veya

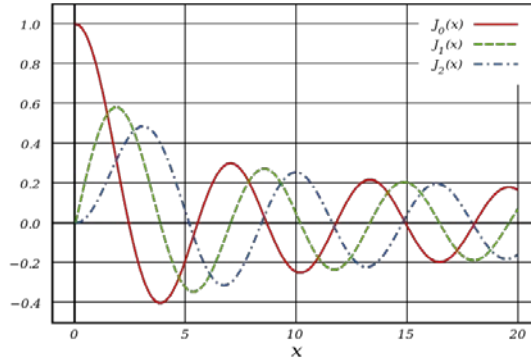
$$J_\nu(x) = \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos(xt) dt$$

şeklindedir (Watson, 1944).

Her $z \in \mathbb{C}$ için ν . mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonunu temsil etmenin bir yolu da onu sonsuz çarpım biçiminde yazmaktır. Dolayısıyla $j_{\nu,n}$, $J_\nu(x)$ fonksiyonunun n . pozitif sıfırını göstermek üzere birinci tür Bessel fonksiyonunun sonsuz çarpım gösterimi

$$J_\nu(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{x^2}{j_{\nu,n}^2}\right)$$

şeklindedir.



Şekil 2.1. Bessel fonksiyonunun ($\nu = 0, 1, 2$ için) grafiği

Tanım 2.1.8: $\nu \in \mathbb{C}$ (veya $\mathbb{R}$) olmak üzere

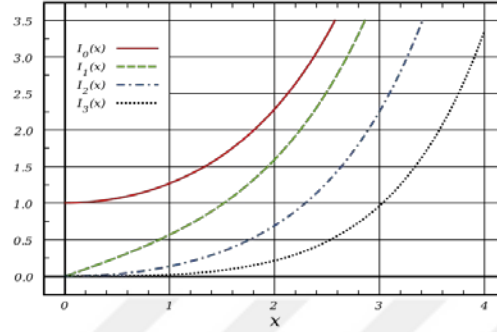
$$z^2 w''(z) + z w'(z) - (z^2 + \nu^2) w(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

denklemin *modifiye Bessel diferansiyel denklemi* denir.

Bu denklemin özel çözümü $\forall z \in \mathbb{C}$ için

$$I_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu}$$

biçiminde olup $I_\nu(z)$ fonksiyonuna ν . mertebeden *birinci tür modifiye Bessel fonksiyonu* denir (Watson, 1944).



Şekil 2.2. Modifiye Bessel fonksiyonunun ($\nu = 0, 1, 2, 3$ için) grafiği

Tanım 2.1.9: $\nu \in \mathbb{C}$ (veya $\mathbb{R}$) olmak üzere

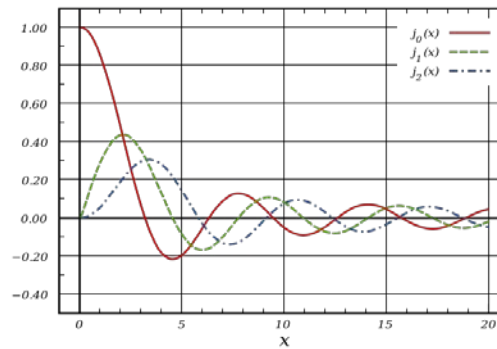
$$z^2 w''(z) + 2zw'(z) + [z^2 - \nu(\nu+1)]w(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

denklemin *küresel Bessel diferansiyel denklemi* denir (Abramowitz & Stegun, 1965).

Bu denklemin özel çözümü $\forall z \in \mathbb{C}$ için

$$j_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{\nu+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(\nu+n+3/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu}$$

biçiminde olup $j_\nu(z)$ fonksiyonuna ν . mertebeden *birinci tür küresel Bessel fonksiyonu* adı verilir (Abramowitz & Stegun, 1965).



Şekil 2.3. Küresel Bessel fonksiyonunun ($\nu = 0, 1, 2$ için) grafiği

Tanım 2.1.10: $v \in \mathbb{C}$ (veya $\mathbb{R}$) olmak üzere

$$z^2 w''(z) + 2zw'(z) - [z^2 + v(v+1)]w(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

denklemine *modifiye küresel Bessel diferansiyel denklemi* denir (Abramowitz & Stegun, 1965).

Bu denklemin özel çözümü $\forall z \in \mathbb{C}$ için

$$i_v(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} I_{v+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(v+n+3/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+v}$$

şeklindedir. Burada $i_v(z)$ fonksiyonuna v . mertebeden birinci tür *modifiye küresel Bessel fonksiyonu* adı verilir (Abramowitz & Stegun, 1965).

Tanım 2.1.11: $b, c, v \in \mathbb{C}$ (veya $\mathbb{R}$) olmak üzere;

$$z^2 w''(z) + b z w'(z) + [c z^2 - v^2 + (1-b)v]w(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

ikinci mertebeden diferansiyel denklemine *genelleştirilmiş Bessel diferansiyel denklemi* denir (Baricz, 2008d).

Bu denklemin özel çözümü

$$w_{b,c,v}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-c)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+v+\frac{b+1}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+v}, \quad z \in \mathbb{C}$$

şeklindedir. Burada $w_{b,c,v}(z)$ fonksiyonuna v . mertebeden *genelleştirilmiş Bessel fonksiyonu* adı verilir (Baricz, 2008d).

Burada b ve c ye özel değerler vererek tüm v . mertebeden birinci tür Bessel fonksiyon türleri elde edilebilir. Örneğin;

$$w_{1,1,v}(z) = J_v(z), \quad w_{1,-1,v}(z) = I_v(z), \quad w_{2,1,v}(z) = \frac{\sqrt{2}j_v}{\sqrt{\pi}}, \quad w_{2,-1,v}(z) = \frac{\sqrt{2}i_v}{\sqrt{\pi}},$$

fonksiyonları elde edilir.

v . mertebeden genelleştirilmiş Bessel fonksiyonu

$$w_{b,c,v}(z) = \left[2^v \Gamma\left(v + \frac{b+1}{2}\right) \right]^{-1} z^v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-c/4)^n \Gamma\left(v + \frac{b+1}{2}\right)}{n! \Gamma\left(n + v + \frac{b+1}{2}\right)} z^{2n}$$

şeklinde yazılır. Burada

$$a_{n,b,c,v} = \frac{(-c/4)^n \Gamma\left(v + \frac{b+1}{2}\right)}{n! \Gamma\left(n + v + \frac{b+1}{2}\right)}$$

olmak üzere

$$u_{b,c,v}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,b,c,v} z^n$$

fonksiyonu ele alınırsa $\forall z \in \mathbb{C}$ için

$$w_{b,c,v}(z) = \left[2^v \Gamma\left(v + \frac{b+1}{2}\right) \right]^{-1} z^v u_{b,c,v}(z^2)$$

yazılır. Pochhammer sembolü kullanılırsa,

$$u_{b,c,v}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-c/4)^n}{(\kappa)_n} \frac{z^n}{n!}$$

şeklinde yazılabilir. Burada b, c, v birer kompleks sayı olup $\kappa \neq 0, -1, -2, \dots$ için

$\kappa = v + \frac{b+1}{2}$ şeklindedir. Elde edilen $u_{b,c,v}(z)$ fonksiyonuna normalize edilmiş

genelleştirilmiş v . mertebeden Bessel fonksiyonu adı verilir (Baricz, 2008b).

Ayrıca $u_{b,c,v}(z)$ fonksiyonu

$$4z^2 u''(z) + 4\kappa z u'(z) + c z u(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

diferansiyel denklemini sağlar.

Diğer taraftan $\lambda_v : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ve $\lambda_v(z) = u_{v,b,c}(z^2)$ olarak tanımlanan λ_v fonksiyonunda;

$b=1, c=1$ ve $b=1, c=-1$ alınırsa sırasıyla

$$\mathcal{J}_v(z) = 2^v \Gamma(v+1) z^{-v} J_v(z),$$

$$\mathcal{I}_v(z) = 2^v \Gamma(v+1) z^{-v} I_v(z)$$

fonksiyonları elde edilir.

Bessel fonksiyonlarında parametrelerin bazı özel değerleri için

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z$$

$$\mathcal{J}_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{1/2}(z) = \frac{\sin z}{z}$$

$$J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z$$

$$\mathcal{J}_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{-1/2}(z) = \cos z$$

$$I_{-1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cosh z$$

$$\mathcal{I}_{-1/2} = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} I_{-1/2}(z) = \cosh z$$

$$I_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sinh z$$

$$\mathcal{I}_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} I_{1/2}(z) = \frac{\sinh z}{z}$$

fonksiyonları yazılır.

Diğer taraftan $\kappa \neq 0, -1, -2, \dots$ olmak üzere $b, v, c \in \mathbb{C}$ ve $z \in \mathbb{C}$ için v . mertebeden genelleştirilmiş Bessel fonksiyonları için

$$1. \quad z w_{b,c,v-1}(z) + c z w_{b,c,v+1}(z) = (2v + b - 1) w_{b,c,v}(z)$$

$$2. \quad z w'_{b,c,v}(z) + (v + b - 1) w_{b,c,v}(z) = z w_{b,c,v-1}(z)$$

$$3. \quad z w'_{b,c,v}(z) + c z w_{b,c,v+1}(z) = v w_{b,c,v}(z)$$

$$4. \quad \left[z^{-v} w_{b,c,v}(z) \right]' = -c z^{-v} w_{b,c,v+1}(z)$$

rekürans bağıntıları doğrudur (Baricz, 2008d).

Sonuç 2.1.12: Yukarıdaki rekürans bağıntılarında $b = c = 1$ alınırsa klasik v . mertebeden Bessel fonksiyonlar için rekürans bağıntıları elde edilir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu başlık altında tezin temel kısmının oluşturulmasında kullanılacak tanım, lemma ve teoremler verilmiştir.

$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ açık birim disk olsun. $\mathbb{D}$ üzerinde analitik olan ve $f'(0) \neq 0$ koşulunu sağlayan bir f fonksiyonu, tüm $z \in \mathbb{D}$ için

$$\Re \left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right] > 0 \quad (3.1)$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna konvektir denir. Bu durum f fonksiyonunun $\mathbb{D}$ diskinde ünivalent ve $f(\mathbb{D})$ kümesinin konveks olmasıyla eşdeğerdir.

Analitik bir f fonksiyonu

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (3.2)$$

şeklinde bir kuvvet serisine açılabilir. Bir $f(z)$ fonksiyonu için $f(0) = 0$ ve $f'(0) = 1$ şartlarına normalize şartları denir. Normalize şartları altında (3.2) ile tanımlı $f(z)$ fonksiyonu

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad (z \in \mathbb{D})$$

şeklinde yazılır. Bu fonksiyona normalize edilmiş analitik fonksiyon denir.

Tanım 3.1.1: f ve g fonksiyonları, $\mathbb{D}$ birim diski üzerinde tanımlı iki analitik fonksiyon olsun. Eğer $f(z) = g(w(z))$ olacak şekilde $w(0) = 0$, $|w(z)| < 1$ koşullarını sağlayan $w(z)$ analitik fonksiyonu varsa bu durumda f fonksiyonu g fonksiyonuna *subordinatedir* denir. Bu subordinasyon $f \prec g$ şeklinde gösterilir (Duren, 1983).

Eğer g fonksiyonu ünivalent ise $f \prec g \Leftrightarrow f(0) = g(0)$ ve $f(\mathbb{D}) \subseteq g(\mathbb{D})$ gerektirmesi doğrudur.

Tanım 3.1.2: Kompleks sayılardan oluşan $(b_n)_{n \geq 1}$ dizisi ve $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$

konveks fonksiyonu verilsin. Eğer $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n z^n$ şeklinde tanımlanan g fonksiyonu

$z \in \mathbb{D}$ için $g \prec f$ şartını sağlıyorsa $(b_n)_{n \geq 1}$ dizisine *subordinasyon faktör dizisi* denir (Wilf, 1961).

Tanım 3.1.3: $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ ve $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ şeklinde $\mathbb{D}$ birim diski üzerinde tanımlı iki analitik fonksiyonun konvolüsyonu (Hadamard çarpımı)

$$(f * g)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n z^n$$

şeklinde tanımlanır (Duren, 1983).

Cauhy çarpımı, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ gibi iki serinin çarpımını tanımlamak için kullanılan klasik bir yapıdır. Cauchy tarafından tanımlanan bu çarpım,

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

olmak üzere $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ serisi ile ifade edilir (Rudin, 1976).

Sonuç 3.1.4: Subordinasyon faktör dizisi; Tanım 3.1.1, Tanım 3.1.2 ve Tanım 3.1.3 kullanılarak aşağıdaki şekilde yeniden ifade edilebilir:

$(b_n)_{n \geq 1}$ karmaşık sayılardan oluşan bir dizi ve ϕ fonksiyonu

$$\phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

şeklinde tanımlansın. Eğer her f konveks fonksiyonu için

$$f * \phi \prec f$$

subordinasyon ilişkisi sağlanıyorsa, bu durumda $(b_n)_{n \geq 1}$ dizisine subordinasyon faktör dizisi denir.

Lemma 3.1.5: Aşağıdaki iki özellik birbirine denktir:

I. Karmaşık sayılardan oluşan $(b_n)_{n \geq 1}$ dizisi bir subordinasyon faktör dizisidir

II. Her $z \in \mathbb{D}$ için $\frac{1}{2} + \Re \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \right) > 0$ eşitsizliği sağlanır (Wilf, 1961).

Lemma 3.1.6: Reel sayılardan oluşan $(f_n)_{n \geq 0}$ dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f_0 = 1, \quad f_n - 2f_{n+1} + f_{n+2} \geq 0 \quad \text{ve} \quad f_n - f_{n+1} \geq 0 \quad (3.3)$$

koşullarını sağlasın. Bu durumda, her $z \in \mathbb{D}$ için

$$\Re \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^n \right) > \frac{1}{2} \quad (3.4)$$

eşitsizliği sağlanır (Fejér, 1936).

Lemma 3.1.6 daki koşulların sağlanması durumunda reel sayılardan oluşan bir $(f_n)_{n \geq 0}$ dizisinin subordinasyon faktör dizisi olacağı sonucuna ulaşılır.

Mocanu 1993 yılında yaptığı çalışmasında,

Eğer $n \geq 1$, $z \in \mathbb{D}$ için $f(z) = z + a_{n+1}z^{n+1} + \dots$ fonksiyonun

$$|f''(z)| \leq \frac{n}{n+1}$$

koşulunu sağlaması durumunda, f fonksiyonun konveks olacağı sonucuna varmıştır (Mocanu, 1993).

Aşağıdaki lemma, yukarıdaki sonucun bir çıkarımıdır.

Lemma 3.1.7: Eğer $a_1 \neq 0$ olmak üzere $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu

$$\left| \frac{f''(z)}{f'(0)} \right| < \frac{1}{2}, \quad z \in \mathbb{D} \quad (3.5)$$

eşitsizliğini sağlanıyorsa, bu durumda f fonksiyonu konvektir (Mocanu, 1993).

Sonuç 3.1.4, Lemma 3.1.6 ve Lemma 3.1.7 birlikte kullanıldığında fonksiyonların monotonluğu problemlerinin ispatında önemli bir rol üstlenirler.

Aşağıdaki lemma Turán tipi eşitsizliklerin ispatında birinci dereceden önemli bir araçtır.

Lemma 3.1.8: $(a_n)_{n \geq 1}$ ve $(b_n)_{n \geq 1}$ dizileri iki reel sayı dizisi, $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ ve

$g(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$ serileri $|z| < r$ diskinde yakınsak iki kuvvet serisi olsun. Eğer $b_n > 0$ ve

$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq 0}$ dizisi artan (azalan) ise bu durumda $z \mapsto \frac{f(z)}{g(z)}$ fonksiyonu da $(0, r)$ aralığında artan (azalan) dır (Ponnusamy & Vuorinen, 1997).

3.1. Ramanujan Tipi Tam Fonksiyonu

Bu başlık altında önemli özel fonksiyonlardan biri olan Ramanujan tipi tam fonksiyonundan bahsedilmiştir. Bu fonksiyon çalışılmışken Matematiğe, özellikle seriler konusuna çok önemli katkılar sunmuş olan Srinivasa Ramanujandan bahsetmemek haksızlık olur. Srinivasa Ramanujan (1887–1920), modern matematiğin en sıra dışı ve üretken isimlerinden biridir. Hindistan’ın Tamil Nadu bölgesindeki Erode kentinde doğan Ramanujan, küçük yaşlardan itibaren olağanüstü bir hesaplama yeteneği ve formül üretme becerisi sergilemiştir. Resmi matematik eğitimi sınırlı olmasına rağmen, özellikle sonsuz seriler, bölmeler teorisi, theta fonksiyonları, eliptik fonksiyonlar ve modüler formlar alanlarında kendi kendine derin ve özgün sonuçlar elde etmiştir. 1913 yılında G. H. Hardy’ye gönderdiği ünlü mektup, Ramanujan’ın dünya matematik camiasında tanınmasını sağlamış ve Cambridge Üniversitesi’ne davet edilmesine neden olmuştur. Hardy ile yürüttüğü işbirliği, sayılar teorisinin pek çok alanında çığır açıcı sonuçlar ortaya çıkarmıştır. Bu dönemde Ramanujan tau fonksiyonu, mock theta fonksiyonları, Hardy–Ramanujan asimptotik formülü ve daha sonra “kayıp defterler” olarak bilinen kapsamlı notları modern matematiğin temel araştırma alanlarından biri haline gelmiştir. Sağlık sorunları nedeniyle 1919 yılında Hindistan’a dönen Ramanujan, bir yıl sonra henüz 32 yaşındayken yaşamını kaybetmiştir. Kısa ömrüne rağmen geride bıraktığı binlerce formül ve geniş matematiksel miras, onun sezgisel zekasının ve yaratıcı gücünün etkileyici bir göstergesidir. Günümüzde Ramanujan’ın çalışmaları özellikle q – serileri, modüler biçimler, kombinatorik, sayılar teorisi ve matematiksel fizik gibi alanlarda halen yoğun bir ilgiyle araştırılmakta ve gelişmelere yön vermektedir.

Ramanujan özdeşliği, fizikte 1981 yılında Baxter’ın *Hard Hexagon* modeline ilişkin bir makalesinde ele alınmıştır (Baxter & Rogers, 1981). Ancak, Rogers–Ramanujan özdeşliği, belirli dışlama istatistiklerine uyan yarı parçacıklardan oluşan bir fiziksel sistemin bölüntü fonksiyonu olarak yorumlanması, 1990’lara kadar McCoy ve çalışma arkadaşları tarafından gerçekleştirilmiştir (Kedem et al., 1993). Bu dışlama istatistikleri, Haldane tarafından tanıtılan ve 1998 Nobel Fizik Ödülü’ne konu olan kesirli quantum Hall etkisinde ortaya çıkan kesirli istatistiklerle ilişkilidir (Haldane, 1991).

Ramanujan, literatürde *Ramanujan fonksiyonu* veya *q – Airy fonksiyonu* olarak da adlandırılan $A_q(z)$ fonksiyonunu tanıtmış ve bu fonksiyonun birçok özelliğini *Lost Notebooks* eserinde incelemiştir (Ramanujan, 1988). Gerçekten de $A_q(z)$ fonksiyonu, pek çok Rogers–Ramanujan türü tanımın bir genellemesidir. Özellikle $A_q(1)$ ve $A_q(q)$ bu tanımlamalar arasında en iyi bilenenleridir.

2018 yılında İsmail ve Zhang, $A_q(z)$ fonksiyonunun bir genellemesi olan ve Stieltjes–Wigert polinomuyla ilişkili olan $A_q^{(\alpha)}(z)$ fonksiyonunu tanımlamış ve incelemiştir (İsmail & Zhang, 2018).

İsmail ve Zhang tarafından Ramanujan tipi tam fonksiyonu $\alpha > 0$, $0 < q < 1$ ve $a \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$A_q^{(\alpha)}(a; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a; q)_k q^{\alpha k^2}}{(q; q)_k} z^k, \quad (z \in \mathbb{C}) \quad (3.6)$$

şeklinde tanımlanmaktadır (İsmail & Zhang, 2018).

2017 yılında Zhang $A_q^{(\alpha)}(z)$ fonksiyonunun sıfırlarının reel olduğunu kanıtlamıştır (Zhang, 2017). 2021 yılında Deniz $A_q^{(\alpha)}(z)$ fonksiyonunun geometrik özelliklerini incelemiştir (Deniz, 2021).

a ve α parametrelerinin özel değerleri için aşağıdaki

$$A_q^{\left(\frac{1}{2}\right)}(q^{-n}; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^{-n}; q)_k q^{\frac{k^2}{2}}}{(q; q)_k} z^k = (q; q)_n S_n\left(zq^{\frac{1}{2}-n}; q\right)$$

$$A_q^{(1)}(0; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q; q)_n} z^n = A_q(-z)$$

ve

$$A_q^{(1)}(q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} z^n$$

funksiyonları elde edilir. Burada $S_n(z; q)$ Stieltjes–Wigert polinomudur (İsmail, 2005).

Tez çalışmasında $A_q^{(\alpha)}$ fonksiyonun Turán tipi eşitsizlikleri ve monotonluğu bütün yönleriyle ele alınmıştır.

3.2. Modifiye q – Tricomi Fonksiyonu

Riyasat ve arkadaşları, q – Tricomi fonksiyonlarını $\mathcal{T}_n(q; z)$ tanıtmış ve incelemişlerdir (Riyasat & al., 2020). q – Tricomi fonksiyonları, klasik Tricomi fonksiyonlarının genelleştirilmiş bir formudur. q – Tricomi fonksiyonları $\mathcal{T}_n(q; z)$, üreteç fonksiyon yardımıyla

$$e_q(m)E_q\left(\frac{-z}{m}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{T}_n(q; z)m^n \quad (m \neq 0, z \in \mathbb{C})$$

şeklinde olup

$$\mathcal{T}_{-n}(q; z) = (-z)^n \mathcal{T}_n(q; z)$$

bağıntısı geçerlidir. $\mathcal{T}_n(q; z)$ fonksiyonlarının seri formu

$$\mathcal{T}_n(q; z) = \frac{1}{(q; q)_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{(q; q)_k (q^{n+1}; q)_k} \quad (3.7)$$

şeklindedir. $\mathcal{T}_n(q; z)$ fonksiyonu $|z| < 1$ için yakınsaktır. Özel olarak $q \rightarrow 1$ için

$$\mathcal{T}_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} z^k \quad (3.8)$$

klasik Tricomi fonksiyonu elde edilir (Andrews, 1985).

Modifiye q – Tricomi fonksiyonu ve modifiye Tricomi fonksiyonu sırasıyla

$$\mathcal{C}_n(q; z) = \frac{1}{(q; q)_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(q; q)_k (q^{n+1}; q)_k} \quad (3.9)$$

ve

$$\mathcal{C}_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!(n+k)!} \quad (3.10)$$

şeklinde tanımlanır.

Tricomi fonksiyonu, uygulamalı matematik ve matematiksel fiziğin birçok alanda uygulaması olması nedeniyle önemli özel bir fonksiyondur.

Tez çalışmasında $C_n(q; z)$ fonksiyonu için Turán tipi eşitsizlikler ayrıntılı bir şekilde çalışılmıştır.

3.3. q – Bessel Fonksiyonu

Bessel fonksiyonlarının en eski bilinen q – versiyonları , 1903–1905 yılları arasında F. H. Jackson tarafından tanıtılmış ve daha sonra İsmail tarafından güncel olarak yeniden yazılmıştır (İsmail, 1982). İsmail, q – Bessel fonksiyonlarını

$$J_v^{(2)}(z; q) = \frac{(q^{v+1}; q)_\infty}{(q; q)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(n+v)}}{(q; q)_n (q^{v+1}; q)_n} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+v} \quad (3.11)$$

ve

$$J_v^{(3)}(z; q) = \frac{(q^{v+1}; q)_\infty}{(q; q)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(n+1)/2}}{(q; q)_n (q^{v+1}; q)_n} z^{2n+v} \quad (3.12)$$

şeklinde tanımlamış (Annaby & Mansour, 2012). Burada $0 < q < 1$, $v > -1$ ve $z \in \mathbb{C}$ dir. Literatürde $J_v^{(2)}$ ve $J_v^{(3)}$ fonksiyonları Jackson ve Hahn-Exton q – Bessel fonksiyonları olarak da bilinirler. Ayrıca, q – Bessel fonksiyonu normalize değildir.

q – Bessel fonksiyonun bazı normalize edilmiş halleri

$$\begin{aligned} \Phi_v(z; q) &= (1-q)^v 2^v z^{1-\frac{v}{2}} J_v^{(2)}(\sqrt{z}; q) \\ &= \frac{(q^{v+1}; q)_\infty}{(q; q)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(n+v)} (1-q)^v}{4^n (q; q)_n (q^{v+1}; q)_n} z^{n+1} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \Psi_v(z; q) &= (1-q)^v 2^{\frac{v}{2}} z^{1-\frac{v}{2}} J_v^{(3)}(\sqrt{z/2}; q) \\ &= \frac{(q^{v+1}; q)_\infty}{(q; q)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(n+1)/2} (1-q)^v}{2^n (q; q)_n (q^{v+1}; q)_n} z^{n+1} \end{aligned}$$

şeklindedir.

Φ_v ve Ψ_v fonksiyonları

$$\Gamma_q(v+n+1) = \frac{(q; q)_\infty (q^{v+1}; q)_n}{(q^{v+1}; q)_\infty (1-q)^{v+n}}$$

bağıntısı yardımıyla, sırasıyla

$$\Phi_v(z; q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(n+v)}}{4^n (q; q)_n (1-q)^n \Gamma_q(v+n+1)} z^{n+1} \quad (3.13)$$

ve

$$\Psi_v(z; q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(n+1)/2}}{2^n (q; q)_n (1-q)^n \Gamma_q(v+n+1)} z^{n+1} \quad (3.14)$$

şeklinde yazılır.

Tez çalışmasında Φ_v ve Ψ_v fonksiyonlarının monotonluğu ayrıntılı bir şekilde çalışılmıştır.

Klasik birinci tür Bessel fonksiyonu $J_v(z)$, Jackson ve Hahn–Exton q –Bessel fonksiyonlarının özel bir halidir. Özellikle, $q \rightarrow 1$ için

$$J_v^{(2)}((1-q)z; q) = J_v(z)$$

ve

$$J_v^{(3)}((1-q)z; q) = J_v(2z)$$

fonksiyonları elde edilir.

3.4. q –Struve-Bessel Fonksiyonu

2022 yılında Oraby ve Mansour, $H_v^{(s)}(z; q^2)$ q –Struve-Bessel fonksiyonlarını

$s = 2, 3$ için $q \in (0, 1)$, $\Re(v) > -\frac{1}{2}$ ve $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$H_v^{(2)}(z; q^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{2k^2+2kv+2k}}{\Gamma_{q^2}\left(k + \frac{3}{2}\right) \Gamma_{q^2}\left(k + v + \frac{3}{2}\right)} \left(\frac{z}{1+q}\right)^{2k+v+1} \quad (3.15)$$

ve

$$H_v^{(3)}(z; q^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{k^2+k}}{\Gamma_{q^2}\left(k + \frac{3}{2}\right) \Gamma_{q^2}\left(k + v + \frac{3}{2}\right)} \left(\frac{z}{1+q}\right)^{2k+v+1} \quad (3.16)$$

şeklinde tanımlamıştır (Oraby & Mansour, 2022). Bu fonksiyonlar normalize değildir. q – Struve-Bessel fonksiyonlarının normalize edilmiş versiyonları

$$\eta_v(z; q^2) = (1+q)^v z^{\frac{1-v}{2}} H_v^{(2)}(\sqrt{z}; q^2) \quad (3.17)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{2k^2+2kv+2k}}{\Gamma_{q^2}\left(k + \frac{3}{2}\right) \Gamma_{q^2}\left(k + v + \frac{3}{2}\right) (1+q)^{2k+1}} z^{k+1},$$

$$\xi_v(z; q^2) = (1+q)^v z^{\frac{1-v}{2}} H_v^{(3)}(\sqrt{z}; q^2) \quad (3.18)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{k^2+k}}{\Gamma_{q^2}\left(k + \frac{3}{2}\right) \Gamma_{q^2}\left(k + v + \frac{3}{2}\right) (1+q)^{2k+1}} z^{k+1},$$

$$\lambda_v(z; q^2) = (1+q)^v z^{-v} H_v^{(3)}(z; q^2) \quad (3.19)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{k^2+k}}{\Gamma_{q^2}\left(k + \frac{3}{2}\right) \Gamma_{q^2}\left(k + v + \frac{3}{2}\right) (1+q)^{2k+1}} z^{2k+1}$$

ve

$$\gamma_v(z; q^2) = (1+q)^v z^{-v} H_v^{(2)}(z; q^2) \quad (3.20)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{2k^2+2kv+2k}}{\Gamma_{q^2}\left(k + \frac{3}{2}\right) \Gamma_{q^2}\left(k + v + \frac{3}{2}\right) (1+q)^{2k+1}} z^{2k+1}$$

şeklindedir.

Tez çalışmamızda q – Struve-Bessel fonksiyonlarının bu normalize hallerinin monotonluk incelemesi yapılmıştır.

4.ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, çalışmamızda elde edilen bulgulara yer verilmiştir. Bu tez çalışmasının temel amacı iki ana problem üzerine yoğunlaşmaktadır: bunlardan ilki Ramanujan tipi tam fonksiyonu ve modifiye q – Tricomi özel fonksiyonlarının Turán tipi eşitsizliklerinin incelenmesi, diğeri ise Ramanujan tipi tam fonksiyonu, q – Bessel ve q – Struve-Bessel özel fonksiyonlarının monotonluk özelliklerinin araştırılmasıdır.

Bu tezin araştırma bulguları kısmı beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde Ramanujan tipi tam fonksiyonu ile ilgili genel bilgiler verilmekte ve bu fonksiyon için bazı Turán tipi eşitsizlikler verilmiştir. Ayrıca, söz konusu fonksiyonun seri açılımındaki kalan terim için bazı Turán tipi eşitsizlikler elde edilmiştir. Ana sonuçların ispatında kullanılan temel araçlar, Ramanujan tipi tam fonksiyonun oranlarının monotonluk özellikleridir. İspatlarda elde edilen sonuçlar grafiklerle de desteklenmektedir.

İkinci bölümde, önemli bir diğeri özel fonksiyon olan Tricomi fonksiyonu hakkında genel bilgiler verilmekte ve modifiye q – Tricomi fonksiyonu ve seri açılımındaki kalan terim için bazı Turán tipi eşitsizlikler elde edilmiştir. Teoremlerin ispatlarında yine monotonluk özelliklerinden yararlanılmış ve bu çalışmada da elde edilen sonuçlar grafiklerle desteklenmiştir.

Üçüncü bölümde normalize edilmiş Jackson ve Hahn-Exton q – Bessel fonksiyonları için subordinasyon faktör dizileri yöntemini kullanarak monotonluk özellikleri araştırılmıştır. Ayrıca, $q \rightarrow 1$ özel durumunda, Cotîrlă ve Szász'a ait sonuç elde edilmektedir (Cotîrlă & Szász, 2024).

Dördüncü bölümde ise Ramanujan tipi tam fonksiyonun monotonluğu üzerine yapılan çalışmalara ait bulgular verilmiştir. Ana teoremin ispatında subordinasyon faktör dizisi yöntemi kullanılmıştır.

Son bölümde ise yine subordinasyon faktör dizisi yöntemi kullanılarak normalize edilmiş q – Struve-Bessel fonksiyonlarının monotonluk özellikleri çalışılmıştır. Elde edilen bazı veriler grafiklerle desteklenmektedir. Özel fonksiyonların monotonluğuna ilişkin literatürde yer alan bazı çalışmalara yer verilmiştir.

4.1. Ramanujan Tipi Tam Fonksiyonu için Turan Tipi Eşitsizlikler

Ana sonuçlarımızın ispatında kullanılacak lemmaların ilki aşağıdaki şekildedir.

Lemma 4. 1. 1: $a \geq 0$, $\alpha > 0$ ve $0 < q < 1$ olsun. Bu durumda $z \in \mathbb{C}$ için

$$A_q^{(\alpha)}(q^{a+1}; z) - A_q^{(\alpha)}(q^a; z) = q^{\alpha+a} z A_q^{(\alpha)}(q^{a+1}; q^{2\alpha} z) \quad (4.1)$$

bağıntısı doğrudur (Özkan et al., 2025a).

İspat: $A_q^{(\alpha)}$ fonksiyonunda a yerine q^a ve z yerine $\frac{z}{q^{2\alpha}}$ yazılırsa

$$\begin{aligned} & A_q^{(\alpha)}(q^{a+1}; z/q^{2\alpha}) - A_q^{(\alpha)}(q^a; z/q^{2\alpha}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((q^{a+1}; q)_k - (q^a; q)_k) q^{\alpha k^2}}{(q; q)_k} \left(\frac{z}{q^{2\alpha}} \right)^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{((q^{a+1}; q)_k - (q^a; q)_k) q^{\alpha k^2}}{(q; q)_k} \left(\frac{z}{q^{2\alpha}} \right)^k \\ &= q^{\alpha} z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((q^{a+1}; q)_{k+1} - (q^a; q)_{k+1}) q^{\alpha k^2}}{(q; q)_{k+1}} z^k \end{aligned} \quad (4.2)$$

elde edilir. Ayrıca, (2.12) ve (2.14) bağıntıları dikkate alındığında

$$\frac{\Gamma_q(a+k+1)}{\Gamma_q(a+1)} = \frac{(q^{a+1}; q)_k}{(1-q)^k}$$

ve

$$\Gamma_q(a+k+2) = \frac{1-q^{a+k+1}}{1-q} \Gamma_q(a+k+1)$$

eşitlikleri yazılır. Buradan

$$\begin{aligned} & (q^{a+1}; q)_{k+1} - (q^a; q)_{k+1} \\ &= \frac{(1-q)^{k+1} \Gamma_q(a+k+2)}{\Gamma_q(a+1)} - \frac{(1-q)^{k+1} \Gamma_q(a+k+1)}{\Gamma_q(a)} \end{aligned}$$

$$= \frac{q^a (1-q)^k (1-q^{k+1}) \Gamma_q(a+k+1)}{\Gamma_q(a+1)} = q^a (1-q^{k+1}) (q^{a+1}; q)_k \quad (4.3)$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla

$$(q; q)_{k+1} = (1-q^{k+1}) (q; q)_k$$

eşitliği (4.3)' de yerine yazıldığında

$$(q^{a+1}; q)_{k+1} - (q^a; q)_{k+1} = q^a \frac{(q; q)_{k+1}}{(q; q)_k} (q^{a+1}; q)_k$$

bulunur. Böylece elde edilen son bulgular (4.2) eşitliğinde yazılırsa

$$\begin{aligned} A_q^{(\alpha)} \left(q^{a+1}; \frac{z}{q^{2\alpha}} \right) - A_q^{(\alpha)} \left(q^a; \frac{z}{q^{2\alpha}} \right) &= q^{\alpha+a} z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^{a+1}; q)_k}{(q; q)_k} z^k \\ &= q^{\alpha+a} z A_q^{(\alpha)} (q^{a+1}; q^{2\alpha} z) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

Böylece lemmanın ispatı tamamlanmıştır.

Lemma 4. 1. 2: $\lambda > 0$ ve $0 < q < 1$ olmak üzere

$$f_\lambda(q; x) = \frac{\Gamma_q(x + \lambda)}{\Gamma_q(x)}$$

fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında artandır. Ayrıca $m, n, x > 0$ için

$$\Gamma_q(x+m) \Gamma_q(x+n) \leq \Gamma_q(x) \Gamma_q(x+m+n) \quad (4.4)$$

eşitsizliği doğrudur (Özkan et al., 2025a).

İspat: $f_\lambda(q; x)$ fonksiyonun logaritmik türevinden ve (2.19) ile tanımlı q -digamma fonksiyonunun monoton artanlığından (bkz. syf 24)

$$\frac{f'_\lambda(q; x)}{f_\lambda(q; x)} = \frac{\Gamma'_q(x + \lambda)}{\Gamma_q(x + \lambda)} - \frac{\Gamma'_q(x)}{\Gamma_q(x)} = \psi_q(x + \lambda) - \psi_q(x) > 0 \quad (4.5)$$

yazılır. Buradan $x \mapsto f_\lambda(q; x)$ fonksiyonunun $(0, \infty)$ aralığında artan olduğu görülür.

Dolayısıyla, $m, n > 0$ ve $0 < q < 1$ değerleri için

$$f_m(q; x) \leq f_m(q; x+n)$$

elde edilir. Böylece lemmanın ispatı tamamlanmıştır.

Aşağıdaki ilk teorem Ramanujan tipi tam fonksiyonun Turán tipi eşitsizliğinin q^a durumuna göre sağladığını gösterir.

Teorem 4. 1. 3: $a \geq \mu \geq 0$, $\alpha, x > 0$ ve $0 < q < 1$ olmak üzere

$$\left(A_q^{(\alpha)}(q^a; x) \right)^2 - A_q^{(\alpha)}(q^{a+\mu}; x) A_q^{(\alpha)}(q^{a-\mu}; x) \geq 0 \quad (4.6)$$

Turán tipi eşitsizliği sağlanır. Ayrıca, bu eşitsizlik kesindir (Özkan et al., 2025a).

İspat: $(0, \infty) \ni x \mapsto F_\mu^\alpha(a, q; x)$ fonksiyonu

$$F_\mu^\alpha(a, q; x) = \left(A_q^{(\alpha)}(q^a; x) \right)^2 - A_q^{(\alpha)}(q^{a+\mu}; x) A_q^{(\alpha)}(q^{a-\mu}; x)$$

şeklinde tanımlansın. Lemma 4.1.1 dikkate alındığında,

$$\begin{aligned} & F_{\mu+1}^\alpha(a, q; x) - F_\mu^\alpha(a, q; x) \\ &= A_q^{(\alpha)}(q^{a+\mu}; x) A_q^{(\alpha)}(q^{a-\mu}; x) - A_q^{(\alpha)}(q^{a+\mu+1}; x) A_q^{(\alpha)}(q^{a-\mu-1}; x) \\ &= A_q^{(\alpha)}(q^{a-\mu}; x) \left(A_q^{(\alpha)}(q^{a+\mu}; x) - A_q^{(\alpha)}(q^{a+\mu+1}; x) \right) \\ &+ A_q^{(\alpha)}(q^{a+\mu+1}; x) \left(A_q^{(\alpha)}(q^{a-\mu}; x) - A_q^{(\alpha)}(q^{a-\mu-1}; x) \right) \\ &= -q^{a+\alpha+\mu} x A_q^{(\alpha)}(q^{a-\mu}; x) A_q^{(\alpha)}(q^{a+\mu+1}; q^{2\alpha} x) \\ &+ q^{a+\alpha-\mu-1} x A_q^{(\alpha)}(q^{a-\mu}; q^{2\alpha} x) A_q^{(\alpha)}(q^{a+\mu+1}; x) \\ &=: q^{a+\alpha-\mu-1} x G_\mu(q; x) \end{aligned}$$

yazılır. Burada

$$G_\mu(q; x) = A_q^{(\alpha)}(q^{a-\mu}; q^{2\alpha} x) A_q^{(\alpha)}(q^{a+\mu+1}; x) - q^{2\mu+1} A_q^{(\alpha)}(q^{a-\mu}; x) A_q^{(\alpha)}(q^{a+\mu}; x)$$

dır. Ayrıca, Cauchy çarpım yardımıyla

$$A_q^{(\alpha)}(q^{a-\mu}; q^{2\alpha} x) A_q^{(\alpha)}(q^{a+\mu+1}; x)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{(q^{a-\mu}; q)_j (q^{a+\mu+1}; q)_{k-j} q^{\alpha(2j+j^2+(k-j)^2)}}{(q; q)_j (q; q)_{k-j}} x^k$$

ve

$$\begin{aligned} & A_q^{(\alpha)}(q^{a-\mu}; x) A_q^{(\alpha)}(q^{a+\mu+1}; q^{2\alpha} x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{(q^{a-\mu}; q)_j (q^{a+\mu+1}; q)_{k-j} q^{\alpha(2(k-j)+j^2+(k-j)^2)}}{(q; q)_j (q; q)_{k-j}} x^k \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

Yukarıdaki işlemler dikkate alındığında,

$$\begin{aligned} G_{\mu}(q; x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k T_{j,k}^{(0)}(a, \mu; q) x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor} \left(T_{j,k}^{(0)}(a, \mu; q) + T_{k-j,k}^{(0)}(a, \mu; q) \right) x^k + \sum_{k=0}^{\infty} T_{\frac{k}{2},k}^{(0)}(a, \mu; q) x^k \end{aligned} \quad (4.7)$$

yazılır. Burada

$$T_{j,k}^{(0)}(a, \mu; q) = \frac{(q^{a-\mu}; q)_j (q^{a+\mu+1}; q)_{k-j} q^{j^2+(k-j)^2} (q^{2\alpha j} - q^{2\mu+1+2\alpha(k-j)})}{(q; q)_j (q; q)_{k-j}} \quad (4.8)$$

dır. Ayrıca, (4.8) eşitliğinden

$$\begin{aligned} & T_{j,k}^{(0)}(a, \mu; q) + T_{k-j,k}^{(0)}(a, \mu; q) \\ &= \frac{q^{j^2+(k-j)^2}}{(q; q)_j (q; q)_{k-j}} \left[(q^{a-\mu}; q)_j (q^{a+\mu+1}; q)_{k-j} (q^{2\alpha j} - q^{2\mu+1+2\alpha(k-j)}) \right. \\ & \quad \left. + (q^{a-\mu}; q)_{k-j} (q^{a+\mu+1}; q)_j (q^{2\alpha(k-j)} - q^{2\mu+1+2\alpha j}) \right] \end{aligned} \quad (4.9)$$

yazılır.

Şimdi, (4.4) eşitsizliğinde $x = a - \mu + j$, $m = k - 2j$ ve $n = 2\mu + 1$ değerleri dikkate alındığında

$$\Gamma_q(a - \mu + k - j) \Gamma_q(a + \mu + j + 1) \leq \Gamma_q(a - \mu + j) \Gamma_q(a + \mu + k - j + 1) \quad (4.10)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\frac{\Gamma_q(a+k)}{\Gamma_q(a)} = \frac{(q^a; q)_k}{(1-q)^k}$$

bağıntısı dikkate alındığında

$$\frac{\Gamma_q(a-\mu+k-j)}{\Gamma_q(a-\mu)} = \frac{(q^{a-\mu}; q)_{k-j}}{(1-q)^{k-j}},$$

$$\frac{\Gamma_q(a+\mu+1+j)}{\Gamma_q(a+\mu+1)} = \frac{(q^{a+\mu+1}; q)_j}{(1-q)^j},$$

$$\frac{\Gamma_q(a-\mu+j)}{\Gamma_q(a-\mu)} = \frac{(q^{a-\mu}; q)_j}{(1-q)^j}$$

ve

$$\frac{\Gamma_q(a+\mu+1+k-j)}{\Gamma_q(a+\mu+1)} = \frac{(q^{a+\mu+1}; q)_{k-j}}{(1-q)^{k-j}}$$

eşitlikleri yazılır. Yukarıdaki eşitlikler (4.10) eşitsizliğinde yazılırsa

$$(q^{a-\mu}; q)_{k-j} (q^{a+\mu+1}; q)_j \leq (q^{a-\mu}; q)_j (q^{a+\mu+1}; q)_{k-j} \quad (4.11)$$

elde edilir.

Belirtmeliyiz ki $j \leq \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor$ olması $k-2j > 0$ eşitsizliğine denktir. Böylece, (4.10)

eşitsizliğindeki $m = k-2j$ seçimi doğrudur. Ayrıca, $0 < q < 1$ olmak üzere

$$q^{2\alpha j} - q^{2\mu+1+2\alpha(k-j)} \geq 0$$

dır. Böylece, (4.11) eşitsizliği (4.9) eşitliğinde yazılırsa

$$\begin{aligned} & T_{j,k}^{(0)}(a, \mu; q) + T_{k-j,k}^{(0)}(a, \mu; q) \\ &= \frac{q^{j^2+(k-j)^2}}{(q; q)_j (q; q)_{k-j}} \left[(q^{a-\mu}; q)_j (q^{a+\mu+1}; q)_{k-j} (q^{2\alpha j} - q^{2\mu+1+2\alpha(k-j)}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(q^{a-\mu}; q \right)_{k-j} \left(q^{a+\mu+1}; q \right)_j \left(q^{2\alpha(k-j)} - q^{2\mu+1+2\alpha j} \right) \Big] \\
& \geq \frac{q^{j^2+(k-j)^2} \left(q^{a-\mu}; q \right)_{k-j} \left(q^{a+\mu+1}; q \right)_j}{(q; q)_j (q; q)_{k-j}} \times \left[\left(q^{2\alpha j} + q^{2\alpha(k-j)} \right) \right] (1 - q^{2\mu+1}) \\
& > 0
\end{aligned} \tag{4.12}$$

elde edilir. Bunların yanısıra (4.7) eşitliğinde $a \geq \mu > 0$, $0 < q < 1$, $T_{\frac{k}{2}, k}^{(0)}(a, \mu; q) > 0$

eşitsizlikleri ve (4.12) eşitliği dikkate alındığında $G_\mu(q; x) > 0$ yani

$$F_{\mu+1}^\alpha(a, q; x) - F_\mu^\alpha(a, q; x) > 0$$

bulunur.

Dolayısıyla $F_0(a, q; x) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
& F_{\mu+1}(a, q; x) \\
& = (F_{\mu+1}(a, q; x) - F_\mu(a, q; x)) + (F_\mu(a, q; x) - F_{\mu-1}(a, q; x)) \\
& + \dots + (F_1(a, q; x) - F_0(a, q; x)) > 0
\end{aligned} \tag{4.13}$$

olur. Böylece (4.13) eşitliğinden (4.6) eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Son olarak, bu eşitsizliğin kesin olduğunu gösterelim. Bunun için $A_q^{(\alpha)}$ nın tanımından

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{A_q^{(\alpha)}(q^{a+\mu}; x) A_q^{(\alpha)}(q^{a-\mu}; x)}{\left(A_q^{(\alpha)}(q^a; x) \right)^2} = 1 \tag{4.14}$$

olduğu kolayca görülür. Sonuç olarak (4.14) limitinden (4.6) eşitsizliğinin kesin olduğu sonucuna varılır. Böylece teoremin ispatı tamamlanmıştır.

Aşağıdaki teorem Ramanujan tam fonksiyonun Turán tipi eşitsizliğinin a değişkenine göre sağladığını gösterir.

Teorem 4.1.4: $a > 0$, $\alpha > 0$ ve $0 < q \leq e^{-1}$ olsun. Bu durumda $x > 0$ için

$$A_q^{(\alpha)}(q^a; x) A_q^{(\alpha)}(q^{a+2}; x) - \left(\frac{1 - q^a}{1 - q^{a+1}} \right) \left(A_q^{(\alpha)}(q^{a+1}; x) \right)^2 \geq 0 \tag{4.15}$$

Turán tipi eşitsizliği sağlanır. Ayrıca, bu eşitsizlik kesindir (Özkan et al., 2025a).

İspat: Γ_q fonksiyonu ile q - Shifted faktöriyeli arasındaki

$$\frac{\Gamma_q(a+k)}{\Gamma_q(a)} = \frac{(q^a; q)_k}{(1-q)^k}$$

bağıntısı dikkate alındığında $A_q^{(\alpha)}(a; x)$ fonksiyonu için

$$A_q^{(\alpha)}\left(q^a; \frac{x}{1-q}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^a; q)_k q^{\alpha k^2}}{(q; q)_k (1-q)^k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma_q(a+k) q^{\alpha k^2}}{\Gamma_q(a) (q; q)_k} x^k$$

eşitliği yazılır. Şimdi $\tilde{A}_q^{(\alpha)}\left(q^a; \frac{x}{1-q}\right)$ fonksiyonunu

$$\tilde{A}_q^{(\alpha)}\left(q^a; \frac{x}{1-q}\right) := \Gamma_q(a) A_q^{(\alpha)}\left(q^a; \frac{x}{1-q}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma_q(a+k) q^{\alpha k^2}}{(q; q)_k} x^k \quad (4.16)$$

şeklinde tanımlayalım. Dolayısıyla (4.16) tanımından

$$\begin{aligned} & \left(\tilde{A}_q^{(\alpha)}\left(q^{a+1}; \frac{x}{1-q}\right) \right)^2 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma_q(a+k+1) q^{\alpha k^2}}{(q; q)_k} x^k \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma_q(a+k+1) q^{\alpha k^2}}{(q; q)_k} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{\Gamma_q(a+j+1) \Gamma_q(a+k-j+1) q^{\alpha((k-j)^2 + j^2)}}{(q; q)_j (q; q)_{k-j}} x^k \end{aligned} \quad (4.17)$$

ve

$$\begin{aligned} & \tilde{A}_q^{(\alpha)}\left(q^a; \frac{x}{1-q}\right) \tilde{A}_q^{(\alpha)}\left(q^{a+2}; \frac{x}{1-q}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma_q(a+k) q^{\alpha k^2}}{(q; q)_k} x^k \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma_q(a+k+2) q^{\alpha k^2}}{(q; q)_k} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{\Gamma_q(a+j) \Gamma_q(a+k-j+2) q^{\alpha((k-j)^2 + j^2)}}{(q; q)_j (q; q)_{k-j}} x^k \end{aligned} \quad (4.18)$$

Cauchy çarpımları yazılır. Böylece (4.17) ve (4.18) eşitlikleri ve

$$\frac{\Gamma_q(x+1)}{\Gamma_q(x)} = \frac{1-q^x}{1-q}$$

rekürans bağıntısı dikkate alındığında

$$\begin{aligned} & \tilde{A}_q^{(\alpha)}\left(q^a; \frac{x}{1-q}\right) \tilde{A}_q^{(\alpha)}\left(q^{a+2}; \frac{x}{1-q}\right) - \left(\tilde{A}_q^{(\alpha)}\left(q^{a+1}; \frac{x}{1-q}\right)\right)^2 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k T_{j,k}^{(1)}(a; q) q^{\alpha((k-j)^2+j^2)} x^k \end{aligned} \quad (4.19)$$

eşitliği yazılır. Burada

$$T_{j,k}^{(1)}(a; q) = \frac{\Gamma_q(a+j) \Gamma_q(a+k-j+1) q^a (q^j - q^{k-j+1})}{(1-q)(q; q)_j (q; q)_{k-j}} \quad (4.20)$$

dır.

Farz edelim ki k çift doğal sayı olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^k T_{j,k}^{(1)}(a; q) q^{\alpha((k-j)^2+j^2)} \\ &= \sum_{j=0}^{\frac{k}{2}-1} T_{j,k}^{(1)}(a; q) q^{\alpha((k-j)^2+j^2)} + \sum_{j=\frac{k}{2}+1}^k T_{j,k}^{(1)}(a; q) q^{\alpha((k-j)^2+j^2)} + q^{\alpha \frac{k^2}{2}} T_{\frac{k}{2},k}^{(1)}(a; q) \\ &= \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor} \left[T_{j,k}^{(1)}(a; q) + T_{k-j,k}^{(1)}(a; q) \right] q^{\alpha((k-j)^2+j^2)} + q^{\alpha \frac{k^2}{2}} T_{\frac{k}{2},k}^{(1)}(a; q) \end{aligned} \quad (4.21)$$

elde edilir. Son eşitlik k doğal sayılarının tek olması durumunda da sağlanır. Diğer taraftan

$$\frac{\Gamma_q(x+1)}{\Gamma_q(x)} = \frac{1-q^x}{1-q}$$

rekürans bağıntısı (4.20) eşitliğinde dikkate alındığında,

$$T_{j,k}^{(1)}(a; q) + T_{k-j,k}^{(1)}(a; q) = \frac{q^a \Gamma_q(a+j) \Gamma_q(a+k-j) \Psi_{j,k}(a; q)}{(1-q)^2 (q; q)_j (q; q)_{k-j}} \quad (4.22)$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
\Psi_{j,k}(a; q) &:= (1-q)(q^j + q^{k-j}) + q^{a+k}(q^{k-2j+1} + q^{2j-k+1} - 2) \\
&= q^j(1-q-q^{a+k-j}) + q^{k-j}(1-q-q^{a+j}) + q^{a+2(k-j)+1} + q^{a+2j+1} \\
&\geq q^j(1-q-q^a) + q^{k-j}(1-q-q^a) + q^{a+2(k-j)+1} + q^{a+2j+1} \\
&= (q^j + q^{k-j})(1-q-q^a) + q^{a+2(k-j)+1} + q^{a+2j+1}
\end{aligned}$$

dır. (4.22) eşitliğinin işareti $\Psi_{j,k}(a; q)$ fonksiyonuna dolayısıyla da $1-q-q^a$ ifadesinin işaretine bağlıdır. Dolayısıyla, $a > 0$ ve $0 < q \leq e^{-1}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
1-q-q^a &= q^a(q^{-a} - q^{1-a} - 1) \\
&= q^a \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{[a \log(\frac{1}{q})]^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(a-1) \log(\frac{1}{q})]^k}{k!} - 1 \right) \\
&= q^a \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log^k(\frac{1}{q}) [a^k - (a-1)^k]}{k!} - 1 \right) \\
&= q^a \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\log^k(\frac{1}{q}) [a^k - (a-1)^k]}{k!} - \log(q) - 1 \right) > 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $\Psi_{j,k}(a; q) > 0$ yani

$$T_{j,k}^{(1)}(a; q) + T_{k-j,k}^{(1)}(a; q) > 0$$

sonucuna varılır. Ayrıca $0 < q \leq e^{-1}$ olduğundan (4.20) eşitliğinden $T_{\frac{k}{2},k}^{(1)}(a; q) > 0$ olduğu açıktır. Sonuç olarak (4.19)-(4.22) eşitlikleri dikkate alındığında teoremden istenilen eşitsizlik elde edilmiş olur.

Böylece teoremin ispatı tamamlanmıştır.

Sonuç 4.1.5: $a, x, \alpha > 0$ ve $0 < q \leq \frac{1}{e}$ olsun. Bu durumda Teorem 4.1.3 ve Teorem

4.1.4 dikkate alındığında

$$\frac{1-q^a}{1-q^{a+1}} \leq \frac{A_q^{(\alpha)}(q^a; x) A_q^{(\alpha)}(q^{a+2}; x)}{\left(A_q^{(\alpha)}(q^{a+1}; x)\right)^2} \leq 1$$

eşitsizliği sağlanır (Özkan et al., 2025a)..

Sonuç 4.1.6: Nümerik hesaplamalar $\frac{1-q^a}{1-q^{a+1}}$ sabitinin en iyi ihtimal olduğunu

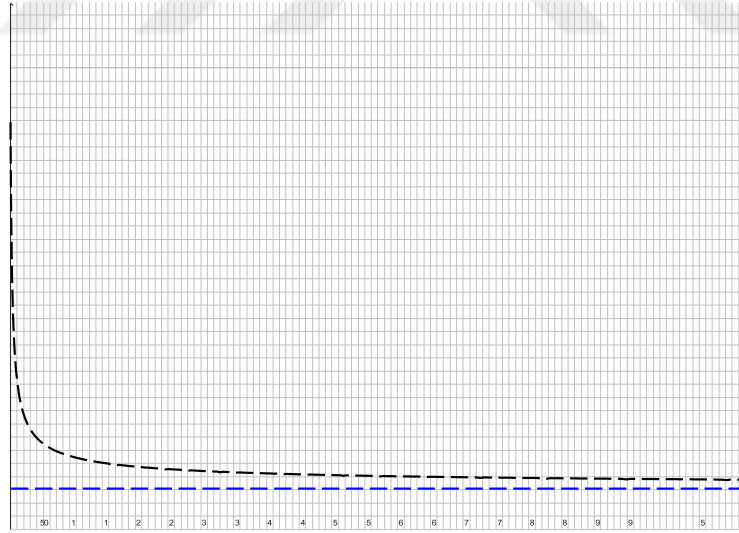
gösteriyor. Bunun için

$$F_a^{(\alpha)}(q; x) := \frac{A_q^{(\alpha)}(q^a; x) A_q^{(\alpha)}(q^{a+2}; x)}{\left(A_q^{(\alpha)}(q^{a+1}; x)\right)^2}$$

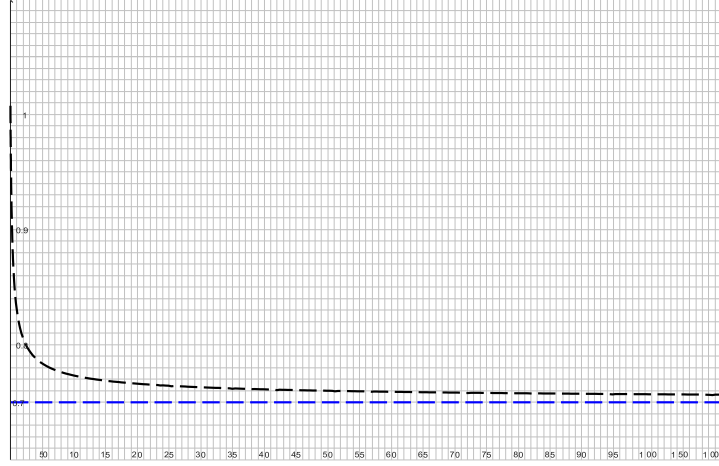
ve

$$G_a(q) = \frac{1-q^a}{1-q^{a+1}}$$

fonksiyonlarını gözönüne alalım. Bu fonksiyonların $q = \frac{1}{e}$ ve $q = \frac{1}{3}$ değerlerindeki grafikleri aşağıda verilmiştir (Özkan et al., 2025a).



Şekil 4.1. $F_1^{(1)}(\frac{1}{e}; x)$ ve $G_1(\frac{1}{e})$ fonksiyonların grafikleri



Şekil 4.2. $F_1^{(1)}(\frac{1}{3}; x)$ ve $G_1(\frac{1}{3})$ fonksiyonlarının grafikleri

Aşağıdaki teorem Ramanujan tam fonksiyonun Turán tipi eşitsizliğinin α değişkenine göre sağladığını gösterir.

Teorem 4.1.7: $\alpha > 0$, $a \in (0, 1]$ ve $0 < q < 1$ olsun. Bu durumda

$$A_q^{(\alpha)}(a; x) A_q^{(\alpha+2)}(a; x) - \left(A_q^{(\alpha+1)}(a; x) \right)^2 \geq 0 \quad (4.23)$$

Turán tipi eşitsizliği $x > 0$ için sağlanır. Ayrıca, (4.23) eşitsizliği kesin olup sabit $c_\alpha(a; q) = 1$ değeri

$$A_q^{(\alpha)}(a; x) A_q^{(\alpha+2)}(a; x) - c_\alpha(a; q) \left(A_q^{(\alpha+1)}(a; x) \right)^2 \geq 0$$

eşitsizliğini sağlayan en iyi sabittir (Özkan et al., 2025a).

İspat: $A_q^{(\alpha)}(a; x)$ fonksiyonun tanımından

$$A_q^{(\alpha+1)}(a; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a; q)_k q^{(\alpha+1)k^2}}{(q; q)_k} x^k$$

ve

$$A_q^{(\alpha+2)}(a; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a; q)_k q^{(\alpha+2)k^2}}{(q; q)_k} x^k$$

eşitlikleri yazılır. Serilerin Cauchy çarpımından

$$\left[A_q^{(\alpha+1)}(a; x) \right]^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{(a; q)_j q^{(\alpha+1)(j^2+(k-j)^2)} (a; q)_{k-j}}{(q; q)_j (q; q)_{k-j}} x^k$$

ve

$$A_q^{(\alpha)}(a; x) A_q^{(\alpha+2)}(a; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{(a; q)_j q^{\alpha(j^2+(k-j)^2)+2(k-j)^2} (a; q)_{k-j}}{(q; q)_j (q; q)_{k-j}} x^k$$

yazılır. Dolayısıyla

$$\left[A_q^{(\alpha+1)}(a; x) \right]^2 - A_q^{(\alpha)}(a; x) A_q^{(\alpha+2)}(a; x) \quad (4.24)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{(a; q)_j (a; q)_{k-j} T_{j,k}^{(2)}(\alpha; q)}{(q; q)_j (q; q)_{k-j}} x^k$$

elde edilir. Burada

$$T_{j,k}^{(2)}(\alpha; q) = q^{\alpha j^2 + (\alpha+1)(k-j)^2} \left(q^{j^2} - q^{(k-j)^2} \right)$$

dır. (4.24) eşitliğinin işareti $\alpha > 0$ ve $0 < q < 1$ olmak üzere $T_{j,k}^{(2)}(\alpha; q)$ fonksiyonun işaretine bağlıdır. Ayrıca $k \in \mathbb{N}_0$ için

$$\sum_{j=0}^k \frac{(a; q)_j (a; q)_{k-j} T_{j,k}^{(2)}(\alpha; q)}{(q; q)_j (q; q)_{k-j}} \quad (4.25)$$

$$= \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor} \frac{(a; q)_j (a; q)_{k-j} \left[T_{j,k}^{(2)}(\alpha; q) + T_{k-j,k}^{(2)}(\alpha; q) \right]}{(q; q)_j (q; q)_{k-j}}$$

yazılır. Diğer taraftan

$$T_{j,k}^{(2)}(\alpha; q) = q^{\alpha j^2 + (\alpha+1)(k-j)^2} \left(q^{j^2} - q^{(k-j)^2} \right)$$

ve

$$T_{k-j,k}^{(2)}(\alpha; q) = q^{\alpha(k-j)^2 + (\alpha+1)j^2} \left(q^{(k-j)^2} - q^{j^2} \right)$$

eşitliklerinden

$$T_{j,k}^{(2)}(\alpha; q) + T_{k-j,k}^{(2)}(\alpha; q) = -q^{\alpha(j^2 + (k-j)^2)} \left(q^{j^2} - q^{(k-j)^2} \right)^2 \leq 0 \quad (0 < q < 1)$$

bulunur.

Böylece (4.24) ve (4.25) ifadeleri birlikte düşünüldüğünde

$$\left[A_q^{(\alpha+1)}(a; x) \right]^2 - A_q^{(\alpha)}(a; x) A_q^{(\alpha+2)}(a; x) \leq 0$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi (4.23) eşitsizliğinin kesin olduğunu gösterelim. Bunun için

$$G_q^{(\alpha)}(a; x) = \frac{A_q^{(\alpha)}(a; x) A_q^{(\alpha+2)}(a; x)}{\left[A_q^{(\alpha+1)}(a; x) \right]^2}$$

fonksiyonunu ele alalım. Cauchy çarpımı yardımıyla $G_q^{(\alpha)}(a; x)$ fonksiyonu

$$A_{j,k}^{(2)}(a, \alpha; q) = \frac{(a; q)_j (a; q)_{k-j} q^{\alpha j^2 + (a+2)(k-j)^2}}{(q; q)_j (q; q)_{k-j}}$$

ve

$$B_{j,k}^{(2)}(a, \alpha; q) = \frac{(a; q)_j (a; q)_{k-j} q^{(\alpha+1)(j^2 + (k-j)^2)}}{(q; q)_j (q; q)_{k-j}}$$

olmak üzere

$$G_q^{(\alpha)}(a; x) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k A_{j,k}^{(2)}(a, \alpha; q) x^k}{\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k B_{j,k}^{(2)}(a, \alpha; q) x^k}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Şimdi $G_q^{(\alpha)}(a; x)$ fonksiyonunun monotonluğunu göstermek

için Lemma 3.1.8 kullanılacaktır. Bunun için $C_{j,k}^{(2)}(q)$ fonksiyonu

$$C_{j,k}^{(2)}(q) := \frac{A_{j,k}^{(2)}(a, \alpha; q)}{B_{j,k}^{(2)}(a, \alpha; q)} = q^{k(k-2j)}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda gerekli işlemler yapıldığında

$$\frac{C_{j+1,k}^{(2)}(q)}{C_{j,k}^{(2)}(q)} = q^{-2k} \geq 1$$

elde edilir. Sonuç olarak $(C_{j,k}^{(2)}(q))_{j \geq 0}$ fonksiyonu azalmayandır. Dolayısıyla,

$$\frac{\sum_{j=0}^k A_{j,k}^{(2)}(a, \alpha; q)}{\sum_{j=0}^k B_{j,k}^{(2)}(a, \alpha; q)}$$

oranı da artandır. Böylece, Lemma 3.1.8 dikkate alındığında $x \mapsto G_q^{(\alpha)}(a; x)$ fonksiyonun $(0, \infty)$ aralığında artan yani $G_q^{(\alpha)}(a; x) \geq G_q^{(\alpha)}(a; 0) = 1$ elde edilir. Bu ise (4.23) eşitsizliğinin kesin olduğunu gösterir.

Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1.8: Teorem 4.1.4 ve Teorem 4.1.7'deki sonuçların $f(x) = x^p$ ve $p \geq 1$ olmak üzere $A_q^{(\alpha)}(f(q^a); x)$ biçimindeki daha genel fonksiyonlar içinde geçerli olduğu açıktır.

4.1.1. Ramanujan Tipi Tam Fonksiyonun Kalan Terimleri için Turán Tipi Eşitsizlikler

Aşağıda belirtilen üstel fonksiyonun

$$R_n(x) = e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \quad (n \in \mathbb{N}_0, \quad x > 0) \quad (4.26)$$

kalanını ele alalım.

Son zamanlarda bazı matematikçiler $R_n(x)$ fonksiyonu için farklı eşitsizlikler elde ettiler. Özellikle Szegő (Szegő, 1928) ve Watson (Watson, 1928) bu problem üzerine önemli çalışmalar yapmışlardır. İlk olarak Ramanujan

$$\frac{1}{3} < \frac{n!(e^n - 2R_{n-1}(n))}{2n^n} < \frac{1}{2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

eşitsizliğini elde etmiştir (Hardy et al., 1927).

1943 yılında Kesava Menon, $R_n(x)$ fonksiyonuyla alakalı

$$R_n(x)R_{n+2}(x) - \frac{1}{2}(R_{n+1}(x))^2 \geq 0 \quad (n \in \mathbb{N}_0, x > 0) \quad (4.27)$$

Turán tipi eşitsizliğini ispatlamıştır (Kesava, 1943).

1990 yılında Alzer (4.27) eşitsizliğinde $m(n) = \frac{1}{2}$ sabitinin en iyi ihtimal olmadığını göstermiştir. Çalışmasında

$$R_n(x)R_{n+2}(x) - m_{best}(R_{n+1}(x))^2 \geq 0 \quad (x > 0, n \in \mathbb{N}_0)$$

eşitsizliği için en iyi sabitin $m_{best}(n) = \frac{n+2}{n+3}$ olduğunu göstermiştir (Alzer, 1990).

Daha sonra ise Sitnik yaptığı çalışmada

$$(R_n(x))^2 - R_{n-1}(x)R_{n+1}(x) \geq 0 \quad (n \in \mathbb{N}_0, x > 0)$$

Turán tipi eşitsizliğinin kesin olduğunu göstermiştir (Sitnik, 1993).

Bu bölümde $R_n(x)$ fonksiyonun Turán tipi eşitsizliği üzerine yapılan çalışmalardan esinlenerek

$$A_{q,n}^{(\alpha)}(a; x) = A_q^{(\alpha)}(a; x) - \sum_{k=0}^n \frac{(a; q)_k q^{\alpha k^2}}{(q; q)_k} x^k = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(a; q)_k q^{\alpha k^2}}{(q; q)_k} x^k \quad (4.28)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon için Turán tipi eşitsizlikler verilecektir.

Teorem 4.1.9: $\alpha > 0$ ve $0 < q < 1$ olsun. Eğer $a \in [0, 1)$ ise, bu durumda

$$\left[A_{q,n+1}^{(\alpha)}(q^a; x) \right]^2 - A_{q,n}^{(\alpha)}(q^a; x) A_{q,n+2}^{(\alpha)}(q^a; x) \geq 0 \quad (4.29)$$

Turán tipi eşitsizliği $x > 0$ için sağlanır (Özkan et al., 2025a).

İspat: $A_{q,n}^{(\alpha)}(a; x)$ fonksiyonunun tanımından

$$A_{q,n}^{(\alpha)}\left(q^a; \frac{x}{1-q}\right) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(q^a; q)_k q^{\alpha k^2}}{(q; q)_k (1-q)^k} x^k,$$

$$A_{q,n+1}^{(\alpha)}\left(q^a; \frac{x}{1-q}\right) = \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{(q^a; q)_k q^{\alpha k^2}}{(q; q)_k (1-q)^k} x^k$$

ve

$$A_{q,n+2}^{(\alpha)}\left(q^a; \frac{x}{1-q}\right) = \sum_{k=n+3}^{\infty} \frac{(q^a; q)_k q^{\alpha k^2}}{(q; q)_k (1-q)^k} x^k$$

olur. Diğer taraftan

$$\frac{\Gamma_q(a+k)}{\Gamma_q(a)} = \frac{(q^a; q)_k}{(1-q)^k}$$

bağıntısı yardımıyla

$$\frac{(q^a; q)_{n+1} q^{\alpha(n+1)^2}}{(q; q)_{n+1} (1-q)^{n+1}} = \frac{\Gamma_q(a+n+1) q^{\alpha(n+1)^2}}{\Gamma_q(a) (q; q)_{n+1}}$$

ve

$$\frac{(q^a; q)_{n+2} q^{\alpha(n+2)^2}}{(q; q)_{n+2} (1-q)^{n+2}} = \frac{\Gamma_q(a+n+2) q^{\alpha(n+2)^2}}{\Gamma_q(a) (q; q)_{n+2}}$$

eşitlikleri yazılır. Dolayısıyla yukarıdaki eşitliklerden

$$A_{q,n}^{(\alpha)}\left(q^a, \frac{x}{1-q}\right) = A_{q,n+1}^{(\alpha)}\left(q^a, \frac{x}{1-q}\right) + \frac{\Gamma_q(a+n+1) q^{\alpha(n+1)^2}}{\Gamma_q(a) (q; q)_{n+1}} x^{n+1} \quad (4.30)$$

ve

$$A_{q,n+2}^{(\alpha)}\left(q^a, \frac{x}{1-q}\right) = A_{q,n+1}^{(\alpha)}\left(q^a, \frac{x}{1-q}\right) - \frac{\Gamma_q(a+n+2) q^{\alpha(n+2)^2}}{\Gamma_q(a) (q; q)_{n+2}} x^{n+2}$$

yazılır. Böylece yukarıdaki son eşitlikler dikkate alındığında

$$\begin{aligned} & A_{q,n}^{(\alpha)}\left(q^a; \frac{x}{1-q}\right) A_{q,n+2}^{(\alpha)}\left(q^a; \frac{x}{1-q}\right) - \left[A_{q,n+1}^{(\alpha)}\left(q^a; \frac{x}{1-q}\right) \right]^2 \\ &= A_{q,n+1}^{(\alpha)}\left(q^a; \frac{x}{1-q}\right) \left[\frac{\Gamma_q(a+n+1) q^{\alpha(n+1)^2}}{\Gamma_q(a) (q; q)_{n+1}} x^{n+1} - \frac{\Gamma_q(a+n+2) q^{\alpha(n+2)^2}}{\Gamma_q(a) (q; q)_{n+2}} x^{n+2} \right] \\ & \quad - \frac{\Gamma_q(a+n+1) \Gamma_q(a+n+2) q^{\alpha[(n+1)^2 + (n+2)^2]}}{\Gamma_q^2(a) (q; q)_{n+1} (q; q)_{n+2}} x^{2n+3} \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
& A_{q,n+1}^{(\alpha)} \left(q^a, \frac{x}{1-q} \right) \left[\frac{\Gamma_q(a+n+1)q^{\alpha(n+1)^2}}{\Gamma_q(a)(q;q)_{n+1}} x^{n+1} - \frac{\Gamma_q(a+n+2)q^{\alpha(n+2)^2}}{\Gamma_q(a)(q;q)_{n+2}} x^{n+2} \right] \\
&= \frac{\Gamma_q(a+n+1)q^{\alpha(n+1)^2}}{\Gamma_q(a)(q;q)_{n+1}} \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{(q^a;q)_k q^{\alpha k^2}}{(q;q)_k (1-q)^k} x^{k+n+1} \\
&\quad - \frac{\Gamma_q(a+n+2)q^{\alpha(n+2)^2}}{\Gamma_q(a)(q;q)_{n+2}} \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{(q^a;q)_k q^{\alpha k^2}}{(q;q)_k (1-q)^k} x^{k+n+2} \\
&= \frac{\Gamma_q(a+n+1)\Gamma_q(a+n+2)q^{\alpha[(n+1)^2+(n+2)^2]}}{\Gamma_q^2(a)(q;q)_{n+1}(q;q)_{n+2}} x^{2n+3} \\
&\quad + \frac{\Gamma_q(a+n+1)q^{\alpha(n+1)^2}}{\Gamma_q(a)(q;q)_{n+1}} \sum_{k=n+3}^{\infty} \frac{(q^a;q)_k q^{\alpha k^2}}{(q;q)_k (1-q)^k} x^{k+n+1} \\
&\quad - \frac{\Gamma_q(a+n+2)q^{\alpha(n+2)^2}}{\Gamma_q(a)(q;q)_{n+2}} \sum_{k=n+3}^{\infty} \frac{(q^a;q)_{k-1} q^{\alpha(k-1)^2}}{(q;q)_{k-1} (1-q)^{k-1}} x^{k+n+1}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece,

$$\begin{aligned}
& A_{q,n}^{(\alpha)} \left(q^a, \frac{x}{1-q} \right) A_{q,n+2}^{(\alpha)} \left(q^a, \frac{x}{1-q} \right) - \left[A_{q,n+1}^{(\alpha)} \left(q^a, \frac{x}{1-q} \right) \right]^2 \\
&= \sum_{k=n+3}^{\infty} \left[\frac{\Gamma_q(a+n+1)\Gamma_q(a+k)q^{\alpha[k^2+(n+1)^2]}}{\Gamma_q^2(a)(q;q)_k (q;q)_{n+1}} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\Gamma_q(a+k-1)\Gamma_q(a+n+2)q^{\alpha[(k-1)^2+(n+2)^2]}}{\Gamma_q^2(a)(q;q)_{k-1} (q;q)_{n+2}} \right] x^{k+n+1} \\
&=: \sum_{k=n+3}^{\infty} \Xi_n^{(\alpha)}(a;q) x^{k+n+1}
\end{aligned} \tag{4.32}$$

sonucuna varılır. Tekrar Γ_q fonksiyonu için

$$\frac{\Gamma_q(a+k)}{\Gamma_q(a)} = \frac{(q^a; q)_k}{(1-q)^k}$$

rekürans bağıntısı dikkate alındığında

$$\Xi_n^{(\alpha)}(a; q) = \frac{\Gamma_q(a+n+1)\Gamma_q(a+k-1)q^{\alpha(k^2+(n+1)^2)}}{\Gamma_q^2(a)(1-q)(q; q)_{k-1}(q; q)_{n+1}} \left[\frac{1-q^{a+k-1}}{1-q^k} - \frac{q^{2\alpha(n+2-k)}(1-q^{a+n+1})}{1-q^{n+2}} \right]$$

elde edilir. Ayrıca, $k \geq n+3$ ve $0 < q < 1$ için $q^{2\alpha(n+2-k)} \geq 1$ dir. Böylece $0 < q < 1$ ve $a \in [0, 1)$ için

$$\begin{aligned} \Xi_n^{(\alpha)}(a; q) &\leq \frac{\Gamma_q(a+n+1)\Gamma_q(a+k-1)q^{\alpha[k^2+(n+1)^2]}}{\Gamma_q^2(a)(1-q)(q; q)_{k-1}(q; q)_{n+1}} \left[\frac{1-q^{a+k-1}}{1-q^k} - \frac{(1-q^{a+n+1})}{1-q^{n+2}} \right] \\ &= \frac{q^{k+\alpha[k^2+(n+1)^2]}(1-q^{a-1})(1-q^{n+2-k})\Gamma_q(a+n+1)\Gamma_q(a+k-1)}{\Gamma_q^2(a)(1-q)(q; q)_k(q; q)_{n+2}} \leq 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

eşitsizliği bulunur. Dolayısıyla (4.32) ve (4.31) ifadelerinden

$$A_{q,n}^{(\alpha)}\left(q^a, \frac{x}{1-q}\right) A_{q,n+2}^{(\alpha)}\left(q^a, \frac{x}{1-q}\right) - \left[A_{q,n+1}^{(\alpha)}\left(q^a, \frac{x}{1-q}\right) \right]^2 = \sum_{k=n+3}^{\infty} \Xi_n^{(\alpha)} z^{k+n+1} \leq 0$$

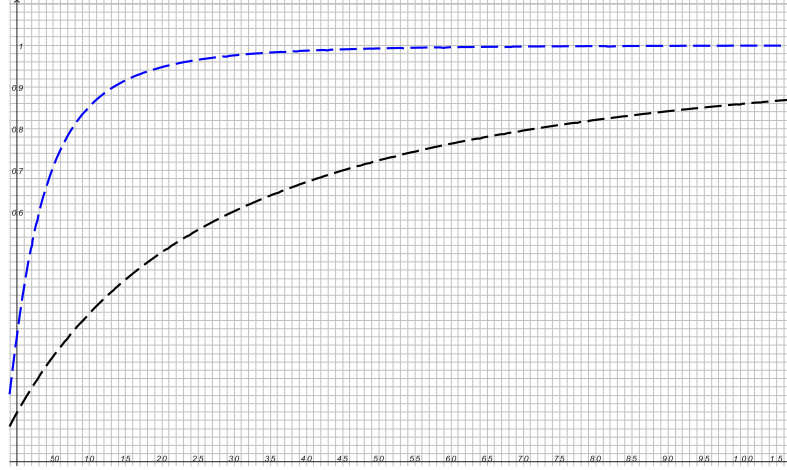
sonucuna varılır. Son eşitlikte x yerine $x(1-q)$ yazıldığında (4.29) eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmıştır.

Sonuç 4.1.10: $(0, \infty) \ni x \mapsto \mathcal{H}_n^{(\alpha)}(q, a; x)$ fonksiyonu

$$\mathcal{H}_n^{(\alpha)}(q, a; x) = \frac{A_{q,n}^{(\alpha)}(q^a; x) A_{q,n+2}^{(\alpha)}(q^a; x)}{\left[A_{q,n+1}^{(\alpha)}(q^a; x) \right]^2} \quad (4.34)$$

şeklinde tanımlansın. Bu fonksiyon için $\mathcal{H}_n^{(\alpha)}(q, a; x) \leq 1$ dir.

Nümerik hesaplamalarla bu eşitsizlikteki 1 sınırının en iyi ihtimal olduğunu gösteriyor. Bu durum aşağıdaki grafiklerde gösterilmiştir (Özkan et al., 2025a).



Şekil 4.3. $\mathcal{H}_1^{(1)}(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}; x)$ ve $\mathcal{H}_1^{(1)}(\frac{1}{2}, \frac{1}{9}; x)$ fonksiyonlarının grafikleri

Sonuç 4.1.11: $\alpha > 0$, $0 < q < 1$ ve $a \in [0, 1)$ olsun. Bu durumda $x > 0$ için

$$\left[\frac{q^\alpha (1 - q^a)}{1 - q} \left(\frac{q^\alpha (1 - q^{a+1})}{1 - q^2} - 1 \right) \right] A_q^{(\alpha)}(q^a; x) \\ \geq \frac{q^\alpha (1 - q^a)}{1 - q} \left(1 - \frac{q^\alpha (1 - q^{a+1})}{1 - q^2} - \frac{q^\alpha (1 - q^a)}{1 - q} \right)$$

eşitsizliği sağlanır (Özkan et al., 2025a).

İspat: $A_{q,n}^{(\alpha)}(a; x)$ fonksiyonun tanımından

$$A_{q,0}^{(\alpha)}(q^a; x) = A_q^{(\alpha)}(q^a; x) - 1,$$

$$A_{q,1}^{(\alpha)}(q^a; x) = A_q^{(\alpha)}(q^a; x) - 1 - \frac{(q^a; q)_1 q^\alpha}{(q; q)_1} x$$

ve

$$A_{q,2}^{(\alpha)}(q^a; x) = A_q^{(\alpha)}(q^a; x) - 1 - \frac{(q^a; q)_1 q^\alpha}{(q; q)_1} x - \frac{(q^a; q)_2 q^{2\alpha}}{(q; q)_2} x^2$$

eşitlikleri yazılır. Bu eşitlikler (4.29) eşitsizliğinde dikkate alındığında istenilen eşitsizlik elde edilir. Böylece ispat tamamlanmıştır.

Teorem 4.1.9 da $a = 0$ ve $\alpha = 1$ özel değerleri için

$$A_q^{(1)}(0; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q; q)_n} z^n = A_q(-z)$$

fonksiyonu yazılır. Bu fonksiyon için Turán tipi eşitsizliği aşağıda verilmiştir.

Sonuç 4.1.12: $0 < q < 1$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda $x > 0$ için

$$\left[A_{q,n+1}(-x) \right]^2 - A_{q,n}(-x) A_{q,n+2}(-x) \geq 0$$

Turán tipi eşitsizliği sağlanır. Burada

$$A_{q,n}(-x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{q^{k^2}}{(q; q)_k} x^k$$

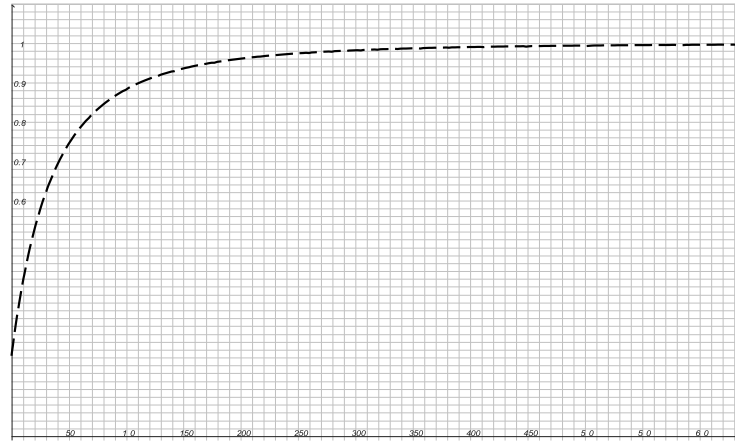
dır (Özkan et al., 2025a).

Örnek 4.1.13: $\mathcal{A}_{q,n} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\mathcal{A}_{q,n}(x) = \frac{A_{q,n}(-x) A_{q,n+2}(-x)}{\left(A_{q,n+1}(-x) \right)^2}$$

şeklinde tanımlansın. Bu fonksiyon üstten 1 ile sınırlıdır.

Özel olarak $\mathcal{A}_{\frac{1}{2},0}(x)$ fonksiyonun üstten 1 ile sınırlı olduğu aşağıdaki grafikte verilmiştir (Özkan et al., 2025a).



Şekil 4.4. $\mathcal{A}_{\frac{1}{2},0}(x)$ fonksiyonunun grafiği

Teorem 4.1.14: $x, \alpha > 0$, $a \geq 0$, $0 < q < 1$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda, $\alpha \geq 1$ için

(4.34) de tanımlanan $\mathcal{H}_n^{(\alpha)}(q, a; x)$ fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında artandır. Diğer taraftan,

$$A_{q,n}^{(\alpha)}(q^a; x) A_{q,n+2}^{(\alpha)}(q^a; x) \quad (4.35)$$

$$-\left(\frac{q^{2\alpha} (1-q^{a+n+2})(1-q^{n+2})}{(1-q^{a+n+1})(1-q^{n+3})} \right) \left[A_{q,n+1}^{(\alpha)}(q^a; x) \right]^2 \geq 0$$

Turán tipi eşitsizliği sağlanır. Ayrıca, bu eşitsizlik kesindir (Özkan et al., 2025a).

İspat: $A_{q,n}^{(\alpha)}(a; x)$ fonksiyonunun tanımından

$$A_{q,n}^{(\alpha)}(q^a; x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(q^a; q)_k q^{\alpha k^2}}{(q; q)_k} x^k,$$

$$A_{q,n+1}^{(\alpha)}(q^a; x) = \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{(q^a; q)_k q^{\alpha k^2}}{(q; q)_k} x^k$$

ve

$$A_{q,n+2}^{(\alpha)}(q^a; x) = \sum_{k=n+3}^{\infty} \frac{(q^a; q)_k q^{\alpha k^2}}{(q; q)_k} x^k$$

eşitlikleri yazılır. Seriler için Cauchy çarpım dikkat alındığında $\mathcal{H}_n^{(\alpha)}(q, a; x)$ fonksiyonu

$$\mathcal{H}_n^{(\alpha)}(q, a; x) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k A_{j,k}^{(3)}(n, q) ((1-q)x)^k}{\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k B_{j,k}^{(3)}(n, q) ((1-q)x)^k}$$

olarak yazılır. Burada

$$A_{j,k}^{(3)}(n; q) = \frac{\Gamma_q(a+j+n+1) \Gamma_q(a+k-j+n+3) q^{\alpha[(j+n+1)^2 + (k-j+n+3)^2]}}{(q; q)_{j+n+1} (q; q)_{k-j+n+3}}$$

ve

$$B_{j,k}^{(3)}(n, q) = \frac{\Gamma_q(a+j+n+2) \Gamma_q(a+k-j+n+2) q^{\alpha[(j+n+2)^2 + (k-j+n+2)^2]}}{(q; q)_{j+n+2} (q; q)_{k-j+n+2}}$$

dır. Şimdi $C_{j,k}^{(3)}(n; q)$,

$$C_{j,k}^{(3)}(n; q) := \frac{A_{j,k}^{(3)}(n; q)}{B_{j,k}^{(3)}(n; q)}$$

şeklinde tanımlansın. Diğer taraftan (2.12) ile tanımlı rekürans bağıntısı yardımıyla

$$\frac{\Gamma_q(a+j+n+2)}{\Gamma_q(a+j+n+1)} = \frac{1-q^{a+j+n+1}}{1-q}$$

ve

$$\frac{\Gamma_q(a+k-j+n+3)}{\Gamma_q(a+k-j+n+2)} = \frac{1-q^{a+k-j+n+2}}{1-q}$$

eşitlikleri yazılır. Ayrıca

$$(q; q)_{k+1} = (1-q^{k+1})(q; q)_k$$

eşitliğinden

$$(q; q)_{j+n+2} = (1-q^{j+n+2})(q; q)_{j+n+1}$$

ve

$$(q; q)_{k-j+n+3} = (1-q^{k-j+n+3})(q; q)_{k-j+n+2}$$

bağıntıları yazılır. Böylece yukarıdaki son eşitliklerden

$$\begin{aligned} C_{j,k}^{(3)}(n; q) &= \frac{q^{2\alpha(k-2j+1)} \Gamma_q(a+j+n+1) \Gamma_q(a+k-j+n+3) (q; q)_{j+n+2} (q; q)_{k-j+n+2}}{\Gamma_q(a+j+n+2) \Gamma_q(a+k-j+n+2) (q; q)_{j+n+1} (q; q)_{k-j+n+3}} \\ &= \frac{q^{2\alpha(k-2j+1)} (1-q^{a+k-j+n+2}) (1-q^{j+n+2})}{(1-q^{a+j+n+1}) (1-q^{k-j+n+3})} \end{aligned}$$

elde edilir.

Diğer taraftan $0 < q < 1$ ve $a \geq 1$ için

$$(1-q^{a+j+n+1})(1-q^{j+n+3}) - (1-q^{a+j+n+2})(1-q^{j+n+2}) = q^{j+n+2}(1-q)(1-q^{a-1}) \geq 0$$

olduğundan

$$\frac{(1-q^{a+j+n+1})(1-q^{j+n+3})}{(1-q^{a+j+n+2})(1-q^{j+n+2})} \geq 1$$

yazılır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} & \frac{C_{j+1,k}^{(3)}(n,q)}{C_{j,k}^{(3)}(n,q)} \\ &= q^{-4\alpha} \left[\frac{(1-q^{a+k-j+n+1})(1-q^{k-j+n+3})}{(1-q^{a+k-j+n+2})(1-q^{k-j+n+2})} \right] \left[\frac{(1-q^{a+j+n+1})(1-q^{j+n+3})}{(1-q^{a+j+n+2})(1-q^{j+n+2})} \right] \geq 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $(C_{j,k}^{(3)}(n,q))_{j \geq 0}$ dizisinin monoton artan olduğunu gösteririr. Böylece,

$$\left(\sum_{j=0}^k A_{j,k}^{(3)}(n,q) / \sum_{j=0}^k B_{j,k}^{(3)}(n,q) \right)_{k \geq 0}$$

dizisi artandır. Sonuç olarak Lemma 3.1.8'den, $x \mapsto \mathcal{H}_n^{(\alpha)}(q,a;x)$ fonksiyonu $(0,\infty)$ aralığında artan olup minimum değerini $x=0$ da alır. Böylece, $x>0$ için

$$\mathcal{H}_n^{(\alpha)}(q,a;x) \geq \mathcal{H}_n^{(\alpha)}(q,a;0)$$

elde edilir. Sonuç olarak (4.35) Turán tipi eşitsizliği elde edilir.

Böylece Teoremin ispatı tamamlanmıştır.

Sonuç 4.1.13: Bölüm 4.1.1 deki sonuçların $f(x)=x^p$ ve $p \geq 1$ olmak üzere $A_q^{(\alpha)}(f(q^a);x)$ biçimindeki daha genel fonksiyonlar içinde geçerlidir (Özkan et al., 2025a).

4.2. Modifiye q – Tricomi Fonksiyonu için Turán Tipi Eşitsizlikler

Bu bölümde (3.9) ile tanımlı $\mathcal{C}_n(q;z)$ modifiye q – Tricomi fonksiyonun Turán tipi eşitsizlikleri üzerine sonuçlar verilmiştir.

Ana sonuçlarımızın ispatında kullanılan ilk lemma aşağıdaki şekildedir.

Lemma 4.2.1: $0 < q < 1$ olsun. Bu durumda $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ için

$$\mathcal{C}_{n+1}(q;z) - \mathcal{C}_n(q;z) = q^{n+1} \mathcal{C}_{n+1}(q;qz) \quad (4.36)$$

eşitliği sağlanır (Deniz et al., 2025a).

İspat: (3.9) ile verilen $C_n(q; z)$ fonksiyonunu ve

$$(q; q)_{n+k} = (q; q)_n (q^{n+1}; q)_k$$

bağıntısı dikkate alındığında

$$C_n(q; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(q; q)_k (q; q)_{k+n}}$$

yazılır. Buradan

$$C_{n+1}\left(q; \frac{z}{q}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(q; q)_k (q; q)_{k+n+1}} \left(\frac{z}{q}\right)^k, \quad (4.37)$$

$$C_n\left(q; \frac{z}{q}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(q; q)_k (q; q)_{k+n}} \left(\frac{z}{q}\right)^k \quad (4.38)$$

ve

$$C_{n+1}(q; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(q; q)_k (q; q)_{k+n+1}} z^k \quad (4.40)$$

eşitlikleri yazılır. (4.37)-(4.40) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} C_{n+1}\left(q; \frac{z}{q}\right) - C_n\left(q; \frac{z}{q}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(q; q)_k (q; q)_{n+k+1}} \left(\frac{z}{q}\right)^k \\ &\quad - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(q; q)_k (q; q)_{n+k}} \left(\frac{z}{q}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(q; q)_k} \left(\frac{1}{(q; q)_{n+k+1}} - \frac{1}{(q; q)_{n+k}} \right) \left(\frac{z}{q}\right)^k \end{aligned} \quad (4.41)$$

elde edilir. Son eşitlikte $(q; q)_{n+k+1} = (1 - q^{n+k+1})(q; q)_{n+k}$ bağıntısı dikkate alındığında

$$\begin{aligned} C_{n+1}\left(q; \frac{z}{q}\right) - C_n\left(q; \frac{z}{q}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{n+1}}{(q; q)_k (q; q)_{n+k+1}} z^k \\ &= q^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(q; q)_k (q; q)_{n+k+1}} = q^{n+1} C_{n+1}(q; z) \end{aligned}$$

yazılır. Son eşitlikte z yerine qz yazıldığında (4.36) elde edilir. Böylece Lemmanın ispatı tamamlanmıştır.

Teorem 4.2.3: $z \in (-1,1)$ ve $0 < q < 1$ olsun. Bu durumda aşağıda verilen ifadeler doğrudur.

a) $n \mapsto \tilde{C}_n(q; z) = \Gamma_q(n+1)C_n(q; z)$ fonksiyonu log-konvektir.

b) Aşağıdaki

$$\tilde{C}_n(q; z)\tilde{C}_{n+2}(q; z) - \left[\tilde{C}_{n+1}(q; z) \right]^2 \geq 0 \quad (4.42)$$

Turán tipi eşitsizliği sağlanır.

c) $m, n > 0$ ve $m < n$ olmak üzere

$$\left[C_n(z) \right]^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\left[\Gamma(m+1) \right]^{\frac{1}{m}}}{\left[\Gamma(n+1) \right]^{\frac{1}{n}}} \left[C_m(z) \right]^{\frac{1}{m}} \quad (4.43)$$

eşitliği sağlanır (Deniz et al., 2025a).

İspat:

a) $n \mapsto \Gamma_q(n+1)C_n(q; z)$ fonksiyonunun log-konveks olduğunu göstermek için her bir terimin ayrı ayrı log-konveks olduğunun gösterilmesi ve log-konveks fonksiyonların toplamalarının da log-konveks olacağı özeliğinden yararlanılması yeterli olacaktır. q – digamma fonksiyonun $(0, \infty)$ aralığında artan olması ve

$$(q; q)_{n+k} = (1-q)^{n+k} \Gamma_q(n+k+1) \quad (4.44)$$

bağıntısı dikkate alındığında

$$\tilde{C}_n(q; z) := \Gamma_q(n+1)C_n(q; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma_q(n+1)z^k}{(q; q)_k (1-q)^{n+k} \Gamma_q(n+k+1)}$$

yazılır. Şimdi, $\lambda: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\lambda(x) = \frac{\Gamma_q(x+1)}{(1-q)^{x+k} \Gamma_q(x+k+1)}, \quad k \geq 0 \quad (4.45)$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Gösterelim ki λ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında log-konvektir. q -digamma fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında konkav olduğundan

$$\frac{d^2}{dx^2} [\log(\lambda(x))] = \psi'_q(x+1) - \psi'_q(x+k+1) > 0, \quad k \geq 0 \quad (4.46)$$

elde edilir. Böylece λ fonksiyonu log-konvektir. Dolayısıyla, $\tilde{C}_n(q; z)$ log-konvektir.

b) $n \mapsto \tilde{C}_n(q; z)$ fonksiyonu log-konveks olduğundan, log-konvekslik tanımından

$$\tilde{C}_{n_1+(1-t)n_2}(q; z) \leq [\tilde{C}_{n_1}(q; z)]^t [\tilde{C}_{n_2}(q; z)]^{1-t} \quad (4.47)$$

eşitsizliği $n_1, n_2 > 0$ ve $0 \leq t \leq 1$ değerleri için sağlanır. Yukarıdaki (4.47) eşitsizliğinde

özel olarak $t = \frac{1}{2}$, $n_1 = n$, $n_2 = n+2$ değerleri dikkate alındığında (4.42) elde edilir.

c) $k! = \Gamma(k+1)$ bağıntısı ve $q \rightarrow 1$ için

$$C_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!(n+k)!}$$

fonksiyonu

$$C_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)}$$

şeklinde yazılır.

$0 < m < n$ için $F_{n,m} : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu, $\tilde{C}_n(z) = \Gamma(n+1)C_n(z)$ olmak üzere

$$F_{n,m}(z) = \frac{m}{n} \log \tilde{C}_n(z) - \log \tilde{C}_m(z) \quad (4.48)$$

şeklinde tanımlayalım. Diğer yandan $\mathcal{C}_n(z)$ fonksiyonunun tanımından

$$z\mathcal{C}'_n(z) = \mathcal{C}_{n-1}(z) - n\mathcal{C}_n(z) \quad (4.49)$$

rekürans bağıntısı doğrudur. Böylece (4.49) eşitliğinden

$$F'_{n,m}(z) = \frac{1}{z} \left[\frac{m\mathcal{C}_{n-1}(z)}{n\mathcal{C}_n(z)} - \frac{\mathcal{C}_{m-1}(z)}{\mathcal{C}_m(z)} \right] = \frac{m}{z} \left[\frac{\tilde{C}_{n-1}(z)}{\tilde{C}_n(z)} - \frac{\tilde{C}_{m-1}(z)}{\tilde{C}_m(z)} \right] \quad (4.50)$$

elde edilir. Ayrıca, $n \mapsto \tilde{C}_n(z)$ fonksiyonu log-konvektir. Bunu göstermek için

$$\tilde{C}_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(n) z^k$$

alalım. Burada

$$c_k(n) = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k)}, \quad k \geq 0$$

şeklindedir. Dolayısıyla, $x \in (0, \infty)$ için $x \mapsto c_k(x)$ fonksiyonunun log-konveksliğini göstermemiz yeterlidir. Bunun için log-konveks fonksiyonların toplamının da log-konveks olduğu kullanılacaktır. Diğer taraftan ψ di-gamma fonksiyonun konkavlığından

$$\frac{d^2}{dx^2} \log(c_k(x)) = \psi'(x) - \psi'(x+k) > 0, \quad k \geq 0$$

yazılır. Sonuç olarak, $c_k(x)$ fonksiyonu log-konvektir. Bu ise, $n \mapsto \tilde{C}_{n-1}(z)$ fonksiyonunun log-konveks olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla $n \mapsto \log \tilde{C}_n(z) - \log \tilde{C}_{n-1}(z)$ fonksiyonu artan yani Dolayısıyla, $n \mapsto \frac{\tilde{C}_n(z)}{\tilde{C}_{n-1}(z)}$ fonksiyonu artandır. Elde edilen bu bilgiler (4.50) eşitliğinde dikkate alındığında $F'_{n,m}(z) < 0$ elde edilir. Buradan $F_{n,m}(z) < F_{n,m}(0) = 0$ yazılır. Böylece teoremin ispatı tamamlanmıştır.

Teorem 4.2.4: $n, \theta \in \mathbb{N}_0$, $n \geq \theta$ ve $0 < q < 1$ olsun. Bu durumda

$$[C_n(q; z)]^2 - C_{n+\theta}(q; z)C_{n-\theta}(q; z) \geq 0 \quad (4.51)$$

Turán tipi eşitsizliği $z \in (-1, 1)$ için sağlanır (Deniz et al., 2025a).

İspat: $f_\theta(n, q; z)$ fonksiyonu

$$f_\theta(n, q; z) = [C_n(q; z)]^2 - C_{n-\theta}(q; z)C_{n+\theta}(q; z)$$

şeklinde tanımlansın. Lemma 4.2.1 den

$$\begin{aligned} & f_{\theta+1}(n, q; z) - f_\theta(n, q; z) \\ &= C_{n-\theta}(q; z)C_{n+\theta}(q; z) - C_{n-\theta-1}(q; z)C_{n+\theta+1}(q; z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{C}_{n-\theta}(q; z) [\mathcal{C}_{n+\theta}(q; z) - \mathcal{C}_{n+\theta+1}(q; z)] \\
&+ \mathcal{C}_{n+\theta+1}(q; z) [\mathcal{C}_{n-\theta}(q; z) - \mathcal{C}_{n-\theta-1}(q; z)] \\
&= -q^{n+\theta+1} \mathcal{C}_{n-\theta}(q; z) \mathcal{C}_{n+\theta+1}(q; qz) \\
&+ q^{n-\theta} \mathcal{C}_{n-\theta}(q; qz) \mathcal{C}_{n+\theta+1}(q; z) \\
&=: \zeta_{n,\theta}(q; z)
\end{aligned}$$

yazılır. Şimdi, $\zeta_{n,\theta}(q; z)$ fonksiyonunun işaret incelemesi yapılacaktır. Bunun için $\mathcal{C}_n(q; z)$ fonksiyonunun tanımı ve seriler için Cauchy çarpım dikkate alındığında

$$\begin{aligned}
&q^{n+\theta+1} \mathcal{C}_{n-\theta}(q; z) \mathcal{C}_{n+\theta+1}(q; qz) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{q^{k-j+n+\theta+1}}{(q; q)_j (q; q)_{j+n-\theta} (q; q)_{k-j} (q; q)_{k-j+n+\theta+1}} z^k
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&q^{n-\theta} \mathcal{C}_{n-\theta}(q; qz) \mathcal{C}_{n+\theta+1}(q; z) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{q^{j+n-\theta}}{(q; q)_j (q; q)_{j+n-\theta} (q; q)_{k-j} (q; q)_{k-j+n+\theta+1}} z^k
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki yapılan işlemler dikkate alındığında, n çift tamsayıları için

$$\zeta_{n,\theta}(q; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k T_{j,k}^{(0)}(\theta, n, q) z^k \tag{4.52}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor} \left[T_{j,k}^{(0)}(\theta, n, q) + T_{k-j,k}^{(0)}(\theta, n, q) \right] z^k + \sum_{k=0}^{\infty} T_{\frac{k}{2},k}^{(0)}(\theta, n, q) z^k$$

yazılır. Bu eşitlik n nin tek tam sayı olması durumunda da doğrudur. Burada $\left\lfloor . \right\rfloor$ tam değer fonksiyonu ve

$$T_{j,k}^{(0)}(\theta, n, q) = \frac{q^{j+n-\theta} - q^{k-j+n+\theta+1}}{(q; q)_j (q; q)_{j+n-\theta} (q; q)_{k-j} (q; q)_{k-j+n+\theta+1}} \tag{4.53}$$

dır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
& T_{j,k}^{(0)}(\theta, n, q) + T_{k-j,k}^{(0)}(\theta, n, q) \\
&= \frac{\Delta_{j,k}(\theta, n, q)}{(q; q)_j (q; q)_{k-j} (q; q)_{j+n-\theta} (q; q)_{k-j+n-\theta} (q; q)_{j+n+\theta+1}}
\end{aligned} \tag{4.54}$$

eşitliği sağlanır. Burada,

$$\begin{aligned}
& \Delta_{j,k}(\theta, n, q) \\
&= (q^{j+n-\theta} - q^{k-j+n+\theta+1})(q; q)_{k-j+n-\theta} (q; q)_{j+n+\theta+1} \\
&+ (q^{k-j+n-\theta} - q^{j+n+\theta+1})(q; q)_{j+n-\theta} (q; q)_{k-j+n+\theta+1}
\end{aligned}$$

dır. Ayrıca, $\lambda > 0$ değerleri için $z \mapsto \frac{\Gamma_q(z+\lambda)}{\Gamma_q(z)}$ fonksiyonun $(0, \infty)$ aralığında artan olduğu göz önünde bulundurulduğunda aşağıdaki

$$\Gamma_q(z)\Gamma_q(z+\lambda+\xi) \geq \Gamma_q(z+\lambda)\Gamma_q(z+\xi) \tag{4.55}$$

eşitsizliği $z, \lambda, \xi > 0$ için sağlanır. (4.4) eşitsizliğinde $z = j+n-\theta+1$, $\lambda = k-2j$ ve $\xi = 2\theta+1$ değişken değiştirmeleri yapıldığında

$$\Gamma_q(k-j+n-\theta+1)\Gamma_q(j+n+\theta+2) \leq \Gamma_q(j+n-\theta+1)\Gamma_q(k-j+n+\theta+2) \tag{4.56}$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\Gamma_q(n+1) = \frac{(q; q)_n}{(1-q)^n}$$

eşitliği dikkate alındığında

$$\Gamma_q(k-j+n-\theta+1) = \frac{(q; q)_{k-j+n-\theta}}{(1-q)^{k-j+n-\theta}},$$

$$\Gamma_q(j+n+\theta+2) = \frac{(q; q)_{j+n+\theta+1}}{(1-q)^{j+n+\theta+1}},$$

$$\Gamma_q(j+n-\theta+1) = \frac{(q; q)_{j+n-\theta}}{(1-q)^{j+n-\theta}},$$

$$\Gamma_q(k-j+n+\theta+2) = \frac{(q; q)_{k-j+n+\theta+1}}{(1-q)^{k-j+n+\theta+1}}$$

eşitlikleri yazılır. Bu eşitlikler (4.56) eşitsizliğinde dikkate alındığında

$$(q; q)_{k-j+n-\theta} (q; q)_{j+n+\theta+1} \leq (q; q)_{j+n-\theta} (q; q)_{k-j+n+\theta+1} \quad (4.57)$$

elde edilir. Böylece, (4.54) ve (4.57) eşitsizliklerinden

$$T_{j,k}^{(0)}(\theta, n, q) + T_{k-j,k}^{(0)}(\theta, n, q)$$

$$\geq \frac{q^{j+n-\theta} (1-q^{k-2j+2\theta+1}) + q^{k-j+n-\theta} (1-q^{2j-k+2\theta+1})}{(q; q)_j (q; q)_{k-j} (q; q)_{j+n-\theta} (q; q)_{k-j+n+\theta+1}}$$

bulunur. Başlangıçta $j \leq \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor$ şartı olduğundan $k-2j > 0$ sağlanır. Bunların yanı sıra

$0 < q < 1$ için

$$q^{j+n-\theta} (1-q^{k-2j+2\theta+1}) \geq 0$$

sağlanır. Böylece, $0 < q < 1$ için

$$T_{j,k}^{(0)}(\theta, n, q) + T_{k-j,k}^{(0)}(\theta, n, q) \quad (4.58)$$

$$\geq \frac{q^{j+n-\theta} (1+q^{k-2j}) (1-q^{2\theta+1})}{(q; q)_j (q; q)_{k-j} (q; q)_{j+n-\theta} (q; q)_{k-j+n+\theta+1}} > 0$$

olur. Ayrıca (4.53) ve (4.58) ifadelerinden

$$T_{\frac{k}{2}, k}^{(0)}(\theta, n, q) = \frac{q^{\frac{k}{2}+n-\theta} (1-q^{2\theta+1})}{\left[(q; q)_{\frac{k}{2}} \right]^2 (q; q)_{\frac{k}{2}+n-\theta} (q; q)_{\frac{k}{2}+n+\theta+1}} > 0$$

eşitliği doğrudur. Böylece, $\zeta_{n,\theta}(q; z) > 0$ sağlanır. Diğer taraftan $f_0(n, q; z) = 0$ olduğu dikkate alındığında

$$\begin{aligned}
& f_{\theta+1}(n, q; z) \\
&= (f_{\theta+1}(n, q; z) - f_{\theta}(n, q; z)) + (f_{\theta}(n, q; z) - f_{\theta-1}(n, q; z)) \\
&+ \dots + (f_1(n, q; z) - f_0(n, q; z)) > 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$[C_n(q; z)]^2 \geq C_{n+\theta}(q; z)C_{n-\theta}(q; z)$$

elde edilir. Teoremin ispatı tamamlanmıştır.

Teorem 4.2.5: $0 < q < 1$ olsun. Ayrıca, $\chi_n^{(1)}(q; z)$ fonksiyonunu

$$\chi_n^{(1)}(q; z) = \frac{C_n(q; z)C_{n+2}(q; z)}{[C_{n+1}(q; z)]^2}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $z \mapsto \chi_n^{(1)}(q; z)$ fonksiyonu $(0,1)$ de artandır. Böylece

$$C_n(q; z)C_{n+2}(q; z) - \frac{1-q^{n+1}}{1-q^{n+2}}[C_{n+1}(q; z)]^2 \geq 0 \quad (4.59)$$

Turán tipi eşitsizliği sağlanır. Eşitsizlikteki $\frac{1-q^{n+1}}{1-q^{n+2}}$ sabiti mümkün olan en iyi ihtimaldir

(Deniz et al., 2025a).

İspat: Seriler için Cauchy çarpımı dikkate alındığında

$$\chi_n^{(1)}(q; z) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k A_{j,k}^{(1)}(n, q) z^k}{\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k B_{j,k}^{(1)}(n, q) z^k}$$

yazılır. Burada $A_{j,k}^{(1)}(n, q)$ ve $B_{j,k}^{(1)}(n, q)$ katsayıları

$$A_{j,k}^{(1)}(n, q) = \frac{1}{(q; q)_j (q; q)_{k-j} (q; q)_{j+n} (q; q)_{k-j+n+2}}$$

ve

$$B_{j,k}^{(1)}(n, q) = \frac{1}{(q; q)_j (q; q)_{k-j} (q; q)_{j+n+1} (q; q)_{k-j+n+1}}$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned} D_{j,k}^{(1)}(n, q) &= \frac{A_{j,k}^{(1)}(n, q)}{B_{j,k}^{(1)}(n, q)} \\ &= \frac{(q; q)_{j+n+1} (q; q)_{k-j+n+1}}{(q; q)_{j+n} (q; q)_{k-j+n+2}} = \frac{1-q^{j+n+1}}{1-q^{k-j+n+2}} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edelim. Şimdi, $\chi_n^{(1)}(q; z)$ fonksiyonunun monotonluğu için $(D_{j,k}^{(1)}(n; q))_{j \geq 0}$ dizisinin monotonluğunu inceleyelim. Yukarıdaki eşitlikler dikkate alınıp, gerekli işlemler yapıldığında,

$$\frac{D_{j+1,k}^{(1)}(n; q)}{D_{j,k}^{(1)}(n; q)} = \frac{(1-q^{j+n+2})(1-q^{k-j+n+2})}{(1-q^{j+n+1})(1-q^{k-j+n+2})} \geq 1$$

elde edilir. Bu durumda $(D_{j,k}^{(1)}(n, q))_{j \geq 0}$ dizisi artandır. Böylece Lemma 3.1.8'den dolayı

$$\left(\frac{\sum_{j=0}^k A_{j,k}^{(1)}(n, q)}{\sum_{j=0}^k B_{j,k}^{(1)}(n, q)} \right)_{k \geq 0}$$

oranı da artandır. Sonuç olarak, Lemma 3.1.8 den $z \mapsto \chi_n^{(1)}(q; z)$ fonksiyonu $(0,1)$ aralığında artandır. Kesinlik durumu için ise limit değeri göz önüne alındığında ise,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \chi_n^{(1)}(q; z) = \frac{1-q^{n+1}}{1-q^{n+2}}$$

elde edilir. Bu ise $\frac{1-q^{n+1}}{1-q^{n+2}}$ sabitinin (4.59) eşitsizliği için verilen şartlar altında mümkün olan en iyi ihtimal olduğunu gösterir.

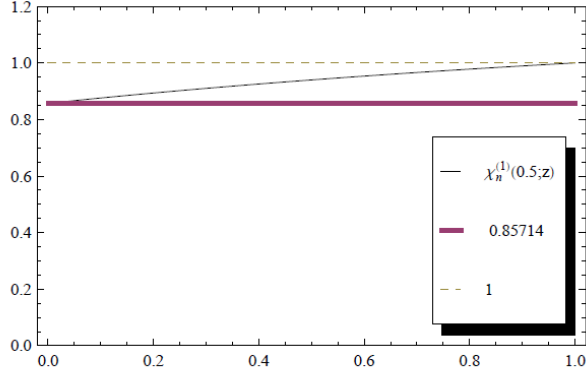
Böylece teoremin ispatı tamamlanmıştır.

Sonuç 4.2.6: $z \in (0,1)$ ve $0 < q < 1$ olmak üzere, Teorem 4.2.4 ve Teorem 4.2.5' den

$$\frac{1-q^{n+1}}{1-q^{n+2}} \leq \chi_n^{(1)}(q; z) \leq 1$$

eşitsizliği sağlanır (Deniz et al., 2025a).

Sonuç 4.2.6 daki eşitlikte $n = 5$ ve $q = 0.5$ için grafik aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.5. $\chi_5^{(1)}(0.5; z)$ fonksiyonunun grafiği

4.2.1. Modifiye q – Tricomi Fonksiyonunun Kalan Terimleri için Turán Tipi Eşitsizlikler

Bu bölümde, Bölüm 4.1.2’de bahsi geçen ve (4.26) ile tanımlı $R_n(x)$ fonksiyonunun Turán tipi eşitsizlikleri üzerine yapılan çalışmalardan esinlenerek, $s \in \mathbb{N}_0$ için

$$\begin{aligned} C_{n,s}(q; z) &= C_n(q; z) - \sum_{k=0}^s \frac{1}{(q; q)_k (q; q)_{k+n}} z^k \\ &= \sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{1}{(q; q)_k (q; q)_{k+n}} z^k \end{aligned} \quad (4.60)$$

şeklinde tanımladığımız fonksiyonunun Turán tipi eşitsizlikleri verilecektir.

Bu anlamda ana sonuçlarımızın ilki aşağıda verilmiştir.

Teorem 4.2.7: $0 < q < 1$ ve $z \in (-1, 1)$ olsun. Bu durumda

$$C_{n,s}(q; z)C_{n,s+2}(q; z) - [C_{n,s+1}(q; z)]^2 \leq 0 \quad (4.61)$$

Turán tipi eşitsizliği sağlanır (Deniz et al., 2025a).

İspat: $C_{n,s}(q; z)$ fonksiyonunun tanımından

$$C_{n,s}(q; z) = C_{n,s+1}(q; z) + \frac{z^{s+1}}{(q; q)_{s+1} (q; q)_{s+n+1}} \quad (4.62)$$

ve

$$C_{n,s+2}(q; z) = C_{n,s+1}(q; z) - \frac{z^{s+2}}{(q; q)_{s+2} (q; q)_{s+n+2}} \quad (4.63)$$

eşitlikleri yazılır. Böylece, (4.62) ve (4.63) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} & \left[C_{n,s+1}(q; z) \right]^2 - C_{n,s}(q; z) C_{n,s+2}(q; z) \\ &= C_{n,s+1}(q; z) \left(\frac{z^{s+2}}{(q; q)_{s+2} (q; q)_{s+n+2}} - \frac{z^{s+1}}{(q; q)_{s+1} (q; q)_{s+n+1}} \right) \\ & \quad + \frac{z^{2s+3}}{(q; q)_{s+1} (q; q)_{s+2} (q; q)_{s+n+1} (q; q)_{s+n+2}} \end{aligned} \quad (4.64)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} & C_{n,s+1}(q; z) \left(\frac{z^{s+2}}{(q; q)_{s+2} (q; q)_{s+n+2}} - \frac{z^{s+1}}{(q; q)_{s+1} (q; q)_{s+n+1}} \right) \\ &= \sum_{k=s+2}^{\infty} \frac{z^{k+s+2}}{(q; q)_{s+2} (q; q)_{s+n+2} (q; q)_k (q; q)_{k+n}} \\ & \quad - \sum_{k=s+2}^{\infty} \frac{z^{k+s+1}}{(q; q)_{s+1} (q; q)_{s+n+1} (q; q)_k (q; q)_{k+n}} \\ &= \sum_{k=s+2}^{\infty} \frac{z^{k+s+2}}{(q; q)_{s+2} (q; q)_{s+n+2} (q; q)_k (q; q)_{k+n}} \\ & \quad - \sum_{k=s+3}^{\infty} \frac{z^{k+s+1}}{(q; q)_{s+1} (q; q)_{s+n+1} (q; q)_k (q; q)_{k+n}} \\ & \quad - \frac{z^{2s+3}}{(q; q)_{s+1} (q; q)_{s+2} (q; q)_{s+n+1} (q; q)_{s+n+2}} \end{aligned} \quad (4.65)$$

eşitliği elde edilir. Böylece (4.64) ve (4.65) eşitliklerinden ise

$$\begin{aligned} & \left[C_{n,s+1}(q; z) \right]^2 - C_{n,s}(q; z) C_{n,s+2}(q; z) \\ &= \sum_{k=s+2}^{\infty} \frac{\aleph(n, s, k; q)}{(q; q)_{s+2} (q; q)_{s+n+2} (q; q)_{k+1} (q; q)_{k+n+1}} z^{k+s+2} \end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$\aleph(n, s, k; q) = q^{s+2} (1 - q^{k-s-1}) [1 + q^n - q^{k+n+1} - q^{s+n+2}] \quad (4.66)$$

dır. Ayrıca, $k \geq s+2$ ve $0 < q < 1$ olduğundan $q^{s+2} \geq q^k$ sağlanır. Dolayısıyla

$$\aleph(n, s, k; q) \geq q^{s+2} (1 - q^{k-s-1}) (1 + q^n - q^{s+n+3} - q^{s+n+2}) > 0$$

olur. Sonuç olarak (4.64)- (4.66) eşitlikleri dikkate alındığında (4.61) eşitsizliği elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmıştır.

Sonuç 4.2.8: $0 < q < 1$ ve $z \in (-1, 1)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & C_n(q; z) \\ & := C_n(q; z) \left(1 - \frac{z}{(1-q^2)(1-q^{n+2})} \right) \\ & - \frac{1}{(q; q)_n} \left(1 + \frac{q^{n+3} - q^{n+2} + q^{n+1} - q}{(1-q^2)(1-q^{n+1})(1-q^{n+2})} z \right) \leq 0 \end{aligned} \quad (4.67)$$

eşitsizliği sağlanır (Deniz et al., 2025a).

İspat: (4.60) ile tanımlı $C_{n,s}(q; z)$ fonksiyonunda $s = 0, 1, 2$ özel değerleri dikkate alındığında

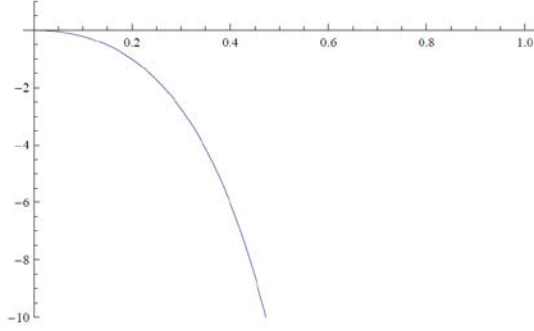
$$C_{n,0}(q; z) = C_n(q; z) - \frac{1}{(q; q)_n},$$

$$C_{n,1}(q; z) = C_n(q; z) - \frac{1}{(q; q)_n} - \frac{z}{(q; q)_1 (q; q)_{n+1}},$$

$$C_{n,2}(q; z) = C_n(q; z) - \frac{1}{(q; q)_n} - \frac{z}{(q; q)_1 (q; q)_{n+1}} - \frac{z^2}{(q; q)_2 (q; q)_{n+2}}$$

eşitlikleri yazılır. Yukarıdaki eşitlikler, (4.61) eşitsizliğinde yazılırsa (4.67) eşitsizliği elde edilir.

Özel olarak $q = 0.5$ ve $n = 5$ alındığında grafik aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.6. $C_5(0.5; z)$ fonksiyonun grafiği

Teorem 4.2.9: $0 < q < 1$ ve $z \in (0, 1)$ olsun. $\chi_{n,s}^{(2)}(q; z)$ fonksiyonu

$$\chi_{n,s}^{(2)}(q; z) = \frac{C_{n,s}(q; z)C_{n,s+2}(q; z)}{[C_{n,s+1}(q; z)]^2}$$

şeklinde verilsin. Bu durumda, $z \mapsto \chi_{n,s}^{(2)}(q; z)$ fonksiyonu $z \in (0, 1)$ için artandır. Ayrıca, $0 < q < 1$ ve $z \in (0, 1)$ için

$$C_{n,s}(q; z)C_{n,s+2}(q; z) \geq \frac{(1-q^{s+2})(1-q^{n+s+2})}{(1-q^{s+3})(1-q^{n+s+3})} [C_{n,s+1}(q; z)]^2$$

Turán tipi eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik kesindir (Deniz et al., 2025a).

İspat: Seriler için Cauchy çarpım dikkate alındığında

$$\chi_{n,s}^{(2)}(q; z) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k A_{j,k}^{(2)}(n, q) z^k}{\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k B_{j,k}^{(2)}(n, q) z^k}$$

yazılır. Burada $A_{j,k}^{(2)}(n, q)$ ve $B_{j,k}^{(2)}(n, q)$ katsayıları sırasıyla,

$$A_{j,k}^{(2)}(n, q) = \frac{1}{(q; q)_{j+s+1} (q; q)_{k-j+s+3} (q; q)_{j+n+s+1} (q; q)_{k-j+n+s+3}}$$

ve

$$B_{j,k}^{(2)}(n, q) = \frac{1}{(q; q)_{j+s+2} (q; q)_{k-j+s+2} (q; q)_{j+n+s+2} (q; q)_{k-j+n+s+2}}$$

dır. Böylece,

$$\begin{aligned}
D_{j,k}^{(2)}(n, s; q) &= \frac{A_{j,k}^{(2)}(n, q)}{B_{j,k}^{(2)}(n, q)} \\
&= \frac{(q; q)_{j+s+2} (q; q)_{k-j+s+2} (q; q)_{j+n+s+2} (q; q)_{k-j+n+s+2}}{(q; q)_{j+s+1} (q; q)_{k-j+s+3} (q; q)_{j+n+s+1} (q; q)_{k-j+n+s+3}} \\
&= \frac{(1-q^{j+s+2})(1-q^{j+n+s+2})}{(1-q^{k-j+s+3})(1-q^{k-j+n+s+3})}
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi, $\chi_{n,s}^{(2)}(q; z)$ fonksiyonunun monotonluğu için $(D_{j,k}^{(2)}(n, s; q))_{j \geq 0}$ dizisini inceleyelim. Yukarıdaki eşitlikler dikkate alınıp, gerekli işlemler yapıldığında

$$\begin{aligned}
&\frac{D_{j+1,k}^{(2)}(n, s; q)}{D_{j,k}^{(2)}(n, s; q)} \\
&= \left[\frac{(1-q^{j+s+3})(1-q^{j+n+s+3})}{(1-q^{j+s+2})(1-q^{j+n+s+2})} \right] \left[\frac{(1-q^{k-j+s+3})(1-q^{k-j+n+s+3})}{(1-q^{k-j+s+2})(1-q^{k-j+n+s+2})} \right]
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca,

$$(1-q^{j+s+3})(1-q^{j+n+s+3}) - (1-q^{j+s+2})(1-q^{j+n+s+2}) \geq 0$$

eşitsizliği $0 < q < 1$ için doğrudur. Son eşitsizlik

$$\frac{(1-q^{j+s+3})(1-q^{j+n+s+3})}{(1-q^{j+s+2})(1-q^{j+n+s+2})} \geq 1$$

ifadesine denktir. Sonuç olarak $(D_{j,k}^{(2)}(n, q))_{j \geq 0}$ dizisi artan olur. Böylece,

$$(A_{j,k}^{(2)}(n, q)/B_{j,k}^{(2)}(n, q))_{k \geq 0}$$

dizisi de artandır. Lemma 3.1.8'den $z \mapsto \chi_{n,s}^{(2)}(q; z)$ fonksiyonu $z \in (0, 1)$ aralığında artandır. Kesinlik için $z \rightarrow 0$ alınırsa ispat tamamlanmış olur.

Özel olarak $q \rightarrow 1$ alınırsa

$$C_{n,s}(z) = \sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{z^k}{k!(n+k)!}$$

Ttricoli fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyon için sonuç aşağıda verilmiştir.

Sonuç 4.2.10 $z \in (0,1)$ olmak üzere $\chi_{n,s}^{(2)}(z)$ fonksiyonunu

$$\chi_{n,s}^{(2)}(z) = \frac{C_{n,s}(z)C_{n,s+2}(z)}{[C_{n,s+1}(z)]^2}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $z \mapsto \chi_{n,s}^{(2)}(z)$ fonksiyonu $z \in (0,1)$ aralığında artandır. Ayrıca,

$$C_{n,s}(z)C_{n,s+2}(z) \geq \frac{(s+2)(n+s+2)}{(s+3)(n+s+3)} [C_{n,s+1}(z)]^2 \quad (4.68)$$

ve

$$C_{n,s}(z)C_{n,s+2}(z) - [C_{n,s+1}(z)]^2 \leq 0$$

Turán tipi eşitsizlikleri $z \in (0,1)$ için sağlanır. Ayrıca, (4.68) eşitsizliği kesindir (Deniz et al., 2025a).

4.3. q – Bessel Fonksiyonun Monotonluk Özellikleri

Bu bölümde, q – Bessel fonksiyonlarının monotonluk özelliklerinin incelenmesinin yanı sıra bazı özel fonksiyonların monotonluğuna ilişkin literatürde yer alan bazı çalışmalara yer verilmiştir. Bu bağlamda, konuyla ilgili ilk önemli çalışma András ve Baricz tarafından gerçekleştirilmiş olup, bu çalışmada kompleks mertebeden genelleştirilmiş ve normalize edilmiş Bessel fonksiyonlarının monotonluk özellikleri ele alınmıştır (András & Baricz, 2009).

Bu çalışmadan ilhamla, çeşitli özel fonksiyonların monotonluk özelliklerine yönelik araştırmalar günümüze kadar devam etmiştir. Nitekim 2009 yılında Baricz ve András, kompleks mertebeden genelleştirilmiş ve normalize edilmiş Bessel fonksiyonlarının monotonluğu üzerine yeni sonuçlar elde etmişlerdir (Baricz & András, 2009). Yakın tarihlerde ise Cotirlá ve Szász birinci tür Bessel ve Lommel fonksiyonları üzerine, Deniz ve Szász ise Struve fonksiyonlarının monotonluğu üzerine çalışmalar yayımlamışlardır (Cotirlá & Szász, 2023; Cotirlá & Szász, 2024; Deniz & Szász, 2024).

Ana sonuçlarımızın ispatında kullanılan lemmaların ilki aşağıdaki şekildedir.

Lemma 4.3.1: $q \in (0,1)$ olsun. Bu durumda,

i) $\mu > \nu > \nu_0$ için

$$\frac{1-q^{\nu+2}}{1-q^{\mu+2}} \geq \frac{\Gamma_q(\nu+2)}{\Gamma_q(\mu+2)} \quad (4.69)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada ν_0 ,

$$\frac{q^{\nu+2}}{1-q^{\nu+2}} \log q + \psi_q(\nu+2) = 0$$

denkleminin tek reel köküdür.

ii) $\mu > \nu > \nu_1$ için,

$$\frac{q^\nu}{\Gamma_q(\nu+2)} \geq \frac{q^\mu}{\Gamma_q(\mu+2)} \quad (4.70)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada ν_1 , $\log q - \psi_q(\nu+2) = 0$ denkleminin tek reel köküdür (Özkan et al., 2025b).

İspat: (i) Aslında (4.69) eşitsizliği

$$\frac{1-q^{\nu+2}}{\Gamma_q(\nu+2)} \geq \frac{1-q^{\mu+2}}{\Gamma_q(\mu+2)} \quad (4.71)$$

eşitsizliğine denktir. denktir. Bu eşitsizliği ispatlamak için

$$F : (\nu_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F(\nu) = \frac{1-q^{\nu+2}}{\Gamma_q(\nu+2)}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonun monoton azalan olduğunu göstermek yeterlidir.

Monotonluk durumu için $F(\nu)$ fonksiyonun türevinden

$$\begin{aligned} & F'(\nu) \\ &= \frac{-q^{\nu+2} \log q \Gamma_q(\nu+2) - (1-q^{\nu+2}) \Gamma'_q(\nu+2)}{\Gamma_q^2(\nu+2)} \end{aligned}$$

$$= \frac{-(1-q^{v+2})}{\Gamma_q(v+2)} \left(\frac{q^{v+2}}{1-q^{v+2}} \log q + \psi_q(v+2) \right)$$

elde edilir. Burada ψ_q , q -digamma fonksiyonudur. Şimdi $f(-2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(v) = \frac{q^{v+2}}{1-q^{v+2}} \log q + \psi_q(v+2)$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. $0 < q < 1$ için $\psi'_q(v+2) > 0$ olduğundan

$$f'(v) = \frac{q^{v+2} \log^2 q}{(1-q^{v+2})^2} + \psi'_q(v+2) > 0$$

dır. Dolayısıyla $v \mapsto f(v)$ fonksiyonu artandır. Diğer taraftan

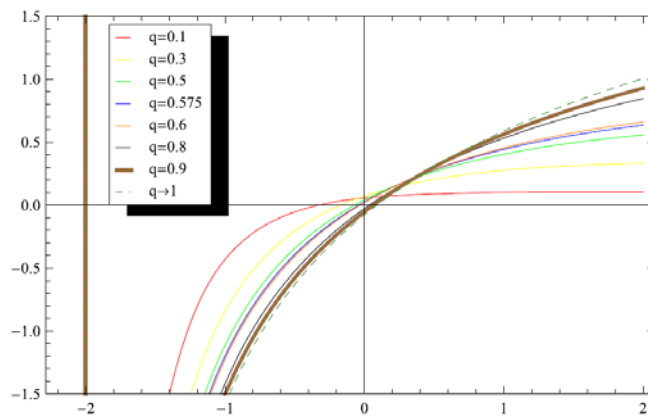
$$\lim_{v \rightarrow -2^+} f(v) = -\infty$$

ve

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} f(v) = -\log(1-q) > 0$$

olur. Dolayısıyla, $f(v) = 0$ denkleminin $(-2, \infty)$ aralığında tek bir v_0 reel kökü vardır.

Böylece $v \mapsto f(v)$ fonksiyonu (v_0, ∞) aralığında pozitiftir. Bu durum Şekil 4.7’de görsel olarak doğrulanmaktadır. Buna bağlı olarak, $v \mapsto F(v)$ fonksiyonu bu aralıkta monoton azalan olur. Sonuç olarak, $\mu > v > v_0$ koşulu altında (4.71) eşitsizliği sağlanır.



Şekil 4.7. $f(v)$ fonksiyonunun grafiği

ii. $\mu > v$ olsun. Kolayca görülebilir ki (4.70) eşitsizliği

$$\frac{q^v}{\Gamma_q(v+2)} > \frac{q^\mu}{\Gamma_q(\mu+2)} \quad (4.72)$$

ifadesine denktir.

Bu eşitsizliği ispatlamak için $G : (v_1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$G(v) = \frac{q^v}{\Gamma_q(v+2)} \quad (4.73)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonun monoton azalan olduğunu göstermek yeterlidir.

Böylece

$$G'(v) = \frac{q^v}{\Gamma_q(v+2)} g(v)$$

olur. Burada

$$g(v) = \log q - \psi_q(v+2)$$

dır. Şimdi, $(-2, \infty) \ni v \mapsto g(v)$ fonksiyonun işaretini inceleyelim. Fonksiyonun türevinden

$$g'(v) = -\psi'_q(v+2) < 0$$

bulunur. Dolayısıyla fonksiyon monoton azalandır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} & \lim_{v \rightarrow -2^+} g(v) \\ &= \lim_{v \rightarrow -2^+} [\log q - \psi_q(v+2)] \\ &= \lim_{v \rightarrow -2^+} \left[\log q + \log(1-q) - \log q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+v+2}}{1-q^{n+v+2}} \right] \\ &= \lim_{v \rightarrow -2^+} \left[\log q + \log(1-q) - \frac{q^{v+2}}{1-q^{v+2}} \log q - \log q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n+v+2}}{1-q^{n+v+2}} \right] \\ &= +\infty \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow +\infty} g(v) &= \lim_{v \rightarrow +\infty} \left[\log q + \log(1-q) - \log q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+v+2}}{1-q^{n+v+2}} \right] \\ &= \log q(1-q) < 0 \end{aligned}$$

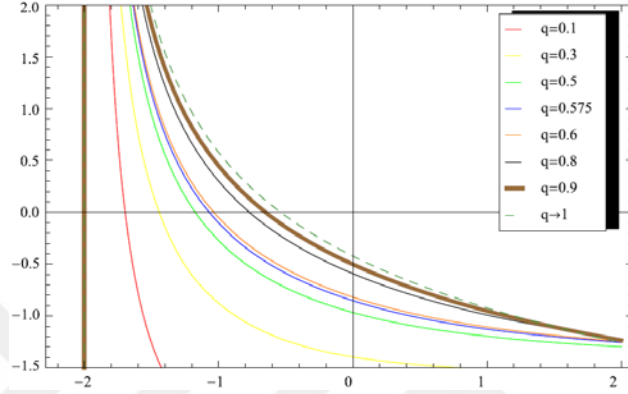
sonuçları elde edilir.

Dolayısıyla, $v > v_1$ için $g(v) < 0$ yani $G'(v) < 0$ dır. Burada v_1 , $(-2, \infty)$ aralığında

$$\log q - \psi_q(v+2) = 0$$

denkleminin tek reel köküdür. Bu durum Şekil 4.8 ile de doğrulanmaktadır.

Böylece ispat tamamlanmıştır.



Şekil 4.8. $g(v)$ fonksiyonunun grafiği

Lemma 4.3.2: $\mu > v > \max\{v_0, v_1\}$ ve $0 < q < 1$ olsun. Bu durumda

$$\Re \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_q(v+n+1)q^{n\mu}}{\Gamma_q(\mu+n+1)q^{nv}} z^n \right) > \frac{1}{2} \quad (4.74)$$

eşitsizliği sağlanır (Özkan et al., 2025b).

İspat: Lemmanın ispatında, Lemma 3.1.6 ve Lemma 4.3.1 kullanılmaktadır.

Bunun için

$$f_0 = 1 \text{ ve}$$

$$f_n = \frac{\Gamma_q(v+n+1)q^{n\mu}}{\Gamma_q(\mu+n+1)q^{nv}} \quad (n \geq 1)$$

olsun. Lemma 4.3.1'ün ikinci durumundan

$$f_0 - f_1 = 1 - \frac{\Gamma_q(v+2)q^{\mu}}{\Gamma_q(\mu+2)q^v} \geq 0$$

olduğu kolayca görülür. Diğer yandan, $n \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
& f_n - f_{n+1} \\
&= \frac{\Gamma_q(v+n+1)q^{n\mu}}{\Gamma_q(\mu+n+1)q^{nv}} - \frac{\Gamma_q(v+n+2)q^{(n+1)\mu}}{\Gamma_q(\mu+n+2)q^{(n+1)v}} \\
&= q^{n(\mu-v)} \frac{\Gamma_q(v+n+1)}{\Gamma_q(\mu+n+1)} \left(1 - \frac{(1-q^{v+n+1})q^\mu}{(1-q^{\mu+n+1})q^v} \right) \geq 0
\end{aligned}$$

bulunur. Şimdi $f_n - 2f_{n+1} + f_{n+2} \geq 0$ eşitsizliğinin ispatı için iki ayrı durum ele alınacaktır.

1. Durum $n = 0$ için

$$\begin{aligned}
f_0 - 2f_1 + f_2 &= 1 - 2 \frac{\Gamma_q(v+2)q^\mu}{\Gamma_q(\mu+2)q^v} + \frac{\Gamma_q(v+3)q^{2\mu}}{\Gamma_q(\mu+3)q^{2v}} \\
&\geq 2q^{\mu-v} \sqrt{\frac{\Gamma_q(v+2)(1-q^{v+2})}{\Gamma_q(\mu+2)(1-q^{\mu+2})}} - 2q^{\mu-v} \frac{\Gamma_q(v+2)}{\Gamma_q(\mu+2)} \\
&= 2q^{\mu-v} \sqrt{\frac{\Gamma_q(v+2)}{\Gamma_q(\mu+2)}} \left(\sqrt{\frac{1-q^{v+2}}{1-q^{\mu+2}}} - \sqrt{\frac{\Gamma_q(v+2)}{\Gamma_q(\mu+2)}} \right)
\end{aligned} \tag{4.75}$$

elde edilir. Lemma 4.3.1'in birinci kısmından

$$\sqrt{\frac{1-q^{v+2}}{1-q^{\mu+2}}} - \sqrt{\frac{\Gamma_q(v+2)}{\Gamma_q(\mu+2)}} \geq 0$$

sağlanır. Böylece

$$f_0 - 2f_1 + f_2 \geq 0$$

bulunur.

2. Durum $n \geq 1$ için lemmanın hipotezinden

$$\begin{aligned}
& f_n - 2f_{n+1} + f_{n+2} \\
&= \frac{\Gamma_q(v+n+1)q^{n\mu}}{\Gamma_q(\mu+n+1)q^{nv}} - 2 \frac{\Gamma_q(v+n+2)q^{(n+1)\mu}}{\Gamma_q(\mu+n+2)q^{(n+1)v}} + \frac{\Gamma_q(v+n+3)q^{(n+2)\mu}}{\Gamma_q(\mu+n+3)q^{(n+2)v}} \\
&= q^{n(\mu-v)} \frac{\Gamma_q(v+n+1)}{\Gamma_q(\mu+n+1)} \left(1 - 2 \frac{(1-q^{v+n+1})q^\mu}{(1-q^{\mu+n+1})q^v} + \frac{(1-q^{v+n+1})(1-q^{v+n+2})q^{2\mu}}{(1-q^{\mu+n+1})(1-q^{\mu+n+2})q^{2v}} \right)
\end{aligned}$$

$$\geq 2q^{(n+1)(\mu-v)} \sqrt{\frac{1-q^{v+n+1}}{1-q^{\mu+n+1}}} \frac{\Gamma_q(v+n+1)}{\Gamma_q(\mu+n+1)} \left(\sqrt{\frac{1-q^{v+n+2}}{1-q^{\mu+n+2}}} - \sqrt{\frac{1-q^{v+n+1}}{1-q^{\mu+n+1}}} \right) \geq 0$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmıştır.

Lemma 4.3.3: $\mu > v > v_0$ ve $0 < q < 1$ olsun. Bu durumda

$$\Re \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_q(v+n+1)}{\Gamma_q(\mu+n+1)} z^n \right) > \frac{1}{2} \quad (4.76)$$

eşitsizliği sağlanır (Özkan et al., 2025b).

İspat. $f_0 = 1$ ve

$$f_n = \frac{\Gamma_q(v+n+1)}{\Gamma_q(\mu+n+1)} \quad (n \geq 1)$$

olsun. $n = 1$ için

$$f_0 - f_1 = 1 - \frac{\Gamma_q(v+2)}{\Gamma_q(\mu+2)} \geq 0$$

olur. Ayrıca hipotezden $\mu > v$ ve $0 < q < 1$ olduğundan

$$f_n - f_{n+1} = \frac{\Gamma_q(v+n+1)}{\Gamma_q(\mu+n+1)} - \frac{\Gamma_q(v+n+2)}{\Gamma_q(\mu+n+2)} = \frac{\Gamma_q(v+n+1)}{\Gamma_q(\mu+n+1)} \left(1 - \frac{(1-q^{v+n+1})}{(1-q^{\mu+n+1})} \right) \geq 0$$

bulunur. Şimdi, $f_n - 2f_{n+1} + f_{n+2} \geq 0$ eşitsizliğini ispatlamak için iki durum ele alınacaktır.

1. Durum $n = 0$ için Lemma 4.3.1'in birinci durumundan

$$\begin{aligned} f_0 - 2f_1 + f_2 &= 1 - 2 \frac{\Gamma_q(v+2)}{\Gamma_q(\mu+2)} + \frac{\Gamma_q(v+3)}{\Gamma_q(\mu+3)} \\ &\geq 2 \sqrt{\frac{\Gamma_q(v+2)(1-q^{v+2})}{\Gamma_q(\mu+2)(1-q^{\mu+2})}} - 2 \frac{\Gamma_q(v+2)}{\Gamma_q(\mu+2)} \\ &= 2 \sqrt{\frac{\Gamma_q(v+2)}{\Gamma_q(\mu+2)}} \left(\sqrt{\frac{1-q^{v+2}}{1-q^{\mu+2}}} - \sqrt{\frac{\Gamma_q(v+2)}{\Gamma_q(\mu+2)}} \right) \geq 0 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece ilk ve son ifadeden $f_n - 2f_{n+1} + f_{n+2} \geq 0$ elde edilir.

2.Durum $n \geq 1$ olsun. Bu durumda hipotezden $\mu > \nu$ ve $0 < q < 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}
& f_n - 2f_{n+1} + f_{n+2} \\
&= \frac{\Gamma_q(\nu+n+1)}{\Gamma_q(\mu+n+1)} - 2\frac{\Gamma_q(\nu+n+2)}{\Gamma_q(\mu+n+2)} + \frac{\Gamma_q(\nu+n+3)}{\Gamma_q(\mu+n+3)} \\
&= \frac{\Gamma_q(\nu+n+1)}{\Gamma_q(\mu+n+1)} \left(1 - 2\frac{1-q^{\nu+n+1}}{1-q^{\mu+n+1}} + \frac{(1-q^{\nu+n+1})(1-q^{\nu+n+2})}{(1-q^{\mu+n+1})(1-q^{\mu+n+2})} \right) \\
&\geq 2\frac{\Gamma_q(\nu+n+1)}{\Gamma_q(\mu+n+1)} \left(\sqrt{\frac{(1-q^{\nu+n+1})(1-q^{\nu+n+2})}{(1-q^{\mu+n+1})(1-q^{\mu+n+2})}} - \frac{1-q^{\nu+n+1}}{1-q^{\mu+n+1}} \right) \\
&= 2\frac{\Gamma_q(\nu+n+1)}{\Gamma_q(\mu+n+1)} \sqrt{\frac{1-q^{\nu+n+1}}{1-q^{\mu+n+1}}} \left(\sqrt{\frac{1-q^{\nu+n+2}}{1-q^{\mu+n+2}}} - \sqrt{\frac{1-q^{\nu+n+1}}{1-q^{\mu+n+1}}} \right) \geq 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmıştır.

İlk önemli sonucumuz, (3.13) ile tanımlı Φ_ν fonksiyonu için monotonluk özelliğini sağlayan aşağıda verilen teoremdir.

Teorem 4.3.4: $0 < q < 1$ olsun. Eğer $\mu > \nu \geq \max\{\nu_0, \nu_2\}$ ise bu durumda

$$\Phi_\mu(\mathbb{D}, q) \subset \Phi_\nu(\mathbb{D}, q)$$

bağıntısı sağlanır. Burada ν_0 değeri ve Φ_ν fonksiyonu sırasıyla Lemma 4.3.1 ve (3.13) de verilmiştir. Ayrıca, ν_2 değeri (4.78) ile verilen $h_q(\nu) = 0$ denkleminin en büyük reel köküdür (Özkan et al., 2025b).

İspat: Aşağıdaki şekilde tanımlanan

$$\Omega_\nu(z; q) = \Phi_\nu\left((1-q)^2 z; q\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(n+\nu)} (1-q)^{n+2}}{4^n (q; q)_n \Gamma_q(\nu+n+1)} z^{n+1}$$

fonksiyonunu ele alalım. Ω_ν fonksiyonunun tanımından

$$\frac{\Omega_v''(z; q)}{\Omega_v'(0; q)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n(n+1) q^{n(n+v)} (1-q)^n \Gamma_q(v+1)}{4^n (q; q)_n \Gamma_q(v+n+1)} z^{n-1} \quad (4.77)$$

olduğu kolayca görülür. Böylece (4.77) eşitliğinde

$$\frac{1}{(q; q)_n} \leq \frac{1}{(1-q)^n (1+q)^{n-1}}$$

eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Omega_v''(z; q)}{\Omega_v'(0; q)} \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1) q^{n(n+v)} \Gamma_q(v+1)}{4^n (1+q)^{n-1} \Gamma_q(v+n+1)} \\ &\leq \frac{\Gamma_q(v+1) q^{v+1}}{2 \Gamma_q(v+2)} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n+1) q^{n(v+2)-1} \Gamma_q(v+1)}{4^n (1+q)^{n-1} \Gamma_q(v+n+1)} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca Γ_q fonksiyonunun tanımından

$$\frac{\Gamma_q(v+1)}{\Gamma_q(v+2)} = \frac{1-q}{1-q^{v+1}}$$

ve

$$\begin{aligned} &\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n+1) q^{n(v+2)-1} \Gamma_q(v+1)}{4^n (1+q)^{n-1} \Gamma_q(v+n+1)} \\ &\leq \frac{(1+q) \Gamma_q(v+1)}{q \Gamma_q(v+3)} \sum_{n=2}^{\infty} n(n+1) \left(\frac{q^{v+2}}{4(1+q)} \right)^n \end{aligned}$$

$$= \frac{q^{v+1} (1-q)^2 \left(64(1+q)^3 - (4(1+q) - q^{v+2})^3 \right)}{2(1-q^{v+1})(1-q^{v+2})(4(1+q) - q^{v+2})^3}$$

bulunur. Böylece

$$\left| \frac{\Omega_v''(z; q)}{\Omega_v'(0; q)} \right| - \frac{1}{2} \leq \frac{q^{v+1} (1-q)}{2(1-q^{v+1})} + \frac{q^{v+1} (1-q)^2 (64(1+q)^3 - (4(1+q) - q^{v+2})^3)}{2(1-q^{v+1})(1-q^{v+2})(4(1+q) - q^{v+2})^3} - \frac{1}{2} \leq 0$$

elde edilir. Dolayısıyla Lemma 3.1.7'den $0 < q < 1$ ve $v \geq v_2$ için Ω_v fonksiyonu konveks olur. Burada v_2 ,

$$h_q(v) := \frac{q^{v+1}(1-q)}{2(1-q^{v+1})} + \frac{q^{v+1}(1-q)^2(64(1+q)^3 - (4(1+q) - q^{v+2})^3)}{2(1-q^{v+1})(1-q^{v+2})(4(1+q) - q^{v+2})^3} - \frac{1}{2} = 0 \quad (4.78)$$

denkleminin en büyük reel köküdür. Bu durum Şekil 4.9 ile de doğrulanmaktadır. Diğer taraftan Lemma 4.3.2den

$$\left(\frac{\Gamma_q(v+n+1)q^{n\mu}}{\Gamma_q(\mu+n+1)q^{nv}} \right)_{n \geq 1}$$

subordinasyon faktör dizisidir. Sonuç olarak

$$\Omega_\mu = \chi * \Omega_v \prec \Omega_v$$

yazılır. Burada

$$\chi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_q(v+n+1)q^{n\mu}}{\Gamma_q(\mu+n+1)q^{nv}} z^n$$

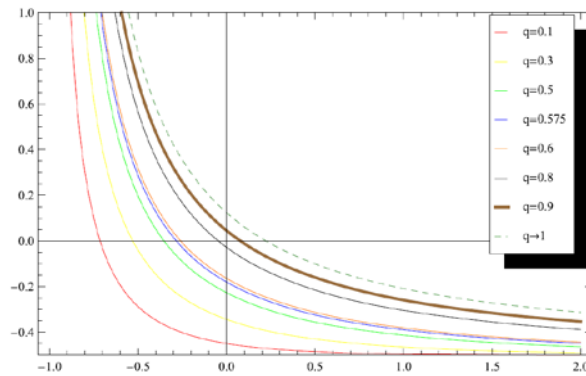
dır. Böylece $\Omega_\mu(0) = \Omega_v(0)$ olduğundan $\Omega_\mu \prec \Omega_v$ subordinasyonu

$$\Omega_\mu(\mathbb{D}, q) \subset \Omega_v(\mathbb{D}, q)$$

ifadesine denktir. Dolayısıyla

$$\Phi_\mu(\mathbb{D}, q) \subset \Phi_v(\mathbb{D}, q)$$

bağıntısı elde edilir. Böylece ispat tamamlanmıştır.



Şekil 4.9. $h_q(v)$ fonksiyonunun grafiği

İkinci önemli sonucumuz, aşağıda verilen ve Ψ_v fonksiyonu için monotonluk özelliğini sağlayan teoremdir.

Teorem 4.3.5: $0 < q < 1$ olsun. Eğer $\mu > v \geq \max\{v_0, v_3\}$ ise bu durumda

$$\Psi_{\mu}(\mathbb{D}, q) \subset \Psi_{\nu}(\mathbb{D}, q)$$

bağıntısı sağlanır. Burada ν_0 değeri ve Ψ_{ν} fonksiyonu sırasıyla Lemma 4.3.1 ve (3.14) de verilmiştir. Ayrıca, ν_3 değeri (4.81) ile verilen $p_q(\nu) = 0$ denkleminin en büyük reel köküdür. (Özkan et al., 2025b).

İspat: Δ_{ν} fonksiyonunu

$$\Delta_{\nu}(z; q) = \Psi_{\nu}((1-q)^2 z; q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(n+1)/2} (1-q)^{n+2}}{2^n (q; q)_n \Gamma_q(\nu + n + 1)} z^{n+1}$$

şeklinde tanımlayalım.

Δ_{ν} fonksiyonun tanımından

$$\frac{\Delta_{\nu}''(z; q)}{\Delta_{\nu}'(0; q)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n(n+1) q^{n(n+1)/2} (1-q)^n \Gamma_q(\nu + 1)}{2^n (q; q)_n \Gamma_q(\nu + n + 1)} z^{n-1} \quad (4.79)$$

elde edilir. Dolayısıyla (4.79) eşitliğinde

$$\frac{1}{(q; q)_n} \leq \frac{1}{(1-q)^n (1+q)^{n-1}}$$

eşitsizliği yazılırsa

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Delta_{\nu}''(z; q)}{\Delta_{\nu}'(0; q)} \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1) q^{n(n+1)/2} \Gamma_q(\nu + 1)}{2^n (1+q)^{n-1} \Gamma_q(\nu + n + 1)} \\ &\leq \frac{q \Gamma_q(\nu + 1)}{\Gamma_q(\nu + 2)} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n+1) q^{(3n-1)/2} \Gamma_q(\nu + 1)}{2^n (1+q)^{n-1} \Gamma_q(\nu + n + 1)} \end{aligned} \quad (4.80)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\frac{\Gamma_q(\nu + 1)}{\Gamma_q(\nu + 2)} = \frac{1-q}{1-q^{\nu+1}}$$

eşitliğinden, (4.80) eşitsizliğinin son kısmındaki toplam

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n+1) q^{(3n-1)/2} \Gamma_q(\nu + 1)}{2^n (1+q)^{n-1} \Gamma_q(\nu + n + 1)} \leq \frac{(1+q) \Gamma_q(\nu + 1)}{q^{1/2} \Gamma_q(\nu + 3)} \sum_{n=2}^{\infty} n(n+1) \left(\frac{q^{3/2}}{2(1+q)} \right)^n$$

$$= \frac{q(1-q)^2 \left(8(1+q)^3 - (2(1+q) - q^{3/2})^3 \right)}{(1-q^{v+1})(1-q^{v+2})(2(1+q) - q^{3/2})^3}$$

şeklinde sınırlandırılır. Son olarak teorem hipotezinden

$$\left| \frac{\Delta_v''(z; q)}{\Delta_v'(0; q)} \right| - \frac{1}{2} \leq \frac{q(1-q)}{1-q^{v+1}} + \frac{q(1-q)^2 (8(1+q)^3 - (2(1+q) - q^{3/2})^3)}{(1-q^{v+1})(1-q^{v+2})(2(1+q) - q^{3/2})^3} - \frac{1}{2} \leq 0$$

elde edilir. Böylece, Lemma 3.1.7' e göre $0 < q < 1$ ve $v \geq v_3$ için Δ_v fonksiyonu konveks olur. Burada v_3 ,

$$p_q(v) := \frac{q(1-q)}{1-q^{v+1}} + \frac{q(1-q)^2 (8(1+q)^3 - (2(1+q) - q^{3/2})^3)}{(1-q^{v+1})(1-q^{v+2})(2(1+q) - q^{3/2})^3} - \frac{1}{2} = 0 \quad (4.81)$$

denkleminin en büyük köküdür. Bu durum Şekil 4.10 ile de doğrulanmaktadır.

Ayrıca Lemma 4.3.3'den

$$\left(\frac{\Gamma_q(v+n+1)}{\Gamma_q(\mu+n+1)} \right)_{n \geq 1}$$

bir subordinasyon faktör dizisidir. Dolayısıyla

$$\Delta_\mu = \gamma * \Delta_v \prec \Delta_v$$

subordinasyonu yazılır. Burada,

$$\gamma(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_q(v+n+1)}{\Gamma_q(\mu+n+1)} z^n$$

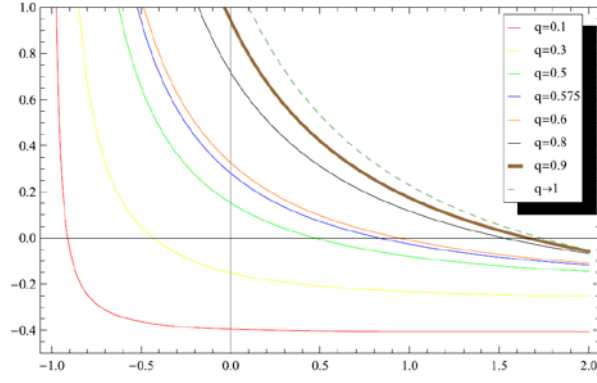
dır. Ayrıca, $\Delta_\mu(0) = \Delta_v(0)$ olduğundan, $\Delta_\mu \prec \Delta_v$ subordinasyonu

$$\Delta_\mu(\mathbb{D}, q) \subset \Delta_v(\mathbb{D}, q)$$

ifadesine denktir. Böylece,

$$\Psi_\mu(\mathbb{D}, q) \subset \Psi_v(\mathbb{D}, q)$$

sonucu elde edilir. Böylece ispat tamamlanmıştır.



Şekil 4.10. $p_q(v)$ fonksiyonunun grafiği

Bu bölümde q – Bessel fonksiyonunun normalize edilmiş başka bir hali olan $\mathcal{J}_v(z; q)$ fonksiyonunun monotonluk özelliği incelenecektir. Bunun için

$$\frac{\Gamma_q(a+n)}{\Gamma_q(a)} = \frac{(q^a; q)_n}{(1-q)^n}$$

bağıntısı yardımıyla q – Bessel fonksiyonunun normalize edilmiş başka bir versiyonunu

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_v(z; q) &= \frac{2^v (q; q)_\infty z^{-v}}{(q^{v+1}; q)_\infty (1-q)^v} J_v^{(2)}((1-q)z; q) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(n+v)} (1-q)^{2n}}{4^n (q; q)_n (q^{v+1}; q)_n} z^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(n+v)} \Gamma_q(v+1)}{4^n [n]_q! \Gamma_q(v+n+1)} z^{2n} \end{aligned} \quad (4.82)$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $q \rightarrow 1$ için $\mathcal{J}_v(z; q) = \mathbb{J}_v(z)$ dır.

Yakın zamanda Cotîrlă ve Szász (Cotîrlă & Szász 2024), $\mathbb{J}_v$ fonksiyonunun monotonluk problemi üzerine bir çalışma yapmıştır. Burada $\mathbb{J}_v$ normalize Bessel fonksiyonudur. Yazarlar çalışmasında $\mu > v > -1$ için

$$\mathbb{J}_\mu(\mathbb{D}) \subset \mathbb{J}_v(\mathbb{D})$$

olduğunu göstermiştir. Aşağıda vereceğimiz sonuç Cotîrlă ve Szász'ın (Cotîrlă & Szász, 2024) sonucunun q versiyonudur.

Aşağıdaki lemmalar ana sonucun ispatında önemli rol oynayacaktır.

Lemma 4.3.6: $\mu > \nu > -1$ ve $0 < q < 1$ olsun. Bu durumda

$$\Re \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_q(\mu+1)\Gamma_q(\nu+n+1)q^{n\mu}}{\Gamma_q(\nu+1)\Gamma_q(\mu+n+1)q^{n\nu}} z^n \right) > \frac{1}{2} \quad (4.83)$$

eşitsizliği sağlanır (Özkan et al., 2025b).

İspat. Lemmanın ispatında Lemma 3.1.6 dikkate alınacak. Bunun için $f_0 = 1$ ve $n \geq 1$ için

$$f_n = \frac{\Gamma_q(\mu+1)\Gamma_q(\nu+n+1)q^{n\mu}}{\Gamma_q(\nu+1)\Gamma_q(\mu+n+1)q^{n\nu}}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Basit hesaplamalardan

$$f_0 - f_1 = 1 - \frac{\Gamma_q(\mu+1)\Gamma_q(\nu+2)q^\mu}{\Gamma_q(\nu+1)\Gamma_q(\mu+2)q^\nu} = 1 - \frac{(1-q^{\nu+1})q^\mu}{(1-q^{\mu+1})q^\nu} \geq 0$$

ve

$$\begin{aligned} f_n - f_{n+1} &= \frac{\Gamma_q(\mu+1)\Gamma_q(\nu+n+1)q^{n\mu}}{\Gamma_q(\nu+1)\Gamma_q(\mu+n+1)q^{n\nu}} - \frac{\Gamma_q(\mu+1)\Gamma_q(\nu+n+2)q^{(n+1)\mu}}{\Gamma_q(\nu+1)\Gamma_q(\mu+n+2)q^{(n+1)\nu}} \\ &= q^{n(\mu-\nu)} \frac{\Gamma_q(\mu+1)\Gamma_q(\nu+n+1)}{\Gamma_q(\nu+1)\Gamma_q(\mu+n+1)} \times \left(1 - \frac{(1-q^{\nu+n+1})q^\mu}{(1-q^{\mu+n+1})q^\nu} \right) \geq 0 \end{aligned}$$

olduğu açıktır. Şimdi, $f_n - 2f_{n+1} + f_{n+2} \geq 0$ eşitsizliğini ispatlamak için iki durum ele alınacaktır.

1. Durum $n = 0$ için, Lemma 4.3.1'in birinci kısmından

$$\begin{aligned} &f_0 - 2f_1 + f_2 \\ &= 1 - 2 \frac{\Gamma_q(\mu+1)\Gamma_q(\nu+2)q^\mu}{\Gamma_q(\nu+1)\Gamma_q(\mu+2)q^\nu} + \frac{\Gamma_q(\mu+1)\Gamma_q(\nu+3)q^{2\mu}}{\Gamma_q(\nu+1)\Gamma_q(\mu+3)q^{2\nu}} \\ &\geq 2q^{\mu-\nu} \sqrt{\frac{\Gamma_q(\mu+1)\Gamma_q(\nu+3)}{\Gamma_q(\nu+1)\Gamma_q(\mu+3)}} - 2q^{\mu-\nu} \frac{\Gamma_q(\mu+1)\Gamma_q(\nu+2)}{\Gamma_q(\nu+1)\Gamma_q(\mu+2)} \\ &= 2q^{\mu-\nu} \sqrt{\frac{(1-q^{\nu+1})}{(1-q^{\mu+1})}} \times \left(\sqrt{\frac{(1-q^{\nu+2})}{(1-q^{\mu+2})}} - \sqrt{\frac{(1-q^{\nu+1})}{(1-q^{\mu+1})}} \right) \geq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ilk ve son ifadeden

$$f_0 - 2f_1 + f_2 \geq 0$$

bulunur.

2.Durum $n \geq 1$, $\mu > \nu$ ve $0 < q < 1$ için

$$\sqrt{\frac{(1-q^{\nu+n+2})}{(1-q^{\mu+n+2})}} - \sqrt{\frac{(1-q^{\nu+n+1})}{(1-q^{\mu+n+1})}} \geq 0$$

eşitsizliği dikkate alındığında

$$\begin{aligned} & f_n - 2f_{n+1} + f_{n+2} \\ &= \frac{\Gamma_q(\mu+1)\Gamma_q(\nu+n+1)q^{n\mu}}{\Gamma_q(\nu+1)\Gamma_q(\mu+n+1)q^{n\nu}} - 2\frac{\Gamma_q(\mu+1)\Gamma_q(\nu+n+2)q^{(n+1)\mu}}{\Gamma_q(\nu+1)\Gamma_q(\mu+n+2)q^{(n+1)\nu}} \\ &+ \frac{\Gamma_q(\mu+1)\Gamma_q(\nu+n+3)q^{(n+2)\mu}}{\Gamma_q(\nu+1)\Gamma_q(\mu+n+3)q^{(n+2)\nu}} \\ &= \frac{\Gamma_q(\mu+1)\Gamma_q(\nu+n+1)q^{n\mu}}{\Gamma_q(\nu+1)\Gamma_q(\mu+n+1)q^{n\nu}} \times \left(1 - 2\frac{(1-q^{\nu+n+1})q^\mu}{(1-q^{\mu+n+1})q^\nu} + \frac{(1-q^{\nu+n+1})(1-q^{\nu+n+2})q^{2\mu}}{(1-q^{\mu+n+1})(1-q^{\mu+n+2})q^{2\nu}} \right) \\ &\geq \frac{\Gamma_q(\mu+1)\Gamma_q(\nu+n+1)q^{n\mu}}{\Gamma_q(\nu+1)\Gamma_q(\mu+n+1)q^{n\nu}} \times \left(2\sqrt{\frac{(1-q^{\nu+n+1})(1-q^{\nu+n+2})q^{2\mu}}{(1-q^{\mu+n+1})(1-q^{\mu+n+2})q^{2\nu}}} - 2\frac{(1-q^{\nu+n+1})q^\mu}{(1-q^{\mu+n+1})q^\nu} \right) \\ &= 2q^{(n+1)(\mu-\nu)} \frac{\Gamma_q(\mu+1)\Gamma_q(\nu+n+1)}{\Gamma_q(\nu+1)\Gamma_q(\mu+n+1)} \sqrt{\frac{(1-q^{\nu+n+1})}{(1-q^{\mu+n+1})}} \times \left(\sqrt{\frac{(1-q^{\nu+n+2})}{(1-q^{\mu+n+2})}} - \sqrt{\frac{(1-q^{\nu+n+1})}{(1-q^{\mu+n+1})}} \right) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak (4.83) eşitsizliği sağlanır. Böylece ispat tamamlanmıştır.

Lemma 4.3.7: $n \geq 1$ ve $0 < q < 1$ olsun. Bu durumda

$$n(n-1)q^{n^2-n} - [n]_q! \leq 0 \quad (4.84)$$

eşitsizliği sağlanır (Özkan et al., 2025b).

İspat: Lemma'nın ispatı için Tümevarım yöntemi kullanılacaktır. Aslında (4.84) ile verilen eşitsizlik

$$\frac{n(n-1)q^{n^2-n}}{[n]_q!} \leq 1$$

ifadesine denktir. İlk olarak $0 < q < 1$ ve $n = 2$ için $2q^2 - q - 1 \leq 0$ eşitsizliği sağlandığından $\frac{2q^2}{1+q} \leq 1$ doğrudur.

Şimdi, $n = k$ için sağlandığını varsayıp $n = k + 1$ olması durumunda doğruluğunu gösterelim. Bunun için $n = k$ alınırsa

$$\frac{k(k-1)q^{k^2-k}}{[k]_q!} \leq 1 \quad (4.85)$$

sağlandığını varsayalım. Dolayısıyla $n = k + 1$ için (4.85) varsayımı kullanılarak

$$\begin{aligned} \frac{k(k+1)q^{k^2+k}}{[k+1]_q!} &= \frac{k(k+1)q^{k^2+k}}{(1+q+\dots+q^k)[k]_q!} \\ &= \frac{q^{k^2+k}(k+1)}{q^{k^2-k}(k-1)(1+q+\dots+q^k)} \times \frac{k(k-1)q^{k^2-k}}{[k]_q!} \\ &\leq q^{2k} \frac{(k+1)}{(k-1)(1+q+\dots+q^k)} \leq q^{2k} \frac{k+1}{(k-1)(1+q+q^2)} := f_q(k) \quad (k \geq 2) \end{aligned}$$

elde edilir. k değişkenine bağlı olarak f_q fonksiyonunun türevi alındığında

$$f'_q(k) = f_q(k)g_q(k)$$

elde edilir. Burada

$$g_q(k) = 2 \ln q + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k-1}$$

dır. Şimdi, g_q fonksiyonunun işaretini inceleyelim. Buradan

$$g'_q(k) = \frac{4k}{(k^2-1)^2} > 0$$

olduğundan fonksiyon artandır. Diğer taraftan

$$g_q(2) = 2 \ln q - \frac{2}{3} < 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} g_q(k) = 2 \ln q < 0$$

elde edilir. Böylece $g_q(k) < 0$ sağlanır. Sonuç olarak, f_q fonksiyonunun monoton azalandır. Bundan dolayı

$$\max f_q(k) = f_q(2)$$

yazılır. Sonuç olarak, $0 < q < 1$ için $f_q(2) \leq 1$ eşitsizliği sağlandığından $f_q(k) \leq 1$ yazılır.

Böylece ispat tamamlanmıştır.

Aşağıda (4.82) ile tanımlı $\mathcal{J}_\nu(z; q)$ fonksiyonunun monotonluğu ile ilgili teorem verilmiştir.

Teorem 4.3.8: $0 < q < 1$ ve $\mu > \nu \geq -1$ olsun. Bu durumda

$$\mathcal{J}_\mu(\mathbb{D}, q) \subset \mathcal{J}_\nu(\mathbb{D}, q)$$

bağıntısı sağlanır (Özkan et al., 2025b).

İspat: K_ν fonksiyonunu

$$K_\nu(z; q) = 1 - \mathcal{J}_\nu(\sqrt{z}; q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} q^{n(n+\nu)} \Gamma_q(\nu+1)}{4^n [n]_q! \Gamma_q(\nu+n+1)} z^n$$

şeklinde tanımlayalım. K_ν fonksiyonun türevlerinden

$$\begin{aligned} \left| \frac{K_\nu''(z; q)}{K_\nu'(0; q)} \right| &= \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n(n-1) q^{n(n+\nu)} \Gamma_q(\nu+2)}{4^{n-1} [n]_q! q^{\nu+1} \Gamma_q(\nu+n+1)} z^{n-2} \right| \\ &\leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1) q^{n(n+\nu)} \Gamma_q(\nu+2)}{4^{n-1} [n]_q! q^{\nu+1} \Gamma_q(\nu+n+1)} \\ &\leq \frac{\Gamma_q(\nu+2)}{\Gamma_q(\nu+3)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1) q^{n^2+\nu(n-1)-1}}{2^{2n-2} [n]_q!} \\ &\leq \frac{\Gamma_q(\nu+2)}{\Gamma_q(\nu+3)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1) q^{n(n-1)}}{2^{2n-2} [n]_q!} \end{aligned} \tag{4.86}$$

bulunur. Böylece (4.86) eşitsizliği ve Lemma 4.3.7 birlikte düşünüldüğünde

$$2 \left| \frac{K_v''(z; q)}{K_v'(0; q)} \right| \leq \frac{\Gamma_q(v+2)}{\Gamma_q(v+3)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)q^{n(n-1)}}{2^{2n-3} [n]_q!} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{2n-3}} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1$$

elde edilir. Diğer taraftan Lemma 4.3.6'dan

$$\left(\frac{\Gamma_q(\mu+1)\Gamma_q(v+n+1)q^{n\mu}}{\Gamma_q(v+1)\Gamma_q(\mu+n+1)q^{nv}} \right)_{n \geq 1}$$

bir subordinasyon faktör dizisidir. Sonuç olarak

$$K_\mu = \hbar * K_v \prec K_v$$

subordinasyonu yazılabilir. Burada

$$\hbar(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma_q(\mu+1)\Gamma_q(v+n+1)q^{n\mu}}{\Gamma_q(v+1)\Gamma_q(\mu+n+1)q^{nv}} z^n$$

şeklindeir. Ayrıca, $K_\mu(0) = K_v(0)$ olduğundan $K_\mu \prec K_v$, subordinasyonu

$$K_\mu(\mathbb{D}, q) \subset K_v(\mathbb{D}, q)$$

denktir. Dolayısıyla

$$\mathcal{J}_\mu(\mathbb{D}, q) \subset \mathcal{J}_v(\mathbb{D}, q)$$

bağıntısı yazılır. Böylece ispat tamamlanmıştır.

Sonuç 4.3.9: Teorem 4.3.8'de, $q \rightarrow 1$ için Cotîrlă ve Szász'ın (Cotîrlă and Szász 2024) elde ettiği sonuca ulaşılır (Özkan et al., 2025b).

Aşağıdaki tabloda, seçilmiş bazı q özel değerleri için v_0, v_1, v_2 ve v_3 verilmiştir.

Tablo 4.1. q nun özel değerleri için v_0, v_1, v_2 ve v_3

q	v_0	v_1	v_2	v_3
$q = 0.1$	-0.32707	-1.69632	-0.71424	-0.90964
$q = 0.3$	-0.16839	-1.44307	-0.52950	-0.43260
$q = 0.5$	-0.07007	-1.17431	-0.35337	0.47113
$q = 0.575$	-0.04014	-1.07065	-0.28344	0.82977
$q = 0.6$	-0.03078	-1.03618	-0.25936	0.93870
$q = 0.8$	0.03524	-0.77041	-0.04705	1.52632
$q = 0.9$	0.06344	-0.64918	0.07776	1.66043
$q \rightarrow 1$	0.08907	-0.53836	0.22176	1.734

4.4. Ramanujan Tipi Tam Fonksiyonunun Monotonluk Özellikleri

Bu bölümde Ramanujan tipi tam fonksiyonunun bazı monotonluk özellikleri incelenmiştir.

Bu anlamda ana sonuçlarımızın ispatında kullanılacak lemmaların ilki aşağıdaki şekildedir.

Lemma 4.4.1: $\alpha > \beta > 0$, $0 < q < 1$ ve $1 - 2q^{\alpha-\beta} + q^{4(\alpha-\beta)} > 0$ olsun. Bu durumda

$$\Re\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} q^{(\alpha-\beta)k^2} z^k\right) > \frac{1}{2} \quad (4.87)$$

eşitsizliği sağlanır (Özkan et al., 2025c).

İspat: Bu lemmanın ispatında Lemma 3.1.6 kullanılacaktır. Bunun için $k \geq 1$ olmak üzere

$$f_0 = 1 \text{ ve}$$

$$f_k = 1 - 2q^{(2k+1)(\alpha-\beta)} + q^{(4k+4)(\alpha-\beta)}$$

dizisini göz önüne alalım. Böylece hipotezden

$$f_0 - f_1 = 1 - q^{\alpha-\beta} > 0$$

ve

$$f_k - f_{k+1} = q^{(\alpha-\beta)k^2 - (\alpha-\beta)(k+1)^2} = q^{(\alpha-\beta)k^2} [1 - q^{(\alpha-\beta)2k+1}] > 0$$

elde edilir. Şimdi $k = 0$ için

$$f_0 - 2f_1 + f_2 \geq 0,$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim. f_k dizisinin tanımından

$$f_0 - 2f_1 + f_2 = 1 - 2q^{\alpha-\beta} + q^{4(\alpha-\beta)}$$

olup hipotezden

$$f_0 - 2f_1 + f_2 \geq 0$$

elde edilir. Şimdi $k \geq 1$ için

$$f_k - 2f_{k+1} + f_{k+2} \geq 0$$

sağlandığını gösterelim. Bunun için

$$\begin{aligned} & f_k - 2f_{k+1} + f_{k+2} \\ &= q^{(\alpha-\beta)k^2} - 2q^{(\alpha-\beta)(k+1)^2} + q^{(\alpha-\beta)(k+2)^2} \\ &= q^{(\alpha-\beta)k^2} \left[1 - 2q^{(\alpha-\beta)(k+1)} + q^{(\alpha-\beta)(4k+4)} \right] \end{aligned}$$

eşitliğini göz önüne alalım. Bu eşitliğin işaretini belirleyecek olan

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(k) = 1 - 2q^{(\alpha-\beta)(k+1)} + q^{(\alpha-\beta)(4k+4)}$$

fonksiyonudur. Bu fonksiyonun işaret incelemesi için türev testi uygulanacaktır. Teoremin hipotezden

$$f'(k) = 4(\alpha - \beta) \left(-q^{(\alpha-\beta)(2k+1)} + q^{(\alpha-\beta)(4k+4)} \right) \ln q > 0$$

olduğu kolayca görülür. Böylece, f fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında artandır. Dolayısıyla

$$f(k) > f(0) > 0$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$f_k - 2f_{k+1} + f_{k+2} > 0$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmıştır.

Aşağıdaki tabloda bazı farklı q değerleri için $1 - 2q^{\alpha-\beta} + q^{4(\alpha-\beta)} > 0$ olacak şekilde $\alpha - \beta$ değerleri verilmiştir.

Tablo 4.2. q değerleri için $\alpha - \beta$ sonuçlarının tablosu

q	$\alpha - \beta$
0.1	0.26464
0.3	0.50613
0.5	0.87914
0.6	1.19292
0.8	1.19293
0.9	2.73088
$q \rightarrow 1$	0

Aşağıdaki teorem Ramanujan tipi tam fonksiyonun monotonluğu ile ilgili önemli bir sonucu ihtiva eder.

Teorem 4.4.2: $0 < q < 1$, $\alpha > \beta > 0$, $\alpha > a + 1$ ve

$$\frac{\ln(1-q)}{\ln q} < a \leq \frac{\ln\left(1 - (1-q)^4 q^\alpha / 4q^{2(a+1)}\right)}{\ln q} - 1$$

olsun. Bu durumda

$$\mathcal{A}_q^{(\alpha)}(q^a; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^a, q)_k}{(q, q)_k} q^{\alpha k^2} z^k$$

fonksiyonu için

$$\mathcal{A}_q^{(\alpha)}(\mathbb{D}) \subset \mathcal{A}_q^{(\beta)}(\mathbb{D})$$

bağıntısı sağlanır (Özkan et al., 2025c).

İspat: $\mathcal{A}_q^{(\alpha)}(q^a; z)$ fonksiyonunun tanımından

$$\frac{\left(\mathcal{A}_q^{(\alpha)}\right)''(q^a; z)}{\left(\mathcal{A}_q^{(\alpha)}\right)'(q^a; 0)} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)(q^a; q)_k (1-q) q^{\alpha k^2}}{(q; q)_k (1-q^a) q^\alpha} z^{k-2}$$

yazılır. Dolayısıyla (2.14) ve $(q; q)_k \geq (1-q)^k$ eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \left| \frac{\left(\mathcal{A}_q^{(\alpha)}\right)''(q^a; z)}{\left(\mathcal{A}_q^{(\alpha)}\right)'(q^a; 0)} \right| &\leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)\Gamma_q(a+k)(1-q)q^{\alpha k^2}}{\Gamma_q(a)(1-q^a)q^\alpha} \\ &= \frac{1-q}{(1-q^a)q^\alpha \Gamma_q(a)} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{ak}\Gamma_q(a+k)q^{\alpha k^2 - ak} \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi k değişkenine göre

$$H_q : (2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad H_q(a; k) = q^{ak}\Gamma_q(a+k)$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Böylece

$$H_q'(a; k) = H_q(a; k) [a \ln q + \psi_q(a+k)]$$

olur. Son eşitlikteki parantez içindeki ifade için

$$h_q(a; k) = a \ln q + \psi_q(a + k)$$

fonksiyonunu ele alalım. Burada $a > 0$ ve $k \geq 2$ için $\psi_q(a + k) > 0$ olduğu açıktır.

Böylece $h_q(a; k)$ fonksiyonu için

$$\frac{\partial h_q(a; k)}{\partial k} = \frac{\partial \psi_q(a + k)}{\partial k} > 0$$

sağlanır. Bu ise $h_q(a; k)$ fonksiyonunun artan olduğunu gösterir. Ayrıca, hipotezden

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h_q(a; k) = a \ln q - \ln(1 - q) < 0$$

elde edilir. Böylece $h_q(a; k) < 0$ dır. Sonuç olarak $H_q'(a; k) < 0$ bulunur. Dolayısıyla H_q fonksiyonu azalandır. Ayrıca $\alpha k^2 - ak \geq k$ olduğundan

$$\begin{aligned} \left| \frac{(\mathcal{A}_q^{(\alpha)})''(q^a; z)}{(\mathcal{A}_q^{(\alpha)})'(q^a; 0)} \right| &\leq \frac{1 - q}{(1 - q^a) q^\alpha \Gamma_q(a)} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) q^{ak} \Gamma_q(a+k) q^{\alpha k^2 - ak} \\ &\leq \frac{(1 - q) q^{2a} \Gamma_q(a+2)}{(1 - q^a) q^\alpha \Gamma_q(a)} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) q^{\alpha k^2 - ak} \\ &= \frac{1 - q^{a+1}}{(1 - q) q^\alpha} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) q^{\alpha k^2 - ak} \\ &\leq \frac{q^{2a} (1 - q^{a+1})}{(1 - q) q^\alpha} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) q^k \\ &= \frac{2q^{2a+2} (1 - q^{a+1})}{(1 - q)^3 (1 - q) q^\alpha} = \frac{2q^{2a+2} (1 - q^{a+1})}{q^\alpha (1 - q)^4} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla hipotezden

$$\left| \frac{(\mathcal{A}_q^{(\alpha)})''(q^a; z)}{(\mathcal{A}_q^{(\alpha)})'(q^a; 0)} \right| \leq \frac{1}{2}$$

sağlanır. Böylece Lemma 3.1.7'e göre $\mathcal{A}_q^{(\alpha)}$ fonksiyonu konvektir. Ayrıca Lemma 4.4.1

den $\left(q^{(\alpha-\beta)k^2}\right)_{k \geq 1}$ bir subordinasyon faktör dizisidir. Buradan,

$$\mathcal{A}_q^{(\beta)}(q^a; z) = \mathcal{B}_q^{(\alpha)}(q^a; z) * \mathcal{A}_q^{(\alpha)}(q^a; z) \prec \mathcal{A}_q^{(\alpha)}(q^a; z)$$

sağlanır. Burada

$$\mathcal{B}_q^{(\alpha)}(q^a; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{\beta k^2}}{q^{\alpha k^2}} z^k$$

dır. Ayrıca, $\mathcal{A}_q^{(\beta)}(0; z) = \mathcal{A}_q^{(\alpha)}(0; z)$ eşitliği sağlandığından

$$\mathcal{A}_q^{(\beta)}(q^a; z) \prec \mathcal{A}_q^{(\alpha)}(q^a; z)$$

subordinasyon bağıntısı

$$\mathcal{A}_q^{(\beta)}(q^a; \mathbb{D}) \subset \mathcal{A}_q^{(\alpha)}(q^a; \mathbb{D})$$

ifadesine denktir. Böylece ispat tamamlanmıştır.

Son bölümde önemli özel bir fonksiyon olan q – Struve-Bessel fonksiyonlarının monotonluk özellikleri incelenmiştir.

4.5. q – Struve-Bessel Fonksiyonlarının Monotonluk Özellikleri

Bu bölümde, subordinasyon faktör dizisi yöntemi kullanılarak normalize edilmiş q – Struve-Bessel fonksiyonlarının monotonluk özellikleri çalışılmıştır. Elde edilen bazı veriler tablo ve grafiklerle desteklenmektedir. Özel fonksiyonların monotonluğuna ilişkin literatürde yer alan bazı çalışmalara yer verilmiştir. Bu bağlamda, konuyla ilgili önemli çalışmalarından biri Oraby ve Mansour tarafından gerçekleştirilmiş olup, bu çalışmada q – Struve-Bessel fonksiyonlarının yıldızlılık ve konvekslik özellikleri çalışılmıştır (Oraby & Mansour, 2022)

Bu bölümdeki amaç, aşağıdaki

$$\eta_{\mu}(\mathbb{D}, q^2) \subset \eta_{\nu}(\mathbb{D}, q^2), \quad \xi_{\mu}(\mathbb{D}, q^2) \subset \xi_{\nu}(\mathbb{D}, q^2), \quad \lambda_{\mu}(\mathbb{D}, q^2) \subset \lambda_{\nu}(\mathbb{D}, q^2)$$

ve

$$\gamma_{\mu}(\mathbb{D}, q^2) \subset \gamma_{\nu}(\mathbb{D}, q^2)$$

içerme bağıntılarını ispatlamaktır. Burada söz konusu olan fonksiyonlar sırasıyla, (3.17), (3.18), (3.19) ve (3.20) numaraları ile tanımlı normalize edilmiş q – Struve-Bessel fonksiyonlarıdır.

Aşağıda verilen ve ana sonuçların ispatında kullanılan Lemma 4.5.2-4.5.4, bu bölümün üçüncü alt bölümündeki Lemma 4.3.1-4.3.3'ün $q \rightarrow q^2$, $v \rightarrow v + \frac{1}{2}$ ve $\mu \rightarrow \mu + \frac{1}{2}$ dönüşümleri altında elde edilen özel durumlarına karşılık gelmektedir.

Lemma 4.5.1: $q \in (0,1)$ olsun. Bu durumda,

i) $\mu > v > v_4$ için

$$\frac{1-q^{2v+5}}{1-q^{2\mu+5}} \geq \frac{\Gamma_{q^2}\left(v+\frac{5}{2}\right)}{\Gamma_{q^2}\left(\mu+\frac{5}{2}\right)} \quad (4.88)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada v_4 ,

$$\frac{2q^{2v+5}}{1-q^{2v+5}} \ln q + \psi_{q^2}\left(v+\frac{5}{2}\right) = 0$$

denkleminin en büyük reel köküdür.

ii) $\mu > v > v_5$ için

$$\frac{q^{2v}}{\Gamma_{q^2}\left(v+\frac{5}{2}\right)} \geq \frac{q^{2\mu}}{\Gamma_{q^2}\left(\mu+\frac{5}{2}\right)} \quad (4.89)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada v_5 , $2 \ln q - \psi_{q^2}\left(v+\frac{5}{2}\right) = 0$ denkleminin en büyük reel köküdür (Özkan et al., 2025d).

Lemma 4.5.2: $\mu > v > \max\{v_4, v_5\}$ ve $z \in \mathbb{D}$ olsun. Bu durumda

$$\Re \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{q^2}\left(v+k+\frac{3}{2}\right) q^{2k\mu}}{\Gamma_{q^2}\left(\mu+k+\frac{3}{2}\right) q^{2kv}} z^k \right) > \frac{1}{2} \quad (4.90)$$

eşitsizliği sağlanır (Özkan et al., 2025d).

Lemma 4.5.3: $\mu > v > v_4$ ve $z \in \mathbb{D}$ için

$$\Re \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{q^2} \left(k + \nu + \frac{3}{2} \right)}{\Gamma_{q^2} \left(k + \mu + \frac{3}{2} \right)} z^k \right) > \frac{1}{2} \quad (4.91)$$

eşitsizliği sağlanır (Özkan et al., 2025d).

Lemma 4.5.4: $\mu > \nu > -\frac{3}{2}$ ve $z \in \mathbb{D}$ olsun. Bu durumda

$$\Re \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{q^2} \left(\nu + 1 + \frac{k}{2} \right)}{\Gamma_{q^2} \left(\mu + 1 + \frac{k}{2} \right)} z^k \right) > \frac{1}{2} \quad (4.92)$$

eşitsizliği sağlanır (Özkan et al., 2025d).

İspat: Lemmanın ispatında Lemma 3.1.6 kullanılmaktadır. Bunun için, $f_0 = 1$ ve

$$f_k = \frac{\Gamma_{q^2} \left(\nu + 1 + \frac{k}{2} \right)}{\Gamma_{q^2} \left(\mu + 1 + \frac{k}{2} \right)}$$

şeklinde tanımlayalım. Buradan

$$f_0 - f_1 = 1 - \frac{\Gamma_{q^2} \left(\nu + 1 + \frac{1}{2} \right)}{\Gamma_{q^2} \left(\mu + 1 + \frac{1}{2} \right)} \geq 0$$

elde edilir. Şimdi, (f_k) dizisinin monoton azalan olduğunu gösterelim. Son eşitsizlik

$$\frac{\Gamma_{q^2} \left(\nu + 1 + \frac{k}{2} \right)}{\Gamma_{q^2} \left(\nu + 1 + \frac{k+1}{2} \right)} > \frac{\Gamma_{q^2} \left(\mu + 1 + \frac{k}{2} \right)}{\Gamma_{q^2} \left(\mu + 1 + \frac{k+1}{2} \right)} \quad (4.93)$$

ifadesine denktir. (4.93) eşitsizliğinin sağlandığını göstermek için

$$u : (1, \infty) \rightarrow (0, \infty), \quad u(x) = \frac{\Gamma_{q^2}(x)}{\Gamma_{q^2}(x + \frac{1}{2})}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. q – Euler Beta fonksiyonunun tanımından

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{B_{q^2}(x, \frac{1}{2})}{\Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})} = \frac{1}{\Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})} \int_0^1 t^{x-1} (1 - q^2 t)_{q^2}^{-1/2} d_{q^2} t \\ &= \frac{1 - q^2}{\Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2nx}}{\sqrt{(1 - q^{2(n+1)})_{q^2}}} \end{aligned}$$

elde edilir. $u(x)$ fonksiyonun tanımı ve $0 < q < 1$ için $\ln q < 0$ olduğu göz önünde bulundurulduğunda

$$u'(x) = \frac{1-q^2}{\Gamma_{q^2}(\frac{1}{2})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2nq^{2nx} \ln q}{\sqrt{(1-q^{2(n+1)})_{q^2}}} < 0$$

elde edilir. Böylece, $u(x)$ fonksiyonu $(1, \infty)$ aralığında azalandır. Dolayısıyla

$$u\left(v+1+\frac{k}{2}\right) > u\left(\mu+1+\frac{k}{2}\right)$$

yazılır. Bu ise (4.93) eşitsizliğinin sağlandığını gösterir. Şimdi (f_k) dizisinin log-konkav olduğunu gösterelim. Yani, $n \geq 1$

$$f_0 + f_2 \geq 2f_1 \quad \text{ve} \quad f_n + f_{n+2} \geq 2f_{n+1} \quad (4.94)$$

özelliklerinin sağlandığını göstermek gerekiyor. Bu amaçla,

$$\nu: (1, \infty) \rightarrow (0, \infty), \quad \nu(x) = \frac{\Gamma_{q^2}(x)}{\Gamma_{q^2}(x+\mu-\nu)} = \frac{B_{q^2}(x, \mu-\nu)}{\Gamma_{q^2}(\mu-\nu)}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Buna göre, (4.94) eşitsizliği $x = v+1+\frac{n}{2} > 1$ için

$$\frac{\nu(x) + \nu(x+1)}{2} \geq \nu\left(x+\frac{1}{2}\right) \quad (4.95)$$

konvekslik şartına eşdeğerdir. ν fonksiyonunun tanımından

$$\nu''(x) = \frac{1}{\Gamma_{q^2}(\mu-\nu)} \int_0^1 t^{x-1} \ln^2(t) (1-q^2t)_{q^2}^{\mu-\nu-1} d_{q^2}t \geq 0$$

elde edilir. Sonuç olarak, ν fonksiyonu $(1, \infty)$ aralığında konveks olup (4.95) eşitsizliği sağlanır. Böylece ispat tamamlanmıştır.

Lemma 4.5.5: $\mu > \nu > -\frac{3}{2}$ ve $z \in \mathbb{D}$ olsun. Bu durumda

$$\Re \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{(k-1)\mu} \Gamma_{q^2}\left(v+1+\frac{k}{2}\right)}{q^{(k-1)\nu} \Gamma_{q^2}\left(\mu+1+\frac{k}{2}\right)} z^k \right) > \frac{1}{2}$$

eşitsizliği sağlanır (Özkan et al., 2025d).

İspat: $f_0 = 1$ ve

$$f_k = \frac{q^{(k-1)\mu} \Gamma_{q^2} \left(\nu + 1 + \frac{k}{2} \right)}{q^{(k-1)\nu} \Gamma_{q^2} \left(\mu + 1 + \frac{k}{2} \right)}$$

olsun. İspatın geri kalanı için Lemma 4.5.4'deki aynı adımlar izlenmektedir. Bu nedenle, detaylara çıkarılmıştır.

İlk önemli sonucumuz, (3.17) ile tanımlı η_ν fonksiyonu için monotonluk özelliğini sağlayan aşağıdaki teoremdir.

Teorem 4.5.6: $0 < q < 1$ olsun. Eğer $\mu > \nu \geq \max\{\nu_4, \nu_5, \nu_6\}$ ise bu durumda

$$\eta_\mu(\mathbb{D}, q^2) \subset \eta_\nu(\mathbb{D}, q^2)$$

bağıntısı sağlanır. Burada ν_4 ve ν_5 değerleri Teorem 4.5.1 de ve η_ν ise (3.17) eşitliği ile verilmiştir. Ayrıca, ν_6 değeri (4.96) ile verilen $t_q(\nu) = 0$ denkleminin en büyük reel köküdür (Özkan et al., 2025d).

İspat: Lemmanın ispatında Lemma 3.1.7 kullanılacaktır. η_ν fonksiyonundan

$$\frac{\eta_\nu''(z; q^2)}{\eta_\nu'(0; q^2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k(k+1) q^{2k^2+2kv+2k} (1+q) \Gamma_{q^2}(3/2) \Gamma_{q^2}(\nu+3/2)}{\Gamma_{q^2}(k+3/2) \Gamma_{q^2}(k+\nu+3/2) (1+q)^{2k+1}} z^{k-1}$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned} \left| \frac{\eta_\nu''(z; q^2)}{\eta_\nu'(0; q^2)} \right| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1) q^{2k^2+2kv+2k} \Gamma_{q^2}(3/2) \Gamma_{q^2}(\nu+3/2)}{\Gamma_{q^2}(k+3/2) \Gamma_{q^2}(k+\nu+3/2) (1+q)^{2k}} \\ &= \frac{2q^{4+2\nu} \Gamma_{q^2}(3/2) \Gamma_{q^2}(\nu+3/2)}{\Gamma_{q^2}(5/2) \Gamma_{q^2}(\nu+5/2) (1+q)^2} \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k+1) q^{2k^2+2kv+2k} \Gamma_{q^2}(3/2) \Gamma_{q^2}(\nu+3/2)}{\Gamma_{q^2}(k+3/2) \Gamma_{q^2}(k+\nu+3/2) (1+q)^{2k}} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer taraftan

$$\frac{2q^{4+2\nu} \Gamma_{q^2}(3/2) \Gamma_{q^2}(\nu+3/2)}{\Gamma_{q^2}(5/2) \Gamma_{q^2}(\nu+5/2) (1+q)^2} = \frac{2q^{4+2\nu} (1-q)^2}{(1-q^3)(1-q^{3+2\nu})}$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca, $k \geq 2$ için $k^2 \geq 4k - 4$ eşitsizliği dikkate alındığında

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k+1)q^{2k^2+2kv+2k}\Gamma_{q^2}(3/2)\Gamma_{q^2}(v+3/2)}{\Gamma_{q^2}(k+3/2)\Gamma_{q^2}(k+v+3/2)(1+q)^{2k}} \\
& \leq \frac{\Gamma_{q^2}(3/2)\Gamma_{q^2}(v+3/2)}{q^8\Gamma_{q^2}(7/2)\Gamma_{q^2}(v+7/2)} \sum_{k=2}^{\infty} k(k+1) \left(\frac{q^{10+2v}}{(1+q)^2} \right)^k \\
& = \frac{2q^{2(1+v)}(1-q)^4(1+q)^2 \left((1+q)^6 - \left((1+q)^2 - q^{10+2v} \right)^3 \right)}{(1-q^3)(1-q^5)(1-q^{2v+3})(1-q^{2v+5}) \left((1+q)^2 - q^{10+2v} \right)^3}
\end{aligned}$$

yazılır. Burada,

$$\nabla(k) = \frac{1}{\Gamma_{q^2}(k+3/2)\Gamma_{q^2}(k+v+3/2)}$$

şeklinde tanımladığımız fonksiyonun monotonluk özelliği dikkate alındı. Fonksiyonun tanımından

$$\frac{\nabla(k+1)}{\nabla(k)} = \frac{(1-q^2)^2}{(1-q^{2k+3})(1-q^{2k+2v+3})} < 1$$

sağlanır. Dolayısıyla, fonksiyon monoton azalandır.

Böylece, $0 < q < 1$ ve $v \geq v_6$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\eta_v''(z; q^2)}{\eta_v'(0; q^2)} - \frac{1}{2} \right| \\
& \leq \frac{2q^{4+2v}(1-q)^2}{(1-q^3)(1-q^{3+2v})} - \frac{1}{2} + \frac{2q^{2(1+v)}(1-q)^4(1+q)^2 \left((1+q)^6 - \left((1+q)^2 - q^{10+2v} \right)^3 \right)}{(1-q^3)(1-q^5)(1-q^{2v+3})(1-q^{2v+5}) \left((1+q)^2 - q^{10+2v} \right)^3} \leq 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, Lemma 3.1.7'ye göre η_v fonksiyonu konvektir. Burada v_6 ,

$$t_q(v) := \frac{2q^{4+2v}(1-q)^2}{(1-q^3)(1-q^{3+2v})} \tag{4.96}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2q^{2(1+v)}(1-q)^4(1+q)^2 \left((1+q)^6 - \left((1+q)^2 - q^{10+2v} \right)^3 \right)}{(1-q^3)(1-q^5)(1-q^{2v+3})(1-q^{2v+5}) \left((1+q)^2 - q^{10+2v} \right)^3} - \frac{1}{2} = 0
\end{aligned}$$

denkleminin en büyük reel köküdür. Bu durum Şekil 4.11 ile de doğrulanmaktadır.

Böylece, Lemma 4.5.2'ye göre

$$\left(\frac{\Gamma_{q^2}(\nu + k + 3/2)q^{2k\mu}}{\Gamma_{q^2}(\mu + k + 3/2)q^{2kv}} \right)_{k \geq 1}$$

bir subordinasyon faktör dizisidir. Buradan,

$$\eta_\mu = \chi^* \eta_\nu \prec \eta_\nu$$

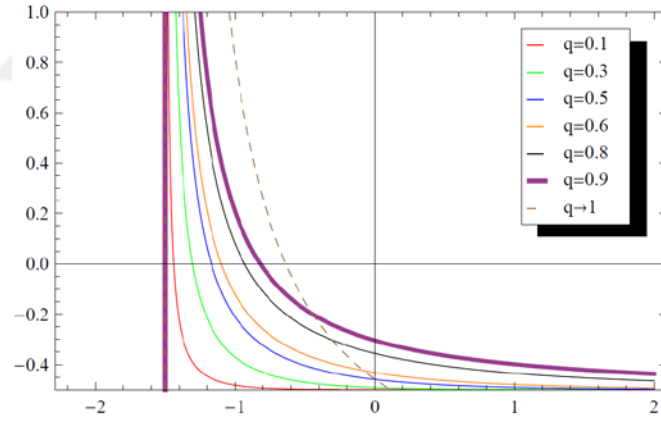
subordinasyon bağıntısı yazılabilir. Burada,

$$\chi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{q^2}(\nu + k + 3/2)q^{2k\mu}}{\Gamma_{q^2}(\mu + k + 3/2)q^{2kv}} z^k$$

dır. $\eta_\mu(0) = \eta_\nu(0)$ olduğundan $\eta_\mu \prec \eta_\nu$ subordinasyonu

$$\eta_\mu(\mathbb{D}, q^2) \subset \eta_\nu(\mathbb{D}, q^2)$$

içerme bağıntısına denktir. Böylece ispat tamamlanmıştır.



Şekil 4.11. $t_q(v)$ fonksiyonunun grafiği

İkinci önemli sonucumuz, (3.18) ile tanımlı ξ_μ fonksiyonu için monotonluk özelliğini sağlayan teoremdir.

Teorem 4.5.7: $0 < q < 1$ olmak üzere. Eğer $\mu > \nu \geq \max\{v_4, v_7\}$ ise bu durumda

$$\xi_\mu(\mathbb{D}, q^2) \subset \xi_\nu(\mathbb{D}, q^2)$$

bağıntısı sağlanır. Burada v_4 değeri ve ξ_v fonksiyonu sırasıyla Teorem 4.5.1 ve (3.18) te verilmiştir. Ayrıca, v_7 değeri (4.98) ile verilen $\rho_q(v) = 0$ denkleminin en büyük reel köküdür (Özkan et al., 2025d).

İspat: ξ_v fonksiyonun tanımı dikkate alındığında

$$\frac{\xi_v''(z; q^2)}{\xi_v'(0; q^2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k(k+1)q^{k^2+k}(1+q)\Gamma_{q^2}(3/2)\Gamma_{q^2}(v+3/2)}{\Gamma_{q^2}(k+3/2)\Gamma_{q^2}(k+v+3/2)(1+q)^{2k+1}} z^{k-1} \quad (4.97)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\xi_v''(z; q^2)}{\xi_v'(0; q^2)} \right| \\ & \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)q^{k^2+k}\Gamma_{q^2}(3/2)\Gamma_{q^2}(v+3/2)}{\Gamma_{q^2}(k+3/2)\Gamma_{q^2}(k+v+3/2)(1+q)^{2k}} \\ & \leq \frac{2q^2\Gamma_{q^2}(3/2)\Gamma_{q^2}(v+3/2)}{\Gamma_{q^2}(5/2)\Gamma_{q^2}(v+5/2)(1+q)^2} \\ & + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k+1)q^{k^2+k}\Gamma_{q^2}(3/2)\Gamma_{q^2}(v+3/2)}{\Gamma_{q^2}(k+3/2)\Gamma_{q^2}(k+v+3/2)(1+q)^{2k}} \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. Yukarıdaki son eşitsizlikte,

$$\frac{2q^2\Gamma_{q^2}(3/2)\Gamma_{q^2}(v+3/2)}{\Gamma_{q^2}(5/2)\Gamma_{q^2}(v+5/2)(1+q)^2} = \frac{2q^2(1-q)^2}{(1-q^3)(1-q^{3+2v})}$$

eşitliği ve

$$\begin{aligned} & \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k+1)q^{k^2+k}\Gamma_{q^2}(3/2)\Gamma_{q^2}(v+3/2)}{\Gamma_{q^2}(k+3/2)\Gamma_{q^2}(k+v+3/2)(1+q)^{2k}} \\ & \leq \frac{\Gamma_{q^2}(3/2)\Gamma_{q^2}(v+3/2)}{q^4\Gamma_{q^2}(7/2)\Gamma_{q^2}(v+7/2)} \sum_{k=2}^{\infty} k(k+1) \left(\frac{q^5}{(1+q)^2} \right)^k \\ & = \frac{2q(1-q)^4(1+q)^2 \left((1+q)^6 - ((1+q)^2 - q^5)^3 \right)}{(1-q^3)(1-q^5)(1-q^{2v+3})(1-q^{2v+5})(1+q)^2 - q^5)^3} \end{aligned}$$

eşitsizliği dikkate alındığında $0 < q < 1$ ve $v \geq v_7$ değerleri için

$$\left| \frac{\xi_v''(z; q^2)}{\xi_v'(0; q^2)} \right| - \frac{1}{2} \leq \frac{2q^2(1-q)^2}{(1-q^3)(1-q^{3+2v})} - \frac{1}{2} + \frac{2q(1-q)^4(1+q)^2 \left((1+q)^6 - ((1+q)^2 - q^5)^3 \right)}{(1-q^3)(1-q^5)(1-q^{2v+3})(1-q^{2v+5})((1+q)^2 - q^5)^3} \leq 0$$

elde edilir. Böylece, verilen şartlar altında η_v fonksiyonu Lemma 3.1.7'ye göre konvektir. Burada, v_7 değeri

$$\begin{aligned} \rho_q(v) &:= \frac{2q^2(1-q)^2}{(1-q^3)(1-q^{3+2v})} - \frac{1}{2} \\ &+ \frac{2q(1-q)^4(1+q)^2 \left((1+q)^6 - ((1+q)^2 - q^5)^3 \right)}{(1-q^3)(1-q^5)(1-q^{2v+3})(1-q^{2v+5})((1+q)^2 - q^5)^3} = 0 \end{aligned} \quad (4.98)$$

denkleminin en büyük köküdür. Bu durum Şekil 4.12 ile de doğrulanmaktadır. Lemma 4.5.3'e göre

$$\left(\frac{\Gamma_{q^2}(k+v+3/2)}{\Gamma_{q^2}(k+\mu+3/2)} \right)_{k \geq 1}$$

bir subordinasyon faktör dizisidir. Dolayısıyla,

$$\xi_\mu = \varkappa * \xi_v \prec \xi_v$$

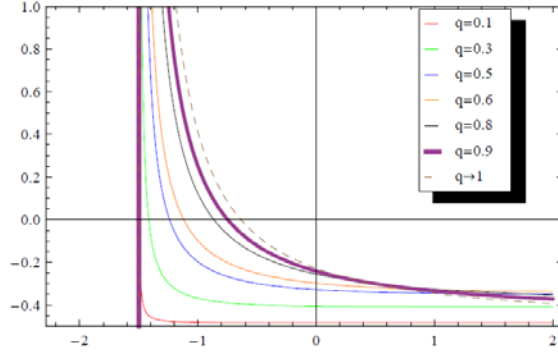
subordinasyon bağıntısı sağlanır. Burada

$$\varkappa(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{q^2}(k+v+3/2)}{\Gamma_{q^2}(k+\mu+3/2)} z^k$$

dır. $\xi_\mu(0) = \xi_v(0)$ eşitliği sağlandığından $\xi_\mu \prec \xi_v$ subordinasyonu

$$\xi_\mu(\mathbb{D}, q^2) \subset \xi_v(\mathbb{D}, q^2)$$

içerme bağıntısına denktir. Böylece, ispat tamamlanmıştır.



Şekil 4.12. $\rho_q(v)$ fonksiyonunun grafiği

Teorem 4.5.8: $0 < q < 1$ olsun. Eğer $\mu > v \geq \max \left\{ -\frac{3}{2}, v_4, v_8 \right\}$ ise bu durumda

$$\lambda_\mu(\mathbb{D}, q^2) \subset \lambda_v(\mathbb{D}, q^2)$$

bağıntısı sağlanır. Burada v_4 Teorem 4.5.1 de ve λ_v ise (3.19) eşitliği ile verilmiştir. Ayrıca, v_8 değeri (4.100) ile verilen $\theta_q(v) = 0$ denkleminin en büyük reel köküdür (Özkan et al., 2025d).

İspat: λ_v fonksiyonun tanımından

$$\frac{\lambda_v''(z; q^2)}{\lambda_v'(0; q^2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k(2k+1)q^{k^2+k}(1+q)\Gamma_{q^2}(3/2)\Gamma_{q^2}(v+3/2)}{\Gamma_{q^2}(k+3/2)\Gamma_{q^2}(k+v+3/2)(1+q)^{2k+1}} z^{2k-1} \quad (4.99)$$

yazılır. Son eşitlikten

$$\begin{aligned} \left| \frac{\lambda_v''(z; q^2)}{\lambda_v'(0; q^2)} \right| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k(2k+1)q^{k^2+k}\Gamma_{q^2}(3/2)\Gamma_{q^2}(v+3/2)}{\Gamma_{q^2}(k+3/2)\Gamma_{q^2}(k+v+3/2)(1+q)^{2k}} \\ &= \frac{6q^2\Gamma_{q^2}(3/2)\Gamma_{q^2}(v+3/2)}{\Gamma_{q^2}(5/2)\Gamma_{q^2}(v+5/2)(1+q)^2} \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2k(2k+1)q^{k^2+k}\Gamma_{q^2}(3/2)\Gamma_{q^2}(v+3/2)}{\Gamma_{q^2}(k+3/2)\Gamma_{q^2}(k+v+3/2)(1+q)^{2k}} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Yukarıdaki son eşitsizlikte,

$$\frac{6q^2\Gamma_{q^2}(3/2)\Gamma_{q^2}(v+3/2)}{\Gamma_{q^2}(5/2)\Gamma_{q^2}(v+5/2)(1+q)^2} = \frac{6q^2(1-q)^2}{(1-q^3)(1-q^{2v+3})}$$

eşitliği ile

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2k(2k+1)q^{k^2+k}\Gamma_{q^2}(3/2)\Gamma_{q^2}(v+3/2)}{\Gamma_{q^2}(k+3/2)\Gamma_{q^2}(k+v+3/2)(1+q)^{2k}} \\
& \leq \frac{\Gamma_{q^2}(3/2)\Gamma_{q^2}(v+3/2)}{q^4\Gamma_{q^2}(7/2)\Gamma_{q^2}(v+7/2)} \sum_{k=2}^{\infty} 2k(2k+1) \left(\frac{q^5}{(1+q)^2} \right)^k \\
& = \frac{2q(1-q)^4(1+q)^2 \left((1+q)^4[3(1+q)^2+q^5] - 3((1+q)^2-q^5)^3 \right)}{(1-q^3)(1-q^5)(1-q^{2v+3})(1-q^{2v+5})((1+q)^2-q^5)^3}
\end{aligned}$$

eşitsizliği kullanılırsa $0 < q < 1$ ve $v \geq v_{10}$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\lambda_v''(z; q^2)}{\lambda_v'(0; q^2)} \right| - \frac{1}{2} \leq \frac{6q^2(1-q)^2}{(1-q^3)(1-q^{2v+3})} - \frac{1}{2} \\
& + \frac{2q(1-q)^4(1+q)^2 \left((1+q)^4[3(1+q)^2+q^5] - 3((1+q)^2-q^5)^3 \right)}{(1-q^3)(1-q^5)(1-q^{2v+3})(1-q^{2v+5})((1+q)^2-q^5)^3} \\
& \leq 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, Lemma 3.1.7' ye göre λ_v fonksiyonu konvektir. Burada, v_8 değeri

$$\begin{aligned}
\theta_q(v) &:= \frac{6q^2(1-q)^2}{(1-q^3)(1-q^{2v+3})} - \frac{1}{2} \\
& + \frac{2q(1-q)^4(1+q)^2 \left((1+q)^4[3(1+q)^2+q^5] - 3((1+q)^2-q^5)^3 \right)}{(1-q^3)(1-q^5)(1-q^{2v+3})(1-q^{2v+5})((1+q)^2-q^5)^3} = 0
\end{aligned} \tag{4.100}$$

denkleminin en büyük köküdür. Bu durum Şekil 4.13 ile de doğrulanmaktadır. Lemma 4.5.4'e göre

$$\left(\frac{\Gamma_{q^2}\left(v+1+\frac{k}{2}\right)}{\Gamma_{q^2}\left(\mu+1+\frac{k}{2}\right)} \right)_{k \geq 1}$$

subordinasyon faktör dizisidir. Dolayısıyla $\lambda_\mu = \kappa * \lambda_v \prec \lambda_v$

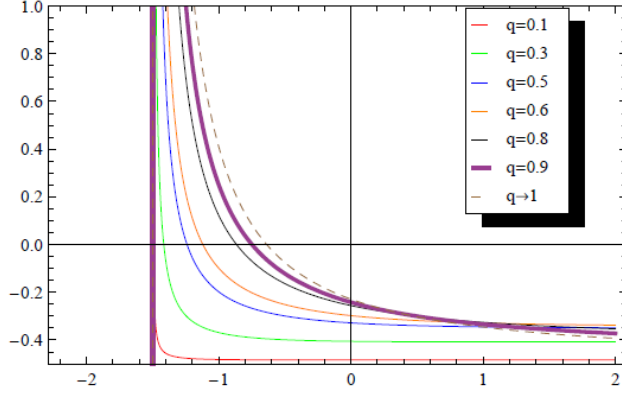
subordinasyon bağıntısı sağlanır. Burada

$$\kappa(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{q^2}\left(v+1+\frac{k}{2}\right)}{\Gamma_{q^2}\left(\mu+1+\frac{k}{2}\right)} z^k$$

dır. $\lambda_\mu(0) = \lambda_\nu(0)$ eşitliği sağlandığından $\lambda_\mu \prec \lambda_\nu$ subordinasyonu

$$\lambda_\mu(\mathbb{D}, q^2) \subset \lambda_\nu(\mathbb{D}, q^2)$$

içerme bağıntısına denktir. Böylece, ispat tamamlanmıştır.



Şekil 4.13. $\theta_q(v)$ fonksiyonunun grafiği

Teorem 4.5.9: $0 < q < 1$ olsun. Eğer $\mu > \nu \geq \max\{-\frac{3}{2}, v_4, v_9\}$ ise bu durumda

$$\gamma_\mu(\mathbb{D}, q^2) \subset \gamma_\nu(\mathbb{D}, q^2)$$

bağıntısı sağlanır. Burada v_4 Teorem 4.5.1de ve γ_ν ise (3.20) eşitliği ile verilmiştir.

Ayrıca, v_9 değeri (4.102) ile verilen $\phi_q(v) = 0$ denkleminin en büyük reel köküdür (Özkan et al., 2025d).

İspat: γ_ν fonksiyonun tanımı dikkate alındığında

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma_\nu''(z; q^2)}{\gamma_\nu'(0; q^2)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k(2k+1)q^{2k^2+2kv+2k} (1+q)\Gamma_{q^2}(3/2)\Gamma_{q^2}(\nu+3/2)}{\Gamma_{q^2}(k+3/2)\Gamma_{q^2}(k+\nu+3/2)(1+q)^{2k+1}} z^{2k-1} \end{aligned} \quad (4.101)$$

elde edilir. Son eşitlikten

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\gamma_\nu''(z; q^2)}{\gamma_\nu'(0; q^2)} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k(2k+1)q^{2k^2+2kv+2k} \Gamma_{q^2}(3/2)\Gamma_{q^2}(\nu+3/2)}{\Gamma_{q^2}(k+3/2)\Gamma_{q^2}(k+\nu+3/2)(1+q)^{2k}} \\ &= \frac{6q^{4+2\nu}\Gamma_{q^2}(3/2)\Gamma_{q^2}(\nu+3/2)}{\Gamma_{q^2}(5/2)\Gamma_{q^2}(\nu+5/2)(1+q)^2} \end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2k(2k+1)q^{2k^2+2kv+2k}\Gamma_{q^2}(3/2)\Gamma_{q^2}(v+3/2)}{\Gamma_{q^2}(k+3/2)\Gamma_{q^2}(k+v+3/2)(1+q)^{2k}}$$

eşitsizliği elde edilir. Yukarıdaki son eşitsizlikte,

$$\frac{6q^{4+2v}\Gamma_{q^2}(3/2)\Gamma_{q^2}(v+3/2)}{\Gamma_{q^2}(5/2)\Gamma_{q^2}(v+5/2)(1+q)^2} = \frac{6q^{2(2+v)}(1-q)^2}{(1-q^3)(1-q^{3+2v})}$$

eşitliği ile $k \geq 2$ için $k^2 \geq 4k - 4$ eşitsizliği dikkate alındığında

$$\begin{aligned} & \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2k(2k+1)q^{2k^2+2kv+2k}\Gamma_{q^2}(3/2)\Gamma_{q^2}(v+3/2)}{\Gamma_{q^2}(k+3/2)\Gamma_{q^2}(k+v+3/2)(1+q)^{2k}} \\ & \leq \frac{\Gamma_{q^2}(3/2)\Gamma_{q^2}(v+3/2)}{q^8\Gamma_{q^2}(7/2)\Gamma_{q^2}(v+7/2)} \sum_{k=2}^{\infty} 2k(2k+1) \left(\frac{q^{10+2v}}{(1+q)^2} \right)^k \\ & = \frac{2q^{2(1+v)}(1-q)^4(1+q)^2 \left((1+q)^4 \left(3(1+q)^2 + q^{10+2v} \right) - 3((1+q)^2 - q^{10+2v})^3 \right)}{(1-q^3)(1-q^5)(1-q^{2v+3})(1-q^{2v+5})((1+q)^2 - q^{10+2v})^3} \end{aligned}$$

eşitsizliği kullanılırsa $0 < q < 1$ ve $v \geq v_9$ için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\gamma_v''(z; q^2)}{\gamma_v'(0; q^2)} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{6q^{2(2+v)}(1-q)^2}{(1-q^3)(1-q^{3+2v})} - \frac{1}{2} \\ & + \frac{2q^{2(1+v)}(1-q)^4(1+q)^2 \left((1+q)^4 \left(3(1+q)^2 + q^{10+2v} \right) - 3((1+q)^2 - q^{10+2v})^3 \right)}{(1-q^3)(1-q^5)(1-q^{2v+3})(1-q^{2v+5})((1+q)^2 - q^{10+2v})^3} \leq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, verilen şartlar altında γ_v fonksiyonu Lemma 3.1.7'e göre konvektir.

Burada, v_9 değeri

$$\begin{aligned} & \phi_q(v) \\ & := \frac{6q^{2(2+v)}(1-q)^2}{(1-q^3)(1-q^{3+2v})} - \frac{1}{2} \\ & + \frac{2q^{2(1+v)}(1-q)^4(1+q)^2 \left((1+q)^4 \left(3(1+q)^2 + q^{10+2v} \right) - 3((1+q)^2 - q^{10+2v})^3 \right)}{(1-q^3)(1-q^5)(1-q^{2v+3})(1-q^{2v+5})((1+q)^2 - q^{10+2v})^3} \\ & = 0 \end{aligned} \tag{4.102}$$

denkleminin en büyük köküdür. Bu durum Şekil 4.14 ile de doğrulanmaktadır. Lemma 4.5.5'e göre

$$\left(\frac{q^{(k-1)\mu} \Gamma_{q^2} \left(\nu + 1 + \frac{k}{2} \right)}{q^{(k-1)\nu} \Gamma_{q^2} \left(\mu + 1 + \frac{k}{2} \right)} \right)_{k \geq 1}$$

dizisi bir subordinasyon faktör dizisidir. Dolayısıyla

$$\gamma_\mu = \tau * \gamma_\nu \prec \gamma_\nu$$

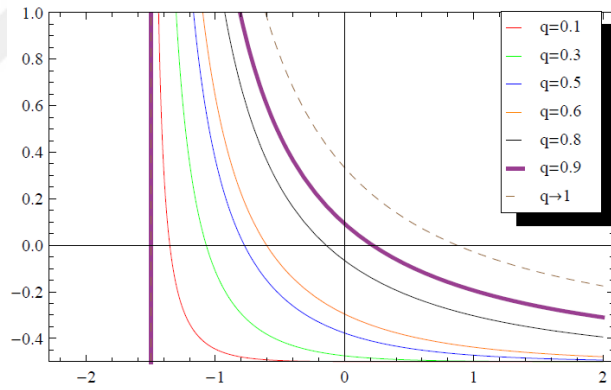
subordinasyon bağıntısı sağlanır. Burada

$$\tau(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{(k-1)\mu} \Gamma_{q^2} \left(\nu + 1 + \frac{k}{2} \right)}{q^{(k-1)\nu} \Gamma_{q^2} \left(\mu + 1 + \frac{k}{2} \right)} z^k$$

dır. $\gamma_\mu(0) = \gamma_\nu(0)$ eşitliği sağlandığından $\gamma_\mu \prec \gamma_\nu$ subordinasyonu

$$\gamma_\mu(\mathbb{D}, q^2) \subset \gamma_\nu(\mathbb{D}, q^2)$$

içerme bağıntısına denktir. Böylece, ispat tamamlanmıştır.



Şekil 4.14. $\phi_q(v)$ fonksiyonunun grafiği

Sonuç 4.5.10: Yukarıdaki son bölümdeki tüm teoremlerde $q \rightarrow 1$ limiti alındığında Deniz ve Szász (Deniz and Szász 2024)'a ait sonuçlar elde edilir (Özkan et al., 2025d).

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

5.1. Sonuç

Bu tez çalışmasının ilk olarak Ramanujan tipi tam fonksiyonu ve modifiye q – Tricomi fonksiyonları ve bu fonksiyonların serilerinin kalan terimleri için bazı Turán tipi eşitsizlikler ve alt üst sınırlar elde edildi . Elde edilen bu sonuçların büyük bir çoğunluğu kesindir. Bazı sonuçlar grafiklerle de desteklenmektedir.

Bu fonksiyonlar için elde edilen sonuçlar, seriler için Cauchy çarpım, Γ_q fonksiyonuna ait bazı rekürans bağıntıları ve bu fonksiyona ait bazı özellikler kullanılmıştır. Sonuçları elde etmemize yardımcı yöntem ise, yakınsak iki kuvvet serisinin katsayılarının oranlarından oluşan dizinin artan (azalan) olmasının bu serilerin oranlarında artan (azalan) olmasını garantileyen lemmadır.

İkinci olarakta sırasıyla q – Bessel , Ramanujan tipi tam fonksiyonu ve q – Struve-Bessel özel fonksiyonların monotonluk özellikleri için bazı sonuçlar elde edildi. q – Bessel fonksiyonun üç tane normalize edilmiş hali için, q – Struve-Bessel için ise dört tane normlize edilmiş hali için bazı içerme bağıntıları elde edildi. Çalışılan bu özel fonksiyonların üçü içinde Γ_q fonksiyonuna ait bazı rekürans bağıntıları ve bu fonksiyona ait bazı özellikler kullanılmıştır. Bu sonuçlar elde edilirken, Konvekslikde dikkate alınarak Subordinasyon faktör dizisi yöntemi kullanılmıştır.

5.2. Öneriler

Bu tez çalışmasında sınırlı sayıda özel fonksiyonlar için fonksiyonel eşitsizlikler çalışılıp bazı sonuçlar elde edilmiştir. Bu özel fonksiyonlar ve q versiyonları matematiksel fiziğin çeşitli problemlerinde, mühendisliğin bir çok alanında, ekonomide ve sağlık gibi gerçek hayatın bir çok uygulama alanında önemli rol oynayacağı düşünülmektedir. Bu çalışmaların diğer önemli özel fonksiyon ve fonksiyonel eşitsizlikler içinde ilham kaynağı olacağı düşünülmektedir.

KAYNAKÇA

- Abramowitz, M., & Stegun, I. A. (1965). *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables*. Dover Publications.
- Abreu, L. D., & Bustoz, J. (2000). Turán inequalities for symmetric Askey–Wilson polynomials. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 30(2), 401–409.
- Alzer, H. (1990). An inequality for the exponential function. *Archiv der Mathematik*, 55, 462–464.
- Alzer, H., Gerhold, S., Kauers, M., & Lupaş, A. (2007). On Turán’s inequality for Legendre polynomials. *Expositiones Mathematicae*, 25, 181–186.
- András, S., & Baricz, Á. (2009). Monotonicity property of generalized and normalized Bessel functions of complex order. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 54(7), 689–696.
- Andrews, L.C. (1985). *Special functions for engineers and applied mathematicians*, New York.
- Annaby, M. H., & Mansour, Z. S. (2012). *Fractional calculus and equations*. Springer-Verlag.
- Baricz, Á. (2007a). Functional inequalities for Galué’s generalized modified Bessel functions. *Journal of Mathematical Inequalities*, 1(2), 183–193.
- Baricz, Á. (2007b). Redheffer type inequality for Bessel functions. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 8(1), Article 11.
- Baricz, Á. (2007c). Some inequalities involving generalized Bessel functions. *Mathematical Inequalities and Applications*, 10(4), 827–842.
- Baricz, Á. (2008a). Functional inequalities involving Bessel and modified Bessel functions of the first kind. *Expositiones Mathematicae*, 26(3), 279–293.
- Baricz, Á. (2008b). Jordan-type inequalities for generalized Bessel functions. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 9(2), 1–6.
- Baricz, Á. (2008c). Turán type inequalities for hypergeometric functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 136(9), 3223–3229.
- Baricz, Á. (2008d). Geometric properties of generalized Bessel functions. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 73, 155–178.
- Baricz, Á. (2010). Turán type inequalities for modified Bessel functions. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 82(2), 254–264.

- Baricz, Á., & Ismail, M. E. H. (2013). Turán type inequalities for Tricomi confluent hypergeometric functions. *Constructive Approximation*, 37(2), 195–221.
- Baricz, Á., & Ponnusamy, S. (2013). On Turán type inequalities for modified Bessel functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 141(2), 523–532.
- Baricz, Á., & Pogány, T. K. (2014). Functional inequalities for modified Struve functions. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, 144(5), 891–904.
- Baricz, Á. (2015). Bounds for Turánians of modified Bessel functions. *Expositiones Mathematicae*, 33(2), 223–251.
- Baricz, Á., & Koumandos, S. (2016). Turán-type inequalities for some Lommel functions of the first kind. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 59(3), 569–579.
- Baricz, Á., Jankov, D., & Pogány, T. K. (2016). Turán type inequalities for modified Struve functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 144(8), 3265–3278.
- Baxter, R., & Rogers, J. (1981). Ramanujan identities in the hard hexagon model. *Journal of Statistical Physics*, 26, 427–452.
- Bellman, R., & Beckenbach, E. F. (1961). Inequalities. *Springer-Verlag*.
- Ben Said, M., Mehrez, K., & El Kamel, J. (2018). On some Turan-type inequalities for q – special functions. *Journal of Difference Equations and Applications*, 24(1), 48–58.
- Brahim, K. (2009). Turán-type inequalities for some q – special functions. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics* 10(2), 5.
- Bustoz, J., & Ismail, M. E. H. (1983). Turán inequalities for ultraspherical and continuous q -ultraspherical polynomials. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 14, 807–818.
- Bustoz, J., & Ismail, M. E. H. (1997). Turán inequalities for symmetric orthogonal polynomials. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 20(1), 1–8.
- Bustoz, J., & Pyung, I. S. (2001). Determinant inequalities for sieved ultraspherical polynomials. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 25(11), 745–751.
- Bustoz, J., & Savage, N. (1979). Inequalities for ultraspherical and Laguerre polynomials. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 10(5), 902–912.

- Constantinescu, E. (2005). On the inequality of P. Turán for Legendre polynomials. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 6(2), Article 28.
- Csordas, G., & Williamson, J. (1974). On polynomials satisfying a Turán type inequality. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 43(2), 367–372.
- Csordas, G., Norfolk, T. S. & Varga, R. S. (1986). The Riemann hypothesis and Turán inequalities. *Transactions of the American Mathematical Society*, 296(2), 521–541
- Cotîrlă, L. I., & Szász, R. (2023). The monotony of the Lommel functions. *Results in Mathematics*, 78(4), 127.
- Cotîrlă, L. I., & Szász, R. (2024). On the monotony of Bessel functions of the first kind. *Computational Methods and Function Theory*, 24, 747–752.
- Danese, A. (1959). Some identities and inequalities involving ultraspherical polynomials. *Duke Mathematical Journal*, 26, 349–359.
- Deniz, E. (2021). Geometric and monotonic properties of Ramanujan type entire functions. *The Ramanujan Journal*, 55(1), 103–130.
- Deniz, E., & Szász, R. (2024). On the monotony of Struve functions. *Complex Analysis and Operator Theory*, 18(5), 120.
- Deniz, E., Korkmaz, S., & Özkan, Y., Çağlar, M. (2025a). Turán type inequalities for modified q – Tricomi function. *Quaestiones mathematicae*. Submitted.
- Deniz, E., Korkmaz, S., & Özkan, Y. (2025b). Turán type inequalities for the modified big q – Bessel function. *Analysis Mathematica*. Accepted.
- Dimitrov, D. K. (1998). Higher order Turán inequalities. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 126, 2033–2037.
- Duren, P. L. (1983). Univalent functions. *Springer-Verlag*.
- Elbert, Á., & Laforgia, A. (1986). Some monotonicity properties for the zeros of ultraspherical polynomials. *Acta Mathematica Hungarica*, 48, 155–159.
- Elbert, Á., & Laforgia, A. (1987). Monotonicity results on the zeros of generalized Laguerre polynomials. *Journal of Approximation Theory*, 51(2), 168–174.
- Exton, H. (1983). q – Hypergeometric functions and applications. *Ellis Horwood Limited*.

- Fejér, L. (1936). Trigonometrische Reihen und Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge. *Transactions of the American Mathematical Society*, 39(1), 8–59.
- Gasper, G. (1971). On the extension of Turán's inequality for Jacobi polynomials. *Duke Mathematical Journal*, 38, 415–428.
- Gasper, G. (1972). An inequality of Turán type for Jacobi polynomials. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 32, 435–439.
- Gasper, G., & Rahman, M. (2004). Basic hypergeometric series (2nd ed.). *Cambridge University Press*.
- Gilbarg, D., & Trudinger, N. S. (1977). Elliptic partial differential equations of second order. *Springer-Verlag*.
- Grasmair, M. (2016). Basic properties of convex functions. *Department of Mathematics, Norwegian University of Science and Technology*.
- Haldane, F. D. M. (1991). Fractional statistics in arbitrary dimensions: A generalization of the Pauli principle. *Physical Review Letters*, 67, 937–940.
- Hardy, G. H., Littlewood, J. E., & Pólya, G. (1952). Inequalities. *Cambridge University Press*.
- Hardy, G. H., Seshu, P. V., & Wilson, B. M. (eds) (1927). Collected Papers of Srinivasa Ramanujan. *Cambridge*.
- Ismail, M. E. H., & Muldoon, M. E. (1978). Monotonicity of the zeros of a cross-product of Bessel functions. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 1, 759–767.
- Ismail, M. E. H. (1982). The zeros of basic Bessel functions, the functions $J_{\nu+ax}(x)$, and associated orthogonal polynomials, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 86(1) 1-19.
- Ismail, M. E. H. (2005). Classical and quantum orthogonal polynomials in one variable. *Cambridge University Press*.
- Ismail, M. E. H., & Zhang, R. (2018). Bessel functions and Rogers–Ramanujan type identities. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 146, 3633–3646.
- Ismail, M. E. H., & Laforgia, A. (2007). Monotonicity properties of determinants of special functions. *Constr. Approx.* 26(1), 1–9.

- Jackson, F. H. (1905). The application of basic numbers to Bessel's and Legendre's functions. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2(2), 192–220.
- Jackson, F. H. (1910). On q –definite integrals. *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, 41, 193–203.
- Joshi, C. M., & Bissu, S. K. (1991). Some inequalities of Bessel and modified Bessel functions. *Journal of the Australian Mathematical Society. Series A*, 50(2), 333–342.
- Karp, D. B., & Sitnik, S. M. (2009). Inequalities and monotonicity of ratios for generalized hypergeometric functions. *Journal of Approximation Theory*, 161, 337–352.
- Kedem, R., Klassen, T. R., McCoy, B. M., & Melzer, E. (1993). Fermionic quasi-particle representations for characters of $(G(1))_1 \times (G(1))_1 (G(1))_2$. *Physics Letters B*, 304(3-4), 263–270.
- Kershaw, D. (1983). Some extensions of W. Gautschi's inequalities for the gamma function. *Mathematics of Computation*, 41(164), 607–611.
- Kesava, P. M. (1943). Some integral inequalities. *The Mathematics Student*, 11, 36–38.
- Koelink, E. (1995). Askey–Wilson polynomials and the q -analogue of the Hankel transform. *Transactions of the American Mathematical Society*, 345(1), 47–76.
- Krasikov, I. (2005). Turán inequalities and zeros of orthogonal polynomials. *Methods and Applications of Analysis*, 12(1), 75–88.
- Laforgia, A. (1982). Sturm theory for certain class of Sturm–Liouville equations and Turánians and Wronskians for the zeros of derivative of Bessel functions. *Indagationes Mathematicae*, 3, 295–301.
- Laforgia, A., & Natalini, P. (2006). Turán type inequalities for some special functions. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 7(1), Article 32.
- Lorch, L. (1980). Turánians and Wronskians for the zeros of Bessel functions. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 11, 223–227.
- Mehrez, K. (2017). Turán type inequalities for the exponential functions. *Arabian Journal of Mathematics*, 6(4), 309–314.
- Mehrez, K. (2018). Turan type inequalities for q –Mittag–Leffler and q –Wright Functions. *Mathematical Inequalities and Applications*, 21, 1135–1151.

- Mehrez, K., & Brahim, K. (2025). Bounds for Turánians of sections for series of certain subclasses of the Fox–Wright functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 544(1), 129055.
- Mehrez, K., & Sitnik, S. M. (2016). On monotonicity of ratios of some q – hypergeometric functions. *Matematički Vesnik*, 68, 225–231.
- Mehrez, K., & Sitnik, S. M. (2019). Functional inequalities for the Fox–Wright function. *Ramanujan Journal*, 50(2), 263–287.
- Mitrinovic, D. S., & Vasic, P. M. (1970). Analytic inequalities (Vol. 1). *Springer*.
- Mocanu, P. T. (1993). Some simple criteria for starlikeness and convexity. *Libertas Mathematica*, 13(1), 27–40.
- Niculescu, C. P., & Persson, L.-E. (2006). Convex functions and their applications. *Springer*.
- Noor, M. A., Noor, K. I., & Awan, M. U. (2020). New perspective of log-convex functions. *Applied Mathematics & Information Sciences*, 14(5), 847–854.
- Oraby, K. M., & Mansour, Z. S. I. (2022): On q – analogs of Struve functions. *Quaestiones Mathematicae* 44(9), 1–29.
- Ponnusamy, S., & Vuorinen, M. (1997). Asymptotic expansions and inequalities for hypergeometric functions. *Mathematika*, 44, 278–301.
- Özkan, Y., Mehrez, K., & Deniz, E. (2025a). Some Turán type inequalities for the Ramanujan type entire function. *The Ramanujan Journal*, 67(1), 17.
- Özkan, Y., Korkmaz, S., & Deniz, E. (2025b). The monotony of the q – Bessel functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 549(1), 129439.
- Özkan, Y., Çağlar, M., & Deniz, E. (2025c, July 16–18). The monotony of the Ramanujan type entire functions. *International Conference on Mathematics and Computers with Applications*. Istanbul, Türkiye.
- Özkan, Y., Korkmaz, S., Deniz, E., & Çağlar, M. (2025d). The monotony of the q – Struve–Bessel functions. *Journal of Inequalities and Applications*. In press.
- Özkan, Y., Mehrez, K., Deniz, E., & Çağlar, M. (2025e). On the new bounds for the modified Lommel function. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*. Submitted.

- Pólya, G., & Szegő, G. (1953). Isoperimetric inequalities in mathematical physics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 59(6), 588–603.
- Rahman, M., & Suslov, S. K. (1994). Classical orthogonal polynomials and q – extensions. *Contemporary Mathematics*, 183, 389–427.
- Ramanujan Aiyangar, S., & Andrews, G. E. (1988). The lost notebook and other unpublished papers. *Narosa Publishing House*.
- Riyasat, M., Nahid, T., & Khan, S. (2020). Tricomi functions and quantum algebra representations. *Georgian Mathematical Journal*.
- Rudin, W. (1976). Principles of mathematical analysis (3rd ed.). *McGraw–Hill*.
- Segura, J. (2011). Bounds for ratios of modified Bessel functions and associated Turán-type inequalities. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 374(2), 516–528.
- Simic, S. (2006). Turán’s inequality for Appell polynomials. *Journal of Inequalities and Applications*, Article 91420, 7 p. 2006.
- Sitnik, S. M. (1993). Inequalities for the exponential remainder (Preprint, in Russian). *Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences*.
- Sitnik, S. M. (2014). Conjectures on monotonicity of ratios of Kummer and Gauss hypergeometric functions, *Research Group in Mathematical Inequalities and Applications*, 17, 107.
- Sun, Y., & Baricz, Á. (2008). Inequalities for the generalized Marcum Q-function. *Applied Mathematics and Computation*, 203(1), 134–141.
- Szegő, G. (1928). Über einige von S. Ramanujan gestellte Aufgaben. *Journal of the London Mathematical Society*, 3, 225–232.
- Szegő, G. (1948). On an inequality of P. Turán concerning Legendre polynomials. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 54, 401–405.
- Szegő, G. (1962). An inequality for Jacobi polynomials. In *Studies in Mathematical Analysis and Related Topics* (pp. 392–398). *Stanford University Press*.
- Szász, O. (1950). Inequalities concerning ultraspherical polynomials and Bessel functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1, 256–267.

- Szász, O. (1951). Identities and inequalities concerning orthogonal polynomials and Bessel functions. *Journal d'Analyse Mathématique*, 1, 116–134.
- Şahin, R. (2011). Çok değişkenli hipergeometrik fonksiyonlar. Doktora tezi, Ankara.
- Thiruvengkatachar, V. K., & Nanjundiah, T. S. (1951). Inequalities concerning Bessel functions and orthogonal polynomials. *Proceedings of the Indian Academy of Sciences, Section A*, 33, 373–384.
- Thomae, J. (1869). Beiträge zur Theorie der durch die Heinesche Reihe. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 70, 258–281.
- Turán, P. (1950). On the zeros of the polynomials of Legendre. *Časopis pro Pěstování Matematiky a Fysiky*, 75, 113–122.
- Venkatachaliengar, K., & Lakshmana Rao, S. K. (1957). On Turán's inequality for ultraspherical polynomials. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 8, 1075–1087.
- Watson, G. N. (1928). Theorems stated by Ramanujan (V): Approximations connected with e^x . *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2(29), 293–308.
- Watson, G. N. (1944). A treatise of the theory of Bessel functions. *Cambridge University Press*.
- Wilf, H. S. (1961). Subordinating factor sequences for convex maps of the unit circle. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 12(5), 689–693.
- Zayed, H. M., Mehrez, K., & Morais, J. (2024). Monotonicity patterns and functional inequalities for modified Lommel functions of the first kind. *Analysis and Mathematical Physics*, 14, 103.
- Zhang, R. (2017). Zeros of Ramanujan type entire functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 145, 241–250.

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR

1. Makaleler

- Özkan, Y., Mehrez, K., & Deniz, E. (2025a). Some Turán type inequalities for the Ramanujan type entire function. *The Ramanujan Journal*, 67(1), 17.
- Özkan, Y., Korkmaz, S., & Deniz, E. (2025b). The monotony of the q – Bessel functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 549(1), 129439.
- Özkan, Y., Korkmaz, S., Deniz, E., & Çağlar, M. (2025d). The monotony of the q – Struve–Bessel functions. *Journal of Inequalities and Applications*. In press.
- Deniz, E., Korkmaz, S., Özkan, Y., & Çağlar, M. (2025a). Turán type inequalities for modified q – Tricomi function. *Quaestiones Mathematicae*. Submitted.

2. Bildiriler

- Özkan, Y., Çağlar, M., & Deniz, E. (2025c, July 16–18). The monotony of the Ramanujan type entire functions. *International Conference on Mathematics and Computers with Applications*. Istanbul, Türkiye.