

MAYIS 2019

Yüksek Lisans Tezi-Matematik

RESUL ATEŞ

TÜRKİYE CUMHURİYETİ
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ÖZEL POLİNOMLARIN q -UMBRAL ANALİZ
ÜZERİNDEKİ UYGULAMALARI

MATEMATİK
YÜKSEK LİSANS TEZİ

RESUL ATEŞ
MAYIS 2019

**BAZI ÖZEL POLİNOMLARIN q -UMBRAL ANALİZ
ÜZERİNDEKİ UYGULAMALARI**

Gaziantep Üniversitesi

Matematik

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Prof. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ

Resul ATEŞ

Mayıs 2019



©2019[Resul ATEŞ]

TÜRKİYE CUMHURİYETİ
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tezin Adı : Bazı Özel Polinomların q -Umbral Analiz Üzerindeki
Uygulamaları

Öğrencinin Adı Soyadı: Resul ATEŞ

Tez Savunma Tarihi : 23.05.2019

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

Prof. Dr. A. Necmeddin YAZICI
Enstitü Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylıyorum.

Prof. Dr. Adil KILIÇ
Enstitü Anabilim Dalı Başkanı

Bu tez tarafımda okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ
Danışman

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:

İmzası

Prof. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ

.....

Dr. Öğr. Üyesi Şükran UYGUN

.....

Dr. Öğr. Üyesi Serkan ARACI

.....

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilmek suretiyle tezde yer aldığını beyan ederim.

Resul ATEŞ

ABSTRACT

APPLICATIONS OF SOME SPECIAL POLYNOMIALS ON q -UMBRAL CALCULUS

ATEŞ, Resul

M.Sc. in Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ

May 2019

58 pages

In this thesis, q -umbral calculus is studied. By giving some definitions, theorems and properties belonging to q -umbral calculus, q -Sheffer sequences with their q -Appell and q -associated sequences that are subclass of these sequences are investigated. In addition, by making use of the methods of q -umbral calculus, some fundamental properties of q -Euler and q -Bernoulli polynomials that are families of special polynomials are researched on applications of q -umbral calculus. As the application of q -umbral calculus, modified Apostol type q -Bernoulli polynomials, a new family of polynomial, are defined and new identities are obtained. Furthermore, these polynomials are related to q -Euler polynomials by means of q -umbral calculus methods.

Key Words: q -Umbral calculus, q -Euler polynomials, q -Bernoulli polynomials,
 q -Apostol-Bernoulli polynomials

ÖZET

BAZI ÖZEL POLİNOMLARIN q -UMBRAL ANALİZ ÜZERİNDEKİ UYGULAMALARI

ATEŞ, Resul

Yüksek Lisans Tezi, Matematik

Danışman: Prof. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ

Mayıs 2019

58 sayfa

Bu tezde, q -umbral analiz çalışılmıştır. q -Umbral analiz'e ait tanım, teorem ve bazı özellikler verilerek q -Sheffer dizileri ile bu dizilerin alt sınıfı olan q -Appell ve q -ilişkili diziler üzerindeki etkileri incelenmiştir. Ayrıca, q -umbral analiz yöntemleri yardımıyla, özel polinomlar ailesinden iki tanesi olan q -Euler ve q -Bernoulli polinomlarının bazı temel özelliklerinin q -umbral analiz üzerindeki uygulamaları araştırılmıştır. q -Umbral analiz'in uygulaması olarak yeni bir polinom ailesi olan modifiye edilmiş q -Apostol-Bernoulli polinomları tanımlanmış ve yeni özdeşlikler elde edilmiştir. Ayrıca, bu polinomların q -umbral analiz yöntemleri yardımıyla q -Euler polinomlarıyla ilişkili olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: q -Umbral analiz, q -Euler polinomları, q -Bernoulli polinomları, q -Apostol-Bernoulli polinomları



“Çok kıymetli aileme”

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması süresince tüm bilgi, birikim ve tecrübelerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, hiç bir konuda desteğini benden esirgemeyen saygıdeğer danışman hocam, sayın Prof. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ'e sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışma süresince ilgi ve önerilerini göstermekten kaçınmayıp yardımlarını hiç esirgemeyen değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Serkan ARACI'ya teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışmalarım boyunca beni hep destekleyen, güvenen ve beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan çok sevdiğim aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ABSTRACT	v
ÖZET.....	vi
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
SEMBOLLER LİSTESİ.....	x
BÖLÜM I: GİRİŞ	1
BÖLÜM II: ÖN BİLGİLER	3
2.1. Temel Kavramlar.....	3
2.2. q -Analiz.....	7
BÖLÜM III: q -UMBRAL ANALİZ.....	9
3.1. q -Lineer Fonksiyoneller	9
3.2. q -Lineer Operatörler.....	19
3.3. q -Sheffer Dizileri	25
3.4. q -İlişkili Diziler.....	34
3.5. q -Appell Dizileri	35
3.6. Örnekler.....	37
3.6.1. Yüksek Mertebeden q -Euler Polinomları.....	37
3.6.2. Yüksek Mertebeden q -Bernoulli Polinomları	39
BÖLÜM IV: BULGULAR	42
KAYNAKLAR	58

SEMBOLLER LİSTESİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathcal{F}$	Formal kuvvet serilerinin kümesi
$\mathcal{P}$	Tek değişkenli polinomlar kümesi
$\mathcal{P}^*$	$\mathcal{P}$ üzerindeki bütün q -lineer fonksiyonların vektör uzayı
$\langle L p(x) \rangle$	L q -lineer fonksiyonelinin $p(x)$ polinomuna etkisi
$o(f(t))$	$f(t)$ serisinin mertebesi
$\delta_{n,k}$	Kronecker delta fonksiyonu
$der(p(x))$	$p(x)$ polinomunun derecesi
$\partial_t f(t)$	t parametresine göre q -türev operatörü
$[n]_q$	n sayısının q -benzeri
$S_n(x)$	Derecesi n olan q -Sheffer dizisi
$E_n^{(a)}(x)$	Mertebesi a , derecesi n olan Euler polinomları
$E_{n,q}(x)$	n . dereceden q -Euler polinomları
$E_{n,q}^{(a)}(x)$	Mertebesi a , derecesi n olan q -Euler polinomları
$B_n^{(a)}(x)$	Mertebesi a , derecesi n olan Bernoulli polinomları
$B_{n,q}^{(a)}(x)$	Mertebesi a , derecesi n olan q -Bernoulli polinomları
$B_{n,q}(x, \lambda)$	n . dereceden q -Apostol-Bernoulli polinomları

$B_{n,q}^*(x, \lambda)$	n . dereceden modifiye edilmiş q -Apostol-Bernoulli polinomları
$B_{n,q}^*(\lambda)$	n . dereceden modifiye edilmiş q -Apostol-Bernoulli sayıları
$\bar{B}_{n,q}^{(r)}(x, \lambda)$	Mertebesi r , derecesi n olan modifiye edilmiş q -Apostol-Bernoulli polinomları
$\bar{B}_{n,q}^{(r)}(\lambda)$	Mertebesi r , derecesi n olan modifiye edilmiş q -Apostol-Bernoulli sayıları



BÖLÜM I

GİRİŞ

Umbral analiz, çeşitli polinomlarla kuvvet serileri arasında bağlantı kuran bir teoridir. Modern cebirin basit tekniklerini kullanarak, uygulamalı matematikte büyük rol oynayan polinom dizilerinden özellikle Sheffer diziler ailesini sistematik olarak çalışır. Bir çok kaynakta farklı şekillerde verilen bazı teoremlerin ispatları, umbral analiz metotlarıyla farklı şekilde yapılır. Umbral analizin fizik, istatistik, olasılık teorisi, kombinatorik, topoloji, graf teorisi, bilgisayar bilimleri gibi bir çok alanda uygulaması vardır.

Umbral analizin tarihi 17. yüzyıla dayanır. Fakat yükselişi 19. yüzyılda başlamıştır. Bu dönemde Sylvester, Cayley, Blissard gibi bazı matematikçilerin çalışmaları olmuştur. Geniş kullanımına rağmen, bu dönemde umbral analiz sadece “sihirli kurallar” olarak bahsedilen ispatsız kurallara sahipti. 1880’li yıllarda Appell’in polinomlar üzerinde bazı çalışmaları ve 1890’lı yıllarda da Pincherle’nin lineer operatörlerle ilgili çalışmaları olmasına rağmen 1939 yılına kadar Sheffer dizileri ile umbral analizin bağlantısı kurulamamıştır. 1940 yılında Eric Temple Bell’in girişimlerine ek olarak, 1970’li yıllarda Gian-Carlo Rota ve Steven Roman günümüzde kullanılan Modern Klasik Umbral Analizin temel yapısını ortaya koymuştur. Dolayısıyla temel olarak umbral analizin gelişimi, bugün de birçok matematikçi tarafından çalışılan önemli bir konu olan Sheffer polinomları teorisinin ortaya atılmasıyla olmuştur. Özellikle ünlü matematikçi Appell’in yaptığı çalışmalar, bazı özel polinomların formal kuvvet serileriyle olan ilişkilerini ortaya koymuştur. Bu polinomlar Sheffer ve Appell polinomları olarak bilinir. Ayrıca fonksiyonel analizin gelişmesiyle umbral analizin operatör teorisiyle olan bağlantısı incelenmeye başlanmıştır. Böylece umbral analizin temel teorisi ortaya konulmuştur.

Bu tezde, c_n -umbral analizin bir özel hali olan ve $c_n = [n]_q!$ alınarak elde edilen q -umbral analiz çalışılmıştır. q -Umbral analizin q -Sheffer, q -ilişkili ve q -Appell dizilerine uygulanışı gösterilmiştir. Ayrıca bu dizilerin bazı özel polinomlar üzerindeki uygulamalarına değinilmiştir.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm, umbral analizin tarihçesi ve tez hakkında kısa özet içeren içinde bulunduğumuz giriş bölümüdür.

İkinci bölüm, tezde kullanılan bazı temel kavram ve tanımlar ile birlikte q -analiz'e ait tanımlamaları, notasyonları ve formülleri içeren ön bilgiler bölümüdür.

Üçüncü bölümde, q -umbral analiz'e ait tanım ve teoremler verilerek q -Sheffer dizileri ve bu dizilerin alt sınıfı olan q -Appell ile q -ilişkili diziler üzerindeki etkileri incelenmiştir. Ayrıca örnek olarak bazı özel polinomlar üzerindeki uygulamaları verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise, modifiye edilmiş q -Apostol-Bernoulli polinomları tanımlanarak q -umbral analiz yöntemleri yardımıyla yeni teoremler ve özdeşlikler elde edilmiştir. Ayrıca, modifiye edilmiş q -Apostol-Bernoulli polinomları ile q -Euler polinomları arasında bağlantı kurulmuştur.

BÖLÜM II

ÖN BİLGİLER

2.1 Temel Kavramlar

Bu kısımda, tezde kullanılan bazı temel kavramlara ve tanımlara yer verilmiştir. Bu kavramlara ve tanımlara lisans düzeyindeki analiz kitaplarından ulaşılabilir.

Tanım 2.1.1: n bir doğal sayı ve $f_n: S \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ şeklinde tanımlanan bir fonksiyon dizisi olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde bütün $z \in S$ noktaları ve her $n \geq n_0$ sayısı için $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan bir $n_0 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı bulunabilirse, (f_n) fonksiyon dizisine S kümesi üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsıyor denir.

Tanım 2.1.2: $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$$

şeklindeki bir seriye kuvvet serisi adı verilir. Burada a serinin merkezi ve $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ sabitleri de serinin reel katsayılarıdır.

Özel olarak $a = 0$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

formunda bir kuvvet serisi yazılabilir.

Tanım 2.1.3: f fonksiyonu, a noktasını ihtiva eden bir aralıkta her kereden türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} \\ &+ \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \cdots \end{aligned}$$

serisine f fonksiyonu tarafından a noktasında üretilen Taylor serisi denir.

Özel olarak $a = 0$ için yazılan Taylor serisine Maclaurin serisi adı verilir.

Tanım 2.1.4: $K \in \mathbb{R}$ için $|t| < K$ bölgesinde

$$G(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x) \frac{t^k}{k!}$$

şeklinde ifade edilebiliyorsa $G(x, t)$ fonksiyonuna $g_k(x)$ fonksiyon dizisinin üreteç fonksiyonu denir.

Tanım 2.1.5: $n \in \mathbb{N}$, $a_j \in \mathbb{R}$ ve $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ olmak üzere, $a_n \neq 0$ için

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

şeklinde tanımlanan ifadelere n . dereceden polinom adı verilir.

Polinom dizileri analizde ve uygulamalı matematikte çok önemli rol oynarlar. Örneğin, $H_n(x)$ Hermite polinomları

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

ikinci dereceden lineer diferansiyel denkleminin bir çözümüdür [2]. Diğer bir örnek, Hermite polinomları için Rodrigues formülü

$$H_n(x) = e^{x^2} D^n e^{-x^2}$$

gibi bazı özel polinomlar için operatör içeren formüller elde edilebilir [2]. Ayrıca üreteç fonksiyonları yardımıyla yüksek mertebeden Euler ve Bernoulli polinomları

$$\sum_{k=0}^{\infty} E_k^{(a)}(x) \frac{t^k}{k!} = \left(\frac{2}{e^t + 1} \right)^a e^{xt}$$

ve

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k^{(a)}(x) \frac{t^k}{k!} = \left(\frac{t}{e^t - 1} \right)^a e^{xt}$$

gibi birçok alanda uygulaması olan bazı özel polinomlar ve bunların çeşitli özellikleri verilebilir [2]. Özel olarak $a = 1$ için Euler ve Bernoulli polinomlarının üreteç fonksiyonları ve daha fazla bilgi için [10,11] nolu kaynaklara başvurulabilir.

Tanım 2.1.6: Polinom dizilerinin en önemlilerinden birisi, $S_n(x)$ ile gösterilen Sheffer dizileridir. Bir $S_n(x)$ dizisinin Sheffer dizisi olabilmesi için gerek ve yeter şart $A_0 \neq 0$ ve $B_1 \neq 0$ olmak üzere

$$A(t) = A_0 + A_1t + A_2t^2 + \dots$$

ve

$$B(t) = B_1t + B_2t^2 + \dots$$

iken

$$\sum_{k=0}^{\infty} S_k(x) \frac{t^k}{k!} = A(t)e^{xB(t)}$$

olmasıdır [2].

Tanım 2.1.7: Yakınsaklığı araştırılmadan açılımı yazılan ve kullanılan kuvvet serisine formal kuvvet serisi denir.

Formal kuvvet serileri, umbral analizde önemli bir rol oynadığından dolayı kullanımlarıyla ilgili bazı temel kavramlara yer verilmelidir. Formal kuvvet serileri ile ilgili bazı ispatlara ve daha fazla bilgiye [9] nolu kaynaktan ulaşılabilir.

$\mathbb{C}$, karakteristik sıfırın bir cismi ve $\mathcal{F}$ kümesi de $\mathbb{C}$ cismi üzerinde tanımlı tek değişkenli tüm formal kuvvet serilerinin kümesi olsun. Dolayısıyla $\mathcal{F}$ kümesinin bir elemanı olan bir $f(t)$ serisi, $a_k \in \mathbb{C}$ sayı dizisi için

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$$

formundadır.

Tanım 2.1.8: İki formal kuvvet serisinin eşit olabilmesi için gerek ve yeter şart t parametresinin benzer kuvvetlerinin katsayılarının eşit olmasıdır. Formal kuvvet serilerinin toplam ve çarpım işlemleri

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) t^k$$

ve

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} \right) t^k$$

şeklinde tanımlanırsa $\mathcal{F}$ kümesi sıfır bölen olmaksızın bir cebirdir. Ayrıca buradaki formal çarpım Cauchy çarpımıdır.

Tanım 2.1.9: $o(f(t))$ notasyonu ile gösterilen bir $f(t)$ kuvvet serisinin mertebesi, katsayısı sıfır olmayan t^k terimleri içindeki en küçük k tamsayıdır [1-7]. $f(t) = 0$ ise $o(f(t)) = +\infty$ olduğu kabul edilir. Ayrıca

$$o(f(t)g(t)) = o(f(t)) + o(g(t))$$

ve

$$o(f(t) + g(t)) \geq \min\{o(f(t)), o(g(t))\}$$

özellikleri sağlanır.

Tanım 2.1.10: $f(t)$ serisinin $f(t)^{-1}$ veya $1/f(t)$ ile gösterilen çarpımsal bir terse sahip olabilmesi için gerek ve yeter şart $o(f(t)) = 0$ olmasıdır. Bu durumda $f(t)$ serisine tersinirdir denir [1-7].

Özellik 2.1.11: $f_k(t)$, $\mathcal{F}$ kümesinde bir dizi olsun ve $k \rightarrow \infty$ iken $o(f_k(t)) \rightarrow \infty$ olduğunu varsayalım. Daha sonra herhangi bir

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$$

serisi için t parametresine bağlı

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k f_k(t)$$

şeklinde yeni bir formal kuvvet serisi oluşturulabilir. Özel olarak $o(f(t)) \geq 1$ için $f_k(t) = f(t)^k$ alınırsa $g(t)$ ile $f(t)$ nin bileşkesi

$$g(f(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k f(t)^k$$

olur. Ayrıca $o(g(f(t))) = o(g(t))o(f(t))$ olduğu açıktır.

Tanım 2.1.12: Eğer $o(f(t)) = 1$ ise $f(t)$ formal kuvvet serisi, $f(\bar{f}(t)) = \bar{f}(f(t)) = t$ olacak şekilde bir $\bar{f}(t)$ bileşke tersine sahiptir. $o(f(t)) = 1$ olan bir $f(t)$ serisi delta serisi olarak adlandırılır [1-7].

Bir delta serisinin kuvveti olan $f(t)^k$ terimleri, $\mathcal{F}$ için bir sözde baz (pseudobaz) oluşturur. Yani, herhangi bir a_k sabiti için

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k f(t)^k$$

olacak şekilde tek bir $g(t) \in \mathcal{F}$ vardır.

Özellik 2.1.13: Eğer $f(t) \in \mathcal{F}$ ise $f(t)$ serisinin t parametresine göre türevi

$$\partial_t f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1}$$

dir.

Tanım 2.1.14: Kronecker delta fonksiyonu $n, k \geq 0$ için

$$\delta_{n,k} = \begin{cases} 1, & n = k \text{ ise} \\ 0, & n \neq k \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

2.2 q -Analiz

Tezin bu kısmındaki q -analiz ile ilgili temel özellikler [8] nolu kaynaktan alınmıştır.

Tanım 2.2.1: q parametresi kompleks bir sayı olsun. $|q| < 1$ koşulu altında

$$[n]_q = \frac{1 - q^n}{1 - q} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} q^i$$

ifadesine n sayısının q -benzeri denir.

Bu tanımda $q \rightarrow 1^-$ için

$$\lim_{q \rightarrow 1^-} [n]_q = n$$

sayısı elde edilir.

Özellik 2.2.2: q -toplam ve q -çarpım formülleri

$$[n + m]_q = [n]_q + q^n [m]_q$$

ve

$$[nm]_q = [n]_q [m]_{q^n}$$

şeklindedir.

Tanım 2.2.3: Bir $f(x)$ fonksiyonunun q -türevi

$$D_q f(x) = \frac{d_q f(x)}{d_q x} = \frac{f(qx) - f(x)}{(q - 1)x}$$

olarak tanımlıdır.

Bu tanımdan

$$\lim_{q \rightarrow 1^-} D_q f(x) = \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{f(qx) - f(x)}{(q - 1)x} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

ifadesi elde edilir.

Tanım 2.2.4: $0 < a < b < \infty$ olmak üzere belirli q -integrali

$$\int_a^b f(x) d_q x = \int_0^b f(x) d_q x - \int_0^a f(x) d_q x$$

ve

$$\int_0^b f(x) d_q x = (1 - q)b \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(bq^n)$$

eşitlikleri ile tanımlanır.

Örnek 2.2.5: Yukarıdaki tanımda $f(x) = x^n$ alınırsa

$$\int_0^1 x^n d_q x = \frac{1}{[n+1]_q}$$

sonucu elde edilir.

Tanım 2.2.6: $n, k \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$[n]_q! = \begin{cases} [n]_q [n-1]_q \dots [2]_q [1]_q, & n \geq 1 \\ 1, & n = 0 \end{cases},$$

ifadesine n sayısının q -faktoriyeli,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q! [n-k]_q!}$$

ifadesine ise q -binom katsayısı denir.

Tanım 2.2.7: q -üstel fonksiyonu $e_q(x)$

$$e_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]_q!} = 1 + x + \frac{x^2}{[2]_q!} + \frac{x^3}{[3]_q!} + \dots$$

şeklinde tanımlanır.

Burada $q \rightarrow 1^-$ için

$$\lim_{q \rightarrow 1^-} e_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

klasik analizde iyi bilinen e^x üstel fonksiyonu elde edilir.

BÖLÜM III

q -UMBRAL ANALİZ

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $c_n \neq 0$ ve $q \neq 1$ olmak üzere $c_n = [n]_q!$ alınarak Steven Roman tarafından q -umbral analiz kavramı tanımlanmıştır [1,2]. Bu bölümde verilen tüm tanım, teorem, sonuç ve örnekler [1,2] nolu kaynaklardan ulaşılabilir.

3.1 q -Lineer Fonksiyoneller

$\mathbb{P}$, $\mathbb{C}$ cismi üzerindeki tek değişkenli polinomların bir cebiri ve $\mathbb{P}^*$ ise $\mathbb{P}$ kümesi üzerinde tanımlı bütün q -lineer fonksiyonellerden oluşan bir vektör uzayı olsun. $\mathbb{P}^*$ kümesindeki q -lineer fonksiyonellerin $\mathbb{P}$ kümesindeki bir $p(x)$ polinomu üzerindeki etkisini belirtmek için fizikten alıntı yapılan

$$\langle L|p(x) \rangle$$

notasyonu kullanılır ve $c \in \mathbb{C}$ için

$$\langle L + M|p(x) \rangle = \langle L|p(x) \rangle + \langle M|p(x) \rangle$$

$$\langle cL|p(x) \rangle = c\langle L|p(x) \rangle$$

lineerlik özellikleri sağlanır [1-6].

$\mathbb{C}$, karakteristik sıfırın bir cismi olmak üzere, $\mathcal{F}$ de $\mathbb{C}$ cismi üzerinde tanımlı tek değişkenli tüm formal kuvvet serilerinin kümesi olsun. Dolayısıyla $\mathcal{F}$ kümesi

$$\mathcal{F} = \left\{ f: f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{t^k}{[k]_q!}, \quad (a_k \in \mathbb{C}) \right\}$$

şeklinde tanımlanır [3-6].

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{t^k}{[k]_q!} \tag{3.1.1}$$

formundaki formal kuvvet serisi, $n \geq 0$ için

$$\langle f(t)|x^n \rangle = a_n \tag{3.1.2}$$

şeklinde $\mathbb{P}$ kümesi üzerinde bir q -lineer fonksiyonel tanımlar [1-7]. $\mathbb{P}$ kümesi üzerindeki bir q -lineer fonksiyonel, bir formal kuvvet serisi ile temsil edilebilir. Yani, $\mathbb{P}$ kümesi üzerindeki bir q -lineer fonksiyonel ile bir formal kuvvet serisi arasında birebir ilişki vardır. $f(t)$, hem bir formal kuvvet serisi hem de bir q -lineer

fonksiyonel olarak kullanılmaktadır. Dolayısıyla, $\mathcal{F}$ kümesinin iki elemanı $f(t)$ ve $g(t)$ nin formal kuvvet serileri olarak eşit olabilmesi için gerek ve yeter şart q -lineer fonksiyonel olarak eşit olmalarıdır. Yani; $f(t), g(t) \in \mathcal{F}$ ve $\forall n \geq 0$ için

$$f(t) = g(t) \Leftrightarrow \langle f(t)|x^n \rangle = \langle g(t)|x^n \rangle$$

dir. Özel olarak, $f(t) = t^k$ alındığında $n, k \geq 0$ için

$$\langle t^k|x^n \rangle = [n]_q! \delta_{n,k} \quad (3.1.3)$$

olur [3,5,6]. Ayrıca (3.1.2) eşitliğinden

$$\left\langle \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{t^k}{[k]_q!} \middle| x^n \right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{[k]_q!} \langle t^k|x^n \rangle$$

yazılabilir ve dolayısıyla herhangi bir $p(x) \in P$ için

$$\left\langle \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{t^k}{[k]_q!} \middle| p(x) \right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{[k]_q!} \langle t^k|p(x) \rangle$$

olur.

P^* kümesi üzerindeki herhangi bir L q -lineer fonksiyoneli, (3.1.1) formunda yazılabilir. Dolayısıyla,

$$f_L(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle L|x^k \rangle \frac{t^k}{[k]_q!} \quad (3.1.4)$$

yazılırsa,

$$\begin{aligned} \langle f_L(t)|x^n \rangle &= \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \langle L|x^k \rangle \frac{t^k}{[k]_q!} \middle| x^n \right\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle L|x^k \rangle}{[k]_q!} \langle t^k|x^n \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle L|x^k \rangle}{[k]_q!} [n]_q! \delta_{n,k} \\ &= \langle L|x^n \rangle \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece q -lineer fonksiyonel olarak $f_L(t) = L$ eşitliği bulunur [1-6].

Teorem 3.1.1: $L \rightarrow f_L(t)$ dönüşümü, P^* kümesinden $\mathcal{F}$ kümesine bir vektör uzayı izomorfizmidir [1-6].

İspat: $\forall k \geq 0$ için $\langle L|x^k \rangle = \langle M|x^k \rangle \Leftrightarrow L = M$ olduğundan $f_L(t) = f_M(t)$ dir ve dolayısıyla dönüşüm birebir ve örtendir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} f_{L+M}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \langle L+M|x^k \rangle \frac{t^k}{[k]_q!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \langle L|x^k \rangle \frac{t^k}{[k]_q!} + \sum_{k=0}^{\infty} \langle M|x^k \rangle \frac{t^k}{[k]_q!} \\ &= f_L(t) + f_M(t) \end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$f_{cL}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle cL|x^k \rangle \frac{t^k}{[k]_q!} = \sum_{k=0}^{\infty} c \langle L|x^k \rangle \frac{t^k}{[k]_q!} = c \sum_{k=0}^{\infty} \langle L|x^k \rangle \frac{t^k}{[k]_q!} = c f_L(t)$$

sağlanır. Böylece dönüşüm bir vektör uzayı izomorfizmidir.

Tüm bu işlemler doğrultusunda, P kümesi üzerindeki bütün q -lineer fonksiyonellerin vektör uzayı üzerinde formal kuvvet serilerinin cebir yapısı oluşturulmuş olur. Bu şekilde elde edilen cebire q -umbral cebir denir. Bu cebir yöntemleri ile oluşturulan analize de q -umbral analiz adı verilir. Örneğin; P kümesi üzerindeki q -lineer fonksiyonellerin en önemlilerinden birisi, $y \in \mathbb{C}$ için q -değerlendirme fonksiyoneli $\langle e_q(yt)|x^n \rangle$

$$\begin{aligned} \langle e_q(yt)|x^n \rangle &= \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} y^k \frac{t^k}{[k]_q!} \middle| x^n \right\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{[k]_q!} \langle t^k | x^n \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{[k]_q!} [n]_q! \delta_{n,k} \\ &= y^n \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır [1-7]. Yukarıdaki ifadenin bir genellemesi olarak polinomlar ailesinden alınan her bir $p(x)$ için

$$\langle e_q(yt)|p(x) \rangle = p(y) \quad (3.1.5)$$

eşitliği yazılabilir [1-7].

Önerme 3.1.2: $o(f(t)) > der(p(x))$ ise

$$\langle f(t)|p(x) \rangle = 0$$

dır [1,2].

İspat: $o(f(t)) > n$ olduğunda (3.1.2) eşitliğinden dolayı $\langle f(t)|x^n \rangle = 0$ olduğu açıktır ve buradan

$$\langle f(t)|p(x) \rangle = 0$$

elde edilir.

Önerme 3.1.3: $f(t) \in \mathcal{F}$ ise

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle f(t)|x^k \rangle \frac{t^k}{[k]_q!} \quad (3.1.6)$$

dir [1-6].

İspat: Eşitliğin sağ tarafına x^n etki ettirilirse

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \langle f(t)|x^k \rangle \frac{t^k}{[k]_q!} \middle| x^n \right\rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle f(t)|x^k \rangle}{[k]_q!} \langle t^k|x^n \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{[k]_q!} [n]_q! \delta_{n,k} \\ &= a_n \\ &= \langle f(t)|x^n \rangle \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (3.1.6) eşitliğinin her iki tarafı da q -lineer fonksiyonel olarak ve dolayısıyla formal kuvvet serileri olarak eşit olur.

Önerme 3.1.4: $p(x) \in P$ ise

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle t^k|p(x) \rangle \frac{x^k}{[k]_q!} \quad (3.1.7)$$

dir [1-6].

İspat: Eşitliğin her iki tarafına t^n uygulanırsa

$$\begin{aligned} \langle t^n|p(x) \rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle t^k|p(x) \rangle}{[k]_q!} \langle t^n|x^k \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle t^k|p(x) \rangle}{[k]_q!} [k]_q! \delta_{k,n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \langle t^k | p(x) \rangle \delta_{k,n} \\
&= \langle t^n | p(x) \rangle
\end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 3.1.5: $f(t), g(t) \in \mathcal{F}$ ise

$$\langle f(t)g(t) | x^n \rangle = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \langle f(t) | x^k \rangle \langle g(t) | x^{n-k} \rangle$$

dir.

İspat: $f(t)$ ve $g(t)$, (3.1.6) formunda yazılıp Cauchy çarpımı uygulanırsa

$$\begin{aligned}
f(t)g(t) &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} \langle f(t) | x^m \rangle \frac{t^m}{[m]_q!} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \langle g(t) | x^m \rangle \frac{t^m}{[m]_q!} \right) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^m \langle f(t) | x^k \rangle \frac{t^k}{[k]_q!} \langle g(t) | x^{m-k} \rangle \frac{t^{m-k}}{[m-k]_q!} \right) \frac{[m]_q!}{[m]_q!} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^m \frac{[m]_q!}{[k]_q! [m-k]_q!} \langle f(t) | x^k \rangle \langle g(t) | x^{m-k} \rangle \right) \frac{t^m}{[m]_q!}
\end{aligned}$$

olur. Daha sonra her iki tarafa da q -lineer fonksiyonel olarak x^n etki ettirilirse (3.1.2) eşitliğinden istenen sonuç elde edilir.

Bulunan bu sonucu tümevarım ile birkaç q -lineer fonksiyonel çarpıma genişletmek mümkündür.

Önerme 3.1.6: $f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t) \in \mathcal{F}$ ise

$$\langle f_1(t)f_2(t) \dots f_m(t) | x^n \rangle = \sum_{i_1 + \dots + i_m = n} \begin{bmatrix} n \\ i_1, \dots, i_m \end{bmatrix}_q \prod_{j=1}^m \langle f_j(t) | x^{i_j} \rangle$$

dir [2,3,5]. Burada $\begin{bmatrix} n \\ i_1, \dots, i_m \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[i_1]_q! \dots [i_m]_q!}$ dir.

Önerme 3.1.7: $\forall k \geq 0$ için $o(f_k(t)) = k$ olsun. O zaman $\forall p(x) \in P$ için

$$\left\langle \sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k(t) \middle| p(x) \right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \langle f_k(t) | p(x) \rangle$$

dir [2].

İspat: $der(p(x)) = d$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\left\langle \sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k(t) \middle| p(x) \right\rangle &= \left\langle \sum_{k=0}^d a_k f_k(t) + \sum_{k=d+1}^{\infty} a_k f_k(t) \middle| p(x) \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{k=0}^d a_k f_k(t) \middle| p(x) \right\rangle + \left\langle \sum_{k=d+1}^{\infty} a_k f_k(t) \middle| p(x) \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{k=0}^d a_k f_k(t) \middle| p(x) \right\rangle \\
&= \sum_{k=0}^d a_k \langle f_k(t) | p(x) \rangle \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \langle f_k(t) | p(x) \rangle
\end{aligned}$$

bulunur.

Önerme 3.1.8: $\forall k \geq 0$ için $o(f_k(t)) = k$ olsun.

$$\langle f_k(t) | p(x) \rangle = \langle f_k(t) | q(x) \rangle$$

ise $p(x) = q(x)$ olur [2].

İspat: $f_k(t)$ dizisi, $\mathcal{F}$ kümesi için bir sözde baz (pseudobaz) oluşturduğundan, $\forall n \geq 0$ için

$$t^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} f_k(t)$$

olacak şekilde $a_{n,k}$ sabitleri vardır. Böylece;

$$\langle t^n | p(x) \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} \langle f_k(t) | p(x) \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} \langle f_k(t) | q(x) \rangle = \langle t^n | q(x) \rangle$$

olur ve (3.1.7) eşitliği kullanılarak $p(x) = q(x)$ olduğu görülür.

Sonuç 3.1.9: $\forall k \geq 0$ için $o(f_k(t)) = k$ ve $\langle f_k(t) | p(x) \rangle = 0$ ise, o zaman

- $p(x) = 0$
- $o(f_k(t)) > der(p(x))$
- $f_k(t) = 0$

ifadeleri sağlanır [1,2].

Önerme 3.1.10: $\forall k \geq 0$ için $der(p_k(x)) = k$ olsun.

$$\langle f(t)|p_k(x)\rangle = \langle g(t)|p_k(x)\rangle$$

ise, $f(t) = g(t)$ olur [2].

İspat: $\forall n \geq 0$ için öyle $a_{n,k}$ sabitleri vardır ki

$$x^n = \sum_{k=0}^n a_{n,k} p_k(x)$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} \langle f(t)|x^n\rangle &= \left\langle f(t) \left| \sum_{k=0}^n a_{n,k} p_k(x) \right. \right\rangle \\ &= \sum_{k=0}^n a_{n,k} \langle f(t)|p_k(x)\rangle \\ &= \sum_{k=0}^n a_{n,k} \langle g(t)|p_k(x)\rangle \\ &= \langle g(t)|x^n\rangle \end{aligned}$$

elde edilir ve (3.1.6) eşitliği gösterir ki $f(t) = g(t)$ dir.

Açıklama 3.1.11: Herhangi bir $p(x)$ polinomu için

$$\langle t^k|p(x)\rangle = p^{(k)}(0)$$

ve

$$\langle t^0|p(x)\rangle = p(0)$$

dır [1-6]. Yani, t^k q -lineer fonksiyonelinin bir $p(x)$ polinomuna etkisi polinomun k . q -türevinin sıfırdaki değerine eşittir.

Açıklama 3.1.12: $f(t) \in \mathcal{F}$ delta serisi bir q -lineer fonksiyonel olarak düşünülürse q -delta fonksiyoneli terimi kullanılır. Benzer şekilde, $f(t) \in \mathcal{F}$ tersinir serisi bir q -lineer fonksiyonel olarak düşünülürse q -tersinir fonksiyonel ifadesi kullanılır [1,2].

Önerme 3.1.13: $f(t)$ serisinin q -delta fonksiyoneli olması için gerek ve yeter şart

$$\langle f(t)|1\rangle = 0 \text{ ve } \langle f(t)|x\rangle \neq 0$$

olmasıdır [2].

Önerme 3.1.14: $f(t)$ serisinin q -tersinir fonksiyonel olması için gerek ve yeter şart

$$\langle f(t)|1\rangle \neq 0$$

olmasıdır [2].

Önerme 3.1.15: $f(t)$ bir delta serisi ve

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k f(t)^k$$

ise,

$$\langle g(t) | x^n \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \langle f(t)^k | x^n \rangle$$

olur [1].

İspat:

$$\begin{aligned} \langle g(t) | x^n \rangle &= \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} a_k f(t)^k \middle| x^n \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=0}^n a_k f(t)^k \middle| x^n \right\rangle \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \langle f(t)^k | x^n \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \langle f(t)^k | x^n \rangle \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.16: $f(t) \in \mathcal{F}$ olsun. $\forall p(x) \in P$ polinomu için

$$\langle \partial_t f(t) | p(x) \rangle = \langle f(t) | xp(x) \rangle$$

eşitliği sağlanır [1,2].

İspat: Bu teoremin ispatı için $p(x) = x^n$ polinomunun seçilmesi yeterlidir.

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{t^k}{[k]_q!}$$

ve

$$\partial_t t^k = \begin{cases} [k]_q t^{k-1} & , \quad k \geq 1 \text{ ise} \\ 0 & , \quad k = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

ifadeleri ile birlikte lineerlik özelliklerinden dolayı

$$\begin{aligned}
\langle \partial_t f(t) | x^n \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{t^{k-1}}{[k-1]_q!} \middle| x^n \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} \frac{t^k}{[k]_q!} \middle| x^n \right\rangle \\
&= a_{n+1} \\
&= \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{t^k}{[k]_q!} \middle| x^{n+1} \right\rangle \\
&= \langle f(t) | x x^n \rangle
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada x^n yerine $p(x)$ yazılırsa teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Önerme 3.1.17: $p(x) \in P$ ve $a \in \mathbb{C}$ olsun. $\forall f(t) \in \mathcal{F}$ için

$$\langle f(t) | p(ax) \rangle = \langle f(at) | p(x) \rangle$$

dir [2].

İspat: Özel olarak

$$f(t) = t^n \text{ ve } p(x) = x^k \quad (3.1.8)$$

alınırsa

$$\begin{aligned}
\langle t^n | (ax)^k \rangle &= a^k [n]_q! \delta_{n,k} \\
&= a^n [n]_q! \delta_{n,k} \\
&= \langle (at)^n | x^k \rangle
\end{aligned} \quad (3.1.9)$$

elde edilir. (3.1.8) ve (3.1.9) eşitliklerinden

$$\langle f(t) | p(ax) \rangle = \langle f(at) | p(x) \rangle$$

olduğu görülür. Bu da ispatlanması istenen eşitliktir.

Bu kısım, şimdiye kadarki teoremleri ve önermeleri kapsayan birkaç q -lineer fonksiyonel örnekleriyle tamamlanacaktır.

Örnek 3.1.18: q -değerlendirme fonksiyoneli $\langle e_q(yt) | p(x) \rangle$, q -tersinir fonksiyoneldir ve $p(x)$ polinomuna etkisi

$$\langle e_q(yt) | p(x) \rangle = p(y)$$

dir.

Örnek 3.1.19: q -ileri fark fonksiyoneli $\langle e_q(yt) - 1 | p(x) \rangle$, q -delta fonksiyoneldir ve $p(x)$ polinomuna etkisi

$$\langle e_q(yt) - 1 | p(x) \rangle = \langle e_q(yt) | p(x) \rangle - \langle 1 | p(x) \rangle = p(y) - p(0)$$

dır.

Örnek 3.1.20: q -Abel fonksiyoneli $\langle te_q(yt) | x^n \rangle$, q -delta fonksiyoneldir ve

$$\begin{aligned} \langle te_q(yt) | x^n \rangle &= \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} y^k \frac{t^{k+1}}{[k]_q!} \middle| x^n \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} y^{k-1} \frac{t^k}{[k-1]_q!} \middle| x^n \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[k]_q!}{[k-1]_q!} y^{k-1} \frac{t^k}{[k]_q!} \middle| x^n \right\rangle \\ &= \frac{[n]_q!}{[n-1]_q!} y^{n-1} \\ &= \partial_y y^n \end{aligned}$$

olduğundan $p(x)$ polinomuna etkisi

$$\langle te_q(yt) | p(x) \rangle = D_q p(y)$$

olur. Burada D_q q -türev operatörüdür.

Örnek 3.1.21: $(1-t)^{-1}$ q -tersinir fonksiyonelinin x^n e etkisi

$$\langle (1-t)^{-1} | x^n \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} t^k \middle| x^n \right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \langle t^k | x^n \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} [n]_q! \delta_{n,k} = [n]_q!$$

dir.

Örnek 3.1.22: $\frac{1+e_q(yt)}{2}$ q -tersinir fonksiyonelinin $p(x)$ polinomuna etkisi

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1+e_q(yt)}{2} \middle| p(x) \right\rangle &= \frac{1}{2} \langle 1 + e_q(yt) | p(x) \rangle \\ &= \frac{1}{2} [\langle 1 | p(x) \rangle + \langle e_q(yt) | p(x) \rangle] \\ &= \frac{p(0) + p(y)}{2} \end{aligned}$$

dir. Tersi olan $\frac{2}{1+e_q(yt)}$, q -Euler polinomları ile ilişkilidir.

3.2 q -Lineer Operatörler

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{t^k}{[k]_q!} \quad (3.2.1)$$

formundaki formal kuvvet serisi, $\mathcal{F}$ kümesi üzerinde

$$f(t)x^n = \sum_{k=0}^n [n]_q \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q a_k x^{n-k} \quad (3.2.2)$$

şeklinde bir $f(t)$ q -lineer operatörü tanımlar. Örnek olarak; $f(t) = e_q(yt)$ alınırsa

$$e_q(yt)x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{[k]_q!} t^k x^n = \sum_{k=0}^n [n]_q \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q y^k x^{n-k}$$

eşitliği elde edilir [2,7].

Bu kısımda $f(t)$, hem bir formal kuvvet serisi hem de bir q -lineer operatör olarak kullanılmaktadır. Dolayısıyla, $f(t)$ ve $g(t)$ nin formal kuvvet serileri olarak eşit olabilmesi için gerek ve yeter şart q -lineer operatör olarak eşit olmalarıdır. Yani; $f(t), g(t) \in \mathcal{F}$ ve $\forall n \geq 0$ için

$$f(t) = g(t) \Leftrightarrow f(t)x^n = g(t)x^n.$$

Uyarı 3.2.1: $f(t)$ q -operatörünün $p(x)$ polinomuna etkisini belirtmek için $f(t)p(x)$ notasyonunun kullanıldığına dikkat edilmelidir.

Böylece, $\mathcal{F}$ kümesinin elemanları q -umbral analizde; formal kuvvet serisi, q -lineer fonksiyonel ve q -lineer operatör olmak üzere üç rol oynamaktadır.

$f(t)$ bir q -lineer fonksiyonel ise; $f(t)$ q -lineer fonksiyonelinin $p(x)$ polinomuna etkisi

$$\langle f(t) | p(x) \rangle$$

notasyonu ile,

$f(t)$ bir q -lineer operatör ise; $f(t)$ q -lineer operatörünün $p(x)$ polinomuna etkisi

$$f(t)p(x)$$

notasyonu ile gösterilir.

$\mathcal{P}$ kümesi üzerinde k . q -türev operatörü için t^k notasyonu kullanılır. Yani,

$$t^k x^n = \begin{cases} \frac{[n]_q!}{[n-k]_q!} x^{n-k} & , \quad n \geq k \text{ ise} \\ 0 & , \quad n < k \text{ ise} \end{cases}$$

dır. Ayrıca

$$\begin{aligned}
(t^k t^j) x^n &= t^{k+j} x^n \\
&= \frac{[n]_q!}{[n-k-j]_q!} x^{n-k-j} \\
&= \frac{[n]_q!}{[n-j]_q!} \frac{[n-j]_q!}{[n-k-j]_q!} x^{n-k-j} \\
&= \frac{[n]_q!}{[n-j]_q!} t^k x^{n-j} \\
&= t^k (t^j x^n)
\end{aligned}$$

olduğundan her $f(t), g(t) \in \mathcal{F}$ ve her $p(x) \in P$ için

$$[f(t)g(t)]p(x) = f(t)[g(t)p(x)] \quad (3.2.3)$$

sonucuna varılır ve buradan belirsizlik olmaksızın

$$f(t)g(t)p(x) = g(t)f(t)p(x)$$

yazılabilir [1,2].

t^0 operatörüne birim operatör denir. Ayrıca, bir $f(t)$ delta serisi q -lineer operatör olarak düşünüldüğünde buna bir q -delta operatörü, $f(t)$ tersinir serisi q -lineer operatör olarak düşünüldüğünde ise, buna bir q -tersinir operatör denir [1,2].

Önerme 3.2.2: $o(f(t)) > der(p(x))$ ise, $f(t)p(x) = 0$ dır [2].

İspat: $o(f(t)) > n$ olduğunda (3.2.2) eşitliğinden dolayı $f(t)x^n = 0$ olduğu açıktır ve buradan $f(t)p(x) = 0$ elde edilir.

Önerme 3.2.3: $\forall k \geq 0$ için $o(f_k(t)) = k$ olsun. O zaman $\forall p(x) \in P$ için

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k(t) \right] p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k [f_k(t)p(x)]$$

dir [2].

İspat: $der(p(x)) = d$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k(t) \right] p(x) &= \left[\sum_{k=0}^d a_k f_k(t) + \sum_{k=d+1}^{\infty} a_k f_k(t) \right] p(x) \\
&= \left[\sum_{k=0}^d a_k f_k(t) \right] p(x) + \left[\sum_{k=d+1}^{\infty} a_k f_k(t) \right] p(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\sum_{k=0}^d a_k f_k(t) \right] p(x) \\
&= \sum_{k=0}^d a_k [f_k(t) p(x)] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_k [f_k(t) p(x)]
\end{aligned}$$

bulunur.

Önerme 3.2.4: $\forall k \geq 0$ için $o(f_k(t)) = k$ olsun.

$$f_k(t)p(x) = f_k(t)q(x)$$

ise, $p(x) = q(x)$ olur [2].

İspat: $f_k(t)$ dizisi, $\mathcal{F}$ kümesi için bir sözde baz (pseudobaz) oluşturduğundan, $\forall n \geq 0$ için

$$t^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} f_k(t)$$

olacak şekilde $a_{n,k}$ sabitleri vardır. Böylece;

$$\begin{aligned}
t^n p(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} f_k(t) p(x) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} f_k(t) q(x) \\
&= t^n q(x)
\end{aligned}$$

olur ve buradan $p(x) = q(x)$ elde edilir.

Önerme 3.2.5: $\forall k \geq 0$ için $der(p_k(x)) = k$ olsun.

$$f(t)p_k(x) = g(t)p_k(x)$$

ise, $f(t) = g(t)$ olur [2].

İspat: $\forall n \geq 0$ için öyle $a_{n,k}$ sabitleri vardır ki

$$x^n = \sum_{k=0}^n a_{n,k} p_k(x)$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}
f(t)x^n &= \sum_{k=0}^n a_{n,k}f(t)p_k(x) \\
&= \sum_{k=0}^n a_{n,k}g(t)p_k(x) \\
&= g(t)x^n
\end{aligned}$$

elde edilir ve buradan $f(t) = g(t)$ olur.

q -lineer fonksiyonel olan $f(t)$ ile q -lineer operatör olan $f(t)$ arasındaki ilişki, sıradaki teoremden verilmiştir.

Teorem 3.2.6: $f(t), g(t) \in \mathcal{F}$ olsun. $\forall p(x) \in P$ için

$$\langle g(t)f(t)|p(x) \rangle = \langle g(t)|f(t)p(x) \rangle$$

dir [1-7].

İspat: Özel olarak $g(t) = t^k$, $f(t) = t^j$ ve $p(x) = x^n$ olsun. Lineerlik özelliğinden dolayı

$$\begin{aligned}
\langle t^k t^j | x^n \rangle &= \langle t^{k+j} | x^n \rangle \\
&= [n]_q! \delta_{n,k+j} \\
&= \frac{[n]_q!}{[n-j]_q!} [n-j]_q! \delta_{n-j,k} \\
&= \left\langle t^k \left| \frac{[n]_q!}{[n-j]_q!} x^{n-j} \right. \right\rangle \\
&= \langle t^k | t^j x^n \rangle
\end{aligned}$$

elde edilir.

Özel olarak $g(t) = t^0$ birim operatörü alındığında

$$\langle f(t)|p(x) \rangle = \langle t^0|f(t)p(x) \rangle$$

olduğu görülür.

Lemma 3.2.7: $f(t)$ bir q -delta operatörü ve T , $f(t)$ ile yer değiştirebilen, yani, $\forall p(x) \in P$ polinomu için

$$f(t)[Tp(x)] = T[f(t)p(x)]$$

yazılabilen P üzerinde bir q -lineer operatör olsun. O zaman her $p(x)$ için

$$\text{der}(Tp(x)) \leq \text{der}(p(x))$$

dir [2].

İspat: Sonucun sağlanmadığı kabul edilirse

$$\text{der}(Tx^m) \geq m + 1$$

olacak şekilde bir $m \geq 0$ tamsayısı mevcut olacaktır. Şimdi, $o(f(t)) = 1$ olduğundan dolayı $\text{der}(p(x)) > 0$ olduğunda

$$\text{der}(f(t)p(x)) = \text{der}(p(x)) - 1$$

olduğu açıktır. Buradan

$$0 = Tf(t)^{m+1}x^m = f(t)^{m+1}Tx^m \neq 0$$

elde edilir. Bu çelişki lemmayı ispatlar.

Teorem 3.2.8: P üzerindeki bir T q -lineer operatörünün $\forall p(x) \in P$ için $Tp(x) = f(t)p(x)$ olacak şekilde $f(t) \in \mathcal{F}$ formunda olabilmesi için gerek ve yeter şart t q -türev operatörü ile yer değiştirmesidir, yani $\forall p(x) \in P$ için

$$T[tp(x)] = t[Tp(x)]$$

olmasıdır [1,2].

İspat: T operatörünün $f(t) \in \mathcal{F}$ formunda olduğunu varsayalım. O zaman $T, \mathcal{F}$ kümesindeki bütün operatörlerle yer değiştirebilir. Tersine, T nin t q -türev operatörü ile yer değiştirdiğini varsayalım. $f(t)$ serisi

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle t^0 | Tx^k \rangle \frac{t^k}{[k]_q!}$$

şeklinde tanımlanırsa

$$\begin{aligned} f(t)x^n &= \sum_{k=0}^{\infty} \langle t^0 | Tx^k \rangle \frac{t^k}{[k]_q!} x^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle t^0 | Tx^k \rangle}{[k]_q!} t^k x^n \\ &= \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \langle t^0 | Tx^k \rangle x^{n-k} \end{aligned}$$

olur. Daha sonra

$$\frac{[k]_q!}{[n]_q!} t^{n-k} x^n = \frac{[k]_q! [n]_q!}{[n]_q! [k]_q!} x^k = x^k$$

eşitliği ve Teorem 3.2.6 kullanılarak

$$\begin{aligned}
\langle t^0 | T x^k \rangle &= \frac{[k]_q!}{[n]_q!} \langle t^0 | T t^{n-k} x^n \rangle \\
&= \frac{[k]_q!}{[n]_q!} \langle t^0 | t^{n-k} T x^n \rangle \\
&= \frac{[k]_q!}{[n]_q!} \langle t^{n-k} | T x^n \rangle
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
f(t)x^n &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{[n-k]_q!} \langle t^{n-k} | T x^n \rangle x^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^n \langle t^k | T x^n \rangle \frac{x^k}{[k]_q!} \\
&= T x^n
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla T operatörü $f(t) \in \mathcal{F}$ formundadır ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.2.9: P üzerindeki bir T q -lineer operatörünün $f(t) \in \mathcal{F}$ formunda olabilmesi için gerek ve yeter şart herhangi bir q -delta operatörü ile yer değiştirmesidir [1,2].

Gerçekten; T operatörü $f(t) \in \mathcal{F}$ formunda ise $\mathcal{F}$ deki herhangi bir q -operatör ile yer değiştirebilir. Tersine, bazı q -delta operatörü $f(t)$ için $Tf(t) = f(t)T$ olduğunu varsayalım. O zaman

$$t = \sum_{k=0}^{\infty} a_k f(t)^k$$

olacak şekilde a_k sabitleri vardır. Lemma 3.2.7 kullanılarak

$$\begin{aligned}
Ttx^n &= T \sum_{k=0}^n a_k f(t)^k x^n \\
&= \sum_{k=0}^n a_k f(t)^k T x^n \\
&= t T x^n
\end{aligned}$$

olduğu görülür ve buradan Teorem 3.2.8 e göre sonuç sağlanır.

Sonuç 3.2.10: P üzerindeki bir T q -lineer operatörünün $f(t) \in \mathcal{F}$ formunda olabilmesi için gerek ve yeter şart $e_q(yt)$ q -operatörü ile yer değiştirmesidir [1,2].

3.3 q -Sheffer Dizileri

Bu kısımda q -Sheffer dizileri tanıtılarak bu dizilerin bazı temel özellikleri verilecektir. Bir $S_n(x)$ polinom dizisi ile her zaman $der(S_n(x)) = n$ olduğu kastedilecektir.

Teorem 3.3.1: $f(t)$ bir delta serisi ve $g(t)$ bir tersinir seri olsun. $\forall n, k \geq 0$ için

$$\langle g(t)f(t)^k | S_n(x) \rangle = [n]_q! \delta_{n,k} \quad (3.3.1)$$

özdeşliğini sağlayan tek bir $S_n(x) \in P$ dizisi vardır [1-7].

İspat: Teklik, Önerme 3.1.8 den sağlanır. Varlık için ise;

$$S_n(x) = \sum_{j=0}^n a_{n,j} x^j \quad (a_{n,n} \neq 0)$$

ve

$$g(t)f(t)^k = \sum_{i=k}^{\infty} b_{k,i} t^i \quad (b_{k,k} \neq 0)$$

olduğunu varsayalım. O zaman (3.3.1) özdeşliği

$$\begin{aligned} [n]_q! \delta_{n,k} &= \left\langle \sum_{i=k}^{\infty} b_{k,i} t^i \left| \sum_{j=0}^n a_{n,j} x^j \right. \right\rangle \\ &= \sum_{i=k}^{\infty} \sum_{j=0}^n b_{k,i} a_{n,j} \langle t^i | x^j \rangle \\ &= \sum_{i=k}^{\infty} \sum_{j=0}^n b_{k,i} a_{n,j} [j]_q! \delta_{j,i} \\ &= \sum_{j=k}^n b_{k,j} a_{n,j} [j]_q! \end{aligned}$$

olur. $k = n$ alınarak

$$a_{n,n} = \frac{1}{b_{n,n}}$$

elde edilir ve ardışık olarak $k = n-1, n-2, \dots, 0$ alınırsa $a_{n,k}$ için çözülebilen üçgensel bir denklem sistemi elde edilir.

(3.3.1) eşitliğindeki $S_n(x)$ dizisinin, $(g(t), f(t))$ çifti için q -Sheffer dizisi olduğu ya da $(g(t), f(t))$ için q -Sheffer olduğu söylenecektir. Burada $g(t)$ nin tersinir seri ve $f(t)$ nin de delta serisi olması gerektiğine dikkat edilmelidir.

Özel olarak düşünülmesi gereken iki tip q -Sheffer dizisi vardır. $g(t) = t^0$ durumunda; $(t^0, f(t))$ için q -Sheffer dizisi, $f(t)$ için q -ilişkili dizi olarak adlandırılır ve $S_n(x)$, $f(t)$ ye q -ilişkilidir ya da $f(t)$, $S_n(x)$ e q -ilişkilidir denilebilir.

$f(t) = t$ durumunda; $(g(t), t)$ için q -Sheffer dizisi, $g(t)$ için q -Appell dizisi olarak adlandırılır ve $S_n(x)$, $g(t)$ için q -Appell'dir denir.

Sıradaki iki teorem q -umbral analizde en çok kullanılan teoremlerdendir. Birincisi, herhangi bir kuvvet serisinin $g(t)f(t)^k$ geometrik dizisi açısından nasıl ifade edilebileceğini göstermektedir.

Teorem 3.3.2 (q -Genişleme Teoremi): $S_n(x)$, $(g(t), f(t))$ çifti için q -Sheffer olsun. O zaman herhangi bir $h(t) \in \mathcal{F}$ için

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle h(t) | S_k(x) \rangle}{[k]_q!} g(t) f(t)^k$$

dir [1-6].

İspat: Denklemin sağ tarafına $S_n(x)$ dizisi etki ettirilirse

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle h(t) | S_k(x) \rangle}{[k]_q!} g(t) f(t)^k \middle| S_n(x) \right\rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle h(t) | S_k(x) \rangle}{[k]_q!} \langle g(t) f(t)^k | S_n(x) \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle h(t) | S_k(x) \rangle}{[k]_q!} [n]_q! \delta_{n,k} \\ &= \langle h(t) | S_n(x) \rangle \end{aligned}$$

olur ve Önerme 3.1.10 gereğince

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle h(t) | S_k(x) \rangle}{[k]_q!} g(t) f(t)^k$$

elde edilir.

q -genişleme teoreminin polinom benzeri olan aşağıdaki teorem ise bir q -Sheffer dizisinden polinomların bir lineer birleşimi olarak keyfî bir polinomun nasıl ifade edilebileceğini göstermektedir.

Teorem 3.3.3 (q -Polinom Genişleme Teoremi): $S_n(x)$, $(g(t), f(t))$ çifti için q -Sheffer olsun. O zaman herhangi bir $p(x) \in P$ polinomu için

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle g(t) f(t)^k | p(x) \rangle}{[k]_q!} S_k(x)$$

dir [1-6].

İspat: Denklemin sağ tarafına $g(t)f(t)$ uygulandığında

$$\begin{aligned} \left\langle g(t)f(t) \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle g(t)f(t)^k | p(x) \rangle}{[k]_q!} S_k(x) \right. \right\rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle g(t)f(t)^k | p(x) \rangle}{[k]_q!} \langle g(t)f(t) | S_k(x) \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle g(t)f(t)^k | p(x) \rangle}{[k]_q!} [k]_q! \delta_{k,1} \\ &= \langle g(t)f(t) | p(x) \rangle \end{aligned}$$

olur ve Önerme 3.1.8 gereğince

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle g(t)f(t)^k | p(x) \rangle}{[k]_q!} S_k(x)$$

elde edilir.

Şimdiki amaç q -Sheffer dizilerini birkaç yönden karakterize etmektir.

Teorem 3.3.4 (Üreteç Fonksiyonu): $S_n(x)$ dizisinin $(g(t), f(t))$ için q -Sheffer olabilmesi için gerek ve yeter şart her $y \in \mathbb{C}$ için

$$\frac{1}{g(\bar{f}(t))} e_q(y\bar{f}(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k(y)}{[k]_q!} t^k \quad (3.3.2)$$

olmasıdır [1-6]. Burada $\bar{f}(t)$, $f(t)$ nin tersidir.

İspat: Eğer $S_n(x)$, $(g(t), f(t))$ için q -Sheffer ise, o zaman q -genişleme teoreminde $h(t) = e_q(yt)$ alınırsa

$$e_q(yt) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle e_q(yt) | S_k(x) \rangle}{[k]_q!} g(t)f(t)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k(y)}{[k]_q!} g(t)f(t)^k$$

olur. Buradan

$$\frac{1}{g(t)} e_q(yt) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k(y)}{[k]_q!} f(t)^k$$

yazılır ve sonuç olarak

$$\frac{1}{g(\bar{f}(t))} e_q(y\bar{f}(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k(y)}{[k]_q!} t^k$$

elde edilir. Tersine, (3.3.2) eşitliğinin sağlandığını varsayalım. O halde $r_n(x)$, $(g(t), f(t))$ için q -Sheffer ise

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_k(y)}{[k]_q!} t^k = \frac{1}{g(\bar{f}(t))} e_q(y\bar{f}(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k(y)}{[k]_q!} t^k$$

olur ve buradan $\forall y \in \mathbb{C}$ için $r_k(y) = S_k(y)$ yazılır ki bu $\forall k \geq 0$ için $r_k(x) = S_k(x)$ anlamına gelir.

Teorem 3.3.5: $S_n(x)$ dizisinin $(g(t), f(t))$ için q -Sheffer olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{[k]_q!} \left\langle g(\bar{f}(t))^{-1} \bar{f}(t)^k \middle| x^n \right\rangle x^k \quad (3.3.3)$$

olmasıdır [1,2].

İspat: (3.3.2) denkleminin sağ tarafına x^n etki ettirilirse

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k(y)}{[k]_q!} t^k \middle| x^n \right\rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k(y)}{[k]_q!} \langle t^k | x^n \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k(y)}{[k]_q!} [n]_q! \delta_{n,k} \\ &= S_n(y) \end{aligned}$$

olur ve sol tarafına x^n etki ettirilirse

$$\begin{aligned} \left\langle g(\bar{f}(t))^{-1} e_q(y\bar{f}(t)) \middle| x^n \right\rangle &= \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{[k]_q!} g(\bar{f}(t))^{-1} \bar{f}(t)^k \middle| x^n \right\rangle \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{y^k}{[k]_q!} \left\langle g(\bar{f}(t))^{-1} \bar{f}(t)^k \middle| x^n \right\rangle \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemler her $y \in \mathbb{C}$ için geçerli olduğundan sonuç sağlanır.

(3.3.3) denklemi $S_n(x)$ için eşlenik temsili olarak adlandırılır.

Teorem 3.3.6: $S_n(x)$ dizisinin $(g(t), f(t))$ için q -Sheffer olabilmesi için gerek ve yeter şart $g(t)S_n(x)$ in $f(t)$ için q -ilişkili dizi olmasıdır [1,2].

İspat:

$$\langle f(t)^k | g(t)S_n(x) \rangle = \langle g(t)f(t)^k | S_n(x) \rangle = [n]_q! \delta_{n,k}$$

olduğundan bu, doğrudan Teorem 3.2.6 ve tanımlardan anlaşılmaktadır.

Teorem 3.3.6, her q -ilişkili dizinin, $\mathcal{F}$ kümesindeki her q -tersinir operatörü $g(t)$ için bir q -Sheffer dizileri sınıfı oluşturduğunu belirtmektedir.

Teorem 3.3.7: Bir $S_n(x)$ dizisinin bazı tersinir $g(t)$ ve $(g(t), f(t))$ için q -Sheffer olabilmesi için gerek ve yeter şart $\forall n \geq 0$ için

$$f(t)S_n(x) = [n]_q S_{n-1}(x) \quad (3.3.4)$$

olmasıdır [1,2].

İspat: $S_n(x)$, $(g(t), f(t))$ için q -Sheffer ise $p_n(x) = g(t)S_n(x)$, $f(t)$ ile q -ilişkilidir. Bundan dolayı

$$\begin{aligned} g(t)S_n(x) &= f(t)g^{-1}(t)p_n(x) \\ &= g^{-1}(t)f(t)p_n(x) \\ &= [n]_q g^{-1}(t)p_{n-1}(x) \\ &= [n]_q S_{n-1}(x) \end{aligned}$$

olur. Tersine, P kümesi üzerinde q -lineer bir T operatörü

$$TS_n(x) = p_n(x)$$

ile tanımlanırsa (burada $p_n(x)$, $f(t)$ ile q -ilişkilidir.)

$$Tf(t)S_n(x) = [n]_q TS_{n-1}(x) = [n]_q p_{n-1}(x) = f(t)p_n(x) = f(t)TS_n(x)$$

olur ve böylece $Tf(t) = f(t)T$ elde edilir. Sonuç 3.2.9 dan dolayı $g(t)S_n(x) = p_n(x)$ için tersinir bir $g(t)$ serisinin var olduğu sonucu çıkarılır. Son olarak, Teorem 3.3.6 dan sonuç elde edilir.

Sonuç 3.3.8: $S_n(x)$ dizisinin bazı tersinir $g(t)$ ve $(g(t), f(t))$ için q -Sheffer olabilmesi için gerek ve yeter şart $\forall n, k \geq 0$ için

$$f(t)^k S_n(x) = \frac{[n]_q!}{[n-k]_q!} S_{n-k}(x)$$

olmasıdır [1,2].

3.3.6 ve 3.3.7 teoremlerinden, bir q -Sheffer dizisi üzerinde $\mathcal{F}$ kümesinde bir operatörün etkisi için sıradaki formül elde edilir.

Teorem 3.3.9: $S_n(x)$, $(g(t), f(t))$ çifti için q -Sheffer ve $p_n(x)$ ise $f(t)$ ile q -ilişkili dizi olsun. O halde herhangi bir $h(t) \in \mathcal{F}$ için

$$h(t)S_n(x) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \langle h(t) | S_k(x) \rangle p_{n-k}(x) \quad (3.3.5)$$

dir [2].

İspat: q -genişleme teoreminde

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle h(t)|S_k(x)\rangle}{[k]_q!} g(t)f(t)^k$$

eşitliğin her iki tarafı q -operatör olarak $S_n(x)$ dizisine etki ettirilirse

$$\begin{aligned} h(t)S_n(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle h(t)|S_k(x)\rangle}{[k]_q!} g(t)f(t)^k S_n(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle h(t)|S_k(x)\rangle}{[k]_q!} g(t) \frac{[n]_q!}{[n-k]_q!} S_{n-k}(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \langle h(t)|S_k(x)\rangle g(t) S_{n-k}(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \langle h(t)|S_k(x)\rangle p_{n-k}(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

Binom formülünün genellemesi olan q -Sheffer dizilerinin karakterizasyonu sıradaki teorem ile verilir.

Teorem 3.3.10 (q -Sheffer Özdeşliği): Bir $S_n(x)$ dizisinin, bazı tersinir $g(t)$ ve $(g(t), f(t))$ çifti için q -Sheffer olabilmesi için gerek ve yeter şart $\forall y \in \mathbb{C}$ için

$$e_q(yt)S_n(x) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q p_k(y) S_{n-k}(x) \quad (3.3.6)$$

olmasıdır, burada $p_n(x)$, $f(t)$ ile q -ilişkili dizidir [1,2].

İspat: $S_n(x)$ in $(g(t), f(t))$ için q -Sheffer olduğunu varsayalım. O zaman q -genişleme teoreminden

$$e_q(yt) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k(y)}{[k]_q!} f(t)^k$$

yazılır ve eşitliğin iki tarafına $S_n(x)$ dizisine etki ettirilirse Sonuç 3.3.8 den

$$\begin{aligned} e_q(yt)S_n(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k(y)}{[k]_q!} f(t)^k S_n(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k(y)}{[k]_q!} \frac{[n]_q!}{[n-k]_q!} S_{n-k}(x) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q p_k(y) S_{n-k}(x)$$

(3.3.6) eşitliği elde edilir. Tersine, $S_n(x)$ dizisinin q -Sheffer özdeşliğini sağladığını varsayalım. P kümesi üzerinde bir T q -lineer operatörü

$$TS_n(x) = p_n(x)$$

ile tanımlanır, burada $p_n(x)$, $f(t)$ ile q -ilişkilidir. Teorem 3.3.6 ya göre T nin $g(t) \in \mathcal{F}$ formunda olduğunu göstermek yeterlidir. İspatın ilk kısmı $p_n(x)$ in q -Sheffer özdeşliğini sağladığını gösterir.

$$e_q(yt)TS_n(x) = e_q(yt)p_n(x)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q p_k(y)p_{n-k}(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q p_k(y)TS_{n-k}(x) \\ &= T \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q p_k(y)S_{n-k}(x) \\ &= Te_q(yt)S_n(x) \end{aligned}$$

elde edilir ve buradan $e_q(yt)T = Te_q(yt)$ olur. Sonuç 3.2.9 dan T , $g(t) \in \mathcal{F}$ formundadır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

$q = 1$ alındığında q -Sheffer özdeşliğinin

$$S_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S_k(x) p_{n-k}(x)$$

olduğu görülür. $S_n(x) = p_n(x) = x^n$ olduğunda ise binom formülü elde edilir.

q -Sheffer dizilerinin önemli bir özelliği $\mathcal{F}$ kümesi üzerinde çarpma işlemine göre elde edilen etkileridir.

Teorem 3.3.11: $S_n(x)$, $(g(t), f(t))$ çifti için q -Sheffer ve $p_n(x)$ ise $f(t)$ ile q -ilişkili dizi olsun. O zaman $\forall h(t), l(t) \in \mathcal{F}$ için

$$\langle h(t)l(t) | S_n(x) \rangle = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \langle h(t) | S_k(x) \rangle \langle l(t) | p_{n-k}(x) \rangle$$

olur [1,2].

İspat: $h(t) \in \mathcal{F}$ için $h_x(t)$

$$h_x(t)x^k y^j = \langle h(t)|x^k \rangle y^j$$

ve $h_y(t)$

$$h_y(t)x^k y^j = x^k \langle h(t)|y^j \rangle$$

şeklinde ifade edilen $P[x, y]$ üzerinde tanımlı q -lineer operatörü olsun. O zaman

$$\langle h(t)l(t)|x^n \rangle = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \langle h(t)|x^{n-k} \rangle \langle l(t)|x^k \rangle$$

özdeşliği

$$\begin{aligned} \langle h(t)l(t)|x^n \rangle &= h_x(t)l_y(t) \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k} y^k \\ &= h_x(t)l_y(t)e_q(yt)x^n \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Yukarıdaki son eşitlikte x^n yerine $S_n(x)$ yazılırsa

$$\begin{aligned} \langle h(t)l(t)|S_n(x) \rangle &= h_x(t)l_y(t)e_q(yt)S_n(x) \\ &= h_x(t)l_y(t) \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q S_k(y)p_{n-k}(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \langle l(t)|S_k(x) \rangle \langle h(t)|p_{n-k}(x) \rangle \end{aligned}$$

olduğu görülür. Ayrıca, $h(t)$ ile $l(t)$ q -lineer operatörlerinin yer değişimiyle ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.12: $S_n(x)$, $(g(t), f(t))$ çifti için q -Sheffer ise, o zaman

$$xS_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \left[\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \langle \partial_t g(t)|S_{n-k}(x) \rangle + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q \langle g(t)\partial_t f(t)|S_{n-k+1}(x) \rangle \right] S_k(x)$$

olur [2].

İspat: $S_n(x)$ bir q -Sheffer dizisi olmak üzere

$$xS_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_{n,k} S_k(x)$$

genişlemesindeki $a_{n,k}$ katsayıları belirlenmelidir. $S_n(x)$, $(g(t), f(t))$ çifti için q -Sheffer olduğundan q -polinom genişleme teoreminden

$$xS_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\langle g(t)f(t)^k | xS_n(x) \rangle}{[k]_q!} S_k(x) \quad (3.3.7)$$

yazılır. Teorem 3.1.16, Teorem 3.2.6 ile Sonuç 3.3.8 kullanılarak

$$\begin{aligned} \langle g(t)f(t)^k | xS_n(x) \rangle &= \langle \partial_t(g(t)f(t)^k) | S_n(x) \rangle \\ &= \langle \partial_t g(t)f(t)^k + [k]_q g(t)f(t)^{k-1} \partial_t f(t) | S_n(x) \rangle \\ &= \langle \partial_t g(t) | f(t)^k S_n(x) \rangle + [k]_q \langle g(t) \partial_t f(t) | f(t)^{k-1} S_n(x) \rangle \\ &= \frac{[n]_q!}{[k]_q!} \langle \partial_t g(t) | S_{n-k}(x) \rangle + [k]_q \frac{[n]_q!}{[n-k+1]_q!} \langle g(t) \partial_t f(t) | S_{n-k+1}(x) \rangle \end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır ve (3.3.7) denkleminde yerine yazılarak ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.13: $S_n(x)$, $(g(t), f(t))$ çifti için q -Sheffer ve $p_n(x)$ ise $f(t)$ ile q -ilişkili dizi ise, o zaman

$$D_q S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \langle t | p_{n-k}(x) \rangle S_k(x)$$

eşitliği sağlanır [2]. Burada D_q q -türev operatörüdür.

İspat: q -polinom genişleme teoreminden

$$\begin{aligned} D_q S_n(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle g(t)f(t)^k | tS_n(x) \rangle}{[k]_q!} S_k(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle t | g(t)f(t)^k S_n(x) \rangle}{[k]_q!} S_k(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \langle t | g(t) S_{n-k}(x) \rangle S_k(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \langle t | p_{n-k}(x) \rangle S_k(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

3.4 q -İlişkili Diziler

Tezin üçüncü bölümünün üçüncü kısmında $g(t) = t^0$ birim operatörü alındığında bu kısımda yer alan teoremler aşağıdaki gibi kolayca yazılabilir.

Teorem 3.4.1 (q -Genişleme Teoremi): $p_n(x)$ polinomlar dizisinin, $f(t)$ q -lineer operatörü ile q -ilişkili dizi olsun. O zaman herhangi bir $h(t) \in \mathcal{F}$ q -lineer operatörü için

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle h(t) | p_k(x) \rangle}{[k]_q!} f(t)^k$$

dir [1,2].

Teorem 3.4.2 (q -Polinom Genişleme Teoremi): $p_n(x)$ polinomlar dizisinin, $f(t)$ q -lineer operatörü ile q -ilişkili dizi olsun. O zaman herhangi bir $p(x) \in P$ polinomu için

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle f(t)^k | p(x) \rangle}{[k]_q!} p_k(x)$$

dir [1,2].

Teorem 3.4.3 (Üreteç Fonksiyonu): $p_n(x)$ polinomlar dizisinin, $f(t)$ q -lineer operatörü ile q -ilişkili dizi olabilmesi için gerek ve yeter şart $\forall y \in \mathbb{C}$ sayısı için

$$e_q(y\bar{f}(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k(y)}{[k]_q!} t^k$$

olmasıdır [2].

Teorem 3.4.4: $p_n(x)$ polinomlar dizisinin, $f(t)$ q -lineer operatörü ile q -ilişkili dizi olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\langle \bar{f}(t)^k | x^n \rangle}{[k]_q!} x^k$$

olmasıdır [2]. Bu eşitlik, q -ilişkili diziler için eşlenik temsilidir.

Teorem 3.4.5: $p_n(x)$ polinomlar dizisinin, $f(t)$ q -lineer operatörü ile q -ilişkili dizi olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$(i) \quad \langle t^0 | p_n(x) \rangle = \delta_{n,0}$$

$$(ii) \quad f(t)p_n(x) = [n]_q p_{n-1}(x)$$

olmasıdır [1,2].

Teorem 3.4.6: $p_n(x)$ polinomlar dizisi, $f(t)$ q -lineer operatörü ile q -ilişkili dizi ise, o zaman herhangi bir $h(t) \in \mathcal{F}$ q -lineer operatörü için

$$h(t)p_n(x) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \langle h(t) | p_k(x) \rangle p_{n-k}(x)$$

dir [2].

Teorem 3.4.7 (q -Binom Özdeşliği): $p_n(x)$ polinomlar dizisinin bir q -ilişkili dizi olabilmesi için gerek ve yeter şart $\forall y \in \mathbb{C}$ sayısı için

$$e_q(yt)p_n(x) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q p_k(y)p_{n-k}(x)$$

olmasıdır [1,2].

Teorem 3.4.8: $p_n(x)$ polinomlar dizisi, $f(t)$ q -lineer operatörü ile q -ilişkili dizi ise, o zaman

$$xp_n(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q \langle \partial_t f(t) | p_{n-k+1}(x) \rangle p_k(x)$$

olur [2].

Teorem 3.4.9: $p_n(x)$ polinomlar dizisi, q -ilişkili bir dizi ise, o zaman

$$D_q p_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \langle t | p_{n-k}(x) \rangle p_k(x)$$

olur [2]. Burada D_q q -türev operatörüdür.

3.5 q -Appell Dizileri

Tezin üçüncü bölümünün üçüncü kısmında $f(t) = t$ alındığında q -Sheffer dizileri q -Appell dizilerine dönüşecektir. Bu nedenle aşağıdaki teoremlerin ispatı yapılmadan verilecektir.

Teorem 3.5.1 (q -Genişleme Teoremi): $S_n(x)$ q -Sheffer dizisi, $g(t)$ q -lineer operatörü için q -Appell dizisi olsun. O zaman herhangi bir $h(t) \in \mathcal{F}$ q -lineer operatörü için

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle h(t) | S_k(x) \rangle}{[k]_q!} g(t)t^k$$

dir [1,2,7].

Teorem 3.5.2 (q -Polinom Genişleme Teoremi): $S_n(x)$ q -Sheffer dizisi, $g(t)$ q -lineer operatörü için q -Appell dizisi olsun. O zaman herhangi bir $p(x) \in P$ polinomu için

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle g(t)t^k | p(x) \rangle}{[k]_q!} S_k(x)$$

dir [2].

Teorem 3.5.3 (Üreteç Fonksiyonu): $S_n(x)$ q -Sheffer dizisinin $g(t)$ q -lineer operatörü için q -Appell dizisi olabilmesi için gerek ve yeter şart $\forall y \in \mathbb{C}$ sayısı için

$$\frac{1}{g(t)} e_q(yt) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k(y)}{[k]_q!} t^k$$

olmasıdır [1,2,7].

Teorem 3.5.4: $S_n(x)$ q -Sheffer dizisinin $g(t)$ q -lineer operatörü için q -Appell dizisi olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \langle g(t)^{-1} | x^{n-k} \rangle x^k$$

olmasıdır [2].

Teorem 3.5.5: $S_n(x)$ q -Sheffer dizisinin $g(t)$ q -lineer operatörü için q -Appell dizisi olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$S_n(x) = \frac{1}{g(t)} x^n$$

olmasıdır [1-4,7].

Teorem 3.5.6: $S_n(x)$ q -Sheffer dizisinin $g(t)$ q -lineer operatörü için q -Appell dizisi olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$tS_n(x) = [n]_q S_{n-1}(x)$$

olmasıdır [1-4,7].

Teorem 3.5.7: $S_n(x)$ q -Sheffer dizisi, $g(t)$ q -lineer operatörü için q -Appell dizisi olsun. O halde herhangi bir $h(t) \in \mathcal{F}$ q -lineer operatörü için

$$h(t)S_n(x) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \langle h(t) | S_k(x) \rangle x^{n-k}$$

eşitliği sağlanır [2].

Teorem 3.5.8 (q -Appell Özdeşliği): $S_n(x)$ q -Sheffer dizisinin bir q -Appell dizisi olabilmesi için gerek ve yeter şart $\forall y \in \mathbb{C}$ sayısı için

$$e_q(yt)S_n(x) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q S_k(y)x^{n-k}$$

olmasıdır [2].

Teorem 3.5.9: $S_n(x)$ q -Sheffer dizisi, $g(t)$ q -lineer operatörü için q -Appell dizisi ise, o zaman

$$xS_n(x) = S_{n+1}(x) + \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \langle \partial_t g(t) | S_{n-k}(x) \rangle S_k(x)$$

olur [2].

Teorem 3.5.10 (q -Çarpım Teoremi): $S_n(x)$ q -Sheffer dizisi, $g(t)$ q -lineer operatörü için q -Appell dizisi ise, o zaman herhangi bir $\alpha \neq 0$ sabiti ve her $n \geq 0$ için

$$S_n(\alpha x) = \alpha^n \frac{g(t)}{g(t/\alpha)} S_n(x)$$

olur [2].

3.6 Örnekler

3.6.1 Yüksek Mertebeden q -Euler Polinomları

Yüksek mertebeden q -Euler polinomları

$$\sum_{k=0}^{\infty} E_{k,q}^{(a)}(x) \frac{t^k}{[k]_q!} = \left(\frac{2}{e_q(t) + 1} \right)^a e_q(xt)$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır ve

$$g(t) = \left(\frac{e_q(t) + 1}{2} \right)^a$$

eşitliği ile q -Appell dizisidir [6]. Kısaca

$$E_{k,q}^{(a)}(x) \sim \left(\left(\frac{e_q(t) + 1}{2} \right)^a, t \right)$$

şeklinde gösterilir [6].

Teorem 3.5.5 den

$$E_{n,q}^{(a)}(x) = \left(\frac{2}{e_q(t) + 1} \right)^a x^n$$

yazılabilir ve buradan

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{e_q(t) + 1} \right)^b E_{n,q}^{(a)}(x) &= \left(\frac{2}{e_q(t) + 1} \right)^b \left(\frac{2}{e_q(t) + 1} \right)^a x^n \\ &= \left(\frac{2}{e_q(t) + 1} \right)^{b+a} x^n \\ &= E_{n,q}^{(a+b)}(x) \end{aligned}$$

elde edilir [6].

q -Appell özdeşliğinden

$$e_q(yt)E_{n,q}^{(a)}(x) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q E_{k,q}^{(a)}(y) x^{n-k}$$

yazılır.

$E_{n,q}^{(a)}(x)$, q -Appell olduğundan dolayı Teorem 3.5.6 dan

$$tE_{n,q}^{(a)}(x) = [n]_q E_{n-1,q}^{(a)}(x)$$

yazılabilir [6].

$(e_q(t) + 1)$ operatörünün $E_{n,q}^{(a)}(x)$ polinomuna etkisi

$$\begin{aligned} (e_q(t) + 1)E_{n,q}^{(a)}(x) &= (e_q(t) + 1) \left(\frac{2}{e_q(t) + 1} \right)^a x^n \\ &= \frac{2 \cdot 2^{a-1}}{(e_q(t) + 1)^{a-1}} x^n \\ &= 2 \left(\frac{2}{e_q(t) + 1} \right)^{a-1} x^n \\ &= 2E_{n,q}^{(a-1)}(x) \end{aligned}$$

olarak elde edilir ve $(e_q(t) + 1)$ operatörünün lineerlik özelliğinden dolayı

$$(e_q(t) + 1)E_{n,q}^{(a)}(x) = 2E_{n,q}^{(a-1)}(x)$$

$$e_q(t)E_{n,q}^{(a)}(x) + E_{n,q}^{(a)}(x) = 2E_{n,q}^{(a-1)}(x)$$

$$e_q(t)E_{n,q}^{(a)}(x) = 2E_{n,q}^{(a-1)}(x) - E_{n,q}^{(a)}(x)$$

eşitlikleri yazılabilir.

Yüksek mertebeden q -Euler polinomları için q -genişleme teoremi

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle h(t) | E_{k,q}^{(a)}(x) \rangle}{[k]_q!} \left(\frac{e_q(t) + 1}{2} \right)^a t^k$$

dir. Burada $h(t) = e_q(yt)$ alınırsa

$$e_q(yt) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_{k,q}^{(a)}(y)}{[k]_q!} \left(\frac{e_q(t) + 1}{2} \right)^a t^k$$

elde edilir.

3.6.2 Yüksek Mertebeden q -Bernoulli Polinomları

Yüksek mertebeden q -Bernoulli polinomları

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_{k,q}^{(a)}(x) \frac{t^k}{[k]_q!} = \left(\frac{t}{e_q(t) - 1} \right)^a e_q(xt)$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır ve

$$g(t) = \left(\frac{e_q(t) - 1}{t} \right)^a$$

eşitliği ile q -Appell dizisidir [5]. Kısaca

$$B_{k,q}^{(a)}(x) \sim \left(\left(\frac{e_q(t) - 1}{t} \right)^a, t \right)$$

şeklinde gösterilir [5].

Teorem 3.5.5 den

$$B_{n,q}^{(a)}(x) = \left(\frac{t}{e_q(t) - 1} \right)^a x^n$$

yazılabilir ve buradan

$$\begin{aligned}
\left(\frac{t}{e_q(t)-1}\right)^b B_{n,q}^{(a)}(x) &= \left(\frac{t}{e_q(t)-1}\right)^b \left(\frac{t}{e_q(t)-1}\right)^a x^n \\
&= \left(\frac{t}{e_q(t)-1}\right)^{b+a} x^n \\
&= B_{n,q}^{(a+b)}(x)
\end{aligned}$$

elde edilir [5].

q -Appell özdeşliğinden

$$e_q(yt)B_{n,q}^{(a)}(x) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q B_{k,q}^{(a)}(y) x^{n-k}$$

yazılır.

$B_{n,q}^{(a)}(x)$, q -Appell olduğundan dolayı Teorem 3.5.6 dan

$$tB_{n,q}^{(a)}(x) = [n]_q B_{n-1,q}^{(a)}(x)$$

yazılabilir [5].

$(e_q(t) - 1)$ operatörünün $B_{n,q}^{(a)}(x)$ polinomuna etkisi

$$\begin{aligned}
(e_q(t) - 1)B_{n,q}^{(a)}(x) &= (e_q(t) - 1) \left(\frac{t}{e_q(t)-1}\right)^a x^n \\
&= \frac{t \cdot t^{a-1}}{(e_q(t) - 1)^{a-1}} x^n \\
&= t \left(\frac{t}{e_q(t)-1}\right)^{a-1} x^n \\
&= tB_{n,q}^{(a-1)}(x) \\
&= [n]_q B_{n-1,q}^{(a-1)}(x)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir ve $(e_q(t) - 1)$ operatörünün lineerlik özelliğinden dolayı

$$(e_q(t) - 1)B_{n,q}^{(a)}(x) = [n]_q B_{n-1,q}^{(a-1)}(x)$$

$$e_q(t)B_{n,q}^{(a)}(x) - B_{n,q}^{(a)}(x) = [n]_q B_{n-1,q}^{(a-1)}(x)$$

$$e_q(t)B_{n,q}^{(a)}(x) = [n]_q B_{n-1,q}^{(a-1)}(x) + B_{n,q}^{(a)}(x)$$

eşitlikleri yazılabilir.

Yüksek mertebeden q -Bernoulli polinomları için q -genişleme teoremi

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle h(t) | B_{k,q}^{(a)}(x) \rangle}{[k]_q!} \left(\frac{e_q(t) - 1}{t} \right)^a t^k$$

dir. Burada $h(t) = e_q(yt)$ alınırsa

$$e_q(yt) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{k,q}^{(a)}(y)}{[k]_q!} \left(\frac{e_q(t) - 1}{t} \right)^a t^k$$

elde edilir.

3.6.1 ve 3.6.2 Kısımlarından görülür ki, q -Appell dizileri için q -umbral analizin bilinen teoremleri kullanılarak çeşitli eşitlikler elde etmek mümkündür.

BÖLÜM IV

BULGULAR

Bu bölümde, q -Bernoulli polinomları için [3] nolu kaynakta elde edilen modifiye edilmiş q -Apostol-Bernoulli polinomları için yeni bağıntılar ve eşitlikler ayrıntılı bir şekilde incelenecektir.

Tanım 4.1: $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ sayısı için, (λ, q) -Bernoulli polinomu (q -Apostol-Bernoulli polinomu)

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_{k,q}(x, \lambda) \frac{t^k}{[k]_q!} = \frac{t}{\lambda e_q(t) - 1} e_q(xt)$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır [3].

Uyarı 4.2: Burada $t \rightarrow 0$ için $B_{0,q}(x, \lambda) = 0$ olduğundan dolayı bu durumda üreteç fonksiyonu tersinir değildir.

Dolayısıyla üreteç fonksiyonu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{k+1,q}(x, \lambda)}{[k+1]_q} \frac{t^k}{[k]_q!} = \frac{1}{\lambda e_q(t) - 1} e_q(xt)$$

şeklinde düzenlenirse tersinir olur. Burada $\frac{B_{k+1,q}(x, \lambda)}{[k+1]_q} = B_{k,q}^*(x, \lambda)$ alınacaktır ve $B_{k,q}^*(x, \lambda)$, modifiye edilmiş q -Apostol-Bernoulli polinomu olarak adlandırılacaktır. Burada $x = 0$ için $B_{k,q}^*(0, \lambda) = B_{k,q}^*(\lambda)$ ile ifade edilen modifiye edilmiş q -Apostol-Bernoulli sayıları elde edilir.

Tanım 4.3: Modifiye edilmiş q -Apostol-Bernoulli polinomlarının üreteç fonksiyonu

$$F_q^*(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,q}^*(x, \lambda) \frac{t^n}{[n]_q!} = \frac{1}{\lambda e_q(t) - 1} e_q(xt)$$

şeklini alır ve $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ sayısı için

$$\lim_{t \rightarrow 0} F_q^*(x, t) = B_{0,q}^*(x, \lambda) = \frac{1}{\lambda - 1} \neq 0$$

olduğundan üreteç fonksiyonu tersinir hale gelmiş olur [3].

Teorem 4.4: $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere

$$B_{n,q}^*(x, \lambda) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q B_{k,q}^*(\lambda) x^{n-k}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Tanım 4.3 den

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,q}^*(x, \lambda) \frac{t^n}{[n]_q!} &= \frac{1}{\lambda e_q(t) - 1} e_q(xt) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_{n,q}^*(\lambda) \frac{t^n}{[n]_q!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{t^n}{[n]_q!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n B_{k,q}^*(\lambda) \frac{t^k}{[k]_q!} x^{n-k} \frac{t^{n-k}}{[n-k]_q!} \right) \frac{[n]_q!}{[n]_q!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q B_{k,q}^*(\lambda) x^{n-k} \right) \frac{t^n}{[n]_q!} \end{aligned}$$

olduğu görülür ve buradan

$$B_{n,q}^*(x, \lambda) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q B_{k,q}^*(\lambda) x^{n-k}$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.5: Modifiye edilmiş q -Apostol-Bernoulli sayıları,

$$B_{0,q}^*(x, \lambda) = \frac{1}{\lambda - 1} \quad \text{ve} \quad \lambda B_{n,q}^*(1, \lambda) - B_{n,q}^*(\lambda) = \delta_{0,n}$$

yineleme bağıntısını sağlar.

İspat: Modifiye edilmiş q -Apostol-Bernoulli sayılarının üreteç fonksiyonundan

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{n,q}^*(\lambda) \frac{t^n}{[n]_q!} = \frac{1}{\lambda e_q(t) - 1}$$

olur ve $(B_q^*(\lambda))^n := B_{n,q}^*(\lambda)$ sembolik varsayımıyla

$$e_q(t B_q^*(\lambda)) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,q}^*(\lambda) \frac{t^n}{[n]_q!}$$

formunda yazılabildiğinden dolayı

$$e_q(tB_q^*(\lambda)) = \frac{1}{\lambda e_q(t) - 1}$$

elde edilir ve bu eşitlik

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{0,n} \frac{t^n}{[n]_q!} = e_q(tB_q^*(\lambda)) (\lambda e_q(t) - 1) \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} &= \lambda e_q(t(B_q^*(\lambda) + 1)) - e_q(tB_q^*(\lambda)) \\ &= \lambda \sum_{n=0}^{\infty} (B_q^*(\lambda) + 1)^n \frac{t^n}{[n]_q!} - \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,q}^*(\lambda) \frac{t^n}{[n]_q!} \\ &= \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n [n]_q \binom{n}{k}_q B_{k,q}^*(\lambda) 1^{n-k} \right) \frac{t^n}{[n]_q!} - \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,q}^*(\lambda) \frac{t^n}{[n]_q!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda B_{n,q}^*(1, \lambda) \frac{t^n}{[n]_q!} - \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,q}^*(\lambda) \frac{t^n}{[n]_q!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda B_{n,q}^*(1, \lambda) - B_{n,q}^*(\lambda)) \frac{t^n}{[n]_q!} \end{aligned} \quad (4.2)$$

şeklinde düzenlenerek, (4.1) ve (4.1) eşitliklerinin $\frac{t^n}{[n]_q!}$ katsayı karşılaştırılması yapılırsa

$$\lambda B_{n,q}^*(1, \lambda) - B_{n,q}^*(\lambda) = \delta_{0,n}$$

yineleme bağıntısı elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Örnek 4.6: Birkaç modifiye edilmiş q -Apostol-Bernoulli sayıları,

$$\begin{aligned} B_{0,q}^*(\lambda) &= \frac{1}{\lambda - 1} \quad , \quad B_{1,q}^*(\lambda) = \frac{-\lambda}{(\lambda - 1)^2} \quad , \quad B_{2,q}^*(\lambda) = \frac{\lambda(1 + \lambda q)}{(\lambda - 1)^3} \quad , \\ B_{3,q}^*(\lambda) &= \frac{-\lambda(1 + 2\lambda q + 2\lambda q^2 + \lambda^2 q^3)}{(\lambda - 1)^4} \quad , \dots \end{aligned}$$

şeklindedir.

Şimdi, modifiye edilmiş q -Apostol-Bernoulli polinomları için bazı teorem ve sonuçlar verilecektir:

Tanım 4.3 ve Teorem 3.5.3 ten

$$B_{n,q}^*(x, \lambda) \sim (\lambda e_q(t) - 1, t)$$

için q -Appell'dir.

Teorem 3.5.5 ve Teorem 3.5.6 dan aşağıdaki teorem kolayca yazılabilir.

Teorem 4.7:

$$B_{n,q}^*(x, \lambda) = \frac{1}{\lambda e_q(t) - 1} x^n$$

ve

$$tB_{n,q}^*(x, \lambda) = [n]_q B_{n-1,q}^*(x, \lambda) = B_{n,q}(x, \lambda)$$

eşitlikleri sağlanır.

Teorem 4.8: $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere

$$\left\langle \frac{\lambda e_q(t) - 1}{\lambda t} \middle| p(x) \right\rangle = \int_0^1 p(u) d_q u$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\lambda e_q(t) - 1}{t} \middle| x^n \right\rangle &= \left\langle \frac{\lambda e_q(t) - 1}{t} \middle| \frac{1}{[n+1]_q} t x^{n+1} \right\rangle \\ &= \frac{1}{[n+1]_q} \left\langle \frac{\lambda e_q(t) - 1}{t} \middle| t x^{n+1} \right\rangle \\ &= \frac{1}{[n+1]_q} \langle \lambda e_q(t) - 1 | x^{n+1} \rangle \\ &= \frac{1}{[n+1]_q} \lambda \langle e_q(t) | x^{n+1} \rangle - \langle 1 | x^{n+1} \rangle \\ &= \frac{\lambda}{[n+1]_q} \\ &= \lambda \int_0^1 x^n d_q x \end{aligned}$$

eşitliği yazılabildiğinden

$$\left\langle \frac{\lambda e_q(t) - 1}{t} \middle| p(x) \right\rangle = \lambda \int_0^1 p(u) d_q u$$

eşitliğine ulaşılır. Bۆylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.9: $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sayısı için

$$\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix}_q B_{n-k,q}^*(\lambda) = 0$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Teorem 4.8 de $p(x) = B_{n,q}^*(x, \lambda)$ alınırsa

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^1 B_{n,q}^*(x, \lambda) d_q x &= \left\langle \frac{\lambda e_q(t) - 1}{t} \middle| B_{n,q}^*(x, \lambda) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\lambda e_q(t) - 1}{t} \middle| \frac{1}{[n+1]_q} t B_{n+1,q}^*(x, \lambda) \right\rangle \\ &= \left\langle 1 \middle| \frac{\lambda e_q(t) - 1}{t} \frac{1}{[n+1]_q} t B_{n+1,q}^*(x, \lambda) \right\rangle \\ &= \frac{1}{[n+1]_q} \langle t^0 | (\lambda e_q(t) - 1) B_{n+1,q}^*(x, \lambda) \rangle \\ &= \frac{1}{[n+1]_q} \langle t^0 | x^{n+1} \rangle \\ &= \frac{1}{[n+1]_q} [n+1]_q! \delta_{n+1,0} \\ &= [n]_q! \delta_{n+1,0} \end{aligned}$$

eşitliği ve diğer taraftan

$$\begin{aligned} \lambda [n+1]_q \int_0^1 B_{n,q}^*(x, \lambda) d_q x &= \lambda [n+1]_q \int_0^1 \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q B_{n-k,q}^*(\lambda) x^k d_q x \\ &= \lambda [n+1]_q \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q B_{n-k,q}^*(\lambda) \int_0^1 x^k d_q x \\ &= \lambda [n+1]_q \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q B_{n-k,q}^*(\lambda) \frac{1}{[k+1]_q} \\ &= \lambda \sum_{k=0}^n \frac{[n+1]_q}{[k+1]_q} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q B_{n-k,q}^*(\lambda) \\ &= \lambda \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix}_q B_{n-k,q}^*(\lambda) \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Daha sonra bu iki eşitlik birleştirilirse

$$\begin{aligned}\lambda \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix}_q B_{n-k,q}^*(\lambda) &= \lambda [n+1]_q \int_0^1 B_{n,q}^*(x, \lambda) d_q x \\ &= [n+1]_q [n]_q! \delta_{n+1,0} \\ &= [n+1]_q! \delta_{n+1,0}\end{aligned}$$

elde edilir ve buradan $n \geq 0$ durumunda modifiye edilmiş q -Apostol-Bernoulli sayıları için

$$\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix}_q B_{n-k,q}^*(\lambda) = 0$$

şeklinde ispatı istenen eşitlik elde edilir.

Teorem 3.5.2 den

$$\begin{aligned}p(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[n+1]_q}{[k]_q!} \left\langle \frac{\lambda e_q(t) - 1}{t} t^k \middle| p(x) \right\rangle B_{k,q}^*(x, \lambda) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[n+1]_q}{[k]_q!} \left\langle \frac{\lambda e_q(t) - 1}{t} \middle| t^k p(x) \right\rangle B_{k,q}^*(x, \lambda) \\ &= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[n+1]_q}{[k]_q!} B_{k,q}^*(x, \lambda) \int_0^1 t^k p(x) d_q x\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.10: $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere

$$\left\langle \frac{e_q(t) - 1}{t} \middle| B_{n,q}^*(x, \lambda) \right\rangle = \int_0^1 B_{n,q}^*(u, \lambda) d_q u$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$$\begin{aligned}\int_x^{x+y} B_{n,q}^*(u, \lambda) d_q u &= \int_x^{x+y} \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q B_{n-k,q}^*(\lambda) u^k d_q u \\ &= \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q B_{n-k,q}^*(\lambda) \int_x^{x+y} u^k d_q u\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q B_{n-k,q}^*(\lambda) \frac{1}{[k+1]_q} \{(x+y)^{k+1} - x^{k+1}\} \\
&= \left[\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q B_{n-k,q}^*(\lambda) \frac{1}{[k+1]_q} \{(x+y)^{k+1} - x^{k+1}\} \right] \frac{[n+1]_q}{[n+1]_q} \\
&= \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix}_q B_{n-k,q}^*(\lambda) \{(x+y)^{k+1} - x^{k+1}\} \\
&= \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=1}^{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q B_{n-k+1,q}^*(\lambda) \{(x+y)^k - x^k\} \\
&= \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q B_{n-k+1,q}^*(\lambda) \{(x+y)^k - x^k\} \\
&= \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q B_{n-k+1,q}^*(\lambda) (x+y)^k \\
&\quad - \frac{1}{[n+1]_q} \sum_{k=0}^{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q B_{n-k+1,q}^*(\lambda) x^k \\
&= \frac{1}{[n+1]_q} B_{n+1,q}^*(x+y, \lambda) - \frac{1}{[n+1]_q} B_{n+1,q}^*(x, \lambda) \\
&= \frac{1}{[n+1]_q} (B_{n+1,q}^*(x+y, \lambda) - B_{n+1,q}^*(x, \lambda))
\end{aligned}$$

ifadesi yazılır ve burada $x = 0$ ve $y = 1$ alınırsa

$$\int_0^1 B_{n,q}^*(u, \lambda) d_q u = \frac{1}{[n+1]_q} (B_{n+1,q}^*(1, \lambda) - B_{n+1,q}^*(\lambda))$$

olur. Daha sonra bu ifade ile birlikte

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{e_q(t) - 1}{t} \middle| B_{n,q}^*(x, \lambda) \right\rangle &= \left\langle \frac{e_q(t) - 1}{t} \middle| \frac{1}{[n+1]_q} t B_{n+1,q}^*(x, \lambda) \right\rangle \\
&= \frac{1}{[n+1]_q} \left\langle \frac{e_q(t) - 1}{t} \middle| t B_{n+1,q}^*(x, \lambda) \right\rangle \\
&= \frac{1}{[n+1]_q} \langle e_q(t) - 1 | B_{n+1,q}^*(x, \lambda) \rangle \\
&= \frac{1}{[n+1]_q} (B_{n+1,q}^*(1, \lambda) - B_{n+1,q}^*(\lambda))
\end{aligned}$$

eşitliğinden

$$\left\langle \frac{e_q(t) - 1}{t} \middle| B_{n,q}^*(x, \lambda) \right\rangle = \int_0^1 B_{n,q}^*(u, \lambda) d_q u$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

P_n , derecesi n veya n den küçük olan tüm polinomların bir kümesi olsun. Yani, P_n kümesi

$$P_n = \{q(x) \in \mathbb{C}[x] : \text{der}(q(x)) \leq n\}$$

şeklinde ifade edilebilir.

$q(x) \in P_n$ polinomu için

$$q(x) = \sum_{k=0}^n b_{k,q} B_{k,q}^*(x, \lambda)$$

olsun. Bu eşitlik, P_n kümesinin herhangi bir elemanının modifiye edilmiş q -Apostol-Bernoulli polinomunun lineer kombinasyonu olarak yazılabileceği anlamına gelir. Ayrıca $b_{k,q}$ katsayısına göre modifiye edilmiş q -Apostol-Bernoulli polinomlarının herhangi bir polinomla ilişkisi türetilebilir.

Teorem 4.11: $q(x) \in P_n$ polinomu için

$$q(x) = \sum_{k=0}^n b_{k,q} B_{k,q}^*(x, \lambda)$$

olsun. O zaman

$$b_{k,q} = \frac{1}{[k]_q!} \{ \lambda q^{(k)}(1) - q^{(k)}(0) \}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: (3.3.1) eşitliğinden $n, k \geq 0$ için

$$\langle (\lambda e_q(t) - 1)t^k | q(x) \rangle = [n]_q! \delta_{n,k} \quad (4.3)$$

yazılabildiğinden, (4.3) eşitliğinde $q(x)$ polinomu yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \langle (\lambda e_q(t) - 1)t^k | q(x) \rangle &= \left\langle (\lambda e_q(t) - 1)t^k \middle| \sum_{l=0}^n b_{l,q} B_{l,q}^*(x, \lambda) \right\rangle \\ &= \sum_{l=0}^n b_{l,q} \langle (\lambda e_q(t) - 1)t^k | B_{l,q}^*(x, \lambda) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l=0}^n b_{l,q} [l]_q! \delta_{l,k} \\
&= b_{k,q} [k]_q!
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur ve düzenlenirse

$$\begin{aligned}
b_{k,q} &= \frac{1}{[k]_q!} \langle (\lambda e_q(t) - 1) t^k | q(x) \rangle \\
&= \frac{1}{[k]_q!} \langle (\lambda e_q(t) - 1) | t^k q(x) \rangle \\
&= \frac{1}{[k]_q!} \langle (\lambda e_q(t) - 1) | q^{(k)}(x) \rangle \\
&= \frac{1}{[k]_q!} \{ \lambda q^{(k)}(1) - q^{(k)}(0) \}
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla teoremin ispatı biter.

Bu teoremden $q(x) = E_{n,q}(x)$ alınırsa q -Euler polinomları ile modifiye edilmiş q -Apostol-Bernoulli polinomları arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 4.12: $n \geq 2$ için

$$\begin{aligned}
E_{n,q}(x) &= (\lambda q - 1) B_{n,q}^*(x, \lambda) + [n]_q \left(\frac{\lambda + 1}{2} \right) B_{n-1,q}^*(x, \lambda) \\
&\quad - (\lambda + 1) \sum_{k=0}^{n-2} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q E_{n-k,q} B_{k,q}^*(x, \lambda)
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Teorem 4.11 de $q(x) = E_{n,q}(x)$ alınırsa

$$E_{n,q}(x) = \sum_{k=0}^n b_{k,q} B_{k,q}^*(x, \lambda)$$

için $b_{k,q}$ katsayısı

$$\begin{aligned}
b_{k,q} &= \frac{1}{[k]_q!} \langle (\lambda e_q(t) - 1) | t^k E_{n,q}(x) \rangle \\
&= \frac{[n]_q [n-1]_q \dots [n-k+1]_q}{[k]_q!} \langle (\lambda e_q(t) - 1) | E_{n-k,q}(x) \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \langle (\lambda e_q(t) - 1) | E_{n-k,q}(x) \rangle \\
&= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (\lambda E_{n-k,q}(1) - E_{n-k,q})
\end{aligned}$$

bulunur ve yukarıda yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
E_{n,q}(x) &= b_{n,q} B_{n,q}^*(x, \lambda) + b_{n-1,q} B_{n-1,q}^*(x, \lambda) + \sum_{k=0}^{n-2} b_{k,q} B_{k,q}^*(x, \lambda) \\
&= \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}_q (\lambda E_{0,q}(1) - E_{0,q}) B_{n,q}^*(x, \lambda) + \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix}_q (\lambda E_{1,q}(1) - E_{1,q}) B_{n-1,q}^*(x, \lambda) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-2} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (\lambda E_{n-k,q}(1) - E_{n-k,q}) B_{k,q}^*(x, \lambda) \\
&= (\lambda q - 1) B_{n,q}^*(x, \lambda) + [n]_q \left(\lambda \left(\frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{1}{2} \right) \right) B_{n-1,q}^*(x, \lambda) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-2} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (-\lambda E_{n-k,q} - E_{n-k,q}) B_{k,q}^*(x, \lambda) \\
&= (\lambda q - 1) B_{n,q}^*(x, \lambda) + [n]_q \left(\frac{\lambda + 1}{2} \right) B_{n-1,q}^*(x, \lambda) \\
&\quad - (\lambda + 1) \sum_{k=0}^{n-2} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q E_{n-k,q} B_{k,q}^*(x, \lambda)
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Burada

$$t E_{n,q}(x) = [n]_q E_{n-1,q}(x)$$

ve

$$E_{0,q} = 1, \quad E_{1,q} = -\frac{1}{2}, \quad E_{0,q}(1) = q$$

eşitlikleri kullanılmış ve

$$E_{n,q}(1) + E_{n,q} = [2]_q \delta_{0,n}$$

bağıntısından yararlanılmıştır.

Tanım 4.13: Yüksek mertebeden q -Apostol-Bernoulli polinomu, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ sayısı, $y = 0$ ve $r \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{n,q}^{(r)}(x, \lambda) \frac{t^n}{[n]_q!} = \left(\frac{t}{\lambda e_q(t) - 1} \right)^r e_q(xt)$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanır [3].

Uyarı 4.14: Burada $t \rightarrow 0$ için $B_{0,q}^{(r)}(x, \lambda) = 0$ olduğundan dolayı bu durumda üreteç fonksiyonu tersinir değildir.

Dolayısıyla üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[n]_q!}{[n+r]_q!} B_{n,q}^{(r)}(x, \lambda) \frac{t^n}{[n]_q!} = \left(\frac{1}{\lambda e_q(t) - 1} \right)^r e_q(xt)$$

şeklinde düzenlenirse tersinir olur. Burada $\frac{[n]_q!}{[n+r]_q!} B_{n,q}^{(r)}(x, \lambda) = \bar{B}_{n,q}^{(r)}(x, \lambda)$ alınacaktır ve yüksek mertebeden modifiye edilmiş q -Apostol-Bernoulli polinomu olarak adlandırılacaktır. Burada $x = 0$ için $\bar{B}_{n,q}^{(r)}(0, \lambda) = \bar{B}_{n,q}^{(r)}(\lambda)$ ile ifade edilen yüksek mertebeden modifiye edilmiş q -Apostol-Bernoulli sayıları elde edilir.

Tanım 4.15: Yüksek mertebeden modifiye edilmiş q -Apostol-Bernoulli polinomlarının üreteç fonksiyonu

$$\bar{F}_q^{(r)}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{B}_{n,q}^{(r)}(x, \lambda) \frac{t^n}{[n]_q!} = \left(\frac{1}{\lambda e_q(t) - 1} \right)^r e_q(xt)$$

şeklini alır ve $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ sayısı için

$$\lim_{t \rightarrow 0} \bar{F}_q^{(r)}(x, t) = \bar{B}_{0,q}^{(r)}(x, \lambda) = \left(\frac{1}{\lambda - 1} \right)^r \neq 0$$

olduğundan üreteç fonksiyonu tersinir hale gelmiş olur [3].

Şimdi, yüksek mertebeden modifiye edilmiş q -Apostol-Bernoulli polinomları için bazı teorem ve sonuçlar verilecektir:

Tanım 4.15 ve Teorem 3.5.3 ten

$$\bar{B}_{n,q}^{(r)}(x, \lambda) \sim ((\lambda e_q(t) - 1)^r, t)$$

için q -Appell'dir.

Teorem 3.5.5 ve Teorem 3.5.6 dan aşağıdaki teorem kolayca yazılabilir.

Teorem 4.16:

$$\bar{B}_{n,q}^{(r)}(x, \lambda) = \frac{1}{(\lambda e_q(t) - 1)^r} x^n$$

ve

$$t \bar{B}_{n,q}^{(r)}(x, \lambda) = [n]_q \bar{B}_{n-1,q}^{(r)}(x, \lambda)$$

eşitlikleri sağlanır.

Teorem 4.17: $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere

$$\bar{B}_{n,q}^{(r)}(\lambda) = \sum_{i_1 + \dots + i_r = n} \left[\begin{matrix} n \\ i_1 \dots i_r \end{matrix} \right]_q \prod_{j=1}^r B_{i_j,q}^*(\lambda)$$

eşitliği sağlanır. Burada $\left[\begin{matrix} n \\ i_1, \dots, i_r \end{matrix} \right]_q = \frac{[n]_q!}{[i_1]_q! \dots [i_r]_q!}$ dir.

İspat: Yüksek mertebeden modifiye edilmiş q -Apostol-Bernoulli sayılarının üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{B}_{n,q}^{(r)}(\lambda) \frac{t^n}{[n]_q!} = \left(\frac{1}{\lambda e_q(t) - 1} \right)^r$$

ve (3.1.2) eşitliği kullanılırsa

$$\left\langle \left(\frac{1}{\lambda e_q(t) - 1} \right)^r \middle| x^n \right\rangle = \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} \bar{B}_{n,q}^{(r)}(\lambda) \frac{t^n}{[n]_q!} \middle| x^n \right\rangle = \bar{B}_{n,q}^{(r)}(\lambda)$$

ifadesi bulunur. Ayrıca Önerme 3.1.6 kullanılarak

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\frac{1}{\lambda e_q(t) - 1} \right)^r \middle| x^n \right\rangle &= \left\langle \frac{1}{\lambda e_q(t) - 1} \times \dots \times \frac{1}{\lambda e_q(t) - 1} \middle| x^n \right\rangle \\ &= \sum_{i_1 + \dots + i_r = n} \left[\begin{matrix} n \\ i_1 \dots i_r \end{matrix} \right]_q \left\langle \frac{1}{\lambda e_q(t) - 1} \middle| x^{i_1} \right\rangle \dots \left\langle \frac{1}{\lambda e_q(t) - 1} \middle| x^{i_r} \right\rangle \\ &= \sum_{i_1 + \dots + i_r = n} \left[\begin{matrix} n \\ i_1 \dots i_r \end{matrix} \right]_q B_{i_1,q}^*(\lambda) \dots B_{i_r,q}^*(\lambda) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla bu iki eşitlik birleştirilirse

$$\bar{B}_{n,q}^{(r)}(\lambda) = \sum_{i_1 + \dots + i_r = n} \left[\begin{matrix} n \\ i_1 \dots i_r \end{matrix} \right]_q \prod_{j=1}^r B_{i_j,q}^*(\lambda)$$

sağlanır.

Teorem 4.18: $n, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere

$$\bar{B}_{n,q}^{(r)}(x, \lambda) = \sum_{k=0}^n \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q \bar{B}_{k,q}^{(r-1)}(\lambda) B_{n-k,q}^*(x, \lambda)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Tanım 4.15 den

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{B}_{n,q}^{(r)}(x, \lambda) \frac{t^n}{[n]_q!} &= \left(\frac{1}{\lambda e_q(t) - 1} \right)^r e_q(xt) \\ &= \left(\frac{1}{\lambda e_q(t) - 1} \right)^{r-1} \left(\frac{1}{\lambda e_q(t) - 1} \right) e_q(xt) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \bar{B}_{n,q}^{(r-1)}(\lambda) \frac{t^n}{[n]_q!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_{n,q}^*(x, \lambda) \frac{t^n}{[n]_q!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \bar{B}_{k,q}^{(r-1)}(\lambda) \frac{t^k}{[k]_q!} B_{n-k,q}^*(x, \lambda) \frac{t^{n-k}}{[n-k]_q!} \right) \frac{[n]_q!}{[n]_q!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q \bar{B}_{k,q}^{(r-1)}(\lambda) B_{n-k,q}^*(x, \lambda) \right) \frac{t^n}{[n]_q!} \end{aligned}$$

olduğu görülür ve buradan

$$\bar{B}_{n,q}^{(r)}(x, \lambda) = \sum_{k=0}^n \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q \bar{B}_{k,q}^{(r-1)}(\lambda) B_{n-k,q}^*(x, \lambda)$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Ayrıca bu eşitlik farklı yolla da gösterilebilir. Teorem 4.11 de

$$q(x) = \bar{B}_{n,q}^{(r)}(x, \lambda) \in P_n$$

alınırsa

$$\bar{B}_{n,q}^{(r)}(x, \lambda) = \sum_{k=0}^n b_{k,q} B_{k,q}^*(x, \lambda) \quad (4.4)$$

için $b_{k,q}$ katsayısı

$$\begin{aligned}
b_{k,q} &= \frac{1}{[k]_q!} \left\langle (\lambda e_q(t) - 1) t^k \middle| \bar{B}_{n,q}^{(r)}(x, \lambda) \right\rangle \\
&= \frac{1}{[k]_q!} \left\langle (\lambda e_q(t) - 1) \middle| \frac{[n]_q!}{[n-k]_q!} \bar{B}_{n-k,q}^{(r)}(x, \lambda) \right\rangle \\
&= \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q \left\langle (\lambda e_q(t) - 1) \middle| \bar{B}_{n-k,q}^{(r)}(x, \lambda) \right\rangle \\
&= \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q \left\{ \lambda \bar{B}_{n-k,q}^{(r)}(1, \lambda) - \bar{B}_{n-k,q}^{(r)}(\lambda) \right\} \tag{4.5}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Daha sonra üreteç fonksiyonu yardımıyla

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \left(\lambda \bar{B}_{n,q}^{(r)}(1, \lambda) - \bar{B}_{n,q}^{(r)}(\lambda) \right) \frac{t^n}{[n]_q!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda \bar{B}_{n,q}^{(r)}(1, \lambda) \frac{t^n}{[n]_q!} - \sum_{n=0}^{\infty} \bar{B}_{n,q}^{(r)}(\lambda) \frac{t^n}{[n]_q!} \tag{4.6} \\
&= \lambda \left(\frac{1}{\lambda e_q(t) - 1} \right)^r e_q(t) - \left(\frac{1}{\lambda e_q(t) - 1} \right)^r \\
&= \left(\frac{1}{\lambda e_q(t) - 1} \right)^r (\lambda e_q(t) - 1) \\
&= \left(\frac{1}{\lambda e_q(t) - 1} \right)^{r-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \bar{B}_{n,q}^{(r-1)}(\lambda) \frac{t^n}{[n]_q!} \tag{4.7}
\end{aligned}$$

yazılır ve (4.6) ile (4.7) eşitliklerinin $\frac{t^n}{[n]_q!}$ katsayı karşılaştırması yapılırsa

$$\lambda \bar{B}_{n,q}^{(r)}(1, \lambda) - \bar{B}_{n,q}^{(r)}(\lambda) = \bar{B}_{n,q}^{(r-1)}(\lambda)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlik (4.5) te yerine yazılarak

$$b_{k,q} = \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q \bar{B}_{n-k,q}^{(r-1)}(\lambda)$$

bulunur ve bu katsayı (4.4) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\bar{B}_{n,q}^{(r)}(x, \lambda) = \sum_{k=0}^n \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_q \bar{B}_{n-k,q}^{(r-1)}(\lambda) B_{k,q}^*(x, \lambda)$$

sonucu elde edilir.

Teorem 4.19: $n, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere

$$B_{n,q}^*(x, \lambda) = \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^r \begin{bmatrix} r \\ l \end{bmatrix}_q \lambda^l (-1)^{r-l} \sum_{i_1+\dots+i_l=m} \begin{bmatrix} m \\ i_1, \dots, i_l \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n \\ m+k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} m+k \\ k \end{bmatrix}_q \\ \times B_{n-m-k,q}^*(x, \lambda) \bar{B}_{k,q}^{(r)}(x, \lambda)$$

eşitliği elde edilir.

İspat:

$$q(x) = \sum_{k=0}^n b_{k,q}^r \bar{B}_{k,q}^{(r)}(x, \lambda) \in P_n$$

olsun. O halde $b_{k,q}^r$ katsayısı

$$\begin{aligned} b_{k,q}^r &= \frac{1}{[k]_q!} \left\langle (\lambda e_q(t) - 1)^r t^k \middle| q(x) \right\rangle \\ &= \frac{1}{[k]_q!} \left\langle \sum_{l=0}^r \begin{bmatrix} r \\ l \end{bmatrix}_q \lambda^l \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{[n]_q!} \right)^l (-1)^{r-l} t^k \middle| q(x) \right\rangle \\ &= \frac{1}{[k]_q!} \sum_{l=0}^r \begin{bmatrix} r \\ l \end{bmatrix}_q \lambda^l (-1)^{r-l} \left\langle \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{[n]_q!} \right)^l t^k \middle| q(x) \right\rangle \\ &= \frac{1}{[k]_q!} \sum_{l=0}^r \begin{bmatrix} r \\ l \end{bmatrix}_q \lambda^l (-1)^{r-l} \left\langle \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i_1+\dots+i_l=m} \begin{bmatrix} m \\ i_1, \dots, i_l \end{bmatrix}_q \frac{1}{[m]_q!} t^{m+k} \middle| q(x) \right\rangle \\ &= \frac{1}{[k]_q!} \sum_{l=0}^r \begin{bmatrix} r \\ l \end{bmatrix}_q \lambda^l (-1)^{r-l} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i_1+\dots+i_l=m} \begin{bmatrix} m \\ i_1, \dots, i_l \end{bmatrix}_q \frac{1}{[m]_q!} \langle 1 | t^{m+k} q(x) \rangle \\ &= \frac{1}{[k]_q!} \sum_{l=0}^r \begin{bmatrix} r \\ l \end{bmatrix}_q \lambda^l (-1)^{r-l} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i_1+\dots+i_l=m} \begin{bmatrix} m \\ i_1, \dots, i_l \end{bmatrix}_q \frac{1}{[m]_q!} \langle 1 | q^{(m+k)}(x) \rangle \\ &= \frac{1}{[k]_q!} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^r \begin{bmatrix} r \\ l \end{bmatrix}_q \lambda^l (-1)^{r-l} \sum_{i_1+\dots+i_l=m} \begin{bmatrix} m \\ i_1, \dots, i_l \end{bmatrix}_q \frac{1}{[m]_q!} q^{(m+k)}(0) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Daha sonra burada $q(x) = B_{n,q}^*(x, \lambda) \in P_n$ alınırsa

$$B_{n,q}^*(x, \lambda) = \sum_{k=0}^n b_{k,q}^r \bar{B}_{k,q}^{(r)}(x, \lambda)$$

ve

$$\begin{aligned} b_{k,q}^r &= \frac{1}{[k]_q!} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^r [l]_q^r \lambda^l (-1)^{r-l} \sum_{i_1+\dots+i_l=m} \left[\begin{matrix} m \\ i_1, \dots, i_l \end{matrix} \right]_q \frac{1}{[m]_q!} \\ &\quad \times [n]_q [n-1]_q \dots [n-m-k+1]_q B_{n-m-k,q}^*(x, \lambda) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^r [l]_q^r \lambda^l (-1)^{r-l} \sum_{i_1+\dots+i_l=m} \left[\begin{matrix} m \\ i_1, \dots, i_l \end{matrix} \right]_q \frac{[n]_q!}{[k]_q! [m]_q! [n-m-k]_q!} B_{n-m-k,q}^*(x, \lambda) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^r [l]_q^r \lambda^l (-1)^{r-l} \sum_{i_1+\dots+i_l=m} \left[\begin{matrix} m \\ i_1, \dots, i_l \end{matrix} \right]_q \left[\begin{matrix} n \\ m+k \end{matrix} \right]_q \left[\begin{matrix} m+k \\ k \end{matrix} \right]_q B_{n-m-k,q}^*(x, \lambda) \end{aligned}$$

bulunur ve $b_{k,q}^r$ katsayısı yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} B_{n,q}^*(x, \lambda) &= \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^r [l]_q^r \lambda^l (-1)^{r-l} \sum_{i_1+\dots+i_l=m} \left[\begin{matrix} m \\ i_1, \dots, i_l \end{matrix} \right]_q \left[\begin{matrix} n \\ m+k \end{matrix} \right]_q \left[\begin{matrix} m+k \\ k \end{matrix} \right]_q \\ &\quad \times B_{n-m-k,q}^*(x, \lambda) \bar{B}_{k,q}^{(r)}(x, \lambda) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

KAYNAKLAR

- [1] Roman, S. (1982). The theory of the umbral calculus I. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **87**, 58-115.
- [2] Roman, S. 2005. *The Umbral Calculus*, Dover Publ. Inc. New York.
- [3] Acikgoz, M., Ates, R., Duran, U., Araci, S. (2018). Applications of q -Umbral Calculus to Modified Apostol Type q -Bernoulli Polynomials. *Journal of Mathematics and Statistics* **14**, 7-15.
- [4] Araci, S., Acikgoz, M., Diagana, T., Srivastava, H.M. (2017). A novel approach for obtaining new identities for the λ extension of q -Euler polynomials arising from the q -umbral calculus, *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, **10**, 1316-1325.
- [5] Kim, D.S., Kim, T. (2014). q -Bernoulli polynomials and q -umbral calculus, *Science China Mathematics* Vol. **57**, 1867-1874.
- [6] Kim, D.S., Kim, T. (2014). Some identities of q -Euler polynomials arising from q -umbral calculus, *Journal of Inequalities and Applications*, Vol **2014**, 12 pages.
- [7] Dere, R. (2016). Some Hermite base polynomials on q -umbral algebra, *Filomat* **30:4**, 961-967.
- [8] Kac, V., Cheung, P. 2002. *Quantum Calculus*, Springer, New York.
- [9] Niven, I. (1969). Formal Power Series. *The American Mathematical Monthly* **76**, 871-889.
- [10] Cheon, G.-S. (2003). A note on the Bernoulli and Euler polynomials, *Applied Mathematics Letters*, **16(3)** 365-368.
- [11] Kupershmidt, B.A. (2005). Reflection symmetries of q -Bernoulli polynomials, *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, Vol. **12**, supplement 1, pp. 412-422.