

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BAZI ÖZEL MATRİSLERİN KUVVETLERİ İLE
GENELLEŞTİRİLMİŞ FIBONACCİ VE LUCAS DİZİLERİ
ARASINDAKİ İLİŞKİLER**

DOKTORA TEZİ

Sinan KARAKAYA

Matematik Anabilim Dalı

Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

HAZİRAN 2024

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ÖZEL MATRİSLERİN KUVVETLERİ İLE
GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS DİZİLERİ
ARASINDAKİ İLİŞKİLER

DOKTORA TEZİ

Sinan KARAKAYA

Matematik Anabilim Dalı

Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR

HAZİRAN 2024

Sinan KARAKAYA tarafından hazırlanan “Bazı Özel Matrislerin Kuvvetleri ile Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas Dizileri Arasındaki İlişkiler” adlı tez çalışması 27.06.2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Bilim Dalı’nda Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Jüri Başkanı : **Unvan Adı SOYADI**
Sakarya Üniversitesi

Jüri Üyesi : **Unvan Adı SOYADI (Danışman)**
Sakarya Üniversitesi

Jüri Üyesi : **Unvan Adı SOYADI**
Sakarya Üniversitesi

Jüri Üyesi : **Unvan Adı SOYADI**
..... Üniversitesi

Jüri Üyesi : **Unvan Adı SOYADI**
..... Üniversitesi



ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğine ve Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesine uygun olarak hazırlamış olduğum “BAZI ÖZEL MATRİSLERİN KUVVETLERİ İLE GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS DİZİLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİLER” başlıklı tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın tüm aşamalarında yukarıda belirtilen yönetmelik ve yönergeye uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, bu tezi başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve 20.04.2016 tarihli Resmi Gazete’de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince Sakarya Üniversitesi’nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Enstitü tarafından belirlenmiş ölçütlere uygun rapor alındığını, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun ortaya çıkması halinde doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi beyan ederim.

(27/06/2024).

Sinan KARAKAYA





Eşime ve aileme



TEŞEKKÜR

Lisansüstü eğitimim boyunca desteğini esirgemeyen, süreç içerisinde bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, danışman hocam Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR'e teşekkür ederim.

Tez çalışması sürecinde yol gösterici olan Doktora Tez İzleme Komitesi üyeleri değerli hocalarımız Prof. Dr. Mehmet Ali GÜNGÖR'e ve Dr. Öğr. Üyesi Mahmut UÇ'a teşekkür ederim. Çalışma esnasında bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım değerli hocamız Prof. Dr. Ahmet Yaşar ÖZBAN'a katkılarından dolayı teşekkür ederim. Çalışmalarım süresince yardımlarını esirgemeyen Dr. Öğr. Üyesi Tuğba DEMİRKOL'a ayrıca teşekkür ederim.

Bu süreçte sabır ve anlayışla beni destekleyen eşim Özlem KARAKAYA'ya teşekkür ederim. Hayatım boyunca desteklerini eksik etmeyen aileme teşekkür ederim.

Sinan KARAKAYA



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ	v
TEŞEKKÜR	ix
İÇİNDEKİLER	xi
SİMGELER	xiii
ÖZET	xv
SUMMARY	xvii
1. GİRİŞ	1
1.1. Literatür Özeti	1
1.2. Tezin Amacı	4
2. ÖN BİLGİLER	7
2.1. Matrisler ile İlgili Temel Kavramlar	7
2.2. Özel Sayı Dizileri	11
2.2.1. Temel tanımlar ve teoremler	11
2.2.2. Bazı sayı dizileri ile matrisler arasındaki ilişkiler	14
3. GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE TRİBONACCİ SAYILARI İLE MATRİS İLİŞKİLERİ	17
3.1. 3×3 Boyutlu Matrisler ve Genelleştirilmiş Fibonacci Dizisi	17
3.2. Matris Metotlarıyla Genelleştirilmiş Fibonacci Sayıları ile İlgili Bazı Özdeşlikler	23
3.3. Genelleştirilmiş Fibonacci ve Tribonacci Dizileri ile İlgili Özdeşlikler	43
4. MATRİS METOTLARIYLA GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARI İÇİN BAZI ÖZDEŞLİKLER	53
4.1. Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas Dizilerinin Bazı Özellikleri	53
4.2. Matris Kökleri ve Moore-Penrose Tersleri	60
4.2.1. Özel diziler yardımıyla kare matrislerin kökleri	60
4.2.2. Özel diziler yardımıyla matrislerin Moore-Penrose tersi	65
5. K-GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ SAYILARI VE MATRİSLER	71
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	89
KAYNAKLAR	91
ÖZGEÇMİŞ	95



SİMGELER

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Karmaşık sayılar kümesi
Σ	: Toplam sembolü
$\binom{n}{r}$	: n sayısının r 'li kombinasyonlarının sayısı
$[a]$	: a reel sayısının tam değeri
$\in$	: Elemanıdır
$\subseteq$	: Alt kümesidir
0	: Sıfır matris
I	: Birim matris
A^T	: A matrisinin transpozu
A^*	: A matrisinin eşlenik transpozu
$ A $	: A matrisinin determinanı
A^+	: A matrisinin Moore-Penrose tersi
ϕ	: Altın oran
φ	: Altın oranın eşleniği
$\{F_n\}$	: Fibonacci dizisi
$\{L_n\}$	: Lucas dizisi
$\{U_n\}$	: Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi
$\{V_n\}$	: Genelleştirilmiş Lucas dizisi
$\{Q_n\}$	: Tribonacci dizisi
$\{W_n\}$	: Genelleştirilmiş Tribonacci dizisi
$\{K_n\}$	: Padovan dizisi
$\{T_n\}$	: Genelleştirilmiş Tribonacci dizisinin özel hali
$\{P_n\}$	: Genelleştirilmiş Tribonacci dizisinin özel hali
$\{G_{(n)}^{(k)}\}$	: k -genelleştirilmiş Fibonacci dizisi



BAZI ÖZEL MATRİSLERİN KUVVETLERİ İLE GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS DİZİLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİLER

ÖZET

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, ilk olarak tez konusu ile ilgili literatürde yer alan bazı kavramlar ve çalışmalardan bahsedilmekte, daha sonra ise tezin amacı anlatılmaktadır. İkinci bölümde ise çalışmanın devamında kullanılacak olan temel tanımlar ve teoremler verilmektedir.

Üçüncü bölümde önce, özdeğerleri α, β ile $r \neq 0$ ve $r^2 - pr - q \neq 0$ koşullarını sağlayan $r \in \mathbb{R}$ olan 3×3 boyutlu matrislerin elde edilmesi ve bu matrisler ile genelleştirilmiş Fibonacci dizisi arasındaki bazı ilişkiler verilmektedir. Burada p ve q sayıları, $p^2 + 4q > 0$ koşulunu sağlayan sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere, α ve β , $x^2 - px - q = 0$ denkleminin kökleridir. Matris köşegenleştirilmesi yardımıyla bu tür matrislerin tamsayı kuvvetleri ile genelleştirilmiş Fibonacci dizisi arasında ilişki kurulmakta ve örnek bir matrisin kuvvet bağıntısı elde edilmektedir. Sonra ise genel olarak $X^3 - (r + p)X^2 + (rp - q)X + qrI = \mathbf{0}$ koşulunu sağlayan tüm X matrislerinin tamsayı kuvvetlerinin genelleştirilmiş Fibonacci dizisi yardımıyla bulunabileceği gösterilmektedir. Elde edilen bu sonuç özel matrislerde kullanılarak genelleştirilmiş Fibonacci dizisine ait bazı cebirsel özdeşlikler elde edilmektedir. Bu bölümde son olarak, öncelikle özel bir genelleştirilmiş Tribonacci dizisi tanımlanmakta ve yine $X^3 - (r + p)X^2 + (rp - q)X + qrI = \mathbf{0}$ koşulunu sağlayan X matrislerinin tamsayı kuvvetlerinin bu dizi sayesinde elde edilebileceği gösterilmektedir. Ardından, elde edilen ilişkilerden yola çıkılarak genelleştirilmiş Fibonacci dizisi ile özel olarak tanımlanmış olan genelleştirilmiş Tribonacci dizisinin terimleri arasındaki bazı ilişkiler elde edilmektedir.

Dördüncü bölümde, genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri ile matrisler arasındaki ilişkiler ele alınmaktadır. Bu bölümde ilk olarak herhangi bir n tamsayısı için $X^2 - V_n X + (-q)^n I = \mathbf{0}$ koşulunu sağlayan X matrisleri ile genelleştirilmiş Fibonacci dizisi arasındaki ilişki elde edilmekte ve bu koşulu sağlayan matrislerin tamsayı kuvvetlerinin genelleştirilmiş Fibonacci dizisi yardımıyla bulunabileceği gösterilmektedir. Bu sonuç bazı özel matrislerde kullanılarak, genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizilerine ait bazı cebirsel özellikler elde edilmektedir. Daha sonra, $X^3 - V_n X^2 + (-q)^n X = \mathbf{0}$ denklemini sağlayan matrisler ile genelleştirilmiş Fibonacci dizisi arasındaki ilişki incelenmektedir. Bu türdeki matrislerin öncelikle pozitif tamsayı kuvvetlerinin genelleştirilmiş Fibonacci dizisi yardımıyla elde edilebileceği gösterilmekte, ardından bu koşulu sağlayan uygun matrislerin n . dereceden köklerini bulmak için bir sonuç elde edilmektedir. Daha sonra, uygun koşulları sağlayan bazı matrislerin Moore-Penrose terslerini bulmak için bir metot geliştirilmektedir. Elde edilen metot yardımıyla gerekli koşulları sağlayan kare olmayan matrislerin de Moore-Penrose terslerinin bulunması için bir yöntem verilmektedir. Bu bölümde son olarak, elde edilen sonuçların kullanımını göstermek

amacıyla matrislerin köklerinin ve Moore-Penrose terslerinin elde edildiği sayısal örnekler verilmektedir.

Beşinci bölümde, önceki bölümlerde elde edilen yöntemlerden yola çıkılarak benzer düşünce ile k -genelleştirilmiş Fibonacci dizisi ile matrisler arasındaki bazı özdeşlikler verilmektedir. Önce, t sıfırdan farklı ve $t^k - t^{k-1} - t^{k-2} - \dots - t - 1 \neq 0$ koşulunu sağlayan bir reel sayı olmak üzere, $X^{k+1} - (t + 1)X^k + tI + \sum_{i=1}^{k-1} (t - 1)X^i = \mathbf{0}$ koşulunu sağlayan X matrisleri ile k -genelleştirilmiş Fibonacci dizisi arasındaki ilişki ortaya koyulmaktadır. Devamında k -genelleştirilmiş Fibonacci dizisi ile ilişkili özel bir dizi tanımlanmakta, bu dizinin terimleri ile k -genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin terimleri arasındaki bazı özdeşlikler gösterilmekte ve son olarak elde edilen özdeşliklerden yararlanılarak k -genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin terimlerini elde etmek için bir formül verilmektedir.

Son bölümde ise önceki bölümlerde elde edilenler kapsamlı bir şekilde tartışılmakta ve gelecekte yapılabilecek yeni çalışmalar için önerilerde bulunmaktadır.



RELATIONS BETWEEN THE POWERS OF SOME SPECIAL MATRICES AND GENERALIZED FIBONACCI AND LUCAS SEQUENCES

SUMMARY

This thesis consists of six chapters.

In the first chapter, some concepts and studies in the literature related to the subject of the thesis are mentioned, and then main purpose of the thesis is explained.

In the second chapter, definitions and theorems that will be used in the continuation of the study on matrices and number sequences are given.

The third chapter is the first part of the original part of the thesis. This chapter consists of three sections. In the first section, the relationship between the generalized Fibonacci sequence and 3×3 dimensional matrices with eigenvalues α , β and r is examined. Here p and q are nonzero real numbers that satisfy the condition $p^2 + 4q > 0$, α and β are the roots of the equation $x^2 - px - q = 0$, and r is a nonzero real number with $r^2 - pr - q \neq 0$. First, the system of equations required to obtain such matrices is shown. Then, with the help of matrix diagonalization, the relation between the powers of such matrices and generalized Fibonacci numbers is obtained. Here, the purpose is to obtain matrices whose terms and power relations would be simpler for usability. It is studied to obtain such matrices by choosing appropriate eigenvectors. Additionally, a special matrix and power relation of the desired type is obtained.

In the second section, similar to the previous section, the relationship between matrices and the generalized Fibonacci sequence is examined. Therefore, matrices satisfying the equation $(x^2 - px - q)(x - r) = 0$, or equivalently, the equation $x^3 - (r + p)x^2 + (rp - q)x + qr = 0$ are studied, where p , q and r are nonzero real numbers with $p^2 + 4q > 0$ and $r^2 - pr - q \neq 0$. First, the theorem showing that the integer powers of all matrices X satisfying the condition $X^3 - (r + p)X^2 + (rp - q)X + qrI = \mathbf{0}$ can be found with the help of the generalized Fibonacci sequence is obtained. Then this theorem is used for some suitable 3×3 dimensional commutative matrices. Thanks to these matrices obtained, some identities are obtained for the terms of the generalized Fibonacci sequence. Additionally, the relationships between generalized Fibonacci sequences established with different real numbers are examined using the obtained matrices. Some identities are obtained between the terms of the sequence $\{U_n(p, q)\}$, which was established with the appropriate real numbers p , q and r , and the sequence $\{U_n(p_1, q_1)\}$, which was established with $p_1 = -q + pr - r^2$ and $q_1 = qr(p - r)$.

In the last section, the relations between the generalized Fibonacci and Tribonacci sequences are examined. First a special generalized Tribonacci sequence $\{T_n(p, q, r)\}$ is defined. Then, it is shown that the powers of matrices X satisfying the condition $X^3 - (r + p)X^2 + (rp - q)X + qrI = \mathbf{0}$ can be obtained with the help of the sequence $\{T_n(p, q, r)\}$. Considering this result and the result obtained for the generalized Fibonacci sequence in the previous section, it is obtained that the powers

of the matrices X satisfying the condition $X^3 - (r + p)X^2 + (rp - q)X + qrl = \mathbf{0}$ can be found with the help of both the generalized Fibonacci sequence $\{U_n(p, q)\}$ and the generalized Tribonacci sequence $\{T_n(p, q, r)\}$. Based on this, some relations between the terms of the sequence $\{U_n(p, q)\}$ and the sequence $\{T_n(p, q, r)\}$ are obtained. Finally, an application is made with the help of the obtained results. It is shown that a special solution of the equation $xy + x + y = 10^n - 1$ for all integers n can be obtained with the help of the sequence $\{T_n(p, q, r)\}$.

In the fourth chapter, the relations between generalized Fibonacci and Lucas sequences and matrices are studied. In the first section, a new property has been obtained for matrices X satisfying the condition $X^2 - pX - qI = \mathbf{0}$, where p and q are nonzero real numbers with $p^2 + 4q > 0$. A result is obtained for the linear combination of integer powers of such matrices. Based on this result, it is shown that the integer powers of matrices X that satisfy the condition $X^2 - V_nX + (-q)^nI = \mathbf{0}$ for some integer n can be found with the help of the generalized Fibonacci sequence $\{U_n(p, q)\}$. Then, some algebraic results of generalized Fibonacci and Lucas sequences are obtained using 2×2 dimensional special matrices.

In the second section of the fourth chapter, finding the roots and Moore-Penrose inverses of matrices with the help of number sequences is studied. First, it is shown that the positive integer powers of the matrices X satisfying the condition $X^3 - V_nX^2 + (-q)^nX = \mathbf{0}$ can be obtained with the help of the sequence $\{U_n(p, q)\}$. Then the relation between matrix roots and the generalized Fibonacci sequence $\{U_n(p, q)\}$ is shown. The result used to find the n th root of square matrices X that satisfy the condition $X^3 - V_nX^2 + (-q)^nX = \mathbf{0}$ is obtained. Then, the inverses of the matrices X satisfying the condition $X^3 - V_nX^2 + (-q)^nX = \mathbf{0}$ are studied. Such matrices can be singular or nonsingular. In other words, we can not talk about the existence of inverses of all such matrices. However, we can talk about the Moore-Penrose inverses of all such matrices. First, a result is obtained to find the Moore-Penrose inverses of X , where X is a square real matrix with $X^2 - V_nX$ is symmetric and $X^3 - V_nX^2 + (-q)^nX = \mathbf{0}$. Then, based on this result, a way is obtained to find the Moore-Penrose inverses of non-symmetric or non-square matrices under appropriate conditions. Using the obtained results, Moore-Penrose inverses of some matrices are obtained.

In the fifth chapter, some relations between the k -generalized Fibonacci sequence and matrices were obtained with a similar idea, based on the methods obtained in the previous chapters. It is known that the characteristic equation of the k -generalized Fibonacci sequence is $x^k - x^{k-1} - x^{k-2} - \dots - 1 = 0$, where k is an integer with $k \geq 2$. Based on this equation, the equation $(x^k - x^{k-1} - x^{k-2} - \dots - 1)(x - t) = 0$ is obtained, where t is a nonzero real number with $t^k - t^{k-1} - t^{k-2} - \dots - 1 \neq 0$. The powers of the matrices X that satisfy the resulting equation, that is, the condition $X^{k+1} - (t + 1)X^k + tI + \sum_{i=1}^{k-1} (t - 1)X^i = \mathbf{0}$, are examined. It is shown that the positive integer powers of such matrices can be obtained with the help of the k -generalized Fibonacci sequence. Then, a new sequence $\{F_{(n)}^{(k,t)}\}$ related to the k -generalized Fibonacci sequence is defined. It is shown that the positive integer powers of matrices X satisfying the condition $X^{k+1} - (t + 1)X^k + tI + \sum_{i=1}^{k-1} (t - 1)X^i = \mathbf{0}$ can be obtained with the help of the sequence $\{F_{(n)}^{(k,t)}\}$. Using the obtained results, some relations between the k -generalized Fibonacci sequence and the sequence $\{F_{(n)}^{(k,t)}\}$ are obtained. Then, the sequence $\{F_{(n)}^{(k,1)}\}$ is specifically studied, and some relationships

between this sequence and the k -generalized Fibonacci sequence are obtained. Additionally, using the obtained results, an explicit formula to find the n th terms of the k -generalized Fibonacci sequence is obtained, where n is an integer with $n \geq k$.

In the last chapter, the results obtained in the previous chapters are evaluated. Firstly, the results obtained throughout the study are explained. Then, some suggestions are made for future studies regarding the results obtained in the study.





1. GİRİŞ

1.1. Literatür Özeti

Sayı dizileri matematikte önemli bir rol oynamaktadır. Bu dizilerin matematikte, doğada ve sanatta birçok kullanım alanının olduğu görülmektedir. Örneğin, Diyofant denklemlerinin çözümünde, bazı özel matrislerin kuvvetlerinin bulunmasında, şifreleme gibi farklı alanlarda özel sayı dizileri kullanılmaktadır.

Sayı dizileri konusunda bilinen önemli bir dizi Fibonacci dizisidir. Fibonacci dizisi, İtalyan matematikçi Leonardo Fibonacci'nin Liber Abaci isimli kitabındaki ünlü tavşan probleminin çözümünden yola çıkılarak ortaya atılmıştır ve bu sebeple Fibonacci dizisi olarak adlandırılmıştır. Fibonacci dizisi, $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ başlangıç koşullarına sahip olan ve her terimin kendisinden önceki iki terimin toplamı olarak elde edildiği $\{F_n\}$ dizisidir [1].

Fibonacci dizisinin terimleri arasındaki ilişkilerin elde edilmesi birçok çalışmanın konusu olmuştur. Bu çalışmalarda elde edilen yeni özellikler için farklı yöntemler kullanılmıştır. Bu yöntemlerden biri de matrislerin kullanılmasıdır. Fibonacci dizisi ile matrisler arasındaki önemli bir ilişkiyi ortaya koyan ve literatürde iyi bilinen bir matris Fibonacci- Q matrisidir. $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisinin pozitif tamsayı kuvvetlerinin Fibonacci dizisinin terimleri yardımıyla elde edilebileceği Charles King tarafından gösterilmiş ve her n pozitif tamsayısı için $Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ eşitliği elde edilmiştir [2]. Bu matris kullanılarak Fibonacci dizisine ait farklı özelliklerin ispatları yapılmıştır. Örneğin, $|Q| = -1$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $|Q^n| = \begin{vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{vmatrix}$ eşitliği ve buradan da her $n \in \mathbb{N}$ için $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ eşitliği elde edilmiştir. Bu özellik, Cassini özelliği olarak bilinen ve literatürde farklı ispatları olan bir özellik olmasına rağmen Fibonacci- Q matrisi yardımıyla da elde edilebilmektedir [1].

Fibonacci dizisi ile ilişkili önemli bir kavram da altın oran kavramıdır. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sayısına *altın oran* denilmektedir. Altın oran doğada ve sanatın farklı alanlarında karşımıza çıkmaktadır ve bu açıdan önemli bir kavramdır. Bu sayının farklı alanlarda karşımıza

çıkmasının yanında önemli bir özelliği de Fibonacci dizisinin terimleri ile arasındaki ilişkidir. $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri olan $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ sayıları için $F_n = \frac{\phi^n - \varphi^n}{\phi - \varphi}$ eşitliği Fibonacci dizisi için *Binet formülü* olarak bilinmektedir. Ayrıca $x^2 - x - 1 = 0$ denklemi ile ilgili bir diğer önemli özellik ise bu denklem aynı zamanda Fibonacci- Q matrisinin karakteristik denklemidir [1].

Fibonacci- Q matrisinin ardından Fibonacci dizisi ile ilişkili farklı matrisler elde edilmiştir. Bu konuda önemli bir yaklaşım [3]'de ortaya koyulmuştur. Genel olarak $X^2 - X - I = \mathbf{0}$ koşulunu sağlayan 2×2 boyutlu X matrisleri incelenmiş ve bu tipteki matrislerin tüm tamsayı kuvvetlerinin Fibonacci dizisi yardımıyla bulunabileceği gösterilmiştir. Ayrıca [3]'de bu koşulu sağlayan farklı matrisler elde edilmiş ve bu matrisler kullanılarak Fibonacci dizisine ait bazı farklı özelliklerin ispatları yapılmıştır.

Fibonacci dizisinin literatürde farklı genelleştirmeleri vardır. Bu genelleştirmelerden biri şu şekildedir: p ve q sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere $U_0 = 0$ ve $U_1 = 1$ başlangıç koşulları ile verilen ve $n \geq 2$ tamsayıları için $U_n = pU_{n-1} + qU_{n-2}$ yineleme bağıntısına sahip $\{U_n\}$ dizisine *genelleştirilmiş Fibonacci dizisi* denilmektedir. $\{U_n\}$ dizisinde $p = q = 1$ için klasik Fibonacci dizisi elde edilir. $\{U_n\}$ dizisinin elemanları ile $x^2 - px - q = 0$ denkleminin kökleri arasındaki ilişkiler bilinmektedir [4-6].

$\{F_n\}$ dizisinde olduğu gibi genel olarak $\{U_n\}$ dizisi ile matrisler arasındaki ilişkiler de farklı çalışmalarda incelenmiştir. $\{U_n\}$ dizisi ile ilişkili olduğu bilinen önemli bir matris $U = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisidir. Bu matris kullanılarak $\{U_n\}$ dizisine ait farklı özellikler elde edilebilmektedir [5]. Yine bu matrisin karakteristik denklemi, $\{U_n\}$ dizisi ile yakından ilişkili olduğu bilinen $x^2 - px - q = 0$ denklemdir. Bununla beraber genel olarak $X^2 - pX - qI = \mathbf{0}$ koşulunu sağlayan X matrislerinin tüm tamsayı kuvvetlerinin $\{U_n\}$ dizisi yardımıyla bulunabileceği [5]'de gösterilmiş olup bunun yardımıyla $\{U_n\}$ dizisine ait bazı farklı özellikler de ortaya koyulmuştur.

Fibonacci dizisi ile ilişkili önemli bir dizi de Lucas dizisidir. $L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ başlangıç koşullarına sahip olan ve her terimin kendisinden önceki iki terimin toplamı olarak elde edildiği $\{L_n\}$ dizisine *Lucas dizisi* denir. Yine $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri ile Lucas dizisinin terimleri arasında da ilişkiler mevcuttur. Örneğin, ϕ ve φ

bu denklemin kökleri olmak üzere $L_n = \phi^n + \varphi^n$ eşitliği Lucas sayıları için Binet formülü olarak bilinmektedir [1].

Lucas dizisi ile matrisler arasındaki ilişkiler açısından önemli bir matris $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ matrisidir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $RQ^n = \begin{pmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{pmatrix}$ eşitliği R matrisi ve Fibonacci- Q matrisi için doğrudur [7]. Bu matrisler kullanılarak Fibonacci ve Lucas dizilerine ait birçok özelliğin elde edilebileceği literatürdeki çalışmalarda görülmektedir. Örneğin, Fibonacci- Q matrisi ve R matrisinin kuvvetlerinin lineer bileşimini içeren bazı denklemlerin çözümleri elde edilmiş ve bu çözümler sayesinde Fibonacci ve Lucas dizilerine ait özellikler ortaya koyulmuştur [8].

Fibonacci dizisinde olduğu gibi Lucas dizisinin de genelleştirmesi mevcuttur. p ve q sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere $V_0 = 2$ ve $V_1 = p$ başlangıç koşulları ve $n \geq 2$ tamsayıları için $V_n = pV_{n-1} + qV_{n-2}$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{V_n\}$ dizisine *genelleştirilmiş Lucas dizisi* denir. Ayrıca, bu dizi ile $x^2 - px - q = 0$ denkleminin kökleri arasında ilişkiler mevcuttur. Bunun yanında genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizilerinin terimleri arasındaki birçok özellik de elde edilmiştir [4-6].

Literatürde Fibonacci dizisi ve Lucas dizisi dışında birçok farklı sayı dizisi vardır. Örneğin, Tribonacci dizisi, Pell dizisi, Padovan dizisi gibi özel sayı dizileri tanımlanmış ve bu dizilere ait özellikler elde edilmiştir. Yine bazı dizilerin matrislerle ilişkileri farklı çalışmalarda incelenmiştir [1, 9, 10].

Özel sayı dizileri incelendiğinde, bu dizilerde genel olarak $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ şeklindeki belirli sayıdaki terimlerin başlangıç koşulları olarak verildiği, sonraki terimler için ise $c_1, c_2, \dots, c_k$ reel sayılar olmak üzere $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \dots + c_ka_{n-k}$ şeklinde yineleme bağıntısının kullanıldığı görülmektedir. Bu bağıntıya *k. dereceden lineer homojen yineleme bağıntısı* denir [11]. Sayı dizileri ile ilgili önemli bir kavram ise dizinin karakteristik denklemdir. $\{a_n\}$ dizisi $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \dots + c_ka_{n-k}$ yineleme bağıntısına sahip bir dizi olmak üzere bu diziye ait karakteristik denklem $x^k - c_1x^{k-1} - c_2x^{k-2} - \dots - c_{k-1}x - c_k = 0$ şeklindedir [12]. Dizilerin elemanları ile karakteristik denkleminin kökleri arasındaki bağıntılar literatürde önemli bir yer tutmaktadır. Örneğin, karakteristik denklemin kökleri yardımıyla dizinin elemanlarını elde etmek için Binet formülü olarak bilinen bağıntılar farklı diziler için elde edilmiştir. Yine dizilerle ilişkili matrisler dikkate alındığında, dizinin karakteristik

denklemini sağlayan matrisler üzerinde çalışmak önemli bir yaklaşımdır. Bunun yanında dizinin karakteristik denklemini sağlamayan, daha büyük boyutlu matrisler ile dizi arasında ilişki kurmak üzerinde de çalışılmıştır. Örneğin, ϕ ve φ , $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri olmak üzere, özdeğerleri ϕ , φ ve 0 olan 3×3 boyutlu matrisler ile Fibonacci ve Lucas dizileri arasındaki ilişki incelenmiş ve pozitif tamsayı kuvvetleri Fibonacci ve Lucas dizileri yardımıyla elde edilebilen bu türdeki bazı özel matrisler elde edilmiştir [13].

Son yıllarda yapılan çalışmalarda hem mevcut dizilerin yeni özelliklerinin elde edildiği hem de yeni dizilerin tanıtıldığı görülmektedir. Ayrıca tüm bu diziler ile matrisler arasında ilişkiler kurmanın yeni özelliklerin elde edilmesinde önemli bir yol olduğu anlaşılmaktadır.

1.2. Tezin Amacı

Bazı özel sayı dizileri ile dizinin karakteristik denkleminde farklı denklemleri sağlayan matrisler arasında ilişkiler kurulmaktadır. Elde edilen sonuçların farklı uygulamaları verilmektedir. Bu sebeple sayı dizilerinin matris ilişkileri kullanılarak, hem sayı dizilerine ait yeni cebirsel eşitlikler elde edilmekte hem de matrislerin köklerinin ve Moore-Penrose terslerinin sayı dizileri yardımıyla hesaplanması gibi matrislerle ilgili farklı sonuçlar elde edilmektedir. Ayrıca çalışma içerisinde elde edilen sonuçlar sunulurken, literatürdeki diğer sayı dizileri için de yeni sonuçların ortaya koyulmasına yol gösterici olması amaçlanmaktadır.

Çalışmanın orijinal bölümlerinde ilk olarak $\{U_n\}$ genelleştirilmiş Fibonacci dizisi ile matris ilişkileri incelenecektir. Bunun için öncelikle $x^2 - px - q = 0$ denkleminde yola çıkılarak, özdeğerleri bu denklemin kökleri α ve β sayıları ile $r^2 - pr - q \neq 0$ koşulunu sağlayan sıfırdan farklı bir r reel sayısı olan 3×3 boyutlu matrislerin elde edilmesi ve bu tipteki matrislerin $\{U_n\}$ dizisi ile arasındaki ilişki ortaya koyulmaktadır. Daha sonra genel olarak $X^3 - (r + p)X^2 + (rp - q)X + qrI = \mathbf{0}$ koşulunu sağlayan X matrislerinin tamsayı kuvvetleri ile $\{U_n\}$ dizisi arasındaki ilişkiyi gösteren bir temel sonuç elde edilmektedir. Elde edilen sonuçtan yola çıkılarak $\{U_n\}$ dizisine ait bazı cebirsel özellikler elde edilmekte ve yine $\{U_n\}$ dizisi ile özel bir genelleştirilmiş Tribonacci dizisi arasındaki bazı ilişkiler ortaya koyulmaktadır. Böylece matrisler kullanılarak farklı dizilerin terimleri arasındaki bazı ilişkiler gösterilmektedir.

Çalışmanın devamında genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizilerine ait özellikler elde edilmektedir. Öncelikle, bir n tamsayısı için $X^2 - V_n X + (-q)^n I = \mathbf{0}$ koşulunu sağlayan X matrisleri ile $\{U_n\}$ genelleştirilmiş Fibonacci dizisi arasında ilişki kurulmakta ve bu koşulu sağlayan özel tipli matrisler yardımıyla $\{U_n\}$ ve $\{V_n\}$ dizileri için farklı sonuçlar ortaya koyulmaktadır. Ardından, $X^3 - V_n X^2 + (-q)^n X = \mathbf{0}$ koşulunu sağlayan X matrisleri ile $\{U_n\}$ dizisi arasında bir ilişki belirlenmekte ve bu ilişkiden yola çıkılarak uygun matrislerin n . dereceden kökleri ve Moore-Penrose terslerinin bulunması için bazı sonuçlar elde edilmektedir.

Çalışmanın ana kısmında son olarak k -genelleştirilmiş Fibonacci dizisi ile matris ilişkisi incelenmektedir. t , sıfırdan farklı ve $t^k - t^{k-1} - t^{k-2} - \dots - 1 \neq 0$ koşulunu sağlayan bir reel sayı olmak üzere $X^{k+1} - (t+1)X^k + tI + \sum_{i=1}^{k-1} (t-1)X^i = \mathbf{0}$ koşulunu sağlayan X matrisleri ile k -genelleştirilmiş Fibonacci dizisi arasındaki ilişki ortaya koyulmaktadır. Son olarak, elde edilen sonuçlar yardımıyla k -genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin terimlerini elde etmek için bir bağıntı verilmektedir.

Çalışmanın son bölümünde önceki bölümlerde elde edilen sonuçlar değerlendirilmekte ve yapılabilecek olan yeni çalışmalar için önerilere yer verilmektedir.



2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, çalışmada kullanılacak olan temel kavramlar ve ispatsız olarak temel teoremler verilecektir.

2.1. Matrisler ile İlgili Temel Kavramlar

$i = 1, 2, \dots, m$ ve $j = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere a_{ij} skalerlerinin

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

şeklindeki dikdörtgensel düzenlenmesine *matris* denir. m satır ve n sütundan oluşan bir A matrisine $m \times n$ boyutludur denir. A matrisi kısaca $A = (a_{ij})$ şeklinde gösterilir. Burada a_{ij} elemanı A matrisinin i . satır ve j . sütun elemanıdır.

Matrisler genellikle skalerlerin bulunduğu cisim ile adlandırılır. Örneğin, matrisin elemanları reel sayı ise *reel matris*, kompleks sayı ise *kompleks matris* şeklinde adlandırılır.

Tüm elemanları 0 olan matrise *sıfır matris* denir ve $\mathbf{0}$ şeklinde gösterilir.

A matrisi $m \times m$ boyutlu ise A matrisine *kare matris* denir. Kare matrisin sol üst köşesinden sağ alt köşesine doğru olan elemanlarına *köşegen elemanları* denir. A matrisinin köşegen elemanlarının toplamına A matrisinin *izi* denir ve $\text{iz}(A)$ ile gösterilir. Köşegen elemanları dışındaki tüm elemanları 0 olan matrise *köşegen matris* denir. Köşegen elemanlarının hepsi 1 olan köşegen matrise ise *birim matris* denir ve I ile gösterilir [14].

A matrisinin satırları ile sütunlarının yer değiştirmesi ile oluşan matrise A matrisinin *transpozu* denir ve bu matris A^T ile gösterilir. A bir kare matris olmak üzere $A = A^T$ ise A matrisine *simetrik matris* denir. A matrisinin elemanlarının eşlenikleri alınarak elde edilen matrisin transpozuna A matrisinin *eşlenik transpozu* denir ve bu matris A^* şeklinde gösterilir. A matrisinin reel bir matris olması durumunda $A^* = A^T$ olur [15].

A ve B aynı boyutlu matrisler olmak üzere bu matrislerin aynı satır ve sütunlarındaki karşılıklı elemanlarının toplanması ile oluşan matrise A ve B matrislerinin toplamı denir ve bu matris $A + B$ ile gösterilir. A bir matris ve c bir skaler olmak üzere, A matrisinin tüm elemanlarının c skaleri ile çarpılması ile cA matrisi elde edilir. A matrisi $m \times r$ boyutlu ve B matrisi $r \times n$ boyutlu matrisler olmak üzere bu matrislerin çarpımı AB ile gösterilir. Burada AB matrisi $m \times n$ boyutlu bir matristir. AB matrisinin i . satır ve j . sütunundaki eleman, A matrisinin i . satırındaki elemanlar ile B matrisinin j . sütunundaki karşılıklı elemanların çarpılması ile elde edilen sonuçların toplanması ile bulunur [16].

A bir kare matris ve n pozitif bir tamsayı olmak üzere A^n matrisine, A matrisinin n . dereceden kuvveti denir; A^n matrisi n tane A matrisinin çarpılması ile elde edilir [16].

A bir kare matris olsun. $n > 1$ tamsayı olmak üzere $B^n = A$ koşulunu sağlayan B matrisine A matrisinin n . dereceden kökü denir [17].

A kare matrisi için $AB = BA = I$ olacak şekilde bir B matrisi var ise B matrisine A matrisinin tersi denir. A matrisinin tersi varsa A matrisine tersinirdir denir. Bir matrisin tersi varsa tektir. A matrisinin tersi A^{-1} ile gösterilir [16].

Teorem 2.1.1. A ve B aynı boyutlu kare matrisler ise $|AB| = |A||B|$ olur [16].

Teorem 2.1.2. A bir kare matris ve $n \in \mathbb{N}$ ise $|A^n| = |A|^n$ eşitliği vardır [16].

Teorem 2.1.3. Köşegen matrisin determinantı köşegen elemanlarının çarpımına eşittir [14].

Tanım 2.1.4. A matrisi $m \times m$ boyutlu bir matris olsun. Bu matrisin i . satır ve j . sütununun silinmesiyle elde edilen alt matris M_{ij} olmak üzere $|M_{ij}|$ determinantına a_{ij} elemanının minörü ve $A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$ ifadesine ise a_{ij} elemanının kofaktörü denir. A matrisinin a_{ij} elemanının yerine A_{ij} kofaktörü yazılarak elde edilen matrisin transpozuna ise A matrisinin *adjoint matrisi* denir ve $adj(A)$ ile gösterilir [16].

Teorem 2.1.5. A matrisi tersinir bir matris ise $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)$ eşitliği vardır [14].

Teorem 2.1.6. $m \times m$ boyutlu A matrisinin determinantı $i = 1, 2, \dots, m$ için

$$|A| = \sum_{j=1}^m a_{ij}A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{im}A_{im}$$

ve $j = 1, 2, \dots, m$ için

$$|A| = \sum_{i=1}^m a_{ij}A_{ij} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{mj}A_{mj}$$

şeklinde elde edilir. İlk yazılışa *determinantın i. satıra göre açılımı* ve ikinci yazılışa *determinantın j. sütuna göre açılımı* denir [14].

Teorem 2.1.7. A kare matrisinin tersinir olması için gerek ve yeter koşul $|A| \neq 0$ olmasıdır [14].

Teorem 2.1.8. A tersinir bir matris ise $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ eşitliği vardır [16].

Tanım 2.1.9. Bir lineer denklem sistemi matrisler yardımıyla gösterilebilir:

$$\begin{aligned} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \dots + a_{1n}u_n &= b_1 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{2n}u_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \dots + a_{mn}u_n &= b_m \end{aligned}$$

sistemi, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ ve $\mathbf{u}$ ile $\mathbf{b}$ vektörleri $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ ve $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

olmak üzere $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$ şeklinde yazılabilir. Burada A matrisine *katsayılar matrisi*, $\mathbf{u}$ vektörüne *bilinmeyenler vektörü* ve $\mathbf{b}$ vektörüne *bilinenler sabit vektörü* denir [16].

Teorem 2.1.10. (Cramer Yöntemi) n bilinmeyenli ve n tane lineer denklemden oluşan $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$ lineer denklem sistemi verilsin. $|A| \neq 0$ olması durumunda bu sistemin tek çözümü $u_1 = \frac{|A_1|}{|A|}$, $u_2 = \frac{|A_2|}{|A|}$, ..., $u_n = \frac{|A_n|}{|A|}$ şeklindedir. Burada A_j matrisleri, A matrisinde j. sütun silinerek yerine $\mathbf{b}$ vektörünün yazılmasıyla elde edilen matrislerdir [16].

Tanım 2.1.11. A bir kare matris olsun. $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ denklemini sağlayan sıfırdan farklı bir $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ vektörü var ise λ skalerine A matrisinin *özdeğeri*, $\mathbf{x}$ vektörüne ise λ özdeğerine karşılık gelen bir *özvektör* denir [15].

Teorem 2.1.12. A kare matrisinin bir özdeğerinin λ olması için gerek ve yeter koşul $|A - \lambda I| = 0$ olmasıdır [14].

Tanım 2.1.13. A bir kare matris olmak üzere, $p_A(\lambda) = |A - \lambda I|$ polinomuna A matrisinin *karakteristik polinomu* ve $|A - \lambda I| = 0$ denklemine de A matrisinin *karakteristik denklemi* denir [14].

Teorem 2.1.14. (Cayley Hamilton Teoremi) Her kare matris kendi karakteristik denklemini sağlar [15].

Teorem 2.1.15. A kare matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ise $|A| = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m$ ve $\text{iz}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m$ eşitlikleri doğrudur [16].

Teorem 2.1.16. A kare matrisinin tersinir olması için gerek ve yeter koşul A matrisinin özdeğerlerinin hepsinin sıfırdan farklı olmasıdır [16].

Tanım 2.1.17. A ve B kare matrisleri için $B = P^{-1}AP$ olacak şekilde tersinir bir P matrisi var ise A ve B matrislerine *benzer matrisler* denir [15].

Tanım 2.1.18. Bir A kare matrisi köşegen bir D matrisine benzer ise bu durumda A matrisine *köşegenleştirilebilir* denir [15].

Teorem 2.1.19. Bir $m \times m$ boyutlu A matrisinin köşegenleştirilebilir olması için gerek ve yeter koşul m tane lineer bağımsız, yani hiçbirisi diğerlerinin bir lineer bileşimi şeklinde yazılamayan özvektörlere sahip olmasıdır [18].

Tanım 2.1.20. Bir $m \times m$ boyutlu A matrisi, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ şeklinde m tane lineer bağımsız özvektöre sahip olsun. Bu durumda, bu özvektörleri sütun olarak kabul eden $P = (\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_m)$ matrisine A matrisinin *modal matrisi* denir. A matrisinin özdeğerlerini köşegen elemanı olarak kabul eden D köşegen matrisine ise A matrisinin *spektral matrisi* denir [18].

Teorem 2.1.21. Bir $m \times m$ boyutlu A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ve bu özdeğerlere karşılık gelen m tane lineer bağımsız özvektör $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ olsun. A

matrisinin modal matrisi $P = (\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_m)$ ve spektral matrisi $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_m \end{pmatrix}$

olmak üzere $D = P^{-1}AP$ ve $A = PDP^{-1}$ eşitlikleri vardır [18].

Teorem 2.1.22. Bir kare matrisin farklı özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri lineer bağımsızdır [18].

Teorem 2.1.23. Tüm özdeğerleri birbirinden farklı olan bir A kare matrisi köşegenleştirilebilir [15].

Tanım 2.1.24. A kare matrisi için $m_A(A) = 0$ koşulunu sağlayan en düşük dereceli monik (baş katsayısı 1 olan) polinoma A matrisinin *minimal polinomu* denir [15].

Tanım 2.1.25. A bir $m \times n$ boyutlu matris olmak üzere $(AG)^* = AG$, $(GA)^* = GA$, $AGA = A$ ve $GAG = G$ koşullarını sağlayan $n \times m$ boyutlu G matrisine, A matrisinin *Moore-Penrose tersi* denir [19].

Teorem 2.1.26. Sonlu elemanlı tüm matrislerin Moore-Penrose tersi vardır ve tektir [19].

Teorem 2.1.27. A matrisinin Moore-Penrose tersi $A^\dagger$ ve eşlenik transpoz A^* olmak üzere $A^\dagger = (A^*A)^\dagger A^* = A^*(AA^*)^\dagger$ eşitliği vardır [19].

2.2. Özel Sayı Dizileri

2.2.1. Temel tanımlar ve teoremler

$F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ başlangıç koşulları, $n \geq 2$ tamsayıları için $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{F_n\}$ dizisine *Fibonacci dizisi* denir. Fibonacci dizisi ile yakından ilişkili bir diğer dizi ise Lucas dizisidir. $L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ başlangıç koşulları, $n \geq 2$ tamsayıları için $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{L_n\}$ dizisine *Lucas dizisi* denir. Bu dizilere ait birçok özellik bulunmaktadır [1, 20].

Literatürde Fibonacci ve Lucas dizileri için birtakım farklı genelleştirmelerin olduğu görülmektedir. Genelleştirmelerden ikisi şu şekildedir: p ve q sıfırdan farklı reel sayılar, $U_0(p, q) = 0$ ve $U_1(p, q) = 1$ başlangıç koşulları olmak üzere $n \geq 2$ tamsayısı için $U_n(p, q) = pU_{n-1}(p, q) + qU_{n-2}(p, q)$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{U_n(p, q)\}$ dizisine *genelleştirilmiş Fibonacci dizisi* denir. Benzer şekilde, p ve q sıfırdan farklı reel sayılar, $V_0(p, q) = 2$ ve $V_1(p, q) = p$ başlangıç koşulları olmak üzere $n \geq 2$ tamsayısı için $V_n(p, q) = pV_{n-1}(p, q) + qV_{n-2}(p, q)$ bağıntısı ile verilen $\{V_n(p, q)\}$ dizisine *genelleştirilmiş Lucas dizisi* denir. Bu diziler için bazı farklı özellikler mevcuttur [4-6].

Sadelik açısından çalışmanın devamında $\{U_n(p, q)\}$ ve $\{V_n(p, q)\}$ dizileri için sırasıyla $\{U_n\}$ ve $\{V_n\}$ gösterimleri kullanılacaktır.

Negatif indisli genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayıları $n \geq 1$ tamsayısı için sırasıyla $U_{-n} = \frac{-U_n}{(-q)^n}$ ve $V_{-n} = \frac{V_n}{(-q)^n}$ olarak tanımlanır.

Fibonacci ve Lucas dizileri dışında birçok özel sayı dizisi bulunmaktadır. Bunlardan bazıları aşağıda verilmiştir.

$Q_0 = 0, Q_1 = Q_2 = 1$ başlangıç koşullarına sahip olmak üzere ve $n \geq 3$ tamsayısı için $Q_n = Q_{n-1} + Q_{n-2} + Q_{n-3}$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{Q_n\}$ dizisine *Tribonacci dizisi* denir. W_0, W_1, W_2 başlangıç koşulları ve a, b, c katsayıları keyfi reel sayılar olmak üzere $n \geq 3$ tamsayısı için $W_n = aW_{n-1} + bW_{n-2} + cW_{n-3}$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{W_n\}$ dizisine *genelleştirilmiş Tribonacci dizisi* denir. $c \neq 0$ olmak üzere $n \in \mathbb{N}$ için $W_{-n} = -\frac{b}{c}W_{-(n-1)} - \frac{a}{c}W_{-(n-2)} + \frac{1}{c}W_{-(n-3)}$ bağıntısı yardımıyla negatif indisli genelleştirilmiş Tribonacci sayıları elde edilir. $K_0 = K_1 = K_2 = 1$ başlangıç koşulları ve $n \geq 3$ tamsayısı için $K_n = K_{n-2} + K_{n-3}$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{K_n\}$ dizisine *Padovan dizisi* denir [9, 21, 22].

Fibonacci dizisinin önemli bir genelleştirmesi de k -genelleştirilmiş Fibonacci dizisidir: k sayısı, $k \geq 2$ koşulunu sağlayan bir tamsayı olmak üzere $0 \leq n \leq k-2$ koşulunu sağlayan n tamsayısı için $G_{(n)}^{(k)} = 0$, $G_{(k-1)}^{(k)} = 1$ ve $n \geq k$ tamsayısı için ise $G_{(n)}^{(k)} = G_{(n-1)}^{(k)} + G_{(n-2)}^{(k)} + \dots + G_{(n-k)}^{(k)}$ yineleme bağıntısı ile verilen $\{G_{(n)}^{(k)}\}$ dizisine k -genelleştirilmiş Fibonacci dizisi denir [23]. k -genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin negatif indisli terimleri de elde edilebilir. Pozitif indisli terimler için kullanılmakta olan $G_{(n)}^{(k)} = G_{(n-1)}^{(k)} + G_{(n-2)}^{(k)} + \dots + G_{(n-k)}^{(k)}$ bağıntısında n yerine $n+k$ yazılırsa $G_{(n+k)}^{(k)} = G_{(n+k-1)}^{(k)} + G_{(n+k-2)}^{(k)} + \dots + G_{(n)}^{(k)}$ bağıntısı ya da bu bağıntıya denk olarak $G_{(n)}^{(k)} = -G_{(n+1)}^{(k)} - G_{(n+2)}^{(k)} - \dots - G_{(n+k-1)}^{(k)} + G_{(n+k)}^{(k)}$ bağıntısı elde edilir. Bu eşitlikte n yerine $-n$ yazıldığında $G_{(-n)}^{(k)} = -G_{(-n+1)}^{(k)} - G_{(-n+2)}^{(k)} - \dots - G_{(-n+k-1)}^{(k)} + G_{(-n+k)}^{(k)}$ olur ve bu eşitlikten $\{G_{(n)}^{(k)}\}$ dizisinin negatif indisli terimleri elde edilebilir [24].

Bazı sayı dizilerinin literatürde farklı şekillerde tanımlandığı da görülmektedir. Bu farklılıklardan biri dizinin tanımında yer alan değişkenlerin seçimi ile ilgilidir. Örneğin, bazı çalışmalarda $\{U_n\}$ dizisi tanımlanırken p ve q değerleri tamsayılar olarak, bazı çalışmalarda ise reel sayılar olarak kabul edilmiştir. Bir diğer farklılık ise dizilerin başlangıç koşulları verilirken ortaya çıkmaktadır. Örneğin, bazı çalışmalarda

Padovan dizisinin başlangıç koşulları $K_0 = 0, K_1 = K_2 = 1$ şeklinde verilmiştir. Bu şekilde farklı dizilere ait farklı tanımlar mevcuttur. Bu çalışmada adı geçen dizilerin tanımları yukarıda verildiği şekilde kullanılacaktır.

Fibonacci dizisi, Lucas dizisi gibi sayı dizilerinde görüldüğü üzere bu tür dizilerde dizinin terimlerinin önceki terimler yardımıyla bulunmasını sağlayan bir yineleme bağıntısı ve dizinin belirli sayıda terimini veren başlangıç koşulları vardır. Bu dizilerin genel hali olan lineer homojen yineleme (rekürans) bağıntısı aşağıdaki şekildedir:

Tanım 2.2.1.1. $b_0, b_1, \dots, b_{k-1} \in \mathbb{R}$ olmak üzere $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_{k-1} = b_{k-1}$ başlangıç koşullarına sahip olan, bununla beraber $c_k \neq 0$ için $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ olmak üzere $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$ bağıntısına k . *dereceden lineer homojen yineleme bağıntısı* denir [11].

Sayı dizileri için önemli bir kavram da karakteristik denklem kavramıdır. Genel olarak lineer homojen yineleme bağıntısının karakteristik denklemi aşağıdaki şekildedir:

Tanım 2.2.1.2. $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \dots - c_k = 0$ denkleminin $a_n - c_1 a_{n-1} - c_2 a_{n-2} - \dots - c_k a_{n-k} = 0$ lineer homojen yineleme bağıntısının karakteristik denklemi denir [12].

Dizilerin karakteristik denklemlerinin köklerine ait özellikler birçok farklı çalışmada incelenmiştir. Dizilerin elemanlarının bu köklere bağlı olarak bulunmasını sağlayan formüllere Binet formülleri denilmektedir.

p ve q sıfırdan farklı ve $p^2 + 4q > 0$ koşulunu sağlayan reel sayılar olmak üzere $\{U_n\}$ ve $\{V_n\}$ dizileri ile $x^2 - px - q = 0$ denkleminin kökleri arasındaki bazı ilişkiler aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Teorem 2.2.1.3. $U_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ ve $V_n = \alpha^n + \beta^n$ eşitlikleri her $n \in \mathbb{Z}$ için doğrudur.

Burada α ve β , $x^2 - px - q = 0$ denkleminin kökleridir [5].

Teorem 2.2.1.4. $\alpha^n = U_n \alpha + q U_{n-1}$ ve $\beta^n = U_n \beta + q U_{n-1}$ eşitlikleri her $n \in \mathbb{Z}$ için doğrudur. Burada α ve β , $x^2 - px - q = 0$ denkleminin kökleridir [5].

Farklı sayı dizileri için de Binet formüllerinin elde edilmesi üzerinde çalışılmıştır. Örneğin, k -genelleştirilmiş Fibonacci dizisi için Binet formülleri [25] ve [26] çalışmalarında elde edilmiştir.

Binet formülleri dışında karakteristik denklemlerin köklerinin farklı cebirsel özellikleri de incelenmektedir. Örneğin, k -genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin karakteristik denkleminin kökleri ile ilgili önemli bir özellik aşağıdaki şekildedir:

Teorem 2.2.1.5. $k \geq 2$ tamsayısı için $x^k - x^{k-1} - x^{k-2} - \dots - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri birbirinden farklıdır [27].

2.2.2. Bazı sayı dizileri ile matrisler arasındaki ilişkiler

Matrisler ile sayı dizileri arasındaki ilişkiler farklı çalışmalarda incelenmiştir. Sayı dizileri ile matrisler arasındaki ilişkiyi gösteren önemli bir matris Fibonacci- Q matrisidir. $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisi için $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ eşitliği Charles King tarafından gösterilmiştir. Fibonacci- Q matrisi gibi literatürde farklı çalışmalarda kullanılmış olan bir matris de $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrisidir. Bu matris için de $P^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$ eşitliği vardır [2].

Fibonacci- Q matrisi gibi diğer diziler için de özel matrisler elde edilmiştir. Örneğin, $\{U_n\}$ dizisi için $U = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere her $n \in \mathbb{Z}$ için $U^n = \begin{pmatrix} U_{n+1} & qU_n \\ U_n & qU_{n-1} \end{pmatrix}$ eşitliği gösterilmiştir [5]. Yine $\{U_n\}$ dizisi için sık kullanılan bir matris de $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$ matrisidir. Bu matris için de $M^n = \begin{pmatrix} qU_{n-1} & U_n \\ qU_n & U_{n+1} \end{pmatrix}$ şeklinde kuvvet bağıntısı verilmiş ve bu matris kullanılarak $\{U_n\}$ dizisi için farklı eşitlikler gösterilmiştir [4].

$\{W_n\}$ ve $\{G_{(n)}^{(k)}\}$ dizileri için matris eşitlikleri aşağıdaki teoremlerde verilmiştir.

Teorem 2.2.2.1. a, b ve c sıfırdan farklı tamsayılar ve $S = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere her

$n \in \mathbb{N}$ için $S^n = \begin{pmatrix} R_{n+1} & bR_n + cR_{n-1} & cR_n \\ R_n & bR_{n-1} + cR_{n-2} & cR_{n-1} \\ R_{n-1} & bR_{n-2} + cR_{n-3} & cR_{n-2} \end{pmatrix}$ eşitliği doğrudur. Burada $\{R_n\}$

dizisi, $\{W_n\}$ dizisinin $W_0 = 0, W_1 = 1$ ve $W_2 = a$ için elde edilen özel bir durumudur [28].

Teorem 2.2.2.2. $k \geq 2$ tamsayı olmak üzere $k \times k$ boyutlu $Q_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \vdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \vdots & 0 \end{pmatrix}$

matrisi için

$$Q_k^n = \begin{pmatrix} G_{(n+k-1)}^{(k)} & G_{(n+k-2)}^{(k)} & \cdots & G_{(n)}^{(k)} \\ \sum_{i=0}^{k-2} G_{(n+k-2-i)}^{(k)} & \sum_{i=0}^{k-2} G_{(n+k-3-i)}^{(k)} & \cdots & \sum_{i=0}^{k-2} G_{(n-1-i)}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ G_{(n+k-2)}^{(k)} & G_{(n+k-3)}^{(k)} & \cdots & G_{(n-1)}^{(k)} \end{pmatrix}$$

eşitliği her $n \in \mathbb{N}$ için doğrudur [23].

Sayı dizileri ile matrisler arasındaki ilişkiler incelenirken yukarıdaki matrislere benzer olarak farklı özel matrisler de elde edilmiştir. Bu türdeki bazı matrislerde önemli bir özellik dikkat çekmektedir. Örneğin, Fibonacci dizisi için verilen Q ve P matrisleri incelendiğinde bu matrislerin karakteristik denklemlerinin $x^2 - x - 1 = 0$ olduğu kolaylıkla görülür. Bu denklem aynı zamanda Fibonacci dizisinin de karakteristik denklemdir. Benzer şekilde $\{U_n\}$ dizisi için verilmiş olan U ve M matrislerinin karakteristik denklemleri de aynı zamanda $\{U_n\}$ dizisinin karakteristik denklemi olan $x^2 - px - q = 0$ denklemdir. Yine Teorem 2.2.2.1'deki S matrisinin de karakteristik denklemi ile $\{W_n\}$ dizisinin karakteristik denklemi aynıdır. Bu durum sayı dizileri ile matrisler arasındaki ilişkiler incelenirken, dizinin karakteristik denklemini sağlayan matrislerin genel olarak incelenmesi fikrini ortaya çıkarmaktadır. $x^2 - x - 1 = 0$ denklemini sağlayan matrislerin $\{F_n\}$ dizisi ile ilişkisi aşağıdaki teorem ile verilmiştir. Yine bu teorem yardımıyla $\{F_n\}$ dizisine ait özellikler elde edilmiştir.

Teorem 2.2.2.3. X matrisi, $X^2 = X + I$ koşulunu sağlayan bir matris olmak üzere $X^n = F_n X + F_{n-1} I$ eşitliği her $n \in \mathbb{Z}$ için vardır [3].

Teorem 2.2.2.3'ün genelleştirilmiş hali, p ve q sıfırdan farklı ve $p^2 + 4q > 0$ koşulunu sağlayan reel sayılar olmak üzere aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Teorem 2.2.2.4. X matrisi, $X^2 = pX + qI$ koşulunu sağlayan bir matris olmak üzere $X^n = U_n X + qU_{n-1} I$ eşitliği her $n \in \mathbb{Z}$ için vardır [5].

Teorem 2.2.2.4 yardımıyla genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri için farklı özellikler elde edilmiştir. Bu özelliklerden çalışmamızın devamında kullanılacak olan bazıları aşağıda verilmiştir.

m, n ve r tamsayıları için aşağıdaki özellikler doğrudur [5].

$$(-q)^{n-1}U_{m-n} = U_{m-1}U_n - U_mU_{n-1}, \quad (2.1)$$

$$U_mV_n = U_{m+n} + (-q)^nU_{m-n}, \quad (2.2)$$

$$U_{n+1} + qU_{n-1} = V_n, \quad (2.3)$$

$$U_{m+n} = U_mU_{n+1} + qU_{m-1}U_n. \quad (2.4)$$



3. GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE TRİBONACCİ SAYILARI İLE MATRİS İLİŞKİLERİ

Bu bölümde ilk olarak genelleştirilmiş Fibonacci dizisi ile ilişkili 3×3 boyutlu matrislerin bulunması için [29] çalışmasında yapılanlar ele alınacaktır. Sonra, genel olarak $X^3 - (r + p)X^2 + (rp - q)X + qrI = \mathbf{0}$ koşulunu sağlayan X matrislerinin tamsayı kuvvetlerinin genelleştirilmiş Fibonacci ve Tribonacci dizileri ile arasındaki ilişkiler gösterilerek bu dizilere ait sonuçlar elde edilecektir.

Bölüm boyunca p ve q sayıları $p^2 + 4q > 0$ koşulunu sağlayan sıfırdan farklı reel sayılar olarak kabul edilecektir.

3.1. 3×3 Boyutlu Matrisler ve Genelleştirilmiş Fibonacci Dizisi

Teorem 2.2.2.4, $x^2 - px - q = 0$ denklemini sağlayan matrislerin kuvvetlerinin $\{U_n\}$ dizisi yardımıyla elde edilebileceğini göstermektedir. Bu arada $x^2 - px - q = 0$ denkleminin köklerinin $\lambda_1 = \alpha = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$ ve $\lambda_2 = \beta = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$ olduğu açıktır. Şimdi r sıfırdan farklı bir reel sayı olmak üzere, özdeğerleri α , β ve r olan 3×3 boyutlu matrisler ile $\{U_n\}$ dizisi arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz. Reel sayılardan oluşan

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

matrisinin özdeğerlerinin λ_1 , λ_2 ve r olması için karakteristik denkleminin

$$x^3 - (r + p)x^2 + (rp - q)x + qr = 0$$

olması gereklidir. Ayrıca A matrisinin karakteristik denklemini elde etmek için $|A - xI| = 0$ denkleminde gerekli işlemler yapılırsa A matrisinin özdeğerlerinin λ_1 , λ_2 ve r olma koşulu olarak

$$\begin{aligned} a + e + i &= r + p \\ ae + ai + ei - hf - bd - cg &= rp - q \\ cge + hfa + bdi - aei - bgf - cdh &= qr \end{aligned} \tag{3.1}$$

denklem sistemini sağlaması gerektiği görülür. Bununla beraber, matris özdeğerlerinin birbirinden farklı olması durumunda köşegenleştirilebilir olacaktır. Bu durumun sağlanması için ise $r \neq \alpha$ ve $r \neq \beta$ yani

$$r^2 - pr - q \neq 0 \quad (3.2)$$

olmalıdır. A matrisinin, (3.1) ve (3.2) koşullarını sağladığını kabul ederek devam edelim. Burada, A matrisinin λ_1 , λ_2 ve r özdeğerlerine karşılık gelen birer özvektör,

sırasıyla $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ ve $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ olsun. A matrisi köşegenleştirilebilir bir matris olduğu için

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} P^{-1}$$

şeklinde yazılabilir. Burada P matrisi, A matrisinin özvektörlerini sütun kabul eden matristir ve her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$A^n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & r^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

eşitliği sağlanır. $\lambda_1 = \alpha$ ve $\lambda_2 = \beta$ olduğundan, bu eşitlikle beraber her $n \in \mathbb{Z}$ için Teorem 2.2.1.4 yardımıyla görülen $\alpha^n = U_n \alpha + q U_{n-1}$ ve $\beta^n = U_n \beta + q U_{n-1}$ eşitlikleri dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} A^n &= P \begin{pmatrix} U_n \lambda_1 + q U_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & U_n \lambda_2 + q U_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & r^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \left[U_n \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} + q U_{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^n - r U_n - q U_{n-1} \end{pmatrix} \right] P^{-1} \end{aligned}$$

olur. Bu eşitlikten

$$A^n = U_n A + q U_{n-1} I + (r^n - r U_n - q U_{n-1}) P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \quad (3.3)$$

eşitliği elde edilir. (3.3) eşitliği, A matrisinin tamsayı kuvvetlerinin $\{U_n\}$ dizisi yardımıyla bulunabileceğini göstermektedir. Şimdi,

$$B = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

olsun. Bu durumda

$$B = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z_1 \\ 0 & 0 & z_2 \\ 0 & 0 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}^{-1}$$

yazılabilir. Yine bu eşitlikte gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$B = \frac{1}{|P|} \begin{pmatrix} z_1(x_2y_3 - y_2x_3) & z_1(y_1x_3 - x_1y_3) & z_1(x_1y_2 - y_1x_2) \\ z_2(x_2y_3 - y_2x_3) & z_2(y_1x_3 - x_1y_3) & z_2(x_1y_2 - y_1x_2) \\ z_3(x_2y_3 - y_2x_3) & z_3(y_1x_3 - x_1y_3) & z_3(x_1y_2 - y_1x_2) \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

elde edilir. Burada $|P| = z_1(x_2y_3 - y_2x_3) + z_2(y_1x_3 - x_1y_3) + z_3(x_1y_2 - y_1x_2)$ şeklindedir. Sonuç olarak (3.1) ve (3.2) koşullarını sağlayan A matrisinin tamsayı kuvvetlerinin, (3.4) eşitliği de dikkate alınarak, (3.3) bağıntısı yardımıyla bulunabileceği görülür. Burada genel bir çözüm üzerinde çalışılabilir. Fakat sayı dizileri ile ilişkili matrisler elde edilirken bu matrislerin ve kuvvet bağıntılarının işlem kolaylığı açısından sadeliği önemlidir. Bu açıdan elde edilen sistemleri sağlaması için bazı seçimler yapılarak devam edilebilir. [29]'da yapılabilecek olan seçimler üzerinde çalışılmıştır. Şimdi burada yapılabilecek olan seçimler üzerinde duralım ve bu yolla özel bir matris elde edelim.

(3.4) eşitliğinde görüleceği üzere B matrisinin elde edilmesinde $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)$ vektörü oldukça önemlidir. Bu matrisin işlem kolaylığına uygunluğu düşünülerek $\mathbf{z}$ vektörü özel olarak seçilebilir. Örneğin,

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

olarak seçebiliriz. Bu durumda $|P| = x_1y_2 - y_1x_2$ olur ve (3.4) eşitliğinden B matrisi

$$B = \frac{1}{x_1y_2 - y_1x_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ x_2y_3 - y_2x_3 & y_1x_3 - x_1y_3 & x_1y_2 - y_1x_2 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Şimdi ikinci bir seçim daha yapalım.

$$x_2y_3 - y_2x_3 = x_3y_1 - y_3x_1 = x_1y_2 - y_1x_2$$

eşitliğinin sağlanması durumunda B matrisi

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde olacaktır. Bunun için öncelikle $x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 = 0$ eşitliğinin doğru olduğunu düşünelim. Bu durumda

$$x_1 = -x_2 - x_3$$

$$y_1 = -y_2 - y_3$$

olacağından bu sistem kullanılarak $x_1(-y_2 - y_3) = y_1(-x_2 - x_3)$ eşitliği elde edilir.

Bu sebeple

$$x_3y_1 - y_3x_1 = x_1y_2 - y_1x_2 \quad (3.5)$$

eşitliği sağlanır. Yine, $x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 = 0$ olması durumunda

$$x_2 = -x_1 - x_3$$

$$y_2 = -y_1 - y_3$$

olacağından

$$x_1y_2 - y_1x_2 = x_2y_3 - y_2x_3 \quad (3.6)$$

eşitliği elde edilir. (3.5) ve (3.6) eşitlikleri bize $x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 = 0$ koşulunun sağlanması durumunda $x_1y_2 - y_1x_2 = x_2y_3 - y_2x_3 = x_3y_1 - y_3x_1$ eşitliğinin de sağlandığını gösterir. Bu eşitliklerle beraber (3.3) eşitliği dikkate alınır

şu sonuç elde edilir: $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 = 0$ koşullarının

sağlanması durumunda her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$A^n = U_n A + qU_{n-1}I + (r^n - rU_n - qU_{n-1}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

olacaktır. Şimdi $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 = 0$ seçimlerinin

sağlanması koşullarını inceleyelim. İlk olarak $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ olması durumunu inceleyelim.

Özvektör tanımı dikkate alınır $A\mathbf{z} = r\mathbf{z}$ eşitliğinin sağlanması gerekir. Bunun için,

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eşitliğinden, $\mathbf{z}$ vektörünün istenilen koşulları sağlaması için $c = 0$, $f = 0$ ve $i = r$ olmalıdır. Artık,

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ g & h & r \end{pmatrix}$$

şeklinde devam edebiliriz. Bu sayede $\mathbf{z}$ vektörü istenilen koşulu sağlayacaktır. Şimdi $c = 0$, $f = 0$ ve $i = r$ eşitlikleri için (3.1) sistemini inceleyelim. Bu durumda (3.1) sistemi

$$\begin{aligned} a + e &= p \\ ae + ar + er - bd &= rp - q \\ bd - ae &= q \end{aligned}$$

sistemine dönüşür. Bu sistemde birinci ve üçüncü denklemlerin sağlanması durumunda ikinci denklem de sağlanacaktır. Dolayısıyla (3.1) sistemi yerine

$$\begin{aligned} a + e &= p \\ bd - ae &= q \end{aligned}$$

sisteminin sağlanması yeterlidir. Bunun için ise $e = p - a$ ve $d = \frac{q+ap-a^2}{b}$ eşitliklerinin sağlanması yeterli olacaktır. Bu seçimlerin sonunda

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ \frac{q+ap-a^2}{b} & p-a & 0 \\ g & h & r \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

matrisi elde edilir. Bu matris şu iki özelliği sağlamaktadır: Birincisi, bu matrisin özdeğerleri λ_1 , λ_2 ve r sayılarıdır. İkinci olarak ise r özdeğerine karşılık gelen bir

özvektör $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektörüdür. Artık matrisin özdeğerleri ve r özdeğerine karşılık

gelen özvektör istediğimiz şekildedir. Son olarak (3.7) matrisinde bir diğer seçim olan

$x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 = 0$ koşulunun sağlanma durumunu inceleyelim.

Özvektör tanımından $A\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}$ ve $A\mathbf{y} = \lambda_2\mathbf{y}$ denklemleri sağlanmaktadır. Bu sebeple

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= \lambda_1 x_1 \\ \left(\frac{q+ap-a^2}{b} \right) x_1 + (p-a)x_2 &= \lambda_1 x_2 \\ gx_1 + hx_2 + rx_3 &= \lambda_1 x_3 \end{aligned} \quad (3.8)$$

ve

$$\begin{aligned} ay_1 + by_2 &= \lambda_2 y_1 \\ \left(\frac{q + ap - a^2}{b} \right) y_1 + (p - a)y_2 &= \lambda_2 y_2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$gy_1 + hy_2 + ry_3 = \lambda_2 y_3$$

eşitliklerine sahibiz. Amacımız $x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 = 0$ eşitliğinin sağlanmasıdır. Şimdi

$$a + \frac{q + ap - a^2}{b} + g = b + p - a + h = r \quad (3.10)$$

eşitliği sağlanırsa $x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 = 0$ eşitliğinin de sağlandığını göstereyim. İlk olarak (3.8) eşitliklerine sahibiz. Bu eşitlikleri taraf tarafa toplayalım. Bu durumda (3.10) eşitliği de göz önüne alınır ve gerekli işlemler yapılsa

$$r(x_1 + x_2 + x_3) = \lambda_1(x_1 + x_2 + x_3) \quad (3.11)$$

elde edilir. Burada (3.2) kabulünden dolayı özdeğerlerin farklı olduğunu yani $r \neq \lambda_1$ olduğunu biliyoruz. Bu sebeple (3.11) eşitliğinin sağlanması için $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ olmalıdır. Benzer şekilde (3.9) eşitlikleri de taraf tarafa toplanırsa

$$r(y_1 + y_2 + y_3) = \lambda_2(y_1 + y_2 + y_3)$$

eşitliği elde edilir ve yine özdeğerlerin farklı olmasından dolayı $y_1 + y_2 + y_3 = 0$ eşitliği sağlanır. Bu durum şunu gösterir; eğer (3.10) eşitlikleri sağlanırsa istenilen son özellik olan $x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 = 0$ eşitliği de sağlanmış olur. Bu sebeple (3.7) eşitliğindeki matris (3.10) eşitliklerine göre düzenlenirse

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ \frac{q + ap - a^2}{b} & p - a & 0 \\ \frac{br - ab - q - ap + a^2}{b} & r + a - b - p & r \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. Bu matris, (3.2) koşulu altında istediğimiz koşula uygun bir matristir. Şimdi (3.3) eşitliği ile bu matrisin kuvvet bağıntısı elde edilebilir. Her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$A^n = U_n A + qU_{n-1}I + (r^n - rU_n - qU_{n-1})P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

eşitliğinde gerekli işlemler yapılsa

$$A^n = \begin{pmatrix} aU_n + qU_{n-1} & bU_n & 0 \\ \frac{q + ap - a^2}{b}U_n & U_{n+1} - aU_n & 0 \\ r^n + \frac{a^2 - ab - q - ap}{b}U_n - qU_{n-1} & r^n - U_{n+1} + (a - b)U_n & r^n \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Tüm bu yapılar bize aşağıdaki teoremi vermektedir.

Teorem 3.1.1. b ve r sıfırdan farklı reel sayılar ve a herhangi bir reel sayı olsun. Ayrıca $r^2 - pr - q \neq 0$ koşulu sağlansın. Bu durumda

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ \frac{q + ap - a^2}{b} & p - a & 0 \\ \frac{br - ab - q - ap + a^2}{b} & r + a - b - p & r \end{pmatrix}$$

olmak üzere her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$A^n = \begin{pmatrix} aU_n + qU_{n-1} & bU_n & 0 \\ \frac{q + ap - a^2}{b}U_n & U_{n+1} - aU_n & 0 \\ r^n + \frac{a^2 - ab - q - ap}{b}U_n - qU_{n-1} & r^n - U_{n+1} + (a - b)U_n & r^n \end{pmatrix}$$

eşitliği doğrudur [29].

Teorem 3.1.1'in elde ediliş yöntemine bakıldığında, izlenilen yol kullanılarak farklı seçimler altında $\{U_n\}$ dizisi ile ilişkili yeni matrisler ve kuvvet bağıntıları elde edilebilir. Bunun yanında diğer sayı diziler için de benzer yöntem ile özel matrislerin elde edilebilmesi için bir yol gösterici olabilir.

3.2. Matris Metotlarıyla Genelleştirilmiş Fibonacci Sayıları ile İlişkili Bazı Özdeşlikler

α ve β , $x^2 - px - q = 0$ denkleminin kökleri olmak üzere, özdeğerleri α , β ve r olan 3×3 boyutlu özel matrislerin elde edilmesi ve bu matrislere ait kuvvet bağıntısının bulunması için bir yöntem önceki kısımda gösterilmişti. Bu kısımda bu probleme daha genel olarak yaklaşacağız. $(x^2 - px - q)(x - r) = 0$ denklemini sağlayan ya da denk olarak $X^3 - (r + p)X^2 + (rp - q)X + qrI = \mathbf{0}$ koşulunu sağlayan bir X matrisinin $\{U_n\}$ dizisi ile ilişkisi ve ilgili bağıntılar üzerinde durulacaktır.

$X^3 - (r + p)X^2 + (rp - q)X + qrI = \mathbf{0}$ koşulunu sağlayan bir X matrisinin kuvvetlerini önceki bölümden farklı olarak X^2 , X ve I matrislerinin lineer bileşimi olarak bulmaya çalışalım. Amacımız bu özellikteki bir X matrisi için

$$X^n = c_1X^2 + c_2X + c_3I \quad (3.12)$$

eşitliğini her $n \in \mathbb{Z}$ için sağlayacak olan c_1, c_2, c_3 katsayılarını belirlemektir. Bunun için ilk olarak önceki kısımda [29] çalışmasında ortaya koyulan yöntemle benzer şekilde ilerleyerek bir sonuç elde etmeye çalışacağız. X matrisini, özdeğerleri α, β ve r olan köşegenleştirilebilir 3×3 boyutlu bir matris olarak seçelim. Bu durumda

$$X = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} P^{-1}$$

olarak yazılabilir. Bu eşitlik (3.12) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$P \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & \beta^n & 0 \\ 0 & 0 & r^n \end{pmatrix} P^{-1} = c_1 P \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix} P^{-1} + c_2 P \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} P^{-1} + c_3 I$$

elde edilir. Buradan, matris eşitliğinden

$$\begin{aligned} \alpha^n &= c_1\alpha^2 + c_2\alpha + c_3 \\ \beta^n &= c_1\beta^2 + c_2\beta + c_3 \\ r^n &= c_1r^2 + c_2r + c_3 \end{aligned} \quad (3.13)$$

denklem sistemi elde edilir. $\alpha^n = U_n\alpha + qU_{n-1}$ ve $\beta^n = U_n\beta + qU_{n-1}$ olduğundan (3.13) sistemine denk olarak

$$\begin{aligned} U_n\alpha + qU_{n-1} &= c_1(p\alpha + q) + c_2\alpha + c_3 \\ U_n\beta + qU_{n-1} &= c_1(p\beta + q) + c_2\beta + c_3 \\ r^n &= c_1r^2 + c_2r + c_3 \end{aligned} \quad (3.14)$$

sistemi elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} c_1p + c_2 &= U_n \\ c_1q + c_3 &= qU_{n-1} \\ c_1r^2 + c_2r + c_3 &= r^n \end{aligned} \quad (3.15)$$

sisteminin sağlanması durumunda (3.14) sisteminin de sağlanacağı kolaylıkla görülür. (3.15) sisteminin çözümü aradığımız çözümdür. Bu sistem,

$$\begin{pmatrix} p & 1 & 0 \\ q & 0 & 1 \\ r^2 & r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_n \\ qU_{n-1} \\ r^n \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Bu sistemin katsayılar matrisinin determinantı $r^2 - rp - q$ olup, $r^2 - rp - q \neq 0$ koşulu altında sistem çözüldüğü zaman, istenilen sonuçlar olarak $c_1 = \frac{r^n - rU_n - qU_{n-1}}{r^2 - rp - q}$, $c_2 = \frac{-pr^n + r^2U_n - q^2U_{n-2}}{r^2 - rp - q}$ ve $c_3 = \frac{-qr^n + qr^2U_{n-1} + q^2rU_{n-2}}{r^2 - rp - q}$ elde edilir. Bu sonuçlar (3.12) eşitliğinde kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$X^n = \frac{r^n - rU_n - qU_{n-1}}{r^2 - rp - q} (X^2 - pX - qI) + U_nX + qU_{n-1}I \quad (3.16)$$

bulunur. (3.16) eşitliği, özdeğerleri α, β ve r olan 3×3 boyutlu köşegenleştirilebilir bir matris için kuvvet bağıntısını vermektedir. Biz (3.16) eşitliğinde elde edilen sonucun $X^3 - (r + p)X^2 + (rp - q)X + qrI = \mathbf{0}$ koşulunu sağlayan tüm matrisler için genel olarak doğruluğunu göstereceğiz. Önce aşağıdaki yardımcı teoremi verelim.

Yardımcı Teorem 3.2.1. $r, r^2 - rp - q \neq 0$ koşulunu sağlayan sıfırdan farklı bir reel sayı olsun. Bu durumda, $f(n) = \frac{r^n - rU_n - qU_{n-1}}{r^2 - rp - q}$ olmak üzere her $n \in \mathbb{Z}$ için aşağıdaki eşitlikler doğrudur.

a) $f(n) - rf(n-1) = U_{n-1},$

b) $f(n+1) - pf(n) - qf(n-1) = r^{n-1}.$

İspat. $f(n) = \frac{r^n - rU_n - qU_{n-1}}{r^2 - rp - q}$ eşitliği ve $\{U_n\}$ dizisinin tanımı kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} f(n) - rf(n-1) &= \frac{r^n - rU_n - qU_{n-1}}{r^2 - rp - q} - r \frac{r^{n-1} - rU_{n-1} - qU_{n-2}}{r^2 - rp - q} \\ &= \frac{r^n - rU_n - qU_{n-1} - r^n + r^2U_{n-1} + qrU_{n-2}}{r^2 - rp - q} \\ &= \frac{-r(pU_{n-1} + qU_{n-2}) - qU_{n-1} + r^2U_{n-1} + qrU_{n-2}}{r^2 - rp - q} \\ &= \frac{-rpU_{n-1} - qU_{n-1} + r^2U_{n-1}}{r^2 - rp - q} \\ &= U_{n-1} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
f(n+1) - pf(n) - qf(n-1) &= \frac{r^{n+1} - rU_{n+1} - qU_n}{r^2 - rp - q} - p \frac{r^n - rU_n - qU_{n-1}}{r^2 - rp - q} \\
&\quad - q \frac{r^{n-1} - rU_{n-1} - qU_{n-2}}{r^2 - rp - q} \\
&= \frac{r^{n-1}(r^2 - rp - q)}{r^2 - rp - q} \\
&= r^{n-1}
\end{aligned}$$

olur ve ispat tamamlanır.

Yardımcı Teorem 3.2.1 a) şikkının $r = 0$ olması durumunda tüm n pozitif tamsayıları için de geçerli olacağına dikkat edelim.

Bu bölümün devamında r bir reel sayı olarak kabul edilecektir. Ayrıca $f(n)$, Yardımcı Teorem 3.2.1’de olduğu gibi kabul edilecektir.

Teorem 3.2.2. $X^3 - (r+p)X^2 + (rp-q)X + qrI = \mathbf{0}$ koşulunu sağlayan bir X matrisi için, $r^2 - rp - q \neq 0$ olmak üzere

$$X^n = f(n)(X^2 - pX - qI) + U_nX + qU_{n-1}I$$

eşitliği her $n \in \mathbb{N}$ için doğrudur. Ayrıca $r \neq 0$ ise bu eşitlik her $n \in \mathbb{Z}$ için geçerlidir.

İspat. İlk olarak $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere iddianın doğru olduğunu gösterelim. Bunun için tümevarım ilkesini kullanacağız. $n = 1$ için eşitliğin doğrulunu gösterelim. $f(1) = 0$ olduğundan

$$f(1)(X^2 - pX - qI) + U_1X + qU_0I = X$$

elde edilir. Böylece eşitlik $n = 1$ için doğrudur. Şimdi $n \in \mathbb{N}$ için eşitlik doğru olsun ve $n + 1$ için de doğru olduğunu gösterelim. $X^{n+1} = X^nX$ olduğundan

$$X^{n+1} = f(n)(X^3 - pX^2 - qX) + U_nX^2 + qU_{n-1}X \quad (3.17)$$

elde edilir. Ayrıca $X^3 - (r+p)X^2 + (rp-q)X + qrI = \mathbf{0}$ eşitliğinden

$$X^3 - pX^2 - qX = rX^2 - rpX - qrI \quad (3.18)$$

olur. (3.18) eşitliği, (3.17) eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
X^{n+1} &= f(n)(rX^2 - rpX - qrI) + U_nX^2 + qU_{n-1}X \\
&= [rf(n) + U_n]X^2 - [rpf(n) - qU_{n-1}]X - qrf(n)I
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Son eşitlikte, Yardımcı Teorem 3.2.1’in a) şikkı kullanıldığında

$$\begin{aligned}
X^{n+1} &= [f(n+1) - U_n + U_n]X^2 - [pf(n+1) - pU_n - qU_{n-1}]X \\
&\quad - [qf(n+1) - qU_n]I \\
&= f(n+1)X^2 - [pf(n+1) - U_{n+1}]X - [qf(n+1) - qU_n]I \\
&= f(n+1)(X^2 - pX - qI) + U_{n+1}X + qU_nI
\end{aligned}$$

olur. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için iddia doğrudur.

Şimdi, $r \neq 0$ olması durumunda eşitliğin pozitif olmayan tamsayılar için de doğru olduğunu gösterelim. Bunun için ilk olarak $r \neq 0$ için X matrisinin tersinir olduğunu gösterelim. Öncelikle Y matrisi

$$Y = \left(\frac{-1}{qr}\right)(X^2 - pX - qI) + \frac{1}{q}X - \frac{p}{q}I \quad (3.19)$$

şeklinde tanımlanırsa

$$XY = \left(\frac{-1}{qr}\right)(X^3 - pX^2 - qX) + \frac{1}{q}X^2 - \frac{p}{q}X \quad (3.20)$$

olduğu kolaylıkla görülür. (3.20) eşitliğinde (3.18) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
XY &= \left(\frac{-1}{qr}\right)(rX^2 - rpX - qrI) + \frac{1}{q}X^2 - \frac{p}{q}X \\
&= \left(\frac{-1}{q}\right)(X^2 - pX - qI) + \frac{1}{q}X^2 - \frac{p}{q}X \\
&= I
\end{aligned}$$

bulunur. O halde, Y matrisi X matrisinin tersidir. Bu sebeple X matrisinin $r \neq 0$ için tüm tamsayı kuvvetlerinden bahsedilebilir. Öncelikle istenilen eşitliğin $n = 0$ için doğru olduğunu gösterelim. $f(0) = 0$ ve $U_{-1} = \frac{1}{q}$ eşitlikleriyle beraber $n = 0$ için $f(n)(X^2 - pX - qI) + U_nX + qU_{n-1}I$ matrisi incelenirse

$$f(0)(X^2 - pX - qI) + U_0X + qU_{-1}I = I$$

bulunur. Böylece $n = 0$ için iddianın doğru olduğu görülür. Son olarak negatif tamsayılar için de eşitliğin doğru olduğunu göstermeliyiz. Bunun için n bir pozitif tamsayı olmak üzere

$$X^{-n} = f(-n)(X^2 - pX - qI) + U_{-n}X + qU_{-n-1}I \quad (3.21)$$

eşitliğinin doğru olduğunu göstermek yeterlidir. Yine tümevarım yöntemini kullanarak ilerleyelim. İlk olarak $n = 1$ için eşitliğin doğru olduğunu gösterelim.

Öncelikle $f(-1) = -\frac{1}{qr}$ olduğu kolaylıkla görülür. Bu eşitlikle beraber (3.19) kullanılırsa

$$\begin{aligned} f(-1)(X^2 - pX - qI) + U_{-1}X + qU_{-2}I &= -\frac{1}{qr}(X^2 - pX - qI) + \frac{1}{q}X + q(-\frac{p}{q^2})I \\ &= -\frac{1}{qr}(X^2 - pX - qI) + \frac{1}{q}X - \frac{p}{q}I \\ &= X^{-1} \end{aligned}$$

olur. Böylece $n = 1$ için iddia doğrudur. Şimdi iddia $n \in \mathbb{N}$ için doğru olsun ve $n + 1$ için de doğru olduğunu gösterelim. Bu durumda gösterilmesi gereken

$$X^{-(n+1)} = f(-(n+1))(X^2 - pX - qI) + U_{-(n+1)}X + qU_{-(n+1)-1}I$$

eşitliğinin doğru olduğudur. Burada (3.19) ve (3.21) dikkate alınır

$$\begin{aligned} X^{-(n+1)} &= X^{-1}[f(-n)(X^2 - pX - qI) + U_{-n}X + qU_{-n-1}I] \\ &= f(-n)(X - pI - qY) + U_{-n}I + qU_{-n-1}Y \\ &= f(-n)X - pf(-n)I - qf(-n)Y + U_{-n}I + qU_{-n-1}Y \\ &= f(-n)X + [-pf(-n) + U_{-n}]I - q[f(-n) - U_{-n-1}]Y \end{aligned}$$

elde edilir ve bu son eşitlikte Yardımcı Teorem 3.2.1 a) şikkı kullanılırsa

$$\begin{aligned} X^{-(n+1)} &= f(-n)X + [-pf(-n) + U_{-n}]I - qrf(-n-1)Y \\ &= f(-n)X + [-pf(-n) + U_{-n}]I \\ &\quad - qrf(-n-1) \left[\left(\frac{-1}{qr} \right) (X^2 - pX - qI) + \frac{1}{q}X - \frac{p}{q}I \right] \\ &= f(-n-1)(X^2 - pX - qI) + [f(-n) - rf(-n-1)]X \\ &\quad + [-pf(-n) + U_{-n} + prf(-n-1)]I \\ &= f(-n-1)(X^2 - pX - qI) + U_{-n-1}X + (-pU_{-n-1} + U_{-n})I \\ &= f(-n-1)(X^2 - pX - qI) + U_{-n-1}X + qU_{-n-2}I \\ &= f(-(n+1))(X^2 - pX - qI) + U_{-(n+1)}X + qU_{-(n+1)-1}I \end{aligned}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.2 sadece 3×3 boyutlu matrisler için değil, uygun ve farklı boyutlu matrisler için de uygulanabilir. Bu amaçla aşağıdaki örneği ele alalım.

Örnek 3.2.3. $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ olsun. Bu matris $X^3 - 2X^2 + I = \mathbf{0}$ eşitliğini sağlar.

Böylece X matrisi $p = q = r = 1$ için $X^3 - (r + p)X^2 + (rp - q)X + qrI = \mathbf{0}$ koşulunu sağlar, yani X matrisi Teorem 3.2.2'nin koşullarını gerçekleştirir. Öte yandan, $p = q = 1$ ile kurulan $\{U_n\}$ dizisi $\{F_n\}$ dizisini verir. Ayrıca $r = 1$ olduğundan dolayı

$$f(n) = \frac{1^n - 1F_n - 1F_{n-1}}{1^2 - 1.1 - 1} = F_{n+1} - 1$$

olur. Bunun yanında, $X^n = f(n)(X^2 - pX - qI) + U_nX + qU_{n-1}I$ eşitliği kullanılırsa ve gerekli işlemler yapılırsa her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$X^n = \begin{pmatrix} 1 & F_{n+2} - 1 & F_{n+2} - 1 & F_{n+1} - 1 \\ 0 & F_{n+1} & F_{n+1} - 1 & F_n \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & F_n & F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Şimdi, Teorem 3.2.2'nin bazı farklı sonuçları üzerinde duracağız. Teorem 2.2.2.4, [5]'de verilmiş ve farklı sonuçları gösterilmiştir. İlk olarak, Teorem 2.2.2.4'ün farklı bir ispatını Teorem 3.2.2 yardımıyla elde edelim.

Sonuç 3.2.4. X matrisi, $X^2 - pX - qI = \mathbf{0}$ koşulunu sağlayan bir matris olmak üzere her $n \in \mathbb{Z}$ için $X^n = U_nX + qU_{n-1}I$ eşitliği doğrudur.

İspat. Öncelikle X matrisi $X^2 - pX - qI = \mathbf{0}$ koşulunu sağladığı için X matrisi tersinir olup $X^{-1} = q^{-1}(X - pI)$ olduğu açıktır. Şimdi $r^2 - rp - q \neq 0$ ve $r \neq 0$ koşulunu sağlayan herhangi bir r sayısını seçelim. $X^2 - pX - qI = \mathbf{0}$ olduğundan, X matrisi için $(X^2 - pX - qI)(X - rI) = \mathbf{0}$ olur. Yani X matrisi için Teorem 3.2.2'nin koşulu olan $X^3 - (r + p)X^2 + (rp - q)X + qrI = \mathbf{0}$ eşitliği sağlanır. Böylece Teorem 3.2.2'den her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$X^n = f(n)(X^2 - pX - qI) + U_nX + qU_{n-1}I$$

elde edilir. Ayrıca $X^2 - pX - qI = \mathbf{0}$ olduğundan $X^n = U_nX + qU_{n-1}I$ olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.2 kullanılarak $\{U_n\}$ dizisi için bazı özellikler elde edeceğiz. Elde edilen sonuçlardaki bazı özellikler literatürde farklı ispatlara sahip olsa da alternatif ispatları

elde edilmiş olacaktır. Bunun için daha yüksek boyutlu matrisler de kullanılabilir fakat basitlik açısından 3×3 boyutlu özel matrisler kullanılacaktır.

Karakteristik denklemi $x^3 - (r + p)x^2 + (rp - q)x + qr = 0$ olan 3×3 boyutlu bir matrisi, (3.1) sistemi yardımıyla elde edebiliriz. (3.1) sisteminde $a = p$, $b = i = r$, $c = q$, $f = -q$, $d = e = h = 0$ ve $g = 1$ seçimleri yapılarak elde edilen matris için aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.2.5. $r \neq 0$ ve $r^2 - rp - q \neq 0$ olmak üzere $U = \begin{pmatrix} p & r & q \\ 0 & 0 & -q \\ 1 & 0 & r \end{pmatrix}$ olsun. Bu

durumda $U^n = \begin{pmatrix} U_{n+1} & rU_n & qU_n \\ -qf(n) & -qrf(n-1) & -q[r^{n-1} + qf(n-1)] \\ f(n+1) & rf(n) & r^n + qf(n) \end{pmatrix}$ eşitliği her $n \in \mathbb{Z}$ için doğrudur.

İspat. U matrisi $U^3 - (r + p)U^2 + (rp - q)U + qrl = \mathbf{0}$ koşulunu sağlar. Teorem 3.2.2 kullanılırsa $U^n = f(n)(U^2 - pU - qI) + U_nU + qU_{n-1}I$ eşitliği her $n \in \mathbb{Z}$ için sağlanır. Bu eşitlik kullanılarak gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} U^n &= f(n) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -q & -q & -qr + qp \\ r & r & r^2 - pr \end{pmatrix} + U_n \begin{pmatrix} p & r & q \\ 0 & 0 & -q \\ 1 & 0 & r \end{pmatrix} + qU_{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} pU_n + qU_{n-1} & rU_n & qU_n \\ -qf(n) & -qf(n) + qU_{n-1} & (-qr + qp)f(n) - qU_n \\ rf(n) + U_n & rf(n) & (r^2 - pr)f(n) + rU_n + qU_{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte Yardımcı Teorem 3.2.1 ve $\{U_n\}$ dizisinin tanımı kullanılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$U^n = \begin{pmatrix} U_{n+1} & rU_n & qU_n \\ -qf(n) & -qrf(n-1) & -q[r^{n-1} + qf(n-1)] \\ f(n+1) & rf(n) & r^n + qf(n) \end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.2.6. $r \neq 0$ ve $r^2 - rp - q \neq 0$ olmak üzere her $m, n \in \mathbb{Z}$ için aşağıdaki eşitlikler doğrudur.

a) $U_{n+1}U_{m+1} + qU_nU_m = U_{n+m+1},$

b) $f(n)U_{m+1} + r^{n-1}f(m+1) + qf(n-1)U_m = f(n+m).$

İspat. Öncelikle, Sonuç 3.2.5'deki U matrisinin özdeğerleri α , β ve r olduğundan $|U| = -qr \neq 0$ olur. Yani U matrisi verilen koşullar altında tersinirdir ve tüm tamsayı kuvvetlerinden bahsedilebilir. Şimdi $m, n \in \mathbb{Z}$ için Sonuç 3.2.5 kullanılırsa

$$U^n = \begin{pmatrix} U_{n+1} & rU_n & qU_n \\ -qf(n) & -qrf(n-1) & -q[r^{n-1} + qf(n-1)] \\ f(n+1) & rf(n) & r^n + qf(n) \end{pmatrix},$$

$$U^m = \begin{pmatrix} U_{m+1} & rU_m & qU_m \\ -qf(m) & -qrf(m-1) & -q[r^{m-1} + qf(m-1)] \\ f(m+1) & rf(m) & r^m + qf(m) \end{pmatrix}$$

ve

$$U^{n+m} = \begin{pmatrix} U_{n+m+1} & rU_{n+m} & qU_{n+m} \\ -qf(n+m) & -qrf(n+m-1) & -q[r^{n+m-1} + qf(n+m-1)] \\ f(n+m+1) & rf(n+m) & r^{n+m} + qf(n+m) \end{pmatrix}$$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca $U^n U^m = U^{n+m}$ olacaktır. Bu eşitliğin sol tarafı U^n ve U^m matrislerinin çarpımı ile elde edilebilir. Bu çarpım yapılırsa elde edilen matrisin birinci satır ve birinci sütun elemanı $U_{n+1}U_{m+1} - qrU_nf(m) + qU_nf(m+1)$ olarak bulunur ve Yardımcı Teorem 3.2.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned} U_{n+1}U_{m+1} - qrU_nf(m) + qU_nf(m+1) &= U_{n+1}U_{m+1} + qU_n[f(m+1) - rf(m)] \\ &= U_{n+1}U_{m+1} + qU_nU_m \end{aligned}$$

olur. İki matrisin eşitliğinden $U_{n+1}U_{m+1} + qU_nU_m = U_{n+m+1}$ elde edilir ve a) şıkkı ispatlanmış olur. Yine matrislerin ikinci satır birinci sütun elemanlarını inceleyelim. Eşitliğin sol tarafındaki matrisin söz konusu elemanı Yardımcı Teorem 3.2.1 kullanılarak incelenirse $-q[f(n)U_{m+1} + r^{n-1}f(m+1) + qf(n-1)U_m]$ olduğu görülür. Matris eşitliğinden

$$f(n)U_{m+1} + r^{n-1}f(m+1) + qf(n-1)U_m = f(n+m)$$

elde edilir ve böylece b) şıkkı ispatlanmış olur.

Sonuç 3.2.6'da, matrislerin diğer elemanlarının eşitliğinden de farklı eşitlikler elde edilecektir. Fakat elde edilen eşitlikler a) ve b) şıklarındaki eşitlikler yardımıyla elde edilebilen eşitliklerdir.

Şimdi yine U matrisini kullanarak ispatlayacağımız bir diğer sonucu göstereceğiz.

Sonuç 3.2.7. $r \neq 0$, $r \neq 1$, $r^2 - rp - q \neq 0$ ve $p + q \neq 1$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler her $n \in \mathbb{N}$ için vardır.

a) $\sum_{k=0}^n U_k = \frac{U_{n+1} + qU_n - 1}{p+q-1},$

b) $\sum_{k=0}^n f(k+1) = \frac{U_{n+2} - qrf(n+1) + (1-p)f(n+2) - 1}{(p+q-1)(1-r)}.$

İspat. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, herhangi bir X kare matrisi için

$$X^{n+1} - I = (X - I)(I + X + X^2 + \dots + X^n)$$

eşitliği daima doğru olduğundan, Sonuç 3.2.5'deki U matrisi için de

$$U^{n+1} - I = (U - I) \sum_{k=0}^n U^k \quad (3.22)$$

eşitliği sağlanır. Şimdi $U - I$ matrisini inceleyelim.

$$U - I = \begin{pmatrix} p-1 & r & q \\ 0 & -1 & -q \\ 1 & 0 & r-1 \end{pmatrix}$$

olup $|U - I| = (p + q - 1)(1 - r)$ olarak bulunur. Buradan $p + q - 1 \neq 0$ ve $r \neq 1$ için $U - I$ matrisinin tersinir olduğu açıktır. Bu durumda, gerekli işlemler yapılarak

$$(U - I)^{-1} = \frac{1}{(p + q - 1)(1 - r)} \begin{pmatrix} 1-r & r-r^2 & -rq+q \\ -q & (r-1)(p-1)-q & pq-q \\ 1 & r & 1-p \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Ayrıca (3.22) eşitliğinden

$$(U - I)^{-1}(U^{n+1} - I) = \sum_{k=0}^n U^k \quad (3.23)$$

elde edilir. (3.23) eşitliğindeki $(U - I)^{-1}(U^{n+1} - I)$ matrisini bulalım. Sonuç 3.2.5 kullanılırsa ve gerekli işlemler yapılırsa

$$U^{n+1} - I = \begin{pmatrix} U_{n+2} - 1 & rU_{n+1} & qU_{n+1} \\ -qf(n+1) & -qrf(n) - 1 & -q[r^n + qf(n)] \\ f(n+2) & rf(n+1) & r^{n+1} + qf(n+1) - 1 \end{pmatrix}$$

olur. Artık, $(U - I)^{-1}$ ve $U^{n+1} - I$ matrislerini çarparak $(U - I)^{-1}(U^{n+1} - I)$ matrisini bulabiliriz. $(U - I)^{-1}(U^{n+1} - I) = A$ olsun ve bu matrisin a_{11} elemanını Yardımcı Teorem 3.2.1 yardımıyla bulalım. İstenilen eleman,

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{(1-r)(U_{n+2}-1) - q(r-r^2)f(n+1) + (-rq+q)f(n+2)}{(p+q-1)(1-r)} \\
&= \frac{(U_{n+2}-1) - qrf(n+1) + qf(n+2)}{(p+q-1)} \\
&= \frac{U_{n+2} + qU_{n+1} - 1}{p+q-1}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Ayrıca $\sum_{k=0}^n U^k$ matrisi Sonuç 3.2.5 yardımıyla bulunabilir. Bu matrisin birinci satır ve birinci sütun elemanı $\sum_{k=0}^n U_{k+1}$ olur. Böylece (3.23) matris eşitliğinden matrislerin karşılıklı elemanları aynı olacağı için

$$\sum_{k=0}^n U_{k+1} = \frac{U_{n+2} + qU_{n+1} - 1}{p+q-1}$$

olur ve a) şıkkının ispatı tamamlanmış olur. Benzer düşünce ile devam edilirse

$$\begin{aligned}
a_{31} &= \frac{U_{n+2} - 1 - qrf(n+1) + (1-p)f(n+2)}{(p+q-1)(1-r)} \\
&= \frac{U_{n+2} - 1 - qrf(n+1) + (1-p)f(n+2)}{(p+q-1)(1-r)}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Ayrıca $\sum_{k=0}^n U^k$ matrisinin üçüncü satır ve birinci sütun elemanı da $\sum_{k=0}^n f(k+1)$ olarak elde edilir. Yine (3.23) matris eşitliğinden

$$\sum_{k=0}^n f(k+1) = \frac{U_{n+2} - qrf(n+1) + (1-p)f(n+2) - 1}{(p+q-1)(1-r)}$$

elde edilir ve b) şıkkı ispatlanmış olur. Böylece ispat tamamlanır.

(3.1) eşitliği kullanılarak, Sonuç 3.2.5'deki U matrisi gibi farklı matrisler türetilerek yukarıdaki sonuçlarda olduğu gibi yeni sonuçlar elde edilebilir. Şimdi ise farklı bir yaklaşımda bulunacağız. İlk olarak U matrisi ile değişmeli olan bir matris elde edeceğiz, sonra ise bu yeni matris ve U matrisi yardımıyla bazı özellikler elde edeceğiz.

İstenilen sonuçlara ulaşmak için aşağıdaki iki yardımcı teoremi verelim.

Yardımcı Teorem 3.2.8. X matrisi için $X^3 - (r+p)X^2 + (rp-q)X + qrl = 0$ olsun. Bu durumda $Y = pl - X$ matrisi $Y^3 - (s+p)Y^2 + (sp-q)Y + qsl = 0$ koşulunu sağlar. Burada $s = p - r$ şeklindedir.

İspat. $Y^3 - (s+p)Y^2 + (sp-q)Y + qsl$ ifadesinde $Y = pl - X$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
Y^3 - (s+p)Y^2 + (sp-q)Y + qsl &= (pl-X)^3 - (s+p)(pl-X)^2 \\
&\quad + (sp-q)(pl-X) + qsl \\
&= p^3l - 3p^2X + 3pX^2 - X^3 - (s+p)(p^2l - 2pX + X^2) \\
&\quad + (sp-q)(pl-X) + qsl \\
&= -X^3 + (2p-s)X^2 + (-3p^2 + 2sp + 2p^2 - sp + q)X \\
&\quad + (p^3 - sp^2 - p^3 + sp^2 - qp + qs)l \\
&= -X^3 + (2p-s)X^2 + (-p^2 + sp + q)X + (-qp + qs)l \\
&= -X^3 + [2p - (p-r)]X^2 + [-p^2 + (p-r)p + q]X + [-qp + q(p-r)]l \\
&= -X^3 + (r+p)X^2 + (-rp + q)X + (-qr)l \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

olur ve ispat tamamlanır.

Yardımcı Teorem 3.2.9. $r^2 - rp - q \neq 0$ olmak üzere $g(n) = \frac{(p-r)^n + rU_n - U_{n+1}}{r^2 - rp - q}$ olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{Z}$ için $g(n) - (p-r)g(n-1) = U_{n-1}$ eşitliği doğrudur.

İspat. İspat aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned}
g(n) - (p-r)g(n-1) &= \frac{(p-r)^n + rU_n - U_{n+1}}{r^2 - rp - q} - (p-r) \frac{(p-r)^{n-1} + rU_{n-1} - U_n}{r^2 - rp - q} \\
&= \frac{-U_{n+1} - r(p-r)U_{n-1} + pU_n}{r^2 - rp - q} \\
&= \frac{(r^2 - rp - q)U_{n-1}}{r^2 - rp - q} \\
&= U_{n-1}
\end{aligned}$$

olur ve ispat tamamlanır.

Yardımcı Teorem 3.2.9'daki $g(n)$ fonksiyonu, Yardımcı Teorem 3.2.1'deki $f(n)$ fonksiyonunda r yerine $p-r$ yazılarak elde edilmiştir. Bu bölümün devamında $g(n)$ fonksiyonu Teorem 3.2.9'daki şekliyle kullanılacaktır.

Sonuç 3.2.10. $r^2 - rp - q \neq 0$ ve $r \neq 0$ olmak üzere $V = \begin{pmatrix} 0 & -r & -q \\ 0 & p & q \\ -1 & 0 & p-r \end{pmatrix}$

olsun. Her $n \in \mathbb{Z}$ için $V^n = \begin{pmatrix} qU_{n-1} & -rU_n & -qU_n \\ -qg(n) & -qg(n) + U_{n+1} & qg(n+1) \\ rg(n) - U_n & rg(n) & -rg(n+1) + U_{n+1} \end{pmatrix}$

eşitliği doğrudur.

İspat. U matrisi Sonuç 3.2.5'deki gibi olmak üzere,

$$pI - U = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p & r & q \\ 0 & 0 & -q \\ 1 & 0 & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -r & -q \\ 0 & p & q \\ -1 & 0 & p-r \end{pmatrix} = V$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 3.2.8 gereği $V^3 - (s+p)V^2 + (sp-q)V + qsl = \mathbf{0}$ olur ve burada $s = p - r$ eşitliği vardır. Böylece V matrisi Teorem 3.2.2'nin koşulunu sağlar ve her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$V^n = \frac{s^n - sU_n - qU_{n-1}}{s^2 - sp - q} (V^2 - pV - qI) + U_n V + qU_{n-1}I \quad (3.24)$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} s^2 - sp - q &= (p-r)^2 - (p-r)p - q \\ &= p^2 - 2pr + r^2 - p^2 + pr - q \\ &= r^2 - rp - q \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik (3.24) eşitliğinde yerine yazılırsa ve Yardımcı Teorem 3.2.9 kullanılarak gerekli işlemler yapılırsa her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$\begin{aligned} V^n &= \frac{(p-r)^n - (p-r)U_n - qU_{n-1}}{r^2 - rp - q} (V^2 - pV - qI) + U_n V + qU_{n-1}I \\ &= \frac{(p-r)^n - pU_n + rU_n - qU_{n-1}}{r^2 - rp - q} (V^2 - pV - qI) + U_n V + qU_{n-1}I \\ &= g(n)(V^2 - pV - qI) + U_n V + qU_{n-1}I \end{aligned}$$

elde edilir. Yine,

$$V^2 - pV - qI = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -q & -q & pq - qr \\ r & r & r^2 - pr \end{pmatrix}$$

eşitliği de kolaylıkla bulunur ve bu eşitliklerden

$$\begin{aligned}
V^n &= \begin{pmatrix} qU_{n-1} & -rU_n & -qU_n \\ -qg(n) & -qg(n) + U_{n+1} & q[(p-r)g(n) + U_n] \\ rg(n) - U_n & rg(n) & -r[(p-r)g(n) + U_n] + U_{n+1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} qU_{n-1} & -rU_n & -qU_n \\ -qg(n) & -qg(n) + U_{n+1} & qg(n+1) \\ rg(n) - U_n & rg(n) & -rg(n+1) + U_{n+1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.2.11. $r \neq 0$ ve $r^2 - rp - q \neq 0$ olmak üzere aşağıdaki özellikler her $n \in \mathbb{N}$ için doğrudur.

- a) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [U_{n-k+1}U_{k-1} - U_{n-k}U_k] = p^n,$
- b) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [U_{n-k}U_{k+1} - U_{n-k+1}U_k] = 0,$
- c) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [qf(n-k)U_{k-1} + r^{n-k}g(k) - r^{n-k-1}U_k - qf(n-k-1)U_k] = 0,$
- d) $qr \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [f(n-k)U_k - f(n-k-1)U_{k+1} - r^{n-k-1}g(k)] = p^n,$
- e) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [qf(n-k)U_k + r^{n-k}g(k+1) - r^{n-k-1}U_{k+1} - qf(n-k-1)U_{k+1}] = 0,$
- f) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [qf(n-k+1)U_{k-1} + r^{n-k+1}g(k) - r^{n-k}U_k - qf(n-k)U_k] = 0,$
- g) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [f(n-k+1)U_k - f(n-k)U_{k+1} - r^{n-k}g(k)] = 0,$
- h) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [-qf(n-k+1)U_k - r^{n-k+1}g(k+1) + r^{n-k}U_{k+1} + qf(n-k)U_{k+1}] = p^n.$

İspat. U matrisi Sonuç 3.2.5'deki ve V matrisi Sonuç 3.2.10'daki matrisler olmak üzere

$$U + V = \begin{pmatrix} p & r & q \\ 0 & 0 & -q \\ 1 & 0 & r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -r & -q \\ 0 & p & q \\ -1 & 0 & p-r \end{pmatrix} = pI$$

olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $(U + V)^n = p^n I$ yazılabilir. Ayrıca U matrisi ve V matrisi değişmeli matrislerdir. Bu sebeple her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} U^{n-k} V^k = p^n I \quad (3.25)$$

eşitliği doğrudur. Şimdi $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} U^{n-k} V^k$ matrisini bulalım. İlk olarak

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} U^{n-k} V^k = A = (a_{ij})$$

olsun. Sonuç 3.2.5 ve Sonuç 3.2.10 kullanılarak U^{n-k} ve V^k matrisleri sırasıyla

$$U^{n-k} = \begin{pmatrix} U_{n-k+1} & rU_{n-k} & qU_{n-k} \\ -qf(n-k) & -qrf(n-k-1) & -q[r^{n-k-1} + qf(n-k-1)] \\ f(n-k+1) & rf(n-k) & r^{n-k} + qf(n-k) \end{pmatrix}$$

ve

$$V^k = \begin{pmatrix} qU_{k-1} & -rU_k & -qU_k \\ -qg(k) & -qg(k) + U_{k+1} & qg(k+1) \\ rg(k) - U_k & rg(k) & -rg(k+1) + U_{k+1} \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Bu ifadeler $A = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} U^{n-k} V^k$ ifadesinde yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa A matrisinin elemanları

$$a_{11} = q \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [U_{n-k+1}U_{k-1} - U_{n-k}U_k]$$

$$a_{12} = r \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [U_{n-k}U_{k+1} - U_{n-k+1}U_k]$$

$$a_{21} = -q \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [qf(n-k)U_{k-1} + r^{n-k}g(k) - r^{n-k-1}U_k - qf(n-k-1)U_k]$$

$$a_{22} = qr \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [f(n-k)U_k - f(n-k-1)U_{k+1} - r^{n-k-1}g(k)]$$

$$a_{23} = q \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [qf(n-k)U_k + r^{n-k}g(k+1) - r^{n-k-1}U_{k+1} - qf(n-k-1)U_{k+1}]$$

$$a_{31} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [qf(n-k+1)U_{k-1} + r^{n-k+1}g(k) - r^{n-k}U_k - qf(n-k)U_k]$$

$$a_{32} = -r \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [f(n-k+1)U_k - f(n-k)U_{k+1} - r^{n-k}g(k)]$$

$$a_{33} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [-qf(n-k+1)U_k - r^{n-k+1}g(k+1) + r^{n-k}U_{k+1} + qf(n-k)U_{k+1}]$$

olarak elde edilir. Şimdi (3.25) eşitliği kullanılırsa $A = p^n I$ eşitliğinden istenilen eşitliklere ulaşılır ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.2.12. $2p^2 - q \neq 0$ olmak üzere $K = \frac{1}{q} \begin{pmatrix} pq & pq & q^2 \\ -2pq & -2pq & -q^2 \\ 2p^2 + q & 2p^2 & pq \end{pmatrix}$ olsun. Bu

durumda $K^n = \frac{1}{q} \begin{pmatrix} qU_{n+1} & pqU_n & q^2U_n \\ q(-p)^n - qU_{n+1} & q(-p)^n - pqU_n & -q^2U_n \\ (-p)^{n+1} + U_{n+2} & (-p)^{n+1} + pU_{n+1} & qU_{n+1} \end{pmatrix}$ eşitliği

her $n \in \mathbb{Z}$ için doğrudur.

İspat. Öncelikle K matrisi $K^3 + (-p^2 - q)K - qpI = \mathbf{0}$ eşitliğini sağlar ve $r = -p$ olmak üzere $K^3 - (r + p)K^2 + (rp - q)K + qrI = \mathbf{0}$ olur. Dolayısıyla K matrisi Teorem 3.2.2'nin koşullarını sağladığından her $n \in \mathbb{Z}$ için Teorem 3.2.2'den

$$\begin{aligned} K^n &= \frac{r^n - rU_n - qU_{n-1}}{r^2 - rp - q} (K^2 - pK - qI) + U_n K + qU_{n-1}I \\ &= \frac{(-p)^n + pU_n - qU_{n-1}}{2p^2 - q} (K^2 - pK - qI) + U_n K + qU_{n-1}I \end{aligned}$$

olduğu görülür. Ayrıca

$$K^2 - pK - qI = \frac{1}{q} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2p^2q - q^2 & 2p^2q - q^2 & 0 \\ -2p^3 + pq & -2p^3 + pq & 0 \end{pmatrix}$$

olduğu da kolaylıkla bulunur. Böylece

$$K^n = \frac{(-p)^n + pU_n - qU_{n-1}}{2p^2 - q} \frac{1}{q} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2p^2q - q^2 & 2p^2q - q^2 & 0 \\ -2p^3 + pq & -2p^3 + pq & 0 \end{pmatrix} + U_n K + qU_{n-1}I$$

olur ve bu eşitlikte gerekli işlemler yapılırsa

$$K^n = \frac{1}{q} \begin{pmatrix} qU_{n+1} & pqU_n & q^2U_n \\ q(-p)^n - qU_{n+1} & q(-p)^n - pqU_n & -q^2U_n \\ (-p)^{n+1} + U_{n+2} & (-p)^{n+1} + pU_{n+1} & qU_{n+1} \end{pmatrix}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

$r = 0$ olması durumunda Teorem 3.2.2 sadece n pozitif tam sayıları için geçerlidir. Bu durum aşağıdaki sonuçta verilmektedir.

Sonuç 3.2.13. X matrisi $X^3 - pX^2 - qX = \mathbf{0}$ koşulunu sağlayan bir matris olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $X^n = U_{n-1}X^2 + qU_{n-2}X$ eşitliği doğrudur.

İspat. $X^3 - pX^2 - qX = \mathbf{0}$ koşulunun, $X^3 - (r+p)X^2 + (rp-q)X + qrI = \mathbf{0}$ koşulundaki $r = 0$ özel durumu olduğu açıktır. Bu sebeple Teorem 3.2.2'nin koşulu sağlanır. Burada her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} X^n &= \frac{r^n - rU_n - qU_{n-1}}{r^2 - rp - q} (X^2 - pX - qI) + U_nX + qU_{n-1}I \\ &= U_{n-1}(X^2 - pX - qI) + U_nX + qU_{n-1}I \\ &= U_{n-1}X^2 + qU_{n-2}X \end{aligned}$$

olur ve ispat tamamlanır.

Sonuç 3.2.13'ün bir sonucu aşağıdaki şekildedir.

Sonuç 3.2.14. $A = \frac{1}{q} \begin{pmatrix} pq & pq & q^2 \\ -pq & -pq & -q^2 \\ p^2 + q & p^2 & pq \end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$A^n = \frac{1}{q} \begin{pmatrix} qU_{n+1} & pqU_n & q^2U_n \\ -qU_{n+1} & -pqU_n & -q^2U_n \\ U_{n+2} & pU_{n+1} & qU_{n+1} \end{pmatrix}$$

eşitliği doğrudur.

İspat.

$$A^2 = \frac{1}{q^2} \begin{pmatrix} p^2q^2 + q^3 & p^2q^2 & pq^3 \\ -p^2q^2 - q^3 & -p^2q^2 & -pq^3 \\ p^3q + 2pq^2 & p^3q + pq^2 & p^2q^2 + q^3 \end{pmatrix}$$

ve

$$A^3 = \frac{1}{q^3} \begin{pmatrix} p^3q^3 + 2pq^4 & p^3q^3 + pq^4 & p^2q^4 + q^5 \\ -p^3q^3 - 2pq^4 & -p^3q^3 - pq^4 & -p^2q^4 - q^5 \\ 3p^2q^3 + p^4q^2 + q^4 & 2p^2q^3 + p^4q^2 & 2pq^4 + p^3q^3 \end{pmatrix}$$

olur. Bu eşitlikler kullanılırsa $A^3 - pA^2 - qA = \mathbf{0}$ eşitliğinin sağlandığı görülür. Yani Sonuç 3.2.13'ün koşulu sağlanır. Buradan, her $n \in \mathbb{N}$ için $A^n = U_{n-1}A^2 + qU_{n-2}A$ elde edilir. Bu eşitlik kullanılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{U_{n-1}}{q^2} \begin{pmatrix} p^2q^2 + q^3 & p^2q^2 & pq^3 \\ -p^2q^2 - q^3 & -p^2q^2 & -pq^3 \\ p^3q + 2pq^2 & p^3q + pq^2 & p^2q^2 + q^3 \end{pmatrix} + U_{n-2} \begin{pmatrix} pq & pq & q^2 \\ -pq & -pq & -q^2 \\ p^2 + q & p^2 & pq \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{q} \begin{pmatrix} qU_{n+1} & pqU_n & q^2U_n \\ -qU_{n+1} & -pqU_n & -q^2U_n \\ U_{n+2} & pU_{n+1} & qU_{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Şimdi elde edilen özel matrisleri kullanarak genelleştirilmiş Fibonacci dizisine ait toplamsal bazı özelliklerin elde edilmesini gösteren sonucu gösterelim. Elde edilen eşitliklere (2.4) yardımıyla da ulaşılabilir olmasına rağmen burada alternatif bir ispat verilmiş olacaktır.

Sonuç 3.2.15. $2p^2 - q \neq 0$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki özellikler doğrudur.

a) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [U_{n-k-1}U_{k+1} + qU_{n-k}U_k] = 2^n U_{n+1},$

b) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [U_{k+1}U_{n-k} + qU_kU_{n-k-1}] = 2^n U_n,$

c) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [U_{n-k+1}U_k + qU_{n-k}U_{k-1}] = 2^n U_n.$

İspat. $S = \begin{pmatrix} p & p & q \\ 0 & 0 & -q \\ 1 & 0 & p \end{pmatrix}$ olsun. S matrisi Sonuç 3.2.5'deki U matrisinin $r = p$ için özel

halidir. Ayrıca $f(n) = \frac{r^n - rU_n - qU_{n-1}}{r^2 - rp - q}$ fonksiyonu $r = p$ için düzenlenerek $f_p(n)$ oluşturulursa

$$f_p(n) = \frac{p^n - pU_n - qU_{n-1}}{p^2 - pp - q} = -\frac{p^n - U_{n+1}}{q}$$

olduğu görülür ve Sonuç 3.2.5 kullanılırsa her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$S^n = \frac{1}{q} \begin{pmatrix} qU_{n+1} & pqU_n & q^2U_n \\ p^nq - qU_{n+1} & p^nq - pqU_n & -q^2U_n \\ -p^{n+1} + U_{n+2} & -p^{n+1} + pU_{n+1} & qU_{n+1} \end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca, K ve A matrisleri sırasıyla Sonuç 3.2.12'deki ve Sonuç 3.2.14'deki matrisler olmak üzere $K + S = 2A$ eşitliği sağlanır. Bunun yanında K ve S matrisleri değişmelidir. Dolayısıyla Binom teoremi kullanılırsa her $n \in \mathbb{N}$ için

$$(K + S)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} K^{n-k} S^k = 2^n A^n$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca A , K ve S matrisleri için

$$A^n = \frac{1}{q} \begin{pmatrix} qU_{n+1} & pqU_n & q^2U_n \\ -qU_{n+1} & -pqU_n & -q^2U_n \\ U_{n+2} & pU_{n+1} & qU_{n+1} \end{pmatrix},$$

$$K^{n-k} = \frac{1}{q} \begin{pmatrix} qU_{n-k+1} & pqU_{n-k} & q^2U_{n-k} \\ q(-p)^{n-k} - qU_{n-k+1} & q(-p)^{n-k} - pqU_{n-k} & -q^2U_{n-k} \\ (-p)^{n-k+1} + U_{n-k+2} & (-p)^{n-k+1} + pU_{n-k+1} & qU_{n-k+1} \end{pmatrix}$$

ve

$$S^k = \frac{1}{q} \begin{pmatrix} qU_{k+1} & pqU_k & q^2U_k \\ p^kq - qU_{k+1} & p^kq - pqU_k & -q^2U_k \\ -p^{k+1} + U_{k+2} & -p^{k+1} + pU_{k+1} & qU_{k+1} \end{pmatrix}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} K^{n-k} S^k = 2^n A^n$ ifadesinde yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa matris eşitliğinden, karşılıklı elemanlar eşit olacağı için, birinci satırların elemanlarının eşitliğinden sırasıyla istenilen sonuçlar elde edilir ve ispat tamamlanır.

Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi ile matrisler arasında elde edilen ilişkilerden yola çıkılarak farklı bir uygulama daha yapacağız. Şimdi uygun ve farklı (p, q) ikilileri ile kurulmuş iki genelleştirilmiş Fibonacci dizisi arasında bazı ilişkiler elde edilecektir.

Sabit p ve q sayıları ile oluşturulan genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{U_n(p, q)\}$ olsun. Bu diziyi kısaca $\{U_n\}$ ile gösterelim. r reel sayısı $r^2 - rp - q \neq 0$ ve $r \neq p$ koşullarını sağlayan sıfırdan farklı bir reel sayı olmak üzere $p_1 = -q + r(p - r)$ ve $q_1 = qr(p - r)$ sayıları ile $\{A_n\} = \{U_n(p_1, q_1)\}$ dizisini kuralım. Bu durumda $\{U_n\}$ ve $\{A_n\}$ dizisinin terimleri arasındaki ilişkiler aşağıdaki sonuçta verilmektedir.

Sonuç 3.2.16. $r \neq 0$, $r^2 - rp - q \neq 0$ ve $r \neq p$ olmak üzere her $n \in \mathbb{Z}$ için aşağıdaki eşitlikler doğrudur.

a) $A_n - r(p - r)A_{n-1} = U_n^2 - U_{n+1}U_{n-1},$

$$\mathbf{b)} \ A_n = q[f(n-1)U_n - f(n)U_{n-1}] - r^{n-1}[rg(n) - U_n],$$

$$\mathbf{c)} \ (p-r)A_{n-1} = f(n)U_n - f(n-1)U_{n+1} - r^{n-1}g(n),$$

$$\mathbf{d)} \ (p-r)A_n - r(p-r)A_{n-1} = -q[f(n)U_n - f(n-1)U_{n+1}] \\ - r^{n-1}[rg(n+1) - U_{n+1}],$$

$$\mathbf{e)} \ -rA_n = q[f(n+1)U_{n-1} - f(n)U_n] + r^n[rg(n) - U_n],$$

$$\mathbf{f)} \ A_n = f(n+1)U_n - f(n)U_{n+1} - r^n g(n),$$

$$\mathbf{g)} \ [-q + r(p-r)]A_n + [qr(p-r)]A_{n-1} = q[f(n)U_{n+1} - f(n+1)U_n] \\ + r^n[U_{n+1} - rg(n+1)].$$

İspat. U ve V matrisleri sırasıyla Sonuç 3.2.5 ve Sonuç 3.2.10'daki matrisler olmak üzere B matrisini $B = UV$ şeklinde tanımlayalım. U ve V değişmeli matrisler olduğundan dolayı her $n \in \mathbb{Z}$ için $B^n = U^n V^n$ olur. Bu eşitlikte Sonuç 3.2.5 ve Sonuç 3.2.10 yardımıyla U^n ve V^n matrisleri elde edildikten sonra, Yardımcı Teorem 3.2.1 ve Yardımcı Teorem 3.2.9 kullanılarak B^n matrisini elde edebiliriz. B^n matrisini

$$B^n = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

şeklinde gösterelim. Bu durumda B^n matrisinin elemanlarının

$$\begin{aligned} b_{11} &= qU_{n+1}U_{n-1} - qU_n^2 \\ b_{12} &= 0 \\ b_{13} &= 0 \\ b_{21} &= q^2[f(n-1)U_n - f(n)U_{n-1}] - qr^{n-1}[rg(n) - U_n] \\ b_{22} &= qr[f(n)U_n - f(n-1)U_{n+1} - r^{n-1}g(n)] \\ b_{23} &= q^2[f(n)U_n - f(n-1)U_{n+1}] + qr^{n-1}[rg(n+1) - U_{n+1}] \\ b_{31} &= q[f(n+1)U_{n-1} - f(n)U_n] + r^n[rg(n) - U_n] \\ b_{32} &= r[-f(n+1)U_n + f(n)U_{n+1} + r^n g(n)] \\ b_{33} &= q[f(n)U_{n+1} - f(n+1)U_n] + r^n[U_{n+1} - rg(n+1)] \end{aligned} \quad (3.26)$$

şeklinde olduğu görülür. Yine B matrisi

$$B = UV = \begin{pmatrix} -q & 0 & 0 \\ q & 0 & -q(p-r) \\ -r & -r & -q + r(p-r) \end{pmatrix}$$

olur ve bu matris için $B^2 - [-q + r(p - r)]B - [qr(p - r)]I = \mathbf{0}$ veya denk olarak $B^2 - p_1B - q_1I = \mathbf{0}$ olduğu kolaylıkla elde edilir. Yani bu matris Sonuç 3.2.4'ün de koşulunu sağlar ve Sonuç 3.2.4 kullanılırsa her $n \in \mathbb{Z}$ için $B^n = A_nB + q_1A_{n-1}I$ eşitliği yazılır. Bu eşitlikte gerekli işlemler yapılırsa B^n matrisinin elemanları

$$b_{11} = -qA_n + [qr(p - r)]A_{n-1}$$

$$b_{12} = 0$$

$$b_{13} = 0$$

$$b_{21} = qA_n$$

$$b_{22} = [qr(p - r)]A_{n-1}$$

$$b_{23} = -q(p - r)A_n + [qr(p - r)]A_{n-1}$$

$$b_{31} = -rA_n$$

$$b_{32} = -rA_n$$

$$b_{33} = [-q + r(p - r)]A_n + [qr(p - r)]A_{n-1}$$

olarak bulunur ve bu eşitlikler ile beraber (3.26) eşitlikleri kullanılırsa iki matrisin eşitliğinden istenilen eşitlikler elde edilir ve ispat tamamlanır.

3.3. Genelleştirilmiş Fibonacci ve Tribonacci Dizileri ile İlgili Özdeşlikler

Teorem 3.2.2, üçüncü dereceden bir denklemi sağlayan matrisler ile ikinci dereceden yineleme bağıntısına sahip olan $\{U_n\}$ dizisi arasında ilişki kurmaktadır. Bu kısımda, önce Teorem 3.2.2'de kullanılan $X^3 - (r + p)X^2 + (rp - q)X + qrI = \mathbf{0}$ koşulunu sağlayan matrisler ile ilişkili özel bir genelleştirilmiş Tribonacci dizisi tanımlanacaktır. Sonra, bu özel dizi ile genelleştirilmiş Fibonacci dizisi arasındaki bazı ilişkiler matris metotları yardımıyla ortaya koyulacaktır.

İlk olarak $\{W_n\}$ genelleştirilmiş Tribonacci dizisinin özel bir hali olan $\{T_n(p, q, r)\}$ dizisini tanımlayalım. r sıfırdan farklı ve $r^2 - pr - q \neq 0$ koşulunu sağlayan bir reel sayı olsun. $\{T_n(p, q, r)\}$ dizisi, $T_0 = 0$, $T_1 = 1$ ve $T_2 = r + p$ başlangıç koşulları ve $n > 2$ tamsayısı için

$$T_n = (r + p)T_{n-1} - (rp - q)T_{n-2} - qrT_{n-3}$$

yineleme bağıntısına sahip olan dizi olsun. Sadelik açısından bu diziyi kısaca $\{T_n\}$ ile göstereceğiz.

$\{T_n\}$ dizisinin yineleme bağıntısı tüm n tamsayıları için kullanılabilecek şekilde düzenlenebilir ve böylece negatif indisli terimleri de elde edebiliriz. Örneğin, ilk olarak $n = 2$ için bu eşitlik kullanılırsa

$$T_2 = (r + p)T_1 - (rp - q)T_0 - qrT_{-1}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten $T_{-1} = 0$ olarak bulunur. Benzer şekilde $n = 1$ için

$$T_1 = (r + p)T_0 - (rp - q)T_{-1} - qrT_{-2}$$

olur ve $T_{-2} = -\frac{1}{qr}$ elde edilir. Burada, yine $n = 0$ için,

$$T_0 = (r + p)T_{-1} - (rp - q)T_{-2} - qrT_{-3}$$

eşitliğinden, $T_{-3} = \frac{rp-q}{(qr)^2}$ elde edilir. Bu şekilde devam edilerek, negatif indisli terimleri elde etmek için $T_n = (r + p)T_{n-1} - (rp - q)T_{n-2} - qrT_{n-3}$ bağıntısında n yerine $-n$ yazılırsa

$$T_{-n} = (r + p)T_{-n-1} - (rp - q)T_{-n-2} - qrT_{-n-3}$$

eşitliği elde edilir. Böylece $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$T_{-n-3} = \frac{-T_{-n} + (r + p)T_{-n-1} - (rp - q)T_{-n-2}}{qr}$$

bağıntısı yardımıyla negatif indisli terimler elde edilebilir.

$\{T_n\}$ dizisinin $r = -p$ için özel hali olan diziyi $\{P_n(p, q)\}$ ile gösterelim. Bu durumda $\{P_n(p, q)\}$ dizisi, $p^2 + 4q > 0$ ve $2p^2 - q \neq 0$ için $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ ve $P_2 = 0$ başlangıç koşulları ve $n > 2$ tamsayısı için $P_n = (p^2 + q)P_{n-2} + pqP_{n-3}$ yineleme bağıntısına sahip olan dizi olacaktır. Bu dizinin yineleme bağıntısında görüleceği üzere, Padovan dizisinde olduğu gibi dizinin n . terimi, $(n - 2)$. ve $(n - 3)$. terimleri yardımıyla bulunmaktadır. Yine sadelik açısından bu diziyi $\{P_n\}$ olarak göstereceğiz. Ayrıca $\{P_n\}$ dizisi $\{T_n\}$ dizisinin özel bir hali olduğundan dolayı dizinin negatif indisli terimleri $\{T_n\}$ dizisinde olduğu gibi elde edilebilir.

Şimdi $\{T_n\}$ dizisi ile matrisler arasındaki ilişkiyi ortaya koyan sonucu verelim.

Teorem 3.3.1. $X^3 - (r + p)X^2 + (rp - q)X + qrI = \mathbf{0}$ koşulunu sağlayan X matrisi için $X^n = T_{n-1}X^2 + [T_n - (r + p)T_{n-1}]X - qrT_{n-2}I$ eşitliği her $n \in \mathbb{Z}$ için doğrudur. Burada r sıfırdan farklı ve $r^2 - pr - q \neq 0$ koşulunu sağlayan reel sayıdır.

İspat. Öncelikle $X^3 - (r + p)X^2 + (rp - q)X + qrI = \mathbf{0}$ koşulunu sağlayan X matrisi için $\left(\frac{-1}{qr}\right)X[X^2 - (r + p)X + (rp - q)I] = I$ eşitliği elde edilir ve bu eşitlikten X matrisinin tersinir olduğu ve $X^{-1} = \left(\frac{-1}{qr}\right)[X^2 - (r + p)X + (rp - q)I]$ olduğu görülür. Bu sebeple X matrisinin tüm tamsayı kuvvetlerinden söz edilebilir. Eşitliğin tüm n tamsayıları için geçerli olacağını göstereceğiz. Öncelikle, $n = 0$ için T_0, T_{-1} ve T_{-2} değerleri kullanılarak gerekli işlemler yapılırsa

$$T_{0-1}X^2 + [T_0 - (r + p)T_{0-1}]X - qrT_{0-2}I = I = X^0$$

olur ve iddia $n = 0$ için doğrudur.

Şimdi pozitif tamsayılar için eşitliğin doğruluğunu n üzerinden tümevarımla gösterelim.

$$T_0X^2 + [T_1 - (r + p)T_0]X - qrT_{-1}I = 0X^2 + [1 - (r + p)0]X - qr0I = X^1$$

olur ve iddia $n = 1$ için doğrudur. Şimdi herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için eşitliğin doğru olduğunu kabul edelim ve $n + 1$ için de doğru olduğunu gösterelim. $\{T_n\}$ dizisinin yineleme bağıntısı ve $X^3 - (r + p)X^2 + (rp - q)X + qrI = \mathbf{0}$ eşitliği kullanılarak işlem yapılırsa

$$\begin{aligned} X^{n+1} &= X[T_{n-1}X^2 + [T_n - (r + p)T_{n-1}]X - qrT_{n-2}I] \\ &= T_{n-1}X^3 + [T_n - (r + p)T_{n-1}]X^2 - qrT_{n-2}X \\ &= T_{n-1}[(r + p)X^2 - (rp - q)X - qrI] + [T_n - (r + p)T_{n-1}]X^2 - qrT_{n-2}X \\ &= T_nX^2 - [(rp - q)T_{n-1} + qrT_{n-2}]X - qrT_{n-1}I \\ &= T_nX^2 + [T_{n+1} - (r + p)T_n]X - qrT_{n-1}I \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, iddia $n + 1$ için de doğrudur. Böylece, n pozitif tamsayıları için ispat tamamlanır.

Şimdi iddianın negatif tamsayılar için de doğru olduğunu gösterelim. n pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$X^{-n} = T_{-n-1}X^2 + [T_{-n} - (r + p)T_{-n-1}]X - qrT_{-n-2}I$$

eşitliğinin doğru olduğunu göstermeliyiz. İspatı yine tümevarımla yapalım. $n = 1$ için

$$T_{-n-1}X^2 + [T_{-n} - (r + p)T_{-n-1}]X - qrT_{-n-2}I$$

matrisini ele alalım: Burada, $T_{-1} = 0$, $T_{-2} = -\frac{1}{qr}$ ve $T_{-3} = \frac{rp-q}{(qr)^2}$ eşitlikleri ile beraber

$X^{-1} = \left(\frac{-1}{qr}\right)[X^2 - (r+p)X + (rp-q)I]$ olduğu dikkate alınır

$$T_{-1-1}X^2 + [T_{-1} - (r+p)T_{-1-1}]X - qrT_{-1-2}I = X^{-1}$$

elde edilir. Böylece $n = 1$ için iddia doğrudur. Şimdi n doğal sayısı için iddianın doğru olduğunu kabul ederek $n + 1$ için de doğru olduğunu gösterelim. Burada Y matrisi $Y = T_{-n-1}X + [T_{-n} - (r+p)T_{-n-1}]I$ olsun. Bu durumda

$$X^{-n} = T_{-n-1}X^2 + [T_{-n} - (r+p)T_{-n-1}]X - qrT_{-n-2}I = YX - qrT_{-n-2}I$$

olur. Buradan, $n + 1$ için iddianın doğruluğunu gösterelim. $X^{-n-1} = X^{-n}X^{-1}$ olduğundan

$$\begin{aligned} X^{-n-1} &= [YX - qrT_{-n-2}I]X^{-1} \\ &= YXX^{-1} - qrT_{-n-2}X^{-1} \\ &= Y - qrT_{-n-2}X^{-1} \\ &= T_{-n-1}X + [T_{-n} - (r+p)T_{-n-1}]I \\ &\quad - T_{-n-2}qr\left(-\frac{1}{qr}\right)[X^2 - (r+p)X + (rp-q)I] \\ &= T_{-n-1}X + [T_{-n} - (r+p)T_{-n-1}]I + T_{-n-2}[X^2 - (r+p)X + (rp-q)I] \\ &= T_{-n-2}X^2 + [T_{-n-1} - (r+p)T_{-n-2}]X \\ &\quad + [T_{-n} - (r+p)T_{-n-1} + (rp-q)T_{-n-2}]I \\ &= T_{-n-2}X^2 + [T_{-n-1} - (r+p)T_{-n-2}]X + [-qrT_{-n-3}]I \\ &= T_{-n-2}X^2 + [T_{-n-1} - (r+p)T_{-n-2}]X - qrT_{-n-3}I \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece iddia $n + 1$ için de doğru olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Aşağıdaki sonuç $\{T_n\}$ dizisi ile $\{U_n\}$ dizisi arasındaki bir ilişkiyi göstermektedir

Sonuç 3.3.2. r sıfırdan farklı ve $r^2 - pr - q \neq 0$ koşulunu sağlayan bir reel sayı olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{Z}$ için aşağıdaki özellikler doğrudur.

a) $T_n - rT_{n-1} = U_n,$

b) $T_n = f(n+1) = \frac{r^{n+1} - rU_{n+1} - qU_n}{r^2 - rp - q},$

c) $T_{n+1} - pT_n - qT_{n-1} = r^n.$

İspat. Sonuç 3.2.5'deki $U = \begin{pmatrix} p & r & q \\ 0 & 0 & -q \\ 1 & 0 & r \end{pmatrix}$ matrisini ele alalım. Öncelikle, bu matrisin

$U^3 - (r+p)U^2 + (rp-q)U + qrI = \mathbf{0}$ koşulunu sağladığını biliyoruz. Burada, Teorem 3.3.1 kullanılırsa $U^n = T_{n-1}U^2 + [T_n - (r+p)T_{n-1}]U - qrT_{n-2}I$ eşitliği her $n \in \mathbb{Z}$ için doğrudur. Bu eşitlikte $\{T_n\}$ dizisinin tanımı kullanılarak gerekli işlemler yapılırsa

$$U^n = \begin{pmatrix} T_{n+1} - rT_n & rT_n - r^2T_{n-1} & qT_n - qrT_{n-1} \\ -qT_{n-1} & -qrT_{n-2} & -qT_n + qpT_{n-1} \\ T_n & rT_{n-1} & T_{n+1} - pT_n \end{pmatrix}$$

olduğu kolaylıkla görülür. Ayrıca Sonuç 3.2.5'e göre her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$U^n = \begin{pmatrix} U_{n+1} & rU_n & qU_n \\ -qf(n) & -qrf(n-1) & -q[r^{n-1} + qf(n-1)] \\ f(n+1) & rf(n) & r^n + qf(n) \end{pmatrix}$$

olduğunu biliyoruz. Buradan iki matrisin eşitliğinden birinci satır ve ikinci sütun konumundaki karşılıklı elemanların eşitliğinden a) şıkkının doğru olduğu görülür. Yine, üçüncü satır ve birinci sütun konumundaki karşılıklı elemanların eşitliğinden b) şıkkının doğru olduğu görülür. Üçüncü satır ve üçüncü sütun konumundaki karşılıklı elemanların eşitliğinden ise $T_{n+1} - pT_n = r^n + qf(n)$ eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte b) şıkkı kullanılırsa $T_{n+1} - pT_n - qT_{n-1} = r^n$ eşitliği elde edilir ve c) şıkkındaki eşitliğinin doğru olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi $\{T_n\}$ ve $\{U_n\}$ dizileri arasındaki bazı ilave eşitlikler üzerinde durulacaktır.

Sonuç 3.3.3. r sıfırdan farklı ve $r^2 - pr - q \neq 0$ koşulunu sağlayan bir reel sayı olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki eşitlikler doğrudur.

a) $T_n = \sum_{k=1}^n r^{n-k} U_k,$

b) $\frac{r^{n+1} - rU_{n+1} - qU_n}{r^2 - rp - q} = \sum_{k=1}^n r^{n-k} U_k.$

İspat. Sonuç 3.3.2 a) şıkkı dikkate alınır

$$\begin{aligned} T_n - rT_{n-1} &= U_n \\ rT_{n-1} - r^2T_{n-2} &= rU_{n-1} \\ r^2T_{n-2} - r^3T_{n-3} &= r^2U_{n-2} \\ &\vdots \\ r^{n-1}T_1 - r^nT_0 &= r^{n-1}U_1 \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa $T_n = \sum_{k=1}^n r^{n-k} U_k$ olur ve a) şıkkının ispatı tamamlanmış olur. a) şıkkı yardımıyla $T_{n+1} = U_{n+1} + \sum_{k=1}^n r^{n+1-k} U_k$ ve $T_{n-1} = -r^{-1}U_n + \sum_{k=1}^n r^{n-1-k} U_k$ eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler ile birlikte Sonuç 3.3.2 c) şıkkı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
r^n &= T_{n+1} - pT_n - qT_{n-1} \\
&= U_{n+1} + \sum_{k=1}^n r^{n+1-k} U_k - p \sum_{k=1}^n r^{n-k} U_k - q \left[-r^{-1}U_n + \sum_{k=1}^n r^{n-1-k} U_k \right] \\
&= \left[r \sum_{k=1}^n r^{n-k} U_k - p \sum_{k=1}^n r^{n-k} U_k - qr^{-1} \sum_{k=1}^n r^{n-k} U_k \right] + U_{n+1} + qr^{-1}U_n \\
&= \left[\left(\frac{r^2 - rp - q}{r} \right) \sum_{k=1}^n r^{n-k} U_k \right] + U_{n+1} + qr^{-1}U_n
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$r^n = \left[\left(\frac{r^2 - rp - q}{r} \right) \sum_{k=1}^n r^{n-k} U_k \right] + U_{n+1} + qr^{-1}U_n$$

eşitliği elde edilmiş olur. Bu eşitliğin her iki tarafı r ile çarpılır ve gerekli işlemler yapılırsa b) şıkkı elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.3.3'deki b) şıkkı [30] çalışmasında da verilmiş ve bu sonuç kullanılarak farklı özellikler elde edilmiştir. Burada ise bu özelliğin farklı bir ispatı verilmiştir.

Sonuç 3.3.4. $2p^2 - q \neq 0$ olmak üzere $X^3 - (p^2 + q)X - qpl = \mathbf{0}$ koşulunu sağlayan X matrisi için $X^n = P_{n-1}X^2 + P_nX + qpP_{n-2}I$ eşitliği her $n \in \mathbb{Z}$ için geçerlidir.

İspat. $X^3 - (p^2 + q)X - qpl = \mathbf{0}$ eşitliği, denk olarak

$$X^3 - (-p + p)X^2 + [(-p)p - q]X + q(-p)I = \mathbf{0}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan $r = -p$ için $X^3 - (r + p)X^2 + (rp - q)X + qrI = \mathbf{0}$ koşulu sağlanmış olur. Teorem 3.3.1 kullanılırsa her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$X^n = T_{n-1}X^2 + [T_n - (r + p)T_{n-1}]X - qrT_{n-2}I$$

eşitliği elde edilir. Burada $r = -p$ olduğu için $\{T_n\}$ dizisi $\{P_n\}$ dizisine dönüşür ve gerekli işlemler yapıldığında,

$$\begin{aligned}
X^n &= T_{n-1}X^2 + [T_n - (r+p)T_{n-1}]X - qrT_{n-2}I \\
&= T_{n-1}X^2 + [T_n - (-p+p)T_{n-1}]X - q(-p)T_{n-2}I \\
&= P_{n-1}X^2 + P_nX + qpP_{n-2}I
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi, Sonuç 3.3.4'ü kullanarak özel bir matris bağıntısı elde edeceğiz.

Sonuç 3.3.5. $2p^2 - q \neq 0$ olmak üzere $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ p^2 + q & 0 & 1 \\ pq & 0 & 0 \end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda her

$n \in \mathbb{Z}$ için $A^n = \begin{pmatrix} P_{n+1} & P_n & P_{n-1} \\ P_{n+2} & P_{n+1} & P_n \\ pqP_n & pqP_{n-1} & pqP_{n-2} \end{pmatrix}$ eşitliği doğrudur.

İspat. A matrisinin karakteristik denklemi $x^3 - (p^2 + q)x - pq = 0$ olduğundan, Cayley-Hamilton teoreminden $A^3 - (p^2 + q)A - pqI = \mathbf{0}$ eşitliği sağlanır. Sonuç 3.3.4 kullanılırsa her $n \in \mathbb{Z}$ için $A^n = P_{n-1}A^2 + P_nA + qpP_{n-2}I$ eşitliğinin doğruluğu görülür. Bu eşitlik kullanılırsa

$$\begin{aligned}
A^n &= P_{n-1} \begin{pmatrix} p^2 + q & 0 & 1 \\ pq & p^2 + q & 0 \\ 0 & pq & 0 \end{pmatrix} + P_n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ p^2 + q & 0 & 1 \\ pq & 0 & 0 \end{pmatrix} + qpP_{n-2}I \\
&= \begin{pmatrix} (p^2 + q)P_{n-1} + qpP_{n-2} & P_n & P_{n-1} \\ pqP_{n-1} + (p^2 + q)P_n & (p^2 + q)P_{n-1} + qpP_{n-2} & P_n \\ pqP_n & pqP_{n-1} & pqP_{n-2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Ayrıca $P_n = (p^2 + q)P_{n-2} + qpP_{n-3}$ eşitliği dikkate alınarak gerekli işlemler yapılırsa istenilen eşitlik elde edilir ve ispat tamamlanır.

Fibonacci- Q matrisi ve R matrisi kullanılarak elde edilen RQ^n matrisinin elemanlarının Lucas dizisi yardımıyla bulunabileceğini biliyoruz. Şimdi benzer şekilde iki matris kullanılarak elde edilebilecek bir matris eşitliğini göstereceğiz.

Sonuç 3.3.6. $2p^2 - q \neq 0$ olmak üzere, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ p^2 + q & 0 & 1 \\ pq & 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrisi ile beraber

$R = \begin{pmatrix} p & 1 & 0 \\ p^2 + q & p & 1 \\ pq & 0 & p \end{pmatrix}$ matrisi için $RA^n = \begin{pmatrix} U_{n+2} & U_{n+1} & U_n \\ U_{n+3} & U_{n+2} & U_{n+1} \\ pqU_{n+1} & pqU_n & pqU_{n-1} \end{pmatrix}$ eşitliği her

$n \in \mathbb{Z}$ için doğrudur.

İspat. Sonuç 3.3.2'den $n \in \mathbb{Z}$ için $T_n - rT_{n-1} = U_n$ olduğu görülür. Bu eşitlik özel olarak $r = -p$ için düzenlenirse $P_n + pP_{n-1} = U_n$ eşitliği elde edilir. Bu eşitlikle birlikte Sonuç 3.3.5 kullanılırsa

$$A^{n+1} + pA^n = \begin{pmatrix} U_{n+2} & U_{n+1} & U_n \\ U_{n+3} & U_{n+2} & U_{n+1} \\ pqU_{n+1} & pqU_n & pqU_{n-1} \end{pmatrix}$$

veya denk olarak

$$(A + pI)A^n = \begin{pmatrix} U_{n+2} & U_{n+1} & U_n \\ U_{n+3} & U_{n+2} & U_{n+1} \\ pqU_{n+1} & pqU_n & pqU_{n-1} \end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca $A + pI = R$ eşitliği kolaylıkla görülebilir. Buradan istenilen eşitlik elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Bu bölümde son bir uygulama olarak özel bir denklemin çözümlerinin $\{T_n\}$ dizisi yardımıyla elde edilebileceği gösterilecektir. Bu sonuca ulaşmadan önce ilk olarak bir yardımcı teorem verilecektir.

$\{T_n\}$ dizisinin tanımına bakıldığında, dizinin elemanlarının $r + p$, $rp - q$ ve qr katsayılarına bağlı olduğu görülür. Burada farklı p, q ve r değerleri için bu katsayılar aynı olabilir. Örneğin, $(p, q, r) = (3, -2, 4)$ ve $(p, q, r) = (5, -4, 2)$ değerleri için her iki durumda da $r + p = 7$, $rp - q = 14$ ve $qr = -8$ olarak bulunur. Dolayısıyla $\{T_n(3, -2, 4)\}$ ve $\{T_n(5, -4, 2)\}$ dizilerinin elemanları aynıdır. Şimdi bu durumu genel olarak gösteren yardımcı teorem verilecektir.

Yardımcı Teorem 3.3.7. α ve β , $x^2 - px - q = 0$ denkleminin kökleri ve r sayısı $r^2 - pr - qr \neq 0$ koşulunu sağlayan sıfırdan farklı bir reel sayı olmak üzere

$$\{T_n(p, q, r)\} = \{T_n(\alpha + r, -\alpha r, \beta)\} = \{T_n(\beta + r, -\beta r, \alpha)\}$$

eşitliği doğrudur.

İspat. Öncelikle $\alpha + \beta = p$ ve $\alpha\beta = -q$ eşitlikleri kolaylıkla görülür. $\alpha + r = p_1$, $-\alpha r = q_1$ ve $\beta = r_1$ olsun. Bu durumda $\{T_n(\alpha + r, -\alpha r, \beta)\} = \{T_n(p_1, q_1, r_1)\}$ diyebiliriz. Ayrıca $p_1 + r_1 = p + r$, $p_1 r_1 - q_1 = pr - q$ ve $q_1 r_1 = qr$ eşitlikleri kolaylıkla elde edilir. Bu eşitlikler yardımıyla

$$\{T_n(p, q, r)\} = \{T_n(\alpha + r, -\alpha r, \beta)\} \quad (3.27)$$

olduğu görülür. Yine benzer düşünce ile $\beta + r = p_2$, $-\beta r = q_2$ ve $\alpha = r_2$ olsun. $\{T_n(\beta + r, -\beta r, \alpha)\} = \{T_n(p_2, q_2, r_2)\}$ olur ve $p_2 + r_2 = p + r$, $p_2 r_2 - q_2 = pr - q$ ve $q_2 r_2 = qr$ eşitlikleri yine kolaylıkla elde edilir. Buradan

$$\{T_n(p, q, r)\} = \{T_n(\beta + r, -\beta r, \alpha)\} \quad (3.28)$$

olur. (3.27) ve (3.28) eşitliklerinden istenilen elde edilir ve ispat tamamlanır.

Şimdi son olarak $xy + x + y = 10^n - 1$ denklemini ele alalım. Bu denklemin tüm n tamsayıları için $\{T_n\}$ dizisi yardımıyla bir özel çözümünün elde edilebileceği aşağıdaki sonuçta görülmektedir.

Sonuç 3.3.8. $xy + x + y = 10^n - 1$ denkleminin her $n \in \mathbb{Z}$ için bir çözümü, $\{T_n(3, -2, 5)\}$ dizisinin i . elemanı T_i olmak üzere

$$(x, y) = (4T_n - 8T_{n-1}, T_n - 5T_{n-1})$$

şeklindedir.

İspat. Öncelikle,

$$10^n - 1 = 4 \left(\frac{5^n - 1}{5 - 1} \right) \left(\frac{2^n - 1}{2 - 1} \right) + 4 \left(\frac{5^n - 1}{5 - 1} \right) + \left(\frac{2^n - 1}{2 - 1} \right)$$

eşitliği vardır. Şimdi genelleştirilmiş Fibonacci dizisi için Binet formülü kullanılırsa

$$\frac{5^n - 1}{5 - 1} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = U_n(6, -5)$$

ve

$$\frac{2^n - 1}{2 - 1} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = U_n(3, -2)$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece

$$10^n - 1 = 4U_n(6, -5)U_n(3, -2) + 4U_n(6, -5) + U_n(3, -2) \quad (3.29)$$

elde edilir. Bunu yanında Sonuç 3.3.2 kullanılırsa $T_n - rT_{n-1} = U_n$ eşitliğinden

$$T_n(6, -5, 2) - 2T_{n-1}(6, -5, 2) = U_n(6, -5) \quad (3.30)$$

ve

$$T_n(3, -2, 5) - 5T_{n-1}(3, -2, 5) = U_n(3, -2) \quad (3.31)$$

eşitlikleri elde edilir. Yine, Yardımcı Teorem 3.3.7 dikkate alınarak gerekli işlemler yapılırsa $\{T_n(6, -5, 2)\} = \{T_n(3, -2, 5)\}$ eşitliği kolaylıkla elde edilir. Bu eşitlik ile birlikte (3.30) eşitliği kullanılırsa

$$T_n(3, -2, 5) - 2T_{n-1}(3, -2, 5) = U_n(6, -5) \quad (3.32)$$

olduğu kolaylıkla görülür. Son olarak (3.29) eşitliğinde, (3.31) ve (3.32) kullanılırsa

$$(x, y) = (4T_n(3, -2, 5) - 8T_{n-1}(3, -2, 5), T_n(3, -2, 5) - 5T_{n-1}(3, -2, 5))$$

ikilisi için $xy + x + y = 10^n - 1$ sağlandığı görülür ve ispat tamamlanır.



4. MATRİS METOTLARIYLA GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ VE LUCAS SAYILARI İÇİN BAZI ÖZDEŞLİKLER

Bu bölümde ilk olarak [31]'de yapılanlar anlatılacaktır. Daha sonra genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri yardımıyla uygun matrislerin n . dereceden köklerinin ve Moore-Penrose terslerinin bulunması için metotlar verilecektir.

Önceki bölümde, matris köşegenleştirilmesi yardımıyla $\{U_n\}$ dizisini, kendi karakteristik denkleminde daha yüksek dereceli bir denklem ile ilişkilendirilerek farklı sonuçlar elde edilmişti. Bu bölümde farklı bir yöntemle yine $\{U_n\}$ dizisi farklı denklemler ile ilişkilendirilerek matrislere dair bazı özel sonuçlar elde edilecektir.

Bölüm boyunca p ve q sayıları $p^2 + 4q > 0$ koşulunu sağlayan sıfırdan farklı reel sayılar olarak kabul edilecektir.

Şimdi ilk olarak [31]'de yapılanları inceleyelim.

4.1. Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas Dizilerinin Bazı Özellikleri

$X^2 - pX - qI = 0$ koşulunu sağlayan matrislerin kuvvetlerinin, $\{U_n\}$ dizisi yardımıyla elde edilmesini sağlayan teoremin [5]'de verilmiş olduğu önceki bölümde vurgulanarak, teoremin alternatif bir ispatı Sonuç 3.2.4'de verilmişti. Söz konusu sonuçtan hareketle ilave bazı sonuçlar [31]'de elde edilmiştir.

Teorem 4.1.1. $X^2 - pX - qI = 0$ koşulunu sağlayan X matrisleri için m, n ve s tamsayılar olmak üzere $(-q)^{s-n}U_{m-s}X^n + U_{s-n}X^m = U_{m-n}X^s$ eşitliği doğrudur [31].

İspat. Önce

$$(-q)^{s-n}U_{m-s}X^n + U_{s-n}X^m \quad (4.1)$$

matrisini inceleyelim. Sonuç 3.2.4'den her $m, n \in \mathbb{Z}$ için $X^m = U_mX + qU_{m-1}I$ ve $X^n = U_nX + qU_{n-1}I$ eşitlikleri doğrudur. Bu eşitlikler kullanılırsa (4.1) matrisi

$$[(-q)^{s-n}U_{m-s}U_n + U_{s-n}U_m]X + q[(-q)^{s-n}U_{m-s}U_{n-1} + U_{s-n}U_{m-1}]I \quad (4.2)$$

matrisine dönüşür. Ayrıca (2.1) eşitliği kullanılarak gerekli düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned}
(-q)^{s-n}U_{m-s}U_n + U_{s-n}U_m &= (-q)^{1-n}(-q)^{s-1}U_{m-s}U_n + U_{s-n}U_m \\
&= (-q)^{1-n}[U_{m-1}U_s - U_mU_{s-1}]U_n + U_{s-n}U_m \\
&= \frac{U_{m-1}U_sU_n + U_m[(-q)^{n-1}U_{s-n} - U_nU_{s-1}]}{(-q)^{n-1}} \\
&= \frac{U_{m-1}U_sU_n + U_m[U_{s-1}U_n - U_sU_{n-1} - U_nU_{s-1}]}{(-q)^{n-1}} \\
&= \frac{U_s[U_{m-1}U_n - U_mU_{n-1}]}{(-q)^{n-1}} \\
&= \frac{U_s[(-q)^{n-1}U_{m-n}]}{(-q)^{n-1}} \\
&= U_sU_{m-n}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte n yerine $n - 1$, m yerine $m - 1$ ve s yerine $s - 1$ yazılırsa

$$(-q)^{s-n}U_{m-s}U_{n-1} + U_{s-n}U_{m-1} = U_{s-1}U_{m-n}$$

olduğu görülür. Bu son eşitliklerle beraber (4.1) ve (4.2) matrislerinin aynı olduğu dikkate alınır

$$(-q)^{s-n}U_{m-s}X^n + U_{s-n}X^m = U_{m-n}(U_sX + qU_{s-1}I)$$

bulunur. Burada, yine Sonuç 3.2.4 kullanılırsa

$$(-q)^{s-n}U_{m-s}X^n + U_{s-n}X^m = U_{m-n}X^s$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.2. B matrisi $B^2 - pB - qI = \mathbf{0}$ koşulunu sağlasın. A matrisi, bir n tamsayısı için $A = B^n$ olacak şekilde bir matris ise $A^2 - V_nA + (-q)^nI = \mathbf{0}$ eşitliği doğrudur.

İspat. Herşeyden önce B matrisi için $q^{-1}B(B - pI) = I$ eşitliği sağlanacağından dolayı $B^{-1} = q^{-1}(B - pI)$ olur ve B matrisi tersinirdir. Böylece B matrisinin tüm tamsayı kuvvetlerinden bahsedilebilir. Önce $n = 0$ için eşitliğin doğru olduğunu gösterelim. Bu durumda $A = I$ olur. Ayrıca $V_0 = 2$ olduğu dikkate alınır

$$A^2 - V_0A + (-q)^0I = I^2 - 2I + I = 0$$

olur ve $n = 0$ için iddia doğrudur. Şimdi $n \neq 0$ olsun. B matrisi $B^2 - pB - qI = \mathbf{0}$ koşulunu sağladığı için Teorem 4.1.1'e göre, her $m, n, s \in \mathbb{Z}$ için

$$(-q)^{s-n}U_{m-s}B^n + U_{s-n}B^m = U_{m-n}B^s$$

sağlanır. Bu eşitlikte $m = 2n$ ve $s = 0$ yazılırsa

$$U_{2n}B^n - U_nB^{2n} = (-q)^n U_n I \quad (4.3)$$

elde edilir. Ayrıca (2.2) eşitliğinde $m = n$ yazılırsa $U_n V_n = U_{2n}$ olur. Bu eşitlik, (4.3) eşitliğinde kullanılır ve $B^n = A$ eşitliği dikkate alınır

$$U_n[A^2 - V_n A + (-q)^n I] = \mathbf{0}$$

olduğu görülür. Binet formülünden $U_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ olduğunu biliyoruz. Burada α ve β , $x^2 - px - q = 0$ denkleminin kökleridir. Yine $p^2 + 4q > 0$ olduğundan $n \neq 0$ olduğunda $U_n \neq 0$ olur ve $A^2 - V_n A + (-q)^n I = \mathbf{0}$ olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır.

Kısım 3.1’de matris köşegenleştirmesinden yararlanılarak $\{U_n\}$ dizisi karakteristik denkleminde farklı bir denklemle ilişkilendirilmişti. Şimdi, Teorem 4.1.1 ve Sonuç 4.1.2 kullanılarak $\{U_n\}$ dizisi $x^2 - V_n x + (-q)^n = 0$ denklemini herhangi bir n tamsayısı için sağlayan matrisler ile ilişkilendirilecektir.

B matrisi $B^2 - pB - qI = \mathbf{0}$ koşulunu sağlayan bir matris olmak üzere bir n tamsayısı için $A = B^n$ olsun. B matrisi için Teorem 4.1.1’e göre $a, b, c \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$(-q)^{c-b} U_{a-c} B^b + U_{c-b} B^a = U_{a-b} B^c$$

yazılabilir. Bu eşitlikte m herhangi bir tamsayı olmak üzere $a = mn$, $b = n$ ve $c = 0$ olarak seçilirse

$$(-q)^{-n} U_{mn} B^n + U_{-n} B^{mn} = U_{mn-n} B^0$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte $A = B^n$ olduğu dikkate alınıp düzenlemeler yapılırsa

$$U_n A^m = U_{mn} A - (-q)^n U_{mn-n} I$$

eşitliği elde edilir. Son eşitlik ve Sonuç 4.1.2 dikkate alınır $A^2 - V_n A + (-q)^n I = \mathbf{0}$ koşulunun sağlandığı, her $m \in \mathbb{Z}$ için $U_n A^m = U_{mn} A - (-q)^n U_{mn-n} I$ eşitliğinin doğru olduğu ve $B^n = A$ eşitliğinin sağlandığı görülür. Şimdi bu durumla ilgili olarak [31]’de verilen genel sonucu görelim.

Teorem 4.1.3. A matrisi bir n tamsayısı için $A^2 - V_n A + (-q)^n I = \mathbf{0}$ koşulunu sağlasın. Bu durumda her $m \in \mathbb{Z}$ için $U_n A^m = U_{mn} A - (-q)^n U_{mn-n} I$ eşitliği doğrudur.

İspat. $U_0 = 0$ olduğundan $n = 0$ için $U_n A^m = U_{mn} A - (-q)^n U_{mn-n} I$ eşitliği doğrudur. Şimdi n sıfırdan farklı bir tamsayı olmak üzere $A^2 - V_n A + (-q)^n I = 0$ eşitliği sağlansın. Buradan $I = A \left[\frac{1}{(-q)^n} (V_n I - A) \right]$ olur ve A matrisi tersinir bir matristir. Böylece A matrisinin tüm tamsayı kuvvetlerinden bahsedilebilir. İlk olarak $m = 0$ için eşitliğin sağlandığını görelim. $m = 0$ için

$$U_{mn} A - (-q)^n U_{mn-n} I = U_0 A - (-q)^n U_{-n} I = U_n I = U_n A^m$$

olur ve istenilen elde edilir. m pozitif tamsayıları için eşitliğin doğru olduğunu tümevarım ile göstereyim. $m = 1$ için eşitliğin doğru olduğu kolaylıkla görülür. Eşitlik $m \in \mathbb{N}$ için doğru olsun ve $m + 1$ için de doğru olduğunu göstereyim. Burada (2.2) eşitliğinden $U_{mn} V_n = U_{mn+n} + (-q)^n U_{mn-n}$ eşitliği elde edilir. Bu eşitlikle birlikte $A^2 - V_n A + (-q)^n I = 0$ eşitliği $A^{m+1} = A^m A$ eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} U_n A^{m+1} &= (U_{mn} A - (-q)^n U_{mn-n} I) A \\ &= U_{mn} A^2 - (-q)^n U_{mn-n} A \\ &= U_{mn} (V_n A - (-q)^n I) - (-q)^n U_{mn-n} A \\ &= (U_{mn} V_n - (-q)^n U_{mn-n}) A - (-q)^n U_{mn} I \\ &= U_{mn+n} A - (-q)^n U_{mn} I \\ &= U_{(m+1)n} A - (-q)^n U_{(m+1)n-n} I \end{aligned}$$

elde edilir ve eşitliğin $m + 1$ için de doğru olduğu görülür. Böylece, ispat m pozitif tamsayıları için tamamlanır.

Son olarak eşitliğin negatif tamsayılar için de doğru olduğunu göstereyim. Bunun için m pozitif tamsayı olmak üzere $U_n A^{-m} = U_{(-m)n} A - (-q)^n U_{(-m)n-n} I$ eşitliğinin doğru olduğunun gösterilmesi yeterlidir. Öncelikle $Y = -A + V_n I = (-q)^n A^{-1}$ matrisini tanımlayalım ve $Y^2 - V_n Y + (-q)^n I$ matrisini inceleyelim. Buradan

$$\begin{aligned} Y^2 &= A^2 - 2V_n A + V_n^2 I \\ &= (A^2 - V_n A + (-q)^n I) + V_n(-A + V_n I) - (-q)^n I \\ &= V_n Y - (-q)^n I \end{aligned}$$

olur. Görüldüğü üzere Y matrisi de A matrisinin sağladığı koşulu sağlar. İspatın ilk kısmından m pozitif tamsayıları için $U_n Y^m = U_{mn} Y - (-q)^n U_{mn-n} I$ olur. Bu son eşitlikte (2.2) eşitliği ile beraber $Y = -A + V_n I = (-q)^n A^{-1}$ eşitliği birlikte kullanılırsa

$$\begin{aligned}
U_n Y^m &= U_{mn} Y - (-q)^n U_{mn-n} I \\
U_n [(-q)^n A^{-1}]^m &= U_{mn} (-A + V_n I) - (-q)^n U_{mn-n} I \\
U_n (-q)^{mn} A^{-m} &= -U_{mn} A + (V_n U_{mn} - (-q)^n U_{mn-n}) I \\
U_n (-q)^{mn} A^{-m} &= -U_{mn} A + U_{mn+n} I \\
U_n A^{-m} &= U_{(-m)n} A - (-q)^n U_{(-m)n-n} I
\end{aligned}$$

elde edilir. İddia negatif tamsayılar için de doğrudur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.3 şu bakımından önem arz eder. Fibonacci dizisinin karakteristik denklemi $x^2 - x - 1 = 0$ şeklindedir ve bu denklemi sağlayan matrislerin tamsayı kuvvetlerinin Fibonacci dizisi yardımıyla elde edilebileceğini biliyoruz. Şimdi Teorem 4.1.3 kullanılarak $x^2 - x - 1 = 0$ denklemini sağlamayan uygun matrislerin de kuvvet bağıntısı Fibonacci dizisi yardımıyla elde edilebilir. Açıklamak amacıyla aşağıdaki örneği ele alalım.

Örnek 4.1.4. $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ matrisi için $B^m = \begin{pmatrix} -F_{2m-2} & F_{2m} \\ -F_{2m} & F_{2m+2} \end{pmatrix}$ eşitliği her $m \in \mathbb{Z}$ için geçerlidir. Gerçekten, B matrisinin karakteristik denklemi $x^2 - 3x + 1 = 0$ olduğundan Cayley-Hamilton teoremine göre $B^2 - 3B + I = \mathbf{0}$ denklemini ya da denk olarak $B^2 - L_2 B + (-1)^2 I = \mathbf{0}$ denklemini sağlar. Bu yüzden $\{F_n\}$ dizisi yardımıyla B matrisinin kuvvetlerini bulabiliriz. Teorem 4.1.3 kullanılırsa her $m \in \mathbb{Z}$ için

$$U_n B^m = U_{mn} B - (-q)^n U_{mn-n} I$$

elde edilir. Burada $\{U_n\}$ dizisi özel olarak $\{F_n\}$ dizisi olacaktır ve ayrıca $n = 2$ olacağı için

$$F_2 B^m = F_{2m} B - (-1)^2 F_{2m-2} I$$

olur ve bu eşitlikten her $m \in \mathbb{Z}$ için $B^m = \begin{pmatrix} -F_{2m-2} & F_{2m} \\ -F_{2m} & F_{2m+2} \end{pmatrix}$ olduğu görülür. Böylece istenilen elde edilir.

Teorem 4.1.3 uygun matrisler için kullanılarak $\{U_n\}$ ve $\{V_n\}$ dizileri ile ilgili ilave sonuçlara da ulaşılabilir. Aşağıdaki sonuç bu tür yeni özdeşlikleri vermektedir.

Sonuç 4.1.5. Her $n \in \mathbb{Z}$ ve her $a \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki eşitlikler doğrudur [31].

$$\mathbf{a)} \sum_{i=0}^a \binom{a}{i} [(-q)^n U_{in} U_{(a-i)n} - (-q)^n U_{in+n} U_{(a-i)n-n}] = U_n^2 V_n^a,$$

$$\mathbf{b)} \sum_{i=0}^a \binom{a}{i} [U_{in+n}U_{(a-i)n} - U_{in}U_{(a-i)n+n}] = 0,$$

$$\mathbf{c)} \sum_{i=0}^a \binom{a}{i} [U_{in-n}U_{(a-i)n} - U_{in}U_{(a-i)n-n}] = 0,$$

$$\mathbf{d)} \sum_{i=0}^a \binom{a}{i} [(-q)^n U_{in}U_{(a-i)n} - (-q)^n U_{in-n}U_{(a-i)n+n}] = U_n^2 V_n^a.$$

İspat. İlk olarak uygun (p, q) ikilisi ile $\{U_n\}$ ve $\{V_n\}$ dizileri oluşturalım ve $m, n \in \mathbb{Z}$ için $X = \begin{pmatrix} V_n & -(-q)^m \\ (-q)^{n-m} & 0 \end{pmatrix}$ ve $Y = \begin{pmatrix} 0 & (-q)^m \\ -(-q)^{n-m} & V_n \end{pmatrix}$ matrislerini tanımlayalım. Öncelikle X matrisinin $X^2 - V_n X + (-q)^n I = \mathbf{0}$ eşitliğini sağladığı kolaylıkla görülür. Teorem 4.1.3 kullanılırsa her $s \in \mathbb{Z}$ için

$$U_n X^s = \begin{pmatrix} U_{sn+n} & -(-q)^m U_{sn} \\ (-q)^{n-m} U_{sn} & -(-q)^n U_{sn-n} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

elde edilir. Ayrıca Y matrisi $Y^2 - V_n Y + (-q)^n I = \mathbf{0}$ eşitliğini sağlar. Teorem 4.1.3 yardımıyla her $s \in \mathbb{Z}$ için

$$U_n Y^s = \begin{pmatrix} -(-q)^n U_{sn-n} & (-q)^m U_{sn} \\ -(-q)^{n-m} U_{sn} & U_{sn+n} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

olur. Bununla birlikte, X ve Y matrislerinin değişmeli matrisler olduğu da kolaylıkla görülür. Dolayısıyla Binom teoremi yardımıyla $a \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\sum_{i=0}^a \binom{a}{i} X^i Y^{a-i} = \begin{pmatrix} V_n^a & 0 \\ 0 & V_n^a \end{pmatrix}$$

eşitliği ve bu eşitlikten de

$$\sum_{i=0}^a \binom{a}{i} (U_n X^i)(U_n Y^{a-i}) = U_n^2 \begin{pmatrix} V_n^a & 0 \\ 0 & V_n^a \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

elde edilir. (4.6) eşitliğinde (4.4) ve (4.5) kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^a \binom{a}{i} \begin{pmatrix} U_{in+n} & -(-q)^m U_{in} \\ (-q)^{n-m} U_{in} & -(-q)^n U_{in-n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(-q)^n U_{(a-i)n-n} & (-q)^m U_{(a-i)n} \\ -(-q)^{n-m} U_{(a-i)n} & U_{(a-i)n+n} \end{pmatrix} \\ &= U_n^2 \begin{pmatrix} V_n^a & 0 \\ 0 & V_n^a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikte matris çarpımı yapılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa matris eşitliğinden istenilen sonuçlar elde edilir ve ispat tamamlanır.

Benzer düşünce ile farklı uygun matrisler yardımıyla $\{U_n\}$ ve $\{V_n\}$ dizileri için başka özelliklerin ispatları ortaya koyulabilir. Şimdi [31]'de gösterilen bir sonucu tartışalım. p ve q sayıları $p^2 + 4q > 0$ koşulunu sağlayan sıfırdan farklı reel sayılar olsun. (p, q) ikilisi ile türetilcek olan genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri sırasıyla $\{U_n\}$ ve $\{V_n\}$ olsun. n sabit bir tamsayı olmak üzere $D = \begin{pmatrix} 0 & (-q)^n \\ -1 & V_n \end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda D matrisinin karakteristik denklemi $x^2 - V_n x + (-q)^n = 0$ olur ve Cayley-Hamilton teoreminden $D^2 - V_n D + (-q)^n I = \mathbf{0}$ sağlanır. D matrisi için Teorem 4.1.3 kullanılırsa her $m \in \mathbb{Z}$ için

$$U_n D^m = \begin{pmatrix} -(-q)^n U_{mn-n} & (-q)^n U_{mn} \\ -U_{mn} & U_{mn+n} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

olduğu görülür. Şimdi, $p_1 = V_n$ ve $q_1 = -(-q)^n$ olsun. Binet formülü dikkate alınırsa α ve β , $x^2 - px - q = 0$ denkleminin kökleri olmak üzere $p_1 = \alpha^n + \beta^n$ eşitliği vardır. Ayrıca $\alpha \neq \pm\beta$ olduğundan dolayı $p_1 \neq 0$ olur. Yine, $q_1 \neq 0$ olacaktır ve

$$p_1^2 + 4q_1 = (\alpha^n + \beta^n)^2 - 4(-q)^n = \alpha^{2n} - 2\alpha\beta + \beta^{2n} = (\alpha - \beta)^2$$

eşitliğinden $p_1^2 + 4q_1 > 0$ olur. Görüleceği üzere (p_1, q_1) ikilisi de istenilen koşulları sağlar. (p_1, q_1) ile kurulan genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{S_m\}$ olsun. Burada, D matrisinin $D^2 - p_1 D - q_1 I = \mathbf{0}$ koşulunu sağladığını biliyoruz. Sonuç 3.2.4 kullanılırsa her $m \in \mathbb{Z}$ için $D^m = S_m D + S_{m-1} I$ olur ve bu eşitlikte gerekli işlemler yapılırsa

$$U_n D^m = \begin{pmatrix} U_n S_{m-1} & (-q)^n U_n S_m \\ -U_n S_m & U_n V_n S_m + U_n S_{m-1} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

elde edilir. (4.7) ve (4.8) eşitliklerinden $U_{mn} = U_n S_m$ eşitliği elde edilir.

Elde edilen sonucu açıklamak için sayısal bir örnek verelim.

Örnek 4.1.6. $p = q = 1$ için $\{U_n\}$ ve $\{V_n\}$ dizilerini oluşturalım. Bu diziler sırasıyla klasik Fibonacci $\{F_n\}$ ve Lucas $\{L_n\}$ dizileri olacaktır. Şimdi keyfi bir n tamsayısı seçelim. Örneğin, $n = 3$ olsun ve $\{S_m(L_3, -(-1)^3)\} = \{S_m(4, 1)\}$ dizisini oluşturalım. Bu durumda $U_{mn} = U_n S_m$ eşitliğinden, $F_{3m} = F_3 S_m$ ya da denk olarak $F_{3m} = 2S_m$ eşitliğinin her $m \in \mathbb{Z}$ için geçerli olduğu görülür.

4.2. Matris Kökleri ve Moore-Penrose Tersleri

4.2.1. Özel diziler yardımıyla kare matrislerin kökleri

Sonuç 4.1.2, bir B matrisi $x^2 - px - q = 0$ denklemini sağladığında herhangi bir n tamsayısı için $B^n = A$ eşitliğini sağlayan A matrisinin de $x^2 - V_n x + (-q)^n = 0$ denklemini sağladığını göstermektedir. Buradan hareketle $x^2 - V_n x + (-q)^n = 0$ koşulunu sağlayan matrisleri inceleyerek bu türdeki matrislerin tamsayı kuvvetleri için bir bağıntı Teorem 4.1.3’de verildi. Burada dikkat edilmesi gereken bir diğer husus ise $x^2 - V_n x + (-q)^n = 0$ denklemini sağlayan A matrisi için $B^n = A$ olacak şekilde bir B matrisinin nasıl elde edilebileceğidir. [31] çalışmasında bu durum incelenmiş ve istenilen özellikteki bazı B matrislerinin elde edilmesi için bir yöntem verilmiştir. Bu kısımda bazı reel matrislerin köklerinin ve Moore-Penrose terslerinin bulunması üzerinde durulacaktır. Bunun için önceki bölümlerde incelenen denklemlerden yola çıkarak bir n tamsayısı için $x^3 - V_n x^2 + (-q)^n x = 0$ denklemini sağlayan matrisleri inceleyeceğiz.

α ve β , $x^2 - px - q = 0$ denkleminin kökleri olsun. Burada genelleştirilmiş Lucas dizisi için Binet formülü olan $V_n = \alpha^n + \beta^n$ eşitliği ile birlikte $\alpha\beta = -q$ eşitliği kullanılırsa

$$x^3 - V_n x^2 + (-q)^n x = (x - \alpha^n)(x - \beta^n)x$$

elde edilir. Şimdi A matrisinin $x^3 - V_n x^2 + (-q)^n x = 0$ koşulunu sağlaması durumunu inceleyelim.

A matrisinin minimal polinomu $m_A(x)$ olsun. A matrisinin $x^3 - V_n x^2 + (-q)^n x = 0$ koşulunu sağlaması için $m_A(x)$ polinomunun $p_A(x) = x^3 - V_n x^2 + (-q)^n x$ polinomunu bölmesi gerekir. Dolayısıyla A matrisinin özdeğerlerinin kümesi M_A olmak üzere $M_A \subseteq \{\alpha^n, \beta^n, 0\}$ olmalıdır. Çünkü A matrisinin α^n , β^n ve 0 dışında bir karakteristik kökü olursa bu kök aynı zamanda minimal polinomun da kökü olacaktır ve bu durum minimal polinomun $p_A(x)$ polinomunu bölmesi ile çelişecektir. Bu halde dikkat edilecek bir diğer durum ise A matrisi, özdeğerleri arasında 0 olabileceği için tersinir olmak zorunda değildir. Bu sebeple A matrisinin her zaman tüm tamsayı kuvvetlerinden bahsedemeyiz. A matrisinin tersinir olması için $M_A \subseteq \{\alpha^n, \beta^n\}$ olmalıdır. Dolayısıyla $x^3 - V_n x^2 + (-q)^n x = 0$ koşulunu sağlayan tersinir matrisler aynı zamanda $x^2 - V_n x + (-q)^n = 0$ koşulunu da sağlayacaktır ve bu matrislerin tamsayı kuvvetleri için Teorem 4.1.3 kullanılabilir.

Genel olarak $x^3 - V_n x^2 + (-q)^n x = 0$ denklemini sağlayan tüm matrisleri inceleyeceğiz. İlk olarak $x^3 - V_n x^2 + (-q)^n x = 0$ denklemini sağlayan matrislerin pozitif tamsayı kuvvetleri için aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.2.1.1. X matrisi bir n tamsayısı için $X^3 - V_n X^2 + (-q)^n X = \mathbf{0}$ koşulunu sağlasın. Bu durumda her $m \in \mathbb{N}$ için $U_n X^m = U_{nm-n} X^2 - (-q)^n U_{nm-2n} X$ eşitliği doğrudur.

İspat. $n = 0$ için eşitliğin sağlandığı kolaylıkla görülür. n sıfırdan farklı bir tamsayı olmak üzere X matrisi $X^3 - V_n X^2 + (-q)^n X = \mathbf{0}$ koşulunu sağlasın. İstenilen eşitliği m üzerinden tümevarımla gösterelim. Öncelikle $m = 1$ için incelenirse

$$U_{nm-n} X^2 - (-q)^n U_{nm-2n} X = U_{n-n} X^2 - (-q)^n U_{n-2n} X = U_n X^1$$

eşitliği elde edilir ve iddia $m = 1$ için doğrudur. Şimdi, iddianın herhangi bir $m \in \mathbb{N}$ için doğru olduğunu kabul edelim ve $m + 1$ için de doğruluğunu gösterelim. İlk olarak (2.2) eşitliğinden $U_{nm-n} V_n - (-q)^n U_{nm-2n} = U_{nm}$ eşitliği elde edilir. Bu eşitlikle beraber $m \in \mathbb{N}$ için $X^{m+1} = X^m X$ eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} U_n X^{m+1} &= U_{nm-n} X^3 - (-q)^n U_{nm-2n} X^2 \\ &= U_{nm-n} [V_n X^2 - (-q)^n X] - (-q)^n U_{nm-2n} X^2 \\ &= (U_{nm-n} V_n - (-q)^n U_{nm-2n}) X^2 - (-q)^n U_{nm-n} X \\ &= U_{n(m+1)-n} X^2 - (-q)^n U_{n(m+1)-2n} X \end{aligned}$$

olur. Yani iddia $m + 1$ için de doğrudur. Böylece ispat tamamlanır.

$x^3 - V_n x^2 + (-q)^n x = 0$ denklemini sağlayan matrislerin pozitif tamsayı kuvvetlerini hesaplamak için Teorem 4.2.1.1'i kullanabiliriz. Öte yandan, Teorem 4.2.1.1 bazı matrisler için kullanılarak genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri için de farklı özdeşliklerin elde edilmesinde kullanılabilir. Fakat bu kısımda esas olarak kare matrislerin kökleri ve matrislerin Moore-Penrose tersleri üzerinde durulacaktır. Aşağıdaki sonuç reel bir kare matrisin n . dereceden kökünü hesaplamak için bir formül ortaya koymaktadır.

Teorem 4.2.1.2. X matrisi bir $n \in \mathbb{N}$ için $X^3 - V_n X^2 + (-q)^n X = \mathbf{0}$ koşulunu sağlayan reel bir matris ise $B = \frac{1}{(-q)^{n-1} U_n} (-U_{n-1} X^2 + U_{2n-1} X)$ şeklinde tanımlanan matris için $B^n = X$ sağlanır.

İspat. İlk olarak (2.2) eşitliğinde $m = n - 1$ alınırsa $U_{n-1}V_n + (-q)^{n-1} = U_{2n-1}$ elde edilir. Bu eşitlik kullanılırsa B matrisi

$$B = \frac{1}{(-q)^{n-1}U_n} [-U_{n-1}(X^2 - V_nX) + (-q)^{n-1}X]$$

olarak yazılabilir. Burada $X^3 - V_nX^2 + (-q)^nX = \mathbf{0}$ eşitliği dikkate alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$BX = \frac{1}{U_n} (X^2 - qU_{n-1}X) \quad (4.9)$$

elde edilir. Şimdi $C = \frac{1}{(-q)^{n-1}U_n} (-U_{n-1}X + U_{2n-1}I)$ olsun. Buradan $B = XC$ olur.

Ayrıca X , B ve C matrislerinin karşılıklı olarak değişmeli oldukları kolayca görülür. (4.9) dikkate alınarak

$$B^2 = BXC = \frac{1}{U_n} (X^2 - qU_{n-1}X)C = \frac{1}{U_n} (X - qU_{n-1}I)XC = \frac{1}{U_n} (X - qU_{n-1}I)B$$

ve buradan

$$B^3 = B^2B = \frac{1}{U_n} (X - qU_{n-1}I)B^2 = \left[\frac{1}{U_n} (X - qU_{n-1}I) \right]^2 B$$

olduğu görülür. Bu eşitlikler dikkate alınarak gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} B^3 - pB^2 &= \left[\frac{1}{U_n} (X - qU_{n-1}I) \right]^2 B - p \frac{1}{U_n} (X - qU_{n-1}I)B \\ &= \frac{1}{U_n^2} [X^2 - U_{n+1}X - qU_{n-1}X + qU_{n+1}U_{n-1}I]B \end{aligned}$$

olur. Bu eşitlikte (2.3) ve $B = XC$ olması kullanılırsa

$$B^3 - pB^2 = \frac{1}{U_n^2} (X^3 - V_nX^2 + qU_{n+1}U_{n-1}X)C$$

bulunur. Ayrıca (2.1) ifadesinde $m = n + 1$ yazılırsa $U_{n+1}U_{n-1} + (-q)^{n-1} = U_n^2$ bulunur ve $X^3 - V_nX^2 + (-q)^nX = \mathbf{0}$ olması da dikkate alınırsa son eşitlikten

$$B^3 - pB^2 = \frac{1}{U_n^2} [-(-q)^nX + qU_{n+1}U_{n-1}X]C = q \frac{U_{n+1}U_{n-1} + (-q)^{n-1}}{U_n^2} XC = qB$$

olur. Böylece B matrisinin $B^3 - pB^2 - qB = \mathbf{0}$ koşulunu sağladığı görülür. Yani B matrisi Sonuç 3.2.4'ün koşulunu sağlar ve $B^n = U_{n-1}B^2 + qU_{n-2}B$ olduğu görülür.

Ayrıca (2.1) kullanılarak $(-q)^{n-2} = U_{n-1}^2 - U_n U_{n-2}$ olduğu görülür. Bu eşitlikler ile beraber $B^2 = \frac{1}{U_n} (X - qU_{n-1}I)B$ kullanılırsa

$$\begin{aligned} B^n &= U_{n-1} \left[\frac{1}{U_n} (X - qU_{n-1}I)B \right] + qU_{n-2}B \\ &= \frac{1}{U_n} [U_{n-1}XB - q(U_{n-1}^2 - U_n U_{n-2})B] \\ &= \frac{1}{U_n} [U_{n-1}XB + (-q)^{n-1}B] \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi bu eşitlikte $B = \frac{1}{(-q)^{n-1}U_n} (-U_{n-1}X^2 + U_{2n-1}X)$ ile beraber (4.9) dikkate alınır

$$\begin{aligned} B^n &= \frac{1}{U_n} \left[\frac{U_{n-1}}{U_n} (X^2 - qU_{n-1}X) + \frac{1}{U_n} (-U_{n-1}X^2 + U_{2n-1}X) \right] \\ &= \frac{U_{2n-1} - qU_{n-1}U_{n-1}}{U_n^2} X \end{aligned}$$

olur. Son olarak (2.4) eşitliğinden özel olarak $U_{2n-1} - qU_{n-1}^2 = U_n^2$ elde edilir ve $B^n = X$ olur. Böylece ispat tamamlanır.

$x^2 - V_n x + (-q)^n = 0$ denklemini sağlayan matrislerin n . dereceden köklerini bulmak için [31]'de bir sonuç verilmiştir. Şimdi, Teorem 4.2.1.2 yardımıyla bu sonucun alternatif bir ispatını yapalım.

Sonuç 4.2.1.3. X reel matrisi bir $n \in \mathbb{N}$ için $X^2 - V_n X + (-q)^n I = \mathbf{0}$ koşulunu sağlasın. Bu durumda $C = \frac{1}{U_n} (X - qU_{n-1}I)$ olmak üzere $C^n = X$ eşitliği doğrudur.

İspat. X matrisi $X^2 - V_n X + (-q)^n I = \mathbf{0}$ koşulunu sağlasın. Bu durumda X matrisi için $X^3 - V_n X^2 + (-q)^n X = \mathbf{0}$ koşulu da sağlanır. Böylece Teorem 4.2.1.2 yardımıyla $C = \frac{1}{(-q)^{n-1}U_n} (-U_{n-1}X^2 + U_{2n-1}X)$ matrisi için $C^n = X$ olur. Ayrıca (2.2) eşitliği $m = n - 1$ için kullanılırsa

$$C = \frac{1}{(-q)^{n-1}U_n} [-U_{n-1}(X^2 - V_n X) + (-q)^{n-1}X]$$

olarak yazılabilir. Ayrıca $X^2 - V_n X + (-q)^n I = \mathbf{0}$ olduğu da dikkate alınır

$$C = \frac{1}{(-q)^{n-1}U_n} [U_{n-1}(-q)^n I + (-q)^{n-1}X] = \frac{1}{U_n} (X - qU_{n-1}I)$$

olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.1.2 ve Sonuç 4.2.1.3'ün kullanımını sayısal örneklerle görelim.

Örnek 4.2.1.4. $A = \begin{pmatrix} 21 & -8 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$ matrisi için $B^2 = A$ ve $C^3 = A$ eşitliklerini sağlayan B ve C matrisleri bulalım.

A matrisinin karakteristik denklemi $x^2 - 18x + 1 = 0$ şeklindedir ve A matrisi bu denklemi sağlar. $B^2 = A$ koşulunu sağlayan bir B matrisi elde edeceğiz. Bunun için $x^2 - V_2x + (-q)^2 = x^2 - 18x + 1$ koşulunu sağlayan $\{V_n\}$ dizisi kurmalıyız. Burada $V_2 = p^2 + 2q$ olduğuna dikkat ederek

$$p^2 + 2q = 18$$

$$(-q)^2 = 1$$

denklem sistemini sağlayan $(p, q) = (4, 1)$ ikilisini seçebiliriz. Bu durumda Sonuç 4.2.1.3'ün koşulları sağlanmış olacaktır. Şimdi $\{V_n(4, 1)\}$ ve $\{U_n(4, 1)\}$ dizileri ile devam edelim. Sonuç 4.2.1.3 kullanılırsa

$$B = \frac{1}{U_n}(A - qU_{n-1}I) = \frac{1}{U_2}(A - U_1I) = \frac{1}{4}(A - I) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

bulunur ve $B^2 = A$ sağlanır. Bu arada $B^2 = A$ eşitliğini sağlayan farklı B matrisleri de bulunabilir. Şöyle ki $x^2 - V_2x + (-q)^2 = x^2 - 18x + 1$ koşulunu sağlayan farklı $\{V_n\}$ dizisi inşa edilebilir. Örneğin, $(p, q) = (2\sqrt{5}, -1)$ için de istenilen dizi elde edilebilir. Şimdi $\{V_n(2\sqrt{5}, -1)\}$ ve $\{U_n(2\sqrt{5}, -1)\}$ dizileri ile devam edelim ve aradığımız matrise B_1 matrisi diyelim. Bu durumda

$$B_1 = \frac{1}{U_n}(A - qU_{n-1}I) = \frac{1}{U_2}(A + U_1I) = \frac{1}{2\sqrt{5}}(A + I) = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

elde edilir ve $B_1^2 = A$ eşitliğinin sağlandığı kolaylıkla görülür. Şimdi $C^3 = A$ olacak şekilde bir C matrisi bulalım. $x^2 - V_3x + (-q)^3 = x^2 - 18x + 1$ koşulunu sağlayan bir $\{V_n\}$ dizisi oluşturmalıyız. $V_3 = p^3 + 3pq$ olduğu dikkate alınırsa

$$p^3 + 3pq = 18$$

$$(-q)^3 = 1$$

denklem sistemini sağlayan (p, q) ikilisi bulmalıyız. $(p, q) = (3, -1)$ ikilisi istenilen sistemi sağlar. Şimdi $\{V_n(3, -1)\}$ ve $\{U_n(3, -1)\}$ dizileri ile devam edelim.

$$C = \frac{1}{U_n}(A - qU_{n-1}I) = \frac{1}{U_3}(A + U_2I) = \frac{1}{8}(A + 3I) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olup $C^3 = A$ sağlanır.

Örnek 4.2.1.5. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ olmak üzere $C^2 = A$ olacak şekilde bir C matrisi

bulalım. İlk olarak A matrisinin $A^3 - 3A^2 + A = \mathbf{0}$ eşitliğini sağladığı kolaylıkla görülür. Yine klasik Fibonacci ve Lucas dizileri olan $\{F_n\}$ ve $\{L_n\}$ dizileri ile devam edilirse A matrisi $A^3 - L_2A^2 + (-1)^2A = \mathbf{0}$ eşitliğini sağlar. Şimdi Teorem 4.2.1.2, $n = 2$ için kullanılırsa

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{(-q)^{n-1}U_n}(-U_{n-1}A^2 + U_{2n-1}A) \\ &= \frac{1}{(-1)^1F_2}(-F_1A^2 + F_3A) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir ve $C^2 = A$ eşitliği sağlanır.

4.2.2. Özel diziler yardımıyla matrislerin Moore-Penrose tersi

Bu kısımda $x^3 - V_nx^2 + (-q)^nx = 0$ denklemini sağlayan matrislerin Moore-Penrose tersleri üzerinde duracağız. Bu özelliği sağlayan her matris genel olarak tersinir değildir. Ancak her matrisin Moore-Penrose tersinin mevcut ve tek olduğu iyi bilinmektedir. Öncelikle $x^3 - V_nx^2 + (-q)^nx = 0$ denklemini sağlayan matrislerin Moore-Penrose tersinin hesaplanması için aşağıdaki teoremi vereceğiz.

Teorem 4.2.2.1. X matrisi bir $n \in \mathbb{N}$ için $X^3 - V_nX^2 + (-q)^nX = \mathbf{0}$ koşulunu sağlayan reel bir matris olsun. Eğer $X^2 - V_nX$ simetrik bir matris ise bu durumda

$$G = \frac{1}{(-q)^{2n}U_n}(-U_{2n}X^2 + U_{3n}X)$$

matrisi X matrisinin Moore-Penrose tersidir.

İspat. Moore-Penrose ters tanımına göre gerekli koşulların doğruluğunu gösterelim.

i) $(XG)^* = XG$ eşitliğini gösterelim. (2.2) eşitliği $m = 2n$ ve $m = n$ için yazılırsa sırasıyla

$$U_{3n} - U_{2n}V_n = -(-q)^n U_n$$

ve

$$U_{2n} = U_n V_n$$

elde edilir. Bu eşitlikler dikkate alınarak gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} XG &= \frac{1}{(-q)^{2n}U_n} (-U_{2n}X^3 + U_{3n}X^2) \\ &= \frac{1}{(-q)^{2n}U_n} [-U_{2n}(V_nX^2 - (-q)^nX) + U_{3n}X^2] \\ &= \frac{1}{(-q)^{2n}U_n} [-(-q)^nU_nX^2 + (-q)^nU_nV_nX] \\ &= \frac{-1}{(-q)^n} (X^2 - V_nX) \end{aligned}$$

olur. Böylece, $X^2 - V_nX$ matrisi simetrik ise XG matrisinin de simetrik olduğu görülür.

X ve G matrisleri reel matrisler olduğundan dolayı $(XG)^* = XG$ olur.

ii) $XG = GX$ olacağından GX matrisi de simetriktir ve $(GX)^* = GX$ olur.

iii) $XGX = X$ olduğunu göstermeliyiz. Burada ilk madde ispatında elde edilmiş olan

$$XG = \frac{-1}{(-q)^n} (X^2 - V_nX) \text{ eşitliği kullanılırsa}$$

$$XGX = \frac{-1}{(-q)^n} (X^3 - V_nX^2) = \frac{-1}{(-q)^n} [-(-q)^nX] = X$$

bulunur.

iv) Son olarak $GXG = G$ olduğunu gösterelim. Yine G ve X matrislerinin değişmeli

olması dikkate alınırsa $GX = \frac{-1}{(-q)^n} (X^2 - V_nX)$ olduğu ilk maddenin ispatından

görüldür. Bu eşitlikten

$$\begin{aligned} GXG &= \frac{-1}{(-q)^n} (X^2 - V_nX) \frac{1}{(-q)^{2n}U_n} (-U_{2n}X^2 + U_{3n}X) \\ &= \frac{-1}{(-q)^{3n}U_n} (X^3 - V_nX^2)(-U_{2n}X + U_{3n}I) \\ &= \frac{-1}{(-q)^{3n}U_n} [-(-q)^nX](-U_{2n}X + U_{3n}I) \\ &= G \end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.2.1'deki $X^3 - V_n X^2 + (-q)^n X = \mathbf{0}$ koşulunu inceleyelim. Burada X matrisinin $X^3 - aX^2 - bX = \mathbf{0}$ şeklindeki bir denklemi sağlaması durumunda $a = V_n$ ve $b = -(-q)^n$ olacak şekildeki bir n için $\{V_n(p, q)\}$ dizisini kurmalıyız. Burada her defasında $n = 1$ için devam edilebilir. Bunun için $a = V_1 = p$ ve $b = -(-q)^1 = q$ eşitliklerinden, $p = a$ ve $q = b$ seçimleri ile devam edilebilir. Fakat genellik adına farklı n seçimleri ile de devam edilebilir.

$X^3 - V_n X^2 + (-q)^n X = \mathbf{0}$ koşulunu sağlayan X reel ve simetrik matrisleri için Teorem 4.2.2.1'in kullanımı açıktır. Şimdi kare olmayan veya simetrik olmayan matrisler için Moore-Penrose ters bulmaya çalışalım. Bunun için Teorem 2.1.27 dikkate alınırsa $A^\dagger = (A^* A)^\dagger A^* = A^* (A A^*)^\dagger$ eşitliğinden görüleceği üzere $A^\dagger$ matrisini elde etmek için $(A^* A)^\dagger$ veya $(A A^*)^\dagger$ matrisini bulmak yeterli olacaktır. Ayrıca reel matrisler için $A^* = A^T$ olacaktır ve işlemlere A^T ile devam edilebilir. Burada $A^T A$ ve $A A^T$ matrisleri simetrik olacaktır. Bu matrisler Teorem 4.2.2.1'deki simetriklik koşulunu sağlamış olur. Bir diğer koşul olan $x^3 - V_n x^2 + (-q)^n x = 0$ denklemini de sağlamaları durumunda Teorem 4.2.2.1 yardımıyla A matrisinin Moore-Penrose tersi elde edilebilir. Şimdi bu yöntemi açıklayan sayısal örnekler verilecektir.

Örnek 4.2.2.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ matrisinin Moore-Penrose tersini bulalım.

A matrisi simetrik değildir. Burada

$$A A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 17 \\ 5 & 6 & 16 \\ 17 & 16 & 50 \end{pmatrix}$$

olur. $A A^T$ matrisinin $(A A^T)^3 - 62(A A^T)^2 + 66(A A^T) = \mathbf{0}$ koşulunu sağladığı görülür. Burada $p = 62$ ve $q = -66$ için $(A A^T)^3 - p(A A^T)^2 - q(A A^T) = \mathbf{0}$ olur ve $n = 1$ için $A A^T$ matrisi Teorem 4.2.2.1'in koşullarını sağlar. Bu sebeple

$$\begin{aligned} (A A^T)^\dagger &= \frac{1}{(-q)^{2n} U_n} [-U_{2n}(A A^T)^2 + U_{3n}(A A^T)] \\ &= -\frac{62}{66^2} (A A^T)^2 + \frac{62^2 - 66}{66^2} (A A^T) \\ &= \frac{1}{198} \begin{pmatrix} 44 & -77 & 11 \\ -77 & 137 & -17 \\ 11 & -17 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada $A^\dagger = A^T (A A^T)^\dagger$ kullanılırsa

$$A^\dagger = \frac{1}{198} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 44 & -77 & 11 \\ -77 & 137 & -17 \\ 11 & -17 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{66} \begin{pmatrix} -22 & 43 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 22 & -34 & 10 \end{pmatrix}$$

olur ve istenilen elde edilir.

Örnek 4.2.2.3. $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ matrisinin Moore-Penrose tersini bulalım. B kare matris

değildir. Burada $B^T B = \begin{pmatrix} 14 & 32 \\ 32 & 77 \end{pmatrix}$ olur ve $(B^T B)^3 - 91(B^T B)^2 + 54(B^T B) = \mathbf{0}$ eşitliği sağlanır. Ayrıca $B^T B$ matrisinin simetrik olduğu açıktır. Teorem 4.2.2.1 kullanılırsa $p = 91$ ve $q = -54$ için $(B^T B)^3 - p(B^T B)^2 - q(B^T B) = \mathbf{0}$ koşulu sağlanmış olur. $\{V_n(91, -54)\}$ dizisi için $(B^T B)^3 - V_1(B^T B)^2 + (-q)^1(B^T B) = \mathbf{0}$ olur ve $\{U_n(91, -54)\}$ dizisi için

$$(B^T B)^\dagger = \frac{1}{(-q)^2 U_1} [-U_2(B^T B)^2 + U_3(B^T B)]$$

elde edilir. Bu eşitlikte gerekli işlemler yapılırsa

$$(B^T B)^\dagger = \frac{1}{54} \begin{pmatrix} 77 & -32 \\ -32 & 14 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Şimdi $B^\dagger = (B^T B)^\dagger B^T$ olması dikkate alınır

$$B^\dagger = (B^T B)^\dagger B^T = \frac{1}{54} \begin{pmatrix} 77 & -32 \\ -32 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} -17 & -2 & 13 \\ 8 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir.

Örnek 4.2.2.4. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisinin Moore-Penrose tersini bulalım.

Öncelikle $CC^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ olur ve $(CC^T)^3 - 3(CC^T)^2 + CC^T = \mathbf{0}$ eşitliğinin

sağlandığı kolaylıkla görülür. Bu eşitliği $(CC^T)^3 - L_2(CC^T)^2 + (-1)^2(CC^T) = \mathbf{0}$ olarak klasik Lucas dizisi yardımıyla yazabiliriz. $n = 2$ için Teorem 4.2.2.1 kullanılabilir ve

$$(CC^T)^\dagger = \frac{1}{(-q)^{2n} U_n} [-U_{2n}(CC^T)^2 + U_{3n}(CC^T)]$$

elde edilir. Ayrıca $\{U_n\}$ dizisi de klasik Fibonacci dizisi olacaktır ve son eşitlikten $(CC^T)^\dagger = \frac{1}{F_2}[-F_4(CC^T)^2 + F_6(CC^T)]$ elde edilir. Burada gerekli işlemler yapılırsa

$$(CC^T)^\dagger = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Yine $C^\dagger = C^T(CC^T)^\dagger$ eşitliği kullanılırsa C matrisinin Moore-Penrose tersi olan

$$C^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilmiş olur.



5. K-GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ SAYILARI VE MATRİSLER

Önceki bölümlerde, $\{U_n\}$ genelleştirilmiş Fibonacci dizisi kendi karakteristik denkleminde farklı denklemler ile ilişkilendirilerek farklı sonuçlar elde edilmişti. Bu bölümde ise benzer düşünce ile matrisler yardımıyla Fibonacci dizisinin bir diğer genelleştirmesi olan k -genelleştirilmiş Fibonacci dizisi ile ilgili özdeşlikler verilmektedir.

Sayı dizilerinin terimlerini elde etmek için yeni bağıntıların elde edilmesi farklı çalışmaların konusu olmuştur. Binet formülleri dışında dizinin n . terimini doğrudan ortaya koyan farklı eşitlikler de gösterilmiştir. Örneğin, $F_n = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-i-1}{i}$ eşitliği her $n \in \mathbb{N}$ için geçerlidir. Benzer şekilde Lucas dizisi, Pell dizisi gibi iyi bilinen diziler için de bazı bağıntılar literatürde vardır [32]. Bunun yanında $\{G_{(n)}^{(k)}\}$ dizisi için de bu türde eşitlikler [33] çalışmasında gösterilmiştir. Yine [34]'de $n \geq k$ koşulunu sağlayan tüm n tamsayıları için $\{G_{(n)}^{(k)}\}$ dizisinin n . terimini elde etmeye yarayan genel bir formül ortaya koyulmuştur. Bu formüle ulaşılırken önceki bölümlerde yapılanlara benzer olarak $\{G_{(n)}^{(k)}\}$ dizisi ile matrisler arasındaki ilişkilerden yararlanılmaktadır. Şimdi bu bölümde ortaya koyulacak özdeşliklerle ilgili izlenilen yolu kısaca açıklayalım.

$\{G_{(n)}^{(k)}\}$ dizisinin karakteristik denklemi $x^k - x^{k-1} - x^{k-2} - \dots - x - 1 = 0$ şeklindedir. t sıfırdan farklı ve $t^k - t^{k-1} - t^{k-2} - \dots - t - 1 \neq 0$ koşulunu sağlayan bir reel sayı olsun. Bu durumda $(x^k - x^{k-1} - x^{k-2} - \dots - x - 1)(x - t) = 0$ denklemini ya da denk olarak $X^{k+1} - (t+1)X^k + tI + \sum_{i=1}^{k-1} (t-1)X^i = \mathbf{0}$ denklemini sağlayan X matrisleri ile $\{G_{(n)}^{(k)}\}$ dizisi arasındaki bazı ilişkileri ele alacağız.

Bölüm boyunca k sayısı $k \geq 2$ koşulunu sağlayan bir tamsayı, t ise sıfırdan farklı ve $t^k - t^{k-1} - t^{k-2} - \dots - t - 1 \neq 0$ koşulunu sağlayan bir reel sayı olarak kabul edilecektir.

Öncelikle aşağıdaki yardımcı teoremleri verelim.

Yardımcı Teorem 5.1. $G_{(-1)}^{(k)} = 1$, $G_{(-2)}^{(k)} = -1$ ve $-k \leq b < -2$ koşulunu sağlayan b tamsayıları için $G_{(b)}^{(k)} = 0$ olur [34].

İspat. Herhangi bir a tamsayısı için dizinin yineleme bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned} G_{(a+k+1)}^{(k)} &= G_{(a+k)}^{(k)} + G_{(a+k-1)}^{(k)} + \dots + G_{(a+1)}^{(k)} \\ G_{(a+k)}^{(k)} &= G_{(a+k-1)}^{(k)} + G_{(a+k-2)}^{(k)} + \dots + G_{(a)}^{(k)} \end{aligned}$$

eşitliklerinin olduğu görülür. Bu eşitlikler taraf tarafa çıkarılırsa

$$G_{(a+k+1)}^{(k)} - G_{(a+k)}^{(k)} = G_{(a+k)}^{(k)} - G_{(a)}^{(k)}$$

ya da denk olarak

$$G_{(a)}^{(k)} = 2G_{(a+k)}^{(k)} - G_{(a+k+1)}^{(k)} \quad (5.1)$$

olur. (5.1)'de $a = -1$ ve $a = -2$ yazılırsa sırasıyla $G_{(-1)}^{(k)} = 1$ ve $G_{(-2)}^{(k)} = -1$ eşitliklerine ulaşılır. Şimdi $-k \leq b < -2$ koşulunu sağlayan herhangi bir b tamsayısı için (5.1) kullanılırsa $G_{(b)}^{(k)} = 2G_{(b+k)}^{(k)} - G_{(b+k+1)}^{(k)}$ olur. Burada $-k \leq b < -2$ olduğundan $0 \leq b+k < k-2$ ve $1 \leq b+k+1 < k-1$ koşulları sağlanacağından dizinin tanımı dikkate alınır

$$G_{(b)}^{(k)} = 2G_{(b+k)}^{(k)} - G_{(b+k+1)}^{(k)} = 2 \cdot 0 - 0 = 0$$

olur ve ispat tamamlanır.

Yardımcı Teorem 5.2. $h(n) = \sum_{i=0}^{n-1} t^{n-1-i} G_{(i)}^{(k)}$ olsun. $h(n+1) - th(n) = G_{(n)}^{(k)}$ eşitliği her $n \in \mathbb{N}$ için doğrudur [34].

İspat. $h(n) = \sum_{i=0}^{n-1} t^{n-1-i} G_{(i)}^{(k)}$ eşitliği kullanılarak gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} h(n+1) - th(n) &= \sum_{i=0}^n t^{n-i} G_{(i)}^{(k)} - t \sum_{i=0}^{n-1} t^{n-1-i} G_{(i)}^{(k)} \\ &= t^{n-n} G_{(n)}^{(k)} + \sum_{i=0}^{n-1} t^{n-i} G_{(i)}^{(k)} - \sum_{i=0}^{n-1} t^{n-i} G_{(i)}^{(k)} \\ &= G_{(n)}^{(k)} \end{aligned}$$

şeklinde istenilen elde edilir.

$\{G_{(n)}^{(k)}\}$ dizisi ile matris ilişkisini gösteren aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 5.3. X matrisi $X^{k+1} - (t+1)X^k + tI + \sum_{i=1}^{k-1} (t-1)X^i = \mathbf{0}$ koşulunu bir k için sağlasın. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$X^n = h(n)X^k - \left[\sum_{i=1}^{k-1} \left(h(n) - \sum_{j=1}^{i+1} G_{(n-j)}^{(k)} \right) X^i \right] - [h(n) - G_{(n-1)}^{(k)}] I$$

eşitliği doğrudur. Burada $h(n) = \sum_{i=0}^{n-1} t^{n-1-i} G_{(i)}^{(k)}$ şeklindedir [34].

İspat. İspatı n üzerinden tümevarımla yapalım. İlk olarak $n = 1$ için eşitliğin doğruluğunu gösterelim. $h(1) = 0$ olduğu kolaylıkla görülür ve $n = 1$ için

$$h(n)X^k - \left[\sum_{i=1}^{k-1} \left(h(n) - \sum_{j=1}^{i+1} G_{(n-j)}^{(k)} \right) X^i \right] - [h(n) - G_{(n-1)}^{(k)}] I$$

matrisi incelenirse

$$h(1)X^k - \left[\sum_{i=1}^{k-1} \left(h(1) - \sum_{j=1}^{i+1} G_{(1-j)}^{(k)} \right) X^i \right] - [h(1) - G_{(0)}^{(k)}] I = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{i+1} G_{(1-j)}^{(k)} X^i$$

olduğu görülür. Ayrıca

$$\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{i+1} G_{(1-j)}^{(k)} X^i = X^1 \sum_{j=1}^2 G_{(1-j)}^{(k)} + X^2 \sum_{j=1}^3 G_{(1-j)}^{(k)} + \dots + X^{k-1} \sum_{j=1}^k G_{(1-j)}^{(k)} \quad (5.2)$$

olduğu açıktır. $3 < j \leq k$ koşulunu sağlayan j tamsayıları için $-k+1 \leq 1-j < -2$ olur ve burada Yardımcı Teorem 5.1 kullanılırsa $3 < j \leq k$ koşulunu sağlayan j tamsayıları için $G_{(1-j)}^{(k)} = 0$ olur. Bu sebeple (5.2) eşitliğinden

$$\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{i+1} G_{(1-j)}^{(k)} X^i = X^1 \sum_{j=1}^2 G_{(1-j)}^{(k)} + X^2 \sum_{j=1}^3 G_{(1-j)}^{(k)} + \dots + X^{k-1} \sum_{j=1}^3 G_{(1-j)}^{(k)} \quad (5.3)$$

olur. (5.3) ile Yardımcı Teorem 5.1’de gösterilen $G_{(-1)}^{(k)} = 1$ ve $G_{(-2)}^{(k)} = -1$ kullanılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{i+1} G_{(1-j)}^{(k)} X^i &= X \sum_{j=1}^2 G_{(1-j)}^{(k)} + (X^2 + X^3 + \dots + X^{k-1}) \sum_{j=1}^3 G_{(1-j)}^{(k)} \\ &= X(0+1) + (X^2 + X^3 + \dots + X^{k-1})(0+1-1) = X \end{aligned}$$

olur ve böylece $n = 1$ için iddianın doğru olduğu görülür. Şimdi iddianın herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için doğru olduğunu kabul edelim ve $n + 1$ için de doğru olduğunu gösterelim. X matrisi için $X^{n+1} = X^n X$ olduğundan

$$X^{n+1} = h(n)X^{k+1} - \left[\sum_{i=1}^{k-1} \left(h(n) - \sum_{j=1}^{i+1} G_{(n-j)}^{(k)} \right) X^{i+1} \right] - [h(n) - G_{(n-1)}^{(k)}] X$$

olarak bulunur. Burada $X^{k+1} - (t+1)X^k + tI + \sum_{i=1}^{k-1} (t-1)X^i = \mathbf{0}$ eşitliği dikkate alınarak devam edilirse

$$\begin{aligned} X^{n+1} &= h(n) \left[(t+1)X^k - tI - (t-1) \sum_{i=1}^{k-1} X^i \right] - \left[\sum_{i=1}^{k-1} \left(h(n) - \sum_{j=1}^{i+1} G_{(n-j)}^{(k)} \right) X^{i+1} \right] \\ &\quad - (h(n) - G_{(n-1)}^{(k)})X \\ &= h(n) \left[(t+1)X^k - tI - (t-1) \sum_{i=1}^{k-1} X^i \right] - \left[\sum_{i=0}^{k-1} \left(h(n) - \sum_{j=1}^{i+1} G_{(n-j)}^{(k)} \right) X^{i+1} \right] \\ &= h(n) \left[(t+1)X^k - tI - \left[-(t-1)X^k + (t-1) \sum_{i=0}^{k-1} X^{i+1} \right] \right] \\ &\quad - \left[\sum_{i=0}^{k-1} \left(h(n) - \sum_{j=1}^{i+1} G_{(n-j)}^{(k)} \right) X^{i+1} \right] \\ &= 2th(n)X^k - th(n)I - \left[(t-1)h(n) \sum_{i=0}^{k-1} X^{i+1} \right] \\ &\quad - \left[\sum_{i=0}^{k-1} \left(h(n) - \sum_{j=1}^{i+1} G_{(n-j)}^{(k)} \right) X^{i+1} \right] \\ &= 2th(n)X^k - th(n)I - \left[\sum_{i=0}^{k-1} \left(th(n) - \sum_{j=1}^{i+1} G_{(n-j)}^{(k)} \right) X^{i+1} \right] \end{aligned}$$

olur. Bu son eşitlikte $\sum_{j=1}^k G_{(n-j)}^{(k)} = G_{(n)}^{(k)}$ olduğu dikkate alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$X^{n+1} = [th(n) + G_{(n)}^{(k)}]X^k - th(n)I - \left[\sum_{i=1}^{k-1} \left(th(n) - \sum_{j=1}^i G_{(n-j)}^{(k)} \right) X^i \right] \quad (5.4)$$

olduğu görülür. Yardımcı Teorem 5.2 ve (5.4) eşitliği dikkate alındığında

$$\begin{aligned}
X^{n+1} &= h(n+1)X^k - (h(n+1) - G_{(n)}^{(k)})I \\
&\quad - \left[\sum_{i=1}^{k-1} \left(h(n+1) - G_{(n)}^{(k)} - \sum_{j=1}^i G_{(n-j)}^{(k)} \right) X^i \right] \\
&= h(n+1)X^k - (h(n+1) - G_{(n)}^{(k)})I \\
&\quad - \left[\sum_{i=1}^{k-1} \left(h(n+1) - \sum_{j=1}^{i+1} G_{(n+1-j)}^{(k)} \right) X^i \right]
\end{aligned}$$

olur. İddia $n+1$ için de doğrudur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 5.3 kullanılarak $\{G_{(n)}^{(k)}\}$ dizisi için farklı sonuçlar elde edilebilir. Bunlardan bazıları aşağıda verilecektir.

Sonuç 5.4. X matrisi, bir k için $X^k - X^{k-1} - \dots - X - I = \mathbf{0}$ koşulunu sağlayan bir matris olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $X^n = (\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{i+1} G_{(n-j)}^{(k)} X^i) + G_{(n-1)}^{(k)} I$ eşitliği vardır [34].

İspat. X matrisi $X^k - X^{k-1} - \dots - X - I = \mathbf{0}$ koşulunu sağlasın. Bu durumda her t sayısı için $(X^k - X^{k-1} - \dots - X - I)(X - tI) = \mathbf{0}$ eşitliği ve denk olarak

$$X^{k+1} - (t+1)X^k + tI + \sum_{i=1}^{k-1} (t-1)X^i = \mathbf{0}$$

olur. Buradan, Teorem 5.3 dikkate alındığında her $n \in \mathbb{N}$ için

$$X^n = h(n)X^k - \left[\sum_{i=1}^{k-1} \left(h(n) - \sum_{j=1}^{i+1} G_{(n-j)}^{(k)} \right) X^i \right] - [h(n) - G_{(n-1)}^{(k)}]I$$

olduğu görülür. Burada $X^k - X^{k-1} - \dots - X - I = \mathbf{0}$ eşitliği dikkate alınır

$$X^n = h(n)[X^{k-1} + \dots + I] - \left[\sum_{i=1}^{k-1} \left(h(n) - \sum_{j=1}^{i+1} G_{(n-j)}^{(k)} \right) X^i \right] - [h(n) - G_{(n-1)}^{(k)}]I$$

olarak bulunur. Bunun yanında $h(n) = \sum_{i=0}^{n-1} t^{n-1-i} G_{(i)}^{(k)}$ şeklindedir. Son eşitlikte gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
X^n &= \sum_{i=1}^{k-1} \left[h(n) - \left(h(n) - \sum_{j=1}^{i+1} G_{(n-j)}^{(k)} \right) \right] X^i + [h(n) - (h(n) - G_{(n-1)}^{(k)})]I \\
&= \left(\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{i+1} G_{(n-j)}^{(k)} X^i \right) + G_{(n-1)}^{(k)} I
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Şimdi, [35] çalışmasında verilen bir eşitliğin, Sonuç 5.4 kullanılarak yapılan alternatif ispatı aşağıdaki sonuça görülecektir.

Sonuç 5.5. $\lambda, x^k - x^{k-1} - \dots - x - 1 = 0$ denkleminin bir kökü ise her $n \in \mathbb{N}$ için $\lambda^n = (\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{i+1} G_{(n-j)}^{(k)} \lambda^i) + G_{(n-1)}^{(k)}$ eşitliği doğrudur [34].

İspat. λ_i 'ler $1 \leq i \leq k$ olmak üzere $x^k - x^{k-1} - \dots - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri

olsun. $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_k \end{pmatrix}$ köşegen matrisini ele alalım. Bu durumda X matrisi için

$X^k - X^{k-1} - \dots - X - I = \mathbf{0}$ koşulunun sağlandığı açıktır. Böylece, Sonuç 5.4 kullanılırsa $X^n = (\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{i+1} G_{(n-j)}^{(k)} X^i) + G_{(n-1)}^{(k)} I$ olur. Buradan istenilen elde edilerek ispat tamamlanır.

Bölüm 3'de genelleştirilmiş Fibonacci ve Tribonacci dizileri arasında ilişki kurularak özdeşlikler ortaya koyulmuştur. Burada da önce benzer düşünce ile $\{G_{(n)}^{(k)}\}$ dizisi ile ilişkili bir başka diziyi tanımlayalım. $\{F_{(n)}^{(k,t)}\}$ dizisi, $0 \leq n \leq k-1$ koşulunu sağlayan n tamsayıları için $F_{(n)}^{(k,t)} = 0$, $F_{(k)}^{(k,t)} = 1$ başlangıç koşulları ile ve $n > k$ koşulunu sağlayan n tamsayıları için

$$F_{(n)}^{(k,t)} = (t+1)F_{(n-1)}^{(k,t)} - \left[\sum_{i=1}^{k-1} (t-1)F_{(n-1-i)}^{(k,t)} \right] - tF_{(n-k-1)}^{(k,t)}$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan bir dizi olsun.

Şimdi $\{F_{(n)}^{(k,t)}\}$ dizisi ile matrisler arasındaki bir bağıntı aşağıdaki teoremden verilmektedir.

Teorem 5.6. X matrisi $X^{k+1} - (t+1)X^k + tI + \sum_{i=1}^{k-1} (t-1)X^i = \mathbf{0}$ koşulunu bir k için sağlasın. Bu durumda tüm $n > k$ tamsayıları için

$$X^n = F_{(n)}^{(k,t)} X^k - \left[\sum_{i=1}^{k-1} \left(tF_{(n-1-i)}^{(k,t)} + (t-1) \sum_{j=1}^i F_{(n-j)}^{(k,t)} \right) X^i \right] - tF_{(n-1)}^{(k,t)} I$$

eşitliği sağlanır [34].

İspat. İspat $k = 2$ ve $k > 2$ durumları için ayrı ayrı yapılacaktır. İlk olarak $k = 2$ olması durumunu inceleyelim. $\{F_{(n)}^{(2,t)}\}$ dizisi, $F_{(0)}^{(2,t)} = F_{(1)}^{(2,t)} = 0$, $F_{(2)}^{(2,t)} = 1$ ve $n > k$ koşulunu sağlayan tamsayılar için $F_{(n)}^{(2,t)} = (t+1)F_{(n-1)}^{(2,t)} - (t-1)F_{(n-2)}^{(2,t)} - tF_{(n-3)}^{(2,t)}$ bağıntısına sahiptir. $X^3 - (t+1)X^2 + (t-1)X + tI = \mathbf{0}$ koşulunu sağlayan X matrisi için $n > 2$ tamsayıları verildiğinde

$$X^n = F_{(n)}^{(2,t)} X^2 - \left[\sum_{i=1}^1 \left(tF_{(n-1-i)}^{(2,t)} + (t-1) \sum_{j=1}^i F_{(n-j)}^{(2,t)} \right) X^i \right] - tF_{(n-1)}^{(2,t)} I$$

veya denk olarak

$$X^n = F_{(n)}^{(2,t)} X^2 - \left[tF_{(n-2)}^{(2,t)} + (t-1)F_{(n-1)}^{(2,t)} \right] X - tF_{(n-1)}^{(2,t)} I$$

olduğunu göstermeliyiz. İspatı n üzerinden tümevarımla yapalım. Bunun için ilk olarak $n = 3$ için eşitliğin doğruluğunu gösterelim. Burada

$$F_{(n)}^{(2,t)} X^2 - \left[tF_{(n-2)}^{(2,t)} + (t-1)F_{(n-1)}^{(2,t)} \right] X - tF_{(n-1)}^{(2,t)} I$$

matrisi, $X^3 - (t+1)X^2 + (t-1)X + tI = \mathbf{0}$ eşitliği de dikkate alınarak incelenirse

$$\begin{aligned} F_{(3)}^{(2,t)} X^2 - \left[tF_{(3-2)}^{(2,t)} + (t-1)F_{(3-1)}^{(2,t)} \right] X - tF_{(3-1)}^{(2,t)} I &= (t+1)X^2 - (t-1)X - tI \\ &= X^3 \end{aligned}$$

elde edilir ve buradan $n = 3$ için eşitliğin sağlandığı görülür. Şimdi, bir $n > 2$ tamsayısı için eşitliğin doğru olduğunu kabul edip $n + 1$ için de doğru olduğunu gösterelim. Burada $X^{n+1} = X^n X$ matris eşitliğini göz önüne alalım. Bu eşitlik, dizinin başlangıç koşulları ve $X^3 - (t+1)X^2 + (t-1)X + tI = \mathbf{0}$ eşitliği ile birlikte dikkate alınırsa

$$X^{n+1} = F_{(n)}^{(2,t)} X^3 - \left[tF_{(n-2)}^{(2,t)} + (t-1)F_{(n-1)}^{(2,t)} \right] X^2 - tF_{(n-1)}^{(2,t)} X$$

olur ve bu eşitlikte işlemlere devam edildiğinde

$$\begin{aligned}
X^{n+1} &= F_{(n)}^{(2,t)} [(t+1)X^2 - (t-1)X - tI] - [tF_{(n-2)}^{(2,t)} + (t-1)F_{(n-1)}^{(2,t)}]X^2 \\
&\quad - tF_{(n-1)}^{(2,t)}X \\
&= [(t+1)F_{(n)}^{(2,t)} - tF_{(n-2)}^{(2,t)} - (t-1)F_{(n-1)}^{(2,t)}]X^2 - [(t-1)F_{(n)}^{(2,t)} + tF_{(n-1)}^{(2,t)}]X \\
&\quad - tF_{(n)}^{(2,t)}I \\
&= F_{(n+1)}^{(2,t)}X^2 - [tF_{(n-1)}^{(2,t)} + (t-1)F_{(n)}^{(2,t)}]X - tF_{(n)}^{(2,t)}I
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise eşitliğin $n+1$ için de doğru olduğunu göstermektedir ve böylece $k=2$ için ispat tamamlanır.

İspatın ikinci kısmında $k > 2$ olması durumunda $n > k$ için de eşitliğin doğru olduğunu gösterelim. İspatı yine n üzerinden tümevarımla yapacağız. Bunun için ilk olarak $n = k+1$ için eşitliğin doğru olduğunu gösterelim.

$$F_{(n)}^{(k,t)}X^k - \left[\sum_{i=1}^{k-1} \left(tF_{(n-1-i)}^{(k,t)} + (t-1) \sum_{j=1}^i F_{(n-j)}^{(k,t)} \right) X^i \right] - tF_{(n-1)}^{(k,t)}I$$

matrisi $F_{(k+1)}^{(k,t)} = t+1$ ve $F_{(k)}^{(k,t)} = 1$ başlangıç koşulları dikkate alınarak, $n = k+1$ için ele alınırsa bu matrisin

$$(t+1)X^k - \left[\sum_{i=1}^{k-1} \left(tF_{(k-i)}^{(k,t)} + (t-1) \sum_{j=1}^i F_{(k+1-j)}^{(k,t)} \right) X^i \right] - tI$$

matrisine eşit olduğu görülür. Şimdi $\sum_{i=1}^{k-1} [tF_{(k-i)}^{(k,t)} + (t-1) \sum_{j=1}^i F_{(k+1-j)}^{(k,t)}] X^i$ matrisini inceleyelim. $1 \leq i \leq k-1$ değerleri için dizinin tanımından görüleceği üzere $F_{(k-i)}^{(k,t)} = 0$ olacaktır. Yine $j=1$ olması durumunda $F_{(k+1-j)}^{(k,t)} = 1$ olur. Ayrıca $k > 2$ olduğu dikkate alınırsa $1 < j \leq k-1$ değerleri için de $F_{(k+1-j)}^{(k,t)} = 0$ olur. Tüm bu eşitliklerle birlikte $X^{k+1} - (t+1)X^k + tI + \sum_{i=1}^{k-1} (t-1)X^i = \mathbf{0}$ eşitliği de dikkate alınırsa

$$(t+1)X^k - \left[\sum_{i=1}^{k-1} \left(tF_{(k-i)}^{(k,t)} + (t-1) \sum_{j=1}^i F_{(k+1-j)}^{(k,t)} \right) X^i \right] - tI = X^{k+1}$$

elde edilir. Böylece

$$X^{k+1} = F_{(k+1)}^{(k,t)} X^k - \left[\sum_{i=1}^{k-1} \left(tF_{(k+1-1-i)}^{(k,t)} + (t-1) \sum_{j=1}^i F_{(k+1-j)}^{(k,t)} \right) X^i \right] - tF_{(k+1-1)}^{(k,t)} I$$

olur. Bu son eşitlikten istenilen eşitliğin $n = k + 1$ için doğru olduğu görülür. Son olarak, istenilen eşitliğin bir $n > k$ tamsayısı için doğruluğunu kabul ederek $n + 1$ tamsayısı için de doğru olduğunu gösterelim. Burada $X^{n+1} = X^n X$ eşitliğinde dizinin başlangıç koşulları ve toplam sembolünün özellikleri dikkate alınarak gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned} X^{n+1} &= F_{(n)}^{(k,t)} \left[(t+1)X^k - tI - \sum_{i=1}^{k-1} (t-1)X^i \right] \\ &\quad - \left[\sum_{i=1}^{k-1} \left(tF_{(n-1-i)}^{(k,t)} + (t-1) \sum_{j=1}^i F_{(n-j)}^{(k,t)} \right) X^{i+1} \right] - tF_{(n-1)}^{(k,t)} X \\ &= F_{(n+1)}^{(k,t)} X^k - tF_{(n)}^{(k,t)} I - F_{(n)}^{(k,t)} \sum_{i=1}^{k-1} (t-1)X^i \\ &\quad - \left[\sum_{i=1}^{k-2} \left(tF_{(n-1-i)}^{(k,t)} + (t-1) \sum_{j=1}^i F_{(n-j)}^{(k,t)} \right) X^{i+1} \right] - tF_{(n-1)}^{(k,t)} X \\ &= F_{(n+1)}^{(k,t)} X^k - tF_{(n)}^{(k,t)} I - F_{(n)}^{(k,t)} \sum_{i=1}^{k-1} (t-1)X^i \\ &\quad - \left[\sum_{i=1}^{k-2} \left(tF_{(n-1-i)}^{(k,t)} + (t-1) \sum_{j=1}^i F_{(n-j)}^{(k,t)} \right) X^{i+1} \right] - tF_{(n-1)}^{(k,t)} X \\ &= F_{(n+1)}^{(k,t)} X^k - tF_{(n)}^{(k,t)} I - \left[\sum_{i=1}^{k-1} \left(tF_{(n-i)}^{(k,t)} + (t-1) \sum_{j=1}^i F_{(n+1-j)}^{(k,t)} \right) X^i \right] \end{aligned}$$

olur. Böylece eşitliğin $n + 1$ için de doğru olduğu görülür ve ispat tamamlanır.

Teorem 5.3 ve Teorem 5.6, $X^{k+1} - (t+1)X^k + tI + \sum_{i=1}^{k-1} (t-1)X^i = \mathbf{0}$ koşulunu sağlayan X matrislerinin kuvvetlerinin sırasıyla $\{G_{(n)}^{(k)}\}$ ve $\{F_{(n)}^{(k,t)}\}$ dizileri yardımıyla bulunabileceğini, yani aynı matrisin kuvvetlerinin farklı diziler yardımıyla bulunabileceğini göstermektedir. Buradan yola çıkılarak bu iki dizi arasındaki ilişki aşağıdaki sonuçta verilmektedir.

Sonuç 5.7. $n > k$ tamsayıları için $F_{(n)}^{(k,t)} = h(n) = \sum_{i=0}^{n-1} t^{n-1-i} G_{(i)}^{(k)}$ eşitliği sağlanır [34].

İspat. x_i 'ler, $x^k - x^{k-1} - \dots - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri olsun. Burada köşegen

matris olan $A = \begin{pmatrix} t & & & \\ & x_1 & & \\ & & x_2 & \\ & & & \ddots \\ & & & & x_k \end{pmatrix}$ matrisini inceleyelim. $x^k - x^{k-1} - \dots - x - 1 = 0$

denkleminin köklerinin birbirinden farklı olduğunu Teorem 2.2.1.5'den biliyoruz. Ayrıca t reel sayısını da sıfırdan ve bu köklerden farklı olarak seçmiştik. Bu durumda A matrisinin karakteristik denklemi $(x^k - x^{k-1} - \dots - x - 1)(x - t) = 0$ olur. Böylece A matrisi hem Teorem 5.3'ün hem de Teorem 5.6'nın koşullarını sağlar. Böylece $n > k$ tamsayıları için

$$A^n = h(n)A^k - \left[\sum_{i=1}^{k-1} \left(h(n) - \sum_{j=1}^{i+1} G_{(n-j)}^{(k)} \right) A^i \right] - [h(n) - G_{(n-1)}^{(k)}]I \quad (5.5)$$

ve

$$A^n = F_{(n)}^{(k,t)} A^k - \left[\sum_{i=1}^{k-1} \left(tF_{(n-1-i)}^{(k,t)} + (t-1) \sum_{j=1}^i F_{(n-j)}^{(k,t)} \right) A^i \right] - tF_{(n-1)}^{(k,t)} I \quad (5.6)$$

eşitlikleri elde edilir. Şimdi

$$\begin{aligned} p_A(x) &= [h(n) - F_{(n)}^{(k,t)}] x^k \\ &\quad - \left[\sum_{i=1}^{k-1} \left(h(n) - tF_{(n-1-i)}^{(k,t)} - (t-1) \sum_{j=1}^i F_{(n-j)}^{(k,t)} - \sum_{j=1}^{i+1} G_{(n-j)}^{(k)} \right) x^i \right] \\ &\quad - [h(n) - tF_{(n-1)}^{(k,t)} - G_{(n-1)}^{(k)}] \end{aligned}$$

polinomunu inceleyelim. (5.5) ve (5.6) eşitlikleri dikkate alınırsa $p_A(A) = \mathbf{0}$ olur. A matrisinin minimal polinomuna $m_A(x)$ diyelim. A matrisinin özdeğerleri birbirinden farklıdır. Bu yüzden minimal polinomu ile karakteristik polinomu aynı olacaktır. Yani $m_A(x)$ polinomu $(k+1)$. dereceden bir polinomdur. Ayrıca $p_A(A) = \mathbf{0}$ olduğundan $m_A(x)$ polinomu $p_A(x)$ polinomunu böler. Bu ise ancak $p_A(x)$ polinomunun sıfır polinom olmasıyla mümkündür. Bu sebeple $p_A(x)$ polinomunun katsayıları 0 olacaktır ve buradan $h(n) - F_{(n)}^{(k,t)} = 0$ olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır.

Bu bölümdeki esas amacımız $\{G_{(n)}^{(k)}\}$ dizisinin elemanları için genel bir bağıntı elde etmektir. Sonuç 5.7, $\{G_{(n)}^{(k)}\}$ ve $\{F_{(n)}^{(k,t)}\}$ dizileri arasındaki ilişkiyi göstermektedir. Bu sonuç yardımıyla istediğimiz sonuca ulaşacağız. Bunun için öncelikle $t = 1$ olmak üzere $\{F_{(n)}^{(k,1)}\}$ dizisi için kullanacağımız özdeşlikler ortaya koyulacaktır.

Sonuç 5.8. $n > k$ tamsayıları için $F_{(n)}^{(k,1)} = 2^{n-k} \left[1 - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-k-1} \frac{F_{(i)}^{(k,1)}}{2^i} \right]$ eşitliği doğrudur [34].

İspat. $\{F_{(n)}^{(k,t)}\}$ dizisinin yineleme bağıntısından $F_{(n)}^{(k,1)} = 2F_{(n-1)}^{(k,1)} - F_{(n-k-1)}^{(k,1)}$ elde edilir. Bu eşitlik yardımıyla

$$\begin{aligned} F_{(n)}^{(k,1)} &= 2F_{(n-1)}^{(k,1)} - F_{(n-k-1)}^{(k,1)} \\ 2F_{(n-1)}^{(k,1)} &= 4F_{(n-2)}^{(k,1)} - 2F_{(n-k-2)}^{(k,1)} \\ &\vdots \\ 2^{n-(k+1)} F_{(k+1)}^{(k,1)} &= 2^{n-k} F_{(k)}^{(k,1)} - 2^{n-(k+1)} F_{(0)}^{(k,1)} \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$F_{(n)}^{(k,1)} = 2^{n-k} F_{(k)}^{(k,1)} - \sum_{i=0}^{n-k-1} 2^{n-k-1-i} F_{(i)}^{(k,1)} = 2^{n-k} \left[1 - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-k-1} \frac{F_{(i)}^{(k,1)}}{2^i} \right]$$

olur ve ispat tamamlanır.

Sonuç 5.9. $k \leq n \leq 2k$ tamsayıları için $F_{(n)}^{(k,1)} = 2^{n-k}$ eşitliği sağlanır [34].

İspat. $n = k$ için eşitliğin doğruluğu dizinin tanımından görülür. $k + 1 \leq n \leq 2k$ için eşitliğin doğruluğunu gösterelim. $k + 1 \leq n \leq 2k$ için $0 \leq n - k - 1 \leq k - 1$ ve dizinin tanımından $F_{(n-k-1)}^{(k,1)} = 0$ olur. Böylece $\sum_{i=0}^{n-k-1} \frac{F_{(i)}^{(k,1)}}{2^i} = 0$ olduğu görülür. Bu eşitlik ile Sonuç 5.8 kullanılırsa istenilen elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 5.10. $n \geq k$ tamsayıları için $F_{(n)}^{(k,1)} = 2^{n+1} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n+1}{k+1} \rfloor} \frac{(-1)^{i+1}}{2^{ik+i}} \binom{n-ik}{i-1}$ eşitliği doğrudur [34].

İspat. İlk olarak $k \leq n \leq 2k$ koşulunu sağlayan n tamsayıları için eşitliğin doğru olduğunu göstereceğiz. Burada, $k \leq n \leq 2k$ için $\left\lfloor \frac{n+1}{k+1} \right\rfloor = 1$ olduğu kolaylıkla görülür. Bu eşitlik kullanılırsa

$$\begin{aligned} 2^{n+1} \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n+1}{k+1} \right\rfloor} \frac{(-1)^{i+1}}{2^{ik+i}} \binom{n-ik}{i-1} &= 2^{n+1} \sum_{i=1}^1 \frac{(-1)^{i+1}}{2^{ik+i}} \binom{n-ik}{i-1} \\ &= 2^{n+1} \frac{(-1)^2}{2^{k+1}} \binom{n-k}{0} \\ &= 2^{n-k} \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç 5.9'dan $k \leq n \leq 2k$ tamsayıları için $F_{(n)}^{(k,1)} = 2^{n-k}$ olduğunu biliyoruz. Bu sebeple istenilen eşitlik elde edilir. İspatın devamında eşitliğin $2k < n$ koşulunu sağlayan n tamsayısı için doğruluğunu gösterelim. Bu kısımda ispatı güçlü tümevarımla yapalım. Öncelikle $n = 2k + 1$ için eşitliğin doğruluğunu gösterelim. Sonuç 5.9 kullanılırsa $F_{(2k)}^{(k,1)} = 2^k$ elde edilir. Ayrıca, $\{F_{(n)}^{(k,1)}\}$ dizisinin tanımından $F_{(n+1)}^{(k,1)} = 2F_{(n)}^{(k,1)} - F_{(n-k)}^{(k,1)}$ eşitliği görülür. Bu eşitliklerden $F_{(2k+1)}^{(k,1)} = 2^{k+1} - 1$ olarak bulunur. $n = 2k + 1$ için $2^{n+1} \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n+1}{k+1} \right\rfloor} \frac{(-1)^{i+1}}{2^{ik+i}} \binom{n-ik}{i-1}$ terimi incelenirse bu terimin

$$2^{2k+2} \left[\frac{(-1)^2}{2^{k+1}} \binom{2k+1-k}{1-1} + \frac{(-1)^{2+1}}{2^{2k+2}} \binom{2k+1-2k}{2-1} \right]$$

ifadesine eşit olduğu görülür ve gerekli işlemler yapılırsa

$$2^{2k+2} \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{2k+2}{k+1} \right\rfloor} \frac{(-1)^{i+1}}{2^{ik+i}} \binom{2k+1-ik}{i-1} = 2^{k+1} - 1$$

olur ve böylece $n = 2k + 1$ için eşitliğin doğru olduğu görülmektedir. Son olarak $2k + 1 \leq m \leq n$ koşulunu sağlayan m tamsayıları için eşitliğin doğru olduğunu kabul ederek $n + 1$ için de doğru olduğunu göstereceğiz. Bunun için öncelikle, kabulden dolayı $2k + 1 \leq n$ tamsayıları için

$$F_{(n)}^{(k,1)} = 2^{n+1} \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n+1}{k+1} \right\rfloor} \frac{(-1)^{i+1}}{2^{ik+i}} \binom{n-ik}{i-1} \quad (5.7)$$

eşitliğine sahibiz. Yine $2k + 1 \leq n$ olduğundan dolayı $k < n - k$ olur. Burada $n - k$ için iki durum vardır. $k < n - k \leq 2k$ ya da $2k + 1 \leq n - k$ olacaktır. Buradan

$$F_{(n-k)}^{(k,1)} = 2^{n-k+1} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-k+1}{k+1} \rfloor} \frac{(-1)^{i+1}}{2^{ik+i}} \binom{n-k-ik}{i-1} \quad (5.8)$$

eşitliğini elde ederiz. Çünkü $n - k$ için olası iki durumda da bu eşitlik yazılabilir. İspatın ilk kısmından dolayı $k \leq n \leq 2k$ için eşitliğin doğruluğunu biliyoruz. Bu sebeple $k < n - k \leq 2k$ olması durumunda (5.8) eşitliği yazılabilir. $2k + 1 \leq n - k$ olması durumunda ise bu durumdaki tamsayılar için eşitliğin doğruluğunu kabul etmiştik. Bu sebeple $2k + 1 \leq n$ tamsayıları için (5.7) yazıldığında, $n - k$ tamsayıları için de (5.8) eşitliği yazılabilir. Şimdi $F_{(n+1)}^{(k,1)} = 2F_{(n)}^{(k,1)} - F_{(n-k)}^{(k,1)}$ eşitliğinde (5.7) ve (5.8) eşitliklerini kullanacağız. Bunun için öncelikle $\lfloor \frac{n+1}{k+1} \rfloor = c$ olsun. Bu durumda

$$n + 1 = c(k + 1) + u \quad (5.9)$$

elde edilir. Burada u tamsayısı $0 \leq u < k + 1$ koşulunu sağlar. Ayrıca $n > 2k$ olduğundan $c > 1$ olur. Şimdi $u = k$ ve $u < k$ durumlarını ayrı ayrı inceleyeceğiz.

İlk olarak $u = k$ olsun. Bu durumda (5.9) eşitliğinden $n + 1 = c(k + 1) + k$ olur ve buradan $\lfloor \frac{n-k+1}{k+1} \rfloor = c$ olduğu görülür. Şimdi $F_{(n+1)}^{(k,1)} = 2F_{(n)}^{(k,1)} - F_{(n-k)}^{(k,1)}$ eşitliğinde (5.7) ve (5.8) eşitlikleri kullanılırsa

$$F_{(n+1)}^{(k,1)} = 2^{n+2} \sum_{i=1}^c \frac{(-1)^{i+1}}{2^{ik+i}} \binom{n-ik}{i-1} - 2^{n+1} \sum_{i=1}^c \frac{(-1)^{i+1}}{2^{ik+k+i}} \binom{n-k-ik}{i-1} \quad (5.10)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\sum_{i=1}^c \frac{(-1)^{i+1}}{2^{ik+i}} \binom{n-ik}{i-1} = \frac{(-1)^2}{2^{k+1}} + \sum_{i=2}^c \frac{(-1)^{i+1}}{2^{ik+i}} \binom{n-ik}{i-1} \quad (5.11)$$

ve

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^c \frac{(-1)^{i+1}}{2^{ik+k+i}} \binom{n-k-ik}{i-1} &= \sum_{i=2}^{c+1} \frac{(-1)^i}{2^{(i-1)k+k+i-1}} \binom{n-k-(i-1)k}{i-2} \\ &= \frac{(-1)^{c+1}}{2^{(c+1)k+c}} + \sum_{i=2}^c \frac{(-1)^i}{2^{ik+i-1}} \binom{n-ik}{i-2} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu son eşitlikte $n + 1 = c(k + 1) + k$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\sum_{i=1}^c \frac{(-1)^{i+1}}{2^{ik+k+i}} \binom{n-k-ik}{i-1} = \frac{(-1)^{c+1}}{2^{n+1}} + \sum_{i=2}^c \frac{(-1)^i}{2^{ik+i-1}} \binom{n-ik}{i-2} \quad (5.12)$$

elde edilir. (5.12) ve (5.11) eşitlikleri, (5.10) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} F_{(n+1)}^{(k,1)} &= 2^{n+2} \left[\frac{(-1)^2}{2^{k+1}} + \sum_{i=2}^c \frac{(-1)^{i+1}}{2^{ik+i}} \binom{n-ik}{i-1} \right] \\ &\quad - 2^{n+1} \left[\frac{(-1)^{c+1}}{2^{n+1}} + \sum_{i=2}^c \frac{(-1)^i}{2^{ik+i-1}} \binom{n-ik}{i-2} \right] \\ &= 2^{n-k+1} + 2^{n+2} \sum_{i=2}^c \frac{(-1)^{i+1}}{2^{ik+i}} \binom{n-ik}{i-1} - (-1)^{c+1} - 2^{n+1} \sum_{i=2}^c \frac{(-1)^i}{2^{ik+i-1}} \binom{n-ik}{i-2} \\ &= 2^{n-k+1} + (-1)^c + 2^{n+2} \left[\sum_{i=2}^c \frac{(-1)^{i+1}}{2^{ik+i}} \binom{n-ik}{i-1} + \sum_{i=2}^c \frac{(-1)^{i+1}}{2^{ik+i}} \binom{n-ik}{i-2} \right] \\ &= 2^{n-k+1} + (-1)^c + 2^{n+2} \sum_{i=2}^c \frac{(-1)^{i+1}}{2^{ik+i}} \left[\binom{n-ik}{i-1} + \binom{n-ik}{i-2} \right] \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu eşitlikte Pascal özdeşliği kullanılırsa

$$F_{(n+1)}^{(k,1)} = 2^{n-k+1} + (-1)^c + 2^{n+2} \sum_{i=2}^c \frac{(-1)^{i+1}}{2^{ik+i}} \binom{n+1-ik}{i-1} \quad (5.13)$$

olur. Burada $2^{n+2} \sum_{i=1}^{c+1} \frac{(-1)^{i+1}}{2^{ik+i}} \binom{n+1-ik}{i-1}$ terimi için

$$2^{n+2} \sum_{i=1}^{c+1} \frac{(-1)^{i+1}}{2^{ik+i}} \binom{n+1-ik}{i-1} = 2^{n-k+1} + 2^{n+2} \sum_{i=2}^{c+1} \frac{(-1)^{i+1}}{2^{ik+i}} \binom{n+1-ik}{i-1} \quad (5.14)$$

elde edilir. Yine,

$$\begin{aligned} 2^{n+2} \sum_{i=2}^{c+1} \frac{(-1)^{i+1}}{2^{ik+i}} \binom{n+1-ik}{i-1} &= 2^{n+2} \frac{(-1)^{c+2}}{2^{(c+1)k+c+1}} \binom{n+1-(c+1)k}{c} \\ &\quad + 2^{n+2} \sum_{i=2}^c \frac{(-1)^{i+1}}{2^{ik+i}} \binom{n+1-ik}{i-1} \end{aligned}$$

olup bu eşitlikte $n + 1 = c(k + 1) + k$ eşitliği kullanılırsa

$$2^{n+2} \sum_{i=2}^{c+1} \frac{(-1)^{i+1}}{2^{ik+i}} \binom{n+1-ik}{i-1} = (-1)^c + 2^{n+2} \sum_{i=2}^c \frac{(-1)^{i+1}}{2^{ik+i}} \binom{n+1-ik}{i-1} \quad (5.15)$$

olduğu görülür. (5.15) eşitliği, (5.14) eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} 2^{n+2} \sum_{i=1}^{c+1} \frac{(-1)^{i+1}}{2^{ik+i}} \binom{n+1-ik}{i-1} &= 2^{n-k+1} + (-1)^c \\ &+ 2^{n+2} \sum_{i=2}^c \frac{(-1)^{i+1}}{2^{ik+i}} \binom{n+1-ik}{i-1} \end{aligned}$$

olur ve burada (5.13) dikkate alınır

$$F_{(n+1)}^{(k,1)} = 2^{n+2} \sum_{i=1}^{c+1} \frac{(-1)^{i+1}}{2^{ik+i}} \binom{n+1-ik}{i-1}$$

elde edilir. Ayrıca $n+1 = c(k+1) + k$ olduğundan dolayı $\left\lfloor \frac{n+2}{k+1} \right\rfloor = c+1$ olacaktır ve böylece

$$F_{(n+1)}^{(k,1)} = 2^{n+2} \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n+2}{k+1} \right\rfloor} \frac{(-1)^{i+1}}{2^{ik+i}} \binom{n+1-ik}{i-1}$$

eşitliğine ulaşılır ve $u = k$ için istenilen eşitliğin $n+1$ için de doğru olduğu görülür.

Son olarak $0 \leq u < k$ olsun. (5.9) yardımıyla $\left\lfloor \frac{n+2}{k+1} \right\rfloor = c$ ve $\left\lfloor \frac{n-k+1}{k+1} \right\rfloor = c-1$ eşitlikleri kolaylıkla elde edilir ve (5.7) ile (5.8) dikkate alınırsa dizinin tanımından

$$F_{(n+1)}^{(k,1)} = 2^{n+2} \sum_{i=1}^c \frac{(-1)^{i+1}}{2^{ik+i}} \binom{n-ik}{i-1} - 2^{n-k+1} \sum_{i=1}^{c-1} \frac{(-1)^{i+1}}{2^{ik+i}} \binom{n-k-ik}{i-1} \quad (5.16)$$

olur. Bununla birlikte

$$\sum_{i=1}^c \frac{(-1)^{i+1}}{2^{ik+i}} \binom{n-ik}{i-1} = \frac{1}{2^{k+1}} + \sum_{i=2}^c \frac{(-1)^{i+1}}{2^{ik+i}} \binom{n-ik}{i-1} \quad (5.17)$$

olduğu kolaylıkla görülür. Ayrıca

$$\sum_{i=1}^{c-1} \frac{(-1)^{i+1}}{2^{ik+i}} \binom{n-k-ik}{i-1} = \sum_{i=2}^c \frac{(-1)^i}{2^{ik-k+i-1}} \binom{n-ik}{i-2} \quad (5.18)$$

eşitliği vardır. (5.17) ve (5.18) eşitlikleri (5.16) eşitliğinde yazılır ve toplam sembolünün özellikleri kullanılırsa

$$F_{(n+1)}^{(k,1)} = 2^{n-k+1} + 2^{n+2} \sum_{i=2}^c \frac{(-1)^{i+1}}{2^{ik+i}} \left[\binom{n-ik}{i-1} + \binom{n-ik}{i-2} \right]$$

olur. Son eşitlikte de Pascal özdeşliği kullanılırsa

$$F_{(n+1)}^{(k,1)} = 2^{n-k+1} + 2^{n+2} \sum_{i=2}^c \frac{(-1)^{i+1}}{2^{ik+i}} \binom{n+1-ik}{i-1}$$

eşitliği elde edilir. Bunların yanı sıra

$$2^{n-k+1} + 2^{n+2} \sum_{i=2}^c \frac{(-1)^{i+1}}{2^{ik+i}} \binom{n+1-ik}{i-1} = 2^{n+2} \sum_{i=1}^c \frac{(-1)^{i+1}}{2^{ik+i}} \binom{n+1-ik}{i-1}$$

olduğu kolaylıkla görülür. Böylece,

$$F_{(n+1)}^{(k,1)} = 2^{n+2} \sum_{i=1}^c \frac{(-1)^{i+1}}{2^{ik+i}} \binom{n+1-ik}{i-1}$$

olduğu görülür ve $n+1$ için de eşitlik doğru olur. Bu sebeple $0 \leq u < k$ için de istenilen elde edilir ve ispat tamamlanır.

Bu bölümde son olarak önceki sonuçlar yardımıyla ispatı elde edilen ve $\{G_{(n)}^{(k)}\}$ dizisinin elemanlarını elde etmek için bir formül ortaya koyan aşağıdaki teorem verilecektir.

Teorem 5.11. $n \geq k$ tamsayıları için

$$G_{(n)}^{(k)} = 2^{n+1} \left[\sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n+2}{k+1} \right\rfloor} \frac{(-1)^{i+1}}{2^{ik+i-1}} \binom{n+1-ik}{i-1} + \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n+1}{k+1} \right\rfloor} \frac{(-1)^i}{2^{ik+i}} \binom{n-ik}{i-1} \right]$$

eşitliği doğrudur [34].

İspat. $n = k$ için $G_{(k)}^{(k)} = 1$ olduğu dikkate alınır istenilen eşitliğe kolaylıkla ulaşılır.

$n > k$ tamsayıları için Sonuç 5.7'den $F_{(n)}^{(k,t)} = h(n) = \sum_{i=0}^{n-1} t^{n-1-i} G_{(i)}^{(k)}$ olduğunu ve yine Yardımcı Teorem 5.2'den $h(n+1) - th(n) = G_{(n)}^{(k)}$ olduğunu biliyoruz. Bu eşitlikler özel olarak $t = 1$ için yazılırsa $n > k$ tamsayısı olmak üzere

$$F_{(n+1)}^{(k,1)} - F_{(n)}^{(k,1)} = G_{(n)}^{(k)}$$

olur. Burada Sonuç 5.10 kullanılırsa

$$\begin{aligned} G_{(n)}^{(k)} &= 2^{n+2} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n+2}{k+1} \rfloor} \frac{(-1)^{i+1}}{2^{ik+i}} \binom{n+1-ik}{i-1} - 2^{n+1} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n+1}{k+1} \rfloor} \frac{(-1)^{i+1}}{2^{ik+i}} \binom{n-ik}{i-1} \\ &= 2^{n+1} \left[\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n+2}{k+1} \rfloor} \frac{(-1)^{i+1}}{2^{ik+i-1}} \binom{n+1-ik}{i-1} - \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n+1}{k+1} \rfloor} \frac{(-1)^{i+1}}{2^{ik+i}} \binom{n-ik}{i-1} \right] \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.





6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Sayı dizileri ile ilgili literatürde birçok çalışma bulunmaktadır ve son yıllarda yeni çalışmaların yapıldığı görülmektedir. Bu tür çalışmalar incelendiğinde, dizilerin terimleri arasındaki bağıntıların elde edilmesi, özel türdeki bazı denklemlerle ilişkilendirilmesi, farklı dizilerin ortak terimlerinin bulunması, diziler yardımıyla matris kuvvetlerinin elde edilmesi gibi birçok farklı yaklaşım görülmektedir.

Diziler ile ilişkili önemli bir kavram da dizinin karakteristik denklemidir. Bu denklemlerin kökleri ile dizilerin terimleri arasındaki ilişkiler farklı çalışmalarda incelenmiştir. Bunun yanında diziler ile ilişkili matrisler üzerinde çalışılırken, dizinin karakteristik denklemini sağlayan matrisler üzerinde farklı çalışmalar yapılmıştır.

Bu çalışmada diziler ile matris ilişkileri incelenirken, dizinin karakteristik denkleminde farklı denklemleri sağlayan matrisler üzerinde durulmuştur. Öncelikle $\{U_n\}$ genelleştirilmiş Fibonacci dizisi, karakteristik denklemi olan $x^2 - px - q = 0$ denklemi dışındaki bazı özel denklemlerle matrisler yardımıyla ilişkilendirilmiştir. Bunun sonucunda genelleştirilmiş Fibonacci, Tribonacci ve Lucas dizilerinin terimleri için özdeşlikler elde edilmiştir. Ayrıca genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas sayı dizileri yardımıyla bu matrislerin kökleri ve Moore-Penrose terslerinin elde edilmesi için sonuçlar verilmiştir. Daha sonra ise Fibonacci dizisinin bir diğer genelleştirmesi olan k -genelleştirilmiş Fibonacci dizisi, kendi karakteristik denkleminde farklı bir denklem ile matrisler yardımıyla ilişkilendirilmiştir. Bunun sonucunda, k -genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin terimlerini elde etmek için kullanılabilecek bir formül matrisler yardımıyla ortaya koyulmuştur.

Yapılan çalışmada ortaya koyulan sonuçlardan görüleceği üzere, dizileri kendi karakteristik denklemi dışındaki denklemler ile matrisler yardımıyla ilişkilendirmek yeni sonuçların elde edilmesine olanak sağlamıştır. Bu sonuçlardan bazıları literatürde mevcut olsa da bu çalışmada onların alternatif ispatları elde edilmiştir. Bu şekilde, sayı dizilerinin farklı denklemleri sağlayan matrisler ile ilişkileri incelenerek yeni sonuçlar elde edilmesi üzerinde çalışılabilir. Örneğin, bu çalışmada kullanılan $\{U_n\}$ genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin daha yüksek dereceli uygun denklemleri sağlayan

matrisler ile ilişkileri incelenerek yeni sonuçların elde edilmesi üzerinde çalışılabilir. Yine literatürde mevcut olan diğer sayı dizileri için de benzer metotlar kullanılarak farklı sonuçlar elde edilmesi üzerinde durulabilir. Bunun yanında çalışma içerisinde yer alan matris köklerinin bulunması, Moore-Penrose terslerinin elde edilmesi gibi matrisler ile ilgili farklı uygulamalar üzerinde çalışılabilir. Böylece sayı dizilerinin kullanılabileceği yeni alanların elde edilmesine fırsat doğabilir.

Çalışma içerisinde elde edilen sonuçlar ve bu sonuçların elde ediliş yöntemleri dikkate alındığında tüm bu yapılanların yeni çalışmalar için yol gösterici olacağı düşünülmektedir.



KAYNAKLAR

- [1] Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas numbers with applications*. John Wiley & Sons. <https://doi.org/10.1002/9781118033067>
- [2] Gould, H. W. (1981). A history of the Fibonacci Q-matrix and a higher-dimensional problem. *The Fibonacci Quarterly*, 19(3), 250-257.
- [3] Keskin, R., ve Demirtürk, B. (2010). Some new Fibonacci and Lucas identities by matrix methods. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(3), 379-387. <https://doi.org/10.1080/00207390903236426>
- [4] Kalman, D., ve Mena, R. (2003). The Fibonacci numbers exposed. *Mathematics Magazine*, 76(3), 167-181. <https://doi.org/10.1080/0025570X.2003.11953176>
- [5] Şiar, Z., ve Keskin, R. (2013). Some new identities concerning generalized Fibonacci and Lucas numbers. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 42(3), 211-222.
- [6] Ribenboim, P. (2000). *My numbers, my friends: Popular lectures on number theory*. Springer-Verlag New York. <https://doi.org/10.1007/b98892>
- [7] Bruggles, I. D., ve Hoggatt, V. E. (2013). A Primer on the Fibonacci sequence, part IV. *The Fibonacci Quarterly*, 1(4), 65-71.
- [8] Özdemir, H., Karakaya, S., & Petik, T. (2020). On characterizations of some linear combinations involving the matrices Q and R . *Honam Mathematical Journal*, 42(2), 235-249. <https://doi.org/10.5831/HMJ.2020.42.2.235>
- [9] Feinberg, M. (1963). Fibonacci–Tribonacci. *The Fibonacci Quarterly*, 1(3), 70-74.
- [10] Koshy, T. (2014) *Pell and Pell–Lucas Numbers with Applications*. Springer New York.
- [11] Johnsonbaugh, R. (2018). *Discrete mathematics* (8nd ed.). Pearson.
- [12] Brualdi, R. A. (2010). *Introductory combinatorics* (5nd ed.). Pearson/Prentice Hall.
- [13] Karakaya, S., Özdemir, H., & Petik, T. (2018). 3×3 dimensional special matrices associated with Fibonacci and Lucas numbers. *Sakarya University Journal of Science*, 22(6), 1917-1922.
- [14] Harville, D. A. (1997). *Matrix algebra from a statistician's perspective*. Springer-Verlag New York.
- [15] Horn, R. A., ve Johnson, C. R. (2012). *Matrix analysis*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511810817>
- [16] Anton, H., ve Rorres, C. (2010). *Elementary linear algebra applications version* (10nd ed.). John Willey & Sons.

- [17] Psarrakos, P. J. (2002). On the m th roots of a complex matrix. *The Electronic Journal of Linear Algebra*, 9, 32-41. <https://doi.org/10.13001/1081-3810.1071>
- [18] Bronson, R., Costa, G. B. ve Saccoman, J. T. (2013). *Linear algebra algorithms, applications, and techniques* (3rd ed.). Elsevier.
- [19] Ben-Israel, A., ve Thomas, N. E. G. (2003). *Generalized inverses: Theory and applications*. Springer-Verlag New York.
- [20] Vajda, S. (1989). *Fibonacci & Lucas Numbers and the Golden Section, Theory and Applications*. Chichester: Ellis Horwood Ltd.
- [21] Soykan, Y. (2020). Summing formulas for generalized Tribonacci numbers. *Universal Journal of Mathematics and Applications*, 3(1), 1-11. <https://doi.org/10.32323/ujma.637876>
- [22] Shannon, A., Anderson, P., & Horadam, A. (2006). Properties of Cordonnier, Perrin and Van der Laan numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 37(7), 825-831. <https://doi.org/10.1080/00207390600712554>
- [23] Ivie, J. (1972). A general Q -matrix. *The Fibonacci Quarterly*, 10(3), 255-261.
- [24] Pethő, A. (2021). On k -generalized Fibonacci numbers with negative indices. *Publicationes Mathematicae-Debrecen*, 98(3-4), 401-418.
- [25] Dresden, G. P., ve Zhaohui, D. (2014). A simplified Binet formula for k -generalized Fibonacci numbers. *Journal of Integer Sequences*, 17(4), 14.4.7.
- [26] Lee, G. Y., Lee, S. G., Kim, J. S., & Shin, H. K. (2001). The Binet formula and representations of k -generalized Fibonacci numbers. *The Fibonacci Quarterly*, 39(2), 158-164.
- [27] Miles (Jr.), E. P. (1960). Generalized Fibonacci numbers and associated matrices. *The American Mathematical Monthly*, 67(8), 745-752. <https://doi.org/10.1080/00029890.1960.11989593>
- [28] Waddill, M. E. (1991). *Using matrix techniques to establish properties of a generalized Tribonacci sequence. applications of Fibonacci numbers*. Springer, Dordrecht. 299-308. https://doi.org/10.1007/978-94-011-3586-3_33
- [29] Özdemir, H., Karakaya, S., & Petik, T. (2021). On some 3×3 dimensional matrices associated with generalized Fibonacci numbers. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 27(3), 63-72. <https://doi.org/10.7546/nntdm.2021.27.3.63-72>
- [30] Demirtürk Bitim, B., ve Topal, N. (2019). (p, q) -Fibonacci and (p, q) -Lucas sums by derivatives of some polynomials. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 68(2), 1733-1741. <https://doi.org/10.31801/cfsuasmas.551883>
- [31] Özdemir, H., Karakaya, S., & Petik, T. (2022). Notes on generalized Fibonacci numbers and matrices. *Honam Mathematical Journal*, 44(4), 473-484. <https://doi.org/10.5831/HMJ.2022.44.4.473>
- [32] Koshy, T. (2011). Fibonacci, Lucas, and Pell numbers, and Pascal's triangle. *Mathematical Spectrum*, 43(3), 125-132.

- [33] Howard F. T., ve Cooper, C. (2011). Some identities for r -Fibonacci numbers. *The Fibonacci Quarterly*, 149, 158-164.
- [34] Özdemir, H., ve Karakaya, S. (2024). On some properties of k -generalized Fibonacci numbers. *Mathematical Communications*, 29, 193-202.
- [35] Lee, G.-Y., Lee, S.-G., & Shin, H.-G. (1997). On the k -generalized Fibonacci matrix Q_k . *Linear Algebra and its applications*, 251, 73-88. [https://doi.org/10.1016/0024-3795\(95\)00553-6](https://doi.org/10.1016/0024-3795(95)00553-6)





ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Sinan KARAKAYA

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2012, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği
- **Yükseklisans** : 2018, Sakarya Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

- 2012 yılından itibaren Milli Eğitim Bakanlığı'nda öğretmen olarak çalışmaktadır.

TEZDEN TÜRETİLEN ESERLER:

- Özdemir, H., Karakaya, S. ve Petik, T. 2021. On some 3×3 dimensional matrices associated with generalized Fibonacci numbers, *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 27(3), 63-72.
- Özdemir, H. ve Karakaya, S. (2021, 10, Aralık). Matrisler vasıtasıyla genelleştirilmiş Fibonacci sayıları ile ilgili bazı özdeşlikler. *Prof. Dr. Cemil YAPAR Anısına Ulusal Matematik ve İstatistik Sempozyumu*, Ordu, Turkey.
- Özdemir, H., Karakaya, S. ve Petik, T. 2022. Notes on generalized Fibonacci numbers and matrices, *Honam Mathematical Journal*, 44(4), 473-484.
- Özdemir, H. ve Karakaya, S. 2024. On some properties of k -generalized Fibonacci numbers, *Mathematical Communications*, 29, 193-202.

DİĞER ESERLER:

- Karakaya, S., Özdemir, H. ve Petik, T. 2018. 3×3 dimensional special matrices associated with Fibonacci and Lucas numbers, *Sakarya University Journal of Science*, 22(6), 1917-1922.

- Özdemir, H., Karakaya, S. ve Petik, T. 2020. On characterizations of some linear combinations involving the matrices Q and R , *Honam Mathematical Journal*, 42(2), 235-249.

